Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Verkehrsunfall

Aufgabennummer: B-C1_02

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf der Autobahn bei Imst ereignete sich ein Verkehrsunfall. Ein Motorradfahrer prallte nach einer 30 Meter (m) langen Bremsung mit einer Geschwindigkeit von 80 Kilometern/Stunde (km/h) in ein stehendes Auto. Eine konstante Verzögerung von 5 Metern/Sekunde² (m/s²) wird angenommen.

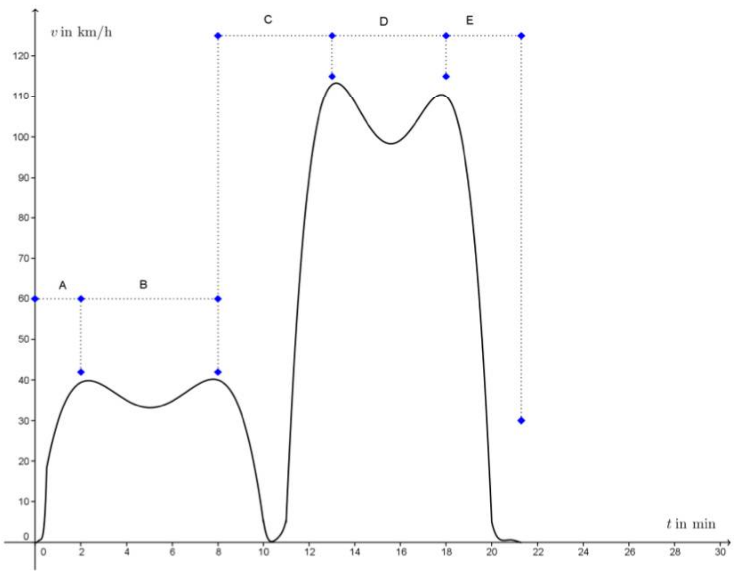
$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$s(t)$ ... zurückgelegter Bremsweg zum Zeitpunkt t
t ... Zeit in Sekunden (s)

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 in km/h zu Beginn der Bremsung und die Zeitdauer der Bremsung t in s.

b) Ein anderer Bremsvorgang mit gleicher Verzögerung startet zum Zeitpunkt $t = 0$ s mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 29$ m/s zu Beginn der Bremsung und $t = 2$ s für die Zeitdauer der Bremsung.
– Zeichnen Sie die Graphen der jeweiligen Funktionen im Weg-Zeit-Diagramm, im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und im Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Geben Sie die mittlere Änderungsrate des Weges während der ersten Sekunde an.
– Erklären Sie deren physikalische Bedeutung.

c) Der Rettungswagen, der zum Unfallort gerufen wird, fährt zu einem Zeitpunkt $t_1 = 0$ min vom Krankenhaus in Zams ab und kommt zu einem Zeitpunkt $t_2 = 21{,}3$ min zum Unfallort. Das nebenstehende Diagramm stellt die geglättete Geschwindigkeit des Krankenwagens v in km/h in Abhängigkeit von der Zeit t in min dar.



– Beschreiben Sie das Diagramm in den angegebenen Abschnitten A bis E hinsichtlich der Geschwindigkeitsänderung.
– Zeichnen Sie für den Abschnitt A skizzenhaft in einem Weg-Zeit-Diagramm den Graphen, der den zurückgelegten Weg s in km in Abhängigkeit von der Zeit t in min des Krankenwagens angibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

