Kostenanalyse

Aufgabennummer: B-C6_24

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt im Wesentlichen 2 verschiedene Produkte her. Um gewinnbringend zu produzieren, wurden jeweils die bei der Produktion anfallenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge untersucht. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x erzeugten ME in Geldeinheiten (GE)

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten des 1. Produkts bei unterschiedlichen Produktionsmengen aufgelistet.

x	0	10	20	30	40	50	60
$K(x)$	49	58	74	100	132	173	222

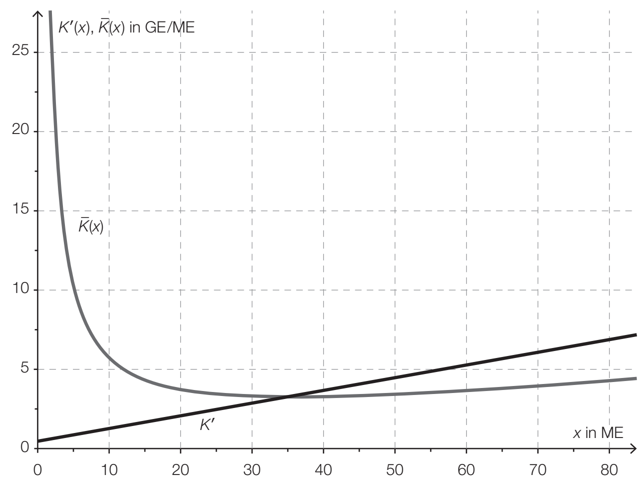
– Stellen Sie die Wertepaare in einem Koordinatensystem dar.

Die Abhängigkeit der Kosten von der Produktionsmenge soll durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

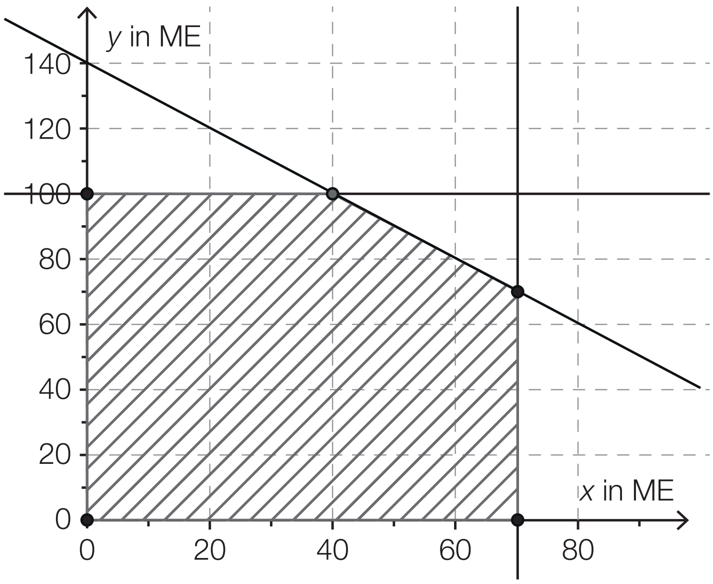
– Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Kostenfunktion mittels Regression.

b) Die nebenstehende Grafik stellt die Stückkosten $\overline{K}$ und die Grenzkosten K' im Herstellungsprozess des 2. Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge dar.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Schnittpunkts dieser Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
– Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze aus der Grafik ab.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze mithilfe der Differenzialrechnung berechnen kann.



c) Der Betrieb kann täglich die in der nachstehenden Grafik im schraffierten Lösungsbereich angezeigten Mengen x des 1. Produkts und y des 2. Produkts herstellen. Die Mengen sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.
Die Herstellungskosten für 1 ME des 1. Produkts betragen 21 GE/ME, jene für das 2. Produkt 15 GE/ME.
Die Verkaufspreise betragen für 1 ME des 1. Produkts 51 GE/ME und für das 2. Produkt 39 GE/ME.
Die Produktionsmengen der beiden Produkte sollen so gewählt werden, dass insgesamt ein möglichst hoher Gewinn erwirtschaftet wird.



– Stellen Sie die zugehörige Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Gewinns auf.
– Zeichnen Sie die zur Zielfunktion passende Gerade durch den Koordinatenursprung in die obige Grafik ein.
– Ermitteln Sie, wie viel von jedem Produkt gefertigt werden soll, damit der Gewinn maximal ist.

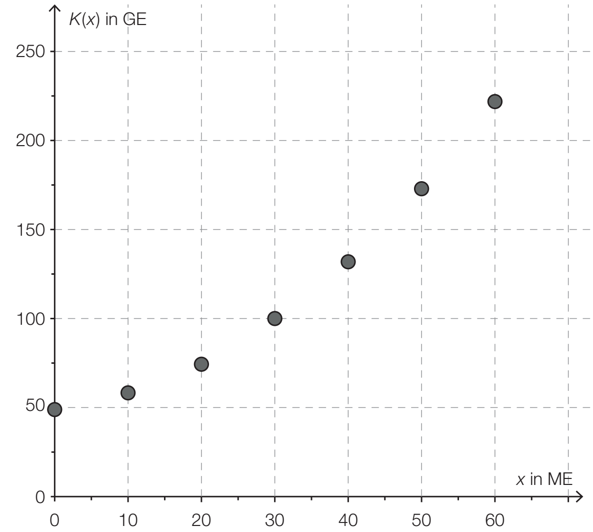
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Mittels Technologieeinsatz kann man die Regressionsfunktion berechnen:

$K(x) = 0{,}04x^2 + 0{,}475x + 49{,}02$



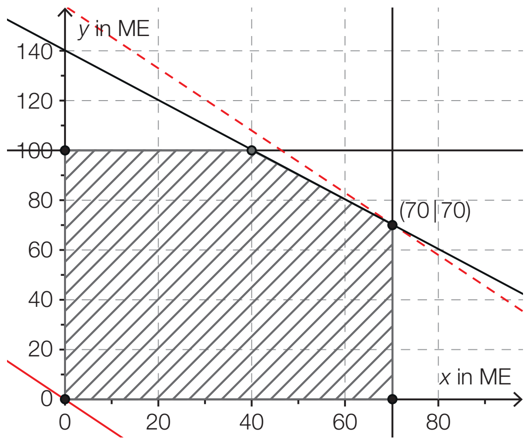
b) Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ist die Minimumstelle der Stückkostenfunktion, also das Betriebsoptimum.
Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei etwa 3,5 GE/ME (Toleranzintervall: [3; 4]).
Mithilfe der Differenzialrechnung löst man die Gleichung $\overline{K}'(x) = 0$.
Die Lösung der Gleichung liefert das Betriebsoptimum x_O und das Einsetzen von x_O in $\overline{K}(x)$ die Höhe der langfristigen Preisuntergrenze.

c) x … Menge von Produkt 1 in ME
y … Menge von Produkt 2 in ME

$z(x, y) = 30 \cdot x + 24 \cdot y$

Gerade durch den Koordinatenursprung:
$y = -\frac{30x}{24}$

Es sollen täglich 70 ME des 1. Produkts und 70 ME des 2. Produkts gefertigt werden.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –