Luftdruck (2)

Aufgabennummer: B-C3_02

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -k \cdot p, \quad k > 0$$

p … Luftdruck in Hektopascal (hPa)
h … Höhe in Metern (m)

a) – Erklären Sie, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennung der Variablen* zur allgemeinen Lösung $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$ führt.

b) Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen:
- in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck p = 962 hPa gemessen,
- auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung p = 790 hPa.

– Berechnen Sie mit diesen Angaben und anhand der in Teilaufgabe a angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.

c) Messungen in der Atmosphäre haben ergeben, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme von 5 500 m ziemlich genau auf jeweils den halben Wert sinkt.
– Geben Sie, ausgehend von $p(500)$ = 962 hPa, den Luftdruck für 6 000 m und für 11 500 m an.
– Erstellen Sie eine quadratische Funktion durch diese 3 Wertepaare.
– Vergleichen Sie den berechneten Wert der quadratischen Näherungsfunktion für h = 2 167 m mit dem Messwert für den Dobratsch.
– Geben Sie ungefähr an, in welchem Bereich die quadratische Näherung für die Beschreibung der Druckabhängigkeit von der Höhe sinnvoll ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Dampfdruckkurve (2)

Aufgabennummer: B_C3-23		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Die untenstehende Gleichung von Clausius-Clapeyron beschreibt den Dampfdruck p einer Flüssigkeit bei gegebener Temperatur T.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{p \cdot H_V}{R \cdot T^2}$$

p … Druck in Bar (bar)
T … Temperatur in Kelvin (K)
H_V … molare Verdampfungsenthalpie in Kilojoule pro Mol (kJ/mol), konstant
R … ideale Gaskonstante, $R = 8{,}3144\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

a) – Lösen Sie die gegebene Differenzialgleichung mittels „Trennen der Variablen" und dokumentieren Sie den Lösungsweg.

b) Die spezielle Lösung für das p,T-Zustandsdiagramm von Wasser ist durch folgende Funktion p gegeben:

$$p(T) = 2{,}52 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{5\,418}{T}}$$

Bei höheren Temperaturen weichen die experimentellen Werte von p vom theoretischen Wert ab. Experimentell ermittelte Daten:

Temperatur in Kelvin (K)	Druck in Bar
313,15	0,0736
323,15	0,1230

– Berechnen Sie durch lineare Interpolation den Druck für $T = 318{,}15$ K.
– Ermitteln Sie für diese Temperatur den prozentuellen Unterschied zum theoretischen Wert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

CCD-Kamera

Aufgabennummer: TB_SP_C4_05

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In modernen Teleskopen werden CCD (charged coupled device) – Kameras, eine spezielle Art von Digitalkameras, eingesetzt. Die aufgenommenen Bilder werden anschließend durch entsprechende Bildbearbeitungsprogramme bearbeitet, um optimale Beobachtungsergebnisse zu erhalten.

Um das elektronische Rauschen möglichst gering zu halten, wird die CCD-Kamera auf eine bestimmte Temperatur abgekühlt. Die Temperaturabnahme mit der Zeit *t* in Minuten erfolgt nach dem Newton´schen Abkühlungsgesetz:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{k} \cdot (T - T_\mathrm{u})$$

T … Temperatur des Körpers in °C
T_u … Umgebungstemperatur in °C
t … Zeit in Minuten (min)
k … Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

a) - Formulieren Sie den durch die gegebene Differenzialgleichung beschriebenen Zusammenhang in Worten.

- Argumentieren Sie den Unterschied der beiden Änderungsraten $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{k} \cdot T$ und $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{k} \cdot (T - T_\mathrm{u})$

b) Um die Kamera abzukühlen, wird die 20 °C warme Kamera in eine Umgebung mit einer Temperatur von 4 °C gebracht.

- Geben Sie die Funktionsgleichung für $T(t)$ allgemein an. Dokumentieren Sie ihren Lösungsweg.
- Ermitteln Sie die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung für die gegebene Anfangsbedingung.

c) In einer weiteren Beobachtungsnacht wird das Abkühlverhalten der Kamera durch die folgende Funktion beschrieben:

$$T(t) = 25 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k} \cdot t} + 6$$

- Bestimmen Sie den Faktor k, wenn die Kamera nach einer Minute auf 14,93 °C abgekühlt ist.
- Stellen Sie die Funktion in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, nach wie vielen Minuten die Kamera auf 8 °C abgekühlt ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Großtrappen

