

# Proyecto Final de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica

## Tema 2: Movimiento vertical y aceleración gravitacional

### INTEGRANTES:

Leandro Márquez Blanco

Yosvany Castillo Llanes

Charly Blanco Sánchez

December 4, 2025

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Aplicaciones de las EDO en movimiento vertical
- 3 Parte A: Cinemática vertical e isoclinas
- 4 Parte B: Bifurcación
- 5 Parte C: Plano de fase
- 6 Conclusión

# Contexto del Tema 2 (INTRODUCCIÓN)

El movimiento vertical bajo aceleración gravitacional es un caso clásico de EDO.

Ejemplo: lanzamiento de un proyectil desde un helicóptero y análisis de trayectorias.

Se estudiarán en profundidad:

- Cinemática vertical e isoclinas.
- Bifurcaciones en modelos no lineales.
- Plano de fase (Parte C, pendiente).

# Aplicaciones principales de las EDO

Las ecuaciones diferenciales se aplican en el estudio del movimiento vertical para:

- Predecir posición, velocidad, altura máxima y tiempo de vuelo usando la EDO básica  $y'' = -g$ .
- Modelar efectos de resistencia del aire mediante ecuaciones no lineales como  $v' = -g - \frac{c}{m}v$  o  $v' = -g - \frac{k}{m}v|v|$ .
- Calcular velocidad terminal y comparar modelos idealizados y reales.
- Resolver problemas inversos: determinar parámetros como  $g$  o coeficientes de arrastre a partir de datos experimentales.
- Analizar estabilidad y comportamiento cualitativo en modelos de primer orden.
- Utilizar métodos numéricos (Euler, Runge–Kutta) cuando no existen soluciones analíticas.
- Aplicaciones en ingeniería, física y deportes para optimizar trayectorias y estimar alcances.

# Problema planteado

–Parte A (Cinemática vertical e isoclinas). Se lanza una granada desde un helicóptero suspendido a una altura de 800ft sobre el piso. Desde el piso, directamente bajo el helicóptero, se dispara un proyectil en línea recta hacia la granada exactamente 2s después de que esta fue soltada.

- 1. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que alcance la granada a una altitud de exactamente 400 ft?
- 2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano para obtener información cualitativa de la solución e interprételo.

# Solución al problema

## Cálculo del tiempo de encuentro

La posición de la granada es:

$$y_g(t) = 800 - \frac{1}{2}gt^2, \quad g = 32 \text{ ft/s}^2$$

Buscamos cuándo llega a 400 ft:

$$800 - 16t^2 = 400 \Rightarrow 16t^2 = 400 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

El proyectil se dispara en  $t = 2 \text{ s}$ :

$$\Delta t = 5 - 2 = 3 \text{ s}$$

# Solución al problema

## Cálculo de la velocidad inicial

La altura del proyectil después de 3 s:

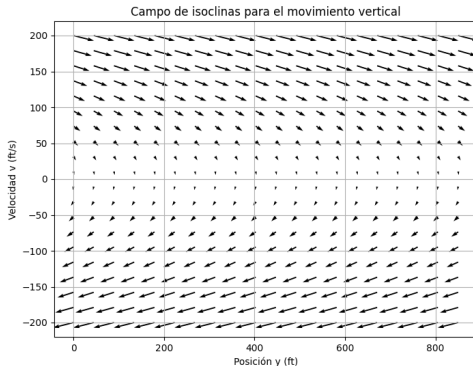
$$y_p = v_0(3) - \frac{1}{2}g(3)^2 = 3v_0 - 144$$

Igualamos con 400 ft:

$$3v_0 - 144 = 400 \Rightarrow 3v_0 = 544 \Rightarrow v_0 = \frac{544}{3} \approx 181.33 \text{ ft/s}$$

$v_0 \approx 181.33 \text{ ft/s}$

# Campo de isoclinas



El campo de isoclinas en el plano  $(t, v)$  permite interpretar cualitativamente la solución.



# Interpretación cualitativa del campo de isoclinas

Para la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

donde  $g = 32 \text{ ft/s}^2$ , el campo de isoclinas muestra cómo cambia la pendiente de la velocidad con respecto al tiempo.

## 1. Isoclinas horizontales (pendiente constante)

Como el valor de  $dv/dt$  es constante y negativo:

- Todas las isoclinas tienen la misma pendiente.
- Todas las flechas del diagrama apuntan hacia abajo.
- La pendiente no depende de  $t$ .
- La pendiente no depende de  $v$ .

Esto significa que la velocidad decrece de forma lineal con el tiempo, sin importar el valor inicial.

## 2. Información cualitativa obtenida

A partir del campo de isoclinas se observa que:

- ✓ La pendiente en todo punto es igual a  $-g$ .
- ✓ La velocidad siempre disminuye.
- ✓ No hay puntos de equilibrio.
- ✓ La solución es una recta en el plano  $t-v$ .

## Trayectorias del campo

- La trayectoria de cualquier solución siempre va "hacia abajo".
- El objeto está acelerado hacia abajo constantemente.
- La velocidad se vuelve más negativa con el tiempo.

# Interpretación cualitativa del campo de isoclinas

## Comportamiento de las soluciones

- Ninguna solución puede curvarse hacia arriba.
- La velocidad no puede aumentar.
- No existe posibilidad de que el movimiento cambie de sentido por sí solo.

## 3. Interpretación física

El diagrama confirma el comportamiento esperado:

- La granada, al soltarse, comienza con  $v(0) = 0$  y su velocidad se hace cada vez más negativa.
- El proyectil, lanzado hacia arriba, tiene inicialmente velocidad positiva, pero disminuye linealmente.

El campo de isoclinas ilustra que:

- La gravedad actúa de forma uniforme.
- Toda solución es un descenso lineal.
- Todas las trayectorias están "paralelas" entre sí.

**Condición del problema.** El tiempo de encuentro proviene de una ecuación cuadrática, por lo que el problema está bien condicionado. El número de condición  $\kappa = |t/f'(t)|$  es pequeño: baja sensibilidad ante perturbaciones.

**Métodos numéricos.**

- **Bisección:** convergencia lineal, muy estable.
- **Newton–Raphson:** convergencia cuadrática, rápido pero sensible a la aproximación inicial.

**Errores y estabilidad.** Error relativo:  $E_r = |t_{\text{num}} - t_{\text{exact}}|/|t_{\text{exact}}|$ . Hacia adelante: perturbaciones pequeñas producen variaciones proporcionales. Hacia atrás: ambos métodos estables; bisección lo es de manera incondicional.

**Orden de convergencia.** Bisección:  $p = 1$ . Newton–Raphson:  $p = 2$ .

**Validación.** La solución exacta del problema es  $t_{\text{exacto}} = 5$  s.

# Tablas de Error

max width=0.8	Iteración	$t_{\text{bisección}}$ (s)	Error relativo
	1	4.0000	$2.0 \times 10^{-1}$
	2	4.5000	$1.0 \times 10^{-1}$
	3	4.7500	$5.0 \times 10^{-2}$
	4	4.8750	$2.5 \times 10^{-2}$
	5	4.9375	$1.25 \times 10^{-2}$
	10	4.9990	$2.0 \times 10^{-4}$
	15	4.99997	$6.0 \times 10^{-6}$

Table: Convergencia del método de bisección.

max width=0.8	Iteración	$t_{\text{Newton}}$ (s)	Error relativo
	1	5.20000	$4.0 \times 10^{-2}$
	2	5.01923	$3.8 \times 10^{-3}$
	3	5.00007	$1.4 \times 10^{-5}$
	4	5.00000	$1.0 \times 10^{-8}$

Table: Convergencia del método Newton–Raphson.

# Conclusión

Ambos métodos convergen al valor exacto  $t = 5$  s.

El método de bisección es:

- estable en todo intervalo,
- pero de convergencia lenta.

El método de Newton–Raphson es:

- mucho más rápido (convergencia cuadrática),
- sensible a la aproximación inicial.

El problema está bien condicionado y los errores de ambos métodos son controlados. Los resultados numéricos son precisos y consistentes.

# Modelo no lineal con parámetro $\mu$

Para capturar cambios de régimen en la velocidad vertical, se considera el modelo:

$$\frac{dv}{dt} = \mu - v^2.$$

Este sistema permite estudiar cómo varía la velocidad terminal y la dinámica del movimiento vertical al modificar el parámetro  $\mu$ .

# Puntos de equilibrio

Los equilibrios se obtienen resolviendo:

$$\mu - v^2 = 0 \implies v = \pm\sqrt{\mu}.$$

## Casos posibles:

- $\mu < 0$ : no existen equilibrios reales.
- $\mu = 0$ : equilibrio único  $v = 0$ , no hiperbólico.
- $\mu > 0$ : dos equilibrios reales:

$$v_+ = +\sqrt{\mu}, \quad v_- = -\sqrt{\mu}.$$



# Estabilidad de los equilibrios

La estabilidad se determina usando:

$$\frac{d}{dv}(\mu - v^2) = -2v.$$

- En  $v_+ = +\sqrt{\mu}$ :

$$-2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow \text{equilibrio estable.}$$

