UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS
Carreras: –Profesorado en Informática
–Programador Universitario en Informática
Asignatura: LÓGICA **AÑO: 2022**

UNIDAD 3 – LÓGICA DE PREDICADOS

1 – ESTRUCTURA DE LAS PROPOSICIONES

El desarrollo del cálculo proposicional se basa en unidades de información, cuya estructura se contempla como un todo, **sin diferenciar sus componentes.** Este planteamiento **no** permite **representar** lógicamente ciertos **razonamientos deductivos**, que, sin embargo, son correctos en el lenguaje coloquial. Por ejemplo:

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.
Luego, Sócrates es mortal.

Este razonamiento, simbolizado con el lenguaje del cálculo **proposicional,** tiene la siguiente representación lógica:

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{\;q\;} \\ r \end{array}$$

Si se pretende probar su validez mediante el método del **condicional asociado**, se obtiene la fórmula $\mathbf{p \land q \Rightarrow r}$, cuya tabla de valores de verdad es una **contingencia.**

El hecho de que este **razonamiento válido,** resulte **inválido** analizado por la lógica **proposicional**, se debe a que la relación de implicación entre sus **premisas** y su **conclusión** se funda en ciertas **características internas** de las proposiciones atómicas que lo componen. O sea que, en este ejemplo de razonamiento, la relación entre las proposiciones está en la propia estructura interna de éstas, en efecto: se afirman en ellas las mismas **propiedades o relaciones** para **distintas personas** o **conjuntos de personas.**
En este caso, las **propiedades** son: “ser hombre”, “ser mortal”; las **personas** objeto de atribución de estas propiedades son **colectivos,** en la **primera** proposición, e **individuos concretos: “Sócrates”**, en las otras.

Para tratar lógicamente este tipo de estructuras deductivas es preciso crear una teoría que no tome como base la simbolización matemática de la proposición total sino que estudie la **estructura** misma de las **proposiciones atómicas;** es decir:

- **Qué se afirma.**
- **De quién o de quienes se afirma algo.**

El primer caso define a los **predicados lógicos;** y el segundo, a los **sujetos lógicos** o **términos.**
Ejemplo: en la proposición: “Ana es estudiosa”; **“es estudiosa”** es el **predicado**, y **“Ana”**, el **sujeto** o **término** de la proposición.

➢ Puede haber proposiciones con **varios términos.**
Ejemplo: “Cuatro está entre tres y cinco”.
En este caso el **predicado** es “… está entre … y …”,
y los **sujetos** son “cuatro”, “tres” y “cinco”.

- Los **predicados** que se refieren a un **único sujeto** se denominan **predicados monádicos,** y establecen **propiedades** de un **sujeto.**
- Los que se refieren a **varios sujetos** se denominan **predicados poliádicos,** y establecen **relaciones** entre **dos** o **más sujetos.**
- Los **predicados poliádicos** se **clasifican**, según el **número de términos** que vinculen, en: **diádicos** (**dos** sujetos), **triádicos** (**tres** sujetos**), ..., n–ádicos** (**n** sujetos).

  Ejemplos: "es ingeniero", "es profesor en Informática", son predicados **monádicos**
  "es hermano de", "es múltiplo de", son predicados **diádicos.**
  "… está entre … y …", es un predicado **triádico.**

2 – SIMBOLIZACIÓN

Una vez definidos los componentes de la proposición se plantea su representación simbólica sobre la base de **sujetos** y **predicados lógicos.**

- Para la simbolización de **sujetos lógicos** se considera como base de referencia un **dominio genérico**, no vacío, llamado **universo del discurso.**
- Los **sujetos** se representan por **variables** o **constantes**, cuyos valores posibles forman parte del **dominio** anterior.
  - **variables individuales: x, y, z, u, v, ...** representan **sujetos no especificados;** es decir, **cualquier** elemento del **dominio.**
  - **constantes individuales: a, b, c, d, ...** representan **sujetos determinados;** es decir, elementos **concretos** del **dominio,** generalmente **nombres propios** o **números.**
- Para la simbolización de **predicados lógicos** se emplean las letras **p, q, r, s, …,** etc.

2.1. Proposiciones Singulares

Las **proposiciones singulares** atribuyen cierta **propiedad** a **un individuo** en particular.

Ejemplos:

- La **proposición** "Ana es estudiosa", que en la lógica **proposicional** se simboliza con **p**, en la lógica de **predicados** se simboliza: **p(a),** donde **p:** ser estudiosa; **a:** Ana.
- La **proposición** "Cuatro está entre tres y cinco" se representa por **q(a, b, c)** donde **q:** …está entre … y …; **a:** cuatro, **b:** tres, **c:** cinco.