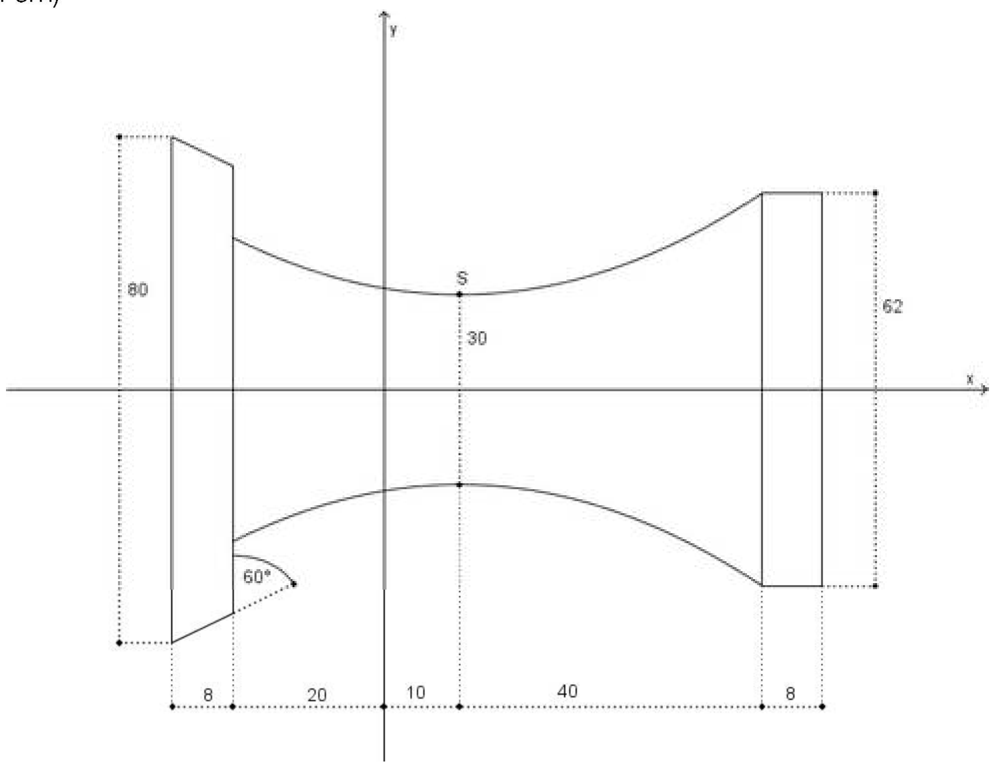
Drechseln

Aufgabennummer: B-C1_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die *x*-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



a) – Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.

b) – Berechnen Sie die Bogenlänge der oben dargestellten Parabel, die durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$

c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser $d = 8{,}5$ dm hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$

$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$

– Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

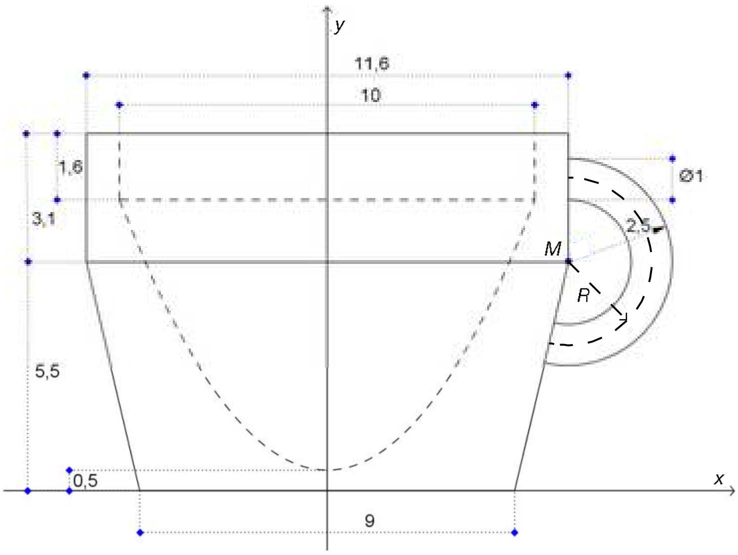
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Designertasse

Aufgabennummer: B-C1_05

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Eine Designertasse wird aus Glas mit einer Dichte von 2 500 kg/m³ hergestellt. Sie hat die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfs mit einem aufgesetzten Quader. Der Hohlraum der Tasse hat die Form eines Drehparaboloids mit aufgesetztem Drehzylinder.



(Maße in cm)

a) Der Tassengriff hat die Form eines Ringkörpers (Torus).

