Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Aufgabennummer: B-C6_19

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Gesamtkosten K für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$.
2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.

a) Nur einer der beiden unten abgebildeten Graphen stellt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dar.

– Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in Abb. 2 keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreibt.
– Lesen Sie aus dem Graphen der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion die Kostenkehre ab.
– Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Kostenkehre die Stückkosten an dieser Stelle.

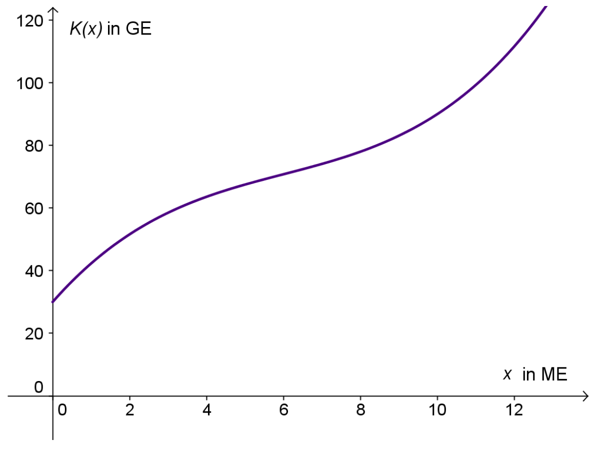

Abb. 1

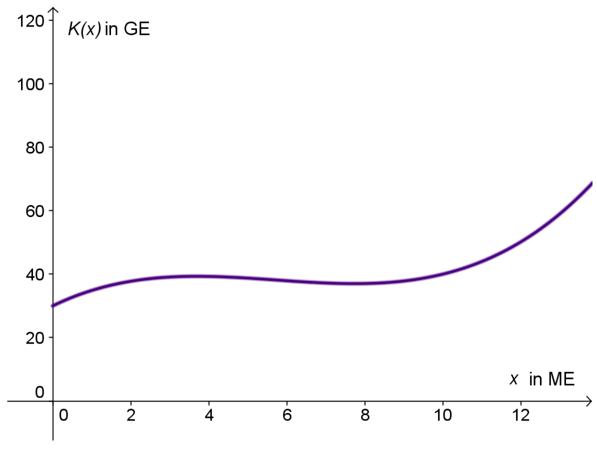

Abb. 2

b) – Begründen Sie, warum die Funktion K mit

$$K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}6x^2 + 12x + 20$$

die 4 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion erfüllt.

c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle $x = 2$ ME einen Anstieg $k = 5{,}7$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Graph in Abb. 2 erfüllt 2 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nicht.
Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion hat ein lokales Maximum (bei ca. 4 ME) und ein lokales Minimum (bei ca. 8 ME).
Die 3. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion steigt nicht streng monoton. Sie fällt im Bereich von ca. 4 ME bis ca. 8 ME.

Abb.1: Die Kostenkehre liegt bei ca. 6 ME. Toleranzbereich: ±0,5 ME.
Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen ca. 70 GE, die Stückkosten an der Kostenkehre betragen daher ungefähr 11,67 GE/ME.

b) $K(0) = 20$ … positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$
$K'(x) = 0{,}3x^2 - 3{,}2x + 12 = 0$, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
Es existieren keine Extremwerte.

Wenn der Funktionsgraph im gesamten Bereich monoton steigt, dann muss $K'(x)$ für alle x größer als null sein.
Der Graph von K' ist eine nach oben offene Parabel, weil der Koeffizient vor x^2 positiv ist. Weil die Ableitungsfunktion K' keine Nullstelle hat, sind alle Funktionswerte positiv.
Die Funktion K steigt daher monoton.

$K''(x) = 0{,}6x - 3{,}2 = 0 \Rightarrow x = 5{,}33$
Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten.
$K''(x)$ ist positiv für $x > 5{,}33$, denn K' ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung.
D. h., das Krümmungsverhalten ist nach der Wendestelle progressiv und vor der Wendestelle daher degressiv.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$K''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Es gelten die folgenden Gleichungen:
$K(0) = 25$: $d = 25$
$K(5) = 53{,}8$: $125a + 25b + 5c + d = 53{,}8$
$K'(2) = 5{,}7$: $12a + 4b + c = 5{,}7$
$\underline{K''(5) = 0\text{:} \quad 30a + 2b = 0}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —