

Curso de Cálculo 3

Cálculo vetorial, sequências e séries

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Usado na disciplina: Cálculo 3 - 2010.1

Autores: (1a versão) Gabriel Coutinho

Data: Mar/2010

Observação importante: Ao longo do que segue, **não** estaremos preocupados com os devidos cuidados formais que algumas definições, passagens, comentários e demonstrações exigem. Este é um texto com o objetivo de motivar e explicar, e não de apresentar resultados matemáticos formais. Para os que quiserem textos rigorosos a nível de um curso de Cálculo, sugiro:

Cálculo 2 de Serge Lang, editora Ao Livro Técnico S.A.

Um curso de Cálculo vols 2, 3 e 4 de Hamilton Guidorizzi, editora LTC.

Um bom livro com exercícios e figuras, e *referência* para a montagem deste curso é:

Cálculo, v.2 de James Stewart, editora CENGAGE.

Livros de um nível mais aprofundado, para os que quiserem contato com matemática a nível superior, são:

Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo P. Carmo, editora da SBM.

Análise Real v.1 de Elon L. Lima, editado pelo IMPA.

O autor cita ainda

All the Mathematics You Missed - But Need to Know for Graduate School de Thomas A. Garrity, Cambridge University Press.

como uma excelente fonte para revisar assuntos de cursos de cálculo que ele na verdade nunca prestou muita atenção. Inclusive, as demonstrações para os Teoremas de Stokes e Gauss foram fortemente inspiradas (copiadas) deste livro.

O autor agradece ao prof. Sérgio Santa Cruz (UFPE) pelas notas de aula que inspiraram o apêndice sobre geometria diferencial de curvas.

Por último, o autor sugere a qualquer estudante que realmente deseje aprender cálculo (eu sei que existem) que faça mais exercícios do que os que constam nessas notas.

O texto a seguir não foi bem revisado, e poderá conter erros. Gentileza reportá-los ao autores, assim como quaisquer críticas, dúvidas, comentários, sugestões e principalmente elogios: gmcout@gmail.com.

Sumário

I	1ª unidade	6
1	Curvas parametrizadas	7
1.1	Introdução	7
1.2	A derivada de uma curva	9
1.2.1	Curva (parametrização) regular	10
1.2.2	Reparametrização	10
1.3	O comprimento de uma curva	11
1.3.1	Reparametrização pelo comprimento do arco	14
1.4	Exercícios	15
2	Integrais de linha e campos vetoriais	17
2.1	Integrais de linha por comprimento de arco	17
2.2	Integrais de linha sobre campos vetoriais	18
2.2.1	Trabalho	18
2.2.2	Integral de linha sobre um campo	19
2.2.3	Campos Conservativos	20
2.2.4	Teorema Fundamental da Integrais de Linha sobre Campos Conservativos	22
2.3	Exercícios	25
3	Teorema de Green	26
3.1	Exercícios	28
A	Apêndice - Geometria de Curvas	29
A.1	Curvatura para curvas planas	29
A.2	Curvas espaciais - o triedro de Frenet e a torção	30
A.2.1	Fórmulas de Frenet	31
A.3	Parametrizações quaisquer e fórmulas	32
A.3.1	Fórmula para curvatura	33
A.3.2	Fórmula para torção	34
A.4	Existência e Unicidade de curvas - breve comentário	34
A.5	Exercícios	35
II	2ª unidade	37
4	Superfícies parametrizadas e integrais de superfície	38
4.1	Introdução	38

4.2	Plano tangente e vetor normal	39
4.3	Área de superfícies	40
4.4	Integrais de superfície	42
4.5	Exercícios	43
5	Teorema de Stokes e Teorema da Divergência	44
5.1	Teorema de Stokes	44
5.2	Teorema da Divergência	46
5.3	Exercícios	49
B	Demonstração do Teorema de Stokes e do Teorema da Divergência	51
B.1	Demonstração do Teorema de Stokes	51
B.2	Demonstração do Teorema da Divergência	53
C	Revisão - integrais triplas	56
C.1	Coordenadas retangulares	56
C.2	Mudança de variáveis	58
C.3	Coordenadas cilíndricas	58
C.4	Coordenadas esféricas	60
C.5	Aplicação: Cálculo de volumes	61
C.6	Exercícios	63
III	3ª unidade	64
6	Sequências	65
6.1	CrITÉRIOS de convergência	67
6.2	Exemplos clássicos	69
6.3	Exercícios	72
7	Séries	73
7.1	CrITÉRIOS de convergência e divergência	75
7.1.1	CrITÉRIOS para séries de termos positivos	76
7.1.2	Séries de termos quaisquer	81
7.2	Exemplos mais sofisticados e um resultado surpreendente	82
7.3	Exercícios	85
8	Séries de Potências e Séries de Taylor	87
8.1	Raio de Convergência	87
8.2	Séries de Taylor	90
8.2.1	Derivada e integral de uma série	90
8.2.2	Série de Taylor de uma função	92
8.3	Exercícios	96
D	Breve introdução às funções complexas	97
D.1	Revisão das propriedades básicas	97
D.1.1	Aritmética	97
D.1.2	O plano complexo e a forma trigonométrica	98
D.1.3	Fórmulas de deMoivre	99

D.1.4	Exercícios desta seção	100
D.2	Funções complexas e a derivada	101
D.2.1	Derivada complexa	102
D.2.2	Equações de Cauchy-Riemann	103
D.3	Séries de potências complexas	105
D.3.1	Séries de potências	105
D.3.2	Série de Taylor	107
D.3.3	Fórmula para as funções	109
D.4	Exercícios	111
E	Uma breve introdução às Séries de Fourier e uma aplicação notável	112
E.1	Séries de Fourier	112
E.2	Identidade de Parseval	114
E.3	Aplicação para o cálculo da soma dos inversos de potências pares	115
E.3.1	Expoente igual a 2	115
E.3.2	Expoente igual 4	116
E.3.3	Expoente par qualquer	117
E.3.4	Dificuldade para expoente ímpar	118
IV	Gabaritos	119
9	Curvas parametrizadas	120
9.1	Introdução	120
9.2	A derivada de uma curva	120
9.2.1	Reparametrização	120
9.3	O comprimento de uma curva	121
9.4	Exercícios	121
10	Integrais de linha e campos vetoriais	125
10.1	Integrais de linha por comprimento de arco	125
10.2	Exercícios	125
11	Teorema de Green	127
11.1	Exercícios	127
F	Apêndice - Geometria de Curvas	129
F.1	Exercícios	129
12	Superfícies parametrizadas e integrais de superfície	133
12.1	Exercícios	133
13	Teorema de Stokes e Teorema da Divergência	137
13.1	Teorema de Stokes	137
13.2	Exercícios	137
14	Sequências	142
14.1	Exercícios	142

15 Séries	144
15.1 Exercícios	144
16 Séries de Potências e Séries de Taylor	148
16.1 Exercícios	148

Parte I

1ª unidade

Onde falaremos sobre curvas parametrizadas, integrais de linha
e o teorema de Green

Capítulo 1

Curvas parametrizadas

1.1 Introdução

Nosso ambiente de estudo poderá ser os espaços \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Nosso interesse inicial é descrever curvas nestes espaços, e para tal vamos introduzir a idéia de *curva parametrizada*.

Definição 1.1. Uma *curva parametrizada* em \mathbb{R}^2 é uma função contínua definida num intervalo I dos números reais. Ou seja, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada número no intervalo a um ponto no plano. Será comum representarmos da forma a seguir:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

A motivação de introduzir essa definição para falarmos de curvas no \mathbb{R}^2 é que nem todas as curvas podem ser expressas como o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, não existe função desta forma cuja o gráfico seja uma circunferência. No máximo podemos expressar uma semi-circunferência fazendo $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$ (no caso, o raio seria 1).

Exemplo 1.1. Por outro lado, a circunferência de raio 1 pode ser representada como uma curva parametrizada da seguinte forma:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

onde $t \in [0, 2\pi]$, ou seja, $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para se convencer disto, basta pensarmos no círculo trigonométrico, que é um círculo e as coordenadas dos pontos são exatamente o seno e o cosseno do Ângulo (no caso, o nosso parâmetro t).

Note que neste exemplo, $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$. □

Talvez seja interessante imaginarmos uma curva parametrizada como um ponto descrevendo uma trajetória no plano. Mesmo que trajetória seja o círculo unitário, existem diversas como um ponto pode percorrê-la: velocidade baixa, alta, constante ou variável, acelerando e depois desacelerando, etc. Esta forma de percorrer é dada pela parametrização. Isto nos sugere que diferentes parametrizações podem ter a mesma curva como imagem.

Exemplo 1.2. A curva $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ com $t \in [0, \pi]$ é exatamente o círculo unitário, mas é como se a velocidade tivesse sido duas vezes maior. E ainda, $(\cos(t^2), \sin(t^2))$, com $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ é a mesma curva, mas é como se a velocidade fosse aumentando a medida que t cresce. Futuramente, ao falarmos de derivada, vamos quantificar esta noção de velocidade. □

Estender os comentários acima para o espaço \mathbb{R}^3 é fácil.

Definição 1.2. Uma *curva parametrizada* em \mathbb{R}^3 é uma função contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada número no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a um ponto no espaço. Será comum representarmos da forma a seguir:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Exemplo 1.3. Consideramos a seguinte curva

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

onde $t \in [0, 2\pi]$. Qual o formato desta curva? Para responder perguntas deste tipo, o mais interessante é eliminarmos uma coordenada de modo que ela se torne mais familiar. Por exemplo, se não existisse a última, seria exatamente o círculo do exemplo anterior. Significa que onde quer que ela esteja no espaço, sua projeção no plano será o círculo unitário, ou seja, esta curva localiza-se no cilindro reto sobre este círculo.

Ocorre que a medida que o parâmetro t aumenta, de 0 a 2π , as duas primeiras coordenadas fazem os pontos da curva descreverem uma trajetória circular, ao passo que a última coordenada faz os pontos “subirem”. Ou seja, teremos um formato helicoidal - a curva será uma hélice! \square

Exemplo 1.4. Qual uma curva parametrizada que representa a interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e o plano $y + z = 2$? Ora, chamando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$, temos que:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

O conjunto de todos os pontos que satisfazem tal equação é justamente $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \sin(t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Agora:

$$y(t) + z(t) = 2 \Rightarrow \sin(t) + z(t) = 2 \Rightarrow z(t) = 2 - \sin(t)$$

Portanto nossa curva será:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 2 - \sin(t)) \text{ com } t \in [0, 2\pi]$$

\square

Exemplo 1.5. Este exemplo é um exercício. Qual uma curva parametrizada que representa a interseção entre o parabolóide $y = x^2 + z^2$ com o plano $x = z$??

(1) Encare estas variáveis como as funções $x(t), y(t), z(t)$. (2) O que você pode dizer facilmente sobre $x(t)$ e $z(t)$? (3) Arbitrariamente, decida que alguma destas funções será simplesmente $= t$. Quais parecem uma boa escolha? (4) Substitua na expressão para $y(t)$.

Você seria capaz de desenhar esta curva? Tendo chamado $x(t)$ de t^2 , teríamos obtido a mesma curva? E se fosse t^3 ? \square

Citamos que uma curva parametrizada deve ser uma função contínua. De fato, para que isto ocorra, é necessário e suficiente que cada função coordenada seja contínua. A proposição a seguir esclarece este fato:

Proposição 1.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Então:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t))$$

\square

Se cada componente é contínua, teremos que:

$$(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

Logo $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t)$ que é exatamente a primeira parte será igual a $\alpha(t_0)$, que é segunda parte, garantindo que a curva é contínua.

1.2 A derivada de uma curva

A pergunta natural a se fazer em um curso de cálculo logo que uma estrutura é definida é: e a sua derivada?

Sem dificuldades, temos que:

Proposição 1.2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Então:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

valendo o resultado análogo para \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Por definição de derivada, temos que:

$$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

Mas o lado direito é exatamente:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)) - (x(t), y(t), z(t))}{\Delta t} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t))}{\Delta t} \end{aligned}$$

Colocando o Δt para dentro das coordenadas, teremos:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) = \\ & = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Que finalmente é:

$$(x'(t), y'(t), z'(t))$$

como queríamos. □

Esperamos que a demonstração acima não tenha parecido longa e técnica - na verdade ela só é maçante. O leitor atento pode observar que trata-se apenas de operações simples com vetores, e de uma aplicação da Proposição 1 sobre limite de funções vetoriais.

Exemplo 1.6. A derivada da curva $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ é:

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$
□

A cada ponto de uma curva está associado um vetor derivada. Se imaginarmos uma curva parametrizada como um ponto descrevendo uma trajetória no espaço, este vetor será exatamente a tangente da curva naquele ponto - fisicamente, o tamanho do vetor é exatamente a velocidade do ponto, pois o tamanho do vetor dá a idéia de com qual intensidade a partícula está se movendo para a direção do vetor.

Exemplo 1.7. A derivada da curva $\alpha(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ é:

$$\alpha'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$$

Logo $\|\alpha'(t)\| = \|(-2\sin(2t), 2\cos(2t))\| = 2\sqrt{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)} = 2$ Ou seja, a partícula estaria descrevendo com velocidade 2 o círculo unitário. No exemplo anterior, qual era a velocidade?! \square

Exemplo 1.8. Este exemplo é um exercício. Consideremos a hélice no \mathbb{R}^3 :

$$\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2) \text{ com } t \in [0, 2\pi]$$

Qual o vetor tangente a curva em $t = \pi$? Qual a função que determina a velocidade do ponto percorrendo a curva? Qual a velocidade do ponto em $t = 2\pi$?

(1) Faça a derivada da curva. (2) Substitua $t = \pi$ para saber o vetor tangente. (3) Calcule a norma do vetor derivada - esta será a função que dará a velocidade. (4) Substitua $t = 2\pi$. \square

1.2.1 Curva (parametrização) regular

Definição 1.3. Dizemos que uma curva (parametrização) é *regular* se sua derivada nunca é o vetor nulo, ou seja, se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, onde este zero representa o vetor nulo.

Note que quando uma curva não é regular, em algum ponto a derivada se anula. Fisicamente, é como se a partícula parasse em sua trajetória. Ao retomar o movimento, ela pode alterar drasticamente a direção, gerando uma espécie de bico no formato da curva. Observe:

Exemplo 1.9. A curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ é tal que $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$. Quando $t = 0$, temos $\alpha'(0) = (0, 0)$. Desenhe esta curva e constate que existe um bico na origem. Para sabermos analiticamente se a curva formará um bico, o ideal é escrevermos uma componente ($y(t)$) em termos da outra: se $x(t) = t^3$, então $t = \sqrt[3]{x}$. Como $y(t) = t^2$, teremos:

$$y = x^{2/3}$$

Derivando, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

que não é definida se $x = 0$! Isso nos indica que não há tangente possível para a curva - sendo o caso de existir um bico. \square

1.2.2 Reparametrização

Vamos atentar para um fato que já foi discutido anteriormente. Consideramos uma curva parametrizada por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Agora considere que existe um intervalo J e uma função $\varphi : J \rightarrow I$. Definimos $\beta(s)$ por:

$$\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$$

Tal β é uma reparametrização da curva.

Exemplo 1.10. Lembre-se de quando consideramos a curva $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, e mostramos que $\beta(s) = (\cos(2s), \sin(2s))$, $s \in [0, \pi]$, era exatamente a mesma curva. Ora, nosso φ neste caso é tal que $\varphi : [0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ sendo $\varphi(t) = 2t$. \square

Observe que se

$$\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$$

então temos que:

$$\beta'(s) = \varphi'(s) \cdot \alpha'(\varphi(s))$$

Desta forma, $\varphi'(s)$ determina a relação entre as derivadas. Se for positiva, a reparametrização ocorre sem alterar o sentido da trajetória. Se for negativo, os sentidos serão opostos.

Exemplo 1.11. Este exemplo é um exercício. Considere a parametrização do trecho de parábola:

$$\alpha(t) = (t, t^2), \text{ com } t \in [-2, 2]$$

E a reparametrização do mesmo trecho:

$$\beta(s) = (-4s, 16s^2)$$

Determine φ (incluindo os intervalos) e decida se houve alteração no sentido.

(1) Em quem o parâmetro t foi mandado? (2) Qual a derivada desta função? (3) Para que a imagem fique entre -2 e 2 , o domínio tem que ser qual intervalo? (4) Qual o sinal da derivada? \square

Esta subseção estabelece de vez que uma mesma curva pode ter várias parametrizações. Preferiremos então nos referirmos à *parametrização* quando estivermos falando da função, e de *curva* quando estivermos falando da imagem.

1.3 O comprimento de uma curva

Nosso objetivo nesta seção será calcular o comprimento de um arco (trecho) de uma curva parametrizada.

Exemplo 1.12. Consideremos a parametrização da hélice $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ com:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

Suponha que uma partícula se move por esta trajetória. O significado físico do intervalo sobre o qual α está definido é de *tempo*, e nós sabemos calcular a velocidade, será:

$$\|\alpha'(t)\| = \|(\sin(t), \cos(t), 1)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Opa, a velocidade é constante! Nós sabemos o tempo. Alguma idéia de qual foi o espaço? A física nos diz que comprimento da curva, que denotaremos por L , será:

$$L = \text{velocidade} \cdot \text{tempo} = 2\sqrt{2}\pi$$

\square

Tudo seria perfeito se a velocidade fosse sempre constante. Ocorre que nem sempre é fácil acharmos uma parametrização cuja velocidade seja constante. Por exemplo, qual o comprimento do arco de parábola parametrizado por $\alpha(t) = (t, t^2)$ com $t \in [0, 1]$? A velocidade será $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, que infelizmente não é constante.

Ora, o produto *tempo vezes velocidade* nada mais é do que a soma da velocidade por ela mesma tantas unidades quanto for o tempo. Se a velocidade da partícula na parábola fosse constante em cada unidade de tempo, bastaria calcular o comprimento de cada parte e depois somar. O problema é que

a velocidade varia a cada mínimo instante. Então poderíamos pegar um valor médio da velocidade em cada unidade de tempo e fazermos esta conta - obteríamos um valor aproximado.

Para melhorar a aproximação, poderíamos dividir o tempo em décimos de uma unidade, pegando o valor médio da velocidade em cada décimo, calculando cada comprimento percorrido, e depois somando tudo. Mas este ainda não seria o valor exato.

O leitor perspicaz já deveria ter antevisto onde vamos chegar. O que estamos sugerindo é iterar infinitas vezes uma soma de valores sobre partições cada vez menores de um intervalo - ou seja: **integrar!**

Em matemática, a integração serve justamente para interpretarmos os casos em que queremos fazer uma soma (infinita) de uma grandeza que varia continuamente de acordo com outra. Motivados por esta discussão, e sem mais delongas, teremos que:

Teorema 1.1. Dada uma parametrização $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma curva em \mathbb{R}^3 , temos que o comprimento da curva será dado por:

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

O leitor já deveria está bastante convencido deste resultado, mas apresentaremos um esboço da demonstração formal por questões de completude - e para que fique claro que as idéias matemáticas não dependem *a priori* de conceitos físicos.

Demonstração. Consideremos a partição do intervalo $[a, b]$ em $\{a = t_0, t_2, \dots, t_n = b\}$. Seja $P_i = \alpha(t_i)$. Observe agora que a poligonal que liga os pontos P_i é uma aproximação da curva. O tamanho da curva será aproximadamente

$$\sum_{j=1}^n \|P_j - P_{j-1}\|$$

Vamos agora fazer essa soma tomando uma partição infinita. Se a partição for infinita, teremos que $t_j - t_{j-1} = \Delta t \rightarrow 0$. Neste caso:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_j - P_{j-1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{\Delta t}, \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{\Delta t}, \frac{z(t_j) - z(t_{j-1})}{\Delta t} \right) = \alpha'(t_j)$$

Concluindo que:

$$P_j - P_{j-1} = \alpha'(t_j) \cdot \Delta t \text{ se } \Delta \rightarrow 0$$

Então finalmente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|P_j - P_{j-1}\| = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^n \|\alpha'(t_j)\| \cdot \Delta t$$

Mas esta é exatamente a definição de integral. Logo:

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

□

Exemplo 1.13. Qual o comprimento da catenária dada por $y = \cosh(x)$ no intervalo $x \in [0, 2]$? Começamos parametrizando a curva, fazendo $x(t) = t$. Logo:

$$\alpha(t) = (t, \cosh(t)) \text{ com } t \in [0, 2]$$

Daí teremos que:

$$\alpha'(t) = (1, \sinh(t)) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t)}$$

Lembrando que a identidade trigonométrica hiperbólica fundamental diz que $\cosh^2(t) = 1 + \sinh^2(t)$, teremos que:

$$\|\alpha'(t)\| = \cosh(t)$$

Logo

$$L = \int_0^2 \cosh(t) \, dt = \sinh(t) \Big|_0^2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

□

Exemplo 1.14. Este exemplo é um exercício.

Exiba uma integral que determina perímetro da elipse que passa pelos pontos $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ e $(0, -1)$.

(1) Que tal desenhar a elipse? (2) Qual a equação cartesiana que esta elipse satisfaz? Comece determinando o a e o b e lembre-se que a equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (3) Qual o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma soma de quadrados igual a 1? Isso mesmo, chame $\frac{x(t)}{a} = \cos(t)$ e $\frac{y(t)}{b} = \sin(t)$. (4) Escreva a parametrização. Qual é o intervalo? O mesmo de sempre, afinal estamos dando uma volta. (5) Calcule a derivada da parametrização. (6) Calcule a função da velocidade. (7) Exiba a integral. Você seria capaz de calcular esta integral?

□

Alguém questionador poderia estar pensando: o comprimento de uma curva só depende da curva e não depende da parametrização - mas para calculá-lo nós utilizamos uma parametrização específica α !! A proposição a seguir vai convencê-lo de vez que esta dependência é apenas aparente.

Proposição 1.3. O comprimento de uma curva não depende da parametrização.

Demonstração. Consideramos duas parametrizações de uma curva qualquer, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, sendo $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ como já havíamos definido. Suponhamos que $\varphi'(s) > 0$ sempre, o caso oposto é análogo. Nós vamos mostrar que:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| \, ds$$

Para tal, observe que:

$$\int_c^d \|\beta'(s)\| \, ds = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) \, ds$$

Agora chamamos $t = \varphi(s)$. Vamos aplicar o Teorema de Mudança de Variáveis para integrais. Pela regra prática, fazemos:

$$\frac{dt}{ds} = \varphi'(s) \Rightarrow dt = \varphi'(s) \, ds$$

Notando também $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$, teremos:

$$\int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s) \, ds = \int_{\varphi(c)=a}^{\varphi(d)=b} \|\alpha'(t)\| \cdot dt$$

exatamente como queríamos.

□

1.3.1 Reparametrização pelo comprimento do arco

Nem sempre será possível, mas as vezes é interessante reparametrizarmos uma curva de modo que a velocidade da partícula seja sempre 1, ou seja, dado um $\alpha(t)$, achamos um $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ de modo que $\|\beta'(s)\| = 1$. Significa dizer que o comprimento do arco no instante t em α será exatamente igual à variação do tempo (parâmetro s). Por isto tal parametrização será chamada de *parametrização pelo comprimento de arco*. Queremos dizer que:

$$s = \psi(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

Tal relação nos permite mandar o intervalo $[a, b]$ do parâmetro t no intervalo $[0, L]$ do parâmetro s por meio da função $\psi(t)$. Mas para acharmos a $\beta(s)$, precisamos da $\varphi(s)$, que tem exatamente a ação oposta, ou seja, é a inversa de $\psi(t)$.

Como calcular $\psi(t)$? Ora, se $\|\alpha'(t)\|$ possuir uma primitiva então o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que $\psi(t)$ será exatamente esta primitiva.

Para comprovar que este procedimento de fato irá gerar uma parametrização de velocidade 1, note que:

$$\|\beta'(s)\| = \varphi'(s) \cdot \|\alpha'(\varphi(s))\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\psi'(t)}$$

Mas $\psi(t)$ é uma primitiva de $\|\alpha'(t)\|$ - sua derivada é exatamente $\|\alpha'(t)\|$. Logo:

$$\|\beta'(s)\| = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\psi'(t)} = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1$$

Exemplo 1.15. Vamos reparametrizar a hélice dada por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ pelo comprimento de arco.

Começamos fazendo $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$. Daí teremos que: $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Calculamos então:

$$\psi(t) = \underbrace{\int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du}_{\text{pelo TFC}} = \int \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}t$$

A inversa desta função é:

$$\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Logo a parametrização por comprimento de arco da hélice será:

$$\beta(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

□

1.4 Exercícios

Questão 1.1. Parametrize os segmentos ligando os pares de pontos a seguir.

(a) $(0, 1)$ e $(1, 2)$ (b) $(1, 2, 3)$ e $(4, 1, 7)$ (c) $(0, 0, 0)$ e $(-1, 3, 8)$

Dica: O segmento ligando os pontos P e Q é dado por $\alpha(t) = P + t(Q - P)$ com t variando em algum intervalo (qual?!).

Questão 1.2. Parametrize as curvas descritas abaixo.

- (a) As duas curvas da interseção entre o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o plano $x = 1$.
- (b) Interseção entre a superfície $z^3 = x^2 + y^2$ e o plano $x = y + 1$.
- (c) Interseção do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (desenho da bola de tênis). Dica: lembre-se das coordenadas esféricas....

Questão 1.3. Um disco circular de raio 1 no plano xy localizado sobre o ponto $(0, 0)$ no instante $t = 0$ gira sem escorregar para a direita. Parametrize a curva descrita pelo ponto do disco localizado sobre $(0, 0)$ a medida que o disco gira (esta curva chama-se *ciclóide*). Dicas: (1) Faça um desenho (2) Lembre-se que os movimentos horizontal e vertical são independentes.

Questão 1.4. (1) Ache a derivada das curvas parametrizadas a seguir.

(a) $\alpha(t) = (t, t^2)$ (b) $\beta(t) = (\cos(t), e^t - 1, t^2)$ (c) $\gamma(t) = (t^3, \sin(t) + 1, 1)$

onde $t \in [-1, 1]$. (2) Determine os vetores tangentes a cada uma dessas curvas quando $t = 1$. (3) Alguma destas parametrizações não é regular?

Questão 1.5. Ache uma parametrização da reta tangente à curva $\beta(t) = (1 + 2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t)$ no ponto $(3, 0, 2)$.

Questão 1.6. Considere que uma partícula se move através da hipérbole seguindo a parametrização convencional $(t, \sqrt{t^2 - 1})$. Determine a velocidade desta partícula no instante t .

Questão 1.7. Considere a curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t), \cos^2(t))$ com $t \in [0, \pi]$. (a) Esta parametrização é regular? (b) Existe um bico? (c) Que curva é esta? (d) Esta curva é regular? (e) Caso positivo, exiba uma parametrização regular desta curva. (f) Qual a função φ usada para reparametrizar?

Questão 1.8. Demonstre que a reta tangente à circunferência é sempre ortogonal ao raio. Dica: A fórmula para a derivada do produto (escalar, no caso de vetores) também vale para curvas! A propósito, demonstre este fato também.

Questão 1.9. Calcule o comprimento das curvas a seguir.

(a) $\alpha(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$ (b) $\beta(t) = (1, t^2, t^3)$ (c) $\gamma(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$

Todas com $t \in [0, 1]$.

Questão 1.10. Considere a curva $\alpha(t) = (e^{-t/2} \cos(t), e^{-t/2} \sin(t))$ com $t \in [0, \infty)$. (1) Esboce o traçado desta curva, mostrando que ela se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$. (2) Mostre que $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ quanto $t \rightarrow \infty$. (3) Calcule o limite do comprimento da curva quando $t \rightarrow \infty$, concluindo que apesar de infinita, a curva tem comprimento finito.

Questão 1.11. Lembra-se da curva dada por (t^2, t^3) ? Reparametrize-a por comprimento de arco. Obviamente você nem se preocupou com o fato que esta curva não era regular - mas olhe agora para o seu parâmetro de comprimento de arco e decida se ele pode estar definido no ponto $t = 0$...

Questão 1.12. Reparametrize a parábola por comprimento de arco. Dica: Em alguma integral que aparecer, chame $2t = \tan(\theta)$ e resolva-a por substituição (você também poderia fazer usando o ArcSenh). Foi possível inverter a função obtida?

Questão 1.13. Reparametrize a curva

$$\gamma(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

com respeito ao comprimento de arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção de um t crescente. Expresse a reparametrização na forma mais simples. O que pode-se concluir a respeito da curva?

Capítulo 2

Integrais de linha e campos vetoriais

Até o presente momento, ao longo do estudo do cálculo integral, só nos dedicamos a definir integrais de funções reais sobre regiões de mesma dimensão que o espaço ambiente. Ou seja, tínhamos integrais de funções reais de 1 variável sobre \mathbb{R} , integrais de funções reais de 2 variáveis sobre \mathbb{R}^2 e integrais de funções reais de 3 variáveis sobre \mathbb{R}^3 .

Neste capítulo, estaremos interessados em definir integrais diferentes. O primeiro tipo se pretende a calcular a integral de uma função real definida sobre a curva. Já o segundo tipo dependerá da noção de campo vetorial, e pretenderá calcular a integral deste campo ao longo da curva.

2.1 Integrais de linha por comprimento de arco

O primeiro tipo de integral que definiremos são as integrais de linha por comprimento de arco. O objetivo é generalizar as observações feitas acerca de como se calcula o comprimento de curvas.

Consideramos uma parametrização $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. No espaço em que a imagem (curva) estiver definida, consideramos uma função real $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Estaremos interessados em calcular a integral desta função ao longo da curva. Para tal, lembramos da motivação do conceito de integral: calcular a soma dos valores de uma função sobre um espaço considerando uniformemente a dimensão do espaço. Em outras palavras, é como se estivéssemos somando o valor médio da função em intervalos regulares de distância, e fizéssemos os limites dos comprimentos desses intervalos tenderem a zero.

A parametrização é arbitrária, mas sabemos que o componente $\|\alpha'(t)\|$ “uniformiza” a integral - é o parâmetro *comprimento de arco*. Sem mais delongas, definimos:

Definição 2.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que contenha a curva. A *integral de linha de f sobre α com respeito ao comprimento de arco* será:

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt$$

Observe que se por algum motivo a curva estiver parametrizada por comprimento de arco, então $\|\alpha'(t)\| = 1$ e é como se simplesmente estivéssemos calculando a integral sobre um intervalo da reta de mesmo comprimento que a curva.

Exemplo 2.1. Vamos calcular a integral da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ao longo da circunferência unitária $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ com $t \in [0, 2\pi]$. Como sempre, temos:

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

Então aplicamos nossa definição de integral:

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2) \, dt = \int_0^{2\pi} (1 + \sin(t)^2) \, dt = 3\pi$$

□

Exemplo 2.2. Vamos calcular a integral da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ao longo da hélice distendida $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t^2)$ com $t \in [0, 1]$. Primeiro fazemos:

$$\alpha'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 2t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

Então aplicamos nossa definição de integral:

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_0^1 [(2\cos(t))^2 + (2\sin(t))^2 + (t^2)^2] \cdot 2\sqrt{1+t^2} \, dt = 2 \int_0^{2\pi} (4+t^4)\sqrt{1+t^2} \, dt$$

Qualquer pessoa nota facilmente que o resultado será

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \left(t\sqrt{1+t^2} (93 + 2t^2 + 8t^4) + 99\text{ArcSenh}(t) \right) \Big|_0^1 = \\ & = \frac{1}{24} \left(\sqrt{2} (103) + 99\text{ArcSenh}(1) \right) \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3. Exemplo exercício.

A massa de um objeto é a sua densidade calculada ao longo de sua dimensão. Se pensarmos num fio muito fino como algo unidimensional, poderemos calcular sua massa fazendo a integral de uma função densidade ao longo da curva descrita por ele. Por exemplo, consideramos o fio $\alpha(t) = (t, t, t)$ com $t \in [0, 2]$ e $\delta(x, y, z) = xyz$ a densidade linear do fio. Qual a sua massa?

Basta (1) calcular $\|\alpha'(t)\|$ (2) montar a integral (3) resolvê-la.

□

2.2 Integrais de linha sobre campos vetoriais

Motivados pelo conceito físico de trabalho, vamos mostrar como integrar um campo de vetores (em geral do \mathbb{R}^3) ao longo de uma curva no espaço ambiente. A partir de agora introduziremos o termo *suave* para nos referirmos a curvas com derivada contínua.

Felizmente estas integrais podem ser facilmente tratadas se o campo de vetores satisfizer uma determinada condição, através de um resultado análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo. Ao longo do texto, Ω representará um conjunto do \mathbb{R}^2 ou do \mathbb{R}^3 , mas as idéias se generalizam para o \mathbb{R}^n . Sem mais delongas:

2.2.1 Trabalho

Vamos iniciar motivando a definição de integral de linha:

Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma campo de forças, ou seja, uma função que associa a cada ponto de Ω um vetor, e consideremos uma partícula cuja trajetória é descrita por uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Se o campo for constante, se a trajetória for um segmento reto, e se o sentido do campo for o mesmo da trajetória, então o trabalho τ realizado por F é dado por

$$\tau = \|F\| \cdot \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$$

Note que se a força não atuasse no mesmo sentido, e que o ângulo entre os sentido fosse θ , faríamos simplesmente:

$$\tau = \|F\| \cdot \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \cdot \cos(\theta) = \langle F, (\gamma(b) - \gamma(a)) \rangle = F \cdot (\gamma(b) - \gamma(a))$$

Suponhamos agora que F e γ sejam quaisquer, com F contínuo e γ suave. Para calcularmos o trabalho, fazemos como sempre. Consideramos uma partição de $[a, b]$ chamada P definida por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, onde o maior $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ é suficientemente pequeno. É razoável então esperar que a soma:

$$\sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

seja uma boa aproximação para τ . Quanto menor for $\max \Delta t_i$, melhor será a aproximação. Agora lembre-se que:

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{\Delta t_i} = \gamma'(t_{i-1})$$

Logo a medida que $\max \Delta t_i$ diminuir, teremos a aproximação.

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i$$

Logo temos que:

$$\tau \approx \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i)$$

Como $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é contínua, logo integrável, teremos que:

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma'(t_{i-1}) \Delta t_i) = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

Isto motiva nossa definição.

2.2.2 Integral de linha sobre um campo

Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva suave. Definimos a integral de linha de F sobre γ como sendo:

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

É conveniente termos em mente que tal integral independe da parametrização escolhida, basta que se tome o cuidado de reparametrizar conservando a mesma orientação. Isto é consequência imediata do teorema de mudança de variáveis em integrais.

