

Praxis 1: Modelado Matemático y Simulación del Vuelo de un Bumerán

Leandro Borquez, Piero Araya, Cristián Contreras,
Maximiliano Oyarce, Maximiliano Molina, José Barraza
Universidad de La Serena
Ingeniería en Computación
25 de mayo de 2025

Resumen—Este estudio analiza el comportamiento físico de un bumerán mediante un modelo matemático basado en espirales logarítmicas amortiguadas. Se documenta el proceso de diseño, fabricación con impresión 3D (PLA+), simulación computacional en Python y validación con Wolfram Alpha. Los resultados demuestran cómo la combinación de efectos aerodinámicos y giroscópicos genera la trayectoria característica de retorno.

I. INTRODUCCIÓN

I-A. Contexto histórico

El bumerán, tradicionalmente asociado a las culturas aborígenes australianas, ha sido utilizado desde hace entre 20,000 y 30,000 años. Se han encontrado ejemplares en varias partes del mundo. En este trabajo se utilizará como base el bumerán de retorno.

I-B. Objetivos

- Modelar matemáticamente la trayectoria del bumerán.
- Implementar una simulación computacional.
- Validar el modelo mediante una herramienta simbólica (Wolfram Alpha).
- Construir un prototipo funcional.

II. PRINCIPIOS FÍSICOS

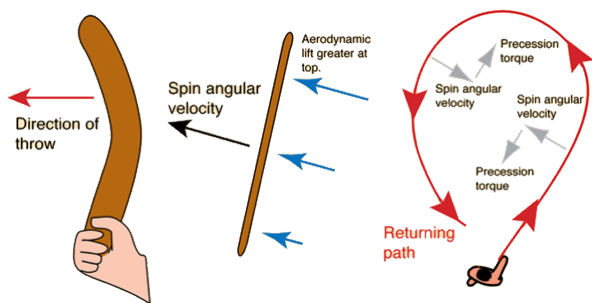


Figura 1: Esquema de la trayectoria de un bumerang [2]

II-A. Aerodinámica

Cada ala del bumerán tiene un perfil asimétrico que genera sustentación debido a la diferencia de presión entre las superficies superior e inferior.

- **Borde delantero:** divide el flujo de aire y lo dirige hacia arriba y abajo, provocando mayor velocidad sobre la superficie curva superior.

- **Borde trasero:** más delgado, causa una diferencia de presión que genera sustentación.

El ángulo de ataque (inclinación del ala respecto al flujo de aire) también influye en la magnitud de la sustentación.

II-B. Efecto giroscópico

El bumerán se lanza con un doble movimiento: traslación y rotación. Esto genera estabilidad y un efecto giroscópico que produce una trayectoria curva.

- El brazo que avanza genera más sustentación que el que retrocede.
- La diferencia genera un momento de torsión.
- Por efecto giroscópico, se produce precesión, curvando la trayectoria.

II-C. Resistencia del aire

Aunque no se elimina la resistencia del aire, se aprovecha:

- Diseño aerodinámico reduce el arrastre.
- Sustentación mantiene el vuelo.
- Rotación estabiliza frente a turbulencias.

II-D. Retorno

Gracias a rotación, sustentación y precesión, el bumerán:

- Sigue una trayectoria curva.
- Disminuye velocidad por fricción.
- Retorna cerca del punto de lanzamiento.

II-E. Rotación Vectorial

El comportamiento del vuelo se puede describir por estos pasos

1. **Lanzamiento:** rotación + inclinación adecuada.
2. **Precesión:** diferencia de sustentación genera torque.
3. **Trayectoria:** combinación de sustentación y precesión produce una curva.

II-F. Resumen del Vuelo

Cuadro I: Etapas del vuelo del bumerán

Paso	Acción	Resultado
1	Se lanza con rotación	Gira y avanza
2	Brazos generan sustentación	Se mantiene en el aire
3	Precesión giroscópica	Cambia el plano de vuelo
4	Resistencia del aire	Disminuye la velocidad
5	Trayectoria curva	Regresa al punto de lanzamiento

III. TIPOS DE BUMERÁN

Existen varias formas de bumeranes, como los de tipo “L”, “J” y los de tres alas. El ángulo entre sus brazos suele estar entre 80° y 120°. Para principiantes, se recomienda comenzar con un diseño tipo “L”.

