Proyecto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tema 2: Movimiento vertical y aceleración gravitacional

INTEGRANTES:
Leandro Márquez Blanco
Yosvany Castillo Llanes
Charly Blanco Sánchez

December 2, 2025

Contenido

Contexto del Tema 2 (INTRODUCCIÓN)

El movimiento vertical bajo aceleración gravitacional es un caso clásico de EDO.

Ejemplo: lanzamiento de un proyectil desde un helicóptero y análisis de trayectorias.

Se estudiarán en profundidad:

- Cinemática vertical e isoclinas.
- Bifurcaciones en modelos no lineales.
- Plano de fase (Parte C, pendiente).

Aplicaciones principales de las EDO

Las ecuaciones diferenciales se aplican en el estudio del movimiento vertical para:

- Predecir posición, velocidad, altura máxima y tiempo de vuelo usando la EDO básica $y'' = -g$.
- Modelar efectos de resistencia del aire mediante ecuaciones no lineales como $v' = -g - \frac{c}{m}v$ o $v' = -g - \frac{k}{m}v|v|$.
- Calcular velocidad terminal y comparar modelos idealizados y reales.
- Resolver problemas inversos: determinar parámetros como g o coeficientes de arrastre a partir de datos experimentales.
- Analizar estabilidad y comportamiento cualitativo en modelos de primer orden.
- Utilizar métodos numéricos (Euler, Runge–Kutta) cuando no existen soluciones analíticas.
- Aplicaciones en ingeniería, física y deportes para optimizar trayectorias y estimar alcances.

Problema planteado

–Parte A (Cinemática vertical e isoclinas). Se lanza una granada desde un helicóptero suspendido a una altura de 800ft sobre el piso. Desde el piso, directamente bajo el helicóptero, se dispara un proyectil en línea recta hacia la granada exactamente 2s después de que esta fue soltada.

- 1. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que alcance la granada a una altitud de exactamente 400 ft?
- 2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano para obtener información cualitativa de la solución e interprételo.

Solución al problema

Cálculo del tiempo de encuentro

La posición de la granada es:

$$y_g(t) = 800 - \frac{1}{2}gt^2, \qquad g = 32 \text{ ft/s}^2$$

Buscamos cuándo llega a 400 ft:

$$800 - 16t^2 = 400 \Rightarrow 16t^2 = 400 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

El proyectil se dispara en $t = 2$ s:

$$\Delta t = 5 - 2 = 3 \text{ s}$$

Solución al problema

Cálculo de la velocidad inicial

La altura del proyectil después de 3 s:

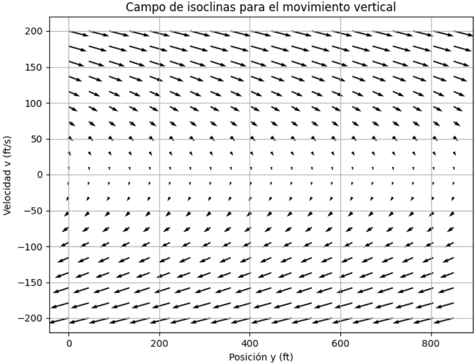
$$y_p = v_0(3) - \frac{1}{2}g(3)^2 = 3v_0 - 144$$

Igualamos con 400 ft:

$$3v_0 - 144 = 400 \Rightarrow 3v_0 = 544 \Rightarrow v_0 = \frac{544}{3} \approx 181.33 \text{ ft/s}$$

$$\boxed{v_0 \approx 181.33 \text{ ft/s}}$$

Campo de isoclinas



El campo de isoclinas en el plano (t, v) permite interpretar cualitativamente la solución.

Interpretación cualitativa del campo de isoclinas

Para la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

donde $g = 32$ ft/s^2, el campo de isoclinas muestra cómo cambia la pendiente
de la velocidad con respecto al tiempo.

1. Isoclinas horizontales (pendiente constante)

Como el valor de dv/dt es constante y negativo:

- Todas las isoclinas tienen la misma pendiente.
- Todas las flechas del diagrama apuntan hacia abajo.
- La pendiente no depende de t.
- La pendiente no depende de v.

Esto significa que la velocidad decrece de forma lineal con el tiempo, sin importar el valor inicial.

Interpretación cualitativa del campo de isoclinas (continuación)

2. Información cualitativa obtenida

A partir del campo de isoclinas se observa que:

- ✓La pendiente en todo punto es igual a $-g$.
- ✓La velocidad siempre disminuye.
- ✓No hay puntos de equilibrio.
- ✓La solución es una recta en el plano t-v.

Trayectorias del campo

- La trayectoria de cualquier solución siempre va "hacia abajo".
- El objeto está acelerado hacia abajo constantemente.
- La velocidad se vuelve más negativa con el tiempo.

Interpretación cualitativa del campo de isoclinas (conclusión)

Comportamiento de las soluciones

- Ninguna solución puede curvarse hacia arriba.
- La velocidad no puede aumentar.
- No existe posibilidad de que el movimiento cambie de sentido por sí solo.

3. Interpretación física

El diagrama confirma el comportamiento esperado:

- La granada, al soltarse, comienza con $v(0) = 0$ y su velocidad se hace cada vez más negativa.
- El proyectil, lanzado hacia arriba, tiene inicialmente velocidad positiva, pero disminuye linealmente.

El campo de isoclinas ilustra que:

- La gravedad actúa de forma uniforme.
- Toda solución es un descenso lineal.

Modelo con parámetro p

Consideremos el modelo no lineal:

$$\frac{dv}{dt} = p - v^2$$

- Puntos de equilibrio: $v = \pm\sqrt{p}$.
- Estabilidad: depende del signo de p y de la derivada $v' = p - 2v^2$.

Diagrama de bifurcación

El diagrama en el plano (p, v) muestra cómo cambian los equilibrios al variar p.

bifurcacion_ejemplo.png

Resumen

- Se modeló el movimiento vertical con EDOs.
- Se analizaron isoclinas y bifurcaciones.
- El plano de fase (Parte C) se añadirá posteriormente.