

Rücklage

Aufgabennummer: B-C6_09

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto an.

Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.

Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt und es gibt keine Kontoführungsgebühr.

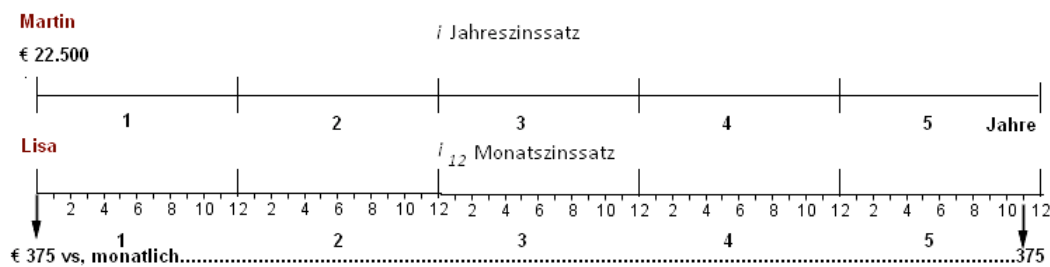
- a) – Erstellen Sie für den Geldwert der beiden Rücklagen je eine Zeitlinie mit jährlichen Abständen.
 – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den monatlichen gleichwertigen Zinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann. (Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)
- b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.
 – Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
 – Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
 Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
 (Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)
- c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.
 Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige jährliche Raten von € 4.500 erhalten. Sie wünscht, dass der Zinssatz so hoch gewählt werden soll, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.
 – Berechnen Sie, wie groß der jährliche Zinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 % pro Jahr.
 Runden Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen.

Hinweis zur Aufgabe:

Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeitlinie



Zinssätze werden normalerweise in Prozent pro Jahr angegeben (auch wenn sie unterjährig fließen). Ein gleichwertiger monatlicher Zinssatz führt bei monatlicher Verzinsung in einem Jahr zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.

Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:

$$E = K_0 \cdot (1 + i)$$

Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:

$$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$$

Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$$

Aus diesem Ansatz lässt sich der gleichwertige Monatszinssatz i_{12} berechnen.

b) Martin bekommt bar € 22.500.

Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.

Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:

{375; 374,25; 373,5 ...}

Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500

$$\text{Lisa: } 375 \cdot 1,002^{-59} \cdot \frac{1,002^{60} - 1}{0,002} = 21\,224,852... \approx 21\,225$$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

Der Rechenweg ist offen und kann anders sein als hier.

c) Rechenansatz: $2,5 \cdot 0,75 = 1,875$... Berücksichtigung der KEST bei Martin

$$22\,500 \cdot 1,01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

Lösung mit Technologieeinsatz: $r = 1,046457...$

Dies entspricht ungefähr 4,65 % nach KEST.

Bei rund 4,65 % Jahresverzinsung, die bereits die KEST berücksichtigt, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Es sind auch andere Rechenwege möglich!

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —