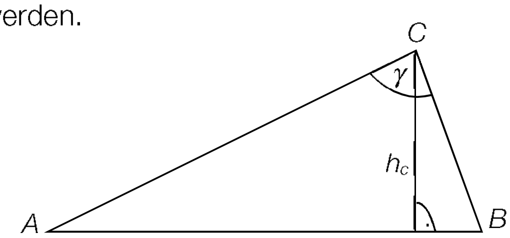
Dachfenster (1)

Aufgabennummer: B-C3_15

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

b) Das oben angegebene Dreieck wird in ein Koordinatensystem gezeichnet, die Koordinaten der 3 Eckpunkte sind bekannt.

– Beschreiben Sie, welche Überlegung bei der folgenden Vorgangsweise für die Berechnung der Dreiecksfläche nicht korrekt ist:

$$c = |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$h_c = \left|\overrightarrow{MC}\right|$$

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

– Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe h_c ermittelt.
– Stellen Sie die dazu nötigen Geraden in allgemeiner Form auf.

c) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In folgender Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben:

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit bezogen auf die Fensterproduktion durch den nachstehenden Rechenausdruck ermittelt wird ($\bar{x}$ und s der vorhergehenden Rechnung sollen als Schätzung für μ und σ verwendet werden).

$$P = 1 - [0{,}932 - 0{,}082] = 0{,}150\ldots \approx 15\ \%$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right)$ $\qquad\qquad$ $\alpha = 25{,}601\ldots \approx 25{,}6°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$ $\qquad\qquad$ $\beta = 73{,}398\ldots \approx 73{,}4°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ $\qquad\qquad$ $A = 0{,}536\ldots \approx 0{,}54\ \text{m}^2$

Die Fläche des Dachfensters beträgt ca. 0,54 m².

Auch andere Rechenwege sind möglich.

b) Die Höhe h_c halbiert die Seite c im Allgemeinen nicht. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MC}$ entspricht somit nicht der Länge der Höhe.

Der Fußpunkt F der Höhe h_c ist der Schnittpunkt der Geraden g und h:

$g\colon X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$h \perp g,\ h\colon X = C + s \cdot \overrightarrow{n_{AB}}$

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls möglich.

c) Arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s werden mittels Technologieeinsatz (hier: Excel) berechnet. Zur Berechnung werden die Klassenmitten verwendet.

$\bar{x} \approx 2{,}105\ \text{m}^2$

$s = 0{,}05561793\ldots \approx 0{,}056$

Mittels Technologieeinsatz oder einer Tabelle ermittelt man aus den Wahrscheinlichkeiten $P_1 = 0{,}932$ und $P_2 = 0{,}082$: $x_1 \approx 2{,}188$ und $x_2 \approx 2{,}028$.

Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine zufällig ausgewählte Fensterscheibe eine Fläche von weniger als 2,028 m² oder mehr als 2,188 m² hat. Diese beträgt 15 %.

Spiegelung an einer Geraden

Aufgabennummer: B-C4_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es soll ein Applet zur Spiegelung eines Punktes an einer Geraden für eine Übungswebsite programmiert werden.

a) Das einfachste Grundproblem beim Spiegeln von Objekten ist die Spiegelung eines Punktes an einem anderen Punkt.
   – Erklären Sie anhand einer Skizze ohne zu rechnen die Vorgangsweise, wie man die Koordinaten des gespiegelten Punktes A' erhält, wenn ein beliebiger gegebener Punkt A an einem ebenfalls gegebenen Punkt S gespiegelt wird.
   – Stellen Sie eine allgemeine Formel für die Berechnung der Koordinaten von A' auf.

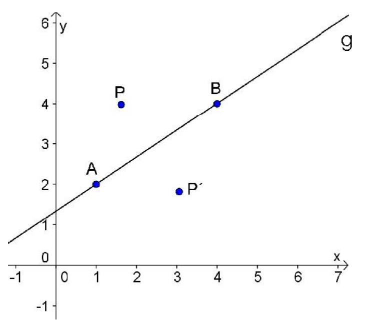
b) Ein Punkt $A = (x|y)$ soll an der Gerade $y = -x + 2$ gespiegelt werden.
   – Stellen Sie diejenige Matrix auf, mit der man die Koordinaten des gespiegelten Punktes (= Bildpunktes) berechnen kann. (Verwenden Sie homogene Koordinaten.)

c) Die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$ kann unter Verwendung von homogenen Koordinaten durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   – Berechnen Sie mithilfe der gegebenen Matrix die Bildpunkte zu den Punkten $A = (2{,}6|3{,}6)$; $B = (-1{,}6|1{,}9)$; $C = (-5|4{,}8)$; $D = (-4{,}6|0{,}3)$; $E = (-8{,}4|-2)$; $F = (-4|-3)$.
   – Stellen Sie alle Punkte und Bildpunkte in einem Koordinatensystem grafisch dar.
   – Verbinden Sie die Punkte in der Reihenfolge $ABCDEFE_1D_1C_1B_1A_1$.
   – Beschreiben Sie die entstehende geometrische Figur in Worten.

