Informelle Kompetenzmessung
zur standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Jänner 2015

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)
Prüfungsaufgabensammlung

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

- Jede Berechnung ist mit einem nachvollziehbaren Rechenansatz und einer nachvollziehbaren Dokumentation des Technologieeinsatzes (die verwendeten Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben werden) durchzuführen.

- Selbst gewählte Variablen sind zu erklären und gegebenenfalls mit Einheiten zu benennen.

- Ergebnisse sind eindeutig hervorzuheben.

- Ergebnisse sind mit entsprechenden Einheiten anzugeben.

- Werden Diagramme und Skizzen als Lösungen erstellt, so sind die Achsen zu skalieren und zu beschriften.

- Werden geometrische Skizzen erstellt, so sind die lösungsrelevanten Teile zu beschriften.

- Vermeiden Sie frühzeitiges Runden.

- Legen Sie allfällige Computerausdrucke der Lösung mit Ihrem Namen beschriftet bei.

- Wird eine Aufgabe mehrfach gerechnet, so sind alle Lösungswege bis auf einen zu streichen.

Aufgabe 1

Bevölkerungswachstum und -abnahme

Die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$N(t) = 82{,}5 \cdot e^{-0{,}00043347 \cdot t}$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005
$N(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

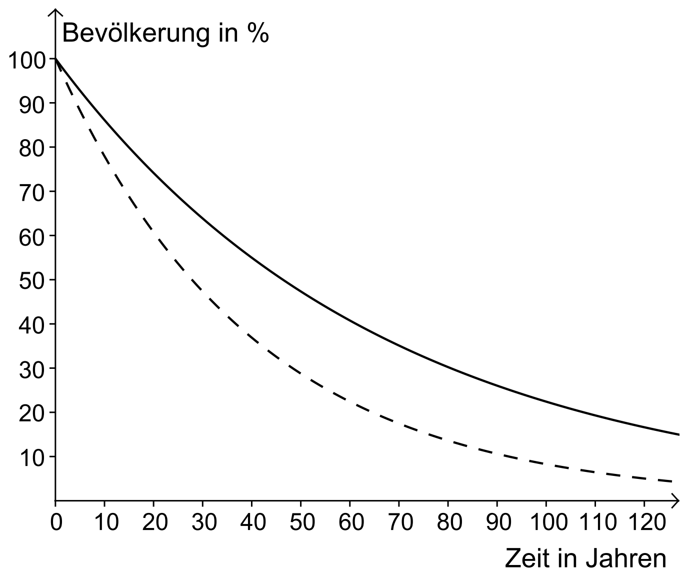
– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt. *[1 Punkt]*

c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten. *[1 Punkt]*



d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

(1) $N = 8 \cdot 1{,}02^t$
(2) $\ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1{,}02)$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig. *[1 Punkt]*

Aufgabe 2

Die Streif

Jedes Jahr findet auf der Kitzbüheler *Streif* das weltberühmte *Hahnenkammrennen* statt. Die Veranstalter dieses Rennens veröffentlichten folgende Daten über eine Trainingsfahrt für den Abfahrtslauf:

Zeit in Sekunden	Name des Streckenpunkts	Meereshöhe in Metern	zurückgelegter Weg in Metern
0,0	Start	1665	0
8,5	Mausefalle	1605	160
39,3	Gschöss	1386	853
49,2	Alte Schneise	1331	1292
63,2	Seidlalm	1244	1609
118,1	Zielschuss	922	2906
131,6	Ziel	805	3312

a) – Beschreiben Sie, was mit dem Quotienten $\frac{1292\text{ m} - 853\text{ m}}{49{,}2\text{ s} - 39{,}3\text{ s}}$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird. *[1 Punkt]*

b) – Berechnen Sie für diese Trainingsfahrt den Neigungswinkel, der der mittleren Steigung entspricht. *[1 Punkt]*

c) Die Geschwindigkeit einer anderen Trainingsfahrt in Abhängigkeit von der Zeit kann für einen Abschnitt durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}045 \cdot t^2 + 6{,}594 \cdot t - 204{,}571$ mit $60 \leq t \leq 90$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit in diesem Abschnitt maximal ist. *[1 Punkt]*
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der der Weg, der in diesem Abschnitt zurückgelegt wird, berechnet werden kann. *[1 Punkt]*

d) Der in einem Abschnitt zurückgelegte Weg s ist eine Funktion der Zeit t.

– Beschreiben Sie, wie man – ausgehend von dieser Weg-Zeit-Funktion – die Momentangeschwindigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt dieses Abschnitts ermitteln kann. *[1 Punkt]*

Aufgabe 3

Planeten

Die folgenden Daten zu den Planeten unseres Sonnensystems sind gegeben:

	Merkur	Venus	Erde	Mars
große Bahnhalbachse in km	57 909 175	108 208 930	149 597 890	227 936 640
mittlerer Äquatorradius in km	2 440	6 050	6 380	3 400
	Jupiter	**Saturn**	**Uranus**	**Neptun**
große Bahnhalbachse in km	778 412 020	1 426 725 400	2 870 972 200	4 498 252 900
mittlerer Äquatorradius in km	71 490	60 270	25 560	24 760

a) Für eine Astronomie-Ausstellung sollen die Planeten maßstabgetreu verkleinert als Kugelmodelle aufgestellt werden. Die größte vorhandene Kugel hat einen Radius von 42 cm und ist für den Planeten Jupiter reserviert.

– Erklären Sie, warum eine Kugel mit einem Radius von ca. 2 cm für den Planeten Mars passt. *[1 Punkt]*

b) Das 3. Kepler'sche Gesetz lautet: „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen." Daher gilt:

$a_1^3 : a_2^3 = u_1^2 : u_2^2$

a_1 ... große Bahnhalbachse des Planeten 1
a_2 ... große Bahnhalbachse des Planeten 2
u_1 ... Umlaufzeit des Planeten 1
u_2 ... Umlaufzeit des Planeten 2

– Berechnen Sie die Umlaufzeit des Planeten Neptun. (Hinweis: Die Umlaufzeit der Erde beträgt 1 Jahr.) *[1 Punkt]*

c) Die großen Bahnhalbachsen zweier Planeten sollen auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden. Dabei soll 1 cm auf dem Zahlenstrahl einer tatsächlichen Streckenlänge von 10^8 km entsprechen.

– Veranschaulichen Sie auf einem solchen Zahlenstrahl jeweils ausgehend vom Nullpunkt die großen Bahnhalbachsen der Planeten Erde und Saturn. *[1 Punkt]*

Aufgabe 4

Diabetes

In Österreich leiden 4,6 % der Bevölkerung an Diabetes („Zuckerkrankheit“).

a) Im Jahr 2014 hatte Österreich 8,5 Millionen Einwohner/innen.

– Berechnen Sie, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2014 an Diabetes leiden. *[1 Punkt]*

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern mindestens 2 an Diabetes leiden. *[2 Punkte]*

c) Die Wirksamkeit eines neuen Medikaments soll an 120 Personen getestet werden. 70 Personen erhalten das Medikament, der Rest erhält ein Placebo (Medikament ohne Wirkstoff).

Von den 120 Personen werden 2 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine von ihnen ein Placebo erhält, kann man folgendermaßen berechnen:

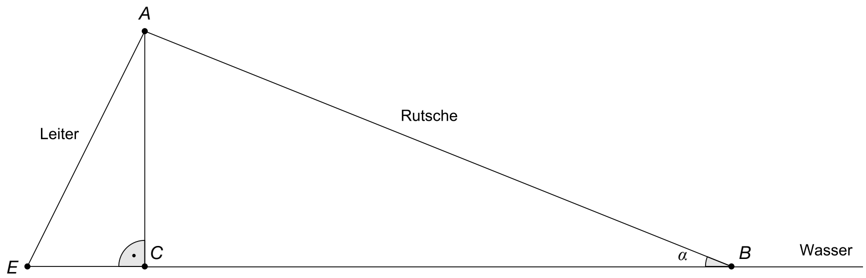
$$\frac{70}{120} \cdot \frac{50}{119} \cdot 2$$

– Erklären Sie die Bedeutung der beiden Brüche in diesem Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Erklären Sie die Bedeutung des Faktors 2 in diesem Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

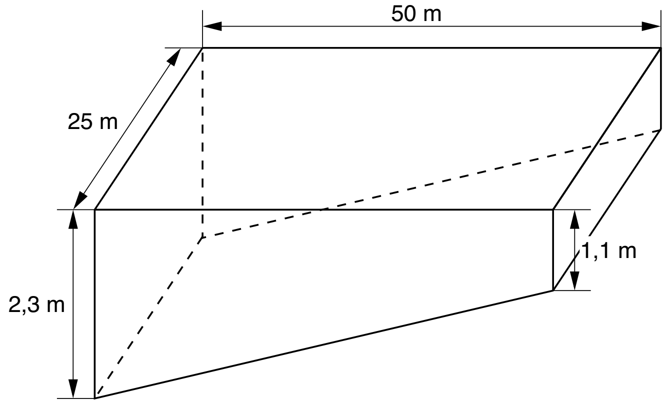
Schwimmbad

a) Im Kinderbereich eines Schwimmbads soll eine Kinderrutsche errichtet werden.
Die unten stehende, stark vereinfachte Abbildung veranschaulicht den Aufbau dieser Kinderrutsche (nicht maßstabgetreu).
Die Rutsche taucht unter einem Winkel von $\alpha = 20°$ bei Punkt B ins Wasser ein und ist 3 Meter lang ($\overline{AB}$). Der Abstand zwischen den Punkten E und C beträgt 0,5 Meter.



– Berechnen Sie die Länge der Leiter $\overline{AE}$, die für diese Kinderrutsche benötigt wird. *[2 Punkte]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Abmessungen eines Schwimmbeckens eingezeichnet (nicht maßstabgetreu):



Dieses Schwimmbecken soll vollständig befüllt werden. Die Hygienevorschriften sehen vor, dass pro Liter Wasser 0,3 Milligramm eines bestimmten Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen.

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm dieses Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen. *[2 Punkte]*

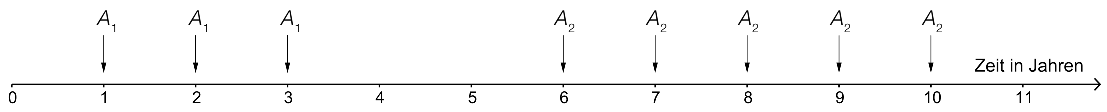
c) Zur Reinigung eines Schwimmbeckens muss das Wasser abgelassen werden. Zu Beginn sind 2 Millionen Liter Wasser im Becken. Mithilfe von Pumpen werden gleichmäßig 5 000 Liter pro Minute abgesaugt.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die noch im Becken vorhandene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie, wie lange das Abpumpen der gesamten Wassermenge dauert. *[1 Punkt]*

Aufgabe 6 (Teil B)

Kreditrückzahlung

Für den Kauf eines Grundstücks nimmt Herr Maier einen Kredit auf.
Ursprünglich vereinbart er mit seiner Bank, diesen innerhalb von 10 Jahren in Form von gleich hohen, nachschüssigen, jährlichen Annuitäten A_1 zurückzuzahlen. Dieser Plan ändert sich jedoch.
Der tatsächliche Verlauf der vollständigen Rückzahlung von Herrn Maier ist auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



a) In den ersten 3 Jahren läuft die Kredittilgung nach dem ursprünglichen Plan. Für das 3. Jahr der Rückzahlung ergeben sich folgende Einträge im Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Zinssatz dieser Kredittilgung. *[1 Punkt]*
– Berechnen Sie die ursprüngliche Kredithöhe. *[1 Punkt]*

b) Fassen Sie die tatsächlich erfolgten Zahlungen wie in der oben dargestellten Zeitachse als 2 nachschüssige Renten mit Annuitäten A_1 und A_2 auf.

– Übersetzen Sie den oben dargestellten Zahlungsstrom in einen passenden Text, der den Rückzahlungsverlauf beschreibt. *[1 Punkt]*
– Markieren Sie jeweils die Bezugszeitpunkte für die Barwerte und die Endwerte der beiden Renten in der oben dargestellten Zeitachse. *[2 Punkte]*

c) Nach dem Bezahlen der Annuitäten A_1 verbleibt am Ende des 3. Jahres eine Restschuld.

– Begründen Sie, warum sich die Höhe dieser Restschuld bis zum Ende des 5. Jahres ändert. *[1 Punkt]*

d) Am Ende des 5. Jahres beträgt die verbleibende Schuld € 116.228,82.
Eine weitere Rückzahlungsvariante, die die Laufzeit verlängert hätte, wäre gewesen:
Herr Maier zahlt weiterhin jährlich Annuitäten in Höhe von € 17.584,60.
Die Bank verlangt ab dem 6. Jahr Zinsen in Höhe von 3,5 % p. a.

Die vorletzte Zeile des sich daraus ergebenden Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75

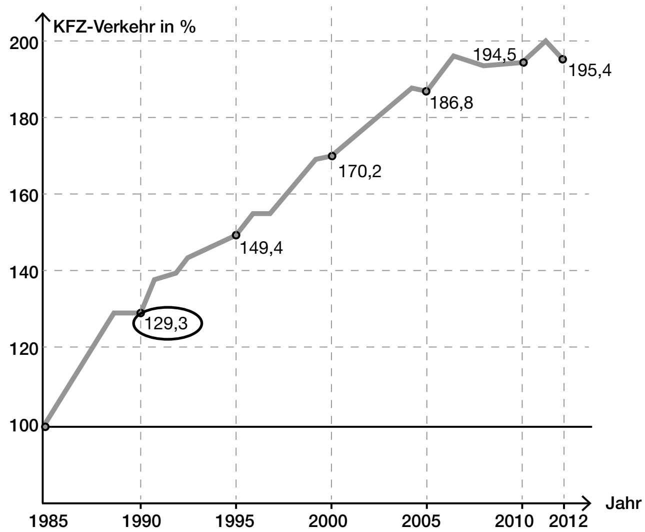
- Bestimmen Sie, in welchem Jahr (vom Zeitpunkt der Aufnahme des Kredits) die Zahlung erfolgt, die in dieser Zeile des Tilgungsplans dargestellt ist. *[1 Punkt]*
- Ermitteln Sie die letzte Zeile dieses Tilgungsplans. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7 (Teil B)

Straßenverkehr in Tirol

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

– Interpretieren Sie die Bedeutung des folgenden Rechenausdrucks in diesem Sachzusammenhang:

$$\sqrt[10]{\frac{170{,}2}{129{,}3}} - 1 \approx 0{,}0279$$ *[1 Punkt]*

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$. *[1 Punkt]*

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013. *[1 Punkt]*

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28\,017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt. *[1 Punkt]*

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
$y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum. *[1 Punkt]*

Aufgabe 8 (Teil B)

Junguntenehmerin

Eine Jungunternehmerin übernimmt einen Betrieb. Daher informiert sie sich über die Preis- und Kostensituation der Produkte.

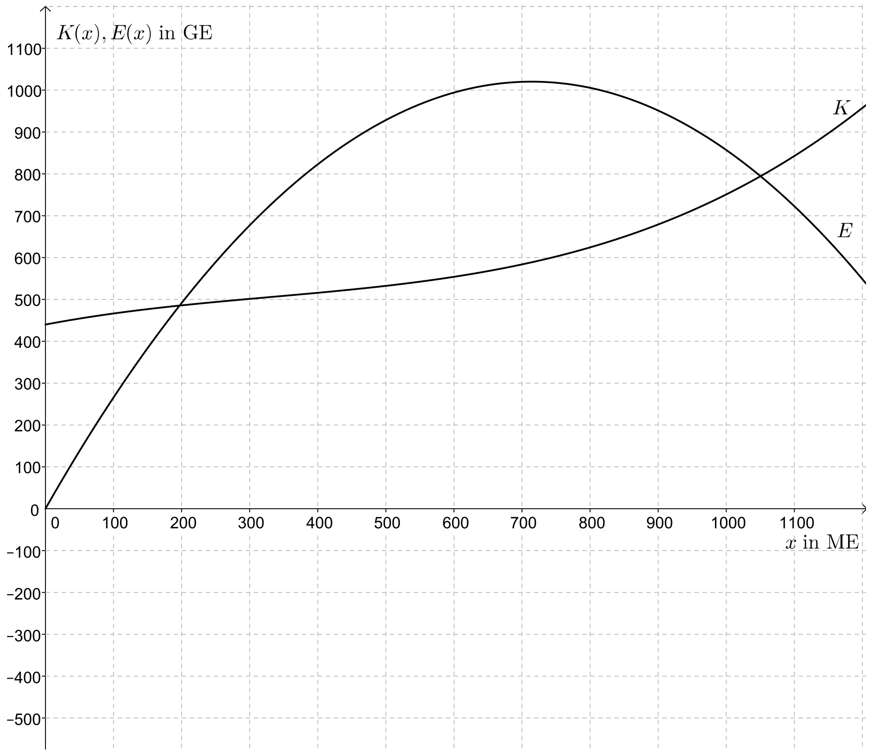
a) Die Preisfunktionen für das Angebot p_A und für die Nachfrage p_N eines Produktes sind gegeben:

$p_A(x) = \frac{x^2}{10} + 1$
$p_N(x) = -3 \cdot x + 8$

x ... angebotene bzw. nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p_A(x)$ ... Angebotspreis bei x ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)
$p_N(x)$ ... Nachfragepreis bei x ME in GE/ME

– Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen im Intervall [0; 5] in ein gemeinsames Koordinatensystem. *[1 Punkt]*
– Markieren Sie in der Grafik die Menge, bei der der Markt gesättigt ist. *[1 Punkt]*
– Interpretieren Sie die Bedeutung des *y*-Achsenabschnitts der Preisfunktion des Angebots im Sachzusammenhang. *[1 Punkt]*
– Bestimmen Sie den Marktgleichgewichtspreis. *[1 Punkt]*

b) In der nachstehenden Grafik sind Funktionsgraphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines Produktes dargestellt:



– Lesen Sie aus der Grafik den Gewinnbereich ab. *[1 Punkt]*
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion in die vorgegebene Grafik ein. *[1 Punkt]*

c) Die Grenzkostenfunktion eines weiteren Produktes ist gegeben: $K'(x) = 6 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 64$.
Die Kosten für die Produktion von 2 ME betragen 72 GE.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion K auf. *[2 Punkte]*