Exemplo 2.4. Vamos integrar $F(x, y) = (-y^2, x^2)$ em $\gamma(t) = (t^2, t)$, como t variando de 0 a 1. Simplesmente:

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma = \int_0^1 (-t^2, t^4) \cdot (2t, 1) \, dt = \int_0^1 t^4 - 2t^3 \, dt = -\frac{3}{10}$$

□

Exemplo 2.5. Vamos fazer a integral do campo $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, 1, x + y + z)$ na curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, com $0 \leq t \leq \pi$. Teremos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \, d\gamma &= \int_0^{\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t), 1, \cos(t) + \sin(t) + 0) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) \, dt = \\ &= \int_0^{\pi} -\sin(t) + \cos(t) \, dt = -2 \end{aligned}$$

Em particular, se a pergunta fosse qual o trabalho realizado por uma força descrita por F em uma partícula que percorresse o semi-círculo, teríamos obtido -2 como resposta. \square

Uma classe de campos vetoriais merece destaque por se relacionar intimamente com as integrais de linha sobre si próprios. São campos que aparecem naturalmente em problemas da física, e que felizmente possuem um tratamento muito razoável.

2.2.3 Campos Conservativos

Começamos introduzindo uma definição a qual recorreremos ao longo do texto a seguir.

Definição 2.2. Dada uma função real definida em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ie $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente desta função denotado por ∇ é definido por:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$

Também poderemos denotar a derivada parcial como na seguinte forma:

$$\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$$

Um campo vetorial $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito um campo *conservativo* (ou gradiente) se existe $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que

$$\nabla\varphi = F \text{ em } \Omega$$

Se tal φ existe, ela é chamada de função gradiente ou potencial do campo.

Exemplo 2.6. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ é conservativo, uma vez que a função $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ é tal que $\nabla\varphi = F$ em todo \mathbb{R}^3 . \square

Casos clássicos na física de campos conservativos são aqueles originados pelas forças gravitacional e elétrica, sendo as funções potenciais o que costumamos chamar de potencial gravitacional ou elétrico.

Abaixo, apresentamos uma condição *necessária* para que um campo seja conservativo.

Proposição 2.1. Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Se F é conservativo e suave, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Demonstração. Se F é conservativo, então existe $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi = F$. Logo temos que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$ e $\varphi_z = R$ em Ω . Pelo Teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \text{ e também para } x, z \text{ e } y, z$$

Daí, por exemplo para x e y , temos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

□

De fato, esta condição *geralmente* é suficiente, *mas falha* no caso em que existe uma singularidade no conjunto sobre o qual f está definida. Com efeito:

Exemplo 2.7. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Temos $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, e de fato $\varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ é uma função potencial em quase todo ponto, mas não está definida em $x = 0$, logo não serve para F . □

Esta proposição nos induz à definir um operador sobre campos vetoriais do \mathbb{R}^3 .

Definição 2.3. O rotacional rot de um campo em \mathbb{R}^3 dado por $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ onde P, Q e R são funções reais, é definido por:

$$\text{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Em particular, vimos na proposição que para um campo em \mathbb{R}^3 ser conservativo é necessário (mas não suficiente) que seu rotacional seja o campo nulo.

Uma maneira mnemônica de se lembrar deste operador é calculando um *determinante* na matriz a seguir:

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Como achar uma função potencial para um campo?

Com os exemplos a seguir, espera-se que seja possível compreender uma estratégia para achar uma função potencial para um campo dado.

Exemplo 2.8. Dado o campo $F(x, y) = (y, x)$, procedemos da seguinte forma. Seja $\varphi(x, y)$ a nossa função potencial. Queremos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$$

Integrando a “constante” y com respeito a x , temos que $\varphi(x, y) := xy$ é uma candidata. De fato, com esta definição, vale que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x$$

encerrando nossa busca. □

Exemplo 2.9. Dado o campo $F(x, y) = (6xy, 3x^2 + 6y)$, faremos o mesmo.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 6xy$$

implica que $\varphi_1(x, y) = 3x^2y$ é uma boa candidata. Definida assim, teremos que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 3x^2 \neq 3x^2 + 6y$$

Uma boa maneira de continuar com a busca é somar a $3x^2y$ um termo cuja derivada seja $6y$. É importantíssimo que este termo seja função somente de y , para que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ permaneça igual a $6xy$. Então temos que:

$$\varphi(x, y) = 3x^2y + h(y)$$

onde $\frac{\partial h}{\partial y} = 6y$. Logo $h(y) = 3y^2$ e teremos finalmente que $\varphi(x, y) = 3x^2y + 3y^2$, encerrando. Note porém que poderíamos ter somado qualquer constante à função φ , uma vez que ela não alteraria as derivadas. Logo o formato geral será:

$$\varphi(x, y) = 3x^2y + 3y^2 + K$$

□

Generalizando e organizando as idéias intuitivas apresentadas acima, apresentamos um exemplo mais esquematizado.

Exemplo 2.10. Dado $F(x, y, z) = (yz + 2xy + z - 2x, xz + x^2 - z^2 - 1, xy - 2zy + x - 3z^2)$, existe alguma função potencial?

1. Dizemos que $\varphi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(y, z) + h(z)$.
2. Da igualdade $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, temos que $f(x, y, z) = xyz + x^2y + xz - 2x^2$.
3. Da igualdade $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$, temos que $\frac{\partial g}{\partial y} = -z^2 - 1$, logo $g(y, z) = -z^2y - y$.
4. Da igualdade $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z}$, temos que $\frac{\partial h}{\partial z} = -3z^2$, logo $h(z) = -z^3$.

De fato, $\varphi(x, y, z) = xyz - z^3 + x^2y - yz^2 + x^2 + xz - y + K$ é função potencial para F .

□

Exemplo 2.11. Seja $F(x, y) = (4x^2y, \frac{1}{x})$. Se tentarmos proceder como antes (tente!) não conseguiremos. De fato, pela proposição apresentada:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4x^2 \neq \frac{-1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

logo esse campo não pode possuir função potencial.

□

2.2.4 Teorema Fundamental das Integrais de Linha sobre Campos Conservativos

Observe que uma função gradiente é uma espécie de *primitiva* de um campo. O leitor deve se lembrar que as integrais de funções reais são calculadas ao acharmos uma primitiva da função. É natural portanto esperar que as funções gradientes se relacionem com as integrais de linha sobre os campos conservativos.

Formalizando esta idéia, introduzimos o Teorema Fundamental das Integrais de Linha sobre Campos Conservativos:

Teorema 2.1. Se $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ for conservativo, sendo φ uma função potencial e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suave, então:

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma = \int_{\gamma} \nabla \varphi \, d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A) \text{ onde } \gamma(a) = A \text{ e } \gamma(b) = B$$

Demonstração. Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \gamma'(t)$$

Logo

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) \, dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) \, dt = \varphi(\gamma(t)) \Big|_a^b = \varphi(B) - \varphi(A)$$

□

Ou seja, o valor da integral de um campo conservativo sobre uma curva não depende do traço da curva, mas somente dos seus valores nos pontos iniciais e finais.

Note que, em particular, toda integral de linha de campos conservativos sobre curvas fechadas será 0.

Por este destaque, quando γ for uma curva fechada, é comum o uso da notação a seguir para a integral de linha:

$$\oint_{\gamma} F \, d\gamma$$

Observe o exemplo:

Exemplo 2.12. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (x + y, x)$. Seja $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ definida sobre $[0, 2\pi]$. Notemos que $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy$ é uma função potencial do campo. Então

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \, d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos(t) + \sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) - \sin^2(t) - \cos(t) \sin(t) \, dt \end{aligned}$$

que certamente não é muito simples de calcular. Por outro lado

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

resultado este que já sabíamos de antemão pois a curva é fechada.

□

A volta do teorema acima também é verdade. Ou seja, se uma integral de linha sobre um campo não depender do caminho de integração, então o campo é conservativo. A demonstração é mais técnica e a importância do resultado é menor, uma vez que costuma ser mais fácil concluir que o campo é conservativo que concluir que qualquer integral não depende do caminho; por outro lado é mais útil obter a segunda informação a partir de uma condição fraca, como é a obtenção de uma função potencial.

De qualquer forma, apresentamos a demonstração para o leitor interessado:

Teorema 2.2. Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial. São equivalentes:

- 1 F é conservativo.
- 2 A integral de F ao longo de qualquer caminho fechado em Ω é 0.
- 3 Se $A, B \in \Omega$, então a integral de linha sobre qualquer curva suave ligando A a B é a mesma.

Na demonstração a seguir, P indicará um ponto, e as variáveis $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$.

Demonstração (Esboço). Já fizemos de (1) para (2).

De (2) para (3), consideramos α e β dois caminhos entre A e B . Consideramos o caminho β de B para A . Não é difícil mostrar que:

$$\int_{\beta} F = - \int_{-\beta} F$$

Dai

$$\int_{\alpha \cup -\beta} F = \int_{\alpha} F + \int_{-\beta} F = 0$$

pois $\alpha \cup -\beta$ é um caminho fechado. Mas então temos que:

$$\int_{\alpha} F = - \int_{-\beta} F = \int_{\beta} F$$

para quaisquer caminho entre A e B e o resultado segue.

De (3) para (1) temos mais trabalho. Em linhas gerais, fixamos um ponto $O \in \Omega$ e definimos

$$\varphi(P) = \int_O^P F$$

para todo $P \in \Omega$, o que faz sentido pois a integral não depende do caminho. O objetivo é mostrar que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ coincide com a i -ésima coordenada de F . Isto é feito tomando um ponto próximo a P na direção de x_i e considerando o quociente de Newton. Temos

$$\frac{\varphi(P + he_i) - \varphi(P)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_O^{P+he_i} F - \int_O^P F \right) = \frac{1}{h} \int_P^{P+he_i} F$$

Consideramos então o segmento de reta r ligando P e $P + he_i$. Teremos que $r'(t) = e_i$, logo $F(r(t))r'(t) = f_i(r(t))$. Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_i(r(t)) dt = f_i(r(0)) = f_i(P)$$

Logo temos a igualdade:

$$\varphi'(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(P + he_i) - \varphi(P)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_i(r(t)) dt = f_i(r(0)) = f_i(P)$$

como queríamos.

2.3 Exercícios

Questão 2.1 (Integrais de linha por comprimento de arco). 1. Qual a massa de um fio cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, e cuja densidade é dada por $\rho(x, y) = x + y$.

2. Calcule a integral de linha por comprimento de arco da função $f(x, y) = y$ sobre a parábola $x = y^2$ no intervalo $0 \leq y \leq 2$.

Questão 2.2 (Integrais de linha sobre campos). 1. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x, x^2 + y + z, xyz)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, 2t, 1)$ com $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = (-y, x)$ sobre a curva parametrizada $\gamma(t)$ cuja imagem é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. (Parametrize a elipse!)
3. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (y^2, x, -1)$ sobre o triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 2)$ (parametrize os lados do triângulo seguindo uma orientação). Será necessário calcular 3 integrais.
4. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x, 1, 2)$ sobre a curva que é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $2x + 2y - 1 = z$. O sentido deve ser o anti-horário.

Questão 2.3 (Campos conservativos). Determine se os campos a seguir são ou não conservativos. Caso positivo, exiba uma função potencial. Caso negativo, justifique.

1. $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$
2. $F(x, y, z) = (x - y, x + y + z, z^2)$
3. $F(x, y) = (x^2y, -x)$
4. $F(x, y, z) = (yz - 2xy^2, xz - 2yx^2, xy)$
5. $F(x, y, z) = (-4x, 5y, z^3)$
6. $F(x, y, z) = (-x^2y^2, 0, 1)$

Questão 2.4 (Teorema Fundamental). 1. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, 0)$ com $-1 \leq t \leq 1$.

2. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$ sobre a curva $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$ com $-1 \leq t \leq 1$.
3. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ sobre a curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Que curva é esta?
4. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, t^3, \sqrt{t^2 + 1})$ com $-1 \leq t \leq 1$.

Capítulo 3

Teorema de Green

Um resultado fundamental no cálculo vetorial envolvendo integração de campos sobre formas (curvas, superfícies, etc) estabelece uma relação muito próxima entre a integração na região e na sua fronteira.

Este capítulo se dedicará a apresentar o caso particular deste resultado para o ambiente bidimensional.

Teorema 3.1. Seja $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo de vetores em \mathbb{R}^2 cuja derivada seja contínua. Seja γ uma curva fechada, suave por partes, fronteira de uma região A em \mathbb{R}^2 , **orientada no sentido anti-horário**. Então

$$\oint_{\gamma} F = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Na ocasião do estudo deste teorema, poderá aparecer como **notação** alternativa:

$$\oint_{\gamma} F = \oint_{\gamma} P dx + Q dy$$

Este teorema fornece uma ferramenta poderosa para calcular certas integrais de linhas em campos não conservativos ao longo de curvas fechadas. A demonstração do Teorema é demasiadamente técnica e não a apresentaremos, não obstante, é possível encontrá-la em qualquer bom texto de cálculo vetorial, especialmente nas indicações. No futuro, ao falarmos do Teorema de Stokes, vamos deduzir o Teorema de Green trivialmente.

Passemos aos exemplos:

Exemplo 3.1. Vamos integrar o campo $F(x, y) = (xy^2, x^3)$ ao longo da curva $\gamma = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$, onde:

$$\alpha_1(t) = (t, 0), t \in [0, 2]$$

$$\alpha_2(t) = (2, t), t \in [0, 3]$$

$$-\alpha_3(t) = (t, 3), t \in [0, 2]$$

$$-\alpha_4(t) = (0, t), t \in [0, 3]$$

Seja Q a região delimitada por γ . Desenhe esta figura! Atenção para o sentido das α_i . Integrando pela definição, teremos que:

$$\oint_{\gamma} F \, d\gamma = \int_{\alpha_1} F \, d\alpha_1 + \int_{\alpha_2} F \, d\alpha_2 - \int_{\alpha_3} F \, d\alpha_3 - \int_{\alpha_4} F \, d\alpha_4 =$$

$$= \int_0^2 0 \, dt + \int_0^3 8 \, dt - \int_0^2 9t \, dt - \int_0^3 0 \, dt = 24 - 18 = 6$$

Pelo Teorema de Green, teremos:

$$\oint_{\gamma} F \, d\gamma = \iint_Q \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^3 (3x^2 - 2yx) \, dy \, dx = \int_0^2 (9x^2 - 9x) \, dx = 24 - 18 = 6$$

Exemplo 3.2. Seja $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t < 2\pi$, e $F(x, y) = (x^4 - y^3, x^3 + y^5)$. O campo em questão certamente não é um campo potencial. Teríamos que usar a definição:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \, d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\cos^4(t) - \sin^3(t), \cos^3(t) + \sin^5(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) \cos^4(t) + \sin^4(t) + \cos^4(t) + \cos(t) \sin^5(t)) \, dt \end{aligned}$$

o que pode levar mais que alguns minutos para resolver. Para aplicar o Teorema de Green, note que a região cuja fronteira é γ é o círculo unitário S . Teremos:

$$\oint_{\gamma} F \, d\gamma = \oint_{\gamma} (x^4 - y^3) \, dx + (x^3 + y^5) \, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_S (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy$$

Passando para coordenadas polares, teremos:

$$\begin{aligned} \iint_S (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \, d\theta \, dr = \\ &= \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

□

3.1 Exercícios

Questão 3.1. Aplique o Teorema de Green e resolva as integrais de linha a seguir.

1. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (x^3, xy^2)$ e $\gamma(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Desenhe esta curva!
2. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (\cos(x) + \sin(y), tg^2(y))$ e $\gamma(t)$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 3)$ parametrizado no sentido horário.
3. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ e $\gamma(t)$ é uma parametrização no sentido horário para a curva fechada formada pelos gráficos de $y = \sin(x)$ e $y = -\sin(x)$ com $0 \leq x \leq \pi$.
4. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (e^y x, x^2 y^3)$ e $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.
5. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (\cos(xy), \sin(xy))$ e $\gamma(t)$ é o quadrado de lado 2 centrado na origem, parametrizado no sentido anti-horário.

Questão 3.2. Utilize o Teorema de Green para calcular a área da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dica: Parta de uma integral dupla para calcular uma integral de linha. Invente um campo vetorial tal que $Q_x - P_y = 1$.

Questão 3.3. Calcule

$$\oint_C y^2 \, dx + 3xy \, dy + \oint_D y^2 \, dx + 3xy \, dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ parametrizada no sentido anti-horário e D é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no sentido horário. Tente usar o Teorema de Green dividindo a região em duas partes, de modo que cada parte seja cercada por uma curva composta de 4 partes. Note que duas partes de cada curva ocorrem em sentidos opostos, logo se cancelam!

Questão 3.4. Seja

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Calcule

$$\oint_{\gamma} F$$

onde γ é *qualquer* curva parametrizada no sentido anti-horário que fique em volta da origem. Dicas: (1) Não dá pra usar o Teorema de Green pois esta função não está definida na origem. Este campo é conservativo? Existe alguma boa candidata para função potencial? Em qual ponto esta função teria problemas? (2) Imagine agora sua curva arbitrária em torno da origem. Entre ela e a origem ponha uma circunferência muito pequena. Para as duas curvas ao mesmo tempo é possível usar o Teorema de Green, certo? Por que? Cuidado com o sentido da parametrização! (3) Então você quer saber a integral de linha na curva maior. Você sabe que ela somada com a integral de linha na circunferência pequena é igual a integral de $Q_x - P_y$ na região compreendida entre elas. Falta calcular o que? (4) Faça o limite do raio da circunferência tender a 0.

Apêndice A

Geometria de Curvas - Curvatura e Torção

Neste *addendum*, vamos nos dedicar a calcular certas funções que descrevem o comportamento geométrico de curvas. Para um estudo mais aprofundado deste tópico e de outros tópicos concernentes à geometria diferencial, indico o excelente livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* de Manfredo Perdigão do Carmo, da Coleção Textos Universitários da SBM - a venda nas secretarias de graduação dos cursos de matemática. Menciono também o Prof. Sérgio Santa Cruz (DMat, UFPE) cujas aulas sobre o assunto foram extremamente motivadoras e cujas notas de aula me ajudaram a escrever este breve apêndice.

A.1 Curvatura para curvas planas

Inicialmente, vamos supor que temos uma curva e uma parametrização por comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Definimos:

$$T(s) = \alpha'(s)$$

que pode ser interpretado como um campo (diferenciável) unitário definido ao longo da curva, pois a curva está parametrizada por comprimento de arco. Ou seja:

$$\|T(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$$

Observemos agora que $T(s)$ e $T'(s)$ são campos ortogonais, pois:

$$\frac{d}{ds} \langle T(s), T(s) \rangle = 2 \langle T(s), T'(s) \rangle$$

mas $\langle T(s), T(s) \rangle = \|T(s)\|^2 = 1$ uma constante, daí a derivada é zero, portanto os vetores $T(s)$ e $T'(s)$ são ortogonais.

Estamos portanto definindo um campo vetorial $T'(s)$ ao longo da curva que mede a variação do vetor tangente unitário $T(s)$ em uma direção ortogonal, ou seja, o quanto o vetor tangente tende a alterar sua direção. Temos que $\|T'(s)\|$ é portanto uma medida de quão rapidamente uma curva se afastará da reta tangente a ela em um determinado ponto. Motivados por isso, definimos:

Definição A.1. Seja $\alpha(s)$ uma parametrização por comprimento de arco, seja $T(s) = \alpha'(s)$. Definimos:

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

como a *função curvatura* da curva no ponto $\alpha(s)$.

A nossa idéia intuitiva e geométrica de curvatura nos diz que (1) uma reta deve ter curvatura nula (2) uma circunferência deve ter curvatura constante, mas que dependa do raio - sendo grande se o raio for pequeno e pequena se o raio for grande. Ambos os fatos são verdadeiros:

Exemplo A.1. Seja $\alpha(s) = (a + bs, c + ds)$ uma reta parametrizada por comprimento de arco. Então $T(s) = \alpha'(t) = (b, c)$ constante, logo $T'(s) = (0, 0)$. Daí

$$\kappa(s) = ||T'(s)|| = 0$$

Exemplo A.2. Seja $\beta(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ circunferência de centro na origem e raio R . Observe que esta não é uma parametrização por comprimento de arco, pois:

$$||\beta'(t)|| = \sqrt{R^2[-\sin(t)]^2 + R^2[\cos(t)]^2} = R$$

Reparametrizando por comprimento de arco, teremos:

$$\varphi^{-1}(s) = \int R \, ds = R \cdot s \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{R}$$

Logo

$$\beta(\varphi(s)) = \gamma(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

é a parametrização por comprimento de arco da circunferência. Agora temos que:

$$T(s) = \gamma'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

e ainda:

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

Concluindo

$$\kappa(s) = ||T'(s)|| = \frac{1}{R}$$

corroborando nossas observações iniciais.

A.2 Curvas espaciais - o triedro de Frenet e a torção

Consideramos agora $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco. As observações feitas acima se generalizam trivialmente, ou seja, definimos:

- (1) O campo unitário paralelo a curva $T(s) = \gamma'(s)$.
- (2) A curvatura de γ dada por $\kappa(s) = ||T'(s)|| = ||\gamma''(s)||$

Suponhamos agora que a curvatura de uma curva nunca se anule. É possível portanto definir o campo unitário ao longo de $\gamma(s)$ dado por:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{||T'(s)||} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

Este campo é chamado *campo normal principal* à curva γ . Obviamente esta definição ainda é válida para curvas planas.

Só que agora, de posse de dois campos ortonormais (ortogonais e unitários) de vetores ao longo da curva, é possível definir um terceiro campo, unitário e ortogonal a ambos, simplesmente por:

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

chamado *campo binormal* ao longo da curva.

Definição A.2. O triedro ortonormal $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ é chamado *triedro de Frenet*.

Observe que os vetores $T(s)$ e $N(s)$ definem um plano contendo o ponto $\alpha(s)$, chamado *plano osculador* da curva. O vetor $B(s)$ é normal a este plano, e sua variação mede o quanto a curva se afasta do plano osculador, ou seja, o quanto a curva deixa de ser uma curva plana em um dado ponto. A grandeza associada a esta variação é chamada *torção* da curva.

Definição A.3. O módulo da *torção* de uma curva dada por uma parametrização α por comprimento de arco com triedro de Frenet $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é dada por:

$$|\tau(s)| = \|B'(s)\|$$

O sinal da torção dependerá do fato que a curva pode se afastar do plano osculador no sentido contrário ao induzido pelo triedro de Frenet. Não há motivos para preocupações, o cálculo a seguir irá esclarecer como calcular de vez todos estes valores.

A.2.1 Fórmulas de Frenet

Vamos omitir, a título de limpeza na notação, o (s) que deveria aparecer após cada função $T, N, B, \kappa, T', N', B'$ e τ .

Já sabemos que:

$$T' = \kappa \cdot N \quad (\text{A.1})$$

Lembramos que $\{T, N, B\}$ formam uma base ortonormal. Vamos então expressar N' e B' em termos desta base. Começamos por:

$$B' = aT + bN + cB$$

Note que $c = \langle B', B \rangle$ (por que?!). Mas

$$\frac{d}{ds} \langle B, B \rangle = 2 \langle B', B \rangle = 0$$

uma vez que $\langle B, B \rangle = 1$ é constante. Logo $c = 0$. Equivalentemente, $a = \langle B', T \rangle$. Mas

$$\frac{d}{ds} \langle B, T \rangle = \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = \langle B', T \rangle + \underbrace{\langle B, \kappa N \rangle}_{=0 \text{ pois ortogonais}} = \langle B', T \rangle = 0$$

uma vez que $\langle B, T \rangle = 0$ é constante. Logo $a = 0$. Daí concluímos que B' é paralelo a N . Definimos então:

$$B' = -\tau \cdot N \quad (\text{A.2})$$

Em particular, $\|B'\| = |\tau|$, como já havíamos observado. Falta calcular $N' = aT + bN + cB$. Logo de cara, sabemos que $b = 0$. Teremos que $a = \langle N', T \rangle$. Mas

$$\frac{d}{ds} \langle N, T \rangle = \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = \langle N', T \rangle + \underbrace{\langle N, \kappa N \rangle}_{=\kappa \text{ pois paralelos}} = \langle N', T \rangle + \kappa = 0$$

uma vez que $\langle N, T \rangle = 0$ é constante. Logo $a = -\kappa$. Agora $c = \langle N', B \rangle$. Mas

$$\frac{d}{ds} \langle N, B \rangle = \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = \langle N', B \rangle + \underbrace{\langle N, -\tau N \rangle}_{=-\tau \text{ pois paralelos}} = \langle N', B \rangle - \tau = 0$$

uma vez que $\langle N, B \rangle = 0$ é constante. Logo $c = \tau$. Concluímos então:

$$N' = -\kappa \cdot T + \tau \cdot B \quad (\text{A.3})$$

As equações (A1), (A2) e (A3) são conhecidas como *equações de Frenet* e as expomos como:

Proposição A.1.

$$\begin{aligned}
T'(s) &= & +\kappa(s) \cdot N(s) \\
N'(s) &= -\kappa(s) \cdot T(s) & +\tau(s) \cdot B(s) \\
B'(s) &= & -\tau(s) \cdot N(s)
\end{aligned}$$

□

Exemplo A.3. Vamos calcular o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da hélice:

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

Começamos fazendo uma reparametrização por comprimento de arco. Teremos que:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$$

Logo

$$\alpha(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Agora calcularemos o triedro de Frenet:

$$\begin{aligned}
T(s) = \alpha'(s) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} &= \frac{\left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)}{1/2} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right) \\
B(s) = T(s) \times N(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

A curvatura já foi calculada quando fizemos:

$$\|T'(s)\| = \frac{1}{2} \Rightarrow \kappa(s) = \frac{1}{2}$$

Para ver a torção, note que

$$B'(s) = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right) = -\tau(s) \cdot N(s) = -\tau(s) \cdot \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

Donde concluímos trivialmente que:

$$\tau(s) = \frac{1}{2}$$

□

A.3 Parametrizações quaisquer e fórmulas

Suponhamos agora $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização qualquer, e $\tilde{\alpha}(s) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ reparametrização por comprimento de arco, ou seja, $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$ de modo que

$$s(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

Lembramos que curvatura e torção são grandezas geométricas, independentes da parametrização, portanto definimos em geral:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) \text{ e } \tau(t) = \tilde{\tau}(s)$$

Seja $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ o triedro de Frenet com relação a $\tilde{\alpha}$. Vamos obter as equações de Frenet para $\{T, N, B\}$.

Lema A.1. Temos que $T(t) = \tilde{T}(s)$, $N(t) = \tilde{N}(s)$ e $B(t) = \tilde{B}(s)$.

Demonstração. Comece observando que:

$$s(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| \, du \Rightarrow s'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Note que:

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t)) \Rightarrow \alpha'(t) = s'(t)\tilde{\alpha}'(s) = \|\alpha'(t)\|\tilde{\alpha}'(s)$$

Logo

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\|\alpha'(t)\|\tilde{\alpha}'(s)}{\|\alpha'(t)\|} = \tilde{T}(s)$$

Agora note que:

$$T(t) = \tilde{T}(s(t)) \Rightarrow T'(t) = s'(t)\tilde{T}'(s) = \|\alpha'(t)\|\tilde{T}'(s)$$

daí

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\|\alpha'(t)\|\tilde{T}'(s)}{\|\alpha'(t)\|\|\tilde{T}'(s)\|} = \tilde{N}(s)$$

Por fim:

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \tilde{T}(s) \times \tilde{N}(s) = \tilde{B}(s)$$

□

Proposição A.2. As equações de Frenet generalizadas são dadas por:

$$\begin{aligned} T' &= v(\kappa \cdot N) \\ N' &= v(-\kappa \cdot T + \tau \cdot B) \\ B' &= v(-\tau \cdot N) \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos chamar $\|\alpha'(t)\| = v(t)$. Basta observar agora então que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{T}(s(t)) = s'(t)\tilde{T}'(s) = v(t)\tilde{\kappa}(s)\tilde{N}(s) = v(t)\kappa(t)N(t) \\ \frac{d}{dt}N(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{N}(s(t)) = s'(t)\tilde{N}'(s) = v(t)(-\tilde{\kappa}(s)\tilde{T}(s) + \tilde{\tau}(s)\tilde{B}(s)) = v(t)(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)) \\ \frac{d}{dt}B(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{B}(s(t)) = s'(t)\tilde{B}'(s) = v(t)(-\tilde{\tau}(s)\tilde{N}(s)) = v(t)(-\tau(t))N(t) \end{aligned}$$

□

Por fim, vamos obter *fórmulas gerais* para a curvatura e a torção de uma curva dada pela parametrização $\alpha(t)$. Novamente vamos omitir o termo (t) .

A.3.1 Fórmula para curvatura

Começamos observando que:

$$\alpha' = v.T$$

e que:

$$\alpha'' = v'.T + v.T' = v'.T + v^2\kappa.N$$

Seria interessante fazermos alguma operação que cancelasse o termo v' e isolasse o κ . Usando α' e α'' , nada mais natural portanto do que usar a operação vetorial que zera em vetores paralelos. Ou seja:

$$\alpha' \times \alpha'' = vv'(T \times T) + v^3\kappa.(T \times N) = v^3\kappa.B$$

Tomando o módulo, o que é possível pois a curvatura é sempre positiva, teremos portanto:

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

A.3.2 Fórmula para torção

Além de

$$\alpha' = v.T \text{ e } \alpha'' = v'.T + v.T' = v'.T + v^2\kappa.N$$

Agora temos que:

$$\alpha''' = v''.T + \underbrace{v'.T'}_{v'v\kappa.N} + 2vv'\kappa.N + v^2\kappa'.N + \underbrace{v^2\kappa.N'}_{v^2\kappa v(-\kappa.T + \tau.B)} = T(v'' - v^3\kappa^2) + N(3vv'\kappa + v^2\kappa') + B(v^3\kappa\tau)$$

Para isolar o τ , notamos que:

$$\langle B, \alpha''' \rangle = v^3\kappa\tau \Rightarrow \tau = \frac{\langle B, \alpha''' \rangle}{v^3\kappa}$$

Para obtermos o B , fazemos:

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3\kappa.B \Rightarrow B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{v^3\kappa}$$

Por fim, obtemos:

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{v^6\kappa^2} = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

A.4 Existência e Unicidade de curvas - breve comentário

Fisicamente, pode-se pensar numa curva como sendo uma reta curvada e torcida. É natural portanto esperar que a função curvatura e a função torção detenham informações sobre a curva. Na verdade, essas duas funções determinam uma e única curva, o que apresentamos no formato de um teorema.

Teorema A.1. Dadas funções diferenciáveis $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α . Além disso, qualquer outra curva $\tilde{\alpha}$ satisfazendo as mesmas condições, difere de α por um movimento rígido; ou seja, existe uma transformação linear ortogonal ρ de \mathbb{R}^3 , com determinante positivo, e um vetor c tal que $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$ □

Para mostrar a existência, é necessário utilizar o teorema que garante a existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais ordinárias. Já a demonstração da unicidade, apesar de mais elementar, é técnica e não cabe nos propósitos dessas notas. Por este motivo, encerramos esta seção sem demonstrar o teorema, na esperança de que o leitor não desconfie da veracidade das nossas afirmações.

A.5 Exercícios

Questão A.1. Considere a catenária $y = \cosh(x)$ dentro do plano \mathbb{R}^2 e parametrize-a com parâmetro t . (a) Calcule o campo de vetores tangente $T(t)$. (b) Calcule o campo normal principal $N(t)$, quem sabe utilizando um argumento geométrico simples (quando dois vetores são ortogonais em \mathbb{R}^2 ?!). (c) Calcule a curvatura $\kappa(t)$ de duas formas (i) usando a fórmula geral para curvatura (ii) explorando o fato que $\alpha'' = v'T + v^2\kappa N$.

Questão A.2. Calcule o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da hélice geral $h(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$.

Questão A.3. (a) Utilize o Teorema de Existência e Unicidade de curvas para mostrar que dada uma constante $\kappa_0 > 0$, existe essencialmente um única curva plana com curvatura igual a esta constante. Que curva é esta? (lembre-se do exemplo dado no texto). (b) Mostre que dadas duas constantes $\kappa_0 > 0$ e τ_0 , existe essencialmente uma única curva espacial com estas curvatura e torção constantes, e que esta curva é uma hélice.

Questão A.4. Calcule o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da cúbica reversa $c(t) = (t, t^2, t^3)$. (Faça um desenho desta cúbica). Em que ponto a torção é máxima?!

Questão A.5. Determine a curvatura da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em um ponto (x, y) . Determine os valores máximos e mínimos da curvatura, e em qual ponto da elipse eles são atingidos. É o resultado que a sua intuição geométrica esperava?

Questão A.6. Sem usar o teorema da existência e unicidade apresentado (a) Prove que uma curva regular C tem curvatura nula se e somente se é um segmento de reta (b) Se C tem curvatura não nula em todo ponto, prove que C tem torção nula se e somente se é uma curva plana (o que caracteriza uma curva plana? qual campo vetorial é constante?)

Questão A.7. Usando o Teorema de Green, determine uma fórmula para a área delimitada por uma curva plana fechada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Se você chegou até aqui, já está de bom tamanho para um tópico extra de um curso de Cálculo. Porém, o leitor que estiver motivado por esta teoria pode continuar a resolver os exercícios a seguir, consideravelmente mais sofisticados, como uma forma de desafio!

Questão A.8. Um campo de vetores $D(s)$ ao longo de uma curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha(s)$ é dito um *campo de Darboux* se $T' = D \times T$, $N' = D \times N$ e $B' = D \times B$. Prove que existe um único campo de Darboux ao longo de α , achando sua expressão em termos do triedro de Frenet.

Questão A.9. (a) Suponha que todas as retas normais a uma curva passem por um ponto fixo. Mostre que a curva é um arco de circunferência. (b) Suponha que todas as retas tangentes a uma curva passem por um ponto fixo. Mostre que é um segmento de reta.

Questão A.10. O *centro de curvatura* de uma curva α no ponto $\alpha(t)$ é dado por $\alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$. A *evoluta* de uma curva plana regular α com $\kappa \neq 0$ é a curva percorrida pela centro de curvatura, ou seja:

$$\text{Evoluta}(t) = \beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

(a) Calcule a evoluta da catenária $(t, \cosh(t))$.

(b) Prove que o vetor tangente unitário de uma evoluta β de uma curva α qualquer é igual (a menos de sinal) ao vetor normal principal de α .

- (c) Expresse o comprimento de arco $s(t)$ da evoluta em termos da função curvatura de α .

Questão A.11. Seja $\alpha(s) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco fechada. A curva $\beta(s) = \alpha(s) - r.N(s)$, r constante positiva, N vetor normal, é chamada curva paralela a α . Mostre que:

- (a) Comprimento de β = Comprimento de α + $2\pi r$

(b) $\kappa_\beta(s) = \frac{1}{1 + r\kappa_\alpha(s)}$

(c) $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi r^2$

Onde $A()$ é a área delimitada pela curva (use a questão 28).

Questão A.12. Vamos apresentar uma espécie de contra exemplo para o item (b) da questão 27. O objetivo é mostrar que basta um ponto de curvatura nula para que uma curva de torção nula não pertença a um único plano. Considere:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{(-1/t^2)}) & \text{se } t > 0 \\ (t, e^{(-1/t^2)}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Prove que α é diferenciável.
- (b) Prove que $\alpha(t)$ é regular para todo t . Prove que $\kappa(t) \neq 0$ para todos os t menos $t = 0$ e $t = \pm\sqrt{2/3}$. Mostre que $k(0) = 0$.
- (c) Mostre que o limite do plano osculador com $t \rightarrow 0$ e $t < 0$ é o plano $z = 0$. Mostre que o limite do plano osculador com $t \rightarrow 0$ e $t > 0$ é $y = 0$.
- (d) Mostre que, mesmo sem que α seja curva plana, é possível dar uma definição para τ e teremos que $\tau = 0$ constante.

Parte II

2ª unidade

Onde falaremos sobre superfícies parametrizadas, integrais de superfície,
o teoremas de Stokes e o teorema da divergência

Capítulo 4

Superfícies parametrizadas e integrais de superfície

Nosso objetivo neste capítulo será introduzir a integração ao longo de superfícies, generalizando a idéia de integrar sobre regiões do \mathbb{R}^2 . Em certo sentido, haverá uma analogia com as integrais de linha por comprimento de arco. Em outras palavras, estaremos interessados em calcular a soma dos valores que uma função definida numa superfície (imersa em \mathbb{R}^3) atinge de um modo uniforme, ou seja, dando um *peso* proporcional a área. Antes de começarmos falando de integrais de superfície, vamos discutir como representar superfícies no \mathbb{R}^3 .

4.1 Introdução

Lembramos que uma curva parametrizada em \mathbb{R}^2 é uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que manda um intervalo da reta no plano. Observe que a dimensão da (imagem da) curva corresponde à dimensão do domínio da parametrização α . Estendendo esta idéia para superfície, cuja dimensão é 2, teremos que:

Definição 4.1. Uma superfície parametrizada σ em \mathbb{R}^3 é uma função diferenciável e injetiva $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde D é o retângulo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Geralmente, representamos como:

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Lembramos que para parametrizarmos uma curva dada em termos de uma equação cartesiana, colocávamos uma variável em termos da outra e fazíamos uma escolha arbitrária para uma delas. O espírito permanece o mesmo, observe o exemplo:

Exemplo 4.1. O plano $2x - 3y + 2z = 15$ pode ser parametrizado observando que $z = \frac{15-2x+3y}{2}$ e definindo $x = u$ e $y = v$. Logo:

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{15-2u+3v}{2} \end{cases}$$

com (u, v) livres. □

Exemplo 4.2. O cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ pode ser parametrizado utilizando nosso conhecimento sobre o sistema de coordenadas cilíndricas. De fato:

$$\sigma : \begin{cases} x = R \cos(u) \\ y = R \sin(u) \\ z = v \end{cases}$$

com $u \in [0, 2\pi)$ e v livre, R fixo sendo o raio do cilindro. \square

Exemplo 4.3. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ pode ser parametrizada utilizando nosso conhecimento sobre o sistema de coordenadas esféricas. De fato:

$$\sigma : \begin{cases} x = R \cos(u) \sin(v) \\ y = R \sin(u) \sin(v) \\ z = R \cos(v) \end{cases}$$

com $u \in [0, 2\pi)$ e $v \in [0, \pi)$. \square

4.2 Plano tangente e vetor normal

Como determinar um vetor tangente a uma superfície parametrizada?! Certamente, em um ponto da superfície, existem infinitos vetores tangentes. Ocorre que os vetores tangentes a cada curva contida na superfície serão tangentes à superfície também. Uma **estratégia eficiente** portanto será achar um vetor tangente a uma curva que possa ser descrita simplificadamente e que passe pelo ponto.

Dado um ponto $\sigma(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = P_0$, uma curva simples passando por este ponto será a curva tomada fazendo u variar próximo de u_0 e mantendo v fixo em v_0 . Esta estratégia de manter uma variável fixa é a mesma utilizada quando calculamos as derivadas parciais, então o vetor derivada da curva $\sigma(u, v_0)$ é **igual** à derivada da parametrização $\sigma(u, v)$ com respeito a u . Como o vetor derivada da curva é tangente a ela, teremos que dois vetores tangentes à superfície $\sigma(u, v)$ são simplesmente:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial v}$$

usualmente denotados por σ_u e σ_v .

Dois vetores (linearmente independentes) são suficientes para determinar um plano, então dizemos que o plano tangente à superfície dada por σ no ponto $\sigma(u_0, v_0) = P_0$ é o plano determinado pelos vetores σ_u e σ_v calculados em $u = u_0$ e $v = v_0$.

Definimos um vetor normal a uma superfície em um ponto P_0 como sendo um vetor normal ao plano tangente em P_0 . A geometria analítica nos diz que, dados dois vetores σ_u e σ_v , um vetor ortogonal a eles é:

$$\vec{N} = \sigma_u \times \sigma_v$$

Logo um vetor normal à superfície em $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ é:

$$n(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$$

calculados em u_0 e v_0 . O outro vetor normal é $-n(u, v)$.

Exemplo 4.4. Desenhe a superfície parametrizada $\sigma(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v^2)$, com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $v \geq 0$ (sugestão: quais as curvas obtidas fazendo u fixo? E v fixo?).

Esta superfície nada mais é que um parabolóide de revolução. Verifique que a parametrização satisfaz $x^2 + y^2 = z$. O plano tangente a esta superfície no ponto $P = \sigma(0, 2) = (2, 0, 4)$ é aquele determinado pelos vetores:

$$\sigma_u|_P = (-v \sin(u), v \cos(u), 0)|_P = (0, 2, 0)$$

$$\sigma_v|_P = (\cos(u), \sin(u), 2v)|_P = (1, 0, 2)$$

Logo é o plano $\Pi(s, t) = P + (0, 2, 0)s + (1, 0, 2)t = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2s \\ z = 4 + 2t \end{cases}$

O vetor normal será:

$$\frac{\sigma_u|_P \times \sigma_v|_P}{\|\sigma_u|_P \times \sigma_v|_P\|} = \frac{(0, 2, 0) \times (1, 0, 2)}{\|(0, 2, 0) \times (1, 0, 2)\|} = \frac{(4, 0, -2)}{\sqrt{20}}$$

□

Exemplo 4.5. Em geral, dada uma curva parametrizada contida no plano xz por $(f(v), 0, g(v))$, a superfície (de revolução) obtida ao rotacionarmos esta curva em relação ao eixo z é dada por:

$$\sigma(u, v) = (f(v) \cos(u), f(v) \sin(u), g(v))$$

O vetor normal à superfície será obtido calculando:

$$\sigma_u = (-f(v) \sin(u), f(v) \cos(u), 0)$$

$$\sigma_v = (f'(v) \cos(u), f'(v) \sin(u), g'(v))$$

Daí (removendo (v) por limpeza de notação):

$$n(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(f g' \cos(u), f g' \sin(u), -f f')}{\sqrt{f^2((g')^2 + (f')^2)}} \underbrace{=}_{u=u_0} \frac{(g' \cos(u_0), g' \sin(u_0), -f')}{\sqrt{(g')^2 + (f')^2}}$$

□

4.3 Área de superfícies

Vamos agora determinar como calcular a área de superfícies parametrizadas em geral. Este conhecimento será muito importante para definirmos adequadamente integrais de superfície.

Teorema 4.1. A área de uma superfície parametrizada por $\sigma(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ será:

$$\iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du \, dv$$

Demonstração. A idéia da demonstração seguirá como sempre. Vamos aproximar a área da superfície pela soma das áreas de pequenos retângulos encaixados próximos a ela, e depois faremos o limite para quando os retângulos colapsarem e a soma tornar-se infinita. Começamos observando o fato geométrico que a área de um paralelogramo determinado por dois vetores v_1 e v_2 é dada por $\|v_1 \times v_2\|$.

Seja agora $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície S . Dada uma partição $P = \{u_1, \dots, u_n\} \times \{v_1, \dots, v_m\}$ do conjunto D , temos que ela induz uma partição de S em regiões quase-retangulares. De fato, definimos:

$$A_{ij} = (u_i, v_j)$$

$$B_{ij} = (u_i + \Delta u, v_j)$$

$$C_{ij} = (u_i + \Delta u, v_j + \Delta v)$$

$$D_{ij} = (u_i, v_j + \Delta v)$$

Temos que o retângulo os pontos A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} e D_{ij} serão mandados nos pontos $\sigma(A_{ij}), \sigma(B_{ij}), \sigma(C_{ij})$ e $\sigma(D_{ij})$. Definimos por S_{ij} a região da superfície S compreendida entre estes pontos e definimos R_{ij} o paralelogramo definido por estes pontos.

$$\text{A área de } R_{ij} \text{ será dada por } \|\overrightarrow{\sigma(A_{ij})\sigma(B_{ij})} \times \overrightarrow{\sigma(A_{ij})\sigma(D_{ij})}\|$$

Agora note que se $\Delta_u \rightarrow 0$ e $\Delta_v \rightarrow 0$, então

$$\overrightarrow{\sigma(A_{ij})\sigma(B_{ij})} \approx \Delta_u \sigma_u(u_i, v_j) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\sigma(A_{ij})\sigma(D_{ij})} \approx \Delta_v \sigma_v(u_i, v_j)$$

e também:

$$R_{ij} \approx S_{ij}$$

A área de S , por outro lado, será dada por $\sum_{i,j} \text{Área}(S_{ij})$. Então se

$$\lim_{\substack{\Delta_u \rightarrow 0 \\ \Delta_v \rightarrow 0}} \text{Área}(S_{ij}) = \|\sigma_u(u_i, v_j) \times \sigma_v(u_i, v_j)\| \Delta_u \Delta_v$$

teremos que:

$$\text{Área}(S) = \lim_{\substack{\Delta_u \rightarrow 0 \\ \Delta_v \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \|\sigma_u(u_i, v_j) \times \sigma_v(u_i, v_j)\| \Delta_u \Delta_v = \iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv$$

□

Definição 4.2. Dada uma superfície S definiremos o elemento de área dS de modo que:

$$\text{Área}(S) = \int_S dS$$

Ou seja, se S é parametrizada por $\sigma(u, v)$, então identificamos

$$dS \text{ com } \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv$$

Exemplo 4.6. Vamos calcular a área da esfera S de raio R . Consideramos a parametrização convencional

$$\sigma(u, v) = (R \cos(u) \sin(v), R \sin(u) \sin(v), R \cos(v))$$

Temos que

$$\sigma_u = (-R \sin(u) \sin(v), R \cos(u) \sin(v), 0) \quad \text{e} \quad \sigma_v = (R \cos(u) \cos(v), R \sin(u) \cos(v), -R \sin(v))$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} \|\sigma_u \times \sigma_v\| &= \|(-R^2 \cos(u) \sin^2(v), -R^2 \sin(u) \sin^2(v), -R^2 \sin(v) \cos(v))\| = \\ &= \sqrt{R^4 (\sin^4(v) + \sin^2(v) \cos^2(v))} = R^2 \sin(v) \end{aligned}$$

Então teremos que:

$$\text{Área}(S) = \int_S dS = \iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin(v) \, dv du = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^2$$

□

4.4 Integrais de superfície

Seja $f(x, y, z)$ função real definida num subconjunto de \mathbb{R}^3 contendo superfície S parametrizada por $\sigma(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Nada mais natural nesta altura do campeonato do que definir a *integral de superfície por elemento de área*:

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv$$

Ou seja, estamos calculando a soma dos valores de f ao longo da superfície considerando uniformemente a contribuição do valor que f assume em cada ponto da superfície. Em certo sentido, estamos corrigindo distorções que a parametrização considerada poderia gerar.

O teorema a ser apresentado neste momento é o de sempre: garantir que esta definição não depende da parametrização escolhida:

Teorema 4.2. Sejam $\sigma(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tau(u, v) : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizações da mesma região $S \subset \mathbb{R}^3$. Seja $f(x, y, z)$ função real definida num conjunto do \mathbb{R}^3 contendo S . Então:

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv = \iint_E f(\tau(u, v)) \|\tau_u \times \tau_v\| \, du dv$$

Demonstração. Seja $r : E \rightarrow D$ a função que torna τ uma reparametrização de σ , ou seja:

$$\sigma \circ r(u, v) = \tau(u, v)$$

Considere agora $r : E \rightarrow D$ como mudança de coordenadas $r(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$. O determinante jacobiano da transformação $s = s(u, v)$ e $t = t(u, v)$ é dado por:

$$\begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix} = s_u t_v - s_v t_u$$

Agora temos, pela regra da cadeia, que:

$$(\sigma \circ r)_u = \sigma_s s_u + \sigma_t t_u \text{ e que } (\sigma \circ r)_v = \sigma_s s_v + \sigma_t t_v$$

Efetuada o produto vetorial, teremos:

$$(\sigma \circ r)_u \times (\sigma \circ r)_v = (\sigma_s s_u + \sigma_t t_u) \times (\sigma_s s_v + \sigma_t t_v) = (\sigma_s \times \sigma_t)(s_u t_v - s_v t_u)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \iint_D f(\sigma(s, t)) \|\sigma_s \times \sigma_t\| \, ds dt &= \iint_E f(\sigma \circ r(u, v)) \frac{\|(\sigma \circ r)_u \times (\sigma \circ r)_v\|}{|s_u t_v - s_v t_u|} |s_u t_v - s_v t_u| \, du dv = \\ &= \iint_E f(\tau(u, v)) \|\tau_u \times \tau_v\| \, du dv \end{aligned} \quad \square$$

Uma mesma aplicação para cálculo de massa e centro de massa é obtida no contexto das integrais de superfícies, e o leitor interessado é convidado a pesquisá-la nas fontes recomendadas.

Exemplo 4.7. Considere a função $f(x, y, z) = xyz$ definida no quarto de cilindro S parametrizado por $\sigma(u, v) = (R \cos(u), R \sin(u), v)$, como $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $v \in [0, 1]$. Então:

$$\int_S f \, dS = \iint_D f \circ \sigma(u, v) \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 R^2 \cos(u) \sin(u) v \cdot R \, du dv = \frac{R^3}{4} \quad \square$$

O leitor atento deve ter notado que se a superfície estiver contida no plano, o vetor $\sigma_u \times \sigma_v$ é constante e unitário (aponta para cima ou para baixo), logo $dS = du dv$ - ou seja, nossa definição de integral de superfície é de fato uma generalização da idéia de integral sobre regiões do \mathbb{R}^2 .

4.5 Exercícios

Questão 4.1. As superfícies a seguir são de revolução. Lembre-se que, dada uma curva $(f(v), 0, g(v))$ no plano xz , a rotação dela em torno do eixo z se expressa como $(\cos(u)f(v), \sin(u)f(v), g(v))$.

1. Parametrize o cone reto centrado na origem de eixo z . Qual o plano tangente a este cone no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$? Qual o vetor normal? Este cone possui plano tangente com $z = 0$?
2. Parametrize um hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é y , dado pela equação: $y^2 - x^2 - z^2 = 1$. Dê uma fórmula para o cálculo do plano tangente.
3. Parametrize um elipsóide de revolução $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. Ache uma fórmula para o vetor normal.
4. Parametrize o toro de raio interno 1 e raio externo 3. Toro é o nome dado à casca da “câmara de ar de um pneu” ou de uma “rosquinha”.

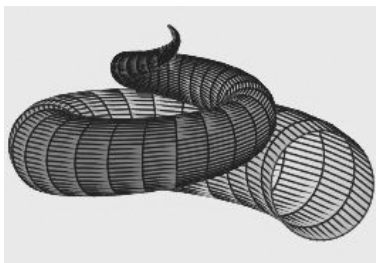
Questão 4.2.

1. Calcule a área do cone com $-2 \leq z \leq 2$.
2. Calcule a área do hiperbolóide com $-4 \leq y \leq 4$.
3. Calcule a área do elipsóide.
4. Calcule a área do toro.

Questão 4.3.

1. Calcule a integral da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ao longo da esfera de raio 3.
2. Calcule a integral da função $f(x, y, z) = x + y + z$ no elipsóide descrito acima.
3. Calcule a massa de um cilindro reto de raio 2 em volta do eixo z , com $-2 \leq z \leq 2$, se sua densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z$.

Questão 4.4. Observe a figura abaixo, retirada do livro do Stewart.



Exiba a parametrização de uma superfície que tenha este formato.

Capítulo 5

Teorema de Stokes e Teorema da Divergência

Neste capítulo, vamos apresentar dois teoremas muito importantes do cálculo vetorial. O Teorema (clássico) de Stokes, que em certo sentido generaliza o Teorema de Green, e o Teorema da Divergência (ou de Gauss). Ambos são conseqüências do Teorema geral de Stokes para dimensão qualquer, o que obviamente não será assunto deste curso.

5.1 Teorema de Stokes

Em outra ocasião, já definimos o que vem a ser o rotacional de um campo.

Se $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, lembramos:

$$\text{rot} F = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

A versão do teorema de Stokes no espaço diz que a *integral de um campo sobre a fronteira de uma superfície* é igual ao *fluxo do rotacional sobre a superfície*, desde que a orientação esteja compatível.

A frase acima precisa de alguns esclarecimentos. O *fluxo* de um campo sobre uma superfície é a medida de quanto o campo atravessa a superfície. Não faremos uma motivação física detalhada (um curso de eletromagnetismo talvez o faça), mas em linha gerais isso significa que estaremos interessado em somar ao longo da superfície (de modo uniforme) os comprimentos das componentes dos vetores do campo que sejam ortogonais à superfície. Ou seja, tomando \vec{n} normal unitária à superfície S , o fluxo de F ao longo de S no sentido de \vec{n} será dado a integral de superfície de $\cos(\theta)||F||$, onde θ é o ângulo entre \vec{n} e F . Mas como $||\vec{n}|| = 1$, isto é o mesmo que $F \cdot \vec{n}$.

Neste momento, o fato de cada ponto de uma superfície possuir duas normais será importante. De fato, podemos tomar uma normal unitária “apontando para cima ou para baixo”. A escolha de um sentido é chamada de orientação da superfície. Geralmente, a própria parametrização já induz uma normal unitária:

$$\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{||\sigma_u \times \sigma_v||}$$

Definição 5.1. O fluxo de um campo F sobre uma superfície S parametrizada por $\sigma(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ no sentido da normal \vec{n} induzida por σ é dado por:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS$$

O fluxo de um campo através de uma superfície pode ser também referido como simplesmente a integral de um campo através da superfícies, e em alguns momentos identificado mais simplesmente por:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \int_S F \cdot dS$$

A proposição a seguir será usada tacitamente ao longo do texto, não obstante, é importante que o leitor tenha sempre em mente que é uma proposição, e não uma definição!

Proposição 5.1.

$$\begin{aligned} \text{Fluxo}_\sigma^F &= \int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \langle F(\sigma(u, v)), n(u, v) \rangle \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv = \\ &= \iint_D \left\langle F(\sigma(u, v)), \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} \right\rangle \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, du dv = \iint_D F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \times \sigma_v) \, du dv \end{aligned} \quad \square$$

A fronteira da superfície, vista como uma curva parametrizada, estará positivamente orientada de acordo com a normal \vec{n} acima se estiver no sentido anti-horário. Em outras palavras, tomando um vetor \vec{v} unitário e tangente à curva na direção de sua parametrização, se $\{\vec{v}, \vec{n}\}$ for uma base positiva de \mathbb{R}^2 , então a fronteira está positivamente orientada. Na prática, isso pode ser verificado usando a regra da mão direita: se o polegar apontar como a normal, os outros dedos flexionados devem indicar o sentido da fronteira. Vamos então enunciar o teorema de Stokes de modo mais técnico:

Teorema 5.1. Seja $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S . Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset \Omega$. Seja Γ a fronteira desta superfície, orientada positivamente de acordo com a normal de S induzida por σ . Seja F campo vetorial definido em Ω . Então:

$$\int_\Gamma F \, d\Gamma = \int_S (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dS$$

A demonstração deste teorema é oferecida no Apêndice B destas notas.

Exemplo 5.1. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (y, x + y, 0)$ ao longo da superfície S parametrizada por $\sigma(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$, na região D satisfazendo $u^2 + v^2 \leq 1$, sendo \vec{n} a normal convencional.

Calculando diretamente, teremos que:

$$\text{rot} F = (1, -1, -1)$$

Por outro lado:

$$\sigma_u \times \sigma_v = (2u, 2v, 1)$$

Então:

$$\int_S \text{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D (1, -1, -1) \cdot (2u, 2v, 1) \, du dv = \iint_D (2u - 2v - 1) \, du dv$$

Passando para coordenadas polares, pois D é o círculo $u^2 + v^2 \leq 1$, teremos que:

$$\iint_D (2u - 2v - 1) \, du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [2\rho \cos(\theta) - 2\rho \sin(\theta) - 1] \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos(\theta) - \frac{2}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

Logo

$$\int_S \text{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = -\pi$$

Agora a outra maneira de resolver, aplicando o teorema de Stokes. A fronteira da figura certamente ocorre quando $u^2 + v^2 = 1$, ou seja, identificando $u = \cos(t)$ e $v = \sin(t)$, é a curva:

$$\Gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 1) \text{ com } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Daí temos que:

$$\int_S \text{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = \int_\Gamma F \, d\Gamma = \int_0^{2\pi} (\sin(t), 0, \cos(t) + \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) \, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) \, dt$$

Logo

$$\int_S \text{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = -\pi$$

como já esperávamos. □

Exemplo 5.2. Este exemplo é um exercício. Mostre que o fluxo do rotacional de qualquer campo em uma superfície fechada é igual a 0. (1) Divida a superfície em duas metades. Chame de Γ a borda (2) Aplique o teorema em cada metade prestando atenção na orientação (3) Expresse a o fluxo em toda superfície como soma dos fluxos em cada metade.

5.2 Teorema da Divergência

O Teorema de Stokes associou a integral de linha ao longo de uma curva com uma certa integral de superfície. A pergunta natural é: será que podemos associar uma integral de superfície com uma integral tridimensional?

Felizmente, a resposta é sim. O Teorema da Divergência, ou Teorema de Gauss, diz que o fluxo de um campo qualquer em direção ao exterior de uma superfície orientada e fechada é igual à integral do seu divergente ao longo da região confinada pela superfície.

Novamente, vamos esclarecer esta frase.

Definição 5.2. O divergente de um campo $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ é definido por:

$$\text{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = P_x + Q_y + R_z$$

Se B é uma região fechada e limitada do espaço, a fronteira de B é uma superfície, que em geral chamaremos de S . Escolheremos sempre o campo normal a S que “aponta para fora” de B .

Por fim, lembramos que o fluxo de um campo F em direção ao exterior de uma superfície S , uma vez fixado um campo normal \vec{n} apontando para fora de S , é definido por:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS$$

Então enunciamos o Teorema da Divergência:

Teorema 5.2. Seja B uma região fechada e limitada do \mathbb{R}^3 , cuja fronteira é uma superfície S . Seja \vec{n} o campo de vetores normal à S que aponta para o exterior de B . Seja F um campo vetorial definido num conjunto Ω cujo interior contenha B . Nestas condições:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \text{div} F \, dx dy dz$$

A demonstração do teorema acima é oferecida no Apêndice B destas notas. Observe os exemplos:

Exemplo 5.3. Seja $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$. Seja B o cilindro definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$. Calcule a integral de superfície ao longo da fronteira de B considerando a normal exterior de duas formas: pela definição e pelo Teorema da Divergência.

1. A fronteira de B consiste nas superfícies: (i) Face superior: $\sigma_1(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 1)$ com $0 \leq v \leq 1$ e $0 \leq u \leq 2\pi$; (ii) Face inferior: $\sigma_2(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 0)$ com $0 \leq v \leq 1$ e $0 \leq u \leq 2\pi$; (iii) Face lateral: $\sigma_3(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ com $0 \leq v \leq 1$ e $0 \leq u \leq 2\pi$. O campo normal ao longo de σ_1 é $(0, 0, 1)$; ao longo de σ_2 é $(0, 0, -1)$; ao longo de σ_3 é $(\cos(u), \sin(u), 0)$. Então:

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (v \cos(u), v \sin(u), 1^2), (0, 0, 1) \rangle \cdot v \, du dv + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (v \cos(u), v \sin(u), 0), (0, 0, -1) \rangle \cdot v \, du dv + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (\cos(u), \sin(u), v^2), (\cos(u), \sin(u), 0) \rangle \, du dv \end{aligned}$$

Logo:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = 3\pi$$

2. Pelo Teorema da Divergência, temos:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

Considerando nosso campo $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$, teremos que:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$$

Usando coordenadas cilíndricas, teremos:

$$\iiint_B \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (2 + 2z)r \, dz dr d\theta = 3\pi$$

□

Apresentamos mais um exemplo:

Exemplo 5.4. Vamos calcular o fluxo de $F(x, y, z) = (x^3 + y \sin(z), y^3 + z \sin(x), 3z)$ através da superfície composta pela parte superior das esferas de raios 1 e 2, e pela parcela do plano $z = 0$ situada entre elas, no sentido ao exterior da região compreendida entre as superfícies. O cálculo do fluxo pela definição fica por conta do leitor!! Nós somente aplicaremos o Teorema da Divergência:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

Note que $\operatorname{div} F = 3x^2 + 3y^2 + 3 = 3(x^2 + y^2 + 1)$. Utilizando coordenadas esféricas, teremos:

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(r^2 \sin^2(\varphi) + 1)r^2 \sin(\varphi) \, d\varphi d\theta dr =$$

$$= 6\pi \cdot \left[\int_1^2 r^4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r + \int_1^2 r^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \right]$$

Temos que

$$\int \text{sen}^3(u) \, \mathrm{d}u = \int \text{sen}^2(u) \text{sen}(u) \, \mathrm{d}u$$

Chamando $\text{sen}^2(u) = t$ e $\text{sen}(u) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}$, teremos pela regra do produto $\int t \, \mathrm{d}s = ts - \int s \, \mathrm{d}t$ o seguinte:

$$\int \text{sen}^3(u) \, \mathrm{d}u = \int \text{sen}^2(u) \text{sen}(u) \, \mathrm{d}u = -\text{sen}^2(u) \cos(u) + 2 \int \text{sen}(u) \cos^2(u) \, \mathrm{d}u$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^3(u) \, \mathrm{d}u &= -\text{sen}^2(u) \cos(u) + 2 \int \text{sen}(u) - 2 \int \text{sen}^3(u) \, \mathrm{d}u \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \text{sen}^3(u) \, \mathrm{d}u = \frac{-\text{sen}^2(u) \cos(u) - 2 \cos(u)}{3} \end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3} \text{ e } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = 1$$

Então nossa integral ficará:

$$6\pi \cdot \left[\frac{2}{3} \int_1^2 r^4 \, \mathrm{d}r + \int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \right] = 6\pi \left(\frac{62}{15} - \frac{7}{3} \right) = \frac{54\pi}{5}$$

□

5.3 Exercícios

- Questão 5.1.** 1. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (x^3y, zy^2, xz)$ ao longo da superfície $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq x \leq 2$. Escolha a orientação de modo que o vetor $(-1, 0, 0)$ esteja no campo normal definido.
2. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = \left(x^2 + y^2, \frac{z}{xy}, x^2 + y^2\right)$ ao longo da superfície $\sigma(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2 \sin(2v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
3. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (-z, x^2, -y^3)$ ao longo do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$. Faça agora ao longo da metade superior do elipsóide.
4. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, e^z x^3)$ ao longo do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ com $1 \leq z \leq 4$.
5. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, -x - y - z)$ ao longo da borda da superfície $(u, v, \sin(v))$ com $0 \leq v \leq 2\pi$ e $-1 \leq u \leq 1$.
6. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$ ao longo da borda do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientada no sentido anti-horário em relação ao vetor $(1, 1, 1)$.
7. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (yz, 2xz, e^{xy})$ ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 16$ e $z \equiv 5$, orientado positivamente em relação ao vetor $(0, 0, 1)$.

- Questão 5.2.** 1. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ através da esfera de raio R .
2. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (\sin(y), \cos(x)e^z, \frac{y^2}{x^2})$ através da superfície limitada por $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ e por $x^2 + y^2 = 3$. Reflita sobre que superfície é esta. Calcule a interseção entre as duas equações implícitas.
3. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2, \sin(y)z, z^2)$ através da superfície limitada superiormente pelo parabolóide $z = (-x^2 - y^2) + 1$ e inferiormente pela esfera de raio 1.
4. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (xyz, y, z)$ através da superfície limitada superiormente pelo cone $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo cone $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$.

Questão 5.3. Demonstre, utilizando o Teorema da Divergência, que o fluxo do rotacional de um campo ao longo de qualquer superfície fechada é sempre zero.

Questão 5.4. Demonstre o Teorema de Green usando o Teorema de Stokes.

Questão 5.5. Seja C curva simples fechada contida no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral:

$$\int_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

só depende da área da região confinada por C , e não do seu formato ou de sua posição no espaço.

Questão 5.6. Calcule:

$$\int_C (y + \sin(x)) dx + (z^2 + \cos(y)) dy + x^3 dz$$

onde C é a curva $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Você saberia exibir uma superfície que contivesse esta curva?!

Questão 5.7. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $F(x, y, z) = \left(z^2x, \frac{y^3}{3} + \tan(z), x^2z + y^2\right)$ onde S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Note que não é uma superfície fechada. “Feche-a” da maneira mais simples possível e resolva a questão!

Questão 5.8. Demonstre todas as igualdades abaixo. Suponha que S é uma superfície qualquer com C sua borda parametrizada no sentido anti-horário por r , satisfazendo as hipóteses convencionais sobre diferenciabilidade. Suponha que f, g sejam funções com segunda derivada contínua. Suponha que B seja uma região qualquer com borda dada por T , satisfazendo as hipóteses convencionais sobre diferenciabilidade.

$$\int_C (f \nabla g) \, dr = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \, dS$$

$$\int_C (f \nabla f) \, dr = 0$$

$$\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \, dr$$

$$\iint_S a \cdot \vec{n} \, dS = 0, \text{ } a \text{ vetor constante, } n \text{ normal à superfície.}$$

$$\text{Vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot n \, dS, \text{ } F(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$\iint_S \text{rot} F \cdot n \, dS = 0$$

$$\iint_S D_{\vec{n}} f \, dS = \iiint_B \nabla^2 f \, dV$$

$$\iint_S (f \nabla g) \cdot n \, dS = \iiint_B (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$$

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, dS = \iiint_B (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV$$

onde $\nabla^2 f = \text{div} \nabla f$ e $D_{\vec{n}} f$ é a derivada direcional de f na direção da normal, ou seja, $\nabla f \cdot \vec{n}$.

Apêndice B

Demonstração do Teorema de Stokes e do Teorema da Divergência

A título de completude desta exposição, vamos apresentar demonstrações (esboçada) dos teoremas apresentados no capítulo anterior. O leitor interessado em aplicações dos teoremas pode esquivá-las sem prejuízos, mas reforçamos a importância de acessar argumentos matemáticos sofisticados para um bom entendimento da teoria.

B.1 Demonstração do Teorema de Stokes

Vamos introduzir algumas notações. Se Q é uma região qualquer (do \mathbb{R}^2 ou do \mathbb{R}^3), então

∂Q denota a *fronteira* da região Q , seja ela curva ou superfície

Agora considere um retângulo R , sua fronteira ∂R e um campo F . A integral de linha de F ao longo de ∂R no *sentido anti-horário* será representada simplesmente por:

$$\int_{\partial R} F$$

Lembramos o enunciado do Teorema.

Teorema B.1 (Stokes). Seja $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização da superfície S . Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset \Omega$. Seja Γ a fronteira desta superfície, orientada positivamente de acordo com a normal de S induzida por σ . Seja F campo vetorial definido em Ω . Então:

$$\int_{\Gamma} F \, d\Gamma = \int_S (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dS$$

O leitor atento observará que esta demonstração pode ser adaptada para uma demonstração direta do Teorema de Green.

Demonstração. O Teorema de Stokes segue após dois passos principais. Vamos chamar cada passo de lema, deixando a demonstração do segundo deles (a mais difícil) para o final.

Lema B.1. Dados dois retângulos R_1 e R_2 compartilhando um lado l , temos que:

$$\int_{\partial R_1} F + \int_{\partial R_2} F = \int_{\partial(R_1 \cup R_2)} F$$

Demonstração (B.1). É fácil notar que:

$$\int_{l \subset \partial R_1} F = - \int_{l \subset \partial R_2} F$$

pois os sentidos são opostos. Logo na soma $\int_{\partial R_1} F + \int_{\partial R_2} F$ este termo se cancela, sobrando apenas os três lados restantes de cada retângulo. Com a orientação anti-horária escolhida em ambos, teremos exatamente a fronteira de $R_1 \cup R_2$, logo:

$$\int_{\partial(R_1 \cup R_2)} F //$$

Lema B.2. O Teorema de Stokes vale para quando a superfície for um retângulo R infinitesimal, ie:

$$\int_{\partial R} F = (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dR$$

Note que não há sinais de integração do lado esquerdo, pois o retângulo é infinitesimal...

Com os lemas acima, a demonstração do resultado segue facilmente se passarmos por cima de certos detalhes técnicos. Como sempre, aproximamos a integral de superfície como a soma das integrais em retângulos que aproximam uma partição da superfície em regiões quadrilaterais curvas (como foi feito para a área!). Então faremos o limite desta soma quando (1) temos infinitos retângulos (2) eles são infinitamente pequenos. Em termos informais:

$$\begin{aligned} \int_S (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dS &= \sum_{\substack{\text{retângulos } R \\ \text{infinitesimais}}} (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dR = \\ &= \sum_{\substack{\text{retângulos } R \\ \text{infinitesimais}}} \int_{\partial R} F \end{aligned}$$

Esta última igualdade valendo pelo Lema B.2. Mas usando o Lema B.1 indutivamente, transformando cada par de retângulos em um retângulo maior, acabaremos que:

$$\int_S (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dS = \sum_{\substack{\text{retângulos } R \\ \text{infinitesimais}}} \int_{\partial R} F = \int_{\partial S} F //$$

Falta demonstrar o Lema B.2, o que contém de fato a essência deste resultado.