2.2. Funciones Proposicionales

Llamaremos **función proposicional,** a toda **expresión** que contenga **una** o **más indeterminadas** que, al ser reemplazadas por elementos del **universo del discurso,** se transforma en **proposición.**

Ejemplos:

- **"x es estudiosa"** es una **función proposicional** y se representa por **p(x).**
- **"x está entre y y z"** es también una función proposicional y se representa por **q(x, y, z).**

Estas expresiones tienen la "forma" de proposiciones, pero no lo son, porque se refieren a **individuos indeterminados.**

- Luego, la construcción de **proposiciones** requiere la definición previa de un **dominio de términos** posibles, llamado **universo del discurso.**

Ejemplo:

U = {1, 2, 3, 4} es el **universo de discurso**
p(x): x es par **forma proposicional** donde **x** está **indeterminada**

"x" puede tomar los valores del conjunto **U**.

- si **x = 1, p(x)** se convierte en **p(a)** : 1 es par **proposición falsa**
- si **x = 2, p(x)** se convierte en **p(b)** : 2 es par **proposición verdadera**

Las **formas proposicionales** pueden aparecer **negadas**, como en el enunciado **"x no es par",** que se simboliza **"~p(x)".** También pueden aparecer unidas a otras **funciones proposicionales** o a **proposiciones**, mediante **conectivas binarias.**

Ejemplo:

"**x** es un número par, pero **y** es un número primo", que se simboliza **p(x) $\wedge$ q(y).**

NOTA: Si en una fórmula compuesta hay **por lo menos** una **función proposicional** como componente, **toda** la fórmula compuesta es una **función proposicional**.

Ejemplo:

p(a) $\wedge$ (q(b) $\vee$ r(x)) es una **función proposicional** porque contiene a la **función proposicional "r(x)".**

3 – CONJUNTO DE VERDAD

Una **forma proposicional** se convierte en **proposición** al insertar **constantes** en los lugares de las **variables,** siempre que se reemplacen **constantes iguales** en lugar de **variables iguales.**

Si como resultado de este reemplazo, se obtiene una **proposición verdadera,** diremos que los objetos designados por esas **constantes satisfacen** la función proposicional dada.

> Llamaremos **conjunto de verdad** de una **forma proposicional,** al **conjunto** formado por todas las **constantes** que la **satisfacen.**
>
> $$P \overset{def}{=} \{a \in U \ / \ p(a) \text{ es V}\}$$

NOTA: Para nombrar el **conjunto de verdad,** usaremos la **misma letra** del **predicado,** pero **mayúscula.** Así, **P** será el **conjunto de verdad** de la **función proposicional p(x), Q** el de **q(x), R** el de **r(x),** etc.

✓En el **ejemplo** presentado anteriormente:

U = {1, 2, 3, 4}	**universo del discurso**
p(x): x es par	**forma proposicional**
p(a): 1 es par	**proposición falsa**
p(b): 2 es par	**proposición verdadera**
p(c): 3 es par	**proposición falsa**
p(d): 4 es par	**proposición verdadera**

Luego, el **conjunto de verdad** de la **forma proposicional p(x)** es: **P = {2, 4}.**

3.1. Conjunto de verdad de la forma proposicional ~p(x): $\overline{P}$

$$\{a \in U \ / \ \sim p(a) \text{ es V}\} = \{a \in U \ / \ p(a) \text{ es F}\} = \{a \in U \ / \ a \notin P\} = \overline{P}$$

3.2. Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \wedge q(x)$: $P \cap Q$

$$\{a \in U \;/\; (p(a) \wedge q(a)) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; p(a) \text{ es V} \wedge q(a) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; a \in P \wedge a \in Q\} = P \cap Q$$

3.3. Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \vee q(x)$: $P \cup Q$

$$\{a \in U \;/\; (p(a) \vee q(a)) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; p(a) \text{ es V} \vee q(a) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; a \in P \vee a \in Q\} = P \cup Q$$

3.4. Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \Rightarrow q(x)$: $\overline{P} \cup Q$

$$\{a \in U \;/\; (p(a) \Rightarrow q(a)) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; (\sim p(a) \vee q(a)) \text{ es V}\} =$$

$$= \{a \in U \;/\; \sim p(a) \text{ es V} \vee q(a) \text{ es V}\} = \{a \in U \;/\; a \in \overline{P} \vee a \in Q\} = \overline{P} \cup Q$$

3.5. Conjunto de verdad de la forma proposicional $p(x) \Leftrightarrow q(x)$: **compruebe** que es

$(\overline{P} \cup Q) \cap (\overline{Q} \cup P)$ o bien $(P \cap Q) \cup (\overline{P} \cap \overline{Q})$

4 – CUANTIFICADORES

> Los **cuantificadores** son **operadores lógicos** que permiten **especificar cuantitativamente** el **dominio** de la **variable.**

Dado el **conjunto universal U = { 1, 2, 3, 4, 5}** y las **funciones proposicionales**:

a) $p(x)$: $x \leq 5$; b) $q(x)$: $x > 5$; c) $r(x)$: $x < 4$

vamos a determinar el **conjunto de verdad** correspondiente.

Para ello, analizaremos los siguientes **casos:**

4.1. Proposición Universal

En este caso, **P = {0, 1, 2, 3, 4, 5} = U.**

O sea que, si se reemplaza la variable **"x"** por cualquier constante numérica de **U,** se obtiene siempre una **proposición verdadera.**

Este hecho se expresa del siguiente modo: **"Para todo número "x"** del universo, **$x \leq 5$".**
La expresión así obtenida es una **proposición** y, más aún, es una **proposición verdadera** y se la denomina **proposición universal.**
Para simbolizarla, la lógica usa un **operador** llamado **cuantificador universal**: **$\forall x$: $p(x)$,** o bien **$\forall x \in U$: $p(x)$,** que se lee **"para todo x del universo, se verifica la propiedad p".**

- En el lenguaje corriente las palabras que están estrechamente relacionadas con el **cuantificador universal** son, entre otras: **cada, todo, cualquiera, cualesquiera, cada uno,** etc.

> Las **proposiciones universales** son **verdaderas** cuando **todos** los casos de sustitución son **verdaderos**, y son **falsas** cuando **hay por lo menos un** caso de sustitución **falso.**

4.2. En este caso, **Q = { } = ∅.**

Vemos que **ningún** elemento del **universo** transforma a la **función proposicional** en una **proposición verdadera.**

Este hecho se expresa diciendo que: **“Para ningún número “x” del universo**, se verifica que **x > 5”,** y que se simboliza: $\forall$**x**$\in$**U: ~q(x);** o bien: $\forall$**x: ~q(x).**

> En lenguaje corriente, otras expresiones son**: nada, ninguno, ningún, nadie**, etc.
> Estas expresiones tienen una **doble función**, **cuantificar universalmente y negar.**

4.3. Proposición Existencial

En este caso, **R = {1, 2, 3};** o sea, **R**$\subset$**U.**

Esto se expresa diciendo que **“algunos** elementos del conjunto universal satisfacen **r(x),** o bien que “**Existe un “x” del universo**, que verifica que **x < 4”.**
Se simboliza: $\exists$**x**$\in$**U: r(x);** o bien, $\exists$**x: r(x).**
El **operador “$\exists$”** se denomina **cuantificador existencial** y transforma la **función proposicional** en una **proposición existencial**, ya que al anteponer el cuantificador, tiene sentido decir que la expresión es **V** o **F.**

- Otras expresiones que originan **proposiciones existenciales** son: **algo, alguien, hay, unos, alguno, hay cosas, algún,** etc.

> Las **proposiciones existenciales** son **verdaderas** cuando hay **por lo menos un** caso de sustitución **verdadero**, y son **falsas** cuando **todos** los casos de sustitución son **falsos.**

5 – ALCANCE DE UN CUANTIFICADOR

- Si un cuantificador **no** va seguido por un **signo de puntuación** (paréntesis, corchete o llave), su **alcance** llega hasta la **variable** de la **primera letra de predicado** a su **derecha.**

Ejemplos:

- En la fórmula $\forall$**x: p(x)** el **alcance del cuantificador** llega hasta la segunda aparición de **“x”,** en **“p(x)”.**
- En la fórmula $\forall$**x: p(x)** $\Rightarrow$ **q(x),** el **alcance del cuantificador** llega también hasta la segunda aparición de **“x”,** en **“p(x)”,** pero no a la tercera aparición de **“x”,** en **“q(x)”.**

- Si el cuantificador va **seguido** de un **signo de puntuación,** su **alcance** se extiende a **toda** la expresión encerrada dentro de los paréntesis, corchetes o llaves.

