

# СПИСОК ВОПРОСОВ К КОЛЛОКВИУМУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ВШЭ, третий модуль, зима–весна 2025 года

## ГЛАВА V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Пример псевдоплощади, определенной на всех подмножествах плоскости.
2. Положительная и отрицательная части функции и их свойства. Подграфик функции.
3. ! Определенный интеграл. Определение и простейшие свойства.
4. ! Аддитивность интеграла и монотонность интеграла. Следствия монотонности интеграла. Среднее значение функции.
5. ! Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Следствия. Формула Ньютона–Лейбница.
6. ! Линейность интеграла и формула интегрирования по частям. Замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
7. Вычисление интеграла  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ .
8. Формула Валлиса. Асимптотика наибольшего биномиального коэффициента.
9. ! Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.
10. Иррациональность числа  $\pi$ .
11. Равномерная непрерывность функций: определение и примеры. Теорема Кантора.
12. Модуль непрерывности. Свойства.
13. ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.
14. Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Эквивалентная для суммы  $\sum_{k=1}^n k^p$ . Интегрируемость по Риману.
15. Оценка погрешности в формуле трапеций (с леммой).
16. Формула Эйлера–Маклорена (для второй производной).
17. Оценка сумм вида  $\sum_{k=1}^n k^p$  при различных  $p$ . Постоянная Эйлера.
18. Формула Стирлинга.
19. ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.
20. Свойства несобственных интегралов.
21. Замена переменной в несобственном интеграле. Сведение несобственного интеграла к интегралу по лучу.
22. ! Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.
23. Абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля.
24. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, dx$ .

## ГЛАВА VI. МЕТРИЧЕСКИЕ И НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

25. ! Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.
26. ! Открытые множества: определение и свойства.
27. ! Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.
28. Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью. Свойства замыкания.
29. ! Характеристика точек из замыкания. Предельные точки. Свойства. Характеристика предельных точек.
30. Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.
31. ! Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.
32. ! Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.
33. Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.
34. ! Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота  $\mathbb{R}^d$ . Полнота и замкнутость.
35. ! Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.
36. Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах. Секвенциальная компактность.
37. ! Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта. Полнота  $(K, \rho)$ .
38.  $\varepsilon$ -сети и вполне ограниченность. Связь с ограниченностью. Полная ограниченность секвенциального компакта.
39. Теорема Хаусдорфа. Условия, равносильные компактности. Теорема о характеристике компактов в  $\mathbb{R}^d$ .
40. Лемма Лебега. Число Лебега.
41. Определения предела и непрерывности по Коши и по Гейне. Критерий Коши. Арифметические действия с пределами.
42. ! Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.
43. ! Непрерывный образ компакта. Следствия. Теорема Вейерштрасса.

**44.** Непрерывность обратного отображения. Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

**45.** Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в  $\mathbb{R}^d$ .

**46.** ! Путь, носитель пути, простой путь, гладкий путь. Линейная связность. Теорема Больцано–Коши. Эквивалентные пути. Определение кривой.

**47.** ! Длина пути и длина кривой. Определение и простейшие свойства. Аддитивность длины кривой.

**48.** Длина кривой, заданной параметрически (с леммой). Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах.

**49.** ! Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание

линейных операторов из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Норма линейного оператора. Простейшие свойства.

**50.** Эквивалентные определения нормы оператора. Следствия.

**51.** Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора. Оценка нормы через сумму квадратов. Ограниченность линейных операторов из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ .

## ГЛАВА VII. Ряды

**52.** Ряды в нормированных пространствах. Простейшие свойства. Критерий Коши. Абсолютная сходимость.

**53.** Группировка членов ряда. Свойства.

**54.** ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствия.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения интеграла; теоремы о среднем; теоремы Барроу; формулы Ньютона–Лейбница; формул замены переменной и интегрирования по частям; определения интегральных сумм, несобственного интеграла; признаков сравнения для интегралов и для сумм; определения метрики, нормы и скалярного произведения, внутренних и предельных точек, открытых, замкнутых и компактных множеств, секвенциальной компактности; характеристики компактности в  $\mathbb{R}^d$ ; определения фундаментальной последовательности, непрерывности; связи непрерывности с открытыми множествами; теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях; определения нормы линейного оператора; определения сходимости и абсолютной сходимости ряда; необходимого условия сходимости ряда.

*Изложение определенного интеграла было близко к тексту:*

[http://math.spbu.ru/analysis/tutorial/pan\\_integral\\_2016.pdf](http://math.spbu.ru/analysis/tutorial/pan_integral_2016.pdf)

*Видеозаписи лекций, очень близких к V главе курса можно найти тут:*

<https://stepik.org/course/711/>.

*Про метрические и нормированные пространства можно найти тут (но изложение не совсем такое как было в лекциях):*

Виноградов О. Л. Математический анализ, ВНУ, 2017

Рудин У. Основы математического анализа, Мир, 1976

Дьедонне Ж. Основы современного анализа, Мир, 1964