Volumsformel für den Torus: $V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$
R ... Radius der Kreislinie des Torus
r ... Radius der Querschnittsfläche des Torus

– Berechnen Sie unter Verwendung der angegebenen Skizze die Masse des Tassengriffs.

b) Die bis zum Rand gefüllte Tasse fasst ein Volumen von 380,918 ml.
– Berechnen Sie das Glasvolumen, das zur Herstellung der dargestellten Designertasse ohne Tassengriff notwendig ist.

c) Alle Abmessungen der Querschnittsfläche in x-Richtung werden um 5 % vergrößert. Die Abmessungen in y-Richtung bleiben unverändert.
– Argumentieren Sie, warum das Volumen des Hohlraumes nicht um 5 % zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Harmonische Schwingung

Aufgabennummer: B-C3_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

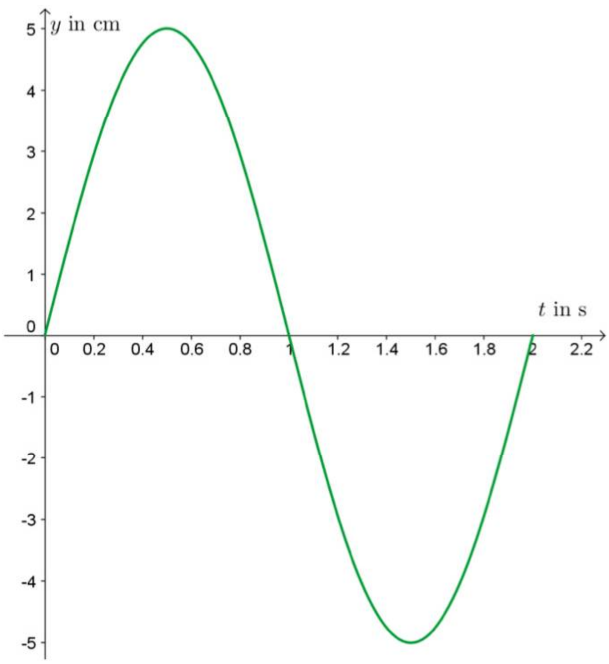
Die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A … Amplitude in Metern (m)
T … Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt
φ … Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)
$y(t)$ … Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)
ω … Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

a) – Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t.
– Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den Umkehrpunkt erreicht.

b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

– Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.
– Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.



c) – Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit $A = 2$ cm, $\omega = 2\ s^{-1}$ und $\varphi = 0{,}5$ rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen.
– Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach $t = 0{,}2$ s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Sonneneinstrahlung am Hafelekar (1)

Aufgabennummer: B-C3_16

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Intensität der Sonneneinstrahlung am Hafelekar in Innsbruck kann näherungsweise durch die folgenden Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden, wobei gilt:

$f_1(t) = -\frac{7}{1\,152} \cdot t^2 + \frac{2\,555}{288} \cdot t - \frac{811\,615}{288}$, $490 \leq t \leq 970$ für den 19. Jänner

$f_2(t) = -\frac{81}{18\,490} \cdot t^2 + \frac{11\,826}{1\,849} \cdot t - \frac{2\,726\,350}{1\,849}$, $300 \leq t \leq 1160$ für den 3. Mai

t … Ortszeit in Minuten (min)

$f_1(t)$, $f_2(t)$ … Intensität der Sonneneinstrahlung zum Zeitpunkt t in Watt pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$

a) – Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Intensität der Sonneneinstrahlung am 3. Mai maximal ist.

Mithilfe des Integrals $\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet man den Energieeintrag im Zeitintervall t_1 bis t_2.

– Berechnen Sie ein symmetrisches Zeitintervall um diesen Zeitpunkt so, dass der Energieeintrag 100 $\frac{\text{kW} \cdot \text{min}}{\text{m}^2}$ beträgt.

b) – Zeichnen Sie den Graphen, der die momentane Änderungsrate der Intensität der Sonneneinstrahlung für den 3. Mai in Abhängigkeit von der Ortszeit im Intervall [300 min; 1160 min] darstellt.

c) – Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung der mittleren Intensität der Sonneneinstrahlung für den 3. Mai zwischen den Zeitpunkten a und b, ohne die Berechnung auszuführen.

d) In der nachstehenden Tabelle sind die theoretisch möglichen Energieeinträge pro Stunde für den 19. Jänner und den 3. Mai in Millionen Joule pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2}\right)$ angegeben.

Ortszeit in min	19. Jänner	3. Mai
540 – 600	0,945	2,688
600 – 660	1,287	2,934
660 – 720	1,47	3,066
720 – 780	1,497	3,085
780 – 840	1,365	2,990
840 – 900	1,077	2,782

– Erstellen Sie ein Stabdiagramm mithilfe der Daten in der Tabelle.

