Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

Angewandte Mathematik

Korrekturheft

Haupttermin 2013

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Aufgabe 1

Temperaturumrechnung

Möglicher Lösungsweg

a) Variablenbenennungen: C ... Temperatur in °C, F ... Temperatur in °F

$F = (C + 40) \cdot 1{,}8 - 40$

Andere Bezeichungen für die Variablen sind zulässig.

b) Aus der Formel werden zwei Wertepaare für $(C|F)$ berechnet und es wird gezeigt, dass diese zwei Punkte auf der Geraden liegen.

oder

Auf der Geraden werden zwei Punkte ausgewählt und die Wertepaare $(C|F)$ werden in die Gleichung eingesetzt und die Gleichheit wird verifiziert.

oder

Die Formel wird auf $C = 0{,}\overline{5} \cdot F - 17{,}\overline{7}$ umgeformt und mit der aus der Geraden abgelesenen Steigung (Steigungsdreieck → $0{,}\overline{5} = \frac{5}{9}$) und dem Ordinatenabschnitt (→ $-17{,}\overline{7}$) verglichen.

c) Gesucht ist die Temperatur, für die $F = C$ gilt, also die Lösung der Gleichung $F = \frac{9}{5} \cdot F + 32$:
$F = -40$.

Die gleiche Temperaturangabe gilt für $F = -40$ °F und $C = -40$ °C.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Aufstellen der Beziehung $F = (C + 40) \cdot 1{,}8 - 40$ oder äquivalenter Ausdrücke
b) 1 × D: für eine mathematisch vollständig korrekte Begründung
c) 1 × A: für den Ansatz $F = C$
1 × B: für die richtige Lösung

Aufgabe 2

Koffein

Möglicher Lösungsweg

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e:
$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
Umformung liefert $\lambda = 0{,}4621$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t}$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zum Zeitpunkt t
t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a:
$0{,}5 = a^{1{,}5}$
$a = 0{,}62996$

$N(t) = 80 \cdot 0{,}62996^t$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zum Zeitpunkt t
t ... Zeit in Stunden

b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:
$t = 4$ h
$N_0 = 80$ mg
$N(4) = 80 \cdot 0{,}39685^4 = 1{,}98424$

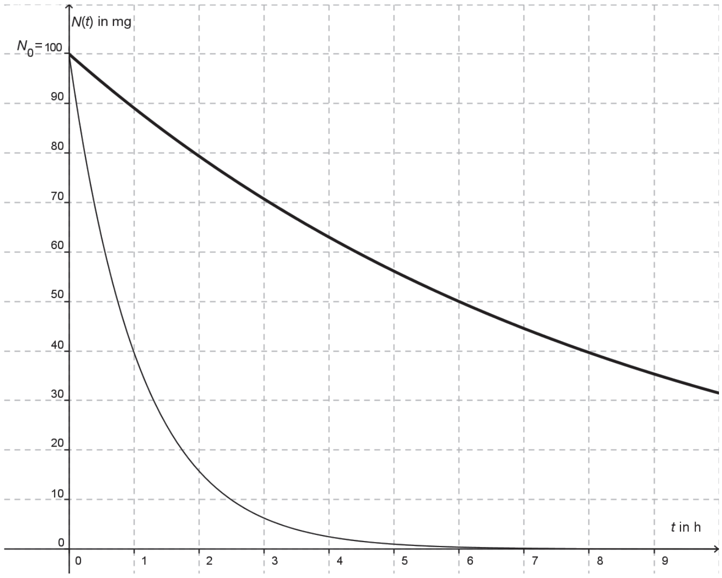
90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:
$t = 2{,}5$ h
$N_0 = 90$ mg
$N(2{,}5) = 90 \cdot 0{,}39685^{2{,}5} = 8{,}92911$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: $1{,}98424 + 8{,}92911 = 10{,}91335$

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls zulässig.

c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0{,}39685^{0{,}5}$

$N_0 = \dfrac{500}{0{,}39685^{0{,}5}} = 793{,}7$

$\dfrac{793{,}7}{80} = 9{,}921$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Auffinden des korrekten Modells (Funktionsgleichung)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Parameters und die korrekte und vollständige Angabe der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für die Berücksichtigung der unterschiedlichen Bezugszeitpunkte
1 × B: für die korrekte Berechnung

c) 1 × A: wenn aus dem Graphen klar ersichtlich ist, dass die Abnahme pro Zeiteinheit geringer wird; der Graph muss durch den Punkt (6|50) gehen

d) 1 × B: für die korrekte Berechnung von N_0
1 × B: für die korrekte Berechnung und das korrekte Runden der Dosenzahl

Aufgabe 3

Autofahrt

Möglicher Lösungsweg

a) Es handelt sich um das Zeitintervall von 20 min bis 30 min.

Ein möglicher Lösungsweg wäre:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{vergangene Zeit}}$$

Für das Intervall von 20 min bis 30 min ergibt dies $\frac{5}{10}$ km/min = 30 km/h.

b) Formel:
Für ein allgemeines Intervall $[x_1; x_2]$ gilt:

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Gültig ist auch eine Formel für ein spezielles Intervall, beispielsweise [50; 100]:

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50}$$

$f(100) = 10{,}6$
$f(50) = 4{,}575$

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50} = \frac{10{,}6 - 4{,}575}{50} = 0{,}1205$$

Frau Maier hat im angegebenen Wegintervall durchschnittlich 0,1205 L Benzin pro km gebraucht.

c) – Man berechnet den momentanen Benzinverbrauch bei x km durch $f'(x)$.
– Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 ist die Ableitung $f'(50)$.

$f'(x) = 0{,}0000018x^2 + 0{,}0004x + 0{,}08$
$f'(50) = 0{,}1045$

Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 beträgt also 0,1045 L/km.

d) – Mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet man den mittleren Benzinverbrauch im Intervall [50 km; 100 km] (Differenzenquotient).
– Wenn Δx gegen null geht, erhält man den momentanen Benzinverbrauch für $x = 50$ km (Differenzialquotient).

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Zeitintervalls
b) 1 × A: für die Aufstellung des richtigen Modells (Differenzenquotient)
   1 × B: für die richtige Berechnung des durchschnittlichen Benzinverbrauchs
c) 1 × A: für die korrekte Beschreibung des momentanen Benzinverbrauchs durch die 1. Ableitung an der Stelle x
   1 × B: für die richtige Berechnung des momentanen Benzinverbrauchs bei Kilometer 50
d) 1 × D: für das richtige Erkennen des durchschnittlichen Benzinverbrauchs
   1 × D: für das richtige Erkennen des momentanen Benzinverbrauchs

Aufgabe 4

Der Baikalsee

Möglicher Lösungsweg

a) 18 400 km³ entspricht 75 % der ursprünglichen Süßwassermenge des Baikalsees.
18 400 km³ : 0,75 = 24 533,33 km³
Daher hatte der Baikalsee ursprünglich 24 533,33 km³ Süßwasser.
20 % = $\frac{1}{5}$ der gesamten Süßwasservorräte,
auf der Erde betrugen die Süßwasservorräte V_g = 122 666,67 km³.

Die gesamten Süßwasservorräte der Erde machen ungefähr $1{,}23 \cdot 10^5$ km³ aus.

b) $F_{\text{Bodensee}} = \frac{1}{44} \cdot F_{\text{Baikalsee}}$

c) $7 \cdot 10^9 \cdot 150 \cdot 365 \cdot 50$ L $= 1{,}91625 \cdot 10^{16}$ L
1 km³ $= 1 \cdot 10^{12}$ L
$1{,}91625 \cdot 10^{16} : 10^{12} = 19\,162{,}5$

Die gesamte Menschheit verbräuchte demnach 19 162,5 km³ Süßwasser, daher stimmt diese Behauptung nicht.

