2021

ÁLGEBRA II (LSI – PI)

UNIDAD Nº 5

TRANSFORMACIONES LINEALES

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

1.- **TRANSFORMACIONES LINEALES**

Definición 1

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F, y sea una función $T: V \longrightarrow W$. La función T es una ***Transformación Lineal*** de V en W si y sólo si se verifican los siguientes axiomas,

i) $\forall\, u, v\ \in V; T(u+v) = T(u) + T(v)$

ii) $\forall\, a \in F\ \wedge \forall\, u \in V; T(a\, u) = a\, T(u)$

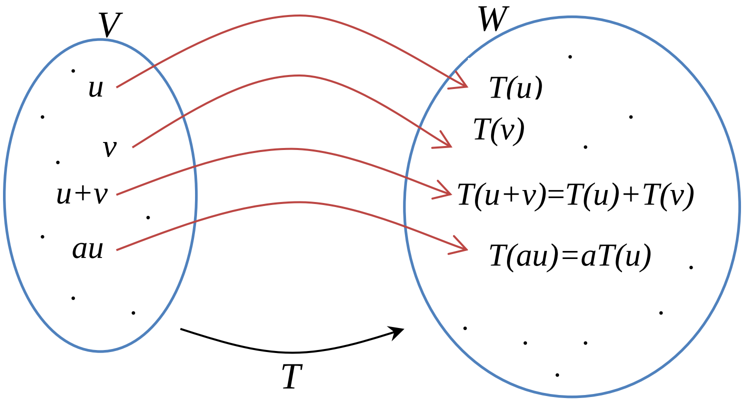
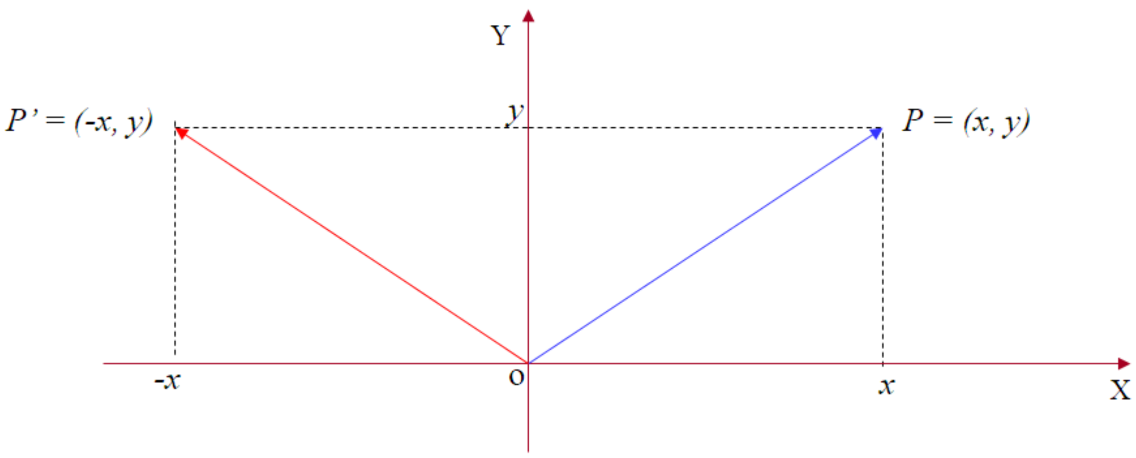


Figura 1. Diagrama de Venn de la definición de transformación lineal

Ejemplo

Sea S_Y la función que transforma los puntos de $\mathbb{R}^2$ en sus simétricos respecto del eje Y, es decir que a cada punto P le asigna un punto P' como se muestra en la figura.



Se puede verificar que $S_Y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $S_Y(x, y) = (-x, y)$ es una transformaciòn lineal.

En efecto, cumple las condiciones i) y ii) ya que:

i) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2: S_Y\big((x,y)+(x',y')\big) = S_Y(x+x', y+y') = (-(x+x'), y+y') = (-x-x', y+y') = (-x,y)+(-x',y') = S_Y(x,y)+S_Y(x',y')$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: S_Y\big(\alpha(x,y)\big) = S_Y(\alpha x, \alpha y) = (-\alpha x, \alpha y) = \alpha(-x,y) = \alpha\, S_Y(x,y)$

1.2.- Propiedades de las Transformaciones Lineales

Proposición 1

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entonces

$$T(0_V) = 0_W.$$

Demostración

Por Proposición 1 de espacio vectorial se verifica que

$$\forall\, u \in V;\ 0_V = 0\, u$$

Aplicando en ambos miembros T tenemos

$$T(0_V) = T\Big(\underbrace{0}_{\in F}\ \underbrace{u}_{\in V}\Big) \underbrace{=}_{(1)} \underbrace{0}_{\in F}\ \underbrace{T(u)}_{\in W} \underbrace{=}_{(2)} 0_W$$

Luego

$$T(0_V) = 0_W.$$

Referencias
(1) Por axioma ii) de definición de transformación lineal.
(2) Por propiedad de espacio vectorial.

Q.E.D.

Proposición 2

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entonces

$$\forall\, u \in V; T(-u) = -T(u)$$

Demostración

$$T(-u) = T\Big(\underbrace{(-1)}_{\in F}\ \underbrace{u}_{\in V}\Big) \underbrace{=}_{(1)} \underbrace{(-1)}_{\in F}\ \underbrace{T(u)}_{\in W} \underbrace{=}_{(2)} -T(u).$$

Luego,

$$T(-u) = -T(u).$$

Referencias
(1) Por axioma ii) de definición de transformación lineal.
(2) Por propiedad de espacio vectorial.

Q.E.D.

Proposición 3

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal entonces

$$\forall\, a_i \in F, \forall\, u_i \in V;\; T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, T(u_i) \qquad (\alpha)$$

Demostración

Demostraremos la proposición por inducción en n

a) $n = 1$

$$T\left(\sum_{i=1}^{1} a_i\, u_i\right) = T(a_1\, u_1) \underbrace{=}_{(1)} a_1 T(u_1) = \sum_{i=1}^{1} a_i\, T(u_i)$$

Luego la proposición (α) es verdadera para $n = 1$.

b) Suponemos que la proposición (α) es verdadera para $n = h$, es decir, suponemos que es verdadera la igualdad

$$T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{h} a_i\, T(u_i) \qquad (*)$$

Bajo este supuesto, probaremos que la proposición (α) es verdadera para $n = h + 1$, esto es, probaremos que es verdadera la igualdad

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{h+1} a_i\, T(u_i)$$

En efecto,

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i\, u_i\right) \underbrace{=}_{(2)} T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i\, u_i + (a_{h+1}\, u_{h+1})\right) \underbrace{=}_{(3)} T\left(\sum_{i=1}^{h} a_i\, u_i\right) + T(a_{h+1}\, u_{h+1}) \underbrace{=}_{(4)}$$

$$\underbrace{=}_{(4)} \sum_{i=1}^{h} a_i\, T(u_i) + a_{h+1} T(\,u_{h+1}) \underbrace{=}_{(5)} \sum_{i=1}^{h+1} a_i\, T(u_i)$$

Luego la proposición se cumple para todo n natural.

Referencias

(1) Por axioma ii) de la definición de transformación lineal.
(2) Por propiedad de sumas finitas.
(3) Por axioma i) de la definición de transformación lineal.
(4) Por hipótesis inductiva (*) y por axioma ii) de la definición de transformación lineal.
(5) Por propiedad de las sumas finitas.

Q.E.D.

1.3- *Núcleo de una transformación lineal*

Definición 2

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El núcleo de T es el conjunto de vectores $u \in V$ tales que su imagen es igual al vector nulo de W.
En símbolos,

$$N_T \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in V / \, T(u) = 0_W\}$$

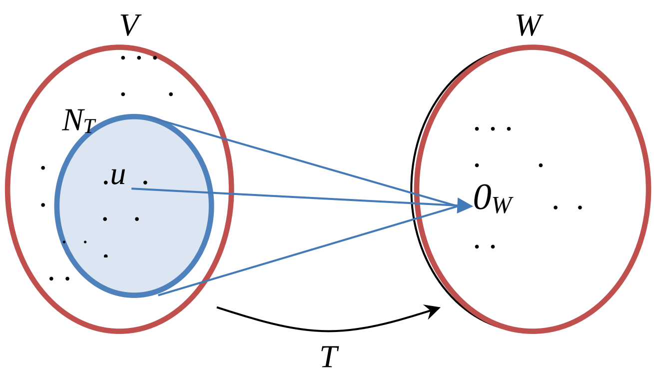


Figura 2. Diagrama de Venn del Núcleo de una transformación lineal

Es claro que,

$$u \in \; N_T \Leftrightarrow T(u) = 0_W$$

Ejemplos:

1- El núcleo de la transformación lineal que $S_Y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $S_Y(x, y) = (-x, y)$ está dado por

$$N_{S_Y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / S_Y(x, y) = (0,0)\},$$

es decir,

$$N_{S_Y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (-x, y) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$$

Esto quiere decir que el único vector de $\mathbb{R}^2$ que tiene por simétrico respecto del eje Y al vector nulo es él mismo.

