Bundesinstitut bifie
Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Sparkonto

Aufgabennummer: B-C6_04

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf ein Sparkonto zahlt Karin 18 Jahre lang jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.

a) Der in der Zeit t (in Jahren) angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KESt mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

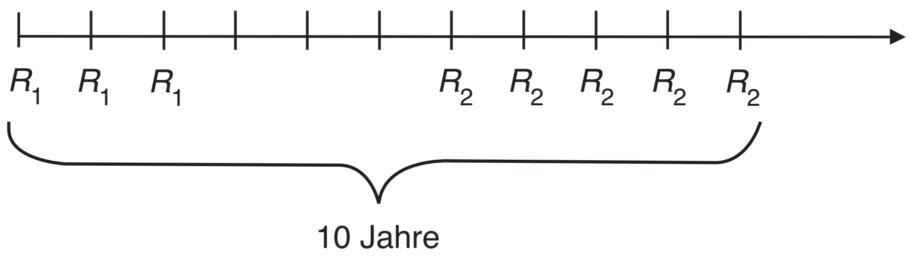
$$K(t) = 500 \cdot \frac{1{,}01125^{t} - 1}{0{,}01125}$$

$K(t)$ … Kapital in Euro (€) nach t Jahren
t … Zeit in Jahren

– Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
– Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen angesparten Betrag in Höhe von € 10.000. Er wird mit einem jährlichen Zinssatz von i = 1,2 % weiter verzinst. Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.
– Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
– Ermitteln Sie, wie viel die Restzahlung zum Zeitpunkt der letzten Abhebung beträgt. (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt.)

c) Karin tätigt die in der gegebenen Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



– Interpretieren Sie den Sachverhalt.
– Geben Sie eine Formel an, mit der der Wert aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung mithilfe passender finanzmathematischer Formeln berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem jährlichen Zinssatz i aus.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrate wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$$K(n) = R \cdot \frac{r^n - 1}{i}$$

R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
r ... Aufzinsungsfaktor
$r = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$n = t$ (jährliche Einzahlung),
$R = €\ 500$,
$r = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen bei $i = 1{,}2\ \%$:

Ansatz: $200 \cdot v_{12} \cdot \frac{v_{12}{}^n - 1}{v_{12} - 1} = 10\,000$, $v_{12} = \left(\frac{1}{1{,}012}\right)^{1/12}$ … monatlicher, konformer Abzinsungsfaktor
Es sind auch andere Ansätze möglich, die zum richtigen Ergebnis führen!

Lösung mit Technologieeinsatz:
$n = 51{,}311\ldots$

Karin kann genau 51-mal € 200,00 monatlich abheben.

Restzahlung zum Zeitpunkt der letzten Abhebung:

Rest $= 10\,000 \cdot r_{12}{}^{51} - 200 \cdot \frac{r_{12}{}^{51} - 1}{r_{12} - 1}$, $r_{12} = 1{,}012^{1/12}$ … monatlicher, konformer Aufzinsungsfaktor
Lösung mit Technologieeinsatz:
Die Restzahlung zum Zeitpunkt der letzten Abhebung beträgt rund € 62,26.

c) Die Zeitlinie stellt dar, dass Karin zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 abhebt. Im 4. und 5. Jahr wird nichts abgehoben.
Ab dem 6. Jahr hebt Karin jeweils 5-mal am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

Die Formel für den Barwert kann wie folgt entwickelt werden:
Die Abkürzung v wird definiert: $v = (1 + i)^{-1}$

$$B = R_1 \cdot \frac{v^3 - 1}{v - 1} + R_2 \cdot v^6 \cdot \frac{v^5 - 1}{v - 1}$$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –