Wasserstand in einem Hafenbecken

Aufgabennummer: B_085

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion H beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$H(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.

b) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion H.
– Ermitteln Sie aus der Grafik, zu welchen Zeitpunkten am 12. März der Wasserstand am höchsten und wann er am niedrigsten ist.
– Geben Sie jeweils die Höhe des Wasserstandes zu diesen Zeitpunkten an.

c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
– Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b, wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$$

$H_1(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

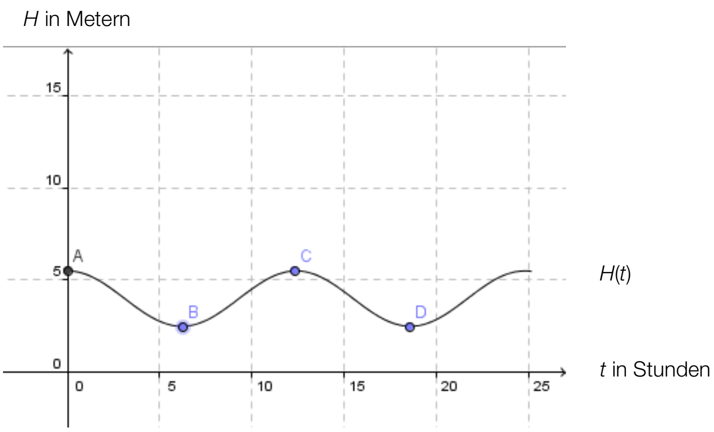
– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Umrechnung der Uhrzeit: 8:15 Uhr entspricht 8,25 Stunden.
$H(8{,}25) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot 8{,}25)$
$H(8{,}25) = 3{,}24$
Die Wassertiefe beträgt um 8:15 Uhr 3,24 m.

b)



Mit Technologieeinsatz: Um Mitternacht und um 12:24 Uhr ist das Maximum von 5,5 m Wasserhöhe erreicht. Um 6:12 Uhr und um 18:36 Uhr ist der Wasserstand minimal und erreicht eine Höhe von 2,5 m.

c) Funktion: $H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$
a … gibt die Amplitude der Cosinusfunktion (maximale Höhe des Wasserstandes relativ zu d) an
b … gibt die Frequenz an
d … verschiebt die Cosinusfunktion entlang der y-Achse und beschreibt die mittlere Wasserstandshöhe

Alle anderen richtigen Interpretationen aus der Physik sind zulässig.

d) $H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

Einsetzen der angegebenen Werte und vereinfachen liefert folgende Gleichungen:
I: $9{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 3{,}1)$
II: $2{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 9{,}3)$

I: $9{,}5 = a + b \cdot 0{,}999999591687397$
II: $2{,}5 = a - b \cdot 0{,}999996325188573 \Rightarrow a \approx 6,\ b \approx 3{,}5$

$H_1(t) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

$H_1(18) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot 18)$
$H_1(18) = 7{,}03$

Ja, ein Schiff mit einem Tiefgang von 5,5 m kann noch in diesem Hafen anlegen, da der Wasserstand um 18:00 Uhr 7,03 m beträgt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 3

Thema: Physik

Quellen: –