Ejemplos:

- En la fórmula $\forall$**x: (p(x)** $\Rightarrow$ **q(x)),** el **alcance del cuantificador** llega a **todas** las apariciones de la variable **“x”,** incluidas las que se encuentran dentro del paréntesis.
- En la fórmula $\exists$**x: (p(x)** $\wedge$ **q(x))** $\vee$ **r(x),** el **alcance del cuantificador** llega hasta la tercera aparición de la variable **“x”,** en **“q(x)”,** pero **no** a la cuarta, en **“r(x)”.**

6 – VARIABLES LIBRES Y LIGADAS

> ➢ Para que una **variable** esté **ligada por un cuantificador,** deben cumplirse **dos** requisitos:
> - Que esté **cuantificada.**
> - Que esté en el **alcance** del cuantificador.
>
> ➢ Toda variable que **no** está ligada por un cuantificador, se llama **variable libre.**

Ejemplos: Las **variables libres** aparecen **subrayadas.**

$-\forall x: p(x)$	**no** hay **variables libres**
$-\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$	**no** hay **variables libres**
$-\forall x: p(x) \Rightarrow q(\underline{x})$	hay **una variable libre**
$-\exists x: (p(x) \wedge q(\underline{y})) \vee r(\underline{x})$	hay **dos variables libres**

> Ahora podemos definir a la **función proposicional** como toda **fórmula** que tiene **por lo menos una variable libre.**
>
> Si **no** hay **variables libres,** la **fórmula** representa una **proposición.**

7 – CUANTIFICACIÓN SIMPLE

7.1. Proposiciones Generales Simples

> Son las **proposiciones** que tienen un **único predicado.**
> Pueden ser **universales** o **existenciales**.

Ejemplos:

–**Todos** cantan.	$\forall x: p(x)$	**Proposición general universal simple**
–**Alguien** estudia.	$\exists x: q(x)$	**Proposición general existencial simple**

NOTA: Las **proposiciones generales simples** pueden unirse, mediante conectivas **diádicas,** a otras **proposiciones generales simples,** a **funciones proposicionales,** o a **proposiciones singulares.**

Ejemplos:

–Alguno estudia **pero** todos aprueban.	$\exists x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$
–**Si** todos cantan **entonces** nadie escucha.	$\forall x: r(x) \Rightarrow \forall x: \sim s(x)$

7.2. Proposiciones Generales Complejas

> Son aquellas **proposiciones** que poseen **más de una letra de predicado** afectada por un **cuantificador.**
> Pueden ser **universales** o **existenciales**.

Ejemplos:

–Todos los hombres son mortales.	$\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$
–Algunos hombres son santiagueños.	$\exists x: (p(x) \wedge r(x))$

8 – PROPOSICIONES GENERALES COMPLEJAS CATEGÓRICAS

Existen ciertos tipos de **proposiciones generales complejas,** que la lógica tradicional denominaba **proposiciones categóricas.**

Hay **cuatro** tipos de **proposiciones categóricas:**

8.1. Tipo A o Universal Afirmativa: $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$

Son ejemplos de este tipo, los siguientes enunciados, que poseen un mismo **significado:**

Todas las hormigas son insectos.
Cualquier hormiga es insecto.
Las hormigas son insectos.

Todos ellos pueden parafrasearse mediante la expresión **"para todo x, si x es hormiga, entonces x es insecto",** que es la cuantificación universal de la **función proposicional condicional "si x es hormiga, entonces x es insecto",** o sea de **"$p(x) \Rightarrow q(x)$".**
Son los llamados **condicionales generalizados** donde el **condicional** surge al analizarse la estructura interna de las proposiciones.
En este tipo de enunciados, **no** coincide el predicado **gramatical** con el predicado **lógico.** Para la Lógica **"ser hormiga"** y **"ser insecto"** son ambos **predicados;** mientras que para la Gramática **"hormiga"** es un **sujeto.**

- La lógica tradicional simboliza este tipo de enunciados mediante el esquema **"Todo S es P",** coincidiendo con el análisis gramatical.

> La proposición **universal afirmativa** es **verdadera** cuando **todos** los casos de sustitución de la **función proposicional "$p(x) \Rightarrow q(x)$"** son **verdaderos**, y es **falsa** cuando **hay por lo menos un** caso de sustitución que es **falso**.

- Estos enunciados de **tipo A** pueden darse también **negados.**

Ejemplo: **No** todos los elefantes son africanos.
Se simboliza: $\sim\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$

8.2. Tipo E o Universal Negativa: $\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$

Son ejemplos de este tipo los enunciados:

Ninguna hormiga es insecto.
Las hormigas **no** son insectos.
Nada que sea hormiga es insecto.

