Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

Angewandte Mathematik

Korrekturheft

Probeklausur 2014

Teil A / Teil B – Cluster 8

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Aufgabe 1

Impfstoff

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Möglichkeit: $K_1(x) = 25x + 10\,000\,000$
   2. Möglichkeit: $K_2(x) = 50x$

b) Ansatz: $120x = 250x - 750\,000$
   $x = 5\,769{,}23$
   Ab 5 770 verkauften Packungen ist die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser.

   Lösungen wie „5 769,23" oder „5 769" sind als falsch zu werten.

c) Bei ca. 165 und ca. 280 verkauften Packungen beträgt der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000.

   Toleranzintervall: [160; 170] bzw. [275; 285]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1 für das richtige Modellieren von Möglichkeit 1
   1 × A2 für das richtige Modellieren von Möglichkeit 2

b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gleichung
   1 × B für die richtige Berechnung der Packungsanzahl und die exakte Angabe der verkauften Packungen

c) 1 × C für das richtige Ablesen der beiden Werte mit Gewinnunterschied € 10.000

Aufgabe 2

Leistungskurve

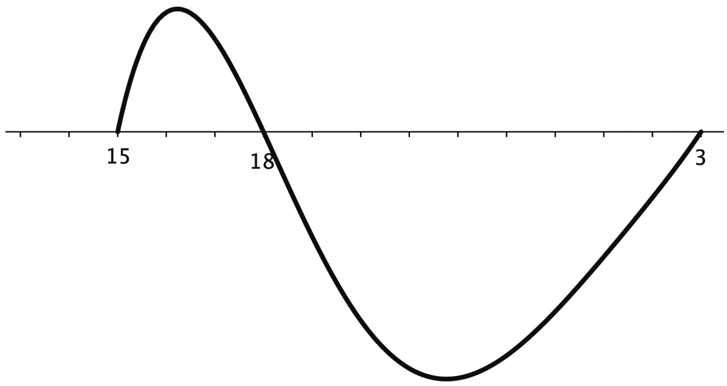
Möglicher Lösungsweg

a) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm$ *0,5 h*

b) Jede Skizze, die für die Ableitungsfunktion die richtigen Nullstellen (bei 15 Uhr, bei ca. 18 bis 19 Uhr und bei 3 Uhr) und das richtige Vorzeichen zeigt, gilt als richtige Lösung.
Auf das Einzeichnen von Einheiten auf der *y*-Achse darf verzichtet werden.

Zum Beispiel:



c) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +10$ % pro Stunde

Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116$ %

d) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Die 1. Ableitung der Funktion zeigt die momentane Änderungsrate der Leistungsbereitschaft in Prozent pro Stunde an.
Diese momentane Änderungsrate um 2:30 Uhr beträgt –3,33 % (der Durchschnittsleistung) pro Stunde.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C für das richtige Ablesen der Zeitintervalle
b) 1 × A1 für die richtige Darstellung der Nullstellen der Ableitungsfunktion
1 × A2 für die richtige Darstellung des Monotonieverhaltens
c) 1 × B1 für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B2 für die richtige Berechnung der Leistungsbereitschaft um 14 Uhr
d) 1 × B für die richtige Berechnung der 1. Ableitung zur angegebenen Uhrzeit
1 × D für die richtige Erklärung der Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang

Aufgabe 3

Leuchtmittel

Möglicher Lösungsweg

a) Es gibt genau 2 Möglichkeiten des Ausgangs: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
Die Versuche sind voneinander unabhängig.
Die Wahrscheinlichkeiten bleiben konstant.

b) $P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}1500 + 0{,}1060 = 0{,}2560$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 25,60 %.

c) Durch diesen Ausdruck kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in der Stichprobe genau 4 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.

d) Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $0{,}18 \cdot 0{,}18 = 0{,}0324 \approx 3{,}24\ \%$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D für die richtigen Erklärungen zur Verwendung der Binomialverteilung
b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × C für die richtige Beschreibung zur berechneten Wahrscheinlichkeit
d) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 4

Skipiste

Möglicher Lösungsweg

a) 118,62 s = 0,03295 h

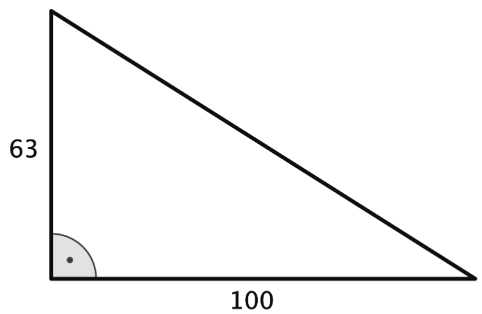
$v = \frac{s}{t} = \frac{3{,}186}{0{,}03295} = 96{,}69$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt 96,69 km/h.

b) Fahrer A: $s_A(t) = 20t$
Fahrer B: $s_B(t) = 25 \cdot (t - 30)$
Ansatz: $20t = 25 \cdot (t - 30)$
$t = 150 \rightarrow s = 3\,000$

Gesamtstrecke: 3 186 m, daher folgt:
Fahrer B holt Fahrer A 186 Meter vor dem Ziel ein.

c) Skizze:



Das Verhältnis von vertikalem zu horizontalem Abstand zwischen 2 Punkten auf der Strecke beträgt $\frac{63}{100}$.

Steigungswinkel: $\tan^{-1}\left(\frac{63}{100}\right) = 32{,}21°$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit
b) 1 × A für den richtigen Ansatz
1 × B für die richtige Berechnung der Entfernung
c) 1 × D für die richtige Erklärung der Steigung anhand einer Skizze
1 × B für die richtige Berechnung des Winkels

Aufgabe 5

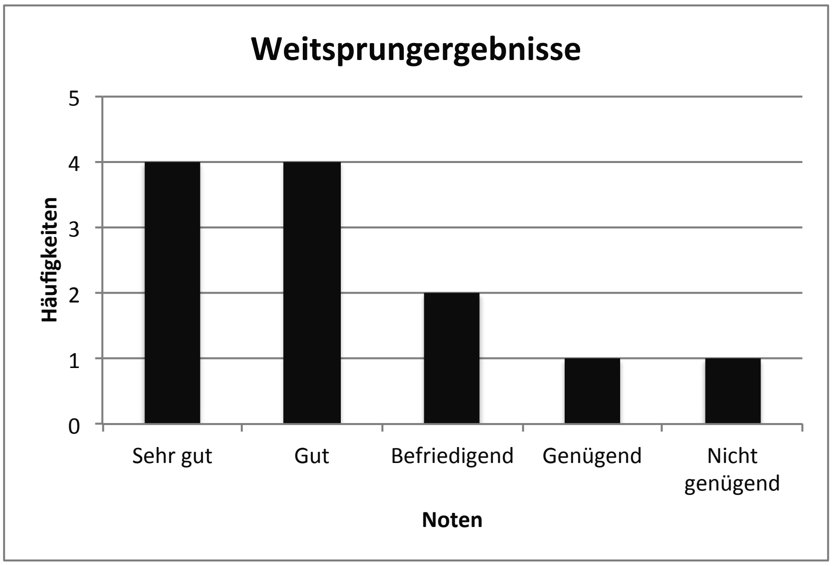
Weitsprung

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mithilfe von Technologie:
arithmetischer Mittelwert: 3,61 Meter
Standardabweichung: 0,73 Meter

Gemäß Kompetenzkatalog Teil A, Kommentar 5.2 gilt auch die Berechnung der empirischen Standardabweichung (hier: s = 0,76 m) als richtige Lösung.

b)



c) Median: 3,7 m *Toleranzbereich: [3,6; 3,8]*
1. Quartil: 3,15 m *Toleranzbereich: [3,1; 3,3]*

Median: 50 % aller Werte liegen rechts bzw. links vom Median.
1. Quartil: 25 % aller Werte liegen links vom 1. Quartil.

d) Die Streuung der Sprungweiten innerhalb der Gruppe der Mädchen ist größer als die Streuung innerhalb der Gruppe der Burschen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwertes und der Standardabweichung
b) 1 × A für die richtige Erstellung des Säulen- oder Balkendiagramms
c) 1 × C für das richtige Ablesen von Median und 1. Quartil
1 × D für die richtige Erklärung zur Bedeutung von Median und 1. Quartil
d) 1 × D für die richtige Erklärung zum Vergleich der Standardabweichungen

Aufgabe 6 (Teil B)

Pumpenproduktion

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (→ Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

b) $K(100) = 14\,200$ und $K(101) \approx 14\,215{,}86$
Der Kostenanstieg von 100 auf 101 Stück beträgt ungefähr € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036x^2 - x + 80 \rightarrow K'(100) = 16$
Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200x - (0{,}0012x^3 - 0{,}5x^2 + 80x + 10\,000)$
$G(x) = -0{,}0012x^3 + 0{,}5x^2 + 120x - 10\,000$

$G'(x) = -0{,}0036x^2 + x + 120$
Berechnung mithilfe von Technologie: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D für eine richtige Begründung
b) 1 × B1 für die richtige Berechnung des Kostenanstiegs
1 × B2 für die richtige Berechnung der Grenzkosten für 100 Stück
1 × D für die richtige Begründung
c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Gewinnfunktion
1 × B für die richtige Berechnung der Anzahl mit maximalem Gewinn

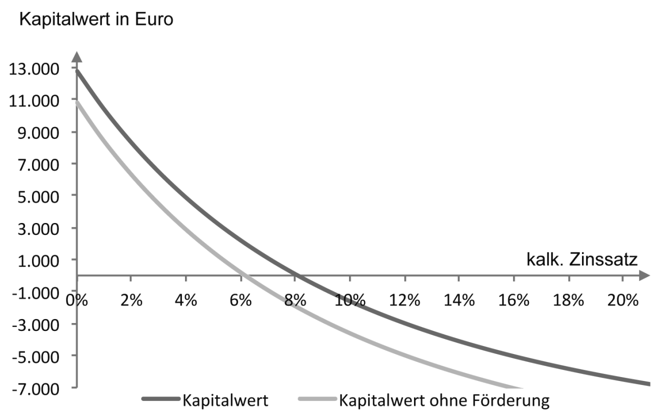
Aufgabe 7 (Teil B)

Photovoltaik

Möglicher Lösungsweg

a) Die geförderte Photovoltaikanlage ist für kalkulatorische Zinssätze bis 8 % rentabel.

