Infrarotheizung

Aufgabennummer: B_030

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

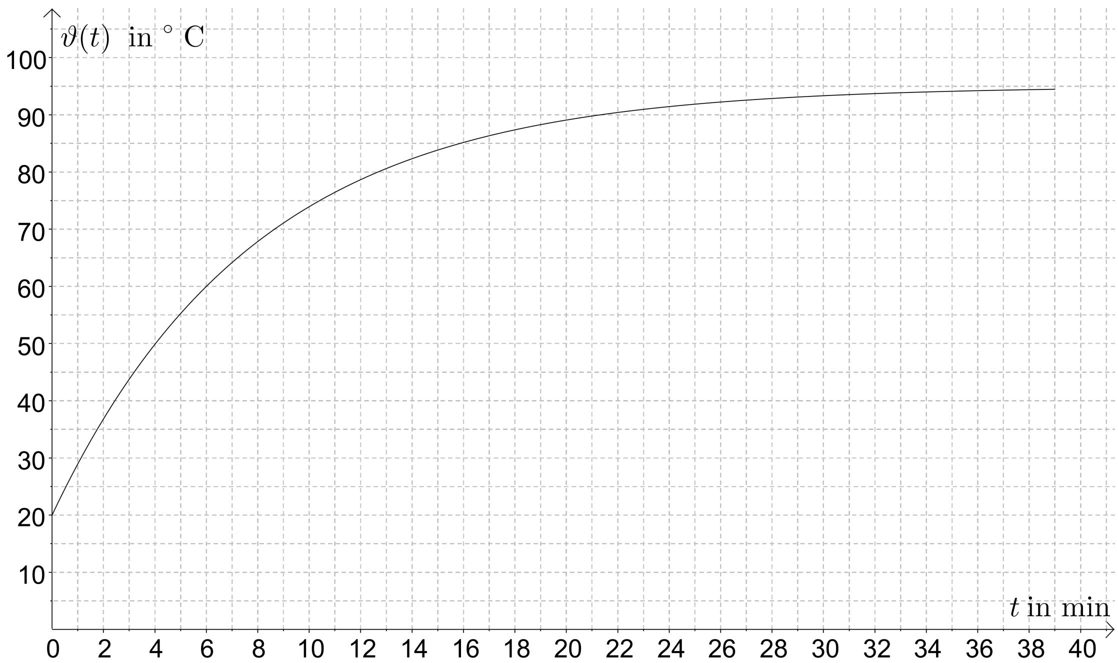
Heutzutage werden immer häufiger Infrarotheizungen in Wohnräumen eingesetzt.

a) Der Erwärmungsvorgang des Heizleiters der Infrarotheizung lässt sich durch die Funktion ϑ näherungsweise beschreiben:

$$\vartheta(t) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) + b$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in Minuten (min)
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Grafik die Parameter b, c und λ der Funktion ϑ.



– Begründen Sie anhand der Funktion ϑ, warum die Temperatur nie über (c + b) °C ansteigen kann.

b) Der Erwärmungsvorgang der Vorderwand der Infrarotheizung lässt sich durch folgende Funktion ϑ_1 beschreiben:

$\vartheta_1(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}07 \cdot t}) + 20$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Argumentieren Sie, warum die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit theoretisch nie null wird.
– Berechnen Sie den Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit 0,35 $\frac{°\text{C}}{\text{min}}$ beträgt.

c) Der Zusammenhang zwischen Temperatur und mittlerer Geschwindigkeit der Luftteilchen wird durch folgende Formel beschrieben:

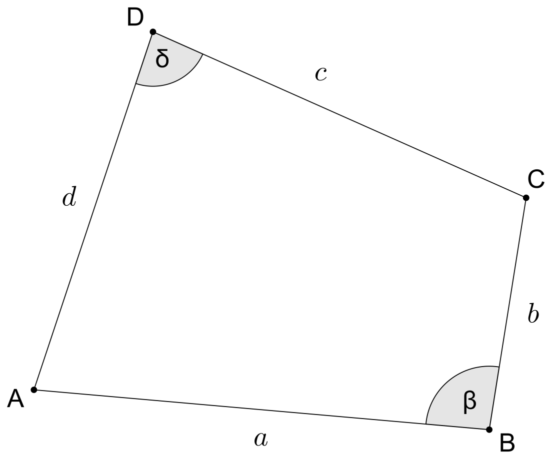
$T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$

m … Masse der Luftteilchen in Kilogramm (kg)
$\bar{v}$ … mittlere Geschwindigkeit der Luftteilchen in Metern pro Sekunde (m/s)
k_B … Boltzmann-Konstante in Joule/Kelvin (J/K)
T … Temperatur in Kelvin (K)

– Erläutern Sie anhand der Formel für T, welche Änderung der Teilchengeschwindigkeit einer Verdoppelung der Temperatur entspricht.

d) Die Fläche an der Vorderseite der Infrarotheizung hat die Form eines Vierecks mit den Seitenlängen a = 71,4 cm, b = 36,9 cm und d = 59,1 cm. Die Winkel sind β = 94° und δ = 84,3°.

– Berechnen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Flächeninhalt des Vierecks.
– Berechnen Sie mithilfe der Skizze den Umfang des Vierecks.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) aus der Grafik ablesen:

$P_1 = (0|20) \;\Rightarrow\; b = 20$

Grenzwert der Funktion ϑ für $t \to \infty$ ist 95 $\Rightarrow$ $c = 95 - 20 = 75$

$P_2 = (6|60) \;\Rightarrow\; 60 = 75 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 6}) + 20$
$\lambda = 0{,}127...$

$\vartheta(t) = 75 \cdot (1 - e^{-0{,}127 \cdot t}) + 20$

Wenn $t \to \infty$, geht $e^{-\lambda \cdot t} \to 0$. $\Rightarrow$ Die theoretisch maximal erreichbare Temperatur beträgt $(c + b)$ °C.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

b) Die 1. Ableitung beschreibt die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit:
$\vartheta_1'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$
$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0$

Da die Funktionswerte einer Exponentialfunktion immer positiv sind, kann der Term $1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$ nie null werden.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

$\vartheta_1'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$
$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0{,}35$
$t = 19{,}804...$

Die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit ist nach etwa 19,8 min 0,35 $\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$.

c) $T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$

$\sqrt{\frac{T \cdot 3 \cdot k_B}{m}} = \bar{v}$

Eine Verdopplung der Temperatur erhöht die Geschwindigkeit der Luftteilchen um den Faktor $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...$

d) $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$

$e = 82{,}626\ldots$ cm

$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\delta) \cdot d}{e}\right)$

$\gamma_1 = 45{,}375\ldots°$

$\alpha_1 = 180° - (\gamma_1 + \delta)$

$\alpha_1 = 50{,}324\ldots°$

$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\beta)}{2}$

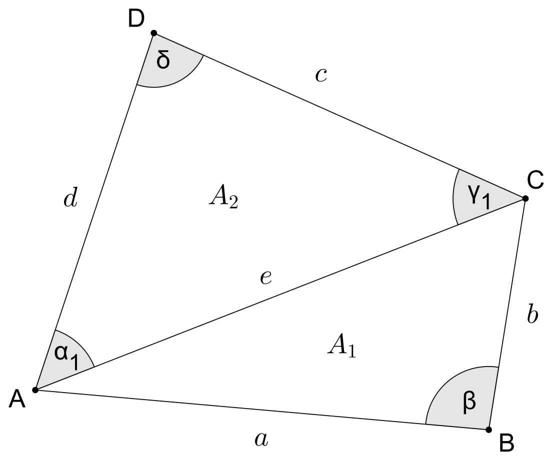
$A_1 = 1\,314{,}121\ldots \text{ cm}^2$

$A_2 = \frac{d \cdot e \cdot \sin(\alpha_1)}{2}$

$A_2 = 1\,879{,}232\ldots \text{ cm}^2$

$A = A_1 + A_2$

$A \approx 3\,193{,}35 \text{ cm}^2$



Die Oberfläche der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 3 193,35 cm².

$c = \frac{d \cdot \sin(\alpha_1)}{\sin(\gamma_1)}$

$c = 63{,}911\ldots$ cm

$U = a + b + c + d$

$U \approx 231{,}3$ cm

Der Umfang der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 231,3 cm.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1
d) 3

Thema: Physik

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Temperatur