2- El núcleo de la transformación lineal que $P_X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $P_X(x, y) = (x, 0)$ que es la proyección de los vectores de $\mathbb{R}^2$ sobre el eje X, está dado por

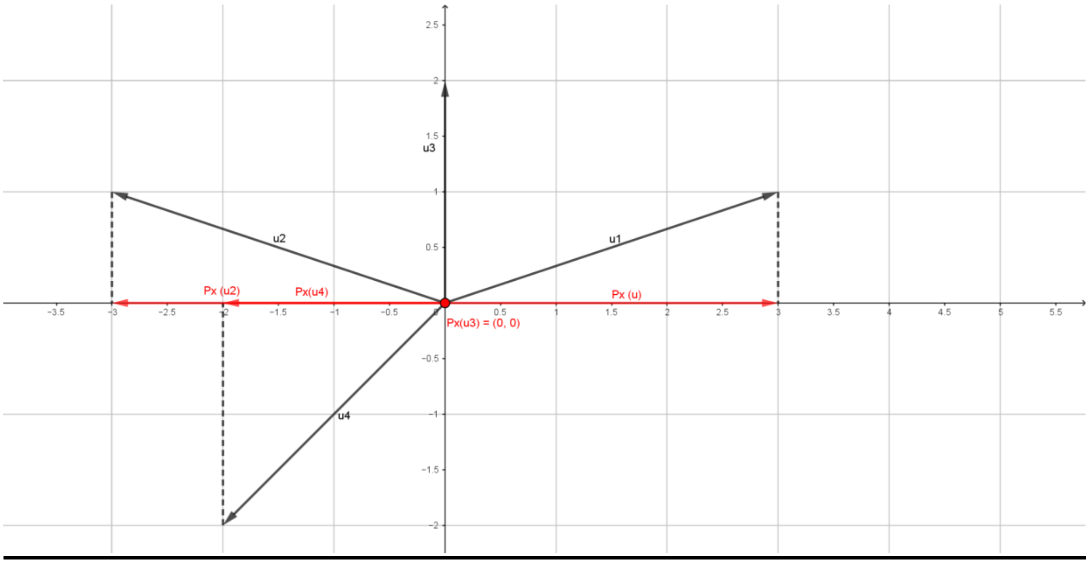
$$N_{P_X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / P_X(x, y) = (0,0)\},$$

Es decir

$$N_{P_X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, 0) = (0,0)\}$$

$$N_{P_X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$$

El núcleo de P_X son los vectores de $\mathbb{R}^2$ que se proyectan sobre el origen y éstos son los que se encuentran sobre el eje Y.



Propiedades del núcleo de una transformación lineal

<u>Proposición 4</u>

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces el núcleo de T es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

<u>Demostración</u>

i) $N_T \subset V$, por definición de N_T.
ii) $N_T \neq \emptyset$, pues $0_V \in N_T$ ya que $T(0_V) = 0_W$ por Proposición 1 de transformaciones lineales.
iii) Mostraremos que es verdadero el condicional $u, v \in N_T \Longrightarrow u + v \in N_T$.
En efecto,

$$u, v \in N_T \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} T(u) = 0_W \wedge T(v) = 0_W$$

Luego,

$$T(u+v) \underbrace{=}_{(2)} T(u) + T(v) \underbrace{=}_{(3)} 0_W + 0_W = 0_W \underbrace{\Longrightarrow}_{(4)} u + v \in N_T$$

Por lo tanto $u + v \in N_T$.

iv) Mostraremos ahora que es verdadero el condicional $a \in F \wedge u \in N_T \Longrightarrow a\,u \in N_T$
En efecto,

$$a \in F \wedge u \in N_T \underbrace{\Longrightarrow}_{(5)} a \in F \wedge T(u) = 0_W$$

Luego,

$$T(a\,u) \underbrace{=}_{(6)} a\,T(u) \underbrace{=}_{(7)} a\,0_W = 0_W \underbrace{\Longrightarrow}_{(8)} a\,u \in N_T$$

Por lo tanto $a\,u \in N_T$.

De **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)**, concluimos que el núcleo de T es un subespacio vectorial de V.

Referencias (A completar por el alumno)
(1)………………………………………………… (5)…………………………………………………
(2)………………………………………………… (6)…………………………………………………
(3)………………………………………………… (7)…………………………………………………
(4)………………………………………………… (8)…………………………………………………

Q.E.D.

Proposición 5

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

$$N_T = \{0_V\} \Leftrightarrow T \; es \; inyectiva.$$

(Sin demostración)

Ejemplos:

De acuerdo a esta proposición se puede observar en los ejemplos precedentes que S_Y es inyectiva pero P_X no lo es.

1.4-*Imagen de una transformación lineal*

Definición 3

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal. La imagen de T es el conjunto de vectores de W, que tienen preimagen en V.
En símbolos,

$$I_T \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W / \exists\, v \in V: T(v) = w\}$$

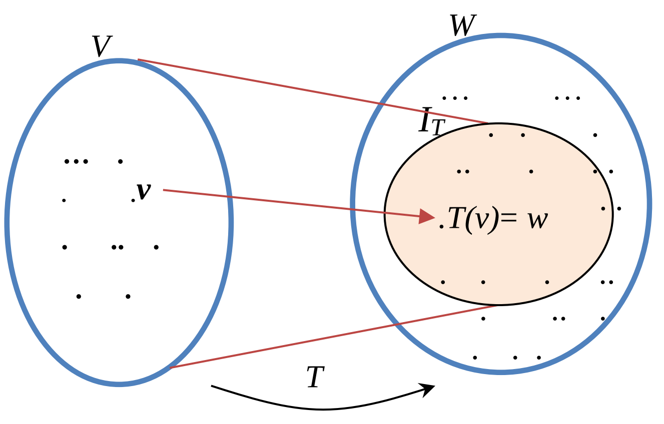


Figura 3. Diagrama de Venn de la Imagen de una transformación lineal

Es claro que,

$$w \in I_T \Leftrightarrow \exists\, v \in V: T(v) = w$$

Ejemplos:

1- La imagen de la transformación lineal que $S_Y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, S_Y(x, y) = (-x, y)$ está dado por

$$I_{S_Y} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : S_Y(x,y) = (a,b)\},$$

Es decir

$$I_{S_Y} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x,y) = (a,b)\}$$

Evidentemente, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ siempre es posible encontrar la preimagen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ya que es suficiente con asignar $x = -a$ y $y = b$. Luego $I_{S_Y} = \mathbb{R}^2$.

2- La imagen de la transformación lineal que $P_X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $P_X(x,y) = (x,0)$ que es la proyección de los vectores de $\mathbb{R}^2$ sobre el eje X, está dada por:

$$I_{P_X} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : P_X(x,y) = (a,b)\},$$

$$I_{P_X} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,0) = (a,b)\},$$

Es decir, $$(a,b) \in I_{P_X} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 0 \end{cases} \text{ siendo } x \in R,$$

por lo tanto

$$I_{P_X} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / b = 0\}$$

que es el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre el eje X.

Propiedades de la imagen de una transformación lineal

<u>Proposición 6</u>

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces la imagen de T es un subespacio vectorial del espacio vectorial W.

<u>Demostración</u>

i) $I_T \subset W$ por definición de I_T.

ii) $I_T \neq \emptyset$, pues $0_W \in I_T$ ya que por Proposición 1 de transformaciones lineales $\exists\, 0_V \in V: T(0_V) = 0_W$.

iii) Mostraremos que es verdadero el condicional $w_1, w_2 \in I_T \Longrightarrow w_1 + w_2 \in I_T$. Para ello partimos del antecedente

$$w_1, w_2 \in I_T \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} \exists\, v_1, v_2 \in V: T(v_1) = w_1 \wedge T(v_2) = w_2 \underbrace{\Longrightarrow}_{(2)} \exists\, v_1, v_2 \in V: T(v_1) + T(v_2)$$
$$= w_1 + w_2 \underbrace{\Longrightarrow}_{(3)} \exists\, v_1 + v_2 \in V: T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} w_1 + w_2 \in I_T.$$

Luego $w_1 + w_2 \in I_T$.

iv) Mostraremos que es verdadero el condicional $a \in F \wedge w \in I_T \Longrightarrow a\, w \in I_T$. Partimos del antecedente,

$$a \in F \wedge w \in I_T \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} a \in F \wedge \exists\, v \in V: T(v) = w \underbrace{\Longrightarrow}_{(4)} a \in F \wedge \exists\, v \in V: a\,T(v) = a\,w \underbrace{\Longrightarrow}_{(5)} \exists\, a\,v \in V: T(a\,v) = a\,w \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} a\,w \in I_T.$$

Luego $a\,w \in I_T$.

Finalmente por **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)**, la imagen de T es un subespacio vectorial de T.

Referencias

(1) Por definición de imagen de T.
(2) Sumando miembro a miembro ambas igualdades, porque la suma es LCI en W.
(3) Porque la suma es LCI en W y por axioma i) de la definición de transformación lineal.
(4) Porque (.) es LCE en W con escalares en F.
(5) Porque (.) es LCE en V y por axioma ii) de la definición de transformación lineal.

Q.E.D.

Proposición 7

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F y sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

$$I_T = W \Longleftrightarrow T\ es\ \text{sobre}yectiva.$$

Demostración

El bicondicional, $I_T = W \Longleftrightarrow T\ es\ \text{sobre}yectiva$, es la definición de función sobreyectiva.

Q.E.D.

Ejemplos:

De acuerdo a esta proposición se puede observar en los ejemplos precedentes que S_Y es sobreyectiva pero P_X no lo es.

1.5-Teorema (*Las dimensiones del núcleo y la imagen*)

Sean dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo F. Si $T: V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y V tiene dimensión finita n, entonces

$$\dim N_T + \dim I_T = \dim V$$

Sin demostración

1.6-Teorema (*De existencia y unicidad de las transformaciones lineales*)

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo F. Si $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V y $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ un subconjunto cualquiera de W, entonces existe y es única la transformación lineal $T: V \longrightarrow W$ tal que $\forall\, i = 1, \cdots, n; T(v_i) = w_i$.

