Herstellungskosten (2)

Aufgabennummer: B-C1_16

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

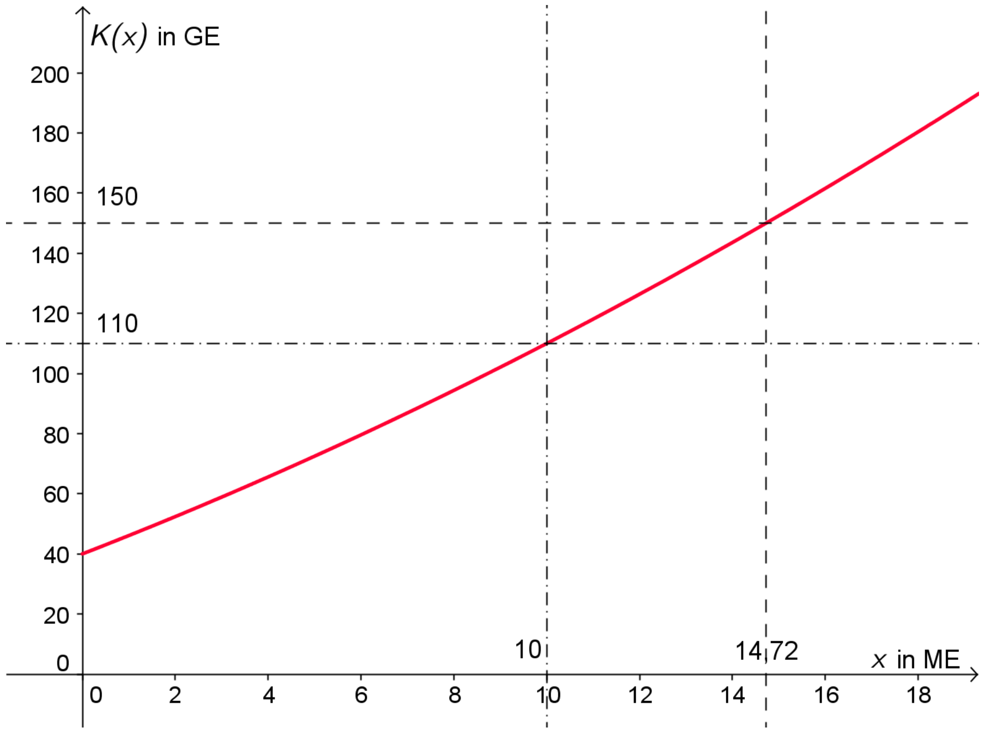
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0;30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

Halterungen für Glasfassaden

Aufgabennummer: B-C1_24

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5\,000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$$

x … Stückzahl mit $0 \leq x \leq 5\,000$
$K(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

a) Der Betrieb möchte die Produktionskosten pro Stück möglichst gering halten. Die Produktionskosten pro Stück bezeichnet man als Stückkosten.

- Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
- Bestimmen Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
- Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremum um ein lokales Minimum handelt.

b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

- Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf.
- Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Die Produktionskosten für ein anderes Produkt werden mit der Funktion K_1 beschrieben:

$$K_1(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}055 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 1\,000$$

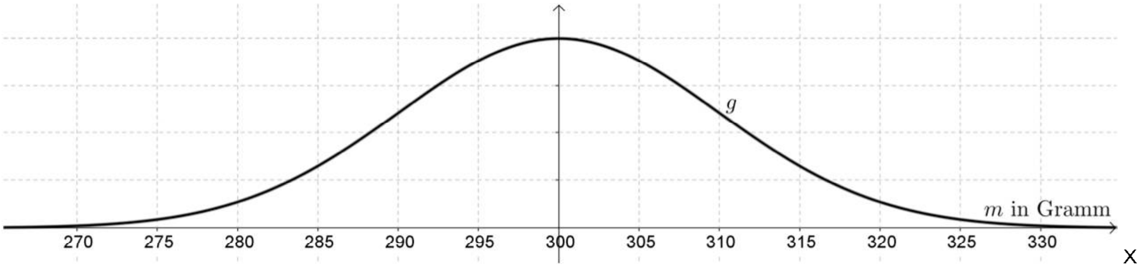
x … Stückzahl
$K_1(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K_1.
- Argumentieren Sie, warum die Funktion K_1 als Kostenfunktion nicht in Frage kommt.

d) Ein Abnehmer bezieht die Halterung in sehr großer Stückzahl. Er nimmt die Lieferung an, wenn er bei einer Zufallsstichprobe von 50 Stück höchstens eine fehlerhafte Halterung findet. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Halterung in der gesamten Lieferung beträgt erfahrungsgemäß 2 %.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung.
- Begründen Sie die Verwendung der von Ihnen gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

e) Die Masse m der Halterung in Gramm ist annähernd normalverteilt. Die nachstehende Grafik stellt die Dichtefunktion g dar.



– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der gegebenen Grafik ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}00001 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x + 24 + \frac{3\,500}{x}$

Ableitung: $\overline{K}'(x) = 0{,}00002 \cdot x - 0{,}025 - \frac{3\,500}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0$ ergibt $x \approx 1\,346{,}519$.

Stückkosten: $\overline{K}(1\,347) \approx$ € 11,067

2. Ableitung: $\overline{K}''(x) = 0{,}00002 + \frac{7\,000}{x^3}$ und damit $\overline{K}''(1\,346{,}519) \approx 0{,}000023$

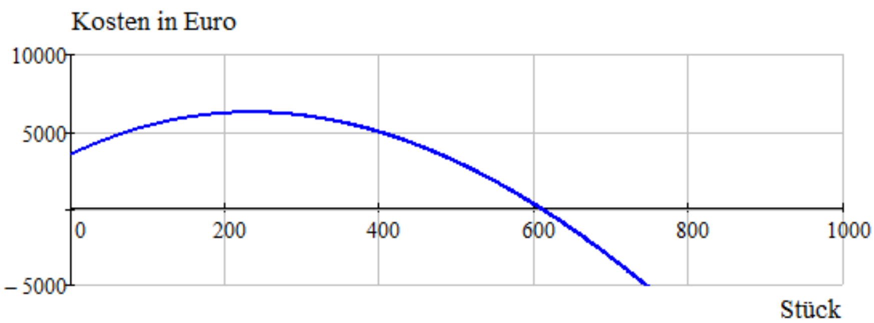
Die Stückkosten sind bei einer Produktionsmenge von 1 347 Stück am geringsten.
Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

b) Gewinnfunktion: $G(x) = 20 \cdot x - K(x) = -0{,}00001 \cdot x^3 + 0{,}025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3\,500,\ x \geq 0$

$G(x) = 0$ ergibt $x \approx 536{,}1$ und $x \approx 2\,253{,}6$.

Das ergibt einen Gewinnbereich von 537 Stück bis 2 253 Stück.

c)



Die Funktion kommt als Kostenfunktion nicht in Frage, weil ab etwa 600 Stück die Kosten negativ wären.

d) Unter der Annahme einer Binomialverteilung ist $P(X \leq 1) = 0{,}7357\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.
Gleichwertige Lösungen mit entsprechender Begründung werden anerkannt.

- Es gibt genau zwei Möglichkeiten für den Ausgang des Zufallsexperiments: Eine Halterung ist entweder fehlerfrei oder fehlerhaft.
- Die Ereignisse sind voneinander unabhängig: Zufallsstichprobe.
- Die Wahrscheinlichkeit p bleibt konstant: $p = 2\ \%$.

e) abgelesene Werte: $\mu = 300$ g, $\sigma = 10$ g
Ablesetoleranz für σ: [7; 13]

Schotterwerk (2)

Aufgabennummer: B-C3_21

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

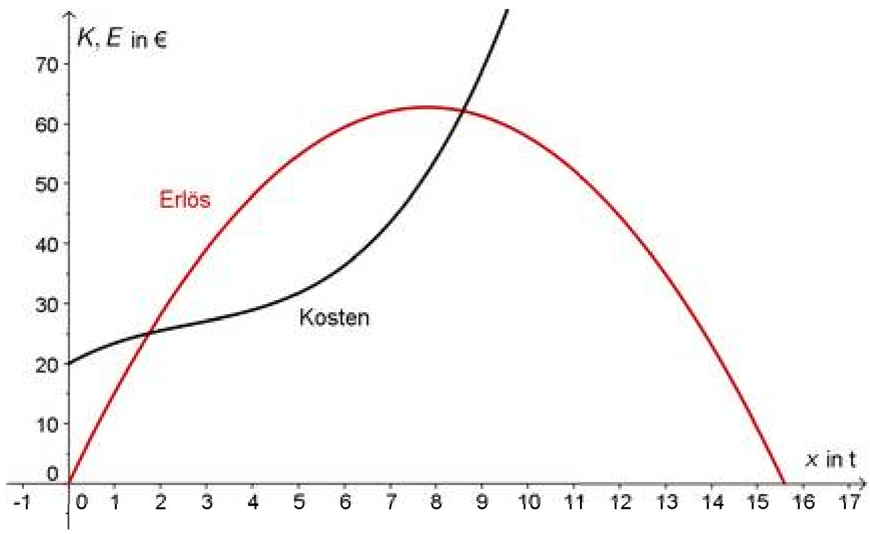
Ein Schotterwerk untersucht die Nachfrage nach Schotter sowie den möglichen Gewinn bei Schotter und Kies.

a) Die Nachfrage nach Schotter steigt durch Preissenkung nach der folgenden Tabelle:

x … Preisfunktion der Nachfrage in Tonnen (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_N … Preis in Euro/Tonne (€/t)	14,2	12,9	12,5	11,6	9,8	9	8,2	6,9	6,1	5,7

– Ermitteln Sie mithilfe der linearen Regression die Preisfunktion der Nachfrage, die den Preis p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x angibt.
– Runden Sie die Parameter auf ganze Zahlen.

b) – Erstellen Sie anhand der Grafik aus den Informationen über Erlös E und Kosten K den Verlauf der Gewinnfunktion G für Schotter.
– Lesen Sie die ungefähren Werte für die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn ab.



c) Die Nachfragefunktion für Kies lautet: $p_N(x) = -0{,}07x^2 + 16$.

$p_N(x)$ ... Nachfragepreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf eine Mengeneinheit (ME)
x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheit (ME)

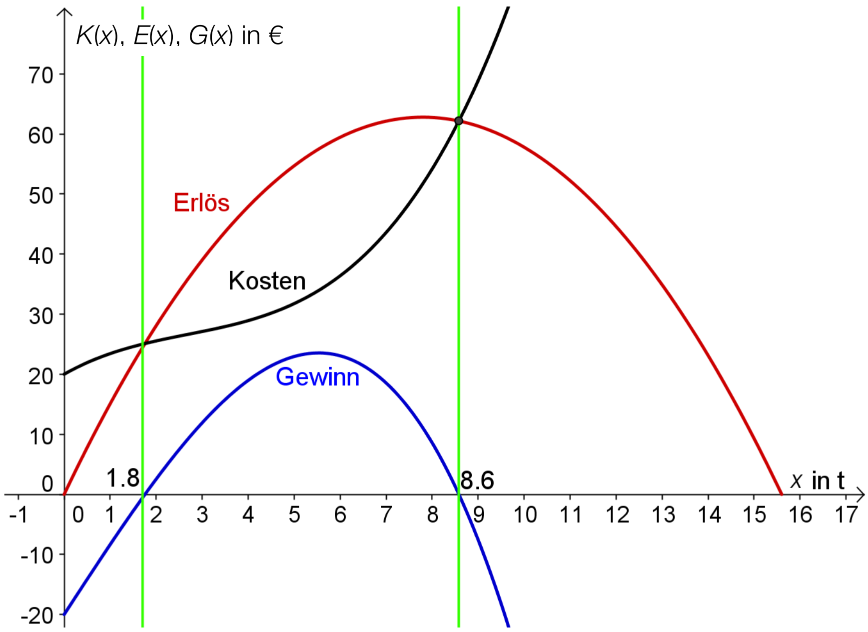
– Berechnen Sie die Erlösgrenzen und das Erlösmaximum. Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Dezimalstellen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Preisfunktion der Nachfrage wird über Regression mittels Technologieeinsatz ermittelt.
$p_N(x) = -x + 15$

b) $G = E - K$. Diese Differenz wird grafisch ermittelt, daher nur ungefähre Werte.



Der Gewinnbereich liegt zwischen ca. 1,8 Tonnen und ca. 8,6 Tonnen.
Der maximale Gewinn beträgt ca. € 24.
(Ableseungenauigkeiten sind zu tolerieren!)

c) $p_N(x) = -0{,}07x^2 + 16$
$E(x) = -0{,}07x^3 + 16x$
Erlösgrenzen mittels Technologieeinsatz berechnen: $x_1 = 0$, $x_2 = 15{,}12$
Bis zu einer Menge von 15,12 ME macht man mit Kies Umsatz.

$E'(x) = -0{,}21x^2 + 16 = 0$
$x = 8{,}73$ … erlösmaximale Menge
$E_{max} = 93{,}11$

Der maximale Erlös wird bei einer Verkaufsmenge von 8,73 ME erzielt und beträgt 93,11 GE.

Sektkellerei (1)

Aufgabennummer: B-C6_15

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x … Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

a) Man ermittelt die gesamt anfallenden Produktionskosten in Abhängigkeit von den pro Tag abgefüllten Flaschen der Marke *Dom*.

x	0	100	200	300	400	500	600
$K(x)$	10000	12800	14800	16000	18000	19000	21600

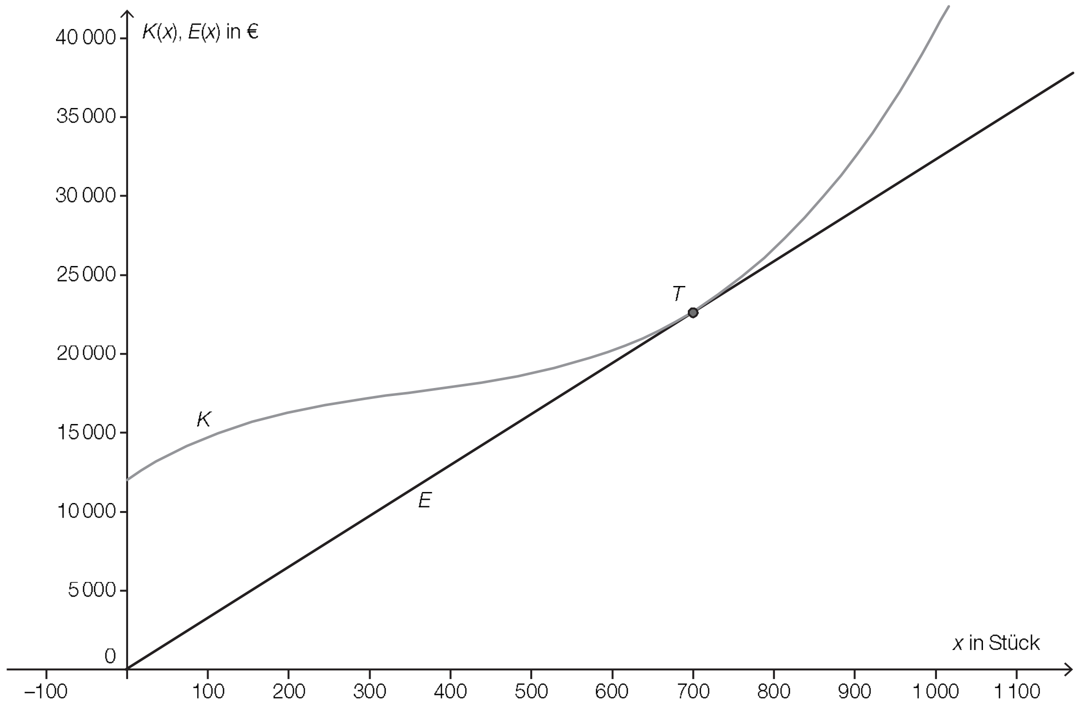
– Bestimmen Sie für diese Gesamtkosten mithilfe von Regression eine passende Polynomfunktion 3. Grades.
– Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und den Graphen der Regressionslinie.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Kostenkehre berechnen kann.