Demonstração (B.2). Para simplificar a notação, vamos assumir que por uma mudança de coordenadas o nosso retângulo esteja no plano xy e um dos vértices seja a origem. Considere então os lados do retângulo como sendo:

I: $s_1(t) = (t\Delta_x, 0, 0), \quad t \in [0, 1]$

II: $s_2(t) = (\Delta_x, t\Delta_y, 0), \quad t \in [0, 1]$

III: $s_3(t) = (\Delta_x(1-t), \Delta_y, 0), \quad t \in [0, 1]$

IV: $s_4(t) = (0, \Delta_y(1-t), 0), \quad t \in [0, 1]$

Observemos que o vetor normal unitário a este retângulo é $n = (0, 0, 1)$. Seja:

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Lembre-se que o fato a seguir é sempre verdadeiro para qualquer f (mudança de variáveis):

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 f(1-t) \, dt$$

Teremos então que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} F &= \int_I F + \int_{II} F + \int_{III} F + \int_{IV} F = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 F(s_k(t)) \cdot s'_k(t) \, dt = \\ &= \int_0^1 [P(t\Delta_x, 0, 0)\Delta_x + Q(\Delta_x, t\Delta_y, 0)\Delta_y - P(t\Delta_x, \Delta_y, 0)\Delta_x - Q(0, t\Delta_y, 0)\Delta_y] \, dt = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{Q(\Delta_x, t\Delta_y, 0) - Q(0, t\Delta_y, 0)}{\Delta_x} - \frac{P(t\Delta_x, \Delta_y, 0) - P(t\Delta_x, 0, 0)}{\Delta_y} \right) \Delta_x \Delta_y \, dt \end{aligned}$$

Tomando limites, a última integral acima converge para:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy dt$$

Donde concluímos que:

$$\int_{\partial R} F = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy = (\text{rot} F) \cdot \vec{n} \, dx dy$$

Mas $dx dy = dR$, concluindo nossa demonstração. □

Observamos que passamos por cima de vários detalhes (questões de convergência, mudanças de coordenadas...) e só utilizando a definição de rotacional para obter a última igualdade da demonstração do lema anterior. Para justificar a definição completa, podemos argumentar que simplesmente o resultado teria que continuar valendo qualquer que fosse nossa mudança de coordenadas, portanto mandar em retângulos no plano xz deveria fazer aparecer o termo $P_z - R_x$, e mandar em retângulos no plano yz deveria fazer aparecer o termo $R_y - Q_z$.

B.2 Demonstração do Teorema da Divergência

Enunciamos agora o Teorema da Divergência:

Teorema B.2. Seja B uma região fechada e limitada do \mathbb{R}^3 , cuja fronteira ∂B é uma superfície S . Seja \vec{n} o campo de vetores normal à S que aponta para o exterior de B . Seja F um campo vetorial definido num conjunto Ω cujo interior contenha B . Nestas condições:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \text{div} F \, dx dy dz$$

Demonstração. Vamos começar fazendo uma hipótese simplificadora. Suponha que B é uma região *simples*, ou seja, que qualquer reta paralela a um dos eixos coordenados intersecte B somente em um segmento de reta ou ponto. Isso significa que uma esfera (maciça), por exemplo, é simples, ao passo que um toro (maciço) não é. Continuando, denotamos:

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = (P, Q, R)$$

e denotamos também o campo normal unitário \vec{n} por:

$$n(x, y, z) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z)) = (n_1, n_2, n_3)$$

Queremos mostrar que:

$$\iint_{\partial B=S} F \cdot n \, dS = \iiint \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

ou seja:

$$\iint_{\partial B} (Pn_1 + Qn_2 + Rn_3) \, dS = \iiint (P_x + Q_y + R_z) \, dx dy dz$$

Na verdade, mostraremos algo ainda mais específico. Mostraremos que:

$$\iint_{\partial B} Pn_1 \, dS = \iiint P_x \, dx dy dz$$

$$\iint_{\partial B} Qn_2 \, dS = \iiint Q_y \, dx dy dz$$

$$\iint_{\partial B} Rn_3 \, dS = \iiint R_z \, dx dy dz$$

Por questões de simetria na argumentação, basta mostrar uma delas, digamos, a última. Como estamos supondo que B é uma região simples, podemos dividir a fronteira de B em três partes conexas:

$$\{\partial B\}_{\text{topo}} \text{ onde } n_3 > 0$$

$$\{\partial B\}_{\text{meio}} \text{ onde } n_3 = 0$$

$$\{\partial B\}_{\text{base}} \text{ onde } n_3 < 0$$

Daí teremos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} Rn_3 \, dS &= \iint_{\partial B_{\text{topo}}} Rn_3 \, dS + \iint_{\partial B_{\text{meio}}} Rn_3 \, dS + \iint_{\partial B_{\text{base}}} Rn_3 \, dS = \\ &= \iint_{\partial B_{\text{topo}}} Rn_3 \, dS + \iint_{\partial B_{\text{base}}} Rn_3 \, dS \end{aligned}$$

pois $n_3 = 0$ em $\{\partial B\}_{\text{meio}}$. Agora suponhamos que exista uma região D no plano xy tal que $\{\partial B\}_{\text{topo}}$ é a imagem da função:

$$T(x, y) \mapsto (x, y, t(x, y)), \quad (x, y) \in D$$

e que $\{\partial B\}_{\text{base}}$ é a imagem da função:

$$B(x, y) \mapsto (x, y, b(x, y)), \quad (x, y) \in D$$

Caso esta hipótese não se verifique, seria necessário efetuar uma mudança de coordenadas para definir as funções, mas que poderia ser cancelada com uma nova mudança nas integrais a seguir, e deixamos os detalhes de lado. Continuando, teremos que:

$$\iint_{\partial B} R n_3 \, dS = \iint_{\partial B_{\text{topo}}} R n_{3\text{topo}} \, dS + \iint_{\partial B_{\text{base}}} R n_{3\text{base}} \, dS$$

Agora se $S = \partial B_{\text{topo}}$, então:

$$dS = \|(1, 0, t_x) \times (0, 1, t_y)\| dx dy = \|(-t_x, -t_y, 1)\| dx dy$$

E se $S = \partial B_{\text{base}}$, então:

$$dS = \|(1, 0, b_x) \times (0, 1, b_y)\| dx dy = \|(-b_x, -b_y, 1)\| dx dy$$

O vetor normal n em ∂B_{topo} seria:

$$n_{\text{topo}} = \frac{(-t_x, -t_y, 1)}{\|(-t_x, -t_y, 1)\|} \Rightarrow n_{3\text{topo}} = \frac{1}{\|(-t_x, -t_y, 1)\|}$$

E o vetor normal n em ∂B_{base} seria:

$$n_{\text{base}} = -\frac{(-b_x, -b_y, 1)}{\|(-b_x, -b_y, 1)\|} \Rightarrow n_{3\text{base}} = \frac{-1}{\|(-b_x, -b_y, 1)\|}$$

Cancelando os termos $\|(-t_x, -t_y, 1)\|$ e $\|(-b_x, -b_y, 1)\|$, teremos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} R n_3 \, dS &= \iint_D R(x, y, t(x, y)) \, dx dy - \iint_R R(x, y, b(x, y)) \, dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, t(x, y)) - R(x, y, b(x, y)) \, dx dy \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que este último termo é justamente igual a:

$$\iiint_D \int_{b(x,y)}^{t(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx dy dz = \iiint_B \frac{\partial R}{\partial z} \, dx dy dz =$$

concluindo exatamente onde queríamos.

Para mostrar o resultado completamente, seria necessário mostrar que podemos pegar qualquer região M e dividi-la em regiões simples, e que o teorema valendo em cada parte implica que valeria em toda a região. Intuitivamente não há como discordar, mas os detalhes técnicas fogem aos propósitos deste texto. □

Apêndice C

Revisão - integrais triplas

Generalizando o estudo de integrais bidimensionais, podemos definir integrais de funções reais de n variáveis em regiões do espaço n -dimensional. Neste capítulo, vamos definir integração de funções de três variáveis em regiões do \mathbb{R}^3 , dando sentido à expressão:

$$\int_A f$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^3$.

A definição formal dessas integrais envolve somas de Riemann em partições de paralelepípedos do \mathbb{R}^3 , tratamento este que deixaremos para que o leitor interessado pesquise nas fontes citadas.

Um tratamento muito mais fácil pode ser obtido através do Teorema de Fubini, que permite expressar integrais de várias variáveis em termos de integrais repetidas. Então, se A é o retângulo $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, e $f := f(x, y, z)$, temos que:

$$\int_A f = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx$$

Exemplo C.1. Seja $f(x, y, z) = x^2 + yz$. Seja $A = [0, 1] \times [1, 2] \times [-1, 3]$. Então

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_0^1 \int_1^2 \int_{-1}^3 x^2 + yz \, dz dy dx = \int_0^1 \int_1^2 \left. xz^2 + \frac{yz^2}{2} \right|_{-1}^3 dy dx = \int_0^1 \int_1^2 4x^2 + 4y \, dy dx = \\ &= \int_0^1 \left. 4x^2 y + 2y^2 \right|_1^2 dx = \int_0^1 4x^2 + 6 \, dx = \left. \frac{4x^3}{3} + 6x \right|_0^1 = \frac{4}{3} + 6 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

□

É importante ressaltar que estas integrais repetidas podem ser calculadas em qualquer ordem, desde que se tome o devido cuidado em integrar na variável correspondente ao limite considerado.

Muitas vezes, os limites de integração não poderão ser expressos somente numericamente, é o caso em que a região considerada não for um retângulo.

C.1 Coordenadas retangulares

Consideremos o intervalo $[a, b]$ onde consideramos a variável x . Sejam $g_1(x)$ e $g_2(x)$ duas funções definidas neste intervalo. Entre os valores que estas funções assumem, definimos a variável y . Sejam agora as funções $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$, onde a variável x é tomada em $[a, b]$ e y tomada em $[g_1(x), g_2(x)]$. No intervalo $[h_1(x, y), h_2(x, y)]$ definimos a variável z .

Nas condições acima apresentadas, temos uma região A do \mathbb{R}^3 delimitada por:

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

Então, se f é uma função real de três variáveis, podemos considerar:

$$\int_A f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz dy dx$$

onde neste caso a ordem de integração não pode ser alterada, a não ser que se determinem novas funções.

Exemplo C.2. Considere a região A delimitada por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Como exercício:

1. Quais são as funções g_1, g_2, h_1 e h_2 ?
2. Desenhe esta região!

Se $f(x, y, z) = x$ está definida nesta região, então:

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \, dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} xz \Big|_0^{1-x-y} dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x - x^2 - xy dy dx = \int_0^1 y(x - x^2) - \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 (1-x)(x - x^2) - \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

□

Em algumas situações, a região poderá estar sendo expressa de uma maneira levemente diferente de como introduzido acima. Neste caso, convém fazer uma adequação.

Considere a região A limitada pelos planos do \mathbb{R}^3 :

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z + y = 1$$

Certamente a melhor maneira de visualizar a região é desenhando-a. Poderemos concluir então que:

$$0 \leq x \leq 1, \quad \text{donde obtemos nossos } a \text{ e } b.$$

Concluiremos também que:

$$y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad z + y \leq 1$$

que ainda não está na forma desejada. Como y e z são positivos, a condição $z + y \leq 1$ implica naturalmente que $z \leq 1$ e que $y \leq 1$. Esta última condição é única que associa duas variáveis, então certamente uma delas permanecerá livre, enquanto a outra deverá ser limitada por uma função da anterior. Neste caso, temos:

$$0 \leq y \leq 1, \quad \text{donde obtemos nossos } g_1(x) \text{ e } g_2(x).$$

e também:

$$0 \leq z \leq 1 - y, \quad \text{donde obtemos nossos } h_1(x, y) \text{ e } h_2(x, y).$$

C.2 Mudança de variáveis

Consideremos uma transformação $G : (x, y, z) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ que envia a região A do \mathbb{R}^3 em outra região B do \mathbb{R}^3 , ou, melhor dizendo, que escreve as variáveis x, y e z de outra forma. Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido em B . Então o seguinte resultado é válido:

$$\int_B f = \int_A (f \circ G) |\det(D_G)|$$

onde D_G é a matriz composta pelas derivadas parciais de x, y e z com respeito às variáveis u, v e w , chamada matriz Jacobiana. Ou seja:

$$D_G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

As duas seções seguintes se dedicam a apresentar aplicações muito úteis destes resultados.

C.3 Coordenadas cilíndricas

Considere o problema a seguir:

Exemplo C.3. Integre a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ na região A limitada pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z + x^2 + y^2 = 1$. Após desenhar a região, obtemos em termos de desigualdades:

$$z \geq 0 \text{ e } z + x^2 + y^2 \leq 1 \quad (*)$$

Com o que vimos em coordenadas retangulares, começamos limitando o x , ignorando y e z . Como x^2 é positivo, temos que $|x| \leq 1$, logo

$$-1 \leq x \leq 1$$

Tratemos de limitar y agora com respeito a x . Ignorando o z temporariamente, temos que $x^2 + y^2 \leq 1$, logo:

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Por fim, olhando para as duas desigualdades em $(*)$, temos que z está limitado da seguinte forma:

$$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$$

Então nossa integral fica no formato:

$$\int_A f = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} x^2 + y^2 \, dz dy dx$$

e o leitor fica convidado a resolvê-la neste formato se não tiver mais o que fazer. □

Certamente esta não deve ser a melhor estratégia para resolver um problema aparentemente tão simples. A expressão de um parabolóide possui um forte apelo de simetria com respeito a rotação. A função considerada também possui uma considerável simetria rotacional. De fato, se formos capazes de reescrevermos as variáveis de modo que essa simetria se expresse mais claramente, conseguiremos resolver o problema com facilidade.

Neste contexto, introduzimos a mudança de coordenadas retangulares para cilíndricas:

$$x \rightarrow r \cdot \cos(\theta)$$

$$y \rightarrow r \cdot \sin(\theta)$$

$$z \rightarrow z$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$ e $r \geq 0$.

Note que a variável z de *altura* permanece inalterada. A nova variável r é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo z , e a variável θ mede o ângulo da projeção do ponto com respeito ao eixo x .

O aluno interessado poderá tentar compreender melhor tal mudança de coordenadas fazendo um desenho e imaginando um cilindro dentro do \mathbb{R}^3 , ou pesquisando nas fontes recomendadas.

A nomenclatura das variáveis é apenas arbitrária. No caso, u, v e w são r, θ e z .

Calculamos então o determinante da matriz Jacobiana:

$$|D_G| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Facilmente calcula-se

$$|D_G| = r$$

Voltando ao exemplo anterior, temos:

Exemplo C.4. A região é $z \geq 0$ e $z + x^2 + y^2 \leq 1$. Trocando (x, y, z) pelos novos (r, θ, z) , teremos:

$$z \geq 0 \text{ e } z + r^2 \leq 1$$

pois $\underbrace{(r \cos(\theta))^2}_x + \underbrace{(r \sin(\theta))^2}_y = r^2$, onde o θ é livre de 0 a 2π e $r \geq 0$. Vemos facilmente então que:

$$0 \leq r \leq 1$$

e que

$$0 \leq z \leq 1 - r^2$$

A função, por outro lado, fica:

$$f \circ G(x, y, z) = \underbrace{(r \cos(\theta))^2}_x + \underbrace{(r \sin(\theta))^2}_y = r^2$$

Então aplicando a mudança de variáveis, ou seja, ajustando aos novos limites, usando a função composta, e não esquecendo o determinante Jacobiano, teremos que:

$$\int_A f = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r^2 \cdot r \, dz dr d\theta$$

significativamente mais simples! De fato:

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r^2 \cdot r \, dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z r^3 \Big|_0^{1-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 - r^5 \, dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} d\theta = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

□

Apesar de muito úteis quando estamos lidando com regiões de revolução, as coordenadas cilíndricas podem não se adequar a todos os casos.

Considere o caso a seguir:

Exemplo C.5. Integre a função $f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z^3}$ na esfera S dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Passando para coordenadas cilíndricas, teremos:

$$r^2 + z^2 \leq 1$$

Donde teremos:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$$

que pode não ser muito fácil de calcular na integral...

□

Neste caso, introduzimos as coordenadas esféricas.

C.4 Coordenadas esféricas

A mudança de coordenadas retangulares para esféricas é dada pelas expressões:

$$x \rightarrow r \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y \rightarrow r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z \rightarrow r \cdot \cos(\varphi)$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $r \geq 0$.

A nova variável r é a distância do ponto (x, y, z) ao ponto $(0, 0, 0)$, a variável θ mede o ângulo da projeção do ponto com respeito ao eixo x e a variável φ mede o ângulo do ponto (visto como vetor) com o eixo z .

O aluno interessado poderá tentar compreender melhor tal mudança de coordenadas fazendo um desenho e imaginando uma esfera dentro do \mathbb{R}^3 , ou pesquisando nas fontes recomendadas.

Calculamos então o determinante da matriz Jacobiana:

$$|D_G| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r \cdot \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

Com alguns cálculos, conclui-se que

$$|D_G| = r^2 \sin(\varphi)$$

Exemplo C.6. Vamos voltar ao exemplo anterior. A esfera S é dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Por meio de uma mudança G para coordenadas esféricas, teremos que

$$\begin{aligned} & \underbrace{[r \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi)]^2}_x + \underbrace{[r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)]^2}_y + \underbrace{[r \cdot \cos(\varphi)]^2}_z = \\ & = r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) = r^2 \end{aligned}$$

Daí concluímos que θ e φ são livres, e $r \leq 1$. Logo:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

A função, por sua vez, ficará:

$$\begin{aligned} f \circ G(x, y, z) &= f(r \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi), r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cdot \cos(\varphi)) = \\ &= \frac{\underbrace{[r \cdot \cos(\theta) \sin(\varphi)]^2}_x + \underbrace{[r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)]^2}_y}{\underbrace{[r \cdot \cos(\varphi)]^3}_z} = \frac{\tan^2(\varphi)}{r \cos(\varphi)} \end{aligned}$$

Agora montamos a integral, não esquecendo o jacobiano:

$$\int_S f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\tan^2(\varphi)}{r \cos(\varphi)} \cdot r^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta dr$$

Como r é uma constante com respeito às integrais de θ e φ , e como não aparecem termos em θ , teremos que:

$$\int_S f = \left(\int_0^1 r \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \left(\int_0^\pi \tan^3(\varphi) d\varphi \right) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 0 = 0$$

□

Vamos exibir mais aplicações das coordenadas cilíndricas e esféricas na próxima seção.

C.5 Aplicação: Cálculo de volumes

O uso da integração em \mathbb{R}^3 nos fornece um método para calcular volumes de sólidos, e a massa se considerarmos uma função densidade.

No caso de volumes, definimos convenientemente:

$$\text{Vol}(A) = \int_A 1$$

Exemplo C.7. Considere um cilindro C de raio R e altura H . Para calcularmos seu volume, vamos fazer uma mudança para coordenadas cilíndricas. Sem esquecer o jacobiano, teremos:

$$\int_C 1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H r \, dz d\theta dr = \frac{R^2}{2} \cdot H \cdot 2\pi = R^2 \cdot H \cdot \pi$$

Naturalmente igual à fórmula obtida após aplicar o princípio de Cavalieri.

□

Exemplo C.8. Vamos calcular o volume de uma pirâmide P reta de base quadrada. Se um lado da base mede 2 e se a altura é 2, trata-se da região limitada pelas desigualdades:

$$z \geq 0; \quad z + 2y \leq 2; \quad z - 2y \leq 2; \quad z + 2x \leq 2; \quad z - 2x \leq 2$$

Elegemos a variável x para ser livre. Claramente

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ onde temos nossos } a \text{ e } b$$

Olhando para as quatro desigualdades, e com o objetivo de isolar o z , obteremos que z deve satisfazer simultaneamente:

$$z \leq 2 - 2x; \quad z \leq 2 - 2y; \quad z \leq 2 + 2x; \quad z \leq 2 + 2y$$

Por exemplo, quando x for positivo e maior que $|y|$, será o caso da primeira. Quando for y positivo maior que $|x|$, será o caso da segunda. Tente interpretar geometricamente para quais regiões da pirâmide essas desigualdades se aplicam!

De qualquer maneira, elas dividem a pirâmide em 4 partes iguais. Então o volume da pirâmide poderá ser obtido usando apenas a primeira, ou seja, exigindo x positivo e $x \geq |y| \Rightarrow -x \leq y \leq x$:

$$\int_P 1 = \int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{2-2x} 1 \, dz dy dx = \int_0^1 \int_{-x}^x 2 - 2x \, dy dx = \int_0^1 4x - 4x^2 \, dx = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Multiplicando por 4, obtemos $\frac{8}{3}$.

□

Se existe uma função densidade d definida em cada ponto do sólido A , então a massa do sólido é dada por:

$$\int_A d$$

Exemplo C.9. Qual a massa da esfera S cuja densidade é igual a distância do ponto ao centro da esfera?

A densidade trata-se da função $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Então a massa será dada por:

$$\int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Passando para coordenadas esféricas, teremos que:

$$\begin{aligned} \int_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^2} r^2 \sin(\varphi) \, d\varphi d\theta dr = \\ &= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin(\varphi) \, d\varphi \right) = \pi \end{aligned}$$

□

C.6 Exercícios

Questão C.1 (Fixação). a. Integre a função $f(x, y, z) = x + y$ no retângulo $[-1, 1] \times [0, 1] \times [2, 5]$.

b. Integre a função $f(x, y, z) = \sin(x)\sin(z)$ no retângulo $[0, \pi] \times [0, 2] \times [-\pi, \pi]$.

c. Integre a função $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$ no retângulo $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Questão C.2 (Coordenadas retangulares). a. Desenhe a região determinada por $0 \leq x \leq 1$, $-x \leq y \leq x$ e $-x \leq z \leq x$. Integre a função $f(x, y, z) = xyz$ nesta região.

b. Integre a função $f(x, y, z) = x + y + z$ na região limitada pelos planos $z = y + 1$, $z = -y + 1$, $x = 1$, $x = -1$ e $z = 0$. Talvez seja necessário fazer 2 integrais!

Questão C.3 (Coordenadas cilíndricas). a. Integre a função $f(x, y, z) = z$ no cilindro reto de raio 3 limitado pelos planos $z = 0$ e $z = 2$.

b. Desenhe a região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 2$. Integre a função $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ nesta região.

Questão C.4 (Coordenadas esféricas). a. Integre a função $f(x, y, z) = \frac{1}{z}$ na esfera de raio 1. Este resultado mudaria se fosse $\frac{1}{x}$? Tente calcular de fato a integral de $\frac{1}{x}$.

b. Integre a função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na casca esférica $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Questão C.5 (Volume e massa). a. Calcule o volume da região limitada pelas superfícies $y = \cos(x)$, $z = y$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $z = 0$.

b. Calcule o volume da região limitada acima pela esfera de raio 1 e abaixo pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

c. Calcule a massa do sólido limitado acima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e abaixo pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, se a função densidade é dada por 2 vezes a distância do ponto à origem.

d. Deduza fórmulas para o cálculo do volume da esfera e do parabolóide $z = x^2 + y^2$ limitado pelo plano $z = a$.

e. Deduza fórmula para o cálculo do volume de um elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Parte III

3ª unidade

Onde falaremos sobre sequências de números, séries numéricas,
séries de potências e séries de Taylor

Capítulo 6

Sequências

Uma sequência de número reais é uma função

$$s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada número natural um número real. Será comum denotarmos $s(n) = s_n$ e dizermos que este é o n -ésimo termo da sequência.

Exemplo 6.1. A função $s(n) = n + 1$ é a sequência:

$$2, 3, 4, 5, \dots, n + 1, \dots$$

Exemplo 6.2. A função $s_n = \sqrt{\frac{n}{5}}$ é a sequência:

$$\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}, 1, \sqrt{\frac{6}{5}}, \dots$$

Dizemos que uma **sequência é convergente** se existir:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Neste caso, dizemos que L é o limite da sequência. Lembramos ao leitor que, por definição, tal limite existe se:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \text{ tal que } n \geq n_0 \text{ implica que } |s_n - L| < \epsilon$$

Exemplo 6.3. A sequência $s_n = \frac{1}{n}$ é convergente, e seu limite é 0. Com efeito, dado um $\epsilon > 0$, queremos achar um n_0 tal que, a partir deste n_0 , $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$, ou seja, $\frac{1}{n} < \epsilon$. Mas isto é logicamente equivalente a $\frac{1}{\epsilon} < n$. Logo, dado $\epsilon > 0$, tomamos qualquer $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Logo $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ implicará que:

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

O limite portanto existe e é igual a 0. □

Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

se a seguinte condição se verifica:

Dado $M > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $|s_n| > M$

ou seja, a sequência cresce indefinidamente. Equivalentemente, diremos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$$

se a seguinte condição se verifica:

Dado $M < 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $|s_n| < M$

ou seja, a sequência decresce indefinidamente.

Em ambos os casos, diremos que a **sequência é divergente**.

Exemplo 6.4. A sequência $s_n = n^2$ é divergente, e diverge para $+\infty$. Com efeito, dado um suposto limite M para esta sequência, se tomarmos um natural $n_0 \geq \sqrt{M}$, teremos que:

$$n > n_0 \geq \sqrt{M} \text{ implica que } s_n = n^2 > M$$

como queríamos. □

Com estas definições de limite, todas as propriedades usuais se verificam. Ou seja, o limite, se existir, é único. A soma dos limites, se existirem, é exatamente o limite da soma, e o mesmo para o produto. Em resumo:

Proposição 6.1.

0. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A'$, então $A = A'$.

1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq \infty$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n) + (b_n)] = A + B \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n)(b_n)] = AB$$

2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, $B \neq \infty$ e $B \neq 0$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

3. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n) + (b_n)] = \infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_n)(b_n)] = \infty$$

4. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

5. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq \infty$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

O leitor é convidado a analisar os casos em que temos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ao invés de $+\infty$.

Exemplo 6.5. Calcule o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5}$. A proposição acima não se verifica, pois os limites de ambos os fatores são $+\infty$. Mas note que:

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$$

O limite de ambos os fatores agora existe, e temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n^2}\right) = 2$$

Pelo item 2 acima, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

□

O leitor certamente já compreendeu o espírito da coisa: tudo que se disse sobre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, onde x é uma variável contínua e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se aplica aos limites de seqüências.

6.1 Critérios de convergência

A proposição a seguir apresenta um critério bastante útil:

Proposição 6.2. Seja uma seqüência s_n é crescente.

1. Se for limitada superiormente, então o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe, ie, s_n é convergente.
2. Caso contrário, s_n será divergente.

Caso seja decrescente, consideramos limites inferiores.

Demonstração. Todo conjunto de números reais limitados superiormente admite supremo S . Este supremo será o limite da seqüência, uma vez que dado um $\epsilon > 0$, existirá um $S - \epsilon < s_{n_0} \leq S$ por definição de supremo. A partir de tal s_{n_0} , os termos seguintes se acumularão entre $S - \epsilon$ e S . Mas isto para qualquer escolha de ϵ , logo S é o limite. No caso da seqüência não limitada superiormente, é óbvio que ela não pode ter limite, senão todos os termos seriam menores ou iguais a este. □

Como aplicação do critério acima, vamos mostrar que uma seqüência converge e que outra diverge.

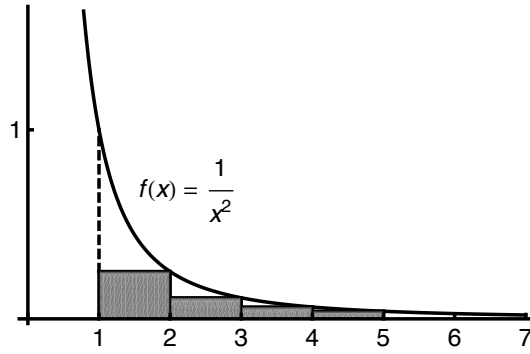
Exemplo 6.6. Considere a seqüência definida por $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Ou seja:

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2^2}, s_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}, s_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}, \dots$$

Vamos mostrar que esta seqüência converge. Falando de um modo informal, vamos mostrar que a soma infinita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

converge para um valor. Inicialmente note que $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, logo a seqüência é crescente. Pelo critério acima, basta verificarmos que é limitada. Para isso, faremos uso do cálculo:



Observe que a área de cada retângulo é igual a cada termo da soma. Logo a soma de todas as áreas será igual à nossa soma infinita. Mas note que a soma dessas áreas é inferior à área sob o gráfico.

O leitor deve se lembrar que área sob o gráfico é calculada fazendo uso do cálculo:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$$

Logo

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots < \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \leq 1$$

Nossa sequência, formada pelas somas parciais, é portanto crescente e limitada, logo convergente, a partir da proposição acima apresentada. Calcular o limite, por outro lado, não é fácil. Com um pouco de técnica, obtém-se o impressionante resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

O leitor interessado poderá consultar uma demonstração deste resultado no apêndice ao final do texto. □

Exemplo 6.7. Se removermos os quadrados dos termos da sequência anterior, a sequência divergirá.

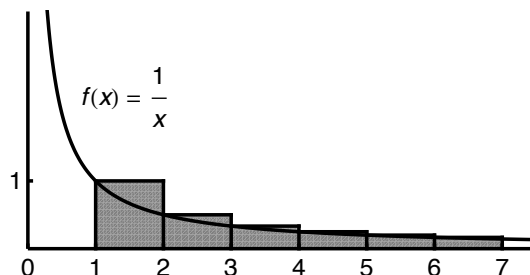
Considere a sequência definida por $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Ou seja:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \quad \dots$$

Vamos mostrar que esta sequência diverge. Falando de um modo informal, vamos mostrar que a soma infinita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

diverge, ou seja, seu limite é o infinito. Inicialmente note que $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)} > 0$, logo a sequência é crescente. Pelo critério acima, basta verificarmos que não é limitada. Para isso, faremos uso do cálculo:



Observe que a área de cada retângulo é igual a cada termo da soma. Logo a soma de todas as áreas será igual à nossa soma infinita. Mas note que a soma dessas áreas é superior à área sob o gráfico. Novamente:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty$$

Logo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots > \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty$$

Nossa sequência, formada pelas somas parciais, é portanto crescente e ilimitada, logo divergente, a partir da proposição acima apresentada. \square

Nos dois exemplos acima, tratamos do limite de sequências formadas por somas parciais, e sem pudor falamos de soma infinita, dando uso à notação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

No capítulo seguinte, daremos muita atenção a este tipo de sequência, chamada série. O teste que fizemos para mostrar se a série convergia ou divergia é chamado teste da integral, e voltaremos a falar dele no futuro. Por ora, apresentamos um critério deveras famoso, a título de curiosidade.

Proposição 6.3 (Critério de Cauchy). Uma sequência s_n é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que se $i, j \geq n_0$, então $|s_i - s_j| < \epsilon$.

A proposição acima diz os fatos a seguir sempre ocorrem simultaneamente:

1. Uma sequência se acumula em torno de um ponto, ie, converge para um limite.
2. Os termos da sequência tornam-se cada vez mais próximos um do outro.

A demonstração que estes dois fatos são equivalentes não é trivial, e preferiremos não apresentá-la aqui.

6.2 Exemplos clássicos

Observe a proposição a seguir, de extrema importância:

Proposição 6.4 (Critério da razão para sequências). 1. Se s_n é uma sequência de termos positivos, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = a < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

2. Se s_n é uma sequência de termos positivos, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = b > 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

3. Se s_n é uma sequência de termos positivos, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, então nada podemos afirmar sobre a sequência.

Demonstração.

1. Seja c tal que $a < c < 1$. Logo $\frac{s_{n+1}}{s_n} < c$ para n suficientemente grande. Logo $s_{n+1} < c \cdot s_n < s_n$, daí temos que a sequência é decrescente. Como os termos são positivos, ela é decrescente e limitada, logo convergente. Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$. Observe que:

$$s_{n+1} < c \cdot s_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} \leq c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \Rightarrow b \leq c \cdot b$$

Logo temos que $b \cdot (1 - c) \leq 0$. Como $b \geq 0$ e $(1 - c)$ é positivo pois $c < 1$, temos obrigatoriamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b = 0$$

2. Suponha para efeito de derivar contradição que a sequência fosse limitada. Seja L seu limite. Podemos escrever $b = 1 + h$. Então para n suficientemente grande, $a_{n+1} \approx a_n + h a_n$. Se olharmos para um a_n próximo o suficiente de L , digamos, menos que $h a_n$, então certamente teremos $a_{n+1} > L$, um absurdo.
3. Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$, e a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge para 0. Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, e a sequência $a_n = n$ diverge. Por fim, observe que se $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2-1}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, e a sequência converge para 3. □

Como aplicação da proposição acima, observe os clássicos exemplos a seguir:

Exemplo 6.8. Sejam $a > 1$ e k uma constante, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

Com efeito, observe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{a} = \frac{1}{a} < 1$$

Logo, pela proposição acima, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$. Em outras palavras, esta proposição nos diz que a exponencial sempre ganha da polinomial. □

Exemplo 6.9. Seja $a > 1$, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Com efeito, observe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

Logo, pela proposição acima, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Em outras palavras, esta proposição nos diz que o fatorial sempre ganha da exponencial. □

O exemplo a seguir é mais sofisticado, e muito importante.

Exemplo 6.10. Mostraremos que $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada, e definiremos o seu limite. Pelo binômio de Newton, temos que:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n \cdot 1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \left[\frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] + \left[\frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)\right] + \dots + \left[\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

Obviamente, temos que $a_n > 2$. Quando n cresce, o número de parcelas e o valor de cada uma também cresce, logo a_n é uma sequência crescente. Temos também trivialmente que:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

A soma desta progressão geométrica, como se sabe desde o ensino médio, é tal que:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} < 3$$

Logo a_n é uma sequência de termos crescentes e limitada superiormente por 3. Logo é convergente. Definimos:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

É um número entre 2 e 3. Sua expansão decimal até a quarta casa é $e = 2,7182$.

Como aplicação, temos:

Exemplo 6.11. Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Com efeito, observe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Certamente $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ estará sempre entre 0 e 1, logo é limitada. Como sua inversa, do exemplo anterior, era crescente, teremos que esta é decrescente, logo convergente, e seu limite estará entre 0 e 1. Logo, pela proposição acima, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Em outras palavras, esta proposição nos diz que a exponencial de base crescente sempre ganha do fatorial. □

6.3 Exercícios

Questão 6.1. Calcule os limites abaixo.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n - 1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n^3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + n^2}}{n^2 + 1}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2$

Questão 6.2. Para cada natural n , seja A_n o círculo de raio n . Prove que a sequência abaixo converge:

$$a_n = \iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)^2} dx dy$$

Questão 6.3. Prove que a sequência abaixo converge:

$$a_n = \int_1^n \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

Questão 6.4. Utilizando o critério da razão, resolva as questões abaixo.

1. Dados k natural e $a > 0$, calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}$
2. Dados k natural e $a > 0$, com $a \neq e$, calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k a^n n!}{n^n}$.

Questão 6.5. Calcule os limites abaixo, seguindo as sugestões.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$; Observe que $\sqrt[n]{n!} > \left(\sqrt[n]{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}$; Note que $\log(\sqrt{n}) < \sqrt{n}$. Logo $0 < \frac{\log(n)}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Capítulo 7

Séries

No capítulo anterior, falamos brevemente de séries. Apresentamos a definição formal e uma definição intuitiva.

Definição 7.1 (Formal). Dada uma sequência a_k , dizemos que a sequência cujo termo é:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

é a série numérica associada a a_k . Dizemos que a_k é o termo geral da série, e que S_n é uma soma parcial. Quando existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, finito ou infinito, tal limite é chamado de soma da série, e denotado

em geral por $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Exemplo 7.1. Seja $a_k = k^2$. Então:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

E então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + \dots$$

□

Definição 7.2 (Intuitiva). Podemos abusar da linguagem, e dizer que uma série é uma soma infinita de termos, usualmente representada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Alternaremos entre as duas definições, geralmente usando a primeira para demonstrar proposições, e a segunda para apresentar problemas e motivar técnicas de resolução. Muitas vezes omitiremos os índices quando isto não gerar confusão, convencionando que \sum representará $\sum_{k=0}^{\infty}$. Em alguns casos, \sum poderá representar também $\sum_{k=1}^{\infty}$, quando o termo a_k não estiver definido com $k = 0$.

Definição 7.3. Se o limite das somas parciais existir e for finito, ou seja, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$, diremos que a série é convergente, e que converge para L . Se o limite for ∞ ou $-\infty$, ou mesmo se não existir, diremos que a série é divergente.

Algumas propriedades básicas são apresentadas, mas o leitor notará que elas são bastante intuitivas:

1. Se α é uma constante e se $\sum a_k$ for convergente, então: $\sum \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum a_k$
2. Se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergirem, então: $\sum (a_k + b_k) = \left(\sum a_k\right) + \left(\sum b_k\right)$
3. Teremos que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ será convergente se, e somente se, para qualquer natural p , a série representada por $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ também for convergente. E ainda: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k\right) + \left(\sum_{k=p}^{\infty} a_k\right)$

Exemplo 7.2. O leitor deve voltar ao capítulo de sequências e constatar que lá apresentamos demonstrações garantindo que a série $\sum \frac{1}{k}$ diverge, ao passo que a série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Exemplo 7.3. A série $\sum r^k$, com $r < 1$, é chamada série geométrica. Tal série converge. Observe:

Sejam $S_n = \sum_{k=0}^n r^k$ as somas parciais. Note que:

$$r \cdot S_n = S_{n+1} - r^0 = r^{n+1} + S_n - 1 \Rightarrow S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \text{ pois } r < 1$$

Em particular, se $r = \frac{1}{2}$, teremos:

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Exemplo 7.4. Se o termo geral a_k de uma série for tal que $a_k = b_k - b_{k+1}$, então a série é chamada de telescópica. Observe que:

$$S_n = \sum a_k = \sum (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Se por acaso $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, então teremos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - b$$

Observe:

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} = \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

7.1 Critérios de convergência e divergência

Muitas vezes estaremos interessados em decidir se uma série é ou não convergente, em detrimento de calcular seu limite de fato. A seguir, apresentaremos alguns resultados que permitem decidir se uma série é ou não convergente ou divergente.

Crítério 7.1 (do Termo geral). Se uma série $\sum a_k$ é convergente, então $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Equivalentemente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$, então a série é divergente.

Observe que esta proposição **não** está dizendo que se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, então a série será convergente.

Demonstração. A demonstração é fácil. Seja $s_n = \sum a_k$. Note que se $\sum a_k$ converge, então, por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe, digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Obviamente, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$. Agora note que: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \right) = s - s = 0$$

□

Exemplo 7.5. A série $\sum \frac{k^2}{k^2+3}$ não converge, pois $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{k^2+3} = 1 \neq 0$. Como é uma sequência crescente, ainda temos que:

$$\sum \frac{k^2}{k^2+3} = \infty$$

□

Exemplo 7.6. Ambas as séries $\sum \frac{1}{k}$ e $\sum \frac{1}{k^3}$ são tais que o limite do termo geral é zero, logo ambas tem chance de convergir. Entretanto, somente a segunda converge. O leitor deve estar lembrado que a primeira diverge (exemplo do capítulo anterior).

□

Podemos modificar o critério apresentado acima, aumentando as restrições sobre a série mas obtendo um resultado mais forte. A demonstração é mais técnica, e fica para o leitor interessado pesquisá-la nas fontes.

Antes disto, apresentamos uma definição. Diremos que uma série do tipo $\sum (-1)^k a_k$, onde $a_k > 0$, é uma série alternada de termo geral a_k . Temos agora:

Crítério 7.2 (do Termo geral para séries alternadas). Dada uma série alternada $\sum (-1)^k a_k$, se a sequência a_k for decrescente e se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, então a série converge.

Exemplo 7.7. A série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge, uma vez que $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, a_k, \dots$ é uma sequência decrescente, e $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0$. O cálculo do limite, por outro lado, é mais trabalhoso. Futuramente veremos uma maneira padrão de resolver problemas como este, mas por ora, apresentamos uma resolução pontual:

Vamos mostrar que, se $0 < \alpha \leq 1$, então:

$$\ln(1 + \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k}$$

Comece lembrando que:

$$\ln(1 + \alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x} dx$$

Agora considere a progressão geométrica:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

Substituindo r por $-x$, teremos que:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

Integrando de 0 a α termo a termo, a igualdade acima implica a seguinte:

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{\alpha^n}{n} + (-1)^{n+1} \int_0^\alpha \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

Passando o limite com $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados, teremos:

$$\ln(1 + \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha^k}{k} + (-1)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\alpha \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

Se mostrarmos que este último limite é igual a zero, então encerraremos. Note então que, como $0 < x < \alpha$, então $1 + x \geq 1$, logo $\frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. Então:

$$\int_0^\alpha \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^\alpha x^{n+1} dx = \frac{\alpha^{n+2}}{n+2}$$

Mas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+2}}{n+2} = 0, \text{ pois } \alpha \leq 1$$

o que encerra. □

A seguir apresentaremos alguns critérios que são próprios para séries de termos positivos.

7.1.1 Critérios para séries de termos positivos

No que segue, consideraremos sempre a_k e b_k seqüências arbitrárias, mas de termos positivos.

O primeiro dos critérios já foi utilizado antes, mas é importante reeditá-lo em seu devido local:

Critério 7.3 (da Integral). Seja a série $\sum a_k$. Se existir um natural p tal que a função $f(x)$ definida de p em diante seja decrescente e positiva, e tal que $f(k) = a_k$, então:

(a) Se $\int_p^\infty f(x) dx$ convergir, então $\sum a_k$ converge.

(b) Se $\int_p^\infty f(x) dx$ divergir, então $\sum a_k$ diverge.

A demonstração deste critério é simples, e certamente o leitor que consultar os exemplos acompanhados de desenhos no capítulo anterior terá uma boa idéia do porquê da validade deste critério.

Exemplo 7.8. Este é um exemplo exercício:

Decida se a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$ converge ou diverge. Sugestão: Aplique o critério utilizando a função $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$ com $x \geq 2$. Esta função satisfaz as condições do critério? Calcule $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_2^a \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$. Lembre-se que $\lim_{a \rightarrow \infty} \ln(\ln(a)) = \infty$. \square

O critério abaixo é muito importante.

Critério 7.4 (da Comparação). Consideremos as séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ e suponha que a partir de um certo p , com $k \geq p$ tem-se que $b_k \geq a_k \geq 0$. Então:

(a) Se $\sum b_k$ convergir, então $\sum a_k$ converge.

(b) Se $\sum a_k$ divergir, então $\sum b_k$ diverge.

Ou seja, uma série maior convergente “espreme” a menor, tornando esta convergente; ao passo que uma série menor divergente “empurra” a maior, fazendo com que esta divirja. Esta idéia intuitiva dispensa a demonstração formal.

Exemplo 7.9. Vamos oferecer outra demonstração que a série $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Note que:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots > \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{1/2} + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

que certamente diverge.

Exemplo 7.10. Vamos oferecer outra demonstração que a série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Note que:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \dots < \\ & < 1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}}_{1/4} + \underbrace{\frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^2}}_{1/8} + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 \end{aligned}$$

como o leitor deve se lembrar.

Exemplo 7.11. A série $\sum \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ converge, uma vez que, como $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\pi}{2}$, teremos:

$$\sin\left(\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Como $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\sum \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ convergirá.

E ainda, o valor desta soma certamente é maior que $\sin(1)$ e menor que 2, pois $\sum \frac{1}{k^2} \leq 2$ como vimos logo acima.

□

Exemplo 7.12. A série $\sum \frac{k}{k^2 + 2k + 1}$ diverge, uma vez que:

$$\frac{k}{k^2 + 2k + 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}$$

Sem dificuldades, vemos que se $k \geq 1$, valerá:

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}} \geq \frac{1}{4}$$

Logo:

$$\sum \frac{k}{k^2 + 2k + 1} \geq \sum \frac{1}{4k} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{k}$$

que certamente diverge.

□

O critério abaixo é uma representação do critério acima, mas que pode ter uso mais fácil em certos contextos.

Critério 7.5 (do Limite). Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ duas séries como sempre. Considere:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Então:

- (a) Se $L > 0$, L real, então ambas as séries divergem ou ambas as séries convergem.
- (b) Se $L = \infty$, então caso $\sum b_k$ seja divergente, $\sum a_k$ também o será.
- (c) Se $L = 0$, então caso $\sum b_k$ seja convergente, $\sum a_k$ também o será.

Demonstração. Se L é finito diferente de 0, temos que para valores grandes de k , existem $L_1 \leq L \leq L_2$ tais que:

$$L_1 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L_2$$

Logo:

$$b_k \cdot L_1 \leq a_k \leq L_2 \cdot b_k \text{ e } \frac{a_k}{L_2} \leq b_k \leq \frac{a_k}{L_1}$$

Portanto a convergência ou divergência de uma implica a convergência ou divergência de outra, pelo critério de comparação acima.

Se L é infinito, então dado um natural M , para valores suficientemente grandes de k , temos que $a_k > b_k \cdot M$. Podemos garantir então que a divergência de b_k implica a de a_k .

Se L é finito, então dado um natural m , para valores suficientemente grandes de k , temos que $a_k < b_k \cdot m$. Podemos garantir então que a convergência de b_k implica a de a_k .

Exemplo 7.13. Vamos decidir se a série

$$\sum k \cdot e^{-k}$$

é convergente ou divergente.

Da experiência, sabemos que os termos exponenciais costumam variar com maior intensidade que os termos lineares. Desta forma, sabendo que a série $\sum \frac{1}{e^k}$ certamente é convergente, é natural esperar

que $\sum \frac{k}{e^k}$ também seja, mesmo sabendo que $\sum k$ é divergente. Note ainda que $\lim \frac{k}{e^k} = 0$, logo a série pode ser convergente.

Vamos então compará-la com alguma série convergente que conheçamos. Como vamos fazer uma divisão, seria interessante que o termo geral desta série pudesse cancelar alguns termos daquela... Neste espírito, observe:

$$\sum \frac{1}{e^{k/2}}$$

é convergente. Utilizando o critério acima:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{e^k}}{\frac{1}{e^{k/2}}} = \frac{k}{e^{k/2}} = 0$$

Pelo item (c) do critério, temos que $\sum k.e^{-k}$ é convergente.

O leitor é convidado a compará-la com $\sum \frac{1}{k^2}$ e obter a mesma conclusão. □

Exemplo 7.14. Este exemplo é um exercício. Para decidir se a série:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2 + 2}{k^5 + 2k + 1}$$

é convergente ou divergente, compare-a com $\sum \frac{1}{k^3}$ □

O critério abaixo é certamente um dos mais importantes, e nos referiremos a ele futuramente.

Critério 7.6 (da Razão e da Raiz). Consideremos a série $\sum a_k$ de termos positivos. Suponhamos que o limite L abaixo exista:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Nestas condições:

- (a) Se $L < 1$, então $\sum a_k$ converge.
- (b) Se $L > 1$, então $\sum a_k$ diverge.
- (c) Se $L = 1$, então nada podemos afirmar sobre a série.

Da mesma forma, se o limite J abaixo exista:

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Nestas condições:

- (a) Se $J < 1$, então $\sum a_k$ converge.
- (b) Se $J > 1$, então $\sum a_k$ diverge.
- (c) Se $J = 1$, então nada podemos afirmar sobre a série.

E mais, se L existe, então $L = J$.

Demonstração. Mostraremos a parte da razão. A parte da raiz se mostra de maneira semelhante. A demonstração da igualdade entre os limites é demasiadamente técnica.

Observe que se $L < 1$, então a partir de um k_0 grande o suficiente, teremos $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq c$ para algum número $L \leq c < 1$. Temos então que:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{c^{k+1}}{c^k}$$

Logo teremos:

$$\frac{a_{k+1}}{c^{k+1}} \leq \frac{a_k}{c^k}$$

A sequência $\frac{a_k}{c^k}$ será portanto decrescente, logo será limitada. O limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{c^k}$ existirá e será finito. Por outro lado, a série:

$$\sum c^k \text{ com } c < 1$$

é convergente. Logo, pelo critério apresentado acima, como $\sum a_k$ terá o mesmo comportamento, ela será convergente.

Se $L > 1$, então temos que $a_{k+1} > a_k$ para valores grandes o suficiente de k , logo $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$, portanto a série terá que divergir.

Para o caso em que $L = 1$, o leitor é convidado a observar que tanto $\sum \frac{1}{k}$ como $\sum \frac{1}{k^2}$ satisfazem tal circunstância, mas uma diverge e a outra converge. □

Exemplo 7.15. A série $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge ou diverge? Aplicamos o critério acima:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2}{k+1} = 0$$

Logo a série só pode ser convergente. □

Exemplo 7.16. A série $\sum \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{n^5}$ converge ou diverge? Aplicamos o critério:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k+1) \cdot (3k+4)}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k+1)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k+4}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^5} = \infty$$

logo a série diverge. □

Exemplo 7.17. Este é um exemplo exercício. O leitor deve decidir se $\sum \frac{k^k}{k!}$ converge ou diverge.

Lembre-se que $\lim \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = e$.

E quanto à série $\sum \frac{k!}{k^k}$? □

Exemplo 7.18. A série $\sum \frac{k^3}{3^k}$ converge ou diverge? Usando o critério da raiz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^3}{3^k}} = \frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{k})^3 = \frac{1}{3}$$

Logo só pode ser convergente. □

7.1.2 Séries de termos quaisquer

Todo tratamento acima foi feito para séries de termos positivos. Pode ocorrer no entanto que uma dada série possua termos também negativos. Introduzimos um conceito importante:

Definição 7.4. Uma série qualquer $\sum a_k$ é *absolutamente convergente* se $\sum |a_k|$ convergir.

Note que sobre $\sum |a_k|$ sempre poderemos aplicar os critérios vistos acima. Isto é muito importante, uma vez que:

Proposição 7.1. Se uma série qualquer for absolutamente convergente, então ela será também convergente.

Demonstração. Basta notar que $0 \leq |a_k| + a_k \leq 2|a_k|$. Daí pelo fato de $\sum |a_k|$ ser convergente, $\sum (|a_k| + a_k)$ também será pelo critério de comparação. E mais, como $\sum a_k = \sum [(|a_k| + a_k) - |a_k|] = \sum (|a_k| + a_k) - \sum |a_k|$ e estas duas são convergentes, teremos que $\sum a_k$ também o será. \square

Exemplo 7.19. A série $\sum \frac{\sin(k)}{k^2}$ possui termos negativos e positivos. Para decidir se ela é convergente ou divergente, vamos mostrar que ela é absolutamente convergente, logo convergente. Observe que:

$$\left| \frac{\sin(k)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

Pelo critério de comparação, $\sum \left| \frac{\sin(k)}{k^2} \right|$ será convergente, logo $\sum \frac{\sin(k)}{k^2}$ é absolutamente convergente, portanto convergente. \square

Exemplo 7.20. A série $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge para $\log(2)$ como vimos, mas não é absolutamente convergente, pois:

$$\left| \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \frac{1}{k+1}$$

e a série harmônica $\sum \frac{1}{k}$ diverge. \square

Exemplo 7.21. Pelo critério para termo geral de séries alternadas, a série:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$$

é convergente, mas não é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}, \text{ que diverge!}$$

\square

7.2 Exemplos mais sofisticados e um resultado surpreendente

Exemplo 7.22. Vamos mostrar que, se $0 < \alpha \leq 1$, então:

$$\arctan(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$$

Usaremos um raciocínio semelhante ao usado para mostrar que $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \dots$. Observe que:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

Trocando r por $-x^2$, teremos que:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

Integrando ambos os lados de 0 a α , teremos que:

$$\arctan(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{\alpha} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx$$

Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados, só precisaremos mostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx = 0$$

Mas isto é fácil, uma vez que:

$$0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} \leq x^{2n+2}$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} x^{2n+2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n+3}}{2n+3} = 0$$

desde que $\alpha \leq 1$, o que encerra. □

Exemplo 7.23. Aplicando o exemplo acima para $\alpha = 1$, teremos que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

que fornece uma excelente maneira de calcular o número π com a aproximação que queiramos. □

Exemplo 7.24. Vamos calcular para qual valor converge a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

O valor desta série foi calculado pela primeira vez por Euler, e é um resultado bastante elegante. Sua demonstração, contudo, não é trivial; todavia o leitor interessado certamente irá apreciá-la:

Vamos calcular a integral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy$$

de duas formas diferentes.

1. Observando que $0 < xy < 1$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1}{1-xy}$$

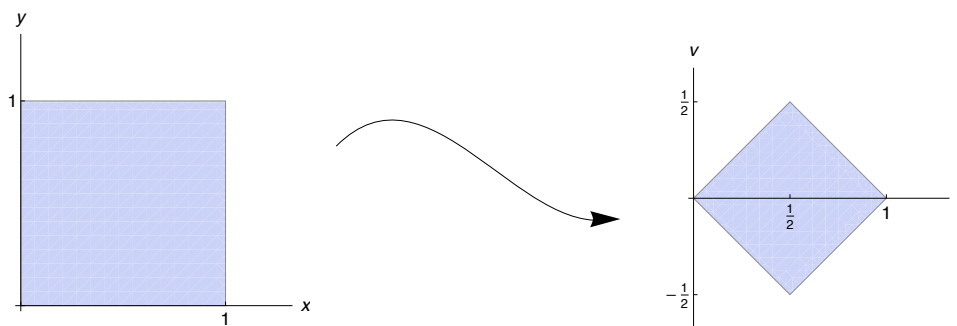
Então teremos que:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \right) dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \int_0^1 x^k y^k dx dy \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^k dx \right) \left(\int_0^1 y^k dy \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right) \left(\frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

2. Vamos fazer uma mudança de coordenadas. Sejam:

$$u = \frac{x+y}{2} \text{ e } v = \frac{y-x}{2}$$

Observe que esta mudança altera o domínio de integração conforme a figura abaixo:



Observando que $x = u - v$ e $y = u + v$, logo $xy = u^2 - v^2$; e que:

$$\left| \frac{\frac{\partial(u-v)}{\partial u}}{\frac{\partial(u+v)}{\partial u}} \cdot \frac{\frac{\partial(u-v)}{\partial v}}{\frac{\partial(u+v)}{\partial v}} \right| = 2$$

Teremos que:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^u \frac{1}{1-(u^2-v^2)} \cdot 2 \cdot dv du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{u-1}^{1-u} \frac{1}{1-(u^2-v^2)} \cdot 2 \cdot dv du$$

Observando que a função é simétrica com respeito ao eixo u , teremos:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{dv}{1-(u^2-v^2)} du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv}{1-(u^2-v^2)} du$$

Lembrando que $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$, teremos que:

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du$$

Substituindo u por $\sin(\theta)$ na primeira e u por $\cos(\theta)$ na segunda, teremos:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)} \arctan(\tan(\theta)) \cos(\theta) d\theta + 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) (-\sin(\theta)) d\theta$$

Daí obtemos:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta - 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \arctan\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) d\theta$$

O leitor deve lembrar-se que $\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Portanto, teremos:

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta - 4 \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left(\frac{\theta^2}{2} \Big|_0^{\pi/6} - \frac{\theta^2}{4} \Big|_{-\pi/3}^0 \right)$$

Finalmente:

$$I = \frac{\pi^2}{6}$$

□

A despeito do que pareceria natural, não se conhece o valor de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

Nem com qualquer expoente ímpar. Por outro lado, Euler resolveu o problema para qualquer expoente par. Encerraremos esta seção apresentando um resultado um tanto quanto surpreendente:

Definição 7.5. Uma série é chamada de *condicionalmente convergente* se for convergente, mas não for absolutamente convergente.

Um típico exemplo é $\sum \frac{(-1)^k}{k}$.

Teorema 7.1 (Riemann). Alterando-se convenientemente a **ordem** dos termos de uma série condicionalmente convergente, pode-se fazer com que a soma da série seja igual a qualquer número real pré-determinado.

Ou seja, a ordem dos termos numa série condicionalmente convergente **altera** o valor da série! Tal fenômeno não ocorre em séries absolutamente convergentes. A demonstração é simples:

Demonstração. Fixado um número real c , começamos somando termos positivos até que a série ultrapasse c pela primeira vez, uma vez que isto ocorra, começamos somando termos negativos, até que a soma torne-se menor que c . Então voltamos a somar termos positivos, e depois negativos, e assim sucessivamente, de modo que o valor da soma oscile em torno de c . Tal processo é possível pois, como a série é condicionalmente convergente, a soma de todos os termos positivos é ∞ , assim como a de todos os negativos é $-\infty$. Logo sempre será possível chegar em qualquer valor por somas sucessivas de termos de mesmo sinal.

Para garantir que de fato a soma, posta dessa forma, convergirá para c , basta notar que após a k -ésima oscilação, ocorrida após a soma do termo a_{n_k} , a distância do valor da soma para c será menor que $|a_{n_k}|$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, temos que haverá a convergência.

□

7.3 Exercícios

Questão 7.1 (Propriedades básicas).

- Qual o valor da soma $\sum \frac{2}{3^n}$?
- Qual o valor da soma $\sum \left(\frac{2}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{3}{4^n} \right)$?
- Transforme a série $\sum \frac{1}{(k)(k+1)(k+2)}$ numa série telescópica e calcule seu valor.

Questão 7.2 (Critério do Termo Geral).

- Mostre que as séries $\sum [1 + (-1)^k]$, $\sum \frac{k^3}{k+1}$ e $\sum \frac{k^4}{k^4+k^3+k^2+k}$ são divergentes.
- Mostre que as séries $\sum (-1)^k \frac{k^3}{k^4+3}$, $\sum (-1)^k \frac{\log(k)}{k}$ e $\sum (-1)^k \frac{1}{k!}$ convergem.
- O que pode-se dizer acerca da convergência ou divergência da série $\sum \frac{1}{\log(k)}$ utilizando o critério em questão?

Questão 7.3. Calcule o valor da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ utilizando que $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Questão 7.4 (Critério da Integral).

- Determine para quais valores de q a série $\sum \frac{1}{k(\log(k))^q}$ converge ou diverge.
- A série $\sum \frac{k}{k^4+1}$ converge ou diverge?
- A série $\sum \frac{k}{k^2+1}$ converge ou diverge?

Questão 7.5 (Critério da Comparação).

- Mostre que $\sum \frac{1}{k^3}$ converge da mesma forma que foi mostrado que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
- A série $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge ou diverge?
- A série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge ou diverge?
- Determine em geral para quais valores de α a série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge ou diverge.

Questão 7.6 (Critério do Limite).

- Decida se $\sum (k^3 + 1)e^{-k}$ converge ou diverge.
- Decida se a série $\sum \frac{1}{\sqrt{k} \log(k)}$ converge ou diverge.
- Determine para quais valores de p a série $\sum \frac{1}{k^p \log(k)}$ converge ou diverge.
- Prove que $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge utilizando o critério do limite para alguma série adequada.

- e. Prove que para qualquer valor de γ , a série $\sum \frac{1}{\log(k)^\gamma}$ diverge.

Questão 7.7 (Critério da Razão e da Raiz).

- a. Decida se $\sum \frac{k!2^k}{k^k}$ converge ou diverge.
- b. Decida se $\sum \frac{3^k}{1+4^k}$ converge ou diverge.

Questão 7.8.

Determine x para que cada série a seguir convirja:

$$\sum \frac{x^k}{k} \quad \sum \frac{x^k}{\log(k)} \quad \sum \frac{x^k}{2^k} \quad \sum \frac{x^k}{k^k} \quad \sum k \cdot x^k \quad \sum \frac{k!x^k}{k^k}$$

Questão 7.9.

Prove que para todo natural $k \geq 1$, temos que:

$$\log(1) + \log(2) + \dots + \log(k-1) \leq \int_1^k \log(x) \, dx \leq \log(2) + \log(3) + \dots + \log(k)$$

Conclua que:

$$(k-1)! \cdot e^k \leq e \cdot k^k \leq k! \cdot e^k$$

Utilize esse fato para mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^k}$ diverge.

Capítulo 8

Séries de Potências e Séries de Taylor

Nosso objetivo neste capítulo será introduzir o estudo de um importante tipo de séries.

Definição 8.1. Uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

é chamada série de potências em torno do ponto x_0 com coeficientes a_n .

Exemplo 8.1. A série a seguir

$$\sum \frac{(x - 2)^n}{n^2}$$

é uma série de potências, onde $a_n = \frac{1}{n^2}$. Quando $x = 3$, ela é exatamente a série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

nossa velha conhecida, que sabemos convergir para o valor $\frac{\pi^2}{6}$. Quando $x = 4$, teremos:

$$\sum \frac{2^n}{n^2}$$

que certamente é divergente, pois $\lim \frac{2^n}{n^2} = \infty$.

□

Para cada valor de x , teremos uma série de potências diferente! Na seção a seguir, vamos estudar como a convergência dessas séries ocorre quando variamos o x .

Em alguns momentos vamos considerar $x_0 = 0$ com um objetivo de deixar a notação menos pesada e as demonstrações mais simples, mas todo tratamento a seguir se generaliza para qualquer valor de x_0 .

8.1 Raio de Convergência

O resultado a seguir garante que se uma série de potências convergir para determinado valor t , ela convergir para todos os valores que forem mais próximos do x_0 em relação a t .

Teorema 8.1. Suponha que $\sum a_n(x - x_0)^n$ seja convergente para $x = t$, $t \neq x_0$. Seja $r = |t - x_0|$. Então a série $\sum a_n(x - x_0)^n$ convergirá absolutamente em todo o intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Demonstração. Seja $x_0 = 0$. Como $\sum a_n t^n$ converge, temos por (1) que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n t^n = 0$. Daí para todo $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $|a_n t^n| < \epsilon$. Agora temos que

$$|a_n x^n| = |a_n t^n| \left| \frac{x}{t} \right|^n$$

Fazendo $\epsilon = 1$, temos que para todo n maior que algum n_0 vale

$$|a_n x^n| \leq \left| \frac{x}{t} \right|^n$$

Se $|x| < |t|$, então a série

$$\sum \left| \frac{x}{t} \right|^n$$

é convergente. Pelo critério (2),

$$\sum a_n x^n$$

converge absolutamente, pois $\sum |a_n x^n|$ converge para todo x com $|x| < |t|$. □

Exemplo 8.2. Considere a série de potências do exemplos anterior:

$$\sum \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

Pelo teorema acima, e como ela converge para $x = 3$, temos que para qualquer valor de x no intervalo $(2-1, 2+1) = (1, 3)$ ela convergirá.

Apresentamos agora um resultado que generaliza o acima apresentado. Suponhamos neste momento, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$.

Teorema 8.2. Seja $\sum a_n x^n$. Então ocorre exatamente uma das seguintes:

- i $\sum a_n x^n$ converge apenas se $x = 0$ ($x = x_0$).
- ii $\sum a_n x^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
- iii Existe um $R > 0$ tal que $\sum a_n x^n$ converge para todo $x \in (-R, R)$ e diverge para todo $x \notin [-R, R]$ (consideramos de fato $(x_0 - R, x_0 + R)$ et cetera).

Observe que a proposição nada fala sobre o que ocorre nos pontos R e $-R$!! Tal R será chamado raio de convergência da série.

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos não negativos para os quais a série converge. Suponha que $A \neq \{0\}$. Logo:

Seja A ilimitado. Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $t \in A$ tal que $|x| < t$. Como $t \in A$, $\sum a_n t^n$ converge por hipótese. Pelo teorema anterior, $\sum a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < t$. Então converge para o dado x que era arbitrário em \mathbb{R} , logo converge em todo o \mathbb{R} .

Suponha que A seja limitado superiormente. Logo A tem um supremo, seja $R = \sup A$. Pelo teorema anterior, para todo x tal que $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge. Logo $x \in (-R, R)$ implica que $\sum a_n x^n$ converge. Agora suponha para efeito de derivar contradição que convergisse para um x tal que $|x| > R$. Seja c tal que $R < c < |x|$. Temos que $\sum a_n x^n$ converge em c , logo $c \in A$ e R não seria supremo, uma contradição. Logo $\sum a_n x^n$ diverge se $x \notin [-R, R]$. □

O resultado anterior é muito positivo pois garante que uma série convergente sempre converge em um conjunto razoável. Observe os exemplos:

Exemplo 8.3. Considere a série:

$$\sum \frac{(x-3)^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{x-3}{2} + \frac{(x-3)^2}{3} + \frac{(x-3)^3}{4} + \dots$$

Se $x = 4$, tal série nada mais é do que a série harmônica:

$$\sum \frac{(4-3)^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

que sabemos divergir. Certamente o raio de convergência desta série, como está centrada em $x_0 = 3$, é no máximo que $|4-3| = 1$. Por outro lado, se $x = 2$, teremos:

$$\sum \frac{(2-3)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

que sabemos convergir para $\log(2)$. Logo o raio de convergência é pelo menos $|2-3| = 1$. O raio de convergência desta série então será 1, o intervalo de convergência (centrado em 3) é $[2, 4]$, divergindo em $(-\infty, 3)$ e em $[4, \infty)$. □

Exemplo 8.4. A série de potências centrada na origem

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

converge em todos os pontos, pois para qualquer valor de x fixado, temos pelo critério da razão que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

□

Muitas vezes é útil determinar o tal raio R . Então:

Proposição 8.1. Seja $\sum a_n x^n$ série satisfazendo $a_n \neq 0$ a partir de um certo n_0 . Daí:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

desde que este limite exista. E mais, desde que o limite exista, o raio também pode ser expresso por:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Costumaremos utilizar a primeira expressão, e a demonstração a seguir refere-se somente a ela.

Demonstração. Vamos utilizar o item (3) apresentado no início. Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, então para todo x real a série convergirá, logo $R = \infty$. Note que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$$

logo $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, a série convergirá apenas se $x = 0$. Logo $R = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0$, como esperado.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \neq 0$, então para todo x tal que $|x|.L < 1$ a série convergirá absolutamente. Logo convergirá absolutamente para todo x tal que:

$$|x| < \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

divergindo caso $|x| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Logo $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, como queríamos. \square

Exemplo 8.5. O raio de convergência da série:

$$\sum \frac{(x+2)^n}{3^n}$$

é calculado por:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{1} \right| = 3$$

Logo podemos garantir que a série converge no intervalo $(-2-3, -2+3) = (-5, 1)$ e que diverge fora do intervalo $[-5, 1]$. Quando $x = -5$ ou $x = 1$, temos que avaliar diretamente! De fato, em ambos os casos, esta série irá divergir. \square

8.2 Séries de Taylor

Este é sem dúvida o ápice do nosso estudo de séries. Até agora definimos séries de números e séries de potências, e decidimos para quais valores de x as séries de potências convergiam. Ora, se $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ é o intervalo de convergência de uma série potências, então para cada $x \in I$ a série assume um valor determinado. Podemos então definir uma função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ desde que } x \in I \text{ onde } I \text{ é o intervalo de convergência.}$$

8.2.1 Derivada e integral de uma série

Os dois teoremas a seguir serão de fundamental importância. Não apresentaremos as demonstrações completas por serem demasiadamente técnicas, mas o leitor há de notar que os resultados são de certa forma intuitivos.

Teorema 8.3 (Derivação termo a termo). Dada a série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

convergente em $(x_0 - R, x_0 + R)$, a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

converge no mesmo intervalo, e mais:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Demonstração. O teorema acima diz que a derivada de uma série de potências é obtida derivando termo a termo. É um resultado esperado se pensarmos nas séries de potências como polinômios de grau infinito... Para ver que o raio de convergência é o mesmo, basta notar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

□

Utilizando o teorema acima, podemos mostrar também que existem as derivadas de todas as ordens, convergindo no mesmo intervalo.

Teorema 8.4 (Integração termo a termo). Dada a série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

convergente em $(x_0 - R, x_0 + R)$, a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

converge no mesmo intervalo, e mais:

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

Também poderíamos ter considerado integrais definidas.

Demonstração. O teorema acima diz que a integral (indefinida) de uma série de potências é obtida integrando termo a termo. Para ver que o raio de convergência é o mesmo, basta notar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

□

Se consideramos uma série como uma função:

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$$

Pode ser bastante interessante expressar os coeficientes a_n em termos das derivadas de f calculadas no ponto x_0 no qual a série está centrada. Neste espírito, observe:

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0 - x_0)^{n-1} = 1.a_1$$

pois o único termo que não se anula por causa $(x_0 - x_0)^{n-1}$ é com $n = 1$. Vamos agora para as derivadas segunda e terceira:

$$f''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x_0 - x_0)^{n-2} = 2.1.a_2$$

$$f'''(x_0) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x_0 - x_0)^{n-3} = 3.2.a_1$$

Em geral, teremos:

$$f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

8.2.2 Série de Taylor de uma função

A seção anterior nos mostrou que dada uma série de potências, se a encararmos uma como uma função, então esta função é infinitamente derivável e integrável no intervalo de convergência da série original, e mais, os coeficientes da série original podem se expressar em termos de suas derivadas calculadas no ponto em que a série esteja centrada.

A pergunta natural é: dada uma função, podemos expressá-la como uma série de potências?! Felizmente, para boa parte das funções que conhecemos, a resposta é sim! A forma de representá-la será exatamente como vimos acima olhando do ponto de vista das séries.