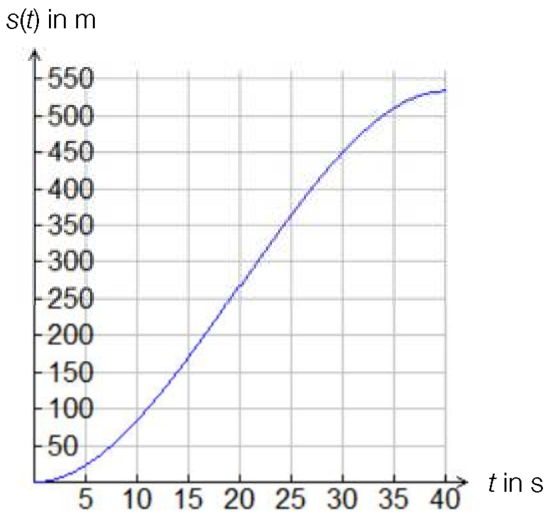
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Autofahrt

Aufgabennummer: B-C3_22

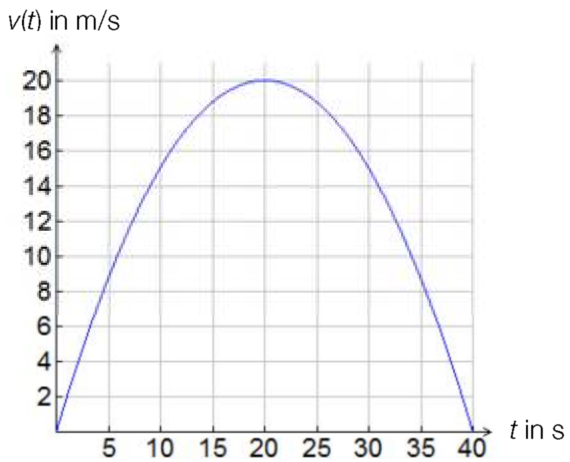
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke *s* in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Sekunden (s) für 0 s ≤ *t* ≤ 40 s dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall 15 s ≤ *t* ≤ 30 s ab.
– Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt *t* = 30 s ab.

b) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Autos für die ersten 40 s seiner Fahrt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die Beschleunigungsfunktion an. *[1 aus 5]*

Die Beschleunigung ist nach ungefähr 40 Sekunden gleich null.	☐
Die Beschleunigung ist für $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ positiv.	☐
Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ fallend.	☐
Die Beschleunigung ist nach ungefähr 20 Sekunden maximal.	☐
Die Beschleunigung ist nach 5 Sekunden ungefähr gleich groß wie nach 35 Sekunden.	☐

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 Metern pro Sekunde (m/s) und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich null. Die Geschwindigkeit kann mithilfe einer quadratischen Funktion $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c auf.
– Ermitteln Sie diejenige Funktion, die die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

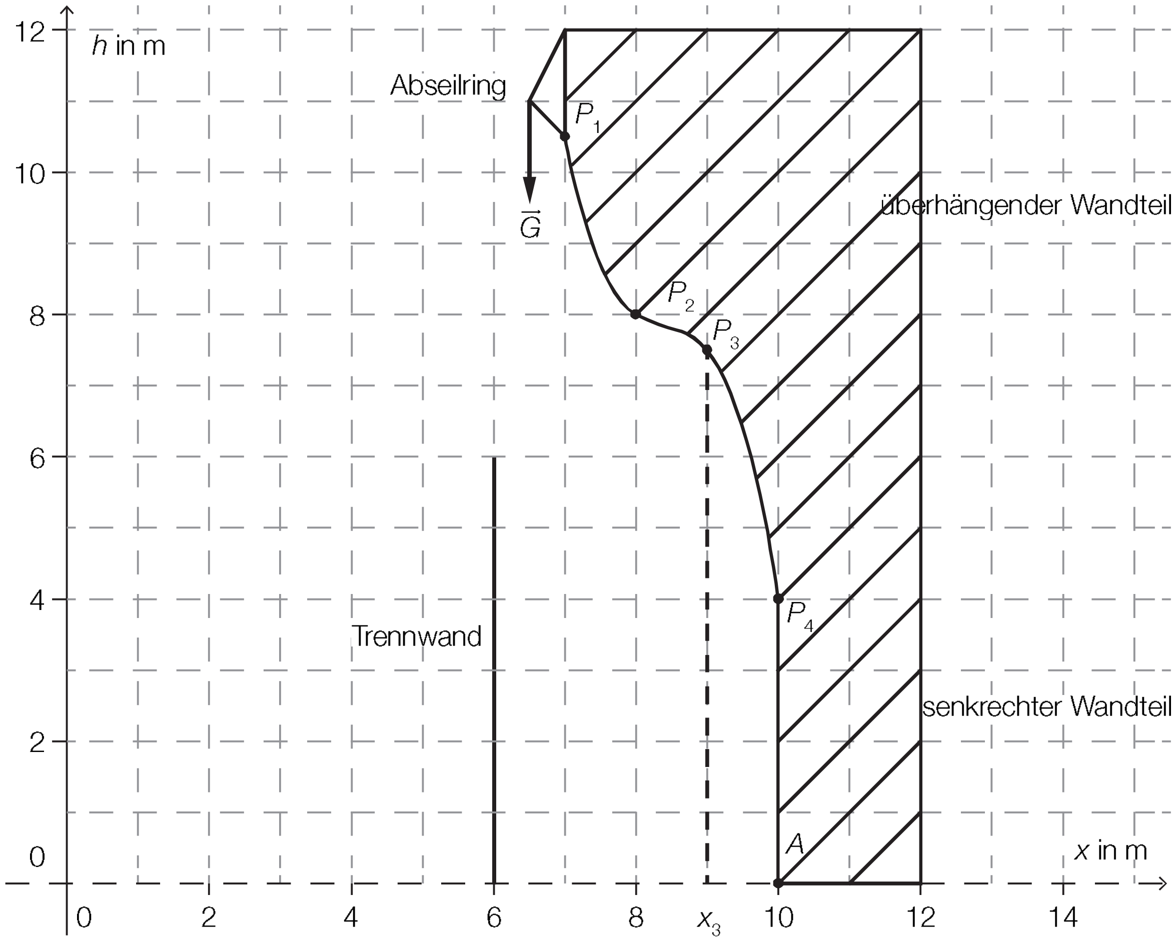
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Kletterwand (2)

Aufgabennummer: B-C4_12

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Kletterroute an einer Kletterwand.



a) Der Verlauf der Kletterroute im überhängenden Wandteil vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_4 soll durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades berechnet werden können. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.
– Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion 3. Grades.

b) Um die ungefähre Neigung (= Steigung) der Kletterwand an der Stelle x_3 abzuschätzen, geht ein Kletterer folgendermaßen vor:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} \approx \frac{7{,}5 - 6{,}5}{9 - 9{,}5} = -2$$

– Stellen Sie mithilfe des Differenzialquotienten eine Formel auf, mit der Sie den Winkel α der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle x_3 bestimmen können, wenn der Verlauf des überhängenden Wandteils durch eine Funktion h in Abhängigkeit von x beschrieben wird.
– Erklären Sie, wie der angegebene Differenzenquotient und der Differenzialquotient zusammenhängen.

c) Zur Ausleuchtung der Kletterroute wird an der gegenüberliegenden Trennwand in einer Höhe von $h_L = 4$ m eine Lampe mit der Lichtstärke I_V angebracht. Der Punkt A soll möglichst gut beleuchtet werden. Für die Beleuchtungsstärke gilt folgende Formel:

$$E_V = I_V \cdot \frac{\cos\,\varphi}{r^2}$$

E_V … Beleuchtungsstärke in Lux (lx)
I_V … Lichtstärke in Candela (cd)
φ … Tiefenwinkel von der Lampe zum Punkt A
r … Länge des Lichtstrahls von der Lampe zum Punkt A in m

– Zeichnen Sie die Position der Lampe sowie r und φ in die obige Grafik ein.
– Stellen Sie die Beleuchtungsstärke E_V als Funktion abhängig von der Entfernung der Trennwand von der Kletterroute dar.

Um die Entfernung für die maximale Beleuchtungsstärke zu ermitteln, wurde folgende Berechnung durchgeführt. Sie enthält genau einen Fehler.

(1) $E_1(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + h_L^2}$

(2) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 + h_L^2\right) - x^{\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot h_L)}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(3) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(4) $E_1'(x) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

– Kennzeichnen Sie den Fehler.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Numerische Berechnung des Logarithmus

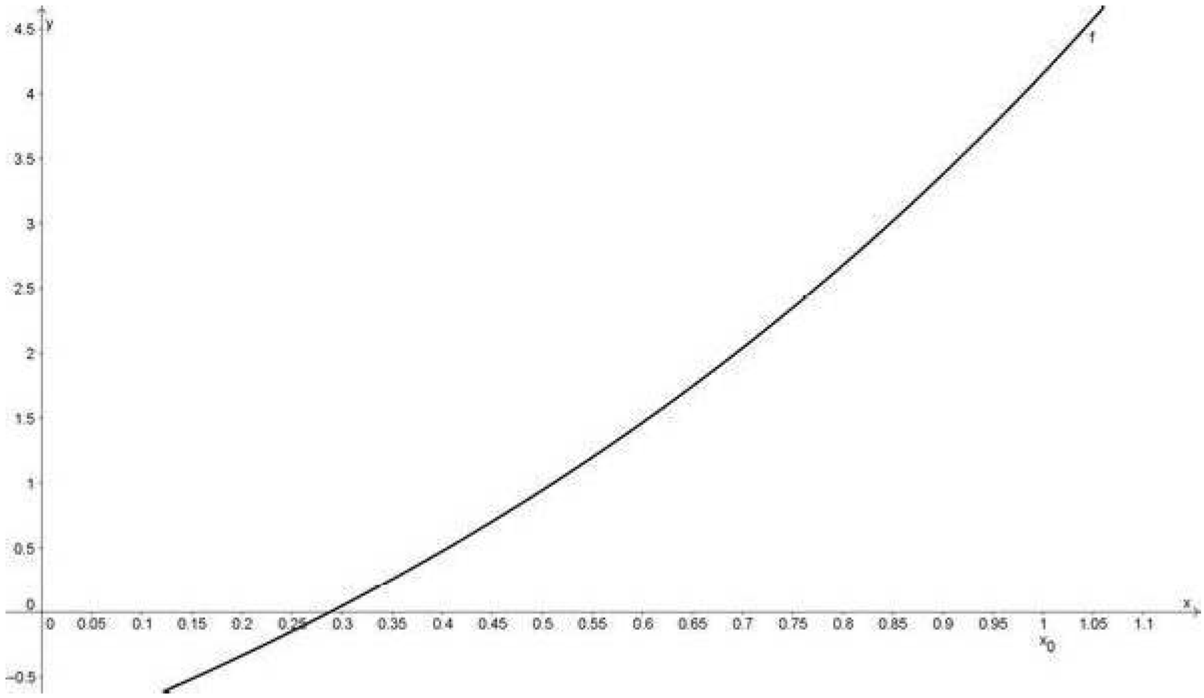
Aufgabennummer: TB_SP_C4_04

Technologieeinsatz: möglich☐ erforderlich ☒

Zur Berechnung des Logarithmus einer Zahl werden in der EDV sehr oft numerische Methoden eingesetzt. Zur Überprüfung der Genauigkeit eines Computerprogramms sollen nun unterschiedliche Verfahren getestet werden.

a)
- Berechnen Sie $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ mit Hilfe der ersten 5 Glieder der Taylorreihenentwicklung von $\ln(1 + x)$.
- Berechnen Sie die prozentuale Abweichung dieses Ergebnisses von dem mit einem Taschenrechner ermittelten Wert $\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}287682072$.

b) Ein Programm verwendet das Newton'sche Näherungsverfahren zur Berechnung des Werts für $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.
- Erklären Sie die Idee des Newton'schen Näherungsverfahrens, indem Sie in der folgenden Skizze einzeichnen, wie man ausgehend vom eingezeichneten Startwert x_0=1 grafisch die nächsten zwei Näherungswerte für die Nullstelle bestimmen kann.



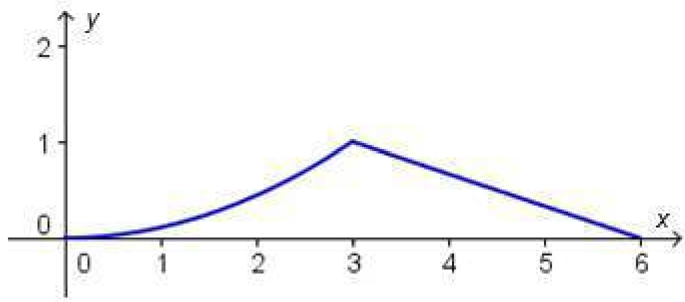
- Geben Sie eine Exponentialfunktion an, deren Nullstelle $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ ist.
- Berechnen Sie den ersten Näherungswert für $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ durch Einsetzen in die Formel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Verwenden Sie als Startwert die Zahl 1.

c) - Erklären Sie unter der Voraussetzung, dass $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x|$ ist, warum man die Zahl $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ auch durch das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x} dx$ berechnen kann.

- Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ kann durch das Taylorpolynom $T(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ angenähert werden. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Taylorpolynoms eine Näherung für $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

c) Ein weiterer Regler benötigt die folgende Funktion:



$$f(x) = \begin{cases} y_1 = \frac{1}{9}x^2 & 0 \le x \le 3 \\ y_2 = -\frac{1}{3}x + 2 & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

Als erste Näherung für den tatsächlich benötigten Steuerungswert soll der Integralmittelwert $\bar{f}$ der Funktion im Intervall von [0, 6] dienen.

- Berechnen Sie den linearen Integralmittelwert $\bar{f}$ der oben dargestellten Funktion.

d) Die Kennlinie für den Regelungsprozess einer Temperaturregelung ist der Funktionsgraph der Funktion y mit:

$$y(x) = \frac{200}{1 + e^{-0.02 \cdot x}}$$

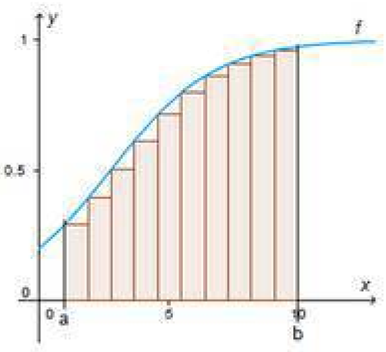
Der Funktionsgraph schließt im ersten Quadranten mit der Senkrechten g: $x = 100$ eine Fläche ein. Für die Konstruktion eines speziellen Reglers soll die Fläche durch eine weitere senkrechte Gerade h halbiert werden. Als Stellgröße für den Regler soll der y-Wert des Schnittpunkts S dieser Geraden h mit der Kennlinie dienen.

- Übertragen Sie den Sachverhalt in eine passende ungefähre Skizze.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des gesuchten Schnittpunkts S.

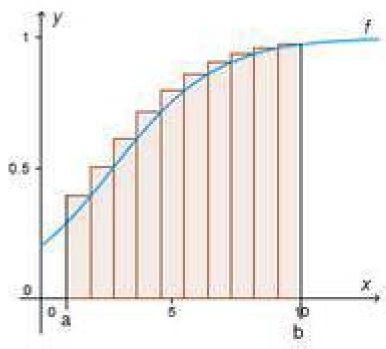
Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Mögliche Lösungserwartung

a) Mit Hilfe der Ober- und Untersummen kann der Flächeninhalt unter der Kurve angenähert werden. Dazu zerlegt man das Intervall [a, b] in Teilintervalle.



Untersumme



Obersumme

Bei der Untersumme werden Rechtecke Über den Teilintervallen in die gesuchte Fläche eingeschrieben. Die Höhe der Rechtecke ergibt sich aus der Berechnung der Funktionswerte. Die Summe der Flächeninhalte der eingeschriebenen Rechtecke nennt man eine Untersumme *U*. Bei der Obersumme werden Rechtecke in gleicher Weise der gesuchten Fläche umgeschrieben. Die Summe der Flächeninhalte der umgeschriebenen Rechtecke nennt man eine Obersumme *O*.

Der tatsächliche Flächeninhalt *A* liegt zwischen der Ober- und der Untersumme: $U \leq A \leq O$

Diese oder sinngemäß richtige Erklärungen sind als richtig zu werten.

b) Festlegen der Funktion, die das Dreieck aufspannt:

$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ für $1 \leq x \leq 4$

$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \mathrm{d}x \qquad M_y = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot y \,\mathrm{d}x \qquad x_A = \frac{M_y}{A} \qquad y_A = \frac{M_x}{A} \qquad S=(x_A|y_A)$

$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x = 0{,}75$

$M_y = \int_1^4 x \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = 4{,}5$

$A_{\text{Dreieck}} = 4$

$x_A = \frac{4{,}5}{4} = 1{,}125 \qquad y_A = \frac{0{,}75}{4} = 0{,}1875$

Die Koordinaten des Schwerpunkts lauten: $S(1{,}125|0{,}1875)$.

c) $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \cdot \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$

Angabe der Funktionen:

$y_1 = \frac{1}{9}x^2$ für $0 \leq x \leq 3$

$y_2 = -\frac{1}{3}x + 2$ für $3 \leq x \leq 6$

$\bar{f} = \frac{1}{6} \cdot \left[\int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2\right) \mathrm{d}x + \int_3^6 \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) \mathrm{d}x\right] = \frac{5}{12}$

Fließgeschwindigkeiten

Aufgabennummer: B-C5_07

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Fließgeschwindigkeit in offenen oder geschlossenen Gerinnen (Fluss, Kanal usw.) hängt von der Querschnittsform des Gerinnes, vom Fließgefälle sowie vom Material des Gerinnes (Beton, Sand, Holz usw.) ab. Sie variiert innerhalb des Querschnitts, daher gibt man sie als Durchschnittswert an.
Für die rechnerische Ermittlung der mittleren Fließgeschwindigkeit von Gerinnen eignet sich die Formel nach Manning-Strickler:

$$v_{\mathrm{m}} = k_{\mathrm{st}} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

v_{m} … mittlere Fließgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)

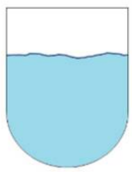
k_{st} … Proportionalitätskonstante $\left(\frac{\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{s}}\right)$ (berücksichtigt die Gerinnerauheit)

R … hydraulischer Radius (m) $= \frac{\text{vom Wasser durchflossener Querschnitt in Quadratmetern (m}^2\text{)}}{\text{benetzter Umfang in Metern (m)}}$

I … Fließgefälle $= \frac{\text{Höhe in Metern (m)}}{\text{Länge in Metern (m)}}$

a) – Erläutern Sie anhand der Formel für v_{m}, wie der hydraulische Radius die Fließgeschwindigkeit beeinflusst.

b) Ein Abflusskanal hat näherungsweise einen Querschnitt in Form eines Halbkreises mit aufgesetztem Quadrat. Das Gerinne hat eine Breite von 80 cm und ein Gefälle von 5 m Höhe auf 1 Kilometer (km) Länge.



$k_{\mathrm{st}} = 100 \left(\frac{\mathrm{m}^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{s}}\right)$

– Berechnen Sie die mittlere Fließgeschwindigkeit, wenn sich die Wasseroberfläche 40 cm unter dem Kanalrand befindet. Runden Sie dabei auf 2 Stellen.

c) Ein Wasserversorgungsunternehmen zeichnet in einem Intervall von 900 Sekunden (s) die durch unterschiedliche Durchflussmengen schwankende Fließgeschwindigkeit v_m in einem Wasserzuleitungsrohr (Durchmesser d = 0,6 m) auf.

Zeit ab Beginn des Beobachtungszeitraums in s	Fließgeschwindigkeit in m/s
0	1,2
180	3,4
360	4,3
540	4,1
720	3,0
900	1,8

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten der Tabelle eine Ausgleichsfunktion 2. Grades, die den Verlauf der Fließgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall beschreibt.

– Berechnen Sie mit dieser Polynomfunktion und mithilfe der Integralrechnung das während des Beobachtungszeitraums fließende Wasservolumen.
Runden Sie auf Kubikmeter genau.
Hinweis: $V = A \cdot v_m(t) \cdot t$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.