Trabalho 5

Entrega: 28 de agosto de 2021 até as 23:59 pelo class.

Exercício 1: Partícula carregada em um campo eletromagnético cruzado.

Uma trajetória interessante para partículas eletricamente carregadas ocorre quando colocamos um campo elétrico uniforme e outro magnético também uniforme fazendo um ângulo de noventa graus entre si. Por simplicidade e sem perda de generalidade vamos fazer $\vec{E} = E\hat{k}$ e $\vec{B} = B\hat{\imath}$, com E e B sendo constantes no espaço e no tempo (daí o nome uniforme). Os vetores unitários apontam nas direções $\hat{\imath} \to x$, $\hat{\jmath} \to y$ e $\hat{k} \to z$ e são perpendiculares entre si, por definição.
A força magnética que uma partícula carregada q sente é dada por

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \,,$$

onde $(\vec{v} \times \vec{B})$ é produto vetorial entre a velocidade de q e o campo magnético. No caso mais geral temos que a velocidade é escrita como,

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \implies \vec{F}_m = qB\left(v_z\hat{\jmath} - v_y\hat{k}\right) \ .$$

Para a força elétrica temos

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = qE\hat{k} \ .$$

Consequentemente a segunda lei de Newton nos fornece

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = m\vec{a} \implies q\left(E\hat{k} + Bv_z\hat{\jmath} - Bv_y\hat{k}\right) = m\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$$

As equações de movimento para cada componente são dadas por

$$ma_x = 0 \,, \qquad a_y = qBv_z \qquad \text{e} \qquad ma_z = q(E - Bv_y) \ .$$

Note que para a componente x a solução é um MRU, somado a isso iremos fazer a partícula sair do repouso, desta forma o resultado é trivial, $x = 0$ para qualquer tempo. Acabamos com duas equações diferenciais de segunda ordem para o movimento da partícula:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = qB\frac{dz}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = q\left(E - B\frac{dy}{dt}\right) \ ,$$

onde utilizamos que a velocidade é a derivada posição.

(a) Resolva o sistema de equações diferencias dadas acima com os seguintes valores para os parâmetros: $q = m = E = B = 1$, todos em unidades SI. Utilize a condição inicial que a partícula está em repouso na origem do referencial. Utilize a função `solve_ivp` da `scipy` para encontrar a solução do sistema. Faça o gráfico da trajetória da partícula com y na horizontal e z na vertical entre os valores de tempo $0 \leq t \leq 50$ segundos. Você consegue estimar o período de repetição de movimento?

(b) De posse dos resultados do item anterior, faça o gráfico do tempo na horizontal e

$$R = \sqrt{(y-t)^2 + (z-1)^2}$$

na vertical. O seu valor teórico esperado é uma reta horizontal, $R(t) = 1$. Você encontrou esse valor? Sabendo que o resultado analítico do sistema é

$$y(t) = t - \sin(t) \qquad \text{e} \qquad z(t) = 1 - \cos(t)$$

você saberia explicar o que significa a quantidade R? Dica: utilize a relação $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.