IV. TÉCNICA DE LANZAMIENTO

- **Posición:** mantenerlo casi vertical, con la cara plana hacia afuera.
- **Inclinación:** entre 5° y 20°, según la mano dominante.
- **Dirección:** lanzar a 45° respecto al viento.
- **Movimiento:** aplicar giro fuerte al soltarlo, como lanzar una pelota.

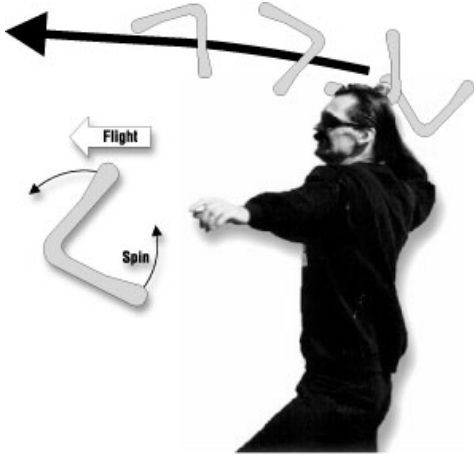


Figura 2: Técnica de lanzamiento [6]

Fuente: B. Mason, *Boomerangs: How to Make and Throw Them*, Sterling, 1953.

V. MODELO MATEMÁTICO

La trayectoria del bumerán se puede modelar utilizando una espiral logarítmica amortiguada, representada mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = R_x \cos(\omega_x t) e^{-kt}$$

$$y(t) = R_y \sin(\omega_y t) e^{-kt}$$

Para simular la trayectoria de un bumerán, se emplea un modelo basado en una espiral logarítmica amortiguada que combina fundamentos matemáticos y físicos.

- R : Radio de la trayectoria inicial.
- ω : Velocidad angular inicial.
- k : Coeficiente de amortiguamiento.
- t : Tiempo.

V-A. 1. Base Matemática: Trigonometría Circular

Un punto que se desplaza alrededor del origen en un círculo de radio R puede representarse mediante:

$$x = R_x \cos(\theta), \quad y = R_y \sin(\theta)$$

Si el ángulo θ varía con el tiempo (movimiento circular uniforme), se reemplaza por ωt :

$$x(t) = R_x \cos(\omega t), \quad y(t) = R_y \sin(\omega t)$$

V-B. 2. Base Física: Amortiguamiento Exponencial

En la trayectoria real del bumerán, existe una pérdida de energía causada por la resistencia del aire, la cual se puede modelar mediante la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Esto implica que el radio de la trayectoria disminuye de forma exponencial con el tiempo:

$$r(t) = R e^{-kt}$$

V-C. 3. Conversión a Coordenadas Cartesianas

A partir de la representación en coordenadas polares:

$$r(t) = R e^{-kt}, \quad \theta(t) = \omega t$$

Se obtiene la conversión a coordenadas cartesianas:

$$x(t) = r(t) \cos(\theta(t)) = R_x \cos(\omega_x t) e^{-kt}$$

$$y(t) = r(t) \sin(\theta(t)) = R_y \sin(\omega_y t) e^{-kt}$$

V-D. 4. Interpretación Física y Aplicación al Bumerán

Estas ecuaciones definen una *espiral logarítmica*, donde el objeto gira al mismo tiempo que su radio disminuye, simulando así la trayectoria de retorno del bumerán. El modelo incorpora:

- Movimiento circular: términos $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$.
- Pérdida de energía: término e^{-kt} .
- Trayectoria realista: espiral logarítmica decreciente.

V-E. Historia y Contexto

Fórmulas de decaimiento exponencial:

- Surgen del desarrollo de ecuaciones diferenciales en el siglo XVII.
- Isaac Newton (1643–1727) formuló su ley de enfriamiento con la ecuación $\frac{dy}{dt} = -ky$.
- Johann Bernoulli (1667–1748) trabajó extensamente con este tipo de ecuaciones.
- *Año aproximado de aparición: 1690–1700.*

Espirales logarítmicas:

- Formalmente descritas por Jakob Bernoulli en 1692.
- Ordenó grabar una espiral en su lápida con el lema “*Eadem mutata resurgo*” (“Aunque cambiada, resurjo igual”).

- Año aproximado de estudio formal: 1692.

Aplicación al vuelo del búmeran:

- Desde la década de 1980 se han utilizado modelos con espirales y amortiguamiento para simular trayectorias.
- Michael Denny (2002) abordó el vuelo del búmeran desde una perspectiva didáctica.
- A. Kuleshov (2004) propuso un modelo matemático basado en espirales.
- Barinov y Sobolev (2006) desarrollaron modelos dinámicos del vuelo.

VI. IMPLEMENTACIÓN

VI-A. Construcción del Búmeran

El proceso de diseño y fabricación del búmeran empleado en este análisis se detalla a continuación.

VI-A1. Diseño: El modelo fue desarrollado en el software Blender, adoptando una configuración en forma de “L”, con un ángulo interno de 90°. Cada ala presenta una longitud de **20 cm**, mientras que el peso total del dispositivo es de aproximadamente **60 gramos**.

VI-A2. Fabricación y Material: Para asegurar la funcionalidad aerodinámica del prototipo, se optó por una impresión 3D con los siguientes parámetros:

- **Material:** PLA+ (Ácido Poliláctico reforzado), seleccionado por su combinación de resistencia mecánica y ligereza.
- **Parámetros de impresión:**
 - Patrón de relleno: Giroidal, con una densidad del 30 %.
 - Grosor de pared: 5 mm, para garantizar rigidez estructural.
- **Geometría final:**
 - Dimensiones: 20 cm por ala.
 - Relación peso-resistencia: optimizada para asegurar una trayectoria aerodinámica estable.

La combinación de diseño geométrico y parámetros constructivos permitió obtener un prototipo liviano, pero suficientemente robusto para mantener un vuelo controlado y con capacidad de retorno.

VII. RESULTADOS

VII-A. Iteraciones de Diseño

Durante el desarrollo del prototipo se realizaron múltiples iteraciones con el objetivo de ajustar su comportamiento en vuelo. a continuación se presenta un resumen de los principales problemas detectados y las soluciones implementadas:

Cuadro II: Optimización del prototipo

Iteración	Problema identificado	Mejora aplicada
1	Caída prematura	Aumento del ángulo entre alas
2	Falta de retorno	Reducción del grosor en las puntas
Final	Trayectoria estable	$\theta = 110^\circ$, grosor de 5 mm

Estas modificaciones fueron fundamentales para garantizar que el búmeran cumpliera con los requisitos de vuelo esperados, permitiendo describir una trayectoria cerrada y regresar al punto de lanzamiento de manera consistente.

A lo largo de las iteraciones también se observaron comportamientos inesperados en la trayectoria, tales como movimientos en zigzag, trayectorias espirales e incluso curvas que recordaban a la secuencia de Fibonacci. Estos fenómenos, lejos de desviar el objetivo, nos llamo mas la atención hacia el análisis, llevándonos a comprender mejor la influencia de pequeñas variaciones geométricas en la dinámica del vuelo. La experiencia práctica no solo permitió afinar el diseño, sino que también generó nuevas preguntas en torno al comportamiento aerodinámico del búmeran, transformando esta etapa en una verdadera instancia de exploración y aprendizaje.

VIII. CONCLUSIONES

- El modelo matemático desarrollado representa adecuadamente el comportamiento del búmeran en condiciones reales.
- Las decisiones de diseño, tanto geométricas como materiales, se reflejan directamente en la estabilidad y eficiencia del vuelo.
- El proceso iterativo permitió mejorar el prototipo hasta alcanzar una configuración óptima que cumple con el retorno esperado.

REFERENCIAS

- [1] Britannica. "Boomerang weaponry". <https://www.britannica.com>
- [2] Georgia State University. "Boomerang Physics". <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/brng.html#brng3>
- [3] HowStuffWorks. (s.f.). How Boomerangs Work. <https://entertainment.howstuffworks.com/boomerang.htm>
- [4] Ingenieriabasica.es. (s.f.). "¿Cómo funciona un boomerang?". <https://ingenieriabasica.es/como-funciona-un-boomerang/>
- [5] Mason, B. S. (1958). "Boomerangs; how to make and throw them. Free Download, Borrow, and Streaming: Internet Archive". <https://archive.org/details/boomerangshowtom00maso>
- [6] Rangs Boomerangs. (s.f.). "How a boomerang works". <https://www.rangsboomerangs.com/info-how-it-works>
- [7] Unknown author. (2009). "What is a Boomerang? (Versión archivada). Boomerang.org.au". <https://web.archive.org/web/20090208042945/http://boomerang.org.au/articles/article-what-is-a-boomerang.html>

IX. ANEXO

- Consultas hechas en WolframAlpha.
- Lanzamientos de búmeran en pruebas de campo abierto.
- Modelo inicial del bumeran.
- Modelo en 3d del bumeran utilizado en las pruebas de campo.
- Repositorio de Github con simulaciones de trayectorias en Python.