

Melhores momentos

AULA 3

Conceitos discutidos

- ▶ mais **recursão**: binomial e curvas de Hilbert
- ▶ um pouco de **análise experimental de algoritmos**
- ▶ **análise de algoritmos**:
quando usar ou não usar recursão

AULA 4

Hoje

- ▶ mais **recursão**: algoritmo de Euclides
- ▶ mais **análise (experimental) de algoritmos**
- ▶ argumentos na linha de comando
- ▶ structs

Máximo divisor comum

PF 2.3 S 5.1

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

<http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2012/aulas/mdc/>

Divisibilidade

Suponha que m , n e d são números inteiros.

Dizemos que d **divide** m

se $m = kd$ para algum número inteiro k .

$d \mid m$ é uma abreviatura para “ d divide m ”

Divisibilidade

Suponha que m , n e d são números inteiros.

Dizemos que d **divide** m

se $m = k d$ para algum número inteiro k .

$d \mid m$ é uma abreviatura para “ d divide m ”

Se d divide m ,

então dizemos que m é um **múltiplo** de d .

Se d divide m e $d > 0$,

então dizemos que d é um **divisor** de m .

Divisibilidade

Se d divide m e d divide n ,
então d é um **divisor comum** de m e n .

Exemplos:

os divisores de 30 são: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30

os divisores de 24 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24

os divisores comuns de 30 e 24 são: 1, 2, 3 e 6

Quem são os divisores de 0?

Máximo divisor comum

O **máximo divisor comum** de dois números inteiros m e n , onde pelo menos um é não nulo, é o maior divisor comum de m e n .

O máximo divisor comum de m e n é denotado por $\text{mdc}(m, n)$.

Máximo divisor comum

O **máximo divisor comum** de dois números inteiros m e n , onde pelo menos um é não nulo, é o maior divisor comum de m e n .

O máximo divisor comum de m e n é denotado por $\text{mdc}(m, n)$.

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos m e n , determinar $\text{mdc}(m, n)$.

Exemplos:

máximo divisor comum de 30 e 24 é 6

máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1

máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Solução MAC2166

Recebe números inteiros não-negativos m e n
e devolve $\text{mdc}(m, n)$. Supõe $m, n > 0$.

```
#define min(m,n) ((m) < (n) ? (m) : (n))
```

Solução MAC2166

Recebe números inteiros não-negativos m e n e devolve $\text{mdc}(m, n)$. Supõe $m, n > 0$.

```
#define min(m,n) ((m) < (n) ? (m) : (n))

int mdc(int m, int n) {
    int d = min(m,n);
    while (m % d != 0 || n % d != 0)
        d--;
    return d;
}
```

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

Quantas iterações do `while` faz a função `mdc`?

Em outras palavras,
quantas vezes o comando "`d--`" é executado?

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

Quantas iterações do `while` faz a função `mdc`?

Em outras palavras,
quantas vezes o comando "`d--`" é executado?

A resposta é $\min(m,n)-1$... no **pior caso**.

(Lembre-se que estamos supondo que $m > 0$ e $n > 0$.)

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

São $\min(m,n)-1$ iterações no **pior caso**.

Por exemplo, para a chamada `mdc(317811,514229)`,
a função executará **317811**-1 iterações,
pois `mdc(317811,514229) = 1`,
ou seja, **317811** e **514229** são **relativamente primos**.

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

Neste caso, costuma-se dizer que o **consumo de tempo** do algoritmo, no **pior caso**, é *proporcional a* $\min(m, n)$, ou ainda, que o consumo de tempo do algoritmo é da *ordem de* $\min(m, n)$.

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

Neste caso, costuma-se dizer que o **consumo de tempo** do algoritmo, no **pior caso**, é *proporcional a* $\min(m, n)$, ou ainda, que o consumo de tempo do algoritmo é da *ordem de* $\min(m, n)$.

Isto significa que se o **valor de** $\min(m, n)$ **dobra** então o **tempo gasto** pela função **pode**, no **pior caso dobrar**.

Consumo de tempo

```
int mdc(int m, int n) {  
    int d = min(m,n);  
    while (m % d != 0 || n % d != 0)  
        d--;  
    return d;  
}
```

Neste caso, costuma-se dizer que o **consumo de tempo** do algoritmo, no **pior caso**, é *proporcional a* $\min(m, n)$, ou ainda, que o consumo de tempo do algoritmo é da *ordem de* $\min(m, n)$.

A abreviatura de “**ordem blá**” é $O(\text{blá})$.

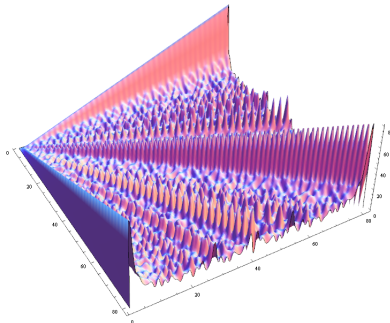
Conclusões

No pior caso, o consumo de tempo da função `mdc` é proporcional a $\min(m, n)$.

O consumo de tempo da função `mdc` é $O(\min(m, n))$.

Se o valor de $\min(m, n)$ dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

Algoritmo de Euclides



Fonte: <http://math.stackexchange.com/>

PF 2 (Exercícios) S 5.1

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/recu.html>

<http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0122-2014/aulas/mdc/>

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o $\text{mdc}(m, n)$
o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\text{mdc}(m, 0) = m;$$

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(n, m \% n), \text{ para } n > 0.$$

Algoritmo de Euclides

O máximo divisor comum pode ser determinado através de um algoritmo de 2300 anos (cerca de 300 A.C.), o **algoritmo de Euclides**.

Para calcular o $\text{mdc}(m, n)$
o algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\text{mdc}(m, 0) = m;$$

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(n, m \% n), \text{ para } n > 0.$$

Assim, por exemplo,

$$\text{mdc}(12, 18) = \text{mdc}(18, 12) = \text{mdc}(12, 6) = \text{mdc}(6, 0) = 6.$$

Correção

A correção da recorrência proposta por Euclides é baseada no seguinte fato.

Se m , n e d são números inteiros,

$m \geq 0$, $n, d > 0$, então

d divide m e $n \iff d$ divide n e $m \% n$.

Euclides recursivo

O algoritmo de Euclides usa a recorrência:

$$\text{mdc}(\textcolor{red}{m}, 0) = \textcolor{red}{m};$$

$$\text{mdc}(\textcolor{red}{m}, \textcolor{blue}{n}) = \text{mdc}(\textcolor{blue}{n}, \textcolor{red}{m} \% \textcolor{blue}{n}), \text{ para } \textcolor{blue}{n} > 0.$$

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

euclidesR(317811,514229)

```
euclidesR(317811,514229)
  euclidesR(514229,317811)
    euclidesR(317811,196418)
      euclidesR(196418,121393)
        euclidesR(121393,75025)
          euclidesR(75025,46368)
            euclidesR(46368,28657)
              euclidesR(28657,17711)
                euclidesR(17711,10946)
                  euclidesR(10946,6765)
                    euclidesR(6765,4181)
                      euclidesR(4181,2584)
                        euclidesR(2584,1597)
                          euclidesR(1597,987)
                            euclidesR(987,610)
                              euclidesR(610,377)
                                euclidesR(377,233)
                                  euclidesR(233,144)
                                    euclidesR(144,89)
                                      euclidesR(89,55)
                                        euclidesR(55,34)
                                          euclidesR(34,21)
                                            euclidesR(21,13)
                                              euclidesR(13,8)
                                                euclidesR(8,5)
                                                  euclidesR(5,3)
                                                    euclidesR(3,2)
                                                      euclidesR(2,1)
                                                        euclidesR(1,0)

mdc(317811,514229) = 1.
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 317811 514229  
mdc(317811,514229)=1  
real    0m0.004s  
user    0m0.002s  
sys     0m0.001s
```

```
meu_prompt>time ./euclidesR 317811 514229  
mdc(317811,514229)=1  
real    0m0.003s  
user    0m0.001s  
sys     0m0.001s
```

Qual é mais eficiente?

```
meu_prompt>time ./mdc 2147483647 2147483646  
mdc(2147483647,2147483646)=1  
real    0m5.487s  
user    0m5.481s  
sys     0m0.003s
```

```
meu_prompt>time ./euclidesR 2147483647 2147483646  
mdc(2147483647,2147483646)=1  
real    0m0.003s  
user    0m0.001s  
sys     0m0.001s
```

Consumo de tempo

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

O consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Consumo de tempo

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

O consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que `euclidesR` faz k chamadas recursivas e que, no início da 1a. chamada, tem-se $0 < n \leq m$.

Consumo de tempo

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

O consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que `euclidesR` faz k chamadas recursivas e que, no início da 1a. chamada, tem-se $0 < n \leq m$.

