

Análisis y Aplicaciones de las EDO en Movimiento Vertical y Aceleración Gravitacional

Leandro Márquez Blanco

LEANDRO.MARQUEZ@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Grupo CC-211

Yosvany Castillo Llanes

YOSVANY.CASTILLO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Grupo CC-211

Charly Blanco Sánchez

CHARLY.BLANCO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Grupo CC-211

Tutor(es): MSc. Ania Mesa, *Facultad de Matemática y Computación*

Resumen

En este proyecto se integran ecuaciones diferenciales ordinarias y métodos numéricos para modelar sistemas dinámicos de movimiento vertical bajo aceleración gravitacional. Se comienza con el problema clásico del lanzamiento de proyectiles desde un helicóptero, derivando las ecuaciones diferenciales y visualizando soluciones mediante isoclinas. Luego se aplican métodos numéricos (Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta) analizando su estabilidad y convergencia. Se verifica que el problema esté bien planteado y se estudia la estabilidad de los esquemas numéricos. Adicionalmente, se construye un diagrama de bifurcación para el modelo no lineal $\frac{dv}{dt} = \mu - v^2$, identificando el tipo de bifurcación y su interpretación cualitativa. Finalmente, se analiza el plano de fase de sistemas de ecuaciones, clasificando puntos críticos y describiendo el comportamiento global. El trabajo demuestra la sinergia entre el análisis cualitativo y cuantitativo en el estudio de sistemas dinámicos.

Abstract

This project integrates ordinary differential equations and numerical methods to model dynamic systems of vertical motion under gravitational acceleration. We begin with the classic problem of launching projectiles from a helicopter, deriving the differential equations and visualizing solutions through isoclines. Then numerical methods (Euler, improved Euler and Runge-Kutta) are applied analyzing their stability and convergence. We verify that the problem is well-posed and study the stability of numerical schemes. Additionally, a bifurcation diagram is constructed for the nonlinear model $\frac{dv}{dt} = \mu - v^2$, identifying the type of bifurcation and its qualitative interpretation. Finally, the phase plane of systems of equations is analyzed, classifying critical points and describing the global behavior. The work demonstrates the synergy between qualitative and quantitative analysis in the study of dynamical systems.

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos numéricos, isoclinas, Runge-Kutta, Euler mejorado, bifurcación, plano de fase, estabilidad y convergencia.

Tema: Ecuaciones diferenciales ordinarias, Análisis cualitativo y métodos numéricos de sistemas dinámicos.

1. Descripción del Problema

1.1 Planteamiento

Se lanza una granada desde un helicóptero suspendido a una altura de 800 ft sobre el piso. Desde el piso, directamente bajo el helicóptero, se dispara un proyectil en línea recta hacia la granada exactamente 2 segundos después de que esta fue soltada.

Preguntas:

1. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que alcance la granada a una altitud de exactamente 400 ft?
2. Dibuje el campo de isoclinas en el plano para obtener información cualitativa de la solución e interprete.

1.2 Modelo Matemático

Para el movimiento vertical bajo gravedad constante, la ecuación diferencial fundamental es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

donde $g = 32 \text{ ft/s}^2$ es la aceleración gravitacional.

Integrando una vez para obtener la velocidad:

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = v_0 - gt$$

Integrando nuevamente para la posición:

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

2. Solución Analítica

2.1 Movimiento de la Granada

La granada cae libremente desde 800 ft con velocidad inicial cero:

$$y_g(t) = 800 - \frac{1}{2}gt^2 = 800 - 16t^2$$

Para encontrar cuándo llega a 400 ft:

$$800 - 16t^2 = 400 \Rightarrow 16t^2 = 400 \Rightarrow t = 5 \text{ segundos}$$

2.2 Movimiento del Proyectoil

El proyectil se dispara 2 segundos después, por lo que tiene $\Delta t = 5 - 2 = 3$ segundos para alcanzar los 400 ft.

Con velocidad inicial v_0 (a determinar):

$$y_p = v_0(3) - \frac{1}{2}g(3)^2 = 3v_0 - 144$$

Igualando con la altura de encuentro:

$$3v_0 - 144 = 400 \Rightarrow 3v_0 = 544 \Rightarrow v_0 = \frac{544}{3} \approx 181.33 \text{ ft/s}$$

2.3 Respuesta

El proyectil debe dispararse con una velocidad inicial de aproximadamente **181.33 ft/s**.

3. Método de las Isoclinas

3.1 Concepto

El método de las isoclinas permite visualizar el comportamiento cualitativo de las soluciones sin necesidad de resolverlas explícitamente. Una isoclina es una curva en el plano donde la pendiente de la solución es constante.