b) Die Kellerei verkauft täglich die Tagesproduktion der Sektmarke *Gold* zu € 40 pro Flasche. Die Kostenfunktion für diese Marke lautet:

$$K(x) = 7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12000$$

– Berechnen Sie, wie viele Flaschen mindestens und wie viele höchstens pro Tag verkauft werden sollen, damit die Kellerei einen Gewinn macht.

c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E.

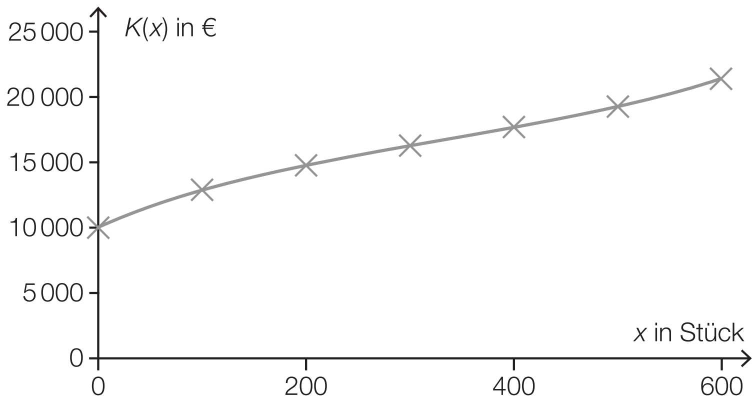


– Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes T ab.
– Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}0602 \cdot x^2 + 33{,}365 \cdot x + 10\,000$

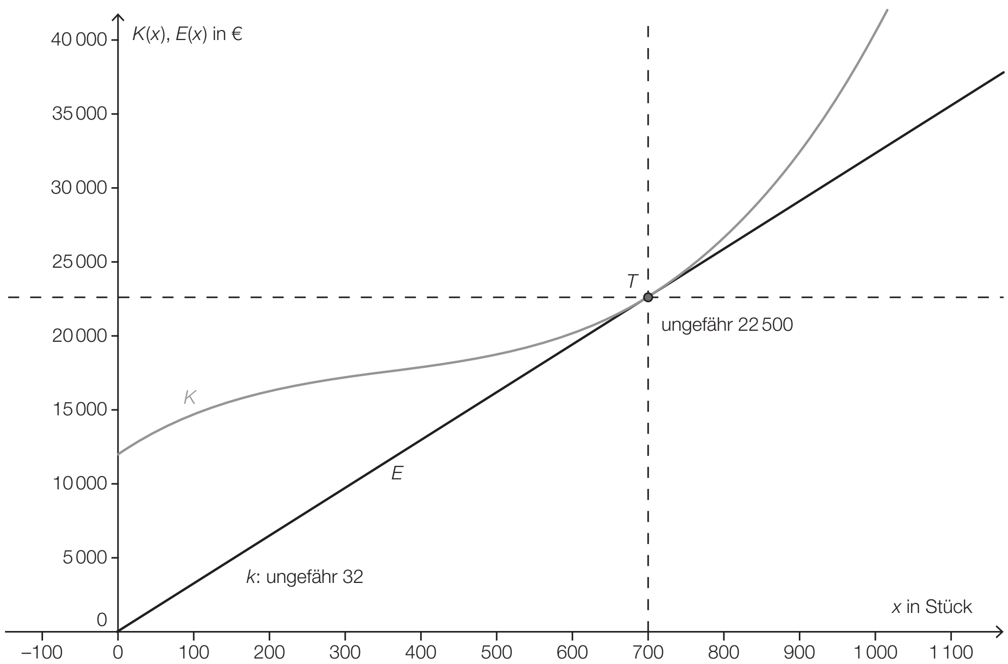


Man berechnet die Kostenkehre, indem man die 2. Ableitung der Kostenfunktion gleich null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

