UNSE –FCEyT

ALGEBRA I - ALGEBRA

GUÍA PRÁCTICA Nº 7 – 2023

TEMA: MATRICES Y GRAFOS

Objetivos:

Que los alumnos logren:

* Plantear y resolver cálculos matriciales.
* Interpretar matricialmente un grafo.
* Aplicar las matrices en la teoría de grafos.

1) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2i \\ 4 & -i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula las siguientes operaciones cuando sea posible

a) $A.B$ b) $B.A$ c) $A^t - 3B$

2) Si A es una matriz de orden 3x3 , B es de orden 3x2 y C es de orden 2x3

a) ¿Cúal es el orden de la matriz AB?
b) ¿Cúal es el orden de la matriz B+C^t?
c) ¿Cúal es el orden de la matriz 5A^t?

3) Encuentra una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} . A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la siguiente ecuación: $2(B - X) = 3A$

5) Calcula la traza de las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2i & 3+i \\ 2-i & 6-i & -2 \\ -1 & 0 & 5+3i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -i & 3 & -1 \\ 0 & 8i & -4i \\ 1+4i & 0 & 5-i \end{pmatrix}$$

6) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -i & 2i \end{pmatrix}$$

calcula $P(A)$, siendo $P(X) = X^2 - 2X + \mathbb{I}_{2\times 2}$

7) Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económica), M (medio), L(lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15M y 10L de butacas; 12 modelos E , 8M ,5L, de mecedoras y 18 modelos E, 20M y 12L de sillas.
a) Representa esta información en una matriz.
b) Calcula la producción de un año.
c) ¿Cuántas butacas del modelo M produce al año?, ¿Cuántas mecedoras, entre los tres modelos, produce al año?

8) La empresa VOST quiere producir acero. Es necesario, entre otras materias primas, minerales de hierro y carbono duro.

La siguiente tabla muestra las demandas (en toneladas) por semana y durante un mes (cuatro semanas)

	Hierro	Carbono duro
1º semana	9t	8t
2º semana	5t	7t
3º semana	6t	4t
4º semana	7t	5t

Existen tres proveedores diferentes que ofrecen estas materias primas con los siguientes costos por tonelada.

	P1	P2	P3
Hierro	2700	3150	2650
Carbono duro	2100	2050	2200

Resuelve matricialmente las siguientes situaciones:
a) Calcula la demanda de materia prima durante 6 meses.
b) Averigua los costos por semana y durante un mes según cada proveedor.
c) ¿Cuál es el proveedor más conveniente?

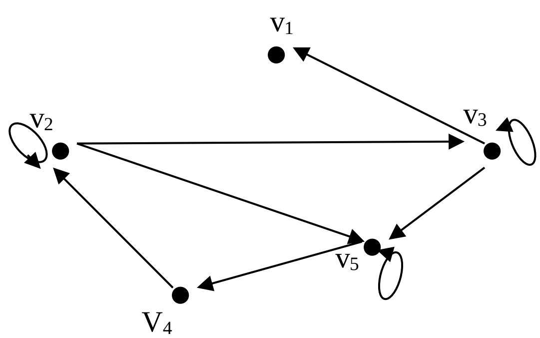
9) Determina el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10) Dadas las matrices A y B determina, si existe, la inversa de cada una mediante el método de Gauss Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ i & 0 & 2 \\ -2 & -2i & 3 \end{pmatrix}$$

11) Dado el grafo (V,R)



a) Expresa por extensión la relación inversa R^{-1}
b) Determina la matriz asociada al grafo (V,R) y (V,R^{-1}) respectivamente.

12) Para cada una de las siguientes relaciones definidas en el conjunto A=$\{1,2,3\}$determina la matriz asociada en cada caso.
a) $R_1=\{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\}$
b) $R_2=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

13) Dadas las matrices

$$M_{R1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{R2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dibuja los grafos correspondientes con vértices en el conjunto $\{a,b,c,d\}$
b) Realiza las operaciones booleanas $M_1 \vee M_2$, $M_1 \wedge M_2$, $M_1 \circ M_2$

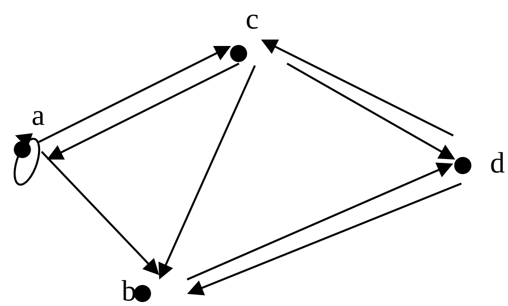
14) Sean (E,R_1) y (E,R_2) grafos definidos en un conjunto E=$\{a,b,c\}$ cuyas matrices asociadas son

$$M_{R1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Halla las matrices asociadas a

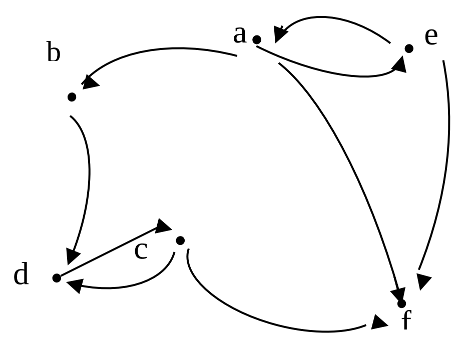
a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \circ R_2$

15) Sea el grafo



a) Halla la matriz asociada y calcule M^2 y M^3
b) Indica los caminos que representan los elementos de las matrices anteriores.
c) Realiza la multiplicación booleana y compara los resultados.

16) Dado el grafo



a) Escribe la matriz de incidencia
b) Dibuja el grafo no orientado que le corresponde e indica su matriz de incidencia.

17) Resuelve mediante **determinante** las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} -x & -2 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3x & -2 \\ -4 & x+3 \end{vmatrix} = 3x+1$

18) ¿Cuál de los siguientes es el cofactor del elemento $a_{23} = -3$ en $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

a) -4 b) 1 c) 5 d) -5

19) Calcula el determinante de las siguientes matrices mediante el **desarrollo por fila o columna** o Aplica propiedades para agilizar el cálculo.

A $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B $= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1+i \\ 0 & 4i & -1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ C $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

D $= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ E $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

20) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4$, calcula, sin desarrollar

a) $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}-2a_{21} & a_{12}-2a_{22} & a_{13}-2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

21) Dadas las matrices:

A $= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B $= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula: i) $D(A)$ ii) $D(B)$ iii) $D(A+B)$ iv) $D(A.B)$

22) Sea la matriz:

A$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $D(A)$ y halla $Adj(A)$

b) Verifica que: $A.Adj(A) = Adj(A).A = D(A).I_{3x3}$

23) Encuentra si existe la inversa de A mediante su adjunta

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

24) Determina para qué valores de k la matriz A tiene inversa

a) A=$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ b) A=$\begin{pmatrix} 1 & k & k-2 \\ k-1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$