Antes de ler a dedução a seguir, o leitor deve se lembrar que:

$$(u(t).v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \Rightarrow \int (u(t).v(t))' dt = \int u'(t)v(t) dt + \int u(t)v'(t) dt$$

Logo obtemos a notória fórmula de integração por partes:

$$\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Queremos que esta integral se decomponha em uma soma, e que seja possível repetir o processo em uma nova integral, e assim sucessivamente, para que assim uma série emergja. Naturalmente, vamos aplicar a fórmula de integração por partes. Precisaremos da mudança de variáveis $t = x - s$. Então:

$$f(x) - f(x_0) = - \int_{x-x_0}^0 f'(x-s) ds$$

Pela fórmula de integração por partes, temos que:

$$f(x) - f(x_0) = - \left(f'(x-s).s \Big|_{x-x_0}^0 - \int_{x-x_0}^0 -f''(x-s).s ds \right) = f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x-x_0}^0 f''(x-s).s ds$$

Repetindo o procedimento, teremos:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) - \left(f''(x-s).\frac{s^2}{2} \Big|_{x-x_0}^0 - \int_{x-x_0}^0 -f'''(x-s).\frac{s^2}{2} ds \right)$$

Logo:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \int_{x-x_0}^0 f'''(x-s) \cdot \frac{s^2}{2} \, ds$$

Faremos ainda o próximo passo:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \left(f'''(x-s) \cdot \frac{s^3}{3!} \Big|_{x-x_0}^0 - \int_{x-x_0}^0 f^{(4)}(x-s) \cdot \frac{s^3}{3!} \, ds \right)$$

Finalmente:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \int_{x-x_0}^0 f^{(4)}(x-s) \cdot \frac{s^3}{3!} \, ds$$

O leitor já deve ter notado que, seguindo este procedimento, obteremos a seguinte expansão de $f(x)$ em torno de $f(x_0)$. Voltaremos à variável t original por questão de estética:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n \, dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n \end{aligned}$$

O somatório é definido como o *polinômio de Taylor de ordem n de $f(x)$* . Estamos definindo R_n como sendo a integral da linha anterior, e chamaremos este termo de *resto integral* do polinômio de Taylor de ordem n . Tomamos então o limite $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados, obtendo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

A série obtida é chamada *série de Taylor de $f(x)$* . Observe que esta série coincidirá com a função se, e somente se, for uma série convergente e o limite do resto integral for 0. Felizmente, para a maioria das funções que conhecemos, é sempre possível obter um raio de convergência para a série em torno de um ponto e o limite do resto costuma ser 0.

Se a série estiver centrada no ponto $x_0 = 0$, é comum nos referirmos a ela como *série de MacLaurin*. Observe que se uma função coincide com sua série de Taylor, ela é infinitamente diferenciável e integrável, e será chamada, no âmbito das funções reais, de *função analítica*.

Exemplo 8.6. A série de Taylor de um polinômio é o próprio polinômio, e obviamente a convergência ocorre livremente em todo \mathbb{R} .

Proposição 8.2. As funções $\frac{1}{x}$, e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\log(x)$, $\arctan(x)$, $\arccos(x)$ e $\arcsen(x)$ são todas funções analíticas. A soma e o produto de funções analíticas é uma função analítica.

Exemplo 8.7. A série de Taylor da função exponencial em torno do ponto $x_0 = 0$ é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Uma vez que $e^0 = 1$ e $(e^x)^{(k)} = e^x$ para todo k . Observe que o raio de convergência desta série é infinito. \square

Exemplo 8.8. Vamos calcular a série de Taylor da função seno em torno do ponto $x_0 = 0$. Observe que $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $-\sin(0) = 0$ e $-\cos(0) = -1$, e as derivadas voltam a se repetir a cada múltiplo de quatro. Então:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots$$

Observe que o raio de convergência desta série também é infinito. \square

Exemplo 8.9. Vamos calcular a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ em torno do ponto $x_0 = 0$. Observe que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. Então:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(1-0)^{k+1}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Observe que o raio de convergência desta série é 1, e ainda, a série só converge para a função no intervalo $(-1, 1)$. \square

Exemplo 8.10. O leitor deve se lembrar que, por outros métodos, calculamos no capítulo anterior as séries de Taylor de $\log(1+x)$ e de $\arctan(x)$ em torno de 0. Vamos agora utilizar aquelas idéias para calcular o valor da série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Para tal, vamos olhar para esta série como uma série de potências calculada com $x = \frac{1}{2}$. Logo estamos interessados em decidir se a série a seguir é a série de Taylor de alguma função:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Suponhamos que seja, então é necessário que:

$$n \cdot x^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Logo $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$. Não parece fácil associar esta derivada n -ésima com $n \cdot n!$, por outro lado, seria muito interessante que este segundo termo tivesse sido $(n+1)!$. Para isto, bastaria que nossa série original fosse:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Ora, sabemos que $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$. E mais, o leitor deve estar notando que:

$$\frac{d}{dx} \sum x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Certamente tal função é analítica, logo a série considerada converge para ela. Então podemos resolver nosso problema. Aplicando $x = \frac{1}{2}$, teremos o resultado da nossa soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 4 - 2 = 2$$

□

8.3 Exercícios

Questão 8.1. Calcule o raio de convergência das séries de potência a seguir e determine o intervalo de convergência apropriadamente.

$$\begin{array}{cccc} \sum k^k x^k & \sum \frac{(x-1)^k}{k+2} & \sum \frac{(x+4)^k}{k^3} & \sum \frac{(x-5)^k}{\log(k)} \\ \sum \frac{x^k}{k^k} & \sum \frac{x^k}{k^2+3} & \sum \frac{(5x)^n}{\sqrt[3]{n}} & \sum \frac{(2x-5)^n}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Questão 8.2. Derive e integre as séries da questão anterior termo a termo.

Questão 8.3. Calcule as séries de Taylor das funções a seguir em torno de $x_0 = 0$ e decida se estas séries convergem para a função e em qual intervalo.

$$\begin{array}{ccc} \cos(x) & \tan(x) & \arctan(x) \\ \log(x) & \frac{1}{(1-9x)^3} & \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \end{array}$$

Questão 8.4. As funções a seguir não possuem primitiva elementar. Por outro lado, é possível expandi-las em série de Taylor e assim calcular uma série que é a primitiva. Faça-o.

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, dx \quad \int e^{x^2} \, dx$$

Questão 8.5. Expanda a função $(x-1)^3 e^x$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

Questão 8.6. Calcule o valor de $\sum \frac{1}{2^n(n+1)}$.

Questão 8.7. Considere a função definida por:

$$f(x) \begin{cases} e^{1/x^2}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostre que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Conclua que

$$f(x) \neq f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Este é o clássico exemplo de uma função infinitamente diferenciável mas que não é analítica.

Questão 8.8. Calcule o valor da soma:

$$\sum (k+2)(k+1)x^k$$

para os valores de x em que a série for convergente. Faça o mesmo para

$$\sum k^2 x^k$$

Apêndice D

Breve introdução às funções complexas

O objetivo deste apêndice é apresentar brevemente certos fatos importantes acerca das funções de variável complexa. Falaremos brevemente da derivada complexa e introduziremos as equações de Cauchy Riemann, como uma forma de verificar se uma função complexa é diferenciável, e também como uma forma de resgatar a função dada uma de suas componentes. A seguir, aproveitaremos nosso estudo anterior de séries para generalizar, sem muito formalismo, os resultados para séries de números complexos. Estaremos mais interessados nas séries de potências, e o objetivo principal será demonstrar a fórmula de Euler.

O estudo destas funções se estende por um caminho interminável, e infelizmente não trataremos de fatos básicos tão importantes quanto os que apresentaremos, tais como as aplicações conformes e a geometria destas aplicações, e as integrais complexas. Ao leitor interessado nestes tópicos, e em um estudo mais avançado, sugerimos:

- 1) *Variável Complexa e suas Aplicações*, de Ruel Churchill, editora McGraw-Hill.
- 2) *Funções de uma Variável Complexa*, de Alcides Lins Neto, projeto Euclides, publicação do IMPA.

A seção a seguir tem o objetivo de relembrar fatos básicos dos números complexos. O leitor que estiver seguro quanto a aritmética dos complexos, quanto a representação em forma polar e quanto as fórmulas de deMoivre, poderá evitá-la sem prejuízo.

D.1 Revisão das propriedades básicas

D.1.1 Aritmética

Um *número complexo* é uma expressão da forma $x + y \cdot i$: $a, b \in \mathbb{R}$ e i , chamado de *unidade imaginária*, satisfaz a igualdade $i^2 = -1$. Denotemos de agora em diante, salvo dito contrário, que $z = a + bi$ e $w = c + di$.

Esta soma e este produto se comportam naturalmente. Ou seja:

$$z + w = a + bi + c + di = a + b + ci + di = (a + b) + (c + d)i$$

E também

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Observe então que $z = w$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Por este motivo, o número real livre da constante i será chamada *parte real* e será denotada por $\Re(z) = a$. Equivalentemente, o número que multiplica i será chamado *parte imaginária* e será denotado por $\Im(z) = b$.

O conjunto de todos os números complexos será denotado por \mathcal{C} . O leitor deve observar que $\mathbb{R} \subset \mathcal{C}$. Definimos o conjugado de um número complexo $z = a + bi$ por

$$\bar{z} = a - bi$$

Observe que pela multiplicação complexa, temos:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = [aa - b(-b)] + [a(-b) + ba]i = a^2 + b^2$$

Ou seja, multiplicar um número complexo por seu conjugado é a melhor maneira de transformá-lo em um número real! Neste sentido, observe como lidamos com a divisão de um número complexo por outro através do seguinte exemplo:

$$\frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} = \frac{(2 - 12) + (8 + 3)i}{1 + 16} = \frac{-10 + 11i}{17} = \frac{-10}{17} + \frac{11}{17}i$$

A conjugação é uma operação **muito** importante, principalmente porque satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição D.1.

$$1 \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$2 \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Demonstração. Mostraremos (1) e deixaremos (2) como exercício.

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - bd) + (-ad - bc)i$$

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{w} &= (\overline{a + bi}) \cdot (\overline{c + di}) = (a - bi)(c - di) = \\ &= [ac - (-b)(-d)] + [a(-d) + (-b)c]i = (ac - bd) + (-ad - bc)i \end{aligned}$$

logo ambos coincidem, como queríamos. □

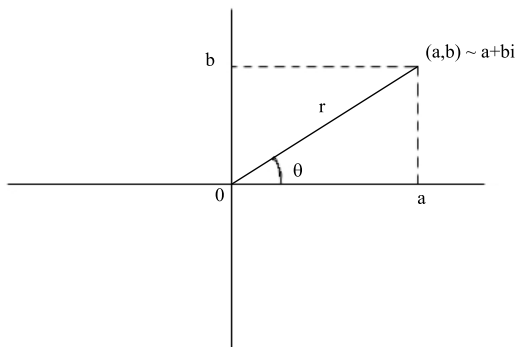
Por fim, definimos a norma de um número complexo por:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O leitor deve notar que se z for um número real, esta definição coincide com a definição de módulo.

D.1.2 O plano complexo e a forma trigonométrica

Podemos associar um número complexo $a + bi$ com um ponto do plano cartesiano da seguinte forma:



Esta associação é biunívoca, e nos permitirá lidar com o número complexo z tanto como um número quanto como um vetor (isto significa que \mathcal{C} possui estrutura tanto de espaço vetorial como de extensão de corpos sobre \mathbb{R}).

Observe que $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$. Por outro lado, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Desta forma, teremos que

$$a + bi = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Lembre que $\arctan(x) = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } 0 \text{ e } \frac{\pi}{2} \text{ cuja tangente é } x$.

Desta forma

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}), & \text{se } a \neq 0 \text{ e } b > 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0; \\ -\arctan(\frac{b}{a}), & \text{se } a \neq 0 \text{ e } b < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0. \end{cases}$$

O ângulo θ será chamado em geral de *argumento* do número complexo z e denotado por $\arg z$.

D.1.3 Fórmulas de deMoivre

A vantagem da abordagem da seção anterior é que podemos calcular com maior facilidade a multiplicação de um número complexo por outro. Observe o fato a seguir:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i [\cos(\alpha) \sin(\beta) + \cos(\beta) \sin(\alpha)]$$

Lembrando que $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$ e que $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$, teremos que

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Observe o caso particular abaixo:

$$[|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^2 = |z|^2(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = |z|^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

Em geral, a seguinte identidade é válida

Proposição D.2 (1ª Fórmula de deMoivre).

$$[|z|(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

A demonstração é por indução, e deixamos como exercício.

No caso complexo, definimos a raiz n -ésima de um número complexo z como o conjunto dos números w tais que $w^n = z$.

Proposição D.3 (2ª fórmula de deMoivre).

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Demonstração. Basta observar que se $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, então, pela fórmula anterior, temos:

$$\begin{aligned} \left[\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \right]^n &= |z| \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)^n = \\ &= |z|(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Por outro lado, cada um dos ângulos considerados estão entre 0 e 2π sendo distintos, daí teremos n raízes distintas. E nem uma mais, uma vez que o polinômio $x^n - z$ só pode ter no máximo n raízes. \square

D.1.4 Exercícios desta seção

Aritmética

Questão D.1. Efetue as operações a seguir

a. $(2 + 3i) + (1 - 4i)$

b. $(3 - i) - (4 + 6i)$

c. $(1 + 3i).(2 - 2i)$

d. $(5 - 4i).(1 + i)$

Questão D.2. Transforme as frações a seguir para um número da forma $a + bi$.

a. $\frac{(1)}{(1-i)}$

b. $\frac{(1-i)}{(1+i)}$

c. $\frac{(2+3i)}{(1+2i)}$

Questão D.3. Calcule

$$i^{48}$$

$$i^{2009}$$

$$i^1 + i^2 + \dots + i^{50}$$

Questão D.4. Mostre que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

Forma trigonométrica

Questão D.5. Transforme para a forma trigonométrica:

a. $1 + \sqrt{3}i$

b. $3 + \sqrt{3}i$

c. $2 + 2i$

d. $2\sqrt{3} - 6i$

Questão D.6. Transforme para a forma usual $a + bi$:

a. $(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$

b. $2(\cos \frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$

c. $-3(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$

Fórmulas de Moivre

Questão D.7. Mostre a 1ª Fórmula de Moivre por indução.

Questão D.8. Use a questão 1 da subseção anterior para ajudá-lo e calcule:

- a. $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$
- b. $(3 + \sqrt{3}i)^6$
- c. $(2 + 2i)^8$
- d. $(2\sqrt{3} - 6i)^6$

Você seria capaz de realizar estas contas sem a ajuda da forma trigonométrica?

Questão D.9. Resolva as equações a seguir calculando todas as raízes:

- a. $z^3 = -i$
- b. $z^4 = -16$
- c. $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Questão D.10. Calcule uma fórmula para:

$$\sin(3\theta) \quad \cos(4\theta) \quad \sin(n\theta) \quad \cos(n\theta)$$

em termos de $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Faça esta questão calculando z^n de duas formas, uma explicitamente, outra usando fórmulas de deMoivre.

Questão D.11. Determine uma fórmula para as somas:

$$S_1 = \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(n\alpha)$$

$$S_2 = \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) + \dots + \sin(n\alpha)$$

Dica: Considere $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ e calcule a soma

$$z + z^2 + \dots + z^n$$

Questão D.12. Aplique a questão anterior e resolva a seguinte equação:

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$

determinando todos os valores reais que a satisfazem.

D.2 Funções complexas e a derivada

A abordagem geométrica nos permitirá nos referirmos ao conjunto dos números complexos como ao plano complexo, da mesma forma como nos referíamos aos reais como à reta real. Neste espírito, a distância entre dois números complexos está bem definida, e identificando z e w com vetores do plano, a definição de distância é exatamente a mesma da geometria analítica:

$$d(z, w) = |z - w|$$

Faz sentido também falar de aproximação e conseqüentemente de limite, pois para que as definições usuais de limite façam sentido, só é necessário existir uma maneira de medir distâncias no espaço em questão. Assim como é feito com funções de números reais, podemos definir a derivada complexa da mesma forma com o quociente de Newton, uma vez que é possível dividir em \mathcal{C} . Note que o mesmo não poderia ser considerado se estivéssemos *somente* em \mathbb{R}^2 .

Seja então $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ uma função que manda números complexos em números complexos. Será usual representar esta função da seguinte forma:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

desde que z esteja convenientemente representado por $x + iy$.

Exemplo D.1. A função $f(z) = z^2$ é tal que $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$, pois $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$.

Exemplo D.2. Considere $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$. Se aplicarmos esta função em números complexos de módulo 1, ou seja, números da forma $z = \cos \theta + i \sin \theta$, teremos que:

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos \theta)^3 - 3(\cos \theta)(\sin \theta)^2 + i(3(\cos \theta)^2(\sin \theta) - (\sin \theta)^3)$$

que fornece uma forma de calcularmos fórmulas para $\cos(n\theta)$ e $\sin(n\theta)$ em geral.

O leitor deve observar que ainda não temos condições de definir coisas do tipo e^z , $\sin(z)$ ou qualquer outra função elementar não polinomial, pois coisas do tipo e^i e $\sin(i)$ ainda não estão definidas. Esse será o objetivo da próxima seção.

D.2.1 Derivada complexa

Sem mais delongas, vamos introduzir a derivada complexa. Se o limite

$$L = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existir, diremos que f é diferenciável no ponto z_0 e que L é a sua derivada. Nesta expressão, há algo que precisa de um esclarecimento. Quando escrevemos $z \rightarrow z_0$, esta expressão faz sentido do ponto de vista analítico, uma vez que a distância está definida no plano complexo. Contudo, abordando geometricamente, tal fato pode ocorrer de infinitas maneiras, posto que existem infinitas direções definidas em torno de z_0 pelas quais z pode se aproximar. Lembre-se que em \mathbb{R} tal fenômeno não ocorria: tínhamos essencialmente duas maneiras de se aproximar - pela direita e pela esquerda. Vamos analisar em termos matemáticos.

Analicamente, teremos que L existe se:

Dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon$$

Certamente tudo aí está bem definido e faz sentido.

Exemplo D.3. Se $f(z) = z^2$, então $f'(z) = 2z$.

Exemplo D.4. Em geral, para todas as funções polinomiais ou racionais, a derivada complexa se comporta exatamente como a derivada real.

D.2.2 Equações de Cauchy-Riemann

Geometricamente, vamos considerar o que ocorre quando $z = x + iy$ se aproxima de $z_0 = x_0 + iy_0$ através das retas $z_0 + t$ e $z_0 + it$. A primeira é a reta horizontal passando por z_0 , então teremos que $z - z_0 = \Delta x$ será um número real. Representando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{(z_0 + \Delta x) - z_0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} = \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{iv(x_0 + \Delta x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

A segunda é a reta vertical passando por z_0 , então teremos que $z - z_0 = i\Delta y$ será um número imaginário. Representando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{(z_0 + i\Delta y) - z_0} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y} = \\ &= \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right) + \left(\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{iv(x_0, y_0 + \Delta y) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias das duas maneiras de expressar $f'(z)$, obteremos as equações de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Vamos abreviar a notação: $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, e assim por diante.

A discussão até agora nos permitiu garantir que, uma vez que a função seja diferenciável, é necessário que tais igualdades ocorram. O inverso também é verdade, sendo apenas necessário exigir a continuidade dos termos envolvidos. Enunciamos então o teorema desta seção:

Teorema D.1. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função contínua em um conjunto A . Se f é diferenciável em A , então as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para f . Por outro lado, se existirem as derivadas parciais de u e v com respeito a x e y , se forem contínuas e se satisfizerem as equações de Cauchy-Riemann, então a função f será diferenciável, e sua derivada será dada por:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Demonstração. Do teorema acima, já mostramos que uma função diferenciável satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Vamos mostrar o oposto apenas a título de completude. Por hipótese, vale que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} u(x + h, y + k) - u(x, y + k) &= \lim_{h \rightarrow 0} u_x \cdot h \\ \lim_{k \rightarrow 0} u(x, y + k) - u(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} u_y \cdot k \end{aligned}$$

Somando ambas, teremos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} u(x + h, y + k) - u(x, y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} u_x \cdot h + u_y \cdot k$$

Fazendo o mesmo para $v(x, y)$, obteremos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} v(x+h, y+k) - v(x, y) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} v_x \cdot h + v_y \cdot k$$

Multiplicando esta última equação por i , e somando, teremos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)] - [u(x, y) + iv(x, y)] = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (u_x + iv_x)h + (u_y + iv_y)k$$

Aplicando as equações de Cauchy-Riemann, trocando u_y por $-v_x$ e v_y por u_x , teremos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(z+h+ik) - f(z) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (u_x + iv_x)(h+ik)$$

Logo:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = f'(z) = u_x + iv_x$$

Também poderíamos ter obtido $f'(z) = -iu_y + v_y$. Isso conclui a demonstração. \square

Uma função de variável complexa que seja diferenciável é chamada de *analítica*. Observe as aplicações a seguir. Lembramos sempre que $z = x + iy$.

Exemplo D.5. A função $f(z) = x^2 - ixy$ não é analítica, uma vez que $u_x = 2x$ e $v_y = x$.

Exemplo D.6. A função $f(z) = 4xy + i(2y^2 - 2x^2)$ é analítica, pois satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

Exemplo D.7. Dada a função $u(x, y) = 3x^2y$, existe uma $v(x, y)$ tal que $f(z) = u + iv$ seja analítica? Não. Basta observar que $u_x = 6xy \Rightarrow v(x, y) = \int 6xy \, dy = 3xy^2 + g(y)$. Mas $u_y = 3x^2$ e $v_x = 3y^2$. Um absurdo.

Exemplo D.8. Dada a função $v(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, existe alguma $u(x, y)$ tal que $f = u + iv$ é analítica? De fato, existe! Note que $v_y = \frac{2(x^3-3xy^2)}{(x^2+y^2)^3}$. Daí, pelas equações de Cauchy-Riemann, fazemos:

$$u = \int \frac{2(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^3} \, dx = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Basta observar agora que $u(x, y)$ definido desta forma satisfaz as equações de Cauchy-Riemann juntamente com o $v(x, y)$ dado.

Exemplo D.9. Um função analítica de módulo constante é uma função constante. Com efeito, temos que $|f(z)| = u^2 + v^2 = \text{cte}$. Derivando a equação com respeito a x e a y obteremos:

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases}$$

Obviamente se algum dos termos for zero, o problema torna-se trivial aplicando Cauchy-Riemann. Suponhamos que não sejam. A segunda equação então torna-se

$$u = \frac{-vv_y}{u_y}$$

Substituindo na primeira e cancelando o v , teremos:

$$\frac{-v_y u_x}{u_y} + v_x = 0 \Rightarrow u_x^2 + v_x^2 = 0 \Rightarrow |f'(z)| = 0$$

Logo $f'(z) = 0$, logo $f(z)$ é constante.

D.3 Séries de potências complexas

Nesta seção, vamos introduzir as séries de números complexos, em especial as séries de potências. Como o módulo $|z|$ de um número complexo z é um número real positivo, todos os critérios vistos para séries de números reais positivos valerão para séries do tipo:

$$\sum |a_k|$$

Onde os a_k são números complexos. Em particular, vale que:

CrITÉRIO D.1 (do Termo geral - revisitado). Se uma série $\sum a_k$ é convergente, então $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Equivalentemente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$, então a série é divergente. \square

CrITÉRIO D.2 (da Razão - revisitado). Consideremos a série $\sum |a_k|$ de termos positivos, $a_k \in \mathcal{C}$. Suponhamos que o limite L abaixo exista:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

Nestas condições:

- (a) Se $L < 1$, então $\sum |a_k|$ converge.
- (b) Se $L > 1$, então $\sum |a_k|$ diverge.
- (c) Se $L = 1$, então nada podemos afirmar sobre a série.

\square

Lembramos também que:

Proposição D.4 (Revisitada). Se a série $\sum |a_k|$ converge, então também converge a série $\sum a_k$.

D.3.1 Séries de potências

Definimos exatamente como fizemos antes uma série de potências, só que desta vez com coeficientes, e centrada em, complexos.

Definição D.1. Uma série do tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$$

é chamada série de potências complexas de coeficientes a_k e centrada em z_0 .

Exemplo D.10. A série $\sum i^k \cdot (z - i)^k$ é uma série de potências complexas, de coeficientes $a_k = i^k$ e centro em i . Se $|z - i| < 1$, certamente tal série irá convergir, e ainda absolutamente, uma vez que:

$$|i^k \cdot (z - i)^k| = |z - i|^k$$

que coincide com a série geométrica de razão $|z - i| < 1$. Por outro lado, se $z = 0$, a série não vai convergir, pois o limite do termo geral será:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} i^k \cdot (0 - i)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} 1^k = 1 \neq 0$$

Relembramos ao leitor o teorema do raio de convergência. Ele foi apresentado para séries de números reais, mas se generaliza facilmente a partir das idéias apresentadas acima para números complexos. Fica como um exercício importante reproduzir a demonstração para este caso. Será necessário usar fortemente o módulo para aplicar as propriedades dos números reais nos números complexos.

Vamos denotar por $D(a, r)$ o disco aberto de centro a e raio r . Ou seja

$$D(a, R) = \{z \in \mathcal{C} : |z - a| < r\}$$

Equivalentemente, $D[a, r]$ será o disco fechado, ou seja:

$$D[a, r] = \{z \in \mathcal{C} : |z - a| \leq r\}$$

Teorema D.2. Suponha que $\sum a_k(z - z_0)^k$ seja convergente para $z = t$, $t \neq z_0$. Seja $r = |t - z_0|$. Então a série $\sum a_k(z - z_0)^k$ convergirá absolutamente para todo z em $D(a, r)$.

Desta forma, ocorre exatamente uma das seguintes:

- i $\sum a_k(z - z_0)^k$ converge apenas se $z = z_0$.
- ii $\sum a_k(z - z_0)^k$ converge para todo $z \in \mathcal{C}$.
- iii Existe um $R > 0$ tal que $\sum a_k(z - z_0)^k$ converge para todo $z \in D(a, R)$ e diverge para todo $z \notin D[a, R]$.

Observe que a proposição nada fala sobre o que ocorre na fronteira do disco, ou seja, quando $z \in \mathcal{C}$ for tal que $|z - a| = R$. Tal R será chamado raio de convergência da série.

Não obstante,

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

desde que este limite exista. E mais, desde que o limite exista, o raio também pode ser expresso por:

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

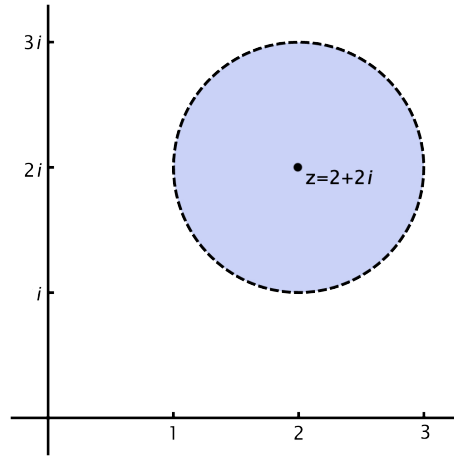
Exemplo D.11. O raio de convergência da série de potências

$$\sum \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^k [z - (2+2i)]^k$$

é dado por:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^k}{\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1+i}{1-i} \right| = |i| = 1$$

Significa que para todo z tal que $|z - (2+2i)| < 1$, a série irá convergir.



Observe que se $|z - (2 + 2i)| = 1$, então $z = 2 + 2i + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ para algum valor de θ . Logo

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^k [z - (2 + 2i)]^k = [-i(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^k$$

que pertence ao círculo unitário para todo valor de k e qualquer escolha de θ . Logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^k [z - (2 + 2i)]^k \neq 0$$

para todo z , portanto a série não converge para nenhum valor na borda do seu disco de convergência.

A derivação das séries de potências também ocorre termo a termo, pois vimos que a derivada de um polinômio em z se comporta da mesma forma que a derivada real. E por este mesmo motivo, é sempre possível obter primitivas, fazendo uma espécie de integração indefinida termo a termo.

Exemplo D.12. Ache uma série de potências cuja derivada seja:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^k$$

Basta notarmos que:

$$a_k k z^{k-1} = k \cdot z^k \Rightarrow a_k = \frac{k}{k+1} z$$

Logo nossa série será:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} \cdot z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k} \cdot z^k$$

D.3.2 Série de Taylor

O leitor deve se lembrar que obtivemos a expansão de uma função qualquer $f(x)$ em série de Taylor...

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

... após integrar sucessivas vezes a função, aplicando a integração por partes. Tal procedimento nos forneceu uma demonstração, mas, ainda mais, nos forneceu uma motivação construtiva de como a série de Taylor aparece.

Infelizmente a derivada e a integral perdem um pouco da forte sintonia que possuem em funções com mais de uma variável real, como é o caso das funções complexas. Com efeito, Teorema Fundamental do Cálculo só é estabelecido para funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O melhor que se pode obter é fazendo uso de integrais de linha em \mathcal{C} através do Teorema de Cauchy, mas este estudo fugiria do escopo deste texto.

Neste espírito, simplesmente introduzimos a expansão em série de Taylor de uma função complexa:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

O leitor observa que essencialmente não há qualquer diferença em relação as funções reais no formato da expansão. Por outro lado, um fato único e extremamente importante dos números complexos é que toda função diferenciável pode ser representada em séries de Taylor. Ou seja, toda função diferenciável é infinitamente diferenciável, daí o motivo pelo qual utilizamos o termo analítico em dois sentidos aparentemente distintos.

Exemplo D.13. A expansão em série de Taylor de um polinômio é o próprio polinômio.

Com o objetivo de definir as funções $e^z, \sin(z), \cos(z)$ tomando $z \in \mathcal{C}$ a partir de suas séries de potências, vamos discutir como, mesmo sem saber expressões para tais funções, será possível obter a derivada delas no ponto $z = 0$.

Certamente, é imprescindível que as definições destas funções não conflitem com as definições nos reais, uma vez $\mathbb{R} \subset \mathcal{C}$. Apenas esta exigência será suficiente, pois vimos, quando trabalhamos as equações de Cauchy-Riemann, que a derivada de uma função pode ser obtida calculando-a somente numa direção. Escolhendo a direção da reta real, temos que:

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

Para calcular no ponto 0, ou seja, com $x = 0$ e $y = 0$, observe que faremos a derivada de $u(x, 0)$ e a de $v(x, 0)$ com respeito a x . Mas $f(x + i \cdot 0) = f(x)$ é uma função real, logo:

$$f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0) \Rightarrow v(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow f(x) = u(x, 0)$$

Logo teremos $v_x|_0 = 0$ e $u_x|_0 = f'(x)|_0$. Seguindo com este argumento, teremos que, em geral, vale:

$$f^{(k)}(z)|_0 = f^{(k)}(x)|_0$$

Exemplo D.14. Com as considerações vistas acima, teremos que se $f(z) = e^z$, então $f'(z)|_0 = f'(x)|_0 = \frac{d}{dx}|_0 e^x = e^x|_0 = e^0 = 1$. Em geral, teremos que: $f^{(k)}(z)|_0 = 1$. Neste sentido, a expansão em série de potências de $f(z) = e^z$ em torno de $z_0 = 0$ será:

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

E mais, esta série converge para todo valor de z complexo. □

O leitor já deve ter notado que, para calcular a série de Taylor de qualquer função complexa em torno de $z_0 = 0$ basta calcularmos a série da função real correspondente, apenas tomando cuidado de trocar as potências em x por potências em z .

D.3.3 Fórmula para as funções

Nosso objetivo será explicitar fórmulas para $e^z, \cos(z), \operatorname{sen}(z)$. Começemos com a função exponencial.

Um número complexo $z = x + iy$ localizado no expoente nos permitirá decompor a potência em um produto, ou seja:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

Certamente e^x já está bem definido. Vamos então olhar para e^{iy} . Em série de Taylor, teremos:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \frac{iy^9}{9!} \dots$$

Colocando i em evidência e separando os termos, o que não altera o valor da série pois ela é absolutamente convergente, teremos a seguinte situação:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} \dots\right)$$

O leitor deve então se lembrar que cada uma das séries entre os parênteses são séries de Taylor de funções conhecidas. Exatamente das funções seno e cosseno! Então enunciamos o principal resultado desta seção:

Teorema D.3 (Fórmula de Euler).

$$e^z = e^{x+iy} = e^x [\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)]$$

□

Observe que fazendo a expansão para e^{-iy} , teríamos obtido sinais trocados na série de Taylor para os termos com i , ou seja, teremos $-\operatorname{sen}(y)$ ao invés de $\operatorname{sen}(y)$. Logo:

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x [\cos(y) - i \operatorname{sen}(y)] = \overline{e^z}$$

Com a fórmula de Euler, podemos definir o logaritmo complexo, ou seja, a inversa da exponencial complexa. Note que se $e^z = w$, então $z = \log w$. Escrevendo w na forma polar, teremos que:

$$e^z = e^x [\cos(y) + i \operatorname{sen}(y)] = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Logo $|w| = e^x \Rightarrow x = \log(|w|)$, e que $y = \theta = \arg w$. Desta forma, temos que:

$$\log w = z = x + iy = \log(|w|) + i \arg w$$

Convencionaremos sempre escolher o argumento no conjunto $(-\pi, \pi]$.

Note que obtivemos a fórmula de Euler ao expandirmos e^{iy} , y real, em séries de Taylor. Poderíamos ter feito a mesma coisa para e^{iz} , $z \in \mathcal{C}$, já que a série de Taylor é essencialmente a mesma. Teríamos então:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \operatorname{sen}(z)$$

Equivalentemente, fazendo a expansão para e^{-iz} , teríamos:

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \operatorname{sen}(z)$$

Somando as duas, temos que:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e subtraindo a segunda da primeira, teremos:

$$\boxed{\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Com todas essas informações, seremos capazes de calcular coisas do tipo:

Exemplo D.15. A relação de Euler:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi) = -1$$

Logo:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Exemplo D.16. Vamos ver algo mais exótico.

$$i^i = e^{(\log i) \cdot i}$$

Mas $\log i = \log|i| + i \cdot \arg i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$. Logo:

$$i^i = e^{i \cdot (i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Exemplo D.17. Sem surpresas, verificamos coisas que já sabíamos ser verdadeiras:

$$i^2 = e^{2 \log i} = e^{2i\frac{\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

como era de se esperar.

Exemplo D.18.

$$(1-i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1-i)}$$

Observe que $\log(1-i) = \log|1-i| + i \arg(1-i) = \log\sqrt{2} + i\frac{-\pi}{4}$. Daí:

$$e^{(1+i)(\log\sqrt{2} + i\frac{-\pi}{4})} = e^{(\log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i(\log\sqrt{2} + \frac{-\pi}{4})}$$

Finalmente:

$$(1-i)^{1+i} = e^{\log\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}} \left[\cos\left(\log\sqrt{2} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\log\sqrt{2} + \frac{-\pi}{4}\right) \right]$$

Exemplo D.19.

$$\cos(i) = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

Exemplo D.20.

$$\operatorname{sen}(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{i \cdot e}{2} - \frac{i}{2e}$$

D.4 Exercícios

Questão D.13. Decida se as funções abaixo são analíticas (considerando $z = x + iy$):

$$f(z) = e^x + iy^2 \quad g(z) = 4x - i6y \quad h(z) = e^{2x} - i\operatorname{sen}(x)$$

Questão D.14. Dada a $u(x, y)$, determine $v(x, y)$ tal que a função seja analítica:

$$u(x, y) = 2x(1 - y) \quad u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$$

Questão D.15. Mostre que se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica, então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ ou ainda } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Funções que satisfazem tal igualdade são classificadas como harmônicas.

Questão D.16. Utilizando a fórmula de Euler, mostre que $e^{z+w} = e^z e^w$ e que $(e^z)^w = e^{zw}$.

Questão D.17. Calcule:

$$\begin{array}{cccc} e^i & i^{-i} & (1-i)^{2i} & \\ \operatorname{sen}(i) & \cos(2i) & \operatorname{sen}(\pi i) & \cos(\pi + i) \end{array}$$

Questão D.18. Verifique que se $f(z) = e^z$, então $f'(z) = e^z$. Faça este exercício de duas maneiras distintas:

1. Utilizando o fato que $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ e fazendo a derivada termo a termo dos monômios em z .
2. Utilizando a fórmula de Euler, usando o fato que $f'(z) = u_x + iv_x$.

Questão D.19. Utilizando as fórmulas obtidas para seno e cosseno complexos, mostre que:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen}(z) = \cos(z) \text{ e } \frac{d}{dz} \cos(z) = -\operatorname{sen}(z)$$

Questão D.20. Utilizando as fórmulas obtidas para seno e cosseno complexos, mostre que:

$$\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$$

Questão D.21. Determine uma expressão para $\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$.

Questão D.22. Utilizando as fórmulas obtidas para seno e cosseno complexos, mostre que:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) \text{ e } \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

Questão D.23. Resolva as equações a seguir:

$$e^z = 1 + i \quad e^z = -3i$$

Apêndice E

Uma breve introdução às Séries de Fourier e uma aplicação notável

Neste apêndice, vamos introduzir brevemente as Séries de Fourier, que serão assunto do curso de Cálculo 4. Vamos aproveitar a oportunidade para calcular a soma da série dos inversos dos quadrados, e sugerir como o mesmo raciocínio poderia ser aplicado para outros expoentes pares.

E.1 Séries de Fourier

Em linhas gerais e sem nenhum detalhe (entenda-se, passando por cima de questões de convergência):

Suponha que, no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$, a série a seguir convirja para a função $f(x)$, ou seja:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (\text{E.1})$$

Mostramos os seguintes fatos:

Proposição E.1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

Demonstração. De fato, observe que podemos integrar dos dois lados de E.1:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx \right)$$

Mas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx = 0$$

sempre que $n \geq 1$. Daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dx$$

Ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

□

Proposição E.2. Para todo $n \geq 1$, vale que:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$$

Demonstração. Multiplicaremos os dois lados de E.1 por $\cos(kx)$, onde k é um natural fixo. Novamente integramos termo a termo, e teremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) \, dx \right)$$

Agora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) \, dx = 0$$

e também:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) \, dx = 0$$

pois trata-se de uma função ímpar. Agora, se $n = k$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2kx) \, dx = \pi$$

E se $n \neq k$, teremos, pela fórmula do produto para funções trigonométricas:

$$\cos(nx) \cos(kx) = \frac{1}{2} (\cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x])$$

E portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx = 0$$

A conclusão é que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx = a_k \cdot \pi$$

Donde concluímos o que queríamos. □

Proposição E.3. Para todo $n \geq 1$, vale que:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx$$

Demonstração. Será essencialmente a mesma coisa! Multiplicaremos os dois lados de E.1 por $\sin(kx)$, onde k é um natural fixo. Novamente integramos termo a termo, e teremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx \right)$$

Agora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) \, dx = 0$$

e também:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) \, dx = 0$$

pois trata-se de uma função ímpar. Agora, se $n = k$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2kx) \, dx = \pi$$

E se $n \neq k$, teremos, pela fórmula do produto para funções trigonométricas:

$$\sin(nx) \sin(kx) = -\frac{1}{2} (\cos[(n+k)x] - \cos[(n-k)x])$$

E portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx = 0$$

A conclusão é que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx = b_k \cdot \pi$$

Donde concluímos o que queríamos. □

Dessa forma, se quisermos expressar uma função $f(x)$ no formato:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

bastará que definamos os coeficientes a_0 , a_n e b_n como nas proposições acima. A série definida desta forma é chamada de *série de Fourier* da função $f(x)$, e os termos a_i e b_i são os *coeficientes de Fourier*.

E.2 Identidade de Parseval

Teorema E.1 (Identidade de Parseval).

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Demonstração. Considere a expansão de $f(x)$ em série de Fourier. Considere então $f(x)^2$. Basicamente, teremos a seguinte situação:

$$f(x)^2 = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) + b_n \sin(nx) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right) \end{aligned}$$

Vamos integrar dos dois lados. Do lado esquerdo, teremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

E do lado direito, teremos:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} \, dx = \frac{a_0^2}{2} \pi$$

$$(2) \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \, dx \right) = 0, \text{ pois todos os termos serão } 0.$$

Para n fixo:

$$(3) a_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) \, dx \right) \text{ Já vimos que todos os termos que aparecem serão } 0, \text{ a menos que } k = n, \text{ e neste caso:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)^2 \, dx = \pi$$

Mas este termo é precedido do coeficiente a_n e do coeficiente a_k com $k = n$, ou seja, precedido por a_n^2 .

$$(4) b_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx \right) \text{ Novamente serão } 0, \text{ a menos que } k = n, \text{ e neste caso:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)^2 \, dx = \pi$$

Mas este termo é precedido do coeficiente b_n e do coeficiente b_k com $k = n$, ou seja, precedido por b_n^2 .

Resumindo tudo, e voltando a considerar o somatório em n , teremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \pi + b_n^2 \pi)$$

conforme queríamos. □

E.3 Aplicação para o cálculo da soma dos inversos de potências pares

E.3.1 Expoente igual a 2

Consideramos a função:

$$f(x) = \frac{-x}{\pi}$$

Vamos calcular os coeficientes de Fourier desta função. Então:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x}{\pi} \, dx = 0$$

pois a função é ímpar. Pelo mesmo motivo, teremos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x}{\pi} \cos(\pi x) \, dx = 0$$

Mas teremos:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x}{\pi} \sin(\pi x) \, dx = \frac{\pm 2}{n\pi}$$

a depender: positivo se n par, negativo se n ímpar.

Pela identidade de Parseval, teremos finalmente que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-x}{\pi} \right)^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pm 2}{n\pi} \right)^2$$

Ou seja:

$$\frac{2\pi^3}{3\pi^3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

E.3.2 Expoente igual 4

Infelizmente as coisas vão ficando complicadas, e certamente esta não é a melhor maneira para continuar com isso. Mas observe o que faremos.

A intuição nos diria para usar a função

$$f(x) = \left(\frac{-x}{\pi} \right)^3$$

Esta função continua sendo ímpar, e portanto os coeficientes a_i s serão 0. O coeficiente b_n , entretanto, poderá ser calculado.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x^3}{\pi^3} \sin(\pi x) \, dx = \pm \frac{2n\pi (-6 + n^2\pi^2)}{n^4\pi^4}$$

O sinal a depender novamente da paridade do n . Mas então:

$$b_n^2 = \frac{144}{n^6\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^4} + \frac{4}{n^2\pi^2}$$

Que infelizmente não nos seria útil, pois já contém termos com $1/n^6$.

Nossa idéia portanto poderá ser a de utilizar outras funções, ímpares, com o objetivo de fazer aparecer também termos com $1/n^6$, para podermos cancelar... Vamos tentar:

$$f(x) = \frac{-x - x^3}{\pi^3}$$

Esta função continua sendo ímpar, e portanto os coeficientes a_i s serão 0. O coeficiente b_n , entretanto, poderá ser calculado.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x - x^3}{\pi^3} \sin(\pi x) \, dx = \pm \frac{2n\pi (-6 + n^2(1 + \pi^2))}{n^4\pi^4}$$

O sinal a depender novamente da paridade do n . Mas então:

$$b_n^2 = \frac{144}{n^6\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^6} + \frac{4}{n^2\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^4} + \frac{8}{n^2\pi^4} + \frac{4}{n^2\pi^2}$$

Com essas duas, teremos, por um lado:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-x^3}{\pi^3} \right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{144}{n^6\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^4} + \frac{4}{n^2\pi^2} \right)$$

E por outro lado:

$$\frac{2}{7} + \frac{2}{3\pi^4} + \frac{4}{5\pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-x - x^3}{\pi^3} \right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{144}{n^6\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^6} + \frac{4}{n^2\pi^6} - \frac{48}{n^4\pi^4} + \frac{8}{n^2\pi^4} + \frac{4}{n^2\pi^2} \right)$$

Subtraindo a de cima da de baixo, teremos finalmente:

$$\frac{2}{3\pi^4} + \frac{4}{5\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{48}{n^4\pi^6} + \frac{4}{n^2\pi^6} + \frac{8}{n^2\pi^4} \right)$$

Utilizando o que fizemos anteriormente, teremos:

$$\frac{2}{3\pi^4} + \frac{4}{5\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{48}{n^4\pi^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^4} = \frac{-48}{\pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{4}{\pi^6} \frac{\pi^2}{6} + \frac{8}{\pi^4} \frac{\pi^2}{6}$$

E portanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^6}{-48} \left(\frac{2}{3\pi^4} + \frac{4}{5\pi^2} - \frac{4}{\pi^6} \frac{\pi^2}{6} - \frac{8}{\pi^4} \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^4}{90}$$

E.3.3 Expoente par qualquer

Certamente é possível resolver qualquer situação repetindo as idéias até então mencionadas. Obviamente esta não é a maneira mais elegante, e tampouco foi a solução original de Euler. Na solução original, que não envolvia séries de Fourier, Euler utiliza uma expansão para

$$\pi \cot(\pi x)$$

Obtendo a fórmula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

Onde os B_{2k} são definidos recursivamente por:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

e são chamados de *números de Bernoulli*. Por exemplo:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_5 = 0 \quad \dots$$

E.3.4 Dificuldade para expoente ímpar

Observe que utilizando a identidade de Parseval, é simplesmente impossível obter a solução para qualquer expoente ímpar, uma vez que no lado direito sempre aparecerá o quadrado do coeficiente de Fourier. A fórmula de Euler tampouco nos fornece uma solução, pois os números de Bernoulli são todos nulos para k ímpar.

Ocorre no fim das contas que nem é conhecida solução para a soma com expoentes ímpares em termos de constantes conhecidas ou funções elementares.

Parte IV

Gabaritos

Capítulo 9

Curvas parametrizadas

9.1 Introdução

Exemplo 9.1. Este exemplo é um exercício. Qual uma curva parametrizada que representa a interseção entre o parabolóide $y = x^2 + z^2$ com o plano $x = z$??

(1) Encare estas variáveis como as funções $x(t), y(t), z(t)$. (2) O que você pode dizer facilmente sobre $x(t)$ e $z(t)$? (3) Arbitrariamente, decida que alguma destas funções será simplesmente $= t$. Quais parecem uma boa escolha? (4) Substitua na expressão para $y(t)$.

Você seria capaz de desenhar esta curva? Tendo chamado $x(t)$ de t^2 , teríamos obtido a mesma curva? E se fosse t^3 ? □

Resposta. A curva é $(t, 2t^2, t)$. Chamando de t^2 haveria um problema pois a primeira e a terceira coordenada nunca poderiam ser negativas. Com t^3 não haveria problema.

9.2 A derivada de uma curva

Exemplo 9.2. Este exemplo é um exercício. Consideremos a hélice no \mathbb{R}^3 :

$$\beta(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2) \text{ com } t \in [0, 2\pi]$$

Qual o vetor tangente a curva em $t = \pi$? Qual a função que determina a velocidade do ponto percorrendo a curva? Qual a velocidade do ponto em $t = 2\pi$?

(1) Faça a derivada da curva. (2) Substitua $t = \pi$ para saber o vetor tangente. (3) Calcule a norma do vetor derivada - esta será a função que dará a velocidade. (4) Substitua $t = 2\pi$. □

Resposta. $\beta' = (-\sin(t), \cos(t), 2t)$. $\beta'(\pi) = (0, -1, 2\pi)$. $v(t) = \|\beta'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$. $v(2\pi) = \sqrt{1 + 16\pi^2}$

9.2.1 Reparametrização

Exemplo 9.3. Este exemplo é um exercício. Considere a parametrização do trecho de parábola:

$$\alpha(t) = (t, t^2), \text{ com } t \in [-2, 2]$$

E a reparametrização do mesmo trecho:

$$\beta(s) = (-4s, 16s^2)$$

Determine φ (incluindo os intervalos) e decida se houve alteração no sentido.

(1) Em quem o parâmetro t foi mandado? (2) Qual a derivada desta função? (3) Para que a imagem fique entre -2 e 2 , o domínio tem que ser qual intervalo? (4) Qual o sinal da derivada? \square

Resposta. (1) $t \mapsto^\varphi -4t$ (2) $\varphi' = -4$ (3) $[-1/2, 1/2]$ (4) negativo!

9.3 O comprimento de uma curva

Exemplo 9.4. Este exemplo é um exercício.

Exiba uma integral que determina perímetro da elipse que passa pelos pontos $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ e $(0, -1)$.

(1) Que tal desenhar a elipse? (2) Qual a equação cartesiana que esta elipse satisfaz? Comece determinando o a e o b e lembre-se que a equação é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (3) Qual o conjunto de todos os pontos que satisfazem uma soma de quadrados igual a 1? Isso mesmo, chame $\frac{x(t)}{a} = \cos(t)$ e $\frac{y(t)}{b} = \sin(t)$. (4) Escreva a parametrização. Qual é o intervalo? O mesmo de sempre, afinal estamos dando uma volta. (5) Calcule a derivada da parametrização. (6) Calcule a função da velocidade. (7) Exiba a integral. Você seria capaz de calcular esta integral? \square

Resposta. (2) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$ (4) $\alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ (5) $\alpha' = (-2\sin, \cos)$ (6) $v(t) = \sqrt{1 + 3\sin(t)^2}$ (7) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin(t)^2} dt$

9.4 Exercícios

Questão 9.1. Parametrize os segmentos ligando os pares de pontos a seguir.

(a) $(0, 1)$ e $(1, 2)$ (b) $(1, 2, 3)$ e $(4, 1, 7)$ (c) $(0, 0, 0)$ e $(-1, 3, 8)$

Dica: O segmento ligando os pontos P e Q é dado por $\alpha(t) = P + t(Q - P)$ com t variando em algum intervalo (qual?!).

Resposta. O intervalo em todos é o $[0, 1]$

a) $\alpha(t) = (t, 1 + t)$

b) $\alpha(t) = (1 + 3t, 2 - t, 3 + 4t)$

c) $\alpha(t) = (-t, 3t, 8t)$

Questão 9.2. Parametrize as curvas descritas abaixo.

(a) As duas curvas da interseção entre o cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o plano $x = 1$.

(b) Interseção entre a superfície $z^3 = x^2 + y^2$ e o plano $x = y + 1$.

(c) Interseção do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (desenho da bola de tênis). Dica: lembre-se das coordenadas esféricas....

Resposta.

- a) São duas curvas $(1, t, \pm\sqrt{1+t^2})$
- b) $(t, t-1, \sqrt[3]{2t^2-2t+1})$
- c) Não se lembre de nada.. A dica está furada. Melhor trocar y^2 por $x^2 - z$ na equação da esfera e completar quadrados. Depois chamar cada parcela de cos e sen. No final, serão necessário duas parametrizações distintas.

Questão 9.3. Um disco circular de raio 1 no plano xy localizado sobre o ponto $(0, 0)$ no instante $t = 0$ gira sem escorregar para a direita. Parametrize a curva descrita pelo ponto do disco localizado sobre $(0, 0)$ a medida que o disco gira (esta curva chama-se *ciclóide*). Dicas: (1) Faça um desenho (2) Lembre-se que os movimentos horizontal e vertical são independentes.

Resposta. $(\cos(\frac{3\pi}{2} - t) + t, 1 + \sin(\frac{3\pi}{2} - t))$

Questão 9.4. (1) Ache a derivada das curvas parametrizadas a seguir.

$$(a) \alpha(t) = (t, t^2) \quad (b) \beta(t) = (\cos(t), e^t - 1, t^2) \quad (c) \gamma(t) = (t^3, \sin(t) + 1, 1)$$

onde $t \in [-1, 1]$. (2) Determine os vetores tangentes a cada uma dessas curvas quando $t = 1$. (3) Alguma destas parametrizações não é regular?

Resposta.

$$c) \gamma' = 3t^2, \cos(t), 0$$

Nenhuma é regular.

Questão 9.5. Ache uma parametrização da reta tangente à curva $\beta(t) = (1 + 2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t)$ no ponto $(3, 0, 2)$.

Resposta. $\beta(1) = (3, 0, 2)$. A tangente será dada por $(3, 0, 2) + s\beta'(1)$.

Questão 9.6. Considere que uma partícula se move através da hipérbole seguindo a parametrização convencional $(t, \sqrt{t^2 - 1})$. Determine a velocidade desta partícula no instante t .

Resposta. $v(t) = \|(1, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}})\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{t^2-1}} = \sqrt{\frac{2t^2-1}{t^2-1}}$

Questão 9.7. Considere a curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos(t), \cos^2(t))$ com $t \in [0, \pi]$. (a) Esta parametrização é regular? (b) Existe um bico? (c) Que curva é esta? (d) Esta curva é regular? (e) Caso positivo, exiba uma parametrização regular desta curva. (f) Qual a função φ usada para reparametrizar?

Resposta. (a) Não é: $\alpha'(t) = (-\sin(t), -2\sin(t)\cos(t)) \Rightarrow \alpha'(\pi/2) = (0, 0)$. (b) Não existe: se $\cos(t) = x(t)$ e $\cos^2(t) = y(t)$, então $y = x^2$. Logo $dy/dx = 2x$, que está bem definido em todo domínio. (c) Parábola! (d) Sim! (e) (t, t^2) . (f) \arccos !

Questão 9.8. Demonstre que a reta tangente à circunferência é sempre ortogonal ao raio. Dica: A fórmula para a derivada do produto (escalar, no caso de vetores) também vale para curvas! A propósito, demonstre este fato também.

Resposta. Seja $\gamma(t)$ ponto na circunferência - interpretado como vetor (raio). Queremos mostrar que $\gamma'(t)$, que determina a direção da tangente, é ortogonal a $\gamma(t)$. Note que:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \equiv R^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 0$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$$

Daí

$$\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$$

logo ortogonais.

Questão 9.9. Calcule o comprimento das curvas a seguir.

$$(a) \alpha(t) = (2t, t^2, \frac{1}{3}t^3) \quad (b) \beta(t) = (1, t^2, t^3) \quad (c) \gamma(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$$

Todas com $t \in [0, 1]$.

Resposta.

b) $\beta'(t) = (0, 2t, 3t^2)$ $\|\beta'\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$ Usando mudança de variáveis, teremos que:

$$\int t\sqrt{4 + 9t^2} dt = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} (4 + 9t^2)^{3/4}$$

Daí:

$$L = \frac{1}{3} (4 + 9t^2)^{3/4} \Big|_0^1 \dots$$

Questão 9.10. Considere a curva $\alpha(t) = (e^{-t/2} \cos(t), e^{-t/2} \sin(t))$ com $t \in [0, \infty)$. (1) Esboce o traçado desta curva, mostrando que ela se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$. (2) Mostre que $\alpha'(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. (3) Calcule o limite do comprimento da curva quando $t \rightarrow \infty$, concluindo que apesar de infinita, a curva tem comprimento finito.

Resposta. (1) $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-t/2} \rightarrow 0$ e $\cos(t)$ e $\sin(t)$ ficam limitados, logo $\alpha(t) \rightarrow 0$ (2) $\alpha'(t) = \left\{ -\frac{1}{2}e^{-t/2} \cos[t] - e^{-t/2} \sin[t], e^{-t/2} \cos[t] - \frac{1}{2}e^{-t/2} \sin[t] \right\}$ e pelo mesmo argumento, todos os termos vão a zero! (3)

$$\|\alpha'\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{e^{-t}} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^\infty e^{-t/2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 2(e^{-t/2}) \Big|_0^\infty = \sqrt{5}$$

Questão 9.11. Lembra-se da curva dada por (t^2, t^3) ? Reparametrize-a por comprimento de arco. Obviamente você nem se preocupou com o fato que esta curva não era regular - mas olhe agora para o seu parâmetro de comprimento de arco e decida se ele pode estar definido no ponto $s = 0$...

Resposta. Temos $\alpha' = (2t, 3t^2)$. Daí $\|\alpha'\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$. Logo:

$$s(t) = \int \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{3/2}$$

Invertendo:

$$t(s) = \pm \sqrt{-\frac{4}{9} + s^{2/3}}$$

Logo a curva será parametrizada:

$$\left(-\frac{4}{9} + s^{2/3}, \pm \sqrt{-\frac{4}{9} + s^{2/3}}\right) \quad s \geq 8/27$$

Ou seja, ou você parametriza por comprimento de arco a parte negativa, ou a parte positiva, mas não ambas simultaneamente.

Questão 9.12. Reparametrize a parábola por comprimento de arco. Dica: Em alguma integral que aparecer, chame $2t = \tan(\theta)$ e resolva-a por substituição (você também poderia fazer usando o ArcSenh). Foi possível inverter a função obtida?

Resposta. Apesar de ser possível calcular uma primitiva, não é possível inverter.

$$\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\text{Log}\left[2t + \sqrt{1+4t^2}\right] = \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\text{ArcSinh}[2t]$$

Questão 9.13. Reparametrize a curva

$$\gamma(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

com respeito ao comprimento de arco medido a partir do ponto $(1,0)$ na direção de um t crescente. Expresse a reparametrização na forma mais simples. O que pode-se concluir a respeito da curva?

Resposta. $\gamma' = \left\{-\frac{4t}{(1+t^2)^2}, -\frac{2(-1+t^2)}{(1+t^2)^2}\right\} \Rightarrow \|\gamma'\| = \frac{2}{t^2+1}$ Agora:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| \, du = 2 \arctan(t)$$

Logo:

$$t(s) = \tan(s)/2$$

Voltando para a curva:

$$(\cos(s), \sin(s))$$

Que curva é esta mesmo? A parametrização apresentada é a parametrização racional da circunferência, que só não está definida em um ponto.

Capítulo 10

Integrais de linha e campos vetoriais

10.1 Integrais de linha por comprimento de arco

Exemplo 10.1. Exemplo exercício.

A massa de um objeto é a sua densidade calculada ao longo de sua dimensão. Se pensarmos num fio muito fino como algo unidimensional, poderemos calcular sua massa fazendo a integral de uma função densidade ao longo da curva descrita por ele. Por exemplo, consideramos o fio $\alpha(t) = (t, t, t)$ com $t \in [0, 2]$ e $\delta(x, y, z) = xyz$ a densidade linear do fio. Qual a sua massa?

Basta (1) calcular $\|\alpha'(t)\|$ (2) montar a integral (3) resolvê-la. □

Resposta. Trivial. $\|\alpha'\| = \sqrt{3}$. (2) $\int_0^2 t^3 \sqrt{3} \, dt = 4\sqrt{3}$

10.2 Exercícios

Questão 10.1 (Integrais de linha por comprimento de arco). 1. Qual a massa de um fio cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, e cuja densidade é dada por $\rho(x, y) = x + y$.

2. Calcule a integral de linha por comprimento de arco da função $f(x, y) = y$ sobre a parábola $x = y^2$ no intervalo $0 \leq y \leq 2$.

Resposta. (1) 2 (2) $\frac{1}{12} (-1 + 17\sqrt{17})$

Questão 10.2 (Integrais de linha sobre campos). 1. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x, x^2 + y + z, xyz)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, 2t, 1)$ com $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = (-y, x)$ sobre a curva parametrizada $\gamma(t)$ cuja imagem é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. (Parametrize a elipse!)

3. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (y^2, x, -1)$ sobre o triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 1, 2)$ (parametrize os lados do triângulo seguindo uma orientação). Será necessário calcular 3 integrais.

4. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x, 1, 2)$ sobre a curva que é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $2x + 2y - 1 = z$. O sentido deve ser o anti-horário.

Resposta. (1) $31/6$ (2) 12π (3) $0 - 1/6 + 1/3 = 1/6$ (4) 0 (alguma suspeita por quê?)

Questão 10.3 (Campos conservativos). Determine se os campos a seguir são ou não conservativos. Caso positivo, exiba uma função potencial. Caso negativo, justifique.

$$1. F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

$$2. F(x, y, z) = (x - y, x + y + z, z^2)$$

$$3. F(x, y) = (x^2 y, -x)$$

$$4. F(x, y, z) = (yz - 2xy^2, xz - 2yx^2, xy)$$

$$5. F(x, y, z) = (-4x, 5y, z^3)$$

$$6. F(x, y, z) = (-x^2 y^2, 0, 1)$$

Resposta. (1) $-\frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}$ (2) Não é (3) Não é (4) Feito em sala (5) $-2x^2 + 5y^2/2 + z^4/4$ (6) Não é.

Questão 10.4 (Teorema Fundamental). 1. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, 0)$ com $-1 \leq t \leq 1$.

2. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$ sobre a curva $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1)$ com $-1 \leq t \leq 1$.

3. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ sobre a curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Que curva é esta?

4. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ sobre a curva $\gamma(t) = (t, t^3, \sqrt{t^2 + 1})$ com $-1 \leq t \leq 1$.

Resposta. (1) Notou que o campo não está definido ao longo da curva? Ainda assim pode-se dizer que a integral $\int_{-1}^1 1/t \, dt = 0$ (2) Notou que a γ é a mesma curva percorrida em ambos os sentidos? Logo só pode ser 0, qualquer que fosse o campo! (3) 0 (4) 4/3

Capítulo 11

Teorema de Green

11.1 Exercícios

Questão 11.1. Aplique o Teorema de Green e resolva as integrais de linha a seguir.

1. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (x^3, xy^2)$ e $\gamma(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Desenhe esta curva!
2. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (\cos(x) + \sin(y), tg^2(y))$ e $\gamma(t)$ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 3)$ parametrizado no sentido horário.
3. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ e $\gamma(t)$ é uma parametrização no sentido horário para a curva fechada formada pelos gráficos de $y = \sin(x)$ e $y = -\sin(x)$ com $0 \leq x \leq \pi$.
4. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (e^y x, x^2 y^3)$ e $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.
5. $\int_{\gamma} f \, d\gamma$ onde $f(x, y) = (\cos(xy), \sin(xy))$ e $\gamma(t)$ é o quadrado de lado 2 centrado na origem, parametrizado no sentido anti-horário.

Resposta. (1) $27\pi/2$ (2) $(1 - \cos(3))/3$ (3) $4 - 4\pi$ (4) 0 (5) 0

Questão 11.2. Utilize o Teorema de Green para calcular a área da elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dica: Parta de uma integral dupla para calcular uma integral de linha. Invente um campo vetorial tal que $Q_x - P_y = 1$.

Resposta. Escolhemos $F(x, y) = (0, x)$ para calcularmos a integral de linha deste campo ao longo da elipse E , parametrizada no sentido anti-horário por $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$. Temos, pelo teorema de Green:

$$\int F \, d\gamma = \iint Q_x - P_y \, dx dy$$

Daí teremos que:

$$\int_0^{2\pi} (0, a \cos t) \cdot (-a \sin(t), b \cos(t)) \, dt = \iint_E 1 \, dx dy = \text{Área da elipse}$$

Agora está fácil. O lado esquerdo, a resposta, será:

$$\int_0^{2\pi} (0, a \cos t) \cdot (-a \sin(t), b \cos(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} ab \cos^2(t) \, dt = ab\pi$$

□

Questão 11.3. Calcule

$$\oint_C y^2 \, dx + 3xy \, dy + \oint_D y^2 \, dx + 3xy \, dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ parametrizada no sentido anti-horário e D é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no sentido horário. Tente usar o Teorema de Green dividindo a região em duas partes, de modo que cada parte seja cercada por uma curva composta de 4 partes. Note que duas partes de cada curva ocorrem em sentidos opostos, logo se cancelam!

Resposta. Temos que $F(x, y) = (y^2, 3xy)$. Seguindo a orientação dada, teremos que:

$$\oint_C F + \oint_D F = \iint_{\text{região entre círculos}} Q_x - P_y \, dx \, dy$$

Daí teremos que:

$$\oint_C F + \oint_D F = \iint_{\text{região entre círculos}} 3y - 2y \, dx \, dy = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, dr = 0$$

□

Questão 11.4. Seja

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Calcule

$$\oint_{\gamma} F$$

onde γ é *qualquer* curva parametrizada no sentido anti-horário que fique em volta da origem. Dicas: (1) Não dá pra usar o Teorema de Green pois esta função não está definida na origem. Este campo é conservativo? Existe alguma boa candidata para função potencial? Em qual ponto esta função teria problemas? (2) Imagine agora sua curva arbitrária em torno da origem. Entre ela e a origem ponha uma circunferência muito pequena. Para as duas curvas ao mesmo tempo é possível usar o Teorema de Green, certo? Por que? Cuidado com o sentido da parametrização! (3) Então você quer saber a integral de linha na curva maior. Você sabe que ela somada com a integral de linha na circunferência pequena é igual a integral de $Q_x - P_y$ na região compreendida entre elas. Falta calcular o que? (4) Faça o limite do raio da circunferência tender a 0.

Resposta. Começamos calculando a integral de linha deste campo numa circunferência de raio arbitrário r parametrizada no sentido horário por $\alpha_r = (r \cos(-t), r \sin(-t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Daí teremos que:

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha_r(t)) \cdot \alpha_r'(t) \, dt = -2\pi$$

que não depende de r !! Então escolhemos um r tão pequeno quanto necessário para que α_r esteja toda "dentro" de γ . Daí, pelas observações da questão anterior, aplicamos o teorema de Green na região compreendida entre as curvas, o que é possível pois estamos "evitando" a origem. Teremos que:

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma + \int_{\alpha_r} F \, d\alpha_r = \iint_{\text{região entre elas}} Q_x - P_y \, dx \, dy$$

Logo:

$$\int_{\gamma} F \, d\gamma - 2\pi = 0 \Rightarrow \int_{\gamma} F \, d\gamma = 2\pi$$

□

Apêndice F

Geometria de Curvas - Curvatura e Torção

F.1 Exercícios

Questão F.1. Considere a catenária $y = \cosh(x)$ dentro do plano \mathbb{R}^2 e parametrize-a com parâmetro t . (a) Calcule o campo de vetores tangente $T(t)$. (b) Calcule o campo normal principal $N(t)$, quem sabe utilizando um argumento geométrico simples (quando dois vetores são ortogonais em \mathbb{R}^2 ?!). (c) Calcule a curvatura $\kappa(t)$ de duas formas (i) usando a fórmula geral para curvatura (ii) explorando o fato que $\alpha'' = v'T + v^2\kappa N$.

Resposta. $(t, \cosh(t))$ (a) $T(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{t^2 + \sinh[t]^2}}, \frac{\sinh[t]}{\sqrt{t^2 + \sinh[t]^2}} \right\}$ (b) Não precisa ser nenhum grande gênio da matemática pra notar que:

$$\pm \left\{ \frac{-\sinh[t]}{\sqrt{t^2 + \sinh[t]^2}}, \frac{1}{\sqrt{t^2 + \sinh[t]^2}} \right\}$$

são ambos ortogonais a $T(t)$ pois o produto interno é zero e são vetores de norma 1. Resta decidir se o positivo ou o negativo. Mas note que o desenho da catenária se assemelha a uma parábola, e que o campo normal sempre deve apontar para o centro de curvatura. Então a coordenada y será sempre positiva, logo escolhemos o vetor apresentado com o sinal $+$. (c) Note que para usar a fórmula geral é necessário adicionar uma terceira coordenada constante, digamos $= 0$. Então: $\kappa(t) = 1/\cosh^2(t)$.

Questão F.2. Calcule o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da hélice geral $h(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$.

Resposta.

$$\begin{aligned} T &= \left\{ -\left(\frac{a \sin[t]}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{a \cos[t]}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\} \\ N &= \{-\cos[t], -\sin[t], 0\} \\ B &= \left\{ b \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \sin[t], -b \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \cos[t], \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \right\} \\ \kappa(t) &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \tau(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Questão F.3. (a) Utilize o Teorema de Existência e Unicidade de curvas para mostrar que dada uma constante $\kappa_0 > 0$, existe essencialmente uma única curva plana com curvatura igual a esta constante. Que curva é esta? (lembre-se do exemplo dado no texto). (b) Mostre que dadas duas constantes $\kappa_0 > 0$ e τ_0 , existe essencialmente uma única curva espacial com estas curvatura e torção constantes, e que esta curva é uma hélice.

Resposta. Basta resolver o sistema $\kappa_0 = a/(a^2 + b^2)$ e $\tau_0 = b/(a^2 + b^2)$.

Questão F.4. Calcule o triedro de Frenet, a curvatura e a torção da cúbica reversa $c(t) = (t, t^2, t^3)$. (Faça um desenho desta cúbica). Em que ponto a torção é máxima?!

Resposta. Parece-me que esta é uma questão com muitas contas. Mas aí vai o triedro:

$$T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \right\}$$

$$N = \left\{ -\frac{t(2+9t^2)}{(1+4t^2+9t^4)\sqrt{1+9(t^2+t^4)}}, \frac{1-9t^4}{(1+4t^2+9t^4)\sqrt{1+9(t^2+t^4)}}, \frac{3(t+2t^3)}{(1+4t^2+9t^4)\sqrt{1+9(t^2+t^4)}} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{3t^2}{\sqrt{1+9(t^2+t^4)}}, -\frac{3t}{\sqrt{1+9(t^2+t^4)}}, \frac{1}{\sqrt{1+9(t^2+t^4)}} \right\}$$

Para usar a fórmula de Frenet generalizada $B' = -v\tau N$, note que:

$$B'(t) = \left\{ \frac{3t(2+9t^2)}{(1+9(t^2+t^4))^{3/2}}, \frac{-3+27t^4}{(1+9(t^2+t^4))^{3/2}}, -\frac{9(t+2t^3)}{(1+9(t^2+t^4))^{3/2}} \right\} \quad v(t) = 2\frac{\sqrt{1+9(t^2+t^4)}}{(1+4t^2+9t^4)}$$

Logo

$$\tau = \frac{3}{2(1+4t^2+9t^4)(1+9(t^2+t^4))^{3/2}}$$

que obviamente é máxima quando $t = 0$. Observe que o cálculo da torção é muito, mas muito, mais fácil de fazer utilizando a fórmula geral.

Questão F.5. Determine a curvatura da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em um ponto (x, y) . Determine os valores máximos e mínimos da curvatura, e em qual ponto da elipse eles são atingidos. É o resultado que a sua intuição geométrica esperava?

Resposta. $\kappa(t) = \frac{ab}{(b^2 \cos^2[t] + a^2 \sin^2[t])^{3/2}}$ Lembre-se que $\sin^2 + \cos^2 = 1$, onde $\cos^2 = 1$ se $\cos = \pm 1$, $\sin^2 = 1$ se $\sin = \pm 1$. Agora se $a > b$, o maior valor no denominador, logo a menor curvatura, ocorrerá quando $\sin^2 = 1$, ou seja, nos pontos da elipse em que $x = 0$. O menor valor no denominador, logo maior curvatura, ocorrerá quando $\cos^2 = 1$, ou seja, $y = 0$. O análogo vale para se $b > a$.

Desenhe a elipse agora e verifique que pontos são esses.

Questão F.6. Sem usar o teorema da existência e unicidade apresentado (a) Prove que uma curva regular C tem curvatura nula se e somente se é um segmento de reta (b) Se C tem curvatura não nula em todo ponto, prove que C tem torção nula se e somente se é uma curva plana (o que caracteriza uma curva plana? qual campo vetorial é constante?)

Questão F.7. Usando o Teorema de Green, determine uma fórmula para a área da região R delimitada por uma curva plana fechada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$.

Resposta. Seja $F(x, y) = (0, x)$. Logo:

$$\text{Área} = \iint_R 1 \, dx dy = \iint_R Q_x - P_y \, dx dy = \int_I F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt = \int_I x(t)y'(t) \, dt$$

Equivalentemente, poderíamos ter obtido se $F(x, y) = (-y, 0)$, a expressão $\text{Área} = \int_I -y(t)x'(t) \, dt$.

Dividindo ambas por 2 e somando, teremos:

$$\text{Area} = \int_I \frac{xy' - yx'}{2} \, dt$$

que é a expressão mais notória para a área em termos da curva.

Se você chegou até aqui, já está de bom tamanho para um tópico extra de um curso de Cálculo. Porém, o leitor que estiver motivado por esta teoria pode continuar a resolver os exercícios a seguir, consideravelmente mais sofisticados, como uma forma de desafio!

Questão F.8. Um campo de vetores $D(s)$ ao longo de uma curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha(s)$ é dito um *campo de Darboux* se $T' = D \times T$, $N' = D \times N$ e $B' = D \times B$. Prove que existe um único campo de Darboux ao longo de α , achando sua expressão em termos do triedro de Frenet.

Questão F.9. (a) Suponha que todas as retas normais a uma curva passem por um ponto fixo. Mostre que a curva é um arco de circunferência. (b) Suponha que todas as retas tangentes a uma curva passem por um ponto fixo. Mostre que é um segmento de reta.

Questão F.10. O *centro de curvatura* de uma curva α no ponto $\alpha(t)$ é dado por $\alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$. A *evoluta* de uma curva plana regular α com $\kappa \neq 0$ é a curva percorrida pela centro de curvatura, ou seja:

$$\text{Evoluta}(t) = \beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

- (a) Calcule a evoluta da catenária $(t, \cosh(t))$.
- (b) Prove que o vetor tangente unitário de uma evoluta β de uma curva α qualquer é igual (a menos de sinal) ao vetor normal principal de α .
- (c) Expresse o comprimento de arco $s(t)$ da evoluta em termos da função curvatura de α .

Questão F.11. Seja $\alpha(s) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco fechada. A curva $\beta(s) = \alpha(s) - r.N(s)$, r constante positiva, N vetor normal, é chamada curva paralela a α . Mostre que:

- (a) Comprimento de β = Comprimento de α + $2\pi r$
- (b) $\kappa_\beta(s) = \frac{1}{1 + r\kappa_\alpha(s)}$
- (c) $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi r^2$

Onde $A()$ é a área delimitada pela curva (use a questão 28).

Questão F.12. Vamos apresentar uma espécie de contra exemplo para o item (b) da questão 27. O objetivo é mostrar que basta um ponto de curvatura nula para que uma curva de torção nula não pertença a um único plano. Considere:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{(-1/t^2)}) & \text{se } t > 0 \\ (t, e^{(-1/t^2)}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

- (a) Prove que α é diferenciável.
- (b) Prove que $\alpha(t)$ é regular para todo t . Prove que $\kappa(t) \neq 0$ para todos os t menos $t = 0$ e $t = \pm\sqrt{2/3}$. Mostre que $k(0) = 0$.
- (c) Mostre que o limite do plano osculador com $t \rightarrow 0$ e $t < 0$ é o plano $z = 0$. Mostre que o limite do plano osculador com $t \rightarrow 0$ e $t > 0$ é $y = 0$.
- (d) Mostre que, mesmo sem que α seja curva plana, é possível dar uma definição para τ e teremos que $\tau = 0$ constante.

Capítulo 12

Superfícies parametrizadas e integrais de superfície

12.1 Exercícios

Questão 12.1. As superfícies a seguir são de revolução. Lembre-se que, dada uma curva $(f(v), 0, g(v))$ no plano xz , a rotação dela em torno do eixo z se expressa como $(\cos(u)f(v), \sin(u)f(v), g(v))$.

1. Parametrize o cone reto centrado na origem de eixo z . Qual o plano tangente a este cone no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$? Qual o vetor normal? Este cone possui plano tangente com $z = 0$?
2. Parametrize um hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é y , dado pela equação: $y^2 - x^2 - z^2 = 1$. Dê uma fórmula para o cálculo do plano tangente.
3. Parametrize um elipsóide de revolução $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. Ache uma fórmula para o vetor normal.
4. Parametrize o toro de raio interno 1 e raio externo 3. Toro é o nome dado à casca da “câmara de ar de um pneu” ou de uma “rosquinha”.

Resposta.

1. $\sigma(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), v)$. $\sigma(\pi/4, \sqrt{2}) = (1, 1, \sqrt{2})$. Plano $x + y - \sqrt{2}z = 0$. Vet norm: $(1, 1, \sqrt{2})$. Não possui.
2. $\sigma(u, v) = (\sqrt{v^2 - 1} \cos(u), v, \sqrt{v^2 - 1} \sin(u))$. Vet Norm $(-\sqrt{-1 + v^2} \cos[u], v, -\sqrt{-1 + v^2} \sin[u])$. Plano tangente pelo ponto $P = (a, b, c) = \sigma(u_0, v_0)$ será:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot \left(-\sqrt{-1 + v_0^2} \cos[u_0], v_0, -\sqrt{-1 + v_0^2} \sin[u_0] \right) &= \\ &= (a, b, c) \cdot \left(-\sqrt{-1 + v_0^2} \cos[u_0], v_0, -\sqrt{-1 + v_0^2} \sin[u_0] \right) \end{aligned}$$

3. $\sigma(u, v) = (2 \cos(v) \cos(u), 2 \cos(v) \sin(u), 3 \sin(v))$. Vet norm: $\{6 \cos[u] \cos[v]^2, 6 \cos[v]^2 \sin[u], 2 \sin[2v]\}$
4. $\sigma(u, v) = \{(3 + \cos[v]) \cos[u], (3 + \cos[v]) \sin[u], \sin[v]\}$

Questão 12.2.

1. Calcule a área do cone com $-2 \leq z \leq 2$.

2. Calcule a área do hiperbolóide com $-4 \leq y \leq 4$.
3. Calcule a área do elipsóide.
4. Calcule a área do toro.

Resposta.

1. $8\sqrt{2}\pi$
2. Não possui primitiva elementar. $\int_{-4}^4 2\pi\sqrt{v^2 + \text{Abs}[-1 + v^2]} dv$
3. $\frac{4}{5}\pi \left(10 + 9\sqrt{5}\text{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right] \right)$
4. $12\pi^2$

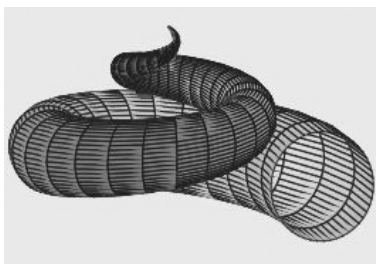
Questão 12.3.

1. Calcule a integral da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ao longo da esfera de raio 3.
2. Calcule a integral da função $f(x, y, z) = x + y + z$ no elipsóide descrito acima.
3. Calcule a massa de um cilindro reto de raio 2 em volta do eixo z , com $-2 \leq z \leq 2$, se sua densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z$.

Resposta.

1. $81.4.\pi$
2. 0
3. $2\pi(8 + \text{Sinh}[2])$

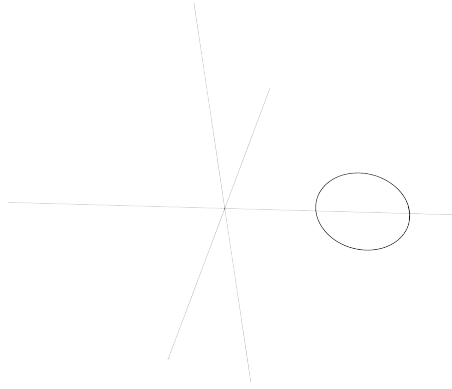
Questão 12.4. Observe a figura abaixo, retirada do livro do Stewart.



Exiba a parametrização de uma superfície que tenha este formato.

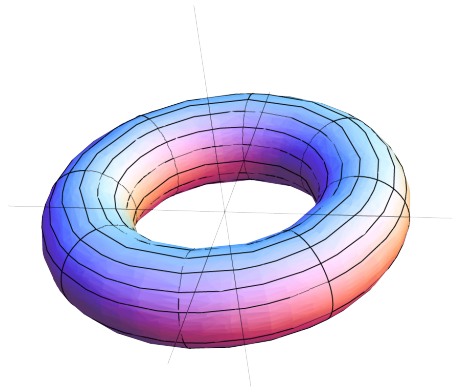
Resposta. Comece com a circunferência no plano yz dada por:

$$\left(0, 3 + \cos(v), \sin(v) \right)$$



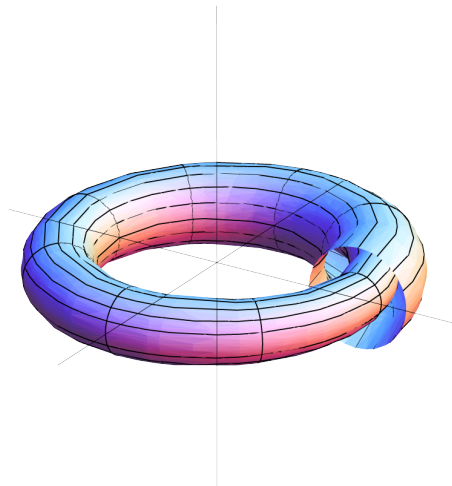
Vamos fazer com o que o parâmetro u seja responsável pela movimentação da circunferência e pela diminuição do seu raio. Fazamos $u \in [0, 1]$. Então, para que esta circunferência dê 4 voltas em torno de z , façamos:

$$\left((3 + \cos(v)) \cos(4\pi u), (3 + \cos(v)) \sin(4\pi u), \cos(v) \right)$$



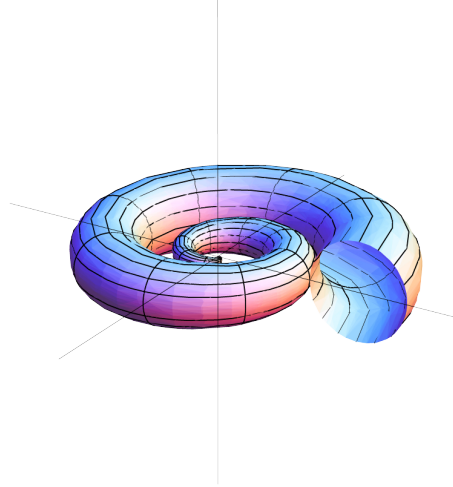
Para que o raio da circunferência, ou seja, o termo que multiplica $\cos(v)$ e $\sin(v)$, vá diminuindo a medida que u aumenta, multipliquemos por $(1 - u)$.

$$\left((3 + (1 - u) \cos(v)) \cos(4\pi u), (3 + (1 - u) \cos(v)) \sin(4\pi u), (1 - u) \cos(v) \right)$$



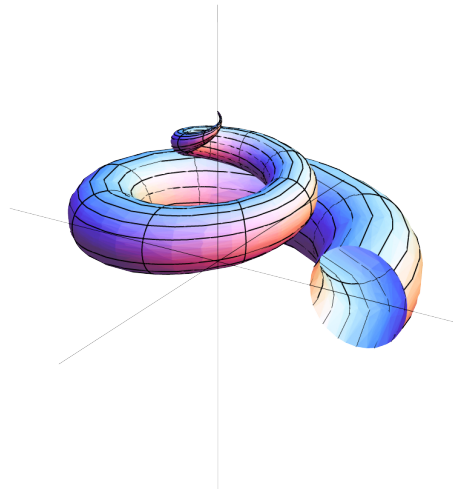
Para que o raio da rotação diminua a medida que u aumente, multipliquemos o raio da rotação que é 3 por $(1 - u)$:

$$\begin{aligned} & \left(((1 - u)3 + (1 - u) \cos(v)) \cos(4\pi u), ((1 - u)3 + (1 - u) \cos(v)) \sin(4\pi u), (1 - u) \sin(v) \right) = \\ & = \left((1 - u)(3 + \cos(v)) \cos(4\pi u), (1 - u)(3 + \cos(v)) \sin(4\pi u), (1 - u) \sin(v) \right) \end{aligned}$$



Para que a superfície vá subindo no eixo z a medida que u cresce, somemos um múltiplo de u na coordenada z :

$$\left((1 - u)(3 + \cos(v)) \cos(4\pi u), (1 - u)(3 + \cos(v)) \sin(4\pi u), 3u + (1 - u) \sin(v) \right)$$



Capítulo 13

Teorema de Stokes e Teorema da Divergência

13.1 Teorema de Stokes

Exemplo 13.1. Este exemplo é um exercício. Mostre que o fluxo do rotacional de qualquer campo em uma superfície fechada é igual a 0. (1) Divida a superfície em duas metades. Chame de Γ a borda (2) Aplique o teorema em cada metade prestando atenção na orientação (3) Expresse a o fluxo em toda superfície como soma dos fluxos em cada metade.

FEITO EM SALA.

13.2 Exercícios

- Questão 13.1.**
1. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (x^3y, zy^2, xz)$ ao longo da superfície $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq x \leq 2$. Escolha a orientação de modo que o vetor $(-1, 0, 0)$ esteja no campo normal definido.
 2. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = \left(x^2 + y^2, \frac{z}{xy}, x^2 + y^2\right)$ ao longo da superfície $\sigma(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2 \sin(2v))$, $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
 3. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (-z, x^2, -y^3)$ ao longo do elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. Faça agora ao longo da metade superior do elipsóide.
 4. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, e^z x^3)$ ao longo do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ com $1 \leq z \leq 4$.
 5. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, -x - y - z)$ ao longo da borda da superfície $(u, v, \sin(v))$ com $0 \leq v \leq 2\pi$ e $-1 \leq u \leq 1$.
 6. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$ ao longo da borda do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, orientada no sentido anti-horário em relação ao vetor $(1, 1, 1)$.
 7. Calcule a integral de linha do campo $F(x, y, z) = (yz, 2xz, e^{xy})$ ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 16$ e $z \equiv 5$, orientado positivamente em relação ao vetor $(0, 0, 1)$.

Resposta.

1. $-\frac{9\pi}{4}$
2. 0
3. 0 e 0.
4. $0 + 0 = 0$
5. Observe que $\text{rot}F = (0, 2, 0)$. Então usamos Stokes e teremos: 0
6. -2
7. 80π

Questão 13.2. 1. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ através da esfera de raio R .

2. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (\sin(y), \cos(x)e^z, \frac{y^2}{x^2})$ através da superfície limitada por $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ e por $x^2 + y^2 = 3$. Reflita sobre que superfície é esta. Calcule a interseção entre as duas equações implícitas.

3. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2, \sin(y)z, z^2)$ através da superfície limitada superiormente pelo parabolóide $z = (-x^2 - y^2) + 1$ e inferiormente pela esfera de raio 1.

4. Calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (xyz, y, z)$ através da superfície limitada superiormente pelo cone $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo cone $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$.

Resposta.

1. $\frac{12\pi R^5}{5}$
2. 0. Observe que o divergente é 0.
3. Esta questão está meio complicado. Troquem o campo por $(-2z, -2x, -2y)$. Resposta: 0.
4. $2\pi/3 + 2\pi/3 = \frac{4\pi}{3}$

Questão 13.3. Demonstre, utilizando o Teorema da Divergência, que o fluxo do rotacional de um campo ao longo de qualquer superfície fechada é sempre zero.

Resposta. Basta observar que:

$$\text{divrot}F = \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y) = 0$$

Questão 13.4. Demonstre o Teorema de Green usando o Teorema de Stokes.

Resposta. Basta imergir a curva plana no espaço. A integral de linha será ainda a mesma. Usando Stokes, teremos que esta integral de linha será igual ao fluxo do rotacional do campo. Mas o vetor normal à superfície (interior da curva) é o vetor $(0, 0, 1)$. Então dentro da integral, teremos:

$$\text{rot}F \cdot (0, 0, 1) = Q_x - P_y$$

que é exatamente o que aparece no Teorema de Green.

Questão 13.5. Seja C curva simples fechada contida no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral:

$$\int_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

só depende da área da região confinada por C , e não do seu formato ou de sua posição no espaço.

Resposta. Pelo teorema de Stokes, teremos:

$$\begin{aligned} \int_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} (\text{rot} F) \cdot n(u, v) \cdot \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dv du = \\ &= \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} (3, 1, -2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (1, 1, 1) \cdot \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dv du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dv du \end{aligned}$$

que só depende da área.

Questão 13.6. Calcule:

$$\int_C (y + \sin(x)) dx + (z^2 + \cos(y)) dy + x^3 dz$$

onde C é a curva $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Você saberia exibir uma superfície que contivesse esta curva?!

Resposta. Claro que saberia, já foi a questão 5.1.2. A superfície é:

$$(v \cos(u), v \sin(u), v^2 \sin(2u))$$

Esta integral de linha é o fluxo do rotacional nesta superfície:

$$\text{rot} F = (-2z, -3x^2, -1)$$

e temos também:

$$\sigma_u \times \sigma_v = (2v^2 \sin(u), 2v^2 \cos(u), -v)$$

Logo:

$$\begin{aligned} &\int_C (y + \sin(x)) dx + (z^2 + \cos(y)) dy + x^3 dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2(v^2 \sin(2u)), -3(v \cos(u))^2, -1) \cdot (2v^2 \sin(u), 2v^2 \cos(u), -v) \, dv du = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -4v^4 \sin(2u) \sin(u) - 6v^4 \cos^3(u) + v \, dv du = \int_0^{2\pi} \int_0^1 v \, dv du = \pi \end{aligned}$$

Questão 13.7. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de $F(x, y, z) = (z^2 x, \frac{y^3}{3} + \tan(z), x^2 z + y^2)$ onde S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Note que não é uma superfície fechada. “Feche-a” da maneira mais simples possível e resolva a questão!

Resposta. Seja S_1 o disco de raio 1 que tampa a meia esfera S_2 . Então:

$$\int_{S_1} F \cdot n \, dS + \int_{S_2} F \cdot n \, dS = \int_{S_1 \cup S_2} F \cdot n \, dS = \iiint_B \text{div} F \, dx dy dz$$

onde B é a metade superior da bola de raio 1. Então, por um lado:

$$\iiint_B \operatorname{div} F \, dx dy dz = \iiint r^4 \sin(\varphi) \, dr d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{5}$$

E por outro lado, parametrizamos o disco por $\sigma(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), 0)$, então:

$$\int_{S_1} F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\dots, \dots, 0) \cdot (0, 0, 1) v^2 \, du dv = 0$$

Então teremos:

$$\int_{S_2} F \cdot n \, dS = \frac{2\pi}{5}$$

Questão 13.8. Demonstre todas as igualdades abaixo. Suponha que S é uma superfície qualquer com C sua borda parametrizada no sentido anti-horário por r , satisfazendo as hipóteses convencionais sobre diferenciabilidade. Suponha que f, g sejam funções com segunda derivada contínua. Suponha que B seja uma região qualquer com borda dada por T , satisfazendo as hipóteses convencionais sobre diferenciabilidade.

1. $\int_C (f \nabla g) \, dr = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \, dS$
2. $\int_C (f \nabla f) \, dr = 0$
3. $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \, dr = 0$
4. $\iint_S a \cdot \vec{n} \, dS = 0$, a vetor constante, n normal à superfície.
5. $\operatorname{Vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot n \, dS$, $F(x, y, z) = (x, y, z)$
6. $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = 0$
7. $\iint_S D_{\vec{n}} f \, dS = \iiint_B \nabla^2 f \, dV$
8. $\iint_S (f \nabla g) \cdot n \, dS = \iiint_B (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$
9. $\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, dS = \iiint_B (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV$

onde $\nabla^2 f = \operatorname{div} \nabla f$ e $D_{\vec{n}} f$ é a derivada direcional de g na direção da normal, ou seja, $\nabla g \cdot \vec{n}$.

Resposta.

1. Basta notar que

$$\nabla \times (f \nabla g) = \operatorname{rot}(f g_x, f g_y, f g_z) = (f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y g_x) = \nabla f \times \nabla g$$

e depois aplicar o teorema de Stokes.

2. É imediato a partir do item acima, pois:

$$\nabla f \times \nabla f = 0$$

3. É imediato, pois:

$$\nabla f \times \nabla g = -\nabla g \times \nabla f$$

4. Basta observar que $\text{div} a = 0$ para todo vetor constante a , e então aplicar o teorema da divergência.

5. Aplicando o teorema da divergência, teremos que:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_B \text{div} F \, dx dy dz = 3 \iiint_B dx dy dz = 3\text{Vol}(B)$$

6. Já vimos em uma questão acima. É consequência do fato que:

$$\text{div rot} F = 0$$

para todo campo F ; aplicando o teo. divergência, temos o resultado.

7. Observe que:

$$\iint_S D_{\vec{n}} f \, dS = \text{Fluxo de } \nabla f \text{ em } S$$

Pelo teo. divergência, isso será igual a:

$$\iiint_B \text{div} \nabla f \, dV$$

como queríamos.

8. Bastará observar que:

$$\begin{aligned} \text{div}(f \nabla g) &= \frac{\partial}{\partial x}(f g_x) + \frac{\partial}{\partial y} f g_y + \frac{\partial}{\partial z} f g_z = \\ &= f_x g_x + f g_{xx} + f_y g_y + f g_{yy} + f_z g_z + f g_{zz} = (f_x, f_y, f_z) \cdot (g_x, g_y, g_z) + f(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \end{aligned}$$

9. Bastará observar que:

$$\text{div}(f \nabla g - g \nabla f) = \text{div}(f \nabla g) - \text{div}(g \nabla f) = (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) - (\nabla f \cdot \nabla g + g \nabla^2 f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

Capítulo 14

Sequências

14.1 Exercícios

Questão 14.1. Calcule os limites abaixo.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n - 1}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n^3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + n^2}}{n^2 + 1}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2$

Resposta. 1. ∞

2. 0

3. 0

4. ∞

Questão 14.2. Para cada natural n , seja A_n o círculo de raio n . Prove que a sequência abaixo converge:

$$a_n = \iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)^2} \, dx \, dy$$

Resposta. Vamos mostrar que é crescente e limitada, portanto convergente. Para ver que é crescente, basta observar que estamos integrando uma função positiva $e^{-(x^2+y^2)^2}$ em domínios cada vez maiores, pois $A_{n+1} \supset A_n$ para todo n . Para ver que é limitada, vamos calcular a integral usando coordenadas polares:

$$\iint_{A_n} e^{-(x^2+y^2)^2} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-\rho^4} \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \cdot \int_0^n e^{-\rho^4} \rho \, d\rho$$

Mas certamente isso do lado direito será menor do que a mesma coisa só que com o expoente maior. Aumentando o expoente para $-\rho^2$, poderemos facilmente calcular a integral:

$$2\pi \cdot \int_0^n e^{-\rho^4} \rho \, d\rho \leq 2\pi \cdot \int_0^n e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = 2\pi \cdot \left. -\frac{1}{2}(e^{-u}) \right|_0^{\sqrt{n}} \leq \pi$$

Questão 14.3. Prove que a sequência abaixo converge:

$$a_n = \int_1^n \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

Resposta. Vamos ver novamente que é crescente e limitada. É crescente pelo mesmo motivo que na questão acima. Para ver que é limitada, note que:

$$\int_1^n \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

Questão 14.4. Utilizando o critério da razão, resolva as questões abaixo.

1. Dados k natural e $a > 0$, calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^k \cdot a^n}$
2. Dados k natural e $a > 0$, com $a \neq e$, calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n n!}{n^n} \dots$
3. ... e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k a^n n!}{n^n}$.

Resposta. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^k a^{n+1}}}{\frac{n!}{n^k a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{a} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = \infty$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}$. Se $a < e$, então converge, se $a > e$, então diverge.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{n+1}{n} \right)^k (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}$, mesma conclusão.

Questão 14.5. Calcule os limites abaixo, seguindo as sugestões.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$; Observe que $\sqrt[n]{n!} > \left(\sqrt[n]{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}$; Note que $\log(\sqrt{n}) < \sqrt{n}$. Logo $0 < \frac{\log(n)}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Resposta. 1. Mas é uma brincadeira!! Como $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{\frac{n}{2}}$, então certamente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = \infty$, concluindo.

2. É outra brincadeira! Como $0 < \frac{\log(n)}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}$, então certamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$.

Capítulo 15

Séries

15.1 Exercícios

Questão 15.1 (Propriedades básicas).

- a. Qual o valor da soma $\sum \frac{2}{3^n}$?
- b. Qual o valor da soma $\sum (\frac{2}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{3}{4^n})$?
- c. Transforme a série $\sum \frac{1}{(k)(k+1)(k+2)}$ numa série telescópica e calcule seu valor.

Resposta. a. $2 \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = 3$

b. $5/2 + 7/6 + 4$

c.
$$\sum \frac{1}{(k)(k+1)(k+2)} = \sum \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{k(k+1)} \Big|_{k=1} = \frac{1}{2}$$

Questão 15.2 (Critério do Termo Geral).

- a. Mostre que as séries $\sum [1 + (-1)^k]$, $\sum \frac{k^3}{k+1}$ e $\sum \frac{k^4}{k^4+k^3+k^2+k}$ são divergentes.
- b. Mostre que as séries $\sum (-1)^k \frac{k^3}{k^4+3}$, $\sum (-1)^k \frac{\log(k)}{k}$ e $\sum (-1)^k \frac{1}{k!}$ convergem.
- c. O que pode-se dizer acerca da convergência ou divergência da série $\sum \frac{1}{\log(k)}$ utilizando o critério em questão?

Resposta. a. Basta verificar que o limite do termo geral: não existe, é infinito, é 1, respectivamente.

b. São séries alternadas cujo limite do termo geral é 0.

c. Nada se pode falar: é uma série de termos positivos cujo limite do termo geral é zero, portanto nenhuma conclusão é possível.

Questão 15.3. Calcule o valor da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ utilizando que $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Resposta. Começamos separando termos pares de ímpares:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Daí teremos que:

$$\frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Agora notamos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6}$$

Questão 15.4 (Critério da Integral).

- Determine para quais valores de q a série $\sum \frac{1}{k(\log(k))^q}$ converge ou diverge.
- A série $\sum \frac{k}{k^4+1}$ converge ou diverge?
- A série $\sum \frac{k}{k^2+1}$ converge ou diverge?

Resposta. a. Diverge se $q \leq 1$ e converge se $q > 1$.

b. Converte! Basta chamar $x^2 = u$ e notar que uma primitiva para $1/(1+u^2)$ é o arctan.

c. Diverge!

Questão 15.5 (Critério da Comparação).

- Mostre que $\sum \frac{1}{k^3}$ converge da mesma forma que foi mostrado que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
- A série $\sum \frac{1}{n2^n}$ converge ou diverge?
- A série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ converge ou diverge?
- Determine em geral para quais valores de α a série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge ou diverge.

Resposta. a.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots &\leq 1 + \frac{2}{8} + \frac{4}{64} + \frac{8}{1024} \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \dots = \frac{1}{1 - (1/4)} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

b. Converte! É menor que $\sum (1/2^n)$.

c. Diverge! É maior que $\sum (1/k)$.

d. Converte se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

Questão 15.6 (Critério do Limite).

- Decida se $\sum (k^3 + 1)e^{-k}$ converge ou diverge.
- Decida se a série $\sum \frac{1}{\sqrt{k} \log(k)}$ converge ou diverge.
- Determine para quais valores de p a série $\sum \frac{1}{k^p \log(k)}$ converge ou diverge.
- Prove que $\sum \frac{2^k}{k!}$ converge utilizando o critério do limite para alguma série adequada.
- Prove que para qualquer valor de γ , a série $\sum \frac{1}{\log(k)^\gamma}$ diverge.

Resposta. a. Converge.

b. Diverge.

c. Converge se $k > 1$, diverge se $k \leq 1$.

d. Por exemplo: $\sum 1/k^2$.

e. Compare com $\sum 1/(k \log(k))$.

Questão 15.7 (Critério da Razão e da Raiz).

a. Decida se $\sum \frac{k!2^k}{k^k}$ converge ou diverge.

b. Decida se $\sum \frac{3^k}{1+4^k}$ converge ou diverge.

Resposta. a. Converge, pois $2 < e$.

b. Converge. O limite dará $(3/4)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

OBS: Façam mais exercícios sobre o critério da razão e da raiz. Olhem por exemplo no Stewart!

Questão 15.8.

Determine x para que cada série a seguir convirja:

$$\sum \frac{x^k}{k} \quad \sum \frac{x^k}{\log(k)} \quad \sum \frac{x^k}{2^k} \quad \sum \frac{x^k}{k^k} \quad \sum k \cdot x^k \quad \sum \frac{k!x^k}{k^k}$$

Resposta. Respectivamente: $x \in [-1, 1)$, $x \in [-1, 1)$, $x \in (-2, 2)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$, $x \in (-e, e)$.

Questão 15.9.

Prove que para todo natural $k \geq 1$, temos que:

$$\log(1) + \log(2) + \dots + \log(k-1) \leq \int_1^k \log(x) \, dx \leq \log(2) + \log(3) + \dots + \log(k)$$

Conclua que:

$$(k-1)! \cdot e^k \leq e \cdot k^k \leq k! \cdot e^k$$

Utilize esse fato para mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^k}$ **diverge!!!**

Resposta. A primeira afirmação pode ser facilmente vista pensando nos termos como áreas de retângulos - no lado esquerdo sob o gráfico, no lado direito sobre o gráfico. Aplicando a propriedade do logaritmo e efetuando a integral, teremos:

$$\log[(k-1)!] \leq k(\log(k) - 1) + 1 \leq \log[k!]$$

Aplicando a exponencial, teremos:

$$(k-1)! \leq e^{k \log(k) - k} \cdot e \leq k! \text{ ou simplesmente } (k-1)! \leq k^k \cdot e^{-k} \cdot e \leq k!$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e \cdot k^k}{k^k}$$

que diverge.

Capítulo 16

Séries de Potências e Séries de Taylor

16.1 Exercícios

Questão 16.1. Calcule o raio de convergência das séries de potência a seguir e determine o intervalo de convergência apropriadamente.

$$\begin{array}{cccc} \sum k^k x^k & \sum \frac{(x-1)^k}{k+2} & \sum \frac{(x+4)^k}{k^3} & \sum \frac{(x-5)^k}{\log(k)} \\ \sum \frac{x^k}{k^k} & \sum \frac{x^k}{k^2+3} & \sum \frac{(5x)^n}{\sqrt[3]{n}} & \sum \frac{(2x-5)^n}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Resposta. Respectivamente: $x = 0$, $x \in [0, 2)$, $x \in [3, 5]$, $x \in [4, 6)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \in [-1, 1]$, $x \in [-(1/5), (1/5))$, $x \in [2, 3)$.

Questão 16.2. Derive e integre as séries da questão anterior termo a termo.

Resposta. Essa fica por conta de vocês.

Questão 16.3. Calcule as séries de Taylor das funções a seguir em torno de $x_0 = 0$ e decida se estas séries convergem para a função e em qual intervalo.

$$\begin{array}{ccc} \cos(x) & \tan(x) & \arctan(x) \\ \log(x) & \frac{1}{(1-9x)^3} & \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \end{array}$$

Resposta. Respectivamente: $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ converge sempre; $x + x^3/3 + (2x^5)/15 + (17x^7)/315 + \dots$; $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge com $x \in [-1, 1]$.

A série do log não pode estar centrada em 0! Digamos então centrada em 1: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$ converge com $x \in (0, 2]$;

Ao invés de ir derivando, podemos observar que:

$$\frac{1}{(1-9x)^3} = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{2.81} \frac{1}{1-9x} = \frac{1}{2.81} \frac{d^2}{dx^2} \sum (9x)^n = \frac{1}{2} \sum (n+2)(n+1)(9x)^n$$

Basta fazer a do seno e dividir tudo por $x!$

Questão 16.4. As funções a seguir não possuem primitiva elementar. Por outro lado, é possível expandi-las em série de Taylor e assim calcular uma série que é a primitiva. Faça-o.

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, dx \quad \int e^{x^2} \, dx$$

Resposta. Farei somente a primeira:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, dx = \int \left(\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right) \, dx = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Questão 16.5. Expanda a função $(x-1)^3 e^x$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

Resposta. Teremos:

$$e^x = 1 + \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$

Então:

$$(x-1)^3 e^x = (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{1} + \frac{(x-1)^5}{2} + \frac{(x-1)^6}{3!} + \dots$$

Questão 16.6. Calcule o valor de $\sum \frac{1}{2^n(n+1)}$.

Resposta. É simplesmente a série $\sum \frac{x^n}{n+1}$ calculada em $x = (1/2)$. Mas esta série é exatamente:

$$\sum \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \int \left(\sum x^n \right) \, dx = \frac{1}{x} \int \frac{1}{1-x} \, dx = -\frac{1}{x} \log(1-x)$$

Calculada em $x = (1/2)$, teremos:

$$\sum \frac{1}{2^n(n+1)} = -2 \log(1/2)$$

Questão 16.7. Calcule o valor da soma:

$$\sum (k+2)(k+1)x^k$$

para os valores de x em que a série for convergente. Faça o mesmo para

$$\sum k^2 x^k$$

Resposta.

$$\sum (k+2)(k+1)x^k = \frac{d^2}{dx^2} \sum x^k = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

A outra será:

$$\sum k^2 x^k = \sum (k+2)(k+1)x^k - \sum 3kx^k + \sum 2x^k$$

E temos que:

$$\sum kx^k = \sum (k+1)x^k - \sum x^k = \frac{d}{dx} \sum x^k - \sum x^k$$

Juntando tudo:

$$\sum k^2 x^k = \frac{2}{(1-x)^3} - 3 \left[\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} \right] + 2 \frac{1}{1-x}$$

Obviamente todas essas são convergentes somente em $x \in (-1, 1)$.