b) $p = 40$
$G(x) = 40 \cdot x - (7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000)$
$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 \approx 440{,}35$; $x_2 \approx 963{,}64$
Die Gewinnzone für diesen Sekt liegt zwischen mindestens 441 und höchstens 963 verkauften Flaschen pro Tag.

c) Genau ablesen lässt sich die x-Koordinate von T: 700 Flaschen, die Kosten lassen sich nur ungefähr bestimmen ($\approx 22\,500$). Der Anstieg beträgt ungefähr 32.



Der Tangentenanstieg der Erlösfunktion ergibt den Verkaufspreis pro Flasche,
die Koordinaten von *T* ergeben das Betriebsoptimum $x_0 = 700$ Flaschen und den Erlös bzw. die Gesamtkosten am Betriebsoptimum von ca. € 22.500.

Aussage: Wenn eine Flasche zu ungefähr € 32 verkauft wird, dann müsste man genau 700 Flaschen verkaufen und nimmt ca. € 22.500 ein. Die Kosten sind bei dieser Verkaufsmenge gleich hoch wie der Erlös, das bedeutet, dass der Betrieb kostendeckend arbeitet. Es wird kein Gewinn erwirtschaftet.
Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B-C7_05

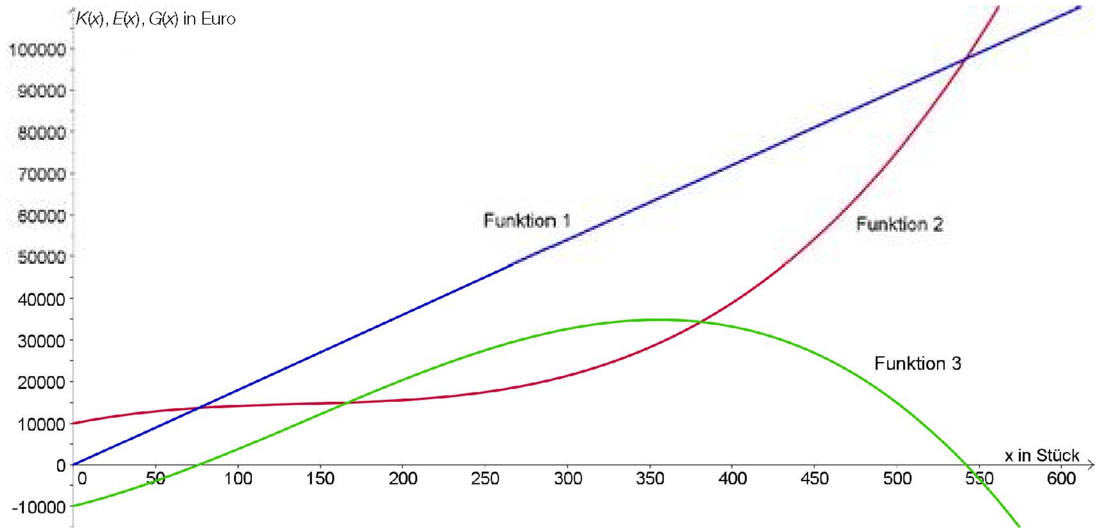
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die untenstehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie den Kostenanstieg, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpe werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion *G* auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101) - K(100)}{1} = 15{,}861 \approx 15{,}86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036 \cdot x^2 - x + 80 \quad \Rightarrow \quad K'(100) = 16$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200 \cdot x - (0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000)$
$G(x) = -0{,}0012 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10\,000$
$G'(x) = -0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120$
$-0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.