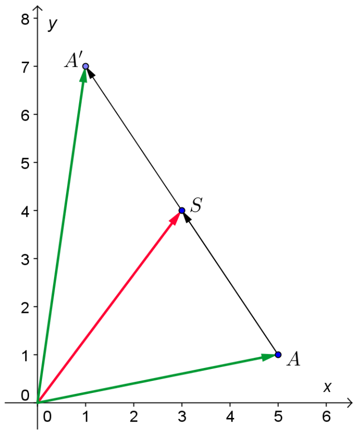
d) Ein Punkt $P = (2|4)$ wurde an der durch $A = (1|2)$ und $B = (4|4)$ verlaufenden Geraden g gespiegelt. Dabei ist der Punkt $P' = (3|2)$ entstanden.
   – Geben Sie eine Formel an, mit der der Winkel $\angle PAP'$ mithilfe der Vektorrechnung berechnet werden kann.
   – Ermitteln Sie den Winkel $\angle PAP'$.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Um die Arbeitsschritte erklären zu können, zeichnet man am besten eine Handskizze (nicht unbedingt notwendig).



Arbeitsschritte:
1. Ortsvektor des Spiegelpunktes S und des Punktes A ermitteln.
2. Der Ortsvektor für A' erlaubt die Bestimmung der Koordinaten des gespiegelten Punktes: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AS}$.

b) Vorgangsweise:
1. Schritt = verschieben des Koordinatensystems, so dass die Spiegelungsachse durch den Koordinatenursprung geht
2. Schritt = Drehung um den Winkel $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, so dass die Spiegelungsachse mit der x-Achse zusammenfällt
3. Schritt = Spiegelung an der x-Achse
4. Schritt = zurückdrehen, so dass die Spiegelungsachse den ursprünglichen Winkel hat
5. Schritt = zurückverschieben, so dass die Spiegelungsachse an der ursprünglichen Stelle liegt

Zugehörige Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der obigen Matrizen liefert die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

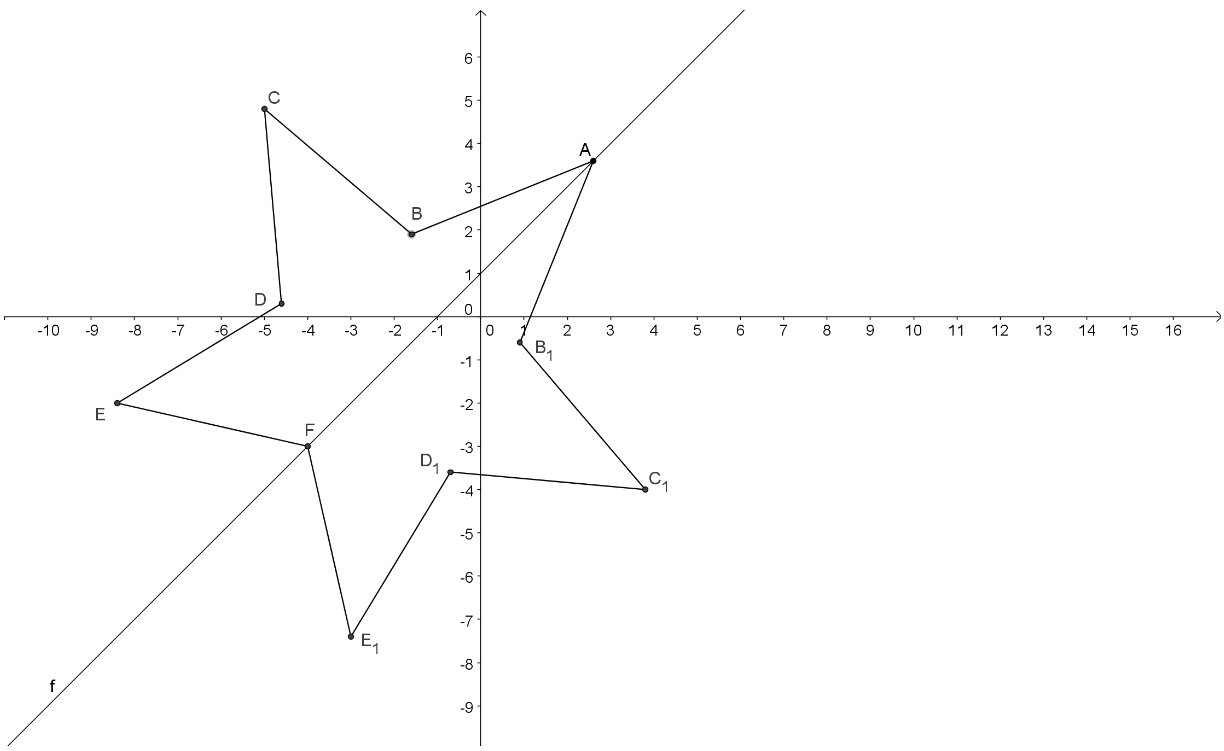
c) Man muss die Matrix mit den gegebenen Punkten multiplizieren. Dazu muss man die Punkte mithilfe von homogenen Koordinaten darstellen (letzte Koordinate ist immer eine 1).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 1{,}9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ -0{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_1 = (0{,}9 \mid -0{,}6)$$

Ebenso verfährt man mit allen anderen Punkten:

$A_1 = (2{,}6|3{,}6)$
$C_1 = (3{,}8|-4)$
$D_1 = (-0{,}7|-3{,}6)$
$E_1 = (-3|-7{,}4)$
$F_1 = (-4|-3)$

Zeichnet man diese nun in ein Koordinatensystem ein und verbindet die verlangten Punkte, so entsteht ein Stern:



d) Zur Berechnung des Winkels wird die Formel $\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AP'}|}$ verwendet.

$\overrightarrow{AP} = \binom{1}{2}, \overrightarrow{AP'} = \binom{2{,}23}{0{,}15} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\binom{1}{2} \cdot \binom{2{,}23}{0{,}15}}{\sqrt{5} \cdot 2{,}236} \Rightarrow \varphi \approx 59{,}49°$

RGB-Farbmodell

Aufgabennummer: B-C4_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Darstellung von Farben im Fernsehen, bei Monitoren usw. werden Transformationen in die einzelnen Farbräume durchgeführt. Ein solcherart verwendeter Farbraum ist z. B. der *RGB*-Farbraum, wobei *R* für den Rotanteil, *G* für den Grünanteil und *B* für den Blauanteil einer dargestellten Farbe steht. Es handelt sich hierbei um einen additiven Farbraum, der die einzelnen Farben durch das additive Mischen der 3 Grundfarben Rot, Grün und Blau nachbildet. Jede Farbe wird als Vektor durch ein Zahlentripel (*R*, *G*, *B*) dargestellt, wobei die klassische Darstellung als Wertebereich Werte zwischen 0 und 1 zulässt.

a) Die Transformationen von einem Farbraum in einen anderen lassen sich mithilfe von Matrizenmultiplikationen durchführen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– Erklären Sie anhand der beiden angeführten Matrizen *A* und *B*, wie Matrizen multipliziert werden.
– Geben Sie an, welche Voraussetzungen bei der Multiplikation von 2 Matrizen erfüllt sein müssen.
– Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Kommutativgesetz für die Multiplikation von Matrizen nicht gilt.

b) Die Umrechnung vom *RGB*-Farbmodell in das standardisierte *XYZ*-Farbmodell erfolgt mittels der gegebenen Transformation:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4125 & 0{,}3576 & 0{,}1804 \\ 0{,}2127 & 0{,}7152 & 0{,}0722 \\ 0{,}0193 & 0{,}1192 & 0{,}9503 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

– Geben Sie die Matrix für die Transformation vom *XYZ*-Farbmodell in das *RGB*-Farbmodell an.

c) Farbenblindheit ist ein geschlechtsspezifisches Merkmal. Studien haben gezeigt, dass 8 % der Männer in Europa farbenblind sind und nicht zwischen den Farben Rot und Grün unterscheiden können.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schulklasse mit 28 Schülern mindestens 1 Schüler farbenblind ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z \\ g \cdot x + h \cdot y + k \cdot z \end{pmatrix}$

Matrizen können nur miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der 1. Matrix mit der Zeilenanzahl der 2. Matrix übereinstimmt.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 27 \\ 26 & 33 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & 32 \\ 25 & 19 \end{pmatrix}$

b) Eine Farbe im *XYZ*-Modell kann mithilfe der inversen Matrix zurück ins *RGB*-Farbmodell gerechnet werden.

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Berechnung von A^{-1} mittels Technologieeinsatz: $\begin{pmatrix} 3{,}2401 & -1{,}5370 & -0{,}4983 \\ -0{,}9692 & 1{,}8759 & 0{,}0415 \\ 0{,}0558 & -0{,}2041 & 1{,}0572 \end{pmatrix}$

c) Die Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der Binomialverteilung berechnet werden.

mindestens 1 Farbenblinder: $P(x \geq 1)$

$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0)$

$P(x = 0) = \binom{28}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{28} = 0{,}09684\ldots$

$1 - 0{,}09684\ldots = 0{,}90315\ldots \approx 90{,}32\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 90,32 % sitzt 1 Schüler mit einer Rot-Grün-Sehschwäche in der Klasse.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

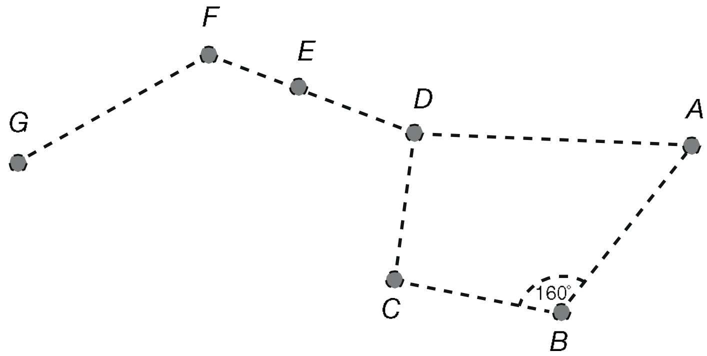
Navigation mit Sternbildern

Aufgabennummer: B-C4_04

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

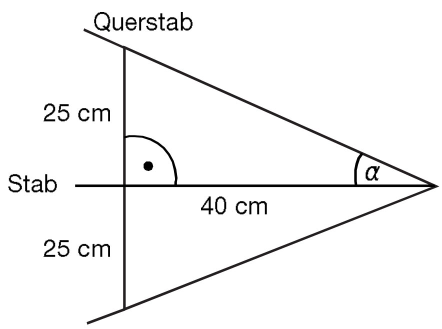
In der Geschichte der Seefahrt wurden schon sehr früh Sterne und Sternbilder als Orientierungspunkte verwendet.

a) Ein auf der nördlichen Hemisphäre gut zu sehendes Sternbild ist der Große Wagen. In einer historischen Sternenkarte sind die Hauptsterne *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* und *G* eingezeichnet. Die Sterne liegen annähernd in einer Ebene.



– Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, um den Flächeninhalt des von den 4 Sternen *A*, *B*, *C* und *D* in der Sternenkarte aufgespannten Vierecks zu berechnen.

b) Lange bevor es die heutigen Navigationssysteme gab, wurde der Jakobsstab zur Höhen- und Entfernungsmessung eingesetzt. Sehr oft wurde der Höhenwinkel der Sonne oder eines Fixsterns über dem Meeresspiegel ermittelt. Der Jakobsstab wurde in Richtung des Gestirns und des Meeresspiegels ausgerichtet und anschließend wurde der Querstab so verschoben, dass sein oberes Ende mit dem Stern und sein unteres mit dem Meeresspiegel übereinstimmt. Auf einer Skala wurde dann der Winkel abgelesen.



– Ermitteln Sie den Höhenwinkel 2α eines Sterns über dem Horizont mithilfe der obigen Skizze. Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.

c) Für Linsenfernrohre gilt folgende Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

f … Brennweite in Zentimetern
b … Bildweite in Zentimetern
g … Gegenstandsweite in Zentimetern

– Ermitteln Sie eine Formel für die Bildweite b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g und der Brennweite f.
– Erklären Sie, welche Bildweite sich in den folgenden Fällen ergibt:

i) $g \to$ „∞“ Die Gegenstandsweite ist unendlich groß.
ii) $g = f$ Die Gegenstandsweite ist gleich der Brennweite.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zuerst berechnet man mit dem Cosinussatz die Länge der Strecke $\overline{AC} = e$.
$e^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(160°)$
Anschließend wird der Winkel $\delta = \angle ADC$ mithilfe des Cosinussatzes berechnet.
$e^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \cos(\delta)$
$\delta = \arccos\left(\frac{e^2 - \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2}{-2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC}}\right)$
Zweimaliges Anwenden der Flächenformel:
$A_{\Delta 1} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CB} \cdot \sin(160°)}{2}$ und $A_{\Delta 2} = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{AD} \cdot \sin(\delta)}{2}$
Am Ende werden die beiden Teilflächen $A_{\Delta 1}$ und $A_{\Delta 2}$ noch addiert.

Auch andere Formeln oder Rechenwege zur Flächenberechnung sind zulässig.

b) $\tan(\alpha) = \frac{25}{40} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{25}{40}\right) \rightarrow \alpha = 32{,}005\ldots°$
Der Höhenwinkel 2α beträgt somit $\approx 64{,}01°$.

c) Umformen der Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ auf b:
$\frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$
$\frac{1}{b} = \frac{g - f}{g \cdot f}$
$b = \frac{f \cdot g}{g - f}$

i) $\lim\limits_{g \to \infty}(b) = \lim\limits_{g \to \infty}\left(\frac{f \cdot g}{g - f}\right) = \lim\limits_{g \to \infty}\left(\frac{f}{1 - \frac{f}{g}}\right) = f$

Vergrößert man g ins „Unendliche“, nähert sich die Bildweite b der Brennweite f.

ii) Ist $g = f$, erhält man: $b = \frac{f^2}{f - f} = \frac{f^2}{0} =$ „∞“.
Die Funktion b weist an dieser Stelle eine Definitionslücke (Polstelle) auf. Für $g = f$ kann kein scharfes Bild erzeugt werden.

Donauüberquerung

Aufgabennummer: B-C9_04

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_s von ca. 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.

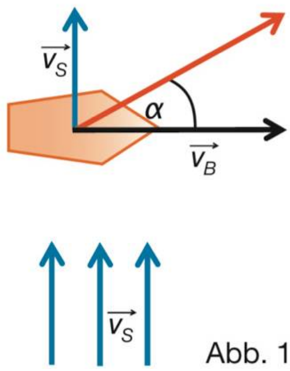


Abb. 1

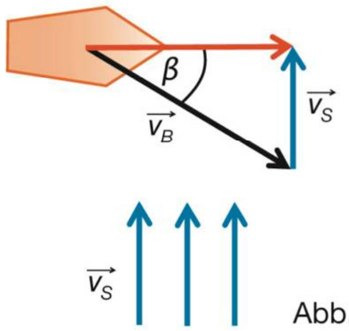


Abb. 2

$\vec{v_S}$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v_B}$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Abb. 1: Das Boot fährt normal zur Fließrichtung des Wassers. Dabei wird es durch die Strömung um den Winkel α abgetrieben.

Abb. 2: Das Boot steuert mit einem Winkel β gegen die Flussströmung, sodass es auf kürzestem Wege zum gegenüberliegenden Ufer gelangt.

b) Geschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{v_B} + \vec{v_S}$

pythagoräischer Lehrsatz: $v = \sqrt{v_B{}^2 - v_S{}^2}$

$\sqrt{3^2 - 1{,}6^2} = 2{,}5377 \approx 2{,}54$

$v \approx 2{,}54$ m/s

Fahrzeit: $t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{2{,}54} = 78{,}74$

$t = 78{,}74$ s $\approx 1{,}31$ min

Genau um jenen Winkel, um den das Boot abgetrieben wird, muss gegengesteuert werden:

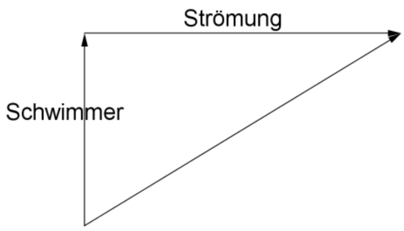
$\sin \beta = \frac{v_S}{v_B}$

$\frac{1{,}6}{3} = 0{,}5333\ldots$

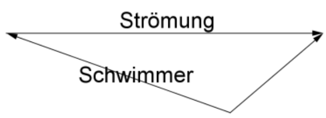
$\beta \approx 32{,}2°$

Der Steuermann muss rund 32,2° gegen die Strömung steuern, um genau gegenüber anzukommen.

c) Vektoren in geeignetem Größenverhältnis darstellen



Wenn der Schwimmer normal zur Strömung schwimmt, dann wird er von der Strömung abgetrieben.



Wenn er mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s schräg gegen die Strömung schwimmt, egal in welchem Winkel, so wird er wegen der größeren Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls abgetrieben.