Sejam

$(m, n) = (m_0, n_0), (m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k) = (\text{mdc}(m, n), 0),$

os valores dos parâmetros no início de cada chamada.

Número de chamadas recursivas

Por exemplo, para $m = 514229$ e $n = 317811$, tem-se

$$(m_0, n_0) = (514229, 317811),$$

$$(m_1, n_1) = (317811, 196418),$$

$$(m_2, n_2) = (196418, 121393),$$

$$\dots = \dots$$

$$(m_{27}, n_{27}) = (1, 0).$$

Número de chamadas recursivas

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

Suponha que euclidesR faz k chamadas recursivas.

Estimaremos o valor de k em função de $n = \min(m, n)$.

Note que

$m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i=0, 1, \dots, k-1$.

Número de chamadas recursivas

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

Suponha que `euclidesR` faz k chamadas recursivas.
Estimaremos o valor de k em função de $n = \min(m, n)$.

Note que

$m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i=0, 1, \dots, k-1$.

E que, para inteiros a e b , com $0 < b \leq a$, vale que

$$a \% b < \frac{a}{2} \quad (\text{verifique!}).$$

Número de chamadas recursivas

Como $m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i=0, 1, \dots, k-1$
e $a \% b < \frac{a}{2}$ para inteiros a e b com $0 < b \leq a$,
tem-se que

$$\begin{aligned}n_2 &= m_1 \% n_1 = n_0 \% n_1 < n_0/2 = n/2 = n/2^1 \\n_4 &= m_3 \% n_3 = n_2 \% n_3 < n_2/2 < n/4 = n/2^2 \\n_6 &= m_5 \% n_5 = n_4 \% n_5 < n_4/2 < n/8 = n/2^3 \\n_8 &= m_7 \% n_7 = n_6 \% n_7 < n_6/2 < n/16 = n/2^4 \\n_{10} &= m_9 \% n_9 = n_8 \% n_9 < n_8/2 < n/32 = n/2^5 \\&\dots \\&\dots\end{aligned}$$

Número de chamadas recursivas

Como $m_{i+1} = n_i$ e $n_{i+1} = m_i \% n_i$ para $i=0, 1, \dots, k-1$ e $a \% b < \frac{a}{2}$ para inteiros a e b com $0 < b \leq a$, tem-se que

$$\begin{aligned}n_2 &= m_1 \% n_1 = n_0 \% n_1 < n_0/2 = n/2 = n/2^1 \\n_4 &= m_3 \% n_3 = n_2 \% n_3 < n_2/2 < n/4 = n/2^2 \\n_6 &= m_5 \% n_5 = n_4 \% n_5 < n_4/2 < n/8 = n/2^3 \\n_8 &= m_7 \% n_7 = n_6 \% n_7 < n_6/2 < n/16 = n/2^4 \\n_{10} &= m_9 \% n_9 = n_8 \% n_9 < n_8/2 < n/32 = n/2^5 \\&\dots \\&\dots\end{aligned}$$

Depois de cada 2 chamadas recursivas, o valor do segundo parâmetro é reduzido a menos da sua metade.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$.

Da primeira desigualdade temos que $t \leq \lg n$,
onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$.

Da primeira desigualdade temos que $t \leq \lg n$,
onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.

Logo, da desigualdade estrita,
o número k de chamadas recursivas é tal que

$$k \leq 2(t + 1) - 1 = 2t + 1 \leq 2 \lg n + 1.$$

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$.

Da primeira desigualdade temos que $t \leq \lg n$, onde $\lg n$ denota o logaritmo de n na base 2.

Logo, da desigualdade estrita, o número k de chamadas recursivas é tal que

$$k \leq 2(t + 1) - 1 = 2t + 1 \leq 2 \lg n + 1.$$

Para o exemplo onde $m=514229$ e $n=317811$, temos que

$$2 \lg n + 1 = 2 \lg(317811) + 1 < 2 \times 18,3 + 1 < 37,56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por `euclidesR(514229,317811)` foram 27.

Consumo de tempo

Resumindo, a quantidade de tempo consumida pelo algoritmo de Euclides é, no pior caso, **proporcional** a $\lg n$.

Este desempenho é **significativamente melhor** que o desempenho do algoritmo *café com leite*, já que a função $f(n) = \lg n$ cresce **muito mais lentamente** que a função $g(n) = n$.

Consumo de tempo

n	$(\text{int}) \lg n$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O número de chamadas recursivas da função `euclidesR` é $\leq 2(\lg n) - 1$.

No pior caso, o consumo de tempo da função `euclidesR` é proporcional a $\lg n$.

