

Düngersäcke (3)

Aufgabennummer: B_155

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Mehrere Maschinen füllen Säcke mit Dünger ab. Als Füllmenge sind laut Aufdruck 25 kg vorgesehen.

- a) Langfristige Überprüfungen einer bestimmten Maschine haben ergeben, dass die tatsächliche Füllmenge der Säcke mit dem Erwartungswert $\mu = 24,8$ kg und der Standardabweichung $\sigma = 0,2$ kg normalverteilt ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Sack eine geringere Füllmenge als vorgesehen aufweist.
 - Beschreiben Sie, wie man den Prozentsatz dieser Wahrscheinlichkeit anhand einer Skizze ohne genaue Berechnung abschätzen kann.
- b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zu sehen.

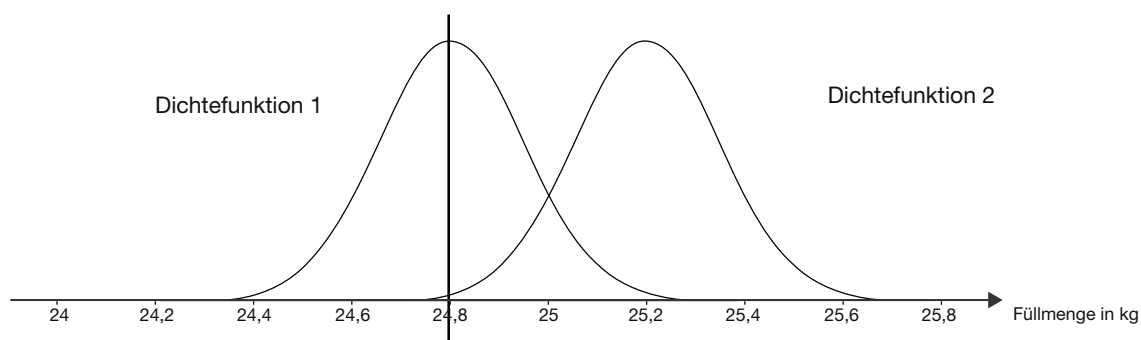


Abbildung 1

Dichtefunktion 1 hat einen Erwartungswert $\mu = 24,8$ kg und eine Standardabweichung $\sigma = 0,2$ kg. Die Dichtefunktion 2 wurde im Vergleich zur Dichtefunktion 1 verändert.

- Beschreiben Sie, welcher Parameter verändert wurde und woran das zu sehen ist.
- Beschreiben Sie, woran zu sehen ist, dass der andere Parameter nicht verändert wurde.

- c) Bei einer bestimmten Abfüllmaschine kann die Füllmenge als normalverteilte Zufallsgröße mit einer Standardabweichung von 0,94 kg und einem Erwartungswert von 25 kg angenommen werden.
Laut Betriebsvorschrift müssen Säcke mit mehr als $\pm \frac{1}{2}$ kg Abweichung vom Erwartungswert nachkorrigiert werden.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge eines zufällig ausgewählten Sackes nachkorrigiert werden muss.

Nach einer Untersuchung wird beschlossen, dass 97 % aller Säcke (symmetrisch um den Erwartungswert) als korrekt abgefüllt betrachtet werden sollen.

- Berechnen Sie, welche Abweichungen vom Erwartungswert nun bei der Abfüllung toleriert werden.

- d) Bei einer Abfüllmaschine eines anderen Fabrikats ist die Füllmenge nicht normalverteilt. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sieht vielmehr so aus:

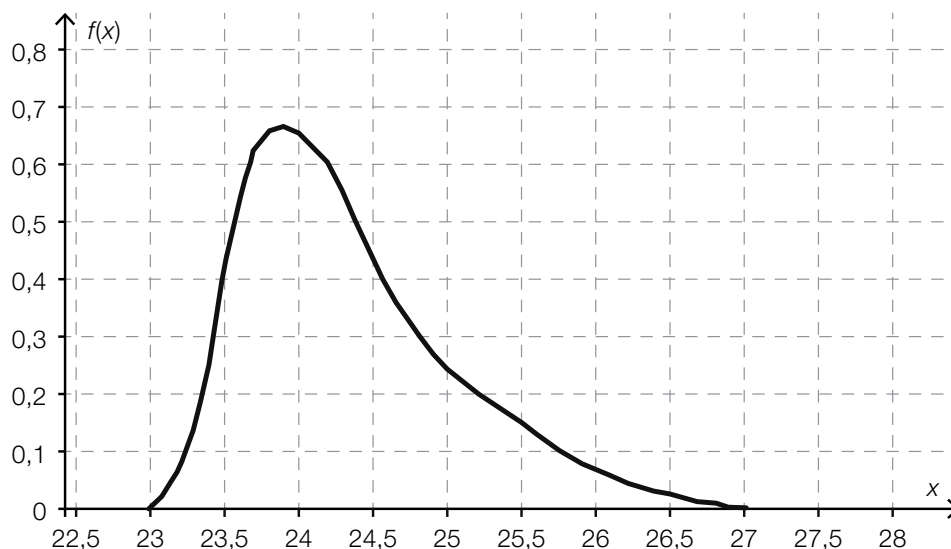


Abbildung 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge zwischen 2 Werten a und b liegt, kann als Flächeninhalt unter der Dichtefunktion zwischen a und b berechnet werden.

Es soll die Wahrscheinlichkeit für eine Füllmenge zwischen 24 kg und 26 kg bestimmt werden.