Toleranzbereich: [7,5 %; 8,5 %]



b) Gebühren: 3 % von € 12.560 → € 406,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

Äquivalenzgleichung: $12\,183{,}20 = 98 \cdot \frac{1 - (1 + i_{12})^{-180}}{i_{12}}$

Mithilfe von Technologie erhält man: $i_{12} = 0{,}44\ \%$
$i_{eff} = (1 + i_{12})^{12} - 1 \approx 5{,}39\ \%$

c) t … Zeit in Jahren
$K(t)$ … Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) nach t Jahren
$K(t) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^t$

$K(13) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^{13} = 0{,}2664 < 0{,}38$
Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

Lösungsschlüssel

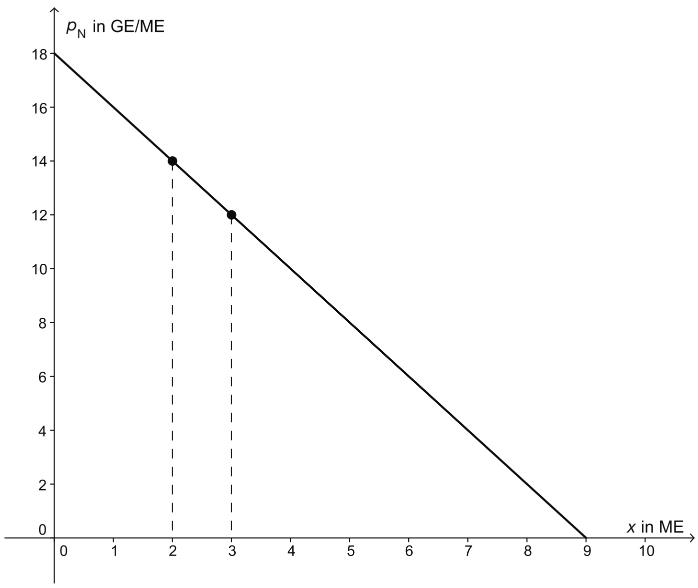
a) 1 × C für das richtige Ablesen des kalkulatorischen Zinssatzes
1 × A für die richtige Skizze: Verschieben des Graphen des Kapitalwertes
b) 1 × B1 für die richtige Berechnung des Auszahlungsbetrages
1 × A für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Effektivzinssatzes
1 × B2 für die richtige Berechnung des jährlichen Effektivzinssatzes
c) 1 × A für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B für die richtige Berechnung des Strompreises nach 13 Jahren

Aufgabe 8 (Teil B)

Zeitschrift

Möglicher Lösungsweg

a)



Bei einem Preis von 14 GE/ME können 2 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 28 GE.
Bei einem Preis von 12 GE/ME können 3 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 36 GE.
Die Preissenkung führt zu einer Erlössteigerung von 8 GE.

b) Aus der Grafik kann man ablesen: $p_N(x) = -2x + 18$.

Im Marktgleichgewicht gilt: $p_A(x) = p_N(x)$.
$1 + 4{,}5\sqrt{x} = 18 - 2x$
Mithilfe von Technologie erhält man: $x = 4$.
$p_N(4) = 10$
Der zugehörige Gleichgewichtspreis beträgt 10 GE/ME.

c) Die Elastizität der Nachfrage ist für diejenige Menge gleich –1, für die der Erlös maximal ist. Man kann also weder durch eine Preissenkung noch durch eine Preiserhöhung eine Steigerung des Erlöses erwarten.

d) Elastizität = relative Mengenänderung : relative Preisänderung
relative Mengenänderung = Elastizität × relative Preisänderung = $-0{,}6 \cdot (-10\,\%) = 6\,\%$
Die absetzbare Menge nimmt um 6 % zu.

Erlös vor der Preissenkung: $8 \cdot 3 = 24$ GE
Erlös nach der Preissenkung:
absetzbare Menge: $3 \cdot 1{,}06 = 3{,}18$ ME
neuer Preis: $8 \cdot 0{,}9 = 7{,}2$ GE/ME
Erlös: $3{,}18 \cdot 7{,}2 = 22{,}896 \approx 22{,}9$ GE
Der Erlös nimmt um ca. 1,1 GE ab.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung
   1 × B für die richtige Berechnung der Erlösänderung
b) 1 × A1 für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von p_N
   1 × A2 für den richtigen Ansatz beim Marktgleichgewicht: $p_A = p_N$
   1 × B1 für die richtige Berechnung der Gleichgewichtsmenge
   1 × B2 für die richtige Berechnung des Gleichgewichtspreises
c) 1 × D für die richtige Begründung
d) 1 × C für die richtige Interpretation der Elastizität hinsichtlich der relativen Mengenänderung
   1 × B für die richtige Berechnung der Erlösänderung