Demostración

① Construiremos una función T de V en W, para ello realizaremos el siguiente razonamiento:

Por hipótesis B es una base de V, en consecuencia, si $u \in V$ entonces existen y son únicos los escalares $a_1, a_2, \cdots a_n \in F$ tales que u se escribe como combinación lineal de vectores de B, esto es

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$$

Definimos ahora

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i$$

Es claro que para cada vector

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i \in V$$

existe un único vector

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \in W$$

ya que para cada vector $u \in V$ existen y son únicas las coordenadas $a_1, a_2, \cdots a_n \in F$ respecto a la base B de V.

Por lo tanto queda bien definida la función

$$T: V \longrightarrow W$$
$$u \longmapsto T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \qquad (*)$$

②Probaremos ahora que la función T, así definida, es una transformación lineal.

i) Mostraremos que es verdadero el condicional $u, v \in V \Longrightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$.
En efecto,

$$u, v \in V \Rightarrow \exists!\, a_i \in F \wedge b_i \in F: u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ \wedge v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

Donde los escalares a_i y los escalares b_i son las coordenadas de u y v respectivamente con respecto a la base B del espacio vectorial V.

Ahora bien, la imagen del vector $u + v$ a través de la función T, es

$$T(u+v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\, v_i\right) \underbrace{=}_{(1)} T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i v_i + b_i v_i)\right) \underbrace{=}_{(2)} T\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\, v_i\right) \underbrace{=}_{(3)}$$

$$\underbrace{=}_{(3)} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\, w_i \underbrace{=}_{(4)} \sum_{i=1}^{n} (a_i w_i + b_i w_i) \underbrace{=}_{(1)} \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\, w_i \underbrace{=}_{(3)} T(u) + T(v)$$

Referencias

(1) Se aplica propiedad de las sumas finitas.
(2) Por la distributividad del producto por escalares respecto a la suma de escalares en el espacio vectorial V.
El lector puede probar que los n escalares $a_i + b_i$ son las coordenadas del vector $u + v$ respecto de la base B de V.
(3) Por definición $(*)$ de la función T.
(4) Como W es un espacio vectorial, vale la distributividad del producto por escalares respecto a la suma de escalares. Se aplica también propiedad de las sumas finitas.

ii) Probaremos que es verdadero el condicional $\alpha \in F \ \wedge \ u \in V \Longrightarrow T(\alpha\, u) = \alpha\, T(u)$
En efecto,

$$\alpha \in F \ \wedge \ u \in V \Longrightarrow \alpha \in F \wedge \exists!\, a_i \in F: u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

donde los escalares a_i son las coordenadas de u con respecto a la base B del espacio vectorial V.

Obtengamos ahora la imagen a través de la función T del vector $\alpha\, u$

$$T(\alpha\, u) = T\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \underbrace{=}_{(1)} T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i) v_i\right) \underbrace{=}_{(2)} \sum_{i=1}^{n} (\alpha\, a_i) w_i \underbrace{=}_{(3)} \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \underbrace{=}_{(2)} \alpha\, T(u)$$

Referencias
(1) Por distributividad del producto por escalares respecto a la suma de vectores en el espacio vectorial V y axioma de la Definición 1.
El lector puede probar que los n escalares αa_i son las coordenadas del vector αu respecto de la base B de V.
(2) Por definición $(*)$ de la función T.
(3) Por distributividad del producto por escalares respecto a la suma de vectores en el espacio vectorial W.

Luego por **i)** y **ii)** la función T es una **transformación lineal**.

③ Mostraremos que $\forall\, i = 1, \cdots, n; T(v_i) = w_i$.

En efecto, como $\forall\, i = 1, \cdots, n;\ v_i \in B$ entonces $\forall\, i = 1, \cdots, n;\ v_i \in V$ por lo tanto existen y son únicos los escalares que permiten escribir a cada vector v_i como combinación de todos los vectores de la base B de V, esto es

$$\begin{gathered} v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \cdots + 0v_n \\ \vdots \\ v_n = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_n \end{gathered}$$

Entonces las imágenes de cada uno de los vectores de la base B del espacio vectorial V vienen dadas por,

$$\begin{aligned} T(v_1) = T(1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n) &\overset{\text{Def. } (*) \text{ de la función } T}{=} 1w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_n = w_1 \\ T(v_2) = T(0v_1 + 1v_2 + \cdots + 0v_n) &\overset{\text{Def. } (*) \text{ de la función } T}{=} 0w_1 + 1w_2 + \cdots + 0w_n = w_2 \\ &\vdots \\ T(v_n) = T(0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_n) &\overset{\text{Def. } (*) \text{ de la función } T}{=} 0w_1 + 0w_2 + \cdots + 1w_n = w_n \end{aligned}$$

Luego,

$$\forall\, i = 1, \cdots, n; \quad T(v_i) = w_i.$$

④Finalmente mostraremos que es única la transformación lineal

$$T: V \longrightarrow W / \quad T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i$$

En efecto, sea $G: V \longrightarrow W$ otra transformación lineal tal que

$$\forall\, i = 1, \cdots, n; \quad G(v_i) = w_i.$$

Probaremos que $G = T$, que es equivalente a probar que para cada vector u del espacio vectorial V se verifica que la imagen de u a través de G y la imagen de u a través de T son iguales. Esto es,

$$G = T \Leftrightarrow \forall\, u\ \in V; \quad G(u) = T(u)$$

En efecto,

$$\forall\, u\ \in V; \quad G(u) = G\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i\right) \underbrace{=}_{(1)} \sum_{i=1}^{n} a_i\, G(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \underbrace{=}_{(2)} T(u)$$

Luego $G = T$, es decir T es única.

Referencia

(1) Por Proposición 3 de transformación lineal.
(2) Por definición $(*)$ de la función T.

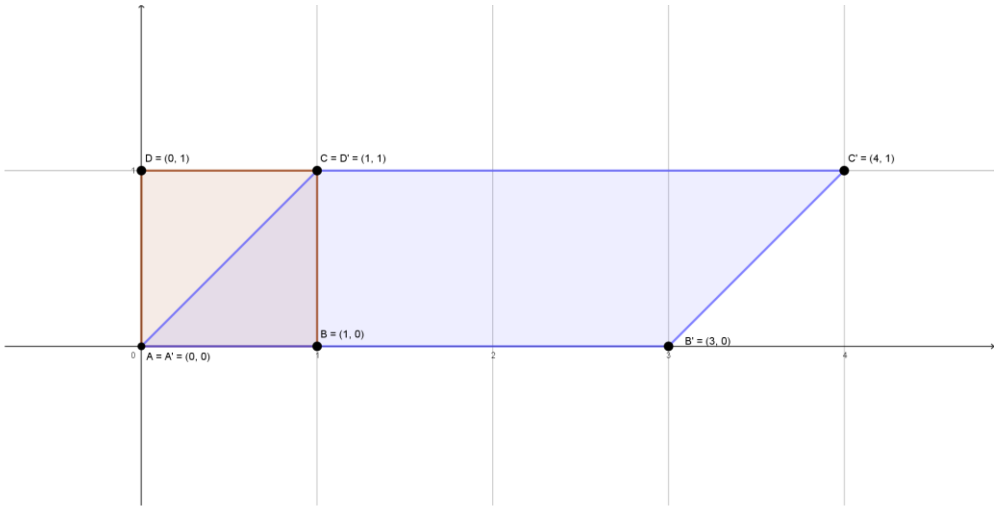
Q.E.D.

Nota

El Teorema precedente nos muestra que cualquier transformación lineal T de V en W queda unívocamente determinada si se conocen las imágenes de los vectores de una base dada del espacio vectorial V.

Ejemplo:

Se desea conocer, si existe, una transformación lineal que transforma el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0), (1,1), (0,1)$ en el paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(3,0), (4,1), (1,1)$ como lo muestra la figura.



Es decir, se busca una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, si existe, tal que transforme a los vértices del cuadrado $ABCD$ en los vértices del paralelogramo $A'B'C'D'$ del siguiente modo:

$A = (0,0)$ se transforma en $A' = (0,0)$, es decir $T(0,0) = (0,0)$

$B = (1,0)$ se transforma en $B' = (3,0)$, es decir $T(1,0) = (3,0)$

$C = (1,1)$ se transforma en $C' = (4,1)$, es decir $T(1,1) = (4,1)$

$D = (0,1)$ se transforma en $D' = (1,1)$, es decir $T(0,1) = (1,1)$

Según el teorema precedente, si se conocen las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida la transformación lineal T existe y además es única. En este caso son conocidas las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es decir: $T(1,0) = (3,0)$ y $T(0,1) = (1,1)$ por lo que la existencia y unicidad de T están aseguradas.

¿Cómo obtener T?

Se sabe que cualquiera sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, éste se puede escribir de modo único como combinación lineal de los vectores de la base $\{(1,0), (0,1)\}$.

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1),$$

Aplicando T a ambos miembros,

$$T(x, y) = T(x(1,0) + y(0,1))$$

y como T es una transformación lineal, resulta de la definición

$$T(x, y) = x\,T(1,0) + y\,T(0,1)$$

Además, se conocen las imágenes de $(1,0)$ y $(0,1)$ por lo que al reemplazar queda

$$T(x, y) = x\,(3,0) + y\,(1,1)$$

y operando en el segundo miembro se obtiene la siguiente expresión

$$T(x, y) = (3x + y, y)$$

Luego la transformación lineal que transforma el cuadrado $ABCD$ en el paralelogramo $A'B'C'D'$ es,

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T(x, y) = (3x + y, y)$$

Se puede verificar que

$$T(0,0) = (3 \cdot 0 + 0, 0) = (0,0)$$
$$T(1,1) = (3 \cdot 1 + 1, 1) = (4,1)$$

Ejercicio

Realice el alumno el mismo proceso pero tomando como base el conjunto $\{(1,0),(1,1)\}$ y verifique que obtiene la misma T.

Nota

Del ejemplo se observa que sólo es necesario conocer las imágenes de los vectores de una base del espacio de partida para que la transformación lineal quede bien determinada.

