Unidad N° 4: Elementos de Combinatoria

- **Introducción:**

La combinatoria es una rama de la Matemática que trabaja con los problemas de Conteo.

Un principio o regla de gran utilidad práctica es la

Regla del Producto

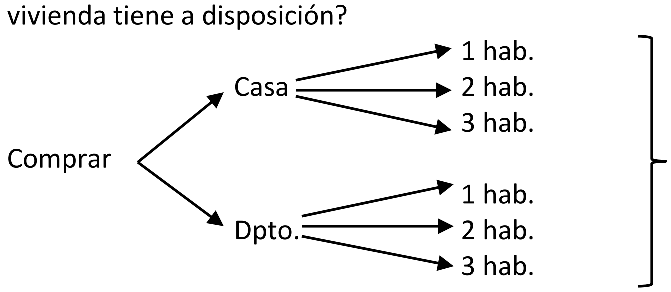
Si una Tarea, Proceso o Actividad se puede dividir en dos (o más) etapas en donde:
- la primera etapa se puede realizar de n_1 formas,
- la segunda etapa se puede realizar de n_2 formas,

entonces hay $n_1 . n_2$ formas de completar la tarea.

Nota: Esta regla se puede generalizar para k etapas

Para calcular la cantidad de formas distintas de realizar la Tarea se puede realzar el producto de: $n_1 . n_2 . \dots n_k$

Ejemplo: Una familia desea comprar una vivienda y se le presentan las siguientes posibilidades: comprar una casa o departamento. A su vez, cada una puede ser de 1, 2 o 3 dormitorios. ¿Cuántos tipos posibles de vivienda tiene a disposición?



Tiene: 2.3 = 6 (opciones posibles de compra)

Otro Ejemplo ¿Calcular la cantidad de patentes nuevas que pueden hacerse?:

Referencias:
L : letras
N: números
Para ubicar una **letra** hay **26 posibilidades** y para ubicar un **número** hay **10 posibilidades**

L L N N N L L = 26 . 26 . 10 . 10 . 10 . 26 . 26

Pero no todo se resuelve por la ley del producto pues hay situaciones que requieren aplicar una suma, por ejemplo en la siguiente situación una persona tiene que decidir qué calzado utilizar y tiene 5 pares de zapatos y tres pares de zapatillas, ¿de cuántas maneras puede utilizar los calzados?

En este caso queda 5 + 3 = 8 posibilidades de calzado para utilizar

PRESENTACIÓN GENERAL DE LOS PROBLEMAS DE LA COMBINATORIA SIMPLE

Dado un conjunto no vacío A de n elementos, con $n \in \mathbb{N}$, se presentan los siguientes problemas:

PROBLEMA 1: Se quieren formar agrupaciones con los n elementos del conjunto A; dos agrupaciones son distintas si el orden de sus elementos es distinto. ¿Cuántas agrupaciones es posible formar?
Solo importa el orden

Ejemplo: Se necesita ordenar 10 libros en un estante. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacerlo?

PROBLEMA 2: Sea $k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$,
Se quieren formar agrupaciones de k elementos con los n elementos del conjunto A; dos agrupaciones son distintas si tienen algún elemento distinto o el orden en que se disponen los mismos k elementos es distinto. ¿Cuántas agrupaciones de k elementos es posible formar?
Es importante si hay elementos distintos o si cambia el orden de los elementos

Ejemplo: Con 5 dígitos (1, 2, 3, 4, 5) ¿Cuántos números de 3 dígitos (distintos) se pueden formar?
En este ejemplo $n = 5$ y $k = 3$.

Nota: Si $k = n$ estamos en la situación del primer problema

PROBLEMA 3: Sean $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\ y\ k \leq n$
Se quieren formar agrupaciones de k elementos con los n elementos del conjunto A; dos agrupaciones son distintas si difieren en algún elemento, **el orden no interesa**. ¿Cuántas agrupaciones de k elementos es posible formar?
Solo importa si hay elementos distintos

Ejemplo: En un curso de 20 estudiantes se desean formar comisiones o delegaciones de 5 estudiantes ¿Cuántas delegaciones se pueden formar?
En este ejemplo $n = 20$ y $k = 5$.

Con el objeto de desarrollar los temas de la Teoría Combinatoria simple, estudiaremos cierto tipo de funciones cuyo dominio y recorrido son conjuntos finitos identificables con intervalos naturales.

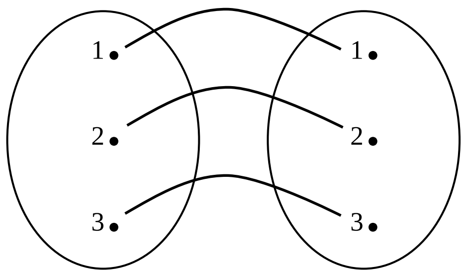
I. PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS (Problema 1):

Dado un conjunto A, finito de **n** elementos, se define como **PERMUTACIÓN** en A, a toda aplicación biyectiva de A sobre sí mismo.

Ya que Card(A) = **n** (número de elementos de A), se puede identificar a los elementos de A con los números naturales **1, 2, 3, . . . , n**; entonces se considera que **In** = {1, 2, 3, . . . , n} es el conjunto en el cual están definidas las funciones biyectivas.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I_n} \to \boldsymbol{I_n}$$

Ejemplo: si **n** = 3; **Card(A) = 3** ; $\mathbf{I_3}$= { 1 , 2 , 3 }
Las posibles funciones biyectivas son seis:



$\mathbf{f_1}$ = { (1 , 1) ; (2 , 2) ; (3 , 3) }
$\mathbf{f_2}$ = { (1 , 2) ; (2 , 3) ; (3 , 1) }
$\mathbf{f_3}$ = { (1 , 3) ; (2 , 1) ; (3 , 2) }
$\mathbf{f_4}$ = { (1 , 1) ; (2 , 3) ; (3 , 2) }
$\mathbf{f_5}$ = { (1 , 2) : (2 , 1) ; (3 , 3) }
$\mathbf{f_6}$ = { (1 , 3) ; (2 , 2) ; (3 , 1) }

Notación
El Número de funciones biyectivas o Permutaciones es P(n)

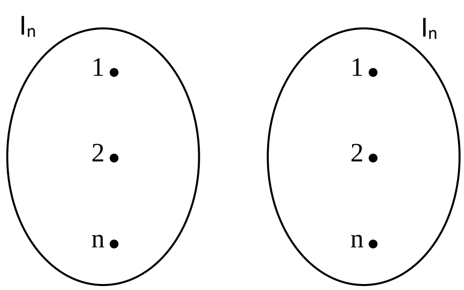
Tarea: Construir todas las funciones biyectivas
Etapas: Asignar una imagen a cada elemento
Etapa 1: asignación de la imagen a 1 — 3 posibilidades
Etapa 2: asignación de la imagen a 2 — 2 posibilidades
Etapa 3: asignación de la imagen a 3 — 1 posibilidad

Por la Ley del Producto la cantidad de funciones biyectivas es P(3) *= 3 . 2 . 1 = 3! = 6*

Observación **S3** = { **f1 , f2 , f3 , f4 , f5 , f6** }

El conjunto de todas las permutaciones se indica con **S*n***. Se observa que la composición de dos permutaciones da por resultado otra permutación.-

En general o generalizando tenemos



Etapa 1: asignación de la imagen a 1 → n posibilidades

Etapa 2: asignación de la imagen a 2 → n - 1 posibilidades

Etapa 3: asignación de la imagen a 3 → n - 2 posibilidades

Etapa n : asignación de la imagen a n → n – (n – 1) posibilidad

Por la Ley del Producto la cantidad de funciones biyectivas es P(n) = n. (n-1) …3 . 2 . 1 =n!

Propiedad
Sea **Card(A)=** n **;** $n \in \mathbb{N}$
El número de permutaciones es *P(n) = n. (n-1) …3 . 2 . 1 =n!*

NOTA: La demostración formal se realiza por Inducción Completa

EJEMPLO: ¿Cuál es el número de formas diferentes en que 10 libros se pueden distribuir en un estante?

P(10)=10!

II. ARREGLOS O VARIACIONES SIMPLES DE ORDEN k, TOMADAS DE n ELEMENTOS: (Problema 2)

Sea **k < n**, nos interesan las aplicaciones inyectivas de I_k en I_n.

Cada agrupación de k elementos tomados de los n elementos de A se puede formas mediante un función inyectiva

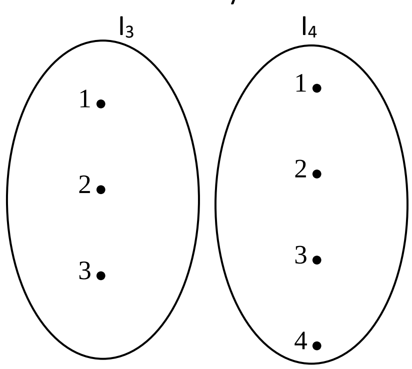
$$f: I_k \to I_n$$

A estas funciones se les llaman **ARREGLOS o VARIACIONES SIMPLES DE ORDEN k.** El número de todos los arreglos o variaciones se simboliza por $\mathbf{A_{(n,k)}}$ **o** $\mathbf{V_{(n,k)}}$

Consideremos el siguiente **ejemplo:**

$k = 3$; $n = 4$ Card(A) = 4 $I_3 = \{1, 2, 3\}$ $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

Las funciones inyectivas **f**: $I_3 \to I_4$

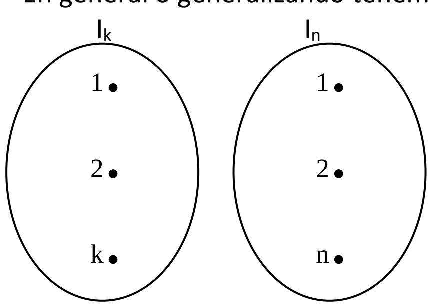


Tarea: Construir todas las funciones inyectivas
Etapas: Asignar una imagen a cada elemento de I_3

Etapa 1: asignación de la imagen a 1 — 4 posibilidades
Etapa 2: asignación de la imagen a 2 — 3 posibilidades
Etapa 3: asignación de la imagen a 3 — 2 posibilidades

Por la Ley del Producto la cantidad de funciones inyectivas es $V_{(4,3)} = 4 . 3 . 2 = 24$

En general o generalizando tenemos



Etapa 1: asignación de la imagen a 1 $\to$ n posibilidades

Etapa 2: asignación de la imagen a 2 $\to$ n - 1 posibilidades

Etapa 3: asignación de la imagen a 3 $\to$ n - 2 posibilidades

Etapa k: asignación de la imagen a k $\to$ n – (k–1)= n- k+1 posibilidades

Por la Ley del Producto $V_{(n,k)} = n . (n - 1) . . . n - k + 1$ si multiplicamos y dividimos por (n – k)! obtenemos

$$\mathbf{V_{(n,k)}} = \frac{n.(n-1)....(n-k+1).(n-k).(n-k-1). ...3.2 .1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

O sea tenemos

$$\mathbf{V_{(n,k)}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

NOTAS:

1.- El número de aplicaciones inyectivas de I_k en I_n, se designa:

$$V_{(n,k)} = \text{Card } A_{(n,k)}$$

2.- Si $k = n$ serán aplicaciones biyectivas o sea permutaciones

Propiedad:

Sea $A \neq \varnothing$; $Card(A) = n$; $k \leq n$; con $n, k \in N$

El número de variaciones de orden **k** de **n** elementos es : $V_{(n,k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

NOTA: La demostración formal se realiza por Inducción Completa

Ejemplo: Con 5 dígitos (1, 2, 3, 4, 5) ¿Cuántos números de 3 dígitos (distintos) se pueden formar?

$$V_{(5,3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60$$

III. COMBINACIONES SIMPLES DE ORDEN k, TOMADAS DE n ELEMENTOS (Problema 3)

Sobre el conjunto de variaciones $V_{(n,k)}$ **(o funciones inyectivas)** se define la siguiente relación de equivalencia $f \sim g$ si y sólo si:

$$Im(f)= Im(g)$$

Nota: La expresión $f \sim g$ se lee "**f** es equivalente a **g**"

<u>Relación de Equivalencia en el conjunto de variaciones</u>

"Dos funciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto imagen"

Del ejemplo de variciones $V_{(4,3)}$ se considera la relación de equivalencia anterior, recordemos que hay 24 funciones distintas, entre ellas

Sean: $f_1=\{(1,1);(2,3);(3,4)\}$, $f_2=\{(1,2);(2,3);(3,4)\}$ $f_3=\{(1,3);(2,1);(3,4)\}$, etc.
$Im(f_1) =\{1, 3, 4\}$; $Im(f_2) =\{2, 3, 4\}$; $Im(f_3) =\{3, 1, 4\}$; etc. $Im(f_1) =\{1, 3, 4\}$;

Vemos que $Im(f_1) = Im(f_3)$, por lo que $f_1 \sim f_3$ o sea son equivalentes

Si caracterizamos a las funciones sólo por el conjunto imagen, ya que tienen el mismo dominio, tendremos:

$f_1 \to \{1,3,4\}$; $f_2 \to \{2,3,4\}$; $f_3 \to \{3,1,4\}$; …

Colocando en una columna las funciones equivalentes obtendremos en $\mathbf{V_{(4,3)}}$:

123	124	134	234
132	142	143	243
213	214	314	324
231	241	341	423
312	412	413	423
321	421	431	432

Cada columna es una clase de equivalencia. En cada clase de equivalencia hay tantas funciones como aplicaciones biyectivas de $\mathbf{I_3}$ en $\mathbf{I_3}$; es decir, 3! elementos. El número de clases de equivalencia es igual al número total de funciones inyectivas de $\mathbf{I_3}$ en $\mathbf{I_4}$, dividido por el número de elementos de cada clase **(3!)**

$$C(4,3)=\frac{V(4,3)}{P(3)}=\frac{V(4,3)}{3!}=\frac{4!}{(4-3)!.3!}=4$$

Si generalizamos tenemos: $\mathbf{C_{(n,k)}} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

OBSERVACION:
Dar una combinación, es dar el conjunto imagen de un arreglo o variación, es decir, es un subconjunto **(no interesando el orden)** de los **k** objetos tomados de los **n** dados.

Propiedad : el número de combinaciones de orden K, de los n elementos es

$$C_{(n,k)} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

EJEMPLOS:

1.-Dados 5 (cinco) puntos en el plano tales que 3(tres) cualesquiera no estén alineados. ¿Cuántas rectas determinan?

$$C_{(5,2)} = \frac{5!}{(5-2)!.2!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.2 = 10$$

2.-¿ Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene un conjunto de 12 elementos?

$$C_{(12,4)} = \frac{12!}{(12-4)!.4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!.4.3.2.1} = 11.5.9 = 495$$

COMBINATORIA CON REPETICION

I. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Si un conjunto de n elementos tiene un elemento repetido α veces, entonces el número de permutaciones con esa repetición es:

$$\boldsymbol{P_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha!}}$$

Ejemplo: ¿Cuántos números distintos es posible formar permutando los dígitos del número 23.**5**4**5**.1**5**8?

En este caso $n = 8$ y el numero 5 esta repetido 3 veces entonces $\alpha = 3$. Luego los números distintos son:

$$P_8(3) = \frac{8!}{3!}$$

Generalización: Si los elementos repetidos son varios, se procede análogamente

Ejemplo: ¿Cuántos números distintos es posible formar permutando los dígitos del número 7**1**.3**14**.**4**2**4**?

En este caso $n = 8$; el número 1 esta repetido 2 veces y el número 4 esta repetido 3 veces, entonces $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Luego los números distintos son:

$$P_8(2{,}3) = \frac{8!}{2!\,3!}$$

II. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Sean $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\; y\; k \leq n$

Se forman agrupaciones de k elementos que se pueden repetir. Entonces cuando la variación tiene repetición, la fórmula es:

$$\boldsymbol{V^r_{(n,k)} = n^k}$$

Ejemplo: Tenemos 5 dígitos y se los quiere ubicar en 3 lugares. ¿Cuántos códigos de 3 posiciones se pueden formar con 5 dígitos?

$$\underline{5}\,.\,\underline{5}\,.\,\underline{5} = 5^3 \quad \text{entonces} \quad V^r_{(5,3)} = 5^3$$

NUMERO COMBINATORIO

Sean los enteros no negativos **k** y **n,** tales que **k ≤ n,** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$ se denomina número combinatorio de numerador **n** y denominador **k** y se indica mediante la forma: $\binom{n}{k}$ que se lee **"n sobre k"**

EJEMPLOS: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!.4!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.4.3.2.1} = 35$

OBSERVACION: $\binom{n}{k} = C_{(n,k)}$

Casos particulares:

1).- $\binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0!.0!} = 1$; 2).- $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!.(n-1)!} = \dfrac{n.(n-1)!}{1.(n-1)!} = n$

3).- $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!.n!} = 1$; 4).- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!.0!} = 1$

NUMEROS COMBINATORIOS COMPLEMENTARIOS:

Dos números combinatorios de igual numerador tales que la suma de sus denominadores es igual al numerador se llaman complementarios.

EJEMPLO: $\binom{7}{5} y \binom{7}{2}; \binom{10}{4} y \binom{10}{6}$

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS:

TEOREMA 1.- Los números combinatorios complementarios son iguales.

DEMOSTRACION:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

La suma de dos números combinatorios no es, en general un número combinatorio, pero vale el:

TEOREMA 2.-"FORMULA DE STIEFFEL"

Si **k ≤ n**, entonces: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

DEMOSTRACION:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!.[n-1-(k-1)]!}+\frac{(n-1)!}{k!.(n-1-k)!}=$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!.(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!.(n-k-1)!}=\frac{k.(n-1)!+(n-k).(n-1)!}{k!.(n-k)!}=$$

$$\frac{(k+n-k).(n-1)!}{k!.(n-k)!}=\frac{n.(n-1)!}{k!.(n-k)!}=\frac{n!}{k!.(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Esta fórmula sirve de base para la construcción del **"Triángulo de Tartáglia" (o de Pascal)** en el cuál cada número combinatorio se obtiene sumando los que están sobre él. El Triángulo es simétrico con respecto a la vertical central por la propiedad de complementarios.

n=0	$\binom{0}{0}$	**1**
n=1	$\binom{1}{0},\binom{1}{1}$	**1 1**
n=2	$\binom{2}{0},\binom{2}{1},\binom{2}{2}$	**1 2 1**
n=3	$\binom{3}{0},\binom{3}{1},\binom{3}{2},\binom{3}{3}$	**1 3 3 1**
n=4	$\binom{4}{0},\binom{4}{1},\binom{4}{2},\binom{4}{3},\binom{4}{4}$	**1 4 6 4 1**
. .	. . . .	. . . .

POTENCIA NATURAL DEL BINOMIO - BINOMIO DE NEWTON.

Sabemos que :

$(a + b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b = 1a^1b^0 + 1a^0b^1 =$ $\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2 =$ $\binom{2}{0}a^2b^0+\binom{2}{1}a^1b^1+\binom{2}{2}a^0b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 =$ $\binom{3}{0}a^3b^0+\binom{3}{1}a^2b^1+\binom{3}{2}a^1b^2+\binom{3}{3}a^0b^3$

OBSERVACION: Los coeficientes numéricos y los renglones del triángulo de Tartaglia son los mismos. Demostraremos que, en general, la potencia de un binomio corresponde al siguiente desarrollo:

TEOREMA: Cualesquiera sean **a** y **b**en R y **n** $\in$ N

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

DEMOSTRACION: utilizaremos el método de inducción completa y las propiedades de los números combinatorios

NOTA: Se propone, como ejercicio, realizar la demostración.

CONCLUSION: El método de inducción asegura que la fórmula es verdadera para cualquier exponente natural.

EJEMPLO:

$\left(a^2x-3b\right)^5 = \sum_{i=0}^{n=5} \binom{5}{i} \ (a^2x)^{5-i}(-3b)^i = \binom{5}{0}(a^2x)^5 + \binom{5}{1}(a^2x)^4 .\ (-3b)^1 + \binom{5}{2}(a^2x)^3 .\ (-3b)^2 +$

$\binom{5}{3}(a^2x)^2 .\ (-3b)^2 + \binom{5}{4}(a^2x)^1 .\ (-3b)^4 + \binom{5}{5} .\ (-3b)^5 = 1\ (a^2x)^5 + 5\ (a^2x)^4\ (-3b)^1 + 10\ (a^2x)^3\ (-3b)^2 + 10$

$(a^2x)^2\ (-3b)^3 + 5\ (a^2x)^1\ (-3b)^4 + 1\ (-3b)^5 = a^{10}x^5 - 5\ a^8x^4 .\ 3b + 10\ a^6x^3 .\ 3^2b^2 - 10\ a^4x^2 .\ 3^3b^3 + 5a^2x^1 .\ 3^4b^4$

$- 1\ .\ 3^5b^5 = a^{10}x^5 - 15\ a^8x^4 .\ b + 90\ a^6x^3 .\ b^2 - 270\ a^4x^2 .b^3 + 405\ a^2x^1 .\ b^4 - 243\ b^5.$