USB-Sticks

Aufgabennummer: B-C8_02

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Firma bringt USB-Sticks auf den Markt.

a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	–1,4	6,4	1,4

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Ermitteln Sie die Gleichung der Gewinnfunktion.
– Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
– Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

b) Die Erlösfunktion E beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$$

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von x ME

– Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
– Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall [9; 15].
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für das Erlösmaximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x an, die diese Kriterien erfüllt. *[1 aus 5]*

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis pro Mengeneinheit in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) bei einem Absatz von x in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.
Beachten Sie, dass die Funktionen – wie in der Wirtschaftsmathematik üblich – näherungsweise als stetig angenommen werden, obwohl es sich um diskrete Werte handelt.

Möglicher Lösungsweg

a) Mit Einsetzen in $G(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$G(0) = -1{,}4$: $c = -1{,}4$

$G(10) = 6{,}4$: $10^2a + 10b = 6{,}4 + 1{,}4$

$G(20) = 1{,}4$: $\underline{20^2a + 20b = 1{,}4 + 1{,}4}$

Lösung mit Technologieeinsatz:

$a = -0{,}064$ $b = 1{,}42$ $c = -1{,}4$

Gewinnfunktion G mit: $G(x) = -0{,}064x^2 + 1{,}42x - 1{,}4$

c gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die x-Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von G markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point".

b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.

Nullstellen des Graphen der Erlösfunktion: $-1{,}25x^2 + 21x = 0$,

$x_1 = 0$ (untere Erlösgrenze), $x_2 = 16{,}8$ (obere Erlösgrenze) → $D = [0; 16{,}8]$

mittlere Änderungsrate:

$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(12) - E(9)}{15 - 9}$

$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$

$E'(x) = -2{,}5x + 21 = 0$

$x = \frac{21}{2{,}5} = 8{,}4$

$E(8{,}4) = 88{,}2$

Der maximale Erlös wird bei der Verkaufsmenge von 8,4 ME von USB-Sticks erzielt.

Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.

Zum Nachweis eines Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion E an der berechneten Extremstelle. Die Erlösfunktion hat im Falle der quadratischen Gleichung nur eine Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor.

c)

[...]	
[...]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6, 7, 8

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –