

Ortsumfahrung

Aufgabennummer: A_013

Technologieeinsatz:

möglich ☐

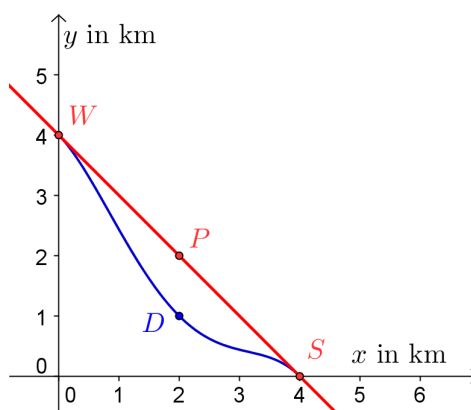
erforderlich ☒

Eine große Ortschaft $P = (2|2)$ liegt auf einer geraden Straße zwischen den Dörfern $W = (0|4)$ und $S = (4|0)$. Es soll um die Ortschaft P eine Umfahrungsstraße gebaut werden, die über den Punkt $D = (2|1)$ führt und bei W bzw. S wieder in die gerade Straße einmündet. Die Koordinatenwerte sind in Kilometern angegeben.

- a) Eine Umfahrungsstraße, die durch die Funktion

$$f(x) = -0,0625x^4 + 0,5x^3 - x^2 - x + 4$$

beschrieben werden kann, hat den Vorteil, dass sie in den Punkten S und W tangential in die ursprüngliche Straße einmündet.



Weisen Sie durch Berechnung nach, dass die Gerade durch die Punkte S und W in diesen beiden Punkten eine Tangente an die Funktion f ist.

- b) Eine Umfahrungsvariante soll im Definitionsbereich $0 \leq x \leq 4$ durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.
Stellen Sie die Funktion 2. Grades auf, die die Punkte W , D und S enthält.

Hinweis zur Aufgabe:

Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Anstieg der Geraden g durch S und W : $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $k = -1$

Gleichung der Geraden: $g(x) = -x + 4$

Die Steigungen (der Tangenten) von f in den Punkten W ($x = 0$) und S ($x = 4$) erhält man über die 1. Ableitung:

$$f'(x) = -0,25x^3 + 1,5x^2 - 2x - 1$$

$$f'(0) = -1 \text{ und } f'(4) = -1$$

Der Anstieg ist in beiden Punkten gleich, nämlich $k = -1$.

Die Punkte $(0|4)$ und $(4|0)$ liegen auf beiden Kurven f und g , daher gilt:

Die Tangente in beiden Punkten hat die Gleichung $y = -x + 4$ und dies entspricht der Geraden $g(x)$, die die alte Straßenführung beschreibt.

- b) $f(x) = ax^2 + bx + c$... die drei Punkte einsetzen

$$W: 4 = c$$

$$S: 0 = 16a + 4b + 4$$

$$D: 1 = 4a + 2b + 4$$

Dieses Gleichungssystem wird aufgelöst, händisch oder mit Technologie:

$$a = 0,25, \quad b = -2$$

$$f(x) = 0,25x^2 - 2x + 4$$

(Eine Lösung ist auch über lineare Regression möglich.)

Klassifikation

☒ Teil A

☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

- a) 4 Analysis
- b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) D Argumentieren und Kommunizieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —