

Bevölkerungswachstum und -abnahme*

Aufgabennummer: A_152

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

- a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$$N(t) = 82,5 \cdot e^{-0,00043347 \cdot t}$$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005

$N(t)$... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

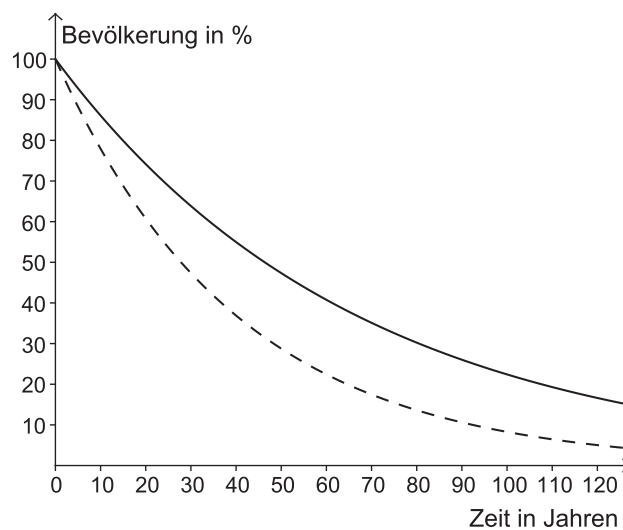
- b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.

– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.
- Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



- d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

(1) $N = 8 \cdot 1,02^t$

(2) $\ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1,02)$

- Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

b) $A(t) = 8,402 \cdot 1,003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011

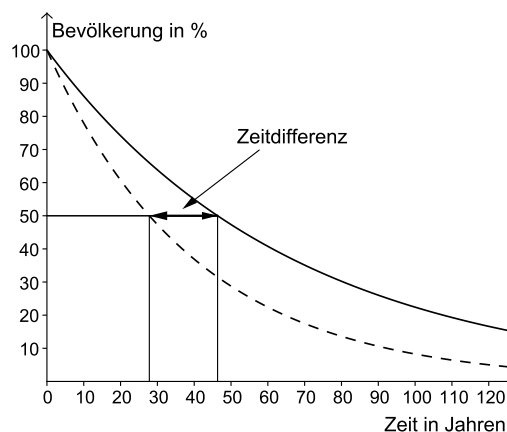
$A(t)$... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$$8,402 \cdot 1,003^t = 10$$

$$t \approx 58,13$$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1,02)$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Interpretation
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung des Kalenderjahrs
- c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Zeitdifferenz
- d) 1 × B: für das Richtigstellen der logarithmierten Gleichung (2)