Pueden parafrasearse como **"Para todo x, si x hormiga, entonces x no es insecto".** Tanto el condicional como la negación surgen del análisis interno de las proposiciones.

- La lógica tradicional los simbolizaba mediante el esquema: **"Ningún S es P".**

> La proposición **universal negativa** es **verdadera** cuando **todos** los casos de sustitución de la **función proposicional "$p(x) \Rightarrow \sim q(x)$"** son **verdaderos**, y es **falsa** cuando **hay por lo menos un** caso de sustitución **falso**.

- Estos enunciados de **tipo E** también pueden darse también **negados.**

Ejemplo: **No es cierto que,** ningún elefante es asiático.
Se simboliza: $\sim\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$

8.3. <u>Tipo I</u> o <u>Particular Afirmativa</u>: $\exists x : (p(x) \wedge q(x))$

Son ejemplos de este tipo de enunciados:

Algunos perros son negros.
Ciertos perros son negros.
Algún perro es negro.
Hay perros negros.

Todas ellas pueden parafrasearse mediante **"existe por lo menos un x, tal que x es perro y x es negro",** que es la cuantificación existencial de la función proposicional compuesta **"$p(x) \wedge q(x)$".**
La **conjunción** es la conectiva que mejor representa el **significado** de este tipo de proposiciones, y no el condicional, pues el sentido de estos enunciados no es, por ejemplo, afirmar que **"existe por lo menos un x, tal que si es perro entonces es negro",** sino más bien que **"hay por lo menos un x que es a la vez perro y negro".**

➢La lógica tradicional los representaba mediante la forma **"Algún S es P".**

La proposición **particular afirmativa** es **verdadera** cuando **<u>hay por lo menos un</u>** caso de sustitución de la **función proposicional "$p(x) \wedge q(x)$"** que es **verdadero**, y es **falsa** cuando **<u>no hay ningún</u>** caso de sustitución que la haga **verdadera.**

➢Estos enunciados de **tipo I** también pueden darse **negados.**
<u>Ejemplo</u>: **No es cierto que** hay vacas verdes.
Se simboliza: **$\sim\exists x: (p(x) \wedge q(x))$**

8.4. <u>Tipo O</u> o <u>Particular Negativa</u>: $\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x))$

Son ejemplos de este tipo de enunciados:

Algunos perros **no** son negros.
Ciertos perros **no** son negros.
Algún perro **no** es negro.
Hay perros que **no** son negros.

Pueden parafrasease mediante la expresión **"existe por lo menos un x tal que x es perro y x no es negro",** donde la **conjunción** y la **negación** surgen del análisis interno de los enunciados.
➢La lógica tradicional los simbolizaba mediante el esquema **"Algún S no es P".**

La proposición **particular negativa** es **verdadera** cuando **<u>hay por lo menos un</u>** caso de sustitución de la **función proposicional "$p(x) \wedge \sim q(x)$"** que es **verdadero**, y es **falsa** cuando **<u>ninguno</u>** de ellos es **verdadero**.

➢Estos enunciados de **tipo O** también pueden darse también **negados.**
<u>Ejemplo</u>: **No** hay pájaros que no vuelen
Se simboliza: **$\sim\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x))$**

9 – <u>LAS PROPOSICIONES GENERALES COMPLEJAS NO CATEGÓRICAS</u>

El simbolismo de la lógica **moderna** es más potente que el de la lógica **tradicional,** y reconoce otras fórmulas cuantificacionales distintas de las **categóricas,** como por ejemplo las proposiciones **generales** que tienen **más de dos predicados,** o que usan otras conectivas o porque hay predicados que juntos forman una unidad y **<u>no</u>** pueden separarse

Ejemplos

9.1. Los autos rojos son veloces. $\forall x: (p(x) \wedge q(x) \Rightarrow r(x))$
donde **p:** ser auto**;** **q:** ser rojo; **r:** ser veloz

9.2. Los papagayos tienen alas y picos. $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x))$
donde **p:** ser papagayo**;** **q:** tener alas; **r:** tener pico

9.3. Algunas personas si son altas, son basquetbolistas. $\exists x: (p(x) \wedge (q(x) \Rightarrow r(x))$
donde **p:** ser persona**;** **q:** ser alta; **r:** ser basquetbolista

9.4. Todo es blanco o negro. $\forall x: (p(x) \vee q(x))$
donde **p:** ser blanco**;** **q:** ser negro

9.5. Los animales son vertebrados o invertebrados. $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x) \vee r(x))$
donde **p:** ser animal**;** **q:** ser vertebrado; **r:** ser invertebrado

9.6. Los buenos alumnos son becados. $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$
donde **p:** ser buen alumno**;** **q:** ser becado

9.7. Algunas mesas verdes son rectangulares. $\exists x: (p(x) \wedge q(x) \wedge r(x))$
donde **p:** ser mesa**;** **q:** ser verde; **r:** ser rectangular

10 – LEYES DE LA LÓGICA CUANTIFICACIONAL

Las **leyes de la Lógica** son **formas de enunciados** cuyos casos de sustitución son siempre **enunciados verdaderos.**

Las **leyes** de la **Lógica Proposicional** son **tautologías,** mientras que las **leyes** de la **Lógica Cuantificacional, no**.

- En primer lugar, las **leyes** de la **Lógica Proposicional** son también **leyes** de la **Lógica Cuantificacional.**

Ejemplo:

La **ley de identidad** de la **Lógica Proposicional: "p ⇒ p"** y **"p ⇔ p"** tiene en la **Lógica Cuantificacional** las siguientes **leyes:**

$$p(a) \Rightarrow p(a) \quad ; \quad \forall x: (p(x) \Rightarrow p(x)) \quad ; \quad \exists x: p(x) \Rightarrow \exists x: p(x) \quad ; \quad \ldots$$

$$p(a) \Leftrightarrow p(a) \quad ; \quad \forall x: (p(x) \Leftrightarrow p(x)) \quad ; \quad \exists x: p(x) \Leftrightarrow \exists x: p(x) \quad ; \quad \ldots$$

- En segundo lugar, están las **leyes propias** de la **Lógica Cuantificacional,** que son las que involucran como parte esencial a los **cuantificadores,** y que **no** se corresponden con ninguna ley de la **Lógica Proposicional.**

  Las **más importantes** son:

10.1. Ley de Subalternación: $\forall x: p(x) \Rightarrow \exists x: p(x)$

10.2. Leyes de Equivalencia o Intercambio de Cuantificadores

$$\forall x: p(x) \equiv \sim\exists x: \sim p(x) \qquad \sim\forall x: p(x) \equiv \exists x: \sim p(x)$$

$$\exists x: p(x) \equiv \sim\forall x: \sim p(x) \qquad \sim\exists x: p(x) \equiv \forall x: \sim p(x)$$

10.3. Leyes de Distributividad de Cuantificadores

10.3.1. El cuantificador **universal** distribuye a la **conjunción:**

$$\forall x: (p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$$

10.3.2. El cuantificador **existencial** distribuye a la **disyunción:**

$$\exists x: (p(x) \vee q(x)) \equiv \exists x: p(x) \vee \exists x: q(x)$$

➢La **distributividad** **no** se cumple en los otros dos casos posibles, pero si se cumplen las siguientes **implicaciones**:

a) $\forall x: p(x) \vee \forall x: q(x) \Rightarrow \forall x: (p(x) \vee q(x))$

b) $\exists x: (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x: p(x) \wedge \exists x: q(x)$

- Estas **leyes de distributividad** pueden esquematizase mediante el siguiente **hexágono** donde las flechas indican que se trata de un condicional cuyo antecedente es la fórmula que figura arriba y cuyo consecuente es la que figura abajo.

$$\forall x: (p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$$

$$\exists x: (p(x) \wedge q(x)) \qquad \forall x: p(x) \vee \forall x: q(x)$$

$$\exists x: p(x) \wedge \exists x: q(x) \qquad \forall x: (p(x) \vee q(x))$$

$$\exists x: p(x) \vee \exists x: q(x) \equiv \exists x: (p(x) \vee q(x))$$

10.4. **Leyes de Oposición Aristotélica**

$$\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv \sim\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x))$$

$$\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x)) \equiv \sim\exists x: (p(x) \wedge q(x))$$

$$\exists x: (p(x) \wedge q(x)) \equiv \sim\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$$

$$\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x)) \equiv \sim\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$$

- **El Cuadro o Cuadrado de Oposición**

La **lógica simbólica** establece las siguientes relaciones:

$\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$ **A** **E** $\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$

$\exists x: (p(x) \wedge q(x))$ **I** **O** $\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x))$

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS n° 3

1) Proponga **dos** ejemplos de sustitución **verdaderos** y **dos** ejemplos de sustitución **falsos** para cada una de las siguientes **funciones proposicionales:**

1.1. $x^3 + 3 = 30$
1.2. **x** es menor o igual que **y**
1.3. **x** es número impar
1.4. **x** es divisor de **16**
1.5. x es múltiplo de 3

2) En cada uno de los siguientes enunciados deberá:
a) Distinga **sujetos** de **predicados.**
b) Simbolícelos.

2.1. **x** es un número.
2.2. **x** no es un número.
2.3. **x** es un número par.
2.4. 8 es un número impar.
2.5. 5 es un número pero no es par.
2.6. No se da el caso de que **x** sea un número par.
2.7. No es cierto que 4 sea un número impar.
2.8. La Matemática es exacta.
2.9. La Matemática y la Lógica son ciencias formales.
2.10. 2 es par y primo.
2.11. 4 es par o 5 es primo.
2.12. Si 6 es mayor que 3 y 3 es mayor que 2, entonces, 6 es mayor que 2.
2.13. Si **x** es par, entonces es múltiplo de 2.
2.14. Juan baila el tango.
2.15. Fulano baila el tango.
2.16. **x** está entre **y** y **z**
2.17. Pedro llevó a Carlos a España.
2.18. **x** es múltiplo de **y** pero no de **z**
2.19. Si 12 es múltiplo de 2 y de 3 entonces es múltiplo de 6.
2.20. Si Santiago del Estero está al norte de Córdoba entonces está al norte de La Pampa.

3) Simbolice las siguientes **funciones proposicionales** y determine sus respectivos **conjuntos de verdad:**

3.1. $U = \mathbb{N}$; $x + 5 = 7$
3.2. $U = \mathbb{N}$; $x^2 = 81$
3.3. $U = \mathbb{Z}$; $x^2 = 81$
3.4. $U = \mathbb{Z}$; $x - 2 = 5$
3.5. $U = \mathbb{R}$; $|x| = 5$
3.6. $U = \mathbb{R}$; $|x| < 3$
3.7. $U = \mathbb{R}$; $|x| > 4$
3.8. $U = \mathbb{R}$; $|x + 2| = 4$
3.9. $U = \mathbb{R}$; $|x + 3| \leq 5$
3.10. $U = \mathbb{R}$; $|x + 4| \geq 7$
3.11. $U = \mathbb{R}$; $|2x + 3| > 10$
3.12. $U = \mathbb{R}$; $|2x + 6| < 12$

❖Para los siguientes ejercicios considere $U = \mathbb{R}$

3.13. $|2x + 1| = 5$ **y** $0 \leq x \leq 4$
3.14. **O bien** $|x| \leq 2$, **o bien** $|x| > 2$
3.15. **Si** $2x + 3 = 7$, **entonces** $|x| \leq 3$
3.16. $2x = 14$ **sí y solo sí** $x = 7$

3.17. Si $2x + 1 = 7$ entonces $|x| = 3$
3.18. $|2x| = 10$ sí y solo sí $x = 5$ ó $x = -5$
3.19. Si $|2x - 3| \leq 1$ y $2x = 4$ entonces $|x| < 2$
3.20. Si $|x - 2| \geq 1$ entonces $|x| < 3$ ó $3x - 5 = 4$

4) Para cada una de las siguientes **funciones proposiciones** realice lo siguiente:
- **a.** Simbolice y determine el conjunto solución.
- **b.** Dé **dos** ejemplos de sustitución que hagan **verdadera** a la proposición y **dos** que la hagan **falsa.**
- **c.** Justifique su respuesta haciendo los cálculos que sean necesarios.

4.1. $|\mathbf{x}| > \mathbf{3}$ a menos que **$5x + 1 = 21$**
4.2. No ocurre que $|\mathbf{x} - \mathbf{1}| \leq \mathbf{4}$
4.3. $|\mathbf{3x} + \mathbf{1}| < \mathbf{7}$ pero **$x \geq 0$**
4.4. Cuando $|\mathbf{4x} + \mathbf{3}| < \mathbf{5}$ entonces $|\mathbf{x}| > \mathbf{1}$
4.5. Si $|\mathbf{x}| > -\mathbf{3}$ ó $|\mathbf{x}| < \mathbf{2}$ entonces $-\mathbf{2} < |\mathbf{2x} + \mathbf{3}| < \mathbf{7}$

5) En las siguientes expresiones marque con un **círculo** las variables **libres** y decida si son **proposiciones** o **funciones proposicionales:**

5.1. $\forall x: p(x) \Rightarrow q(x)$
5.2. $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x))$
5.3. $\forall x: (p(x) \wedge q(x) \Rightarrow r(x))$
5.4. $\exists y: (p(y) \wedge q(y)) \vee r(y)$
5.5. $p(a) \vee q(y)$
5.6. $p(a) \wedge \exists x: (q(x) \wedge r(x))$
5.7. $\forall x: x + y = 2$
5.8. $\exists x: (p(x) \wedge q(x) \Rightarrow r(y))$

6) Simbolice los siguientes enunciados:
6.1. Todo es perecedero.
6.2. No todo es perecedero.
6.3. Nada es perecedero.
6.4. Algo no es perecedero.
6.5. Algo es perecedero.
6.6. Nadie canta.
6.7. Alguien llega tarde.
6.8. Si Marta llega, todos saldremos.
6.9. **x** canta aunque todos estudian.
6.10. Si todos cantan, nadie baila.

7) Use la notación de la lógica de funciones proposicionales y cuantificadores para simbolizar cada una de las siguientes proposiciones:
7.1. Todos son inteligentes.
7.2. Alguien llama.
7.3. Nadie contesta.
7.4. Si todos estudian, ninguno desaprueba.
7.5. Algunos no entienden.
7.6. Ningún alumno estudioso es aplazado.
7.7. Hay alumnos que no leyeron a Jorge Luis Borges.
7.8. No todos los alumnos conocen las leyes de la Lógica.
7.9. No todos los números son positivos.
7.10. Algunos números naturales son primos.
7.11. Todo número es par o impar.
7.12. Si todos los enteros negativos son menores que cero entonces algunos son pares.
7.13. $U = \mathbb{Z}$; Para cualquier número entero **x, y** se cumple que: **$x < y$ ó $x = y$ ó $x > y$.**
7.14. $U = \mathbb{N}$; Para cualquier número natural **x, y** se cumple que: si **$x \neq y$** entonces **$x < y$** y **$x > y$.**
7.15. $U = \mathbb{R}$; Para cualquier número real **x, y, z** se cumple que: si **$x < y$** y **$y < z$** entonces **$x < z$**.

8) Proponga **dos** ejemplos de sustitución para **todas** las **leyes** de la **lógica cuantificacional.**

9) Use las **leyes de intercambio de cuantificadores** para obtener fórmulas equivalentes:

9.1. $\sim\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim q(x))$
9.2. $\exists x: (\sim p(x) \wedge \sim q(x))$
9.3. $\forall x: \sim(p(x) \Rightarrow \sim q(x))$
9.4. $\sim\exists x: \sim(\sim p(x) \wedge \sim q(x))$
9.5. $\forall x: (p(x) \Rightarrow \sim(q(x) \wedge r(x)))$
9.6. $\forall x: (p(x) \vee q(x) \Rightarrow r(x))$
9.7. $\forall x: (p(x) \wedge q(x) \Rightarrow \sim r(x))$
9.8. $\sim\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x))$
9.9. $\exists x: ((p(x) \vee q(x)) \wedge r(x))$
9.10. $\sim\exists x: (p(x) \wedge \sim(q(x) \vee r(x)))$

10) Niegue las **12** primeras fórmulas de la Actividad **7** y retradúzcalas al lenguaje coloquial

11) Siempre que sea posible, transforme las siguientes fórmulas mediante la **distribución de los cuantificadores:**

11.1. $\exists x: (p(x) \vee \sim q(x))$
11.2. $\forall x: (p(x) \wedge q(x) \wedge r(x))$
11.3. $\forall x: (\sim p(x) \vee \sim q(x))$
11.4. $\exists x: (\sim p(x) \wedge q(x))$
11.5. $\forall x: p(x) \wedge \forall x: (q(x) \Rightarrow r(x))$
116. $\forall x: (p(x) \Rightarrow q(x)) \vee \forall x: r(x)$
11.7. $\exists x: s(x) \vee \exists x: (p(x) \wedge q(x))$
11.8. $\forall x: \sim r(x) \wedge \forall x: \sim s(x)$
11.9. $\exists x: (p(x) \wedge \sim q(x)) \wedge \exists x: r(x)$
11.10. $\forall x: (p(x) \wedge (q(x) \Rightarrow r(x)))$

12) Use las leyes de **distribución de cuantificadores** y las **implicaciones** para obtener un enunciado **equivalente** o una **implicación,** si fuera posible, para cada uno de los siguientes enunciados:

12.1. Algún número es par y positivo.
12.2. Todo es blanco o todo es negro.
12.3. Algo es eterno o algo es inmóvil.
12.4. Hay pintores y hay escultores.
12.5. Todo se mueve y se transforma.
12.6. Todo es bueno o malo.
12.7. Hay autos y camiones.
12.8. Algo es finito o eterno.
12.9. Todos cantan y todos bailan.
12.10. Alguien canta y alguien baila.