Aufgabennummer: B-C6_14

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von $G = 1\,000$ an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren
c … Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6{,}143 \cdot e^{-0{,}1369 \cdot t}}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fischwachstum

Aufgabennummer: B-C7_01

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Wachstum von Regenbogenforellen, die als Jungfische ausgesetzt wurden, wird durch Beobachtung markierter Populationen untersucht.

a) Die Länge der Forellen kann mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$L(t) = 71{,}9 \cdot (1 - e^{-0{,}06 \cdot (t+9)})$$

$L(t)$ … Länge in cm zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Monaten ab dem Zeitpunkt des Aussetzens

– Stellen Sie die Funktion L grafisch dar.
– Geben Sie die Länge der Forellen zum Zeitpunkt des Aussetzens sowie nach 10, nach 20 und nach 30 Monaten an und markieren Sie die entsprechenden Punkte in der Grafik.
– Interpretieren Sie die Grafik bezüglich der Entwicklung der mittleren Änderungsrate des Längenwachstums der Forellen in den Zeitintervallen [0; 10], [10; 20] und [20; 30].

b) Eine Funktion zur Beschreibung der Entwicklung der Masse von ausgesetzten Forellen lautet:

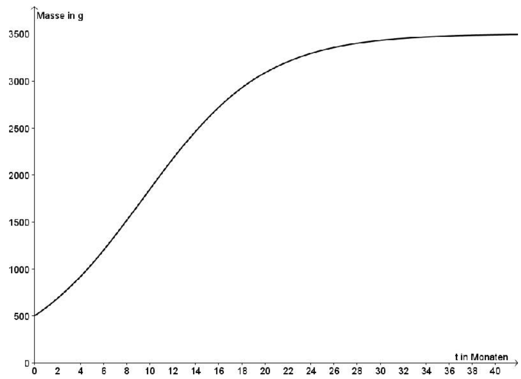
$$M(t) = \frac{3\,500}{1 + 6 \cdot e^{-0{,}19 \cdot t}}$$

$M(t)$ ... Masse in Gramm (g) zum Zeitpunkt t
t ... Zeit in Monaten

Die nebenstehende Grafik stellt diese Funktion dar.

– Argumentieren Sie anhand der Grafik, warum hier ein logistisches Wachstum vorliegt.

– Beschreiben Sie anhand der Funktion, warum sich für steigende t-Werte dieser Verlauf des Funktionsgraphen ergibt.



c) In der Umformung der folgenden Funktionsgleichung nach der Zeit t befindet sich ein Fehler.
– Finden Sie den Fehler und stellen Sie die Umformung richtig.

$$M(t) = \frac{3\,500}{1 + 6 \cdot e^{t}} \qquad \big| \cdot (1 + 6 \cdot e^{t})$$

$$M(t) \cdot (1 + 6 \cdot e^{t}) = 3\,500 \qquad \big| : M(t)$$

$$1 + 6 \cdot e^{t} = \frac{3\,500}{M(t)} \qquad \big| -1$$

$$6 \cdot e^{t} = \frac{3\,500}{M(t)} - 1 \qquad \big| \ln$$

$$t \cdot \ln(6 \cdot e) = \ln\left(\frac{3\,500}{M(t)} - 1\right) \qquad \big| : \ln(6 \cdot e)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{3\,500}{M(t)} - 1\right)}{\ln(6 \cdot e)}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Bakterien

Aufgabennummer: B-C7_08

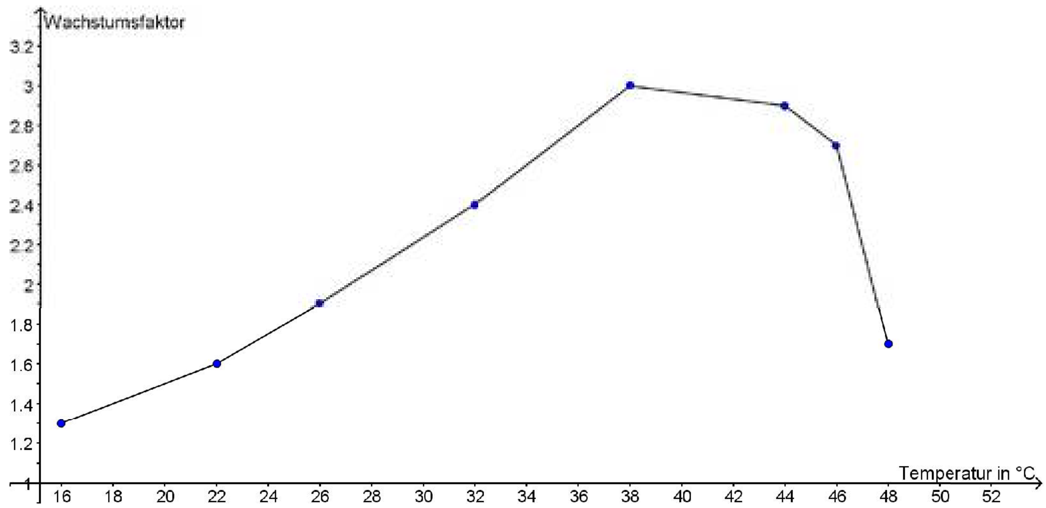
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Milchsäurebakterien haben Stäbchenform (sie sind also annähernd zylindrisch) und vermehren sich durch Zellteilung. Sie haben eine Länge von ca. 2 Mikrometern (µm) und einen Durchmesser von ca. 0,9 µm.

In sauer gewordener Milch wurden in 1 Milliliter (ml) Milch ca. 1 Million Bakterien gemessen.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Milch die Bakterien einnehmen.

b) *Escherichia-coli*-Bakterien im Wasser sind gefährlich für die Gesundheit.
In einem Labor wird deren Anzahl stündlich gemessen. Die Bakterien vermehren sich exponentiell, wobei der Wachstumsfaktor temperaturabhängig ist.
In der nachstehenden Grafik ist der Wachstumsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

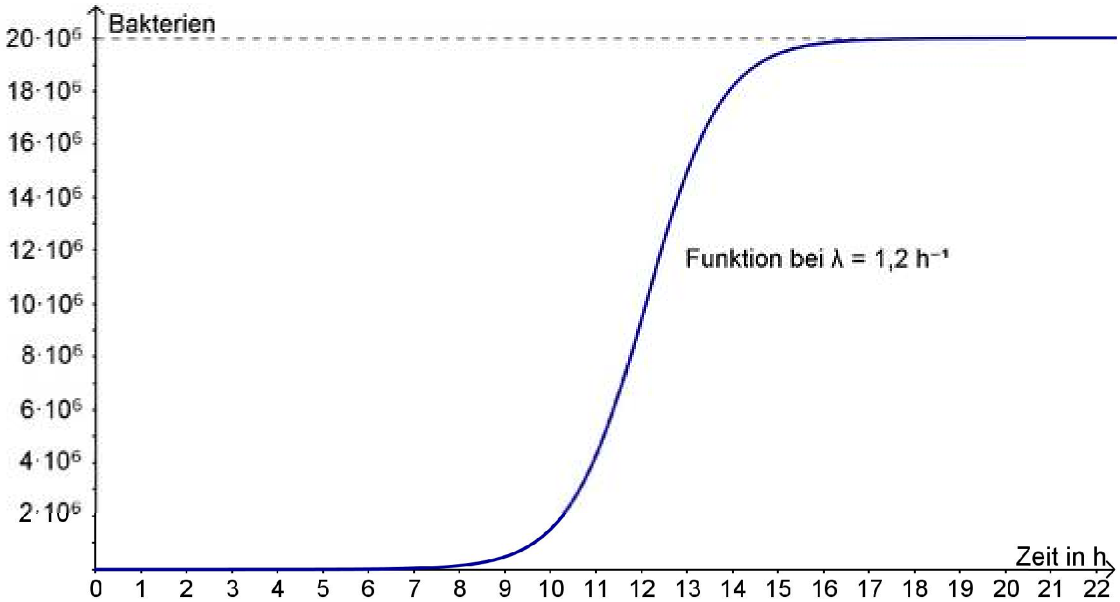


– Lesen Sie den Wachstumsfaktor bei 32 °C warmem Wasser ab.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl von Stunden t, die es dauert, bis sich die *Escherichia-coli*-Bakterien in 32 °C warmem Wasser von einer ursprünglichen Anzahl N_0 auf eine kritische Anzahl K vermehren.

N_0 … ursprüngliche Anzahl der Bakterien vor dem Vermehrungsprozess
K … kritische Anzahl an Bakterien
t … Anzahl der Stunden des Vermehrungsprozesses

– Lösen Sie die erstellte Formel nach t auf.

c) Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Grafik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion N:

$$N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien nach t Stunden
λ … Wachstumsparameter in h^{-1}

– Skizzieren Sie in der Grafik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$.

Betrachten Sie den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion N.

– Erklären Sie, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$ auf $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.
– Erklären Sie, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion N hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.