Er hat keine Chance, normal zur Flussrichtung von Rossatz nach Dürnstein zu gelangen.

Radfahren

Aufgabennummer: B-C9_12		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Fährt man mit dem Fahrrad bei Windstille auf ebener Strecke mit konstanter Geschwindigkeit, so muss man den Rollwiderstand der Reifen und den Luftwiderstand überwinden.

v ... gefahrene Geschwindigkeit in km/h
$P_L(v)$ ... Leistung in Watt (W) zum Überwinden des Luftwiderstands
$P_R(v)$ ... Leistung in W zum Überwinden des Rollwiderstands

- Interpretieren Sie die Funktionsgraphen in Abb. 1 in Bezug auf den Funktionstyp.
- Ermitteln Sie grafisch die Gesamtleistung, die bei einer gefahrenen Geschwindigkeit von 30 km/h erforderlich ist, um Roll- und Luftwiderstand zu überwinden.
- Stellen Sie eine Funktion für die Leistung zur Überwindung des Rollwiderstands auf.

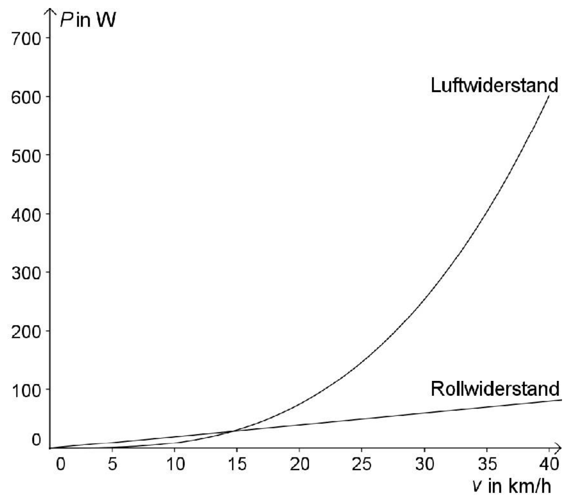


Abb. 1

b) Sobald es spürbar bergauf geht, muss der Fahrer in erster Linie die Hangabtriebskraft $\vec{F_H}$ überwinden.
Die Grafik (Abb. 2) zeigt die Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F_G}$ in eine Normalkomponente $\vec{F_N}$ und die Hangabtriebskraft $\vec{F_H}$ (Roll- und Luftwiderstand werden nicht berücksichtigt).

- Berechnen Sie den Steigungswinkel α für eine Steigung von 15 %.
- Berechnen Sie für diese Steigung die Hangabtriebskraft $\vec{F_H}$ in Newton (N), wenn Fahrer und Fahrrad zusammen eine Gewichtskraft von 932 N haben.

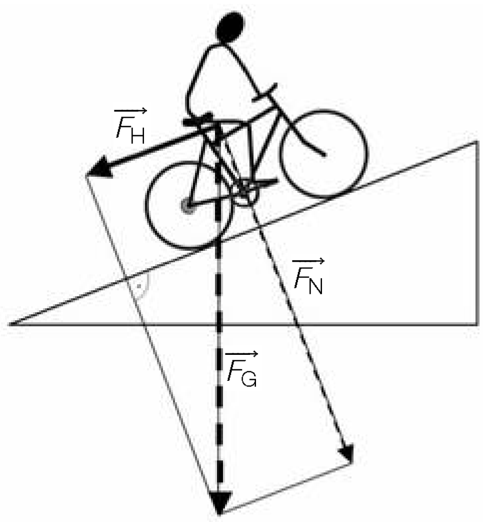
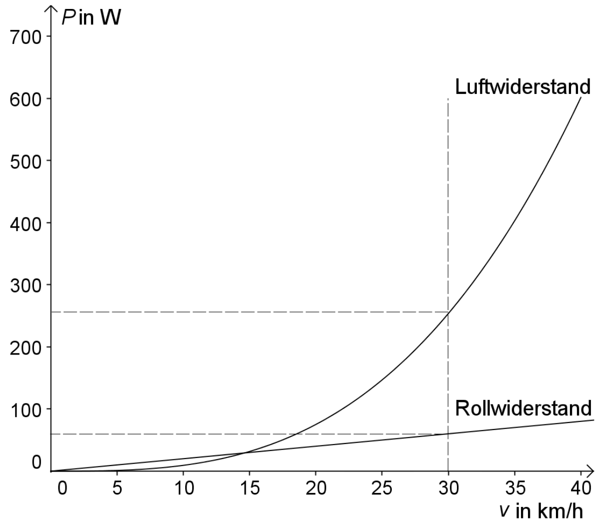


Abb. 2

Möglicher Lösungsweg

a) Der Funktionsgraph des Rollwiderstands stellt eine (homogene) lineare Funktion in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v mit positiver Steigung dar.
Der Funktionsgraph des Luftwiderstands stellt eine Potenzfunktion (könnte auch eine quadratische Funktion oder Exponentialfunktion sein) mit positiver Steigung dar.

Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h:
$P_R(v) \approx 60$ W
$P_L(v) \approx 260$ W
Gesamtwiderstand $P(v) \approx 320$ W



Funktion P_R:
homogene lineare Funktion:
$P_R(v) = k \cdot v$
dem Graphen 2 Punkte entnehmen,
z. B. $(0|0)$ und $(30|60)$
$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60}{30} = 2$
$P_R(v) = 2v$

Angemessene Toleranz beim Ablesen der Werte wird vorausgesetzt.

b) Steigungswinkel berechnen: $k = \tan \alpha$
Steigung von 15 % $\rightarrow k = 0{,}15$
$\alpha = 8{,}530\ldots$
$\alpha \approx 8{,}53°$

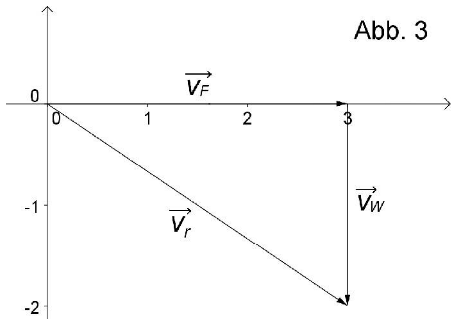
$\sin(8{,}53) = \frac{\overrightarrow{F_H}}{\overrightarrow{F_G}}$
$\overrightarrow{F_H} = 932 \cdot \sin(8{,}53\ldots) = 138{,}253\ldots$
Die Hangabtriebskraft $\overrightarrow{F_H}$ beträgt ca. 138 N.

Auch eine Berechnung mit Proportionen (ähnliche Dreiecke) wäre möglich.

c) $\overrightarrow{v_F} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \end{pmatrix}$
$v_r = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36{,}055\ldots$
$v_r \approx 36$ km/h
Die resultierende Geschwindigkeit ist ca. 36 km/h.

$\tan \varphi = \frac{|\overrightarrow{v_W}|}{|\overrightarrow{v_F}|} = \frac{20}{30}$
$\varphi = 33{,}690\ldots$
$\varphi \approx 34°$
Die resultierende Geschwindigkeit weicht von der Fahrtrichtung ca. 34° ab.

c) Meistens ist es nicht windstill.
Die Vektorgrafik (Abb. 3) zeigt das Zusammenwirken von Windgeschwindigkeit und Fahrtgeschwindigkeit. (Eine Einheit entspricht einer Geschwindigkeit von 10 km/h.)



$\vec{v}_F$ … Fahrtgeschwindigkeit
$\vec{v}_W$ … Windgeschwindigkeit
$\vec{v}_r$ … resultierende Geschwindigkeit

– Lesen Sie die Koordinaten der dargestellten Geschwindigkeiten $\vec{v}_F$ und $\vec{v}_W$ ab.
– Berechnen Sie mit diesen Vektoren die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v}_r$ und ihren Betrag v_r in km/h.
– Berechnen Sie den Winkel zwischen Fahrtrichtung und resultierender Geschwindigkeit in Grad (°).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Fahrradrennen

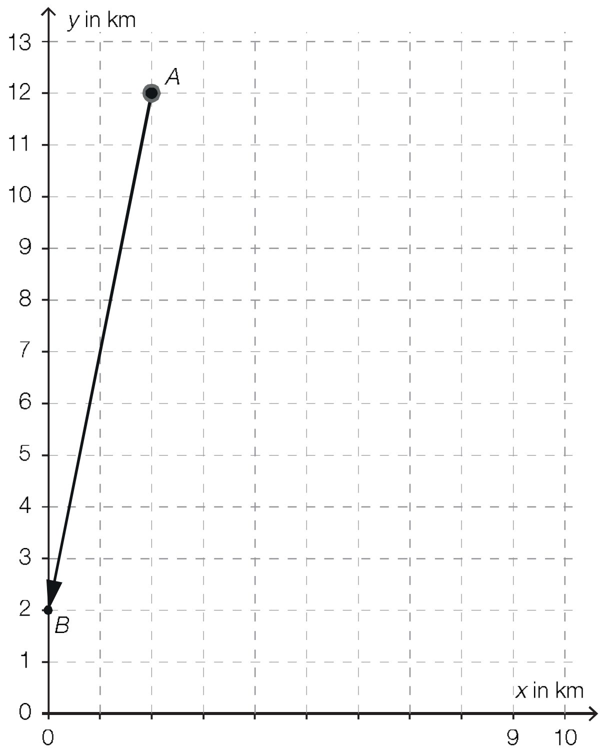
Aufgabennummer: B-C9_26

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es findet ein Fahrradrennen statt.

a) Die Rennstrecke führt geradlinig von A über B nach C. C hat die Koordinaten $(8\,|\,y_0)$. Die Richtung von B nach C ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ gegeben.

– Berechnen Sie die Länge des Weges von A nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt C in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.



b) Auf der Rennstrecke befindet sich ein gerades Straßenstück mit 10 % Gefälle.

– Erklären Sie mithilfe des Steigungsbegriffes, was „10 % Gefälle" bedeutet.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Straßenstücks.

c) Der zurückgelegte Weg einer Rennfahrerin wird bei einem Bremsmanöver gemessen.

t in s	1	3	5
s in m	10,17	23,73	28,25

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion s mit
$s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie mithilfe der gegebenen Messwerte ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion s die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [2; 4].
– Erklären Sie, welche Größe mit der 1. Ableitung der Funktion s zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden kann.

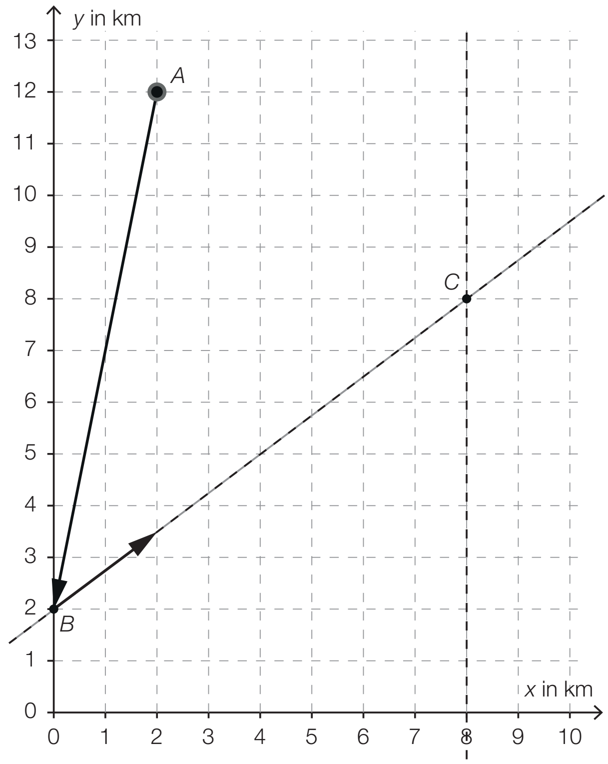
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}20$

Die Länge der Strecke vom Punkt *A* zum Punkt *B* beträgt 10,2 km.

Man berechnet den Vektor $\overrightarrow{CA}$ (Länge und Richtung der geradlinigen Verbindung von *C* nach *A*).
Eine grafische Erklärung im Koordinatensystem ist ebenfalls zulässig.



b) Die Steigung gibt das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Distanz an. Ein Gefälle von 10 % bedeutet, dass pro 100 m in horizontaler Richtung die Straße um 10 Höhenmeter fällt.

arctan(0,1) ≈ 5,71
Der Neigungswinkel der Straße beträgt ca. 5,71°.

c) Das Einsetzen der Messwerte in die Funktion liefert die folgenden 3 Gleichungen:

I: $10{,}17 = a + b + c$
II: $23{,}73 = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c$
III: $28{,}25 = a \cdot 25 + b \cdot 5 + c$

Durch Lösen mit Technologieeinsatz erhält man die folgenden Koeffizienten:
$a = -1{,}13$ $b = 11{,}3$ $c = 0$

$s(t) = -1{,}13 \cdot t^2 + 11{,}3 \cdot t$

mittlere Geschwindigkeit in m/s: $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{2} = 4{,}52$

Die 1. Ableitung an der Stelle $t = 3$ gibt die Momentangeschwindigkeit der Rennfahrerin zu diesem Zeitpunkt an.