d) Es geht um die Differenz zwischen dem Volumen einer vergrößerten Kugel V_g mit $R_g = R + h$ und dem Volumen der Erde V_E mit dem Radius R.

$$V_g = V_E + V$$

$$\frac{4}{3} \cdot R_g^3 \cdot \pi = V_E + V$$

$$R_g^3 = \frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}$$

$$R_g = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}}$$

$$h = R_g - R$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}} - R$$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechung der gesamten Süßwasservorräte
1 × B: für die richtige Angabe in Gleitkommadarstellung
b) 1 × A: für die richtige Gleichung
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Wasserverbrauchs
1 × D: für eine schlüssige Begründung
d) 1 × A: für die Erkenntnis, dass es um die Differenz zweier Kugelvolumina geht (oder anderer richtiger Lösungsansatz)
1 × B: für die richtige Formel

Aufgabe 5

Höhentraining

Möglicher Lösungsweg

a) – Gruppe *Meeresniveau*:
Die schnellste Zeit betrug 20 Minuten, die langsamste Zeit 26 Minuten. Somit ist die Spannweite 6 Minuten.
Gruppe *Höhentraining*:
Die schnellste Zeit betrug 19,5 Minuten, die langsamste Zeit 25,5 Minuten. Somit ist die Spannweite 6 Minuten.

– Die Aussage von Leo ist nicht richtig. Bei einer Laufzeit von 23 Minuten liegt das untere Quartil. Daher haben nur etwa 25 % der Teilnehmer des Camps auf Meeresniveau eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten.

b) Unterschied *arithmetischer Mittelwert – Median*:

– *Arithmetischer Mittelwert:* Hier werden alle Werte addiert und das Ergebnis wird durch die Anzahl der Werte dividiert. Daher fallen hier Ausreißer ins Gewicht.
– *Median:* Der Median einer Anzahl von Werten ist die Zahl, die an der mittleren Stelle steht, wenn man die Werte nach Größe sortiert. Die Werte auf beiden Seiten des Medians werden sonst nicht berücksichtigt. Der Median reagiert daher nicht auf Ausreißer.

c) $\mu = 11{,}9 \qquad \sigma = 0{,}3$

$P(x \leq u) = 0{,}1$

$\Phi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1$

$\Phi\left(\frac{\mu-u}{\sigma}\right) = 0{,}9$

$u = \mu - 1{,}2816 \cdot \sigma = 11{,}51$

Man darf höchstens 11,51 s laufen, um zu den besten 10 % der Gruppe zu gehören.

Eine direkte Berechnung mit Technologie ist auch erlaubt (sofern nachvollziehbar).

d) – Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: $p = 0{,}7$
Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $q = 0{,}3$
„Mindestens 8 Mal treffen“ bedeutet entweder 8 Treffer oder 9 Treffer oder 10 Treffer.

$P(\text{„8 Treffer“}) = 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 \cdot \binom{10}{8} = 0{,}2335$

$P(\text{„9 Treffer“}) = 0{,}7^9 \cdot 0{,}3 \cdot \binom{10}{9} = 0{,}1211$

$P(\text{„10 Treffer“}) = 0{,}7^{10} = 0{,}0282$

$P(\text{„mindestens 8 Treffer“}) = P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) = 0{,}2335 + 0{,}1211 + 0{,}0282 = 0{,}3828$

Man kann natürlich auch einfach mit Technologie $1 - G_{\text{bin}}(7;\ 10;\ 0{,}7) = 0{,}3828$ berechnen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 38,28 %.

– Die Binomialverteilung ist das richtige Modell.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Spannweiten und der schnellsten Zeit
1 × D: für die richtige Erklärung, dass Leos Aussage falsch ist
b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Berechnungsart
1 × D: für die richtige Erklärung des Einflusses von Ausreißern
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der gesuchten Zeit
d) 1 × A: für das Erkennen bzw. Nennen des richtigen Modells
1 × B: für die Berechnung der richtigen Wahrscheinlichkeit