2.- MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Teorema

Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sea B una base de V y C una base de W. Para cada transformación lineal T de V en W, existe una única matriz $A \in F^{m \times n}$, tal que

$$\forall x \in V; \quad [T(x)]_C = A[x]_B$$

Demostración

a) Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ la base dada de V y $C = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ la base dada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T está determinada por su efecto sobre los vectores $v_i \in B$ (por el teorema anterior).

Es claro ver que $T(v_1),\ T(v_2), \cdots, T(v_n) \in W$, donde $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son los vectores de la base B.

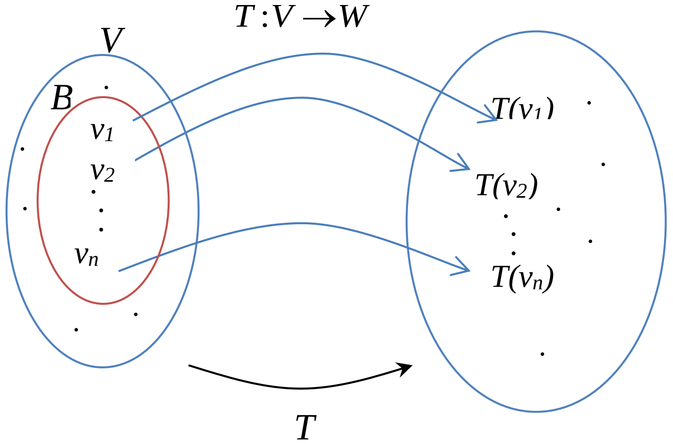


Figura 4. Diagrama de Venn de las imágenes de los vectores de la base B de V.

Luego, cada uno de los n vectores $T(v_j)$ se expresa de manera única como combinación lineal de vectores de la base $C = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ de W. Es decir,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}w_i \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i \end{aligned} \qquad (\gamma)$$

Asignamos a cada escalar a_{ij} doble subíndice, de modo tal que el primero está asociado a cada vector de la base C y el segundo se corresponde con cada vector de la base B.

Es decir,

$$\forall\, j = 1, \cdots, n; \quad T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i \qquad (\delta)$$

Los n escalares a_{ij} son las coordenadas del vector $T(v_j)$ respecto a la base C de W. En consecuencia, las coordenadas de estos vectores respecto de la base C de W son

$$[T(v_1)]_C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_C = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \qquad [T(v_n)]_C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la transformación lineal T está determinada por los $m \times n$ escalares a_{ij} a través de (γ).

Construimos una matriz A cuyas columnas están formadas por las coordenadas de los vectores $T(v_1),\ T(v_2), \cdots, T(v_n)$ respecto de la base C de W, esto es

$$\begin{array}{cccc} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es claro que la matriz A pertenece al espacio vectorial $F_F^{m\times n}$. Además, es única debido a la unicidad de las coordenadas a_{ij}.

La matriz A se denomina "*matriz asociada a T respecto al par de bases B y C*".

b) Probaremos ahora que

$$\forall\, x \in V; \quad [T(x)]_C = A[x]_B$$

Es decir, veremos cómo la matriz A determina la transformación lineal T.

Si $x \in V$, entonces existen y son únicos $x_1,\ x_2, \cdots, x_n \in F$ tales que x se escribe como combinación lineal de vectores de la base B de V, es decir

$$x = x_1 v_1 + x_2\, v_2 + \cdots + x_n\, v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j$$

por lo que el vector de coordenadas del vector x respecto a la base B viene dado

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Calculamos $T(x)$,

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, v_j\right) \underbrace{=}_{(1)} \sum_{j=1}^{n} x_j\, T(v_j) \underbrace{=}_{(2)} \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) \underbrace{=}_{(3)} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_j\,(a_{ij}\, w_i)\right) \underbrace{=}_{(4)}$$

$$\underbrace{=}_{(4)} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\underbrace{(x_j a_{ij})}_{\in F}\, w_i\right) \underbrace{=}_{(5)} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{(x_j a_{ij})}_{\in F}\, w_i\right) \underbrace{=}_{(3)} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right)}_{\in F} w_i$$

Es decir,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{ij}\right) w_i$$

O bien,

$$T(x) = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j}\right) w_1}_{i=1} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{2j}\right) w_2}_{i=2} + \ \ldots + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{mj}\right) w_m}_{i=m}$$

Observemos que $T(x)$ está expresado como una combinación lineal de vectores de la base C de W, y las m coordenadas del vector $T(x)$ son

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{1j}, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{2j}, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{mj}$$

luego el vector de coordenadas de $T(x)$ respecto de la base C de W es

$$[T(x)]_C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j\, a_{mj} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i = 1 \\ \leftarrow i = 2 \\ \\ \leftarrow i = m \end{array} \qquad \Longrightarrow [T(x)]_C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j \end{bmatrix} \qquad (\rho)$$

Referencias
(1) Por Proposición 3 de transformaciones lineales.
(2) Por (δ).
(3) Por propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma finita de vectores de *W*.
(4) Por axioma de espacio vectorial
(5) Por propiedad de las sumas finitas.

Calculamos ahora $A\,[x]_B$.

$$A\,[x]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j \end{bmatrix} \qquad (\theta)$$

De (ρ) y (θ) se sigue que $\forall\, x \in V;\quad [T(x)]_C = A[x]_B$

Q.E.D.

Nota
La matriz asociada representa a la transformación lineal en las bases B y C.

Ejemplo:

Sea la transformación lineal, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; T(x,y,z) = (x+y, z)$ y sean $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ y $C = \{(1,1), (0,1)\}$ las bases consideradas para los espacios $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Es claro que las imágenes de los vectores de la base B son vectores de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores de la base C, es decir:

$$T(1,1,1) = (2,1) = a_{11}(1,1) + a_{21}(0,1) \quad ①$$

$$T(0,1,1) = (1,1) = a_{12}(1,1) + a_{22}(0,1) \quad ②$$

$$T(0,0,1) = (0,1) = a_{13}(1,1) + a_{23}(0,1) \quad ③$$

Donde

$$[T(1,1,1)]_C = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad [T(0,1,1)]_C = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \quad [T(0,0,1)]_C = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

Por lo que, la matriz asociada a T respecto de las bases B y C es:

$$A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x3}$$

Para obtener los elementos de A_T se resuelven los últimos miembros de ①,② y ③ e igualando se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$① \begin{cases} a_{11} & = 2 \\ a_{11} + a_{21} & = 1 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} a_{12} & = 1 \\ a_{12} + a_{22} & = 1 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} a_{13} & = 0 \\ a_{13} + a_{23} & = 1 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas se determinan las coordenadas:

$$① \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = -1 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 0 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$$

Luego la matriz asociada a T es

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{2x3}$$

Por otro lado, sea el vector $x = (2,1,0) \in \mathbb{R}^3$. Es fácil ver que $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ya que,

$$(2,1,0) = 2(1,1,1) + (-1)(0,1,1) + (-1)(0,0,1),$$

y según el teorema precedente, es posible obtener las coordenadas de la imagen de x empleando la matriz asociada del siguiente modo:

$$[T(x)]_C = A_T[x]_B$$

Es decir,

$$[T(2,1,0)]_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

luego $T(2,1,0) = 3(1,1) + (-3)(0,1) = (3,0)$.

3.- TRANSFORMACIÓN LINEAL ASOCIADA A UNA MATRIZ

Proposición

Sea F un cuerpo. Si $A \in F_F^{m\times n}$ entonces la función $T: F_F^{n\times 1} \to F_F^{m\times 1}$ definida por $T(X) = AX$ es una transformación lineal del espacio vectorial $F_F^{n\times 1}$ en el espacio vectorial $F_F^{m\times 1}$.

Demostración

Probaremos que $T: F_F^{n\times 1} \to F_F^{m\times 1} / T(X) = AX$ es una transformación lineal

i) $X, Y \in F_F^{n\times 1} \Longrightarrow T(X+Y) = T(X) + T(Y)$

En efecto,

$$T(X+Y) \underbrace{=}_{(1)} A(X+Y) \underbrace{=}_{(2)} AX + AY \underbrace{=}_{(3)} T(X) + T(Y)$$

Referencias

(1) Por definición de T.
(2) Por distributividad del producto de matrices respecto a la suma de matrices
(3) Por definición de T.

ii) $a \in F \wedge X \in F_F^{n\times 1} \Longrightarrow T(a\,X) = a\,T(X)$

En efecto,

$$T(a\,X) \underbrace{=}_{(1)} A(a\,X) \underbrace{=}_{(2)} a(AX) \underbrace{=}_{(3)} a\,T(X)$$

Referencias

(1) Por definición de T.
(2) Por propiedad del producto de escalar por matriz
(3) Por definición de T.

Luego por **i)** y **ii)** T es una transformación lineal.

Q.E.D.

Notas

1.- Dada una matriz $A \in F_F^{m\times n}$ queda asociada a ella, de modo natural, una transformación lineal $T: F_F^{n\times 1} \to F_F^{m\times 1}$ definida por $T(X) = AX$.

2.- Observemos que aquí el vector $X \in F_F^{n\times 1}$ por lo que es igual al vector de coordenadas de X respecto a la base canónica del espacio vectorial $F_F^{n\times 1}$ y de igual manera, el vector $T(X) \in F_F^{m\times 1}$ es igual al vector de coordenadas de $T(X)$ respecto a la base canónica del espacio vectorial $F_F^{m\times 1}$, por lo tanto la igualdad $T(X) = AX$ nos indica que la matriz A es la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas de los espacios $F_F^{n\times 1}$ y $F_F^{m\times 1}$.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, entonces queda asociada a ella la transformación lineal $T: \mathbb{R}^{2\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ definida por $T(X) = AX$, es decir

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ -2y \\ x \end{bmatrix}$$