Conclusões

Suponha que $m > n$.

O consumo de tempo da função `euclidesR` é $O(\lg n)$.

Para que o consumo de tempo da função `euclidesR` dobre, é necessário que o valor de n seja elevado ao quadrado.

Euclides e Fibonacci

Demonstre por indução em k que:

Se $m > n \geq 0$ e se a chamada $\text{euclidesR}(m,n)$ faz $k \geq 0$ chamadas recursivas, então

$$m \geq \text{fibonacci}(k+1) \quad \text{e} \quad n \geq \text{fibonacci}(k).$$

Recursão de cauda

```
int euclidesR(int m, int n) {  
    if (n == 0) return m;  
    return euclidesR(n, m % n);  
}
```

Euclides iterativo

```
/* Pre-condicao: a funcao supoe  $n > 0$  */  
int euclidesI(int m, int n) {  
    int r;  
    do {  
        r = m % n;  
        m = n;  
        n = r;  
    } while (r != 0);  
    return m;  
}
```

Argumentos na linha de comando

Argumentos na linha de comando

Quando `main` é chamada, ela recebe dois argumentos:

- ▶ `argc` ('c' de *count*) é o número de argumentos que o programa recebeu na linha de comando; e
- ▶ `argv[]` é um vetor de *strings* contendo cada um dos argumentos.

Argumentos na linha de comando

Quando `main` é chamada, ela recebe dois argumentos:

- ▶ `argc` ('c' de *count*) é o número de argumentos que o programa recebeu na linha de comando; e
- ▶ `argv[]` é um vetor de *strings* contendo cada um dos argumentos.

Por convenção, `argv[0]` é o nome do programa que foi chamado. Assim, `argc` é sempre pelo menos 1.

Argumentos na linha de comando

Por exemplo, na chamada

```
meu_prompt> echo Hello World!
```

- ▶ `argc` = 3
- ▶ `argv[0]` = "echo"
- ▶ `argv[1]` = "Hello"
- ▶ `argv[2]` = "World!"

Argumentos na linha de comando

Na chamada

```
meu_prompt> gcc echo.c -o echo
```

- ▶ `argc` = 4
- ▶ `argv[0]` = "gcc"
- ▶ `argv[1]` = "echo.c"
- ▶ `argv[2]` = "-o"
- ▶ `argv[3]` = "echo"

echo.c

```
#include <stdio.h>
int main(int argc, char *argv[]) {
    int i;
    for (i = 1; i < argc; i++)
        printf("%s ", argv[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

Registros e Structs

PF Apêndice E

<http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos/aulas/stru.html>

Registros e Structs



Fonte: <http://colorblindprogramming.com/geek-joke>

Registros e structs

Um **registro** (= *record*) é uma coleção de diversas variáveis, possivelmente de tipos diferentes.

Registros e structs

Um **registro** (= *record*) é uma coleção de diversas variáveis, possivelmente de tipos diferentes.

Na linguagem C, registros são conhecidos como **structs**.

```
struct {  
    int dia;  
    int mes;  
    int ano;  
} aniversario;
```

aniversario



Nomes de estruturas

É uma boa idéia dar um **nome**,
digamos **data**, à estrutura.

Nomes de estruturas

É uma boa idéia dar um **nome**,
digamos **data**, à estrutura.

Nosso exemplo ficaria melhor assim:

```
struct data {  
    int dia;  
    int mes;  
    int ano;  
};
```

```
struct data aniversario;
```

aniversario



Estruturas e tipos

Uma declaração de `struct` define um tipo.

```
struct data aniversario;  
struct data casamento;
```

aniversario



casamento

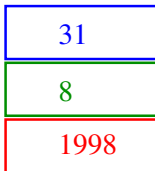


Campos de uma estrutura

É fácil atribuímos valores aos campos de uma estrutura:

```
aniversario.dia = 31;  
aniversario.mes = 8;  
aniversario.ano = 1998;
```

aniversario



Estruturas e typedef

Para não repetir “`struct data`” o tempo todo, podemos definir uma abreviatura via `typedef`:

```
struct data {  
    int dia;  
    int mes;  
    int ano;  
};  
  
typedef struct data Data;  
  
Data aniversario;  
Data casamento;
```

Estruturas e typedef

Um modo ainda mais compacto de fazer isso:

```
typedef struct {  
    int dia, mes, ano;  
} Data;
```

```
Data aniversario;
```

```
Data casamento;
```

Aula que vem

Endereços e ponteiros

Alocação dinâmica de memória