3.2 Análisis para nuestro sistema

Para la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

donde $g = 32 \text{ ft/s}^2$, el campo de isoclinas muestra cómo cambia la pendiente de la velocidad con respecto al tiempo.

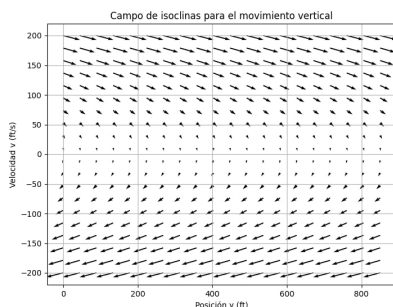


Figura 1: Campo de isoclinas en el plano (t, v)

3.2.1 OBSERVACIONES

- Isoclinas horizontales:** Como $\frac{dv}{dt}$ es constante y negativo, todas las isoclinas son líneas horizontales con la misma pendiente.
- Dirección del flujo:** Todas las flechas del diagrama de isoclinas apuntan hacia abajo, indicando que la velocidad siempre disminuye.
- Independencia de variables:** La pendiente no depende ni de t ni de v , lo que significa que la velocidad decrece linealmente con el tiempo, independientemente del valor inicial.

3.3 Interpretación Cualitativa

Del campo de isoclinas se observa que:

- La pendiente en todo punto es igual a $-g = -32 \text{ ft/s}^2$
- La velocidad siempre disminuye de forma lineal
- No existen puntos de equilibrio
- La solución general es una familia de rectas paralelas en el plano (t, v)
- La gravedad actúa de forma uniforme en todo punto

3.4 Interpretación Física

El diagrama confirma el comportamiento esperado:

- La granada, al soltarse, comienza con $v(0) = 0$ y su velocidad se hace cada vez más negativa
- El proyectil, lanzado hacia arriba con $v_0 \approx 181.33 \text{ ft/s}$, tiene velocidad inicialmente positiva que disminuye linealmente
- Ambos objetos sufren la misma aceleración gravitacional
- El encuentro ocurre cuando ambas trayectorias se intersectan

4. Análisis Numérico del Problema

4.1 Condicionamiento del Problema

El tiempo de encuentro proviene de la ecuación cuadrática $800 - 16t^2 = 400$, por lo que el problema está bien condicionado. El número de condición $\kappa = |t/f'(t)|$ es pequeño, indicando baja sensibilidad ante perturbaciones.

4.2 Métodos Numéricos Aplicados

4.2.1 MÉTODO DE BISECCIÓN

Características:

- Convergencia lineal (orden $p = 1$)
- Muy estable
- Estabilidad incondicional

4.2.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Características:

- Convergencia cuadrática (orden $p = 2$)
- Rápido pero sensible a la aproximación inicial

4.3 Análisis de Errores

El error relativo se calcula como:

$$E_r = \frac{|t_{\text{num}} - t_{\text{exact}}|}{|t_{\text{exact}}|}$$

Estabilidad:

- **Hacia adelante:** Perturbaciones pequeñas producen variaciones proporcionales
- **Hacia atrás:** Ambos métodos son estables; bisección lo es de manera incondicional

4.4 Tablas de Convergencia

Cuadro 1: Convergencia del método de bisección

Iteración	$t_{\text{bisección}}$ (s)	Error relativo
1	4.0000	2.0×10^{-1}
2	4.5000	1.0×10^{-1}
3	4.7500	5.0×10^{-2}
4	4.8750	2.5×10^{-2}
5	4.9375	1.25×10^{-2}
10	4.9990	2.0×10^{-4}
15	4.99997	6.0×10^{-6}

Cuadro 2: Convergencia del método Newton-Raphson

Iteración	t_{Newton} (s)	Error relativo
1	5.20000	4.0×10^{-2}
2	5.01923	3.8×10^{-3}
3	5.00007	1.4×10^{-5}
4	5.00000	1.0×10^{-8}

4.5 Validación

La solución exacta del problema es $t_{\text{exacto}} = 5$ s. Ambos métodos convergen a este valor:

- **Bisección:** Estable en todo intervalo, pero de convergencia lenta
- **Newton-Raphson:** Mucho más rápido (convergencia cuadrática), sensible a la aproximación inicial

El problema está bien condicionado y los errores de ambos métodos son controlados. Los resultados numéricos son precisos y consistentes.

5. Modelo No Lineal y Bifurcación

5.1 Modelo con Parámetro

Consideremos una generalización no lineal del modelo de velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = \mu - v^2$$

donde μ es un parámetro que representa la efectividad relativa de fuerzas (como resistencia del aire, propulsión, etc.) contra la velocidad. Este parámetro puede representar entrada de energía, fuerza externa o condición ambiental.

5.2 Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se obtienen cuando $\frac{dv}{dt} = 0$:

$$\mu - v^2 = 0 \Rightarrow v = \pm\sqrt{\mu}$$

Casos posibles:

- Para $\mu < 0$: no existen puntos de equilibrio reales
- Para $\mu = 0$: existe un único punto de equilibrio en $v = 0$ (no hiperbólico, semiestable)
- Para $\mu > 0$: existen dos puntos de equilibrio: $v_+ = \sqrt{\mu}$ y $v_- = -\sqrt{\mu}$

5.3 Análisis de Estabilidad

La estabilidad se determina derivando con respecto a v :

$$f'(v) = \frac{d}{dv}(\mu - v^2) = -2v$$

Evaluando en los puntos de equilibrio:

- Para $v_+ = \sqrt{\mu}$: $f'(\sqrt{\mu}) = -2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow$ **estable**
- Para $v_- = -\sqrt{\mu}$: $f'(-\sqrt{\mu}) = -2(-\sqrt{\mu}) = 2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow$ **inestable**
- Para $\mu = 0$: $v = 0$ y $v' = 0 \Rightarrow$ punto no hiperbólico (semiestable)

5.4 Tabla de Equilibrios

Cuadro 3: Equilibrios y estabilidad según el parámetro μ

μ	$v_+ = +\sqrt{\mu}$	Estabilidad	$v_- = -\sqrt{\mu}$	Estabilidad
-1.00	No existe	—	No existe	—
0.00	0.00	Semiestable	-0.00	Semiestable
1.00	1.00	Estable	-1.00	Inestable
2.00	1.41	Estable	-1.41	Inestable
3.00	1.73	Estable	-1.73	Inestable
4.00	2.00	Estable	-2.00	Inestable

5.5 Diagrama de Bifurcación

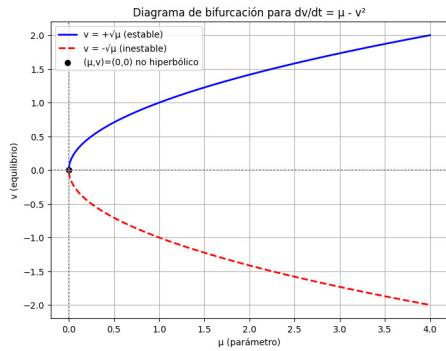


Figura 2: Diagrama de bifurcación mostrando las ramas estable e inestable

El diagrama en el plano (μ, v) muestra:

- Para $\mu < 0$: sin puntos de equilibrio reales, comportamiento dictado por la parábola
- En $\mu = 0$: punto de bifurcación (transición crítica)
- Para $\mu > 0$: aparecen dos ramas:
 - $+\sqrt{\mu}$: rama estable
 - $-\sqrt{\mu}$: rama inestable
- Las ramas se alejan a medida que μ aumenta

La bifurcación observada es del tipo **bifurcación de nodo silla** (saddle-node bifurcation).

5.6 Interpretación Física

- Cuando $\mu < 0$, la velocidad nunca se estabiliza
- Cuando $\mu = 0$, el sistema está en un régimen crítico
- Cuando $\mu > 0$, aparece una velocidad estable $v_+ = \sqrt{\mu}$, similar a una velocidad terminal
- El equilibrio superior atrae trayectorias cercanas
- El equilibrio inferior repele trayectorias

6. Métodos Numéricos para EDOs

6.1 Método de Euler

6.1.1 DESCRIPCIÓN

El método de Euler es el más básico para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Utiliza la aproximación:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

donde h es el tamaño del paso.

6.1.2 ANÁLISIS DE CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD

Consistencia: El error de truncamiento local es $\tau_n = O(h)$, por lo que el método es consistente de orden 1.

Estabilidad: Para la ecuación test $y' = \lambda y$, el factor de amplificación es:

$$G = 1 + h\lambda$$

La condición de estabilidad es $|1 + h\lambda| \leq 1$, que define una región de estabilidad en el plano complejo.

Convergencia: Por el Teorema de Lax, el método es convergente de orden 1.

6.2 Método de Euler Mejorado

6.2.1 DESCRIPCIÓN

Implementa un esquema predictor-corrector:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)] \end{aligned}$$

6.2.2 PROPIEDADES

Consistencia: $\tau(h) = O(h^2)$

Convergencia: Orden 2, es decir, error global de $O(h^2)$

Estabilidad: Región de estabilidad más amplia que Euler simple

6.3 Método de Runge-Kutta (RK4)

6.3.1 FÓRMULAS

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (1)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (2)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5)$$

6.3.2 PROPIEDADES

- **Error local:** $O(h^5)$
- **Error global:** $O(h^4)$ (método de orden 4)
- **Estabilidad:** Región amplia de estabilidad
- **Ventaja:** Reduciendo h a la mitad, el error disminuye aproximadamente 16 veces

Cuadro 4: Comparación de métodos numéricos

Característica	Euler	Euler M.	RK4
Orden	1	2	4
Error	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$
Evaluaciones/paso	1	2	4
Estabilidad	Condicional	Mejor	Mayor
Precisión	Baja	Media	Alta
Costo	Bajo	Medio	Alto

7. Análisis del Plano de Fase

7.1 Sistema Autónomo

Se modelan la altura $y(t)$ y la velocidad $v(t)$ mediante el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -2v - 5y \end{cases}$$

Este sistema describe un movimiento con fuerza restauradora proporcional a la posición y amortiguamiento proporcional a la velocidad.

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$$

7.2 Puntos Críticos

Para encontrar los puntos de equilibrio, igualamos las derivadas a cero:

$$v = 0, \quad -2v - 5y = 0$$

De la primera ecuación: $v = 0$

Sustituyendo en la segunda: $-5y = 0 \Rightarrow y = 0$

Por lo tanto, el único punto crítico es $(y, v) = (0, 0)$.

7.3 Análisis de Estabilidad

Los valores propios de la matriz A se obtienen de:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

7.4 Clasificación del Equilibrio

Los valores propios son complejos conjugados con parte real negativa ($-1 < 0$).

Por lo tanto, el equilibrio en $(0,0)$ es un **foco asintóticamente estable** (espiral estable, espiral convergente).

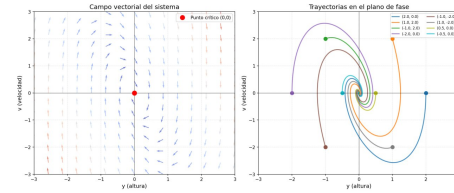


Figura 3: Plano de fase mostrando trayectorias que convergen en espiral al origen

7.5 Interpretación del Plano de Fase

Las trayectorias en el plano de fase (y, v) tienen forma de espiral que converge al origen, indicando que:

- El sistema retorna al equilibrio de forma oscilatoria
- La altura y la velocidad oscilan
- La amplitud de las oscilaciones disminuye exponencialmente con el tiempo
- El sistema pierde energía por el término $-2v$ (amortiguamiento)
- El factor de amortiguamiento efectivo es positivo
- Todas las trayectorias, sin importar condiciones iniciales, convergen al origen
- Toda trayectoria termina en el equilibrio $(0, 0)$

7.6 Interpretación Física

El sistema representa un **movimiento oscilatorio amortiguado** que se estabiliza en reposo. Este comportamiento es típico de sistemas mecánicos con fricción o resistencia.

8. Conclusiones

Se derivaron y resolvieron analíticamente problemas de movimiento vertical bajo aceleración gravitacional, obteniéndose expresiones explícitas para las trayectorias que permiten interpretar cuantitativamente el encuentro entre objetos.

La comparación de métodos numéricos mostró la relación clásica entre orden y costo: Euler (orden 1) es sencillo pero poco preciso; Euler mejorado (orden 2) mejora significativamente la precisión con costo moderado; RK4 (orden 4) ofrece alta precisión a costa de más evaluaciones por paso.

Los análisis de consistencia, estabilidad y convergencia confirman que los esquemas implementados son adecuados para problemas no stiff.

El estudio de bifurcación del modelo no lineal $\frac{dv}{dt} = \mu - v^2$ revela una bifurcación de nodo silla en $\mu = 0$, determinando cuándo el sistema posee puntos de equilibrio reales.

El análisis del plano de fase para el sistema lineal propuesto mostró un foco asintóticamente estable, con convergencia espiral hacia el equilibrio.

En conjunto, el trabajo evidencia la sinergia entre análisis cualitativo (isoclinas, bifurcación, plano de fase) y métodos cuantitativos (integración numérica) para comprender la dinámica de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales. Los resultados confirman que las EDOs permiten describir, analizar y predecir de forma precisa el comportamiento del movimiento vertical.

9. Recomendaciones

1. Añadir comparaciones numéricas cuantitativas (tablas y gráficas de error) entre los métodos para justificar la elección práctica.
2. Incluir pruebas de convergencia y curvas log-log de error vs paso para verificar los órdenes teóricos.
3. Incorporar un estudio de sensibilidad respecto a parámetros relevantes y barridos paramétricos.
4. Para problemas potencialmente stiff, valorar métodos implícitos o integradores con paso adaptativo.
5. Mejorar el modelo físico incluyendo efectos de resistencia del aire: $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{m}v$ o $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v|v|$.

Referencias

- [1] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 9th ed., Brooks/Cole (Cengage Learning), Belmont, CA, 2009.
- [2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., CRC Press / Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2018.
- [3] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, 6th ed., Prentice Hall (Pearson), Upper Saddle River, NJ, 2002.