- En  $v_- = -\sqrt{\mu}$ :

$$-2(-\sqrt{\mu}) > 0 \Rightarrow \text{equilibrio inestable.}$$

- En  $\mu = 0$ :

$$v = 0 \text{ y } v' = 0 \Rightarrow \text{punto no hiperbólico.}$$

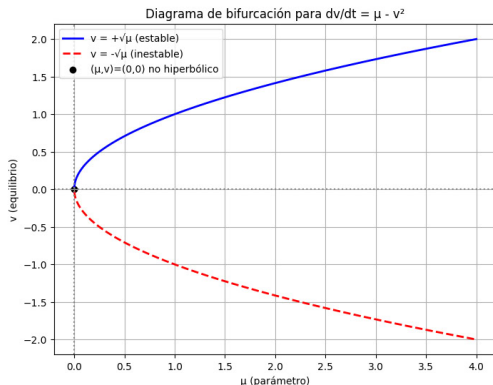
# Tabla de equilibrios y estabilidad

$\mu$	$v_+ = +\sqrt{\mu}$	Estabilidad	$v_- = -\sqrt{\mu}$	Estabilidad
-1.00	No existe	No existe	No existe	No existe
0.00	0.00	Semiestable	-0.00	Semiestable
1.00	1.00	Estable	-1.00	Inestable
2.00	1.41	Estable	-1.41	Inestable
3.00	1.73	Estable	-1.73	Inestable
4.00	2.00	Estable	-2.00	Inestable

# Diagrama de bifurcación

El diagrama muestra cómo varían los equilibrios según el valor del parámetro  $\mu$ :

- Para  $\mu < 0$ : no hay equilibrios.
- En  $\mu = 0$ : ocurre una transición (equilibrio no hiperbólico).
- Para  $\mu > 0$ : aparecen dos ramas:
  - $+\sqrt{\mu}$ : **rama estable**.
  - $-\sqrt{\mu}$ : **rama inestable**.



**Significado de  $\mu$ :** Parámetro que puede representar entrada de energía, fuerza externa o condición ambiental.

## Interpretación de la bifurcación:

- Cuando  $\mu < 0$ , la velocidad nunca se estabiliza.
- Cuando  $\mu = 0$ , el sistema está en un régimen crítico.
- Cuando  $\mu > 0$ , aparece una velocidad estable  $v_+ = \sqrt{\mu}$ , parecida a una **velocidad terminal**.

**Tipo de bifurcación:** La forma del diagrama indica una **bifurcación de saddle-node (nodo-silla)**.

Se modelan la altura  $y(t)$  y la velocidad  $v(t)$  mediante el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -2v - 5y. \end{cases}$$

Este sistema describe un movimiento con fuerza restauradora proporcional a la posición y amortiguamiento proporcional a la velocidad.

# Cálculo del punto crítico

Los puntos críticos se obtienen imponiendo:

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0.$$

Entonces:

$$v = 0, \quad -2v - 5y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$(y, v) = (0, 0)$$

Este es el único punto de equilibrio del sistema.

# Clasificación del punto crítico

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\lambda = -1 \pm 2i$$

Como los autovalores son complejos con parte real negativa, el equilibrio es:

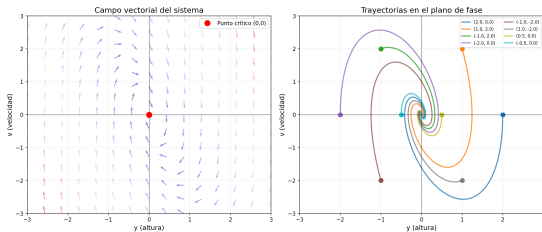
Foco estable (espiral estable)

# Plano de fase e interpretación física

Las trayectorias en el plano de fase  $(y, v)$  tienen forma de espiral que converge al origen.

- La altura y la velocidad oscilan.
- La amplitud disminuye con el tiempo.
- El sistema pierde energía por el término  $-2v$ .
- Toda trayectoria termina en el equilibrio  $(0,0)$ .

**Interpretación física:** el sistema representa un movimiento oscilatorio amortiguado que se estabiliza en reposo.





# Conclusión General

En este proyecto se aplicaron las ecuaciones diferenciales ordinarias al estudio del movimiento vertical bajo la acción de la gravedad.

- En la **Parte A** se resolvió un problema de cinemática vertical, se determinó la velocidad inicial del proyectil y se interpretó el comportamiento mediante el campo de isoclinas.
- En la **Parte B** se analizó un modelo no lineal con parámetro, se hallaron los puntos de equilibrio y se estudió su estabilidad a través del diagrama de bifurcación.
- En la **Parte C** se modeló el movimiento mediante un sistema de EDOs, se clasificó el punto crítico y se interpretó el plano de fase como un movimiento oscilatorio amortiguado.

En conjunto, los resultados confirman que las EDOs permiten describir, analizar y predecir de forma precisa el comportamiento del movimiento vertical.