- Markieren Sie in der oben stehenden Grafik die zur Berechnung benötigte Fläche.
- Schätzen Sie mithilfe der Rasterung die Wahrscheinlichkeit ab, mit der die Füllmenge zwischen 24 kg und 26 kg liegt.

Hinweis zur Aufgabe:

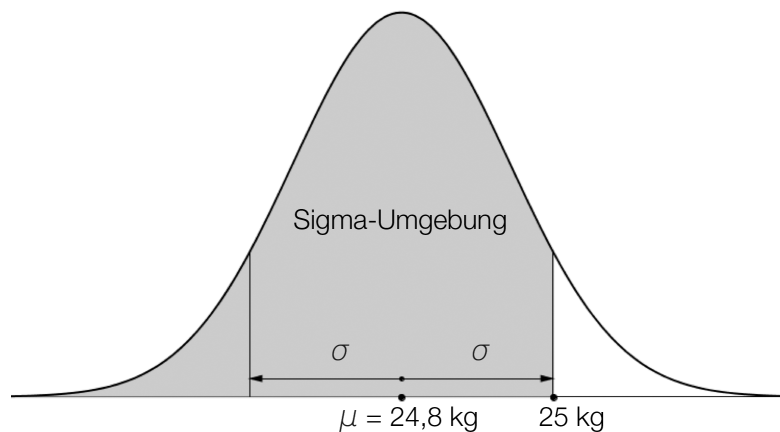
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) $P(X < 25)$ kann für $\mu = 24,8$ kg und $\sigma = 0,2$ kg mittels Technologieeinsatz berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 84,13 %.

Die Differenz zwischen der Soll-Füllmenge und dem Erwartungswert entspricht genau der Standardabweichung.

Der Bereich für $x < 25$ kg besteht daher aus der Sigma-Umgebung ($\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$), das sind ca. 68 %, und der Hälfte des außerhalb der Sigma-Umgebung liegenden Bereiches, das sind ca. 16 %. Gesamt sind es daher ca. 84 %.



- b) – Der Erwartungswert μ ist größer geworden, weil die zweite Kurve den Hochpunkt weiter rechts hat. (Die ganze Kurve ist nach rechts verschoben.)
 – Die Standardabweichung σ ist gleich geblieben, weil die Kurve außer der Verschiebung nach rechts gleich geblieben ist.
- c) $P(X \leq 24,5) = P(X \geq 25,5) = 0,2973...$
 Die Wahrscheinlichkeit, dass nachkorrigiert werden muss, beträgt insgesamt rund 59,5 %.

$$1 - 2 \cdot P(X \leq a) = 0,97$$

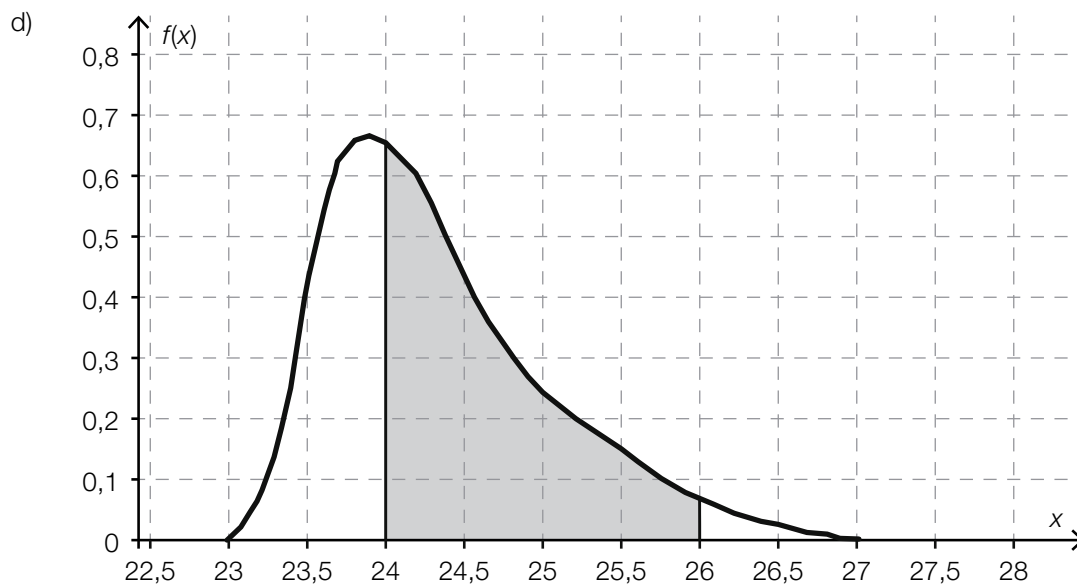
$$P(X \leq a) = 0,015$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a \approx 22,96$ kg ... untere Grenze des Intervalls

$b \approx 27,04$ kg ... obere Grenze des Intervalls

Dass Füllmengen zwischen 22,96 kg und 27,04 kg vorkommen, ist bei den gegebenen Voraussetzungen zu 97 % Wahrscheinlichkeit erfüllt. Die Abweichtoleranz vom Erwartungswert beträgt daher $\pm 2,04$ kg.



Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt: $0,1 \cdot 0,5 = 0,05$.

7 ganze Rechtecke und rund 4,5 Rechtecke am Rand ergeben einen Flächeninhalt von rund 0,575.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge eines zufällig ausgewählten Sackes zwischen 24 kg und 26 kg liegt, beträgt grob geschätzt 58 %.

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) —
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2
- c) 2
- d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —