Unidad N° 1: Teoría de conjuntos

- **Conjuntos**

Definición:

Un conjunto está bien definido cuando es posible decidir sin dudas si un elemento pertenece o no al mismo. Por lo general un conjunto tiene escrito su nombre con una letra mayúscula de molde, a continuación un signo igual y luego, los elementos encerrados entre llaves.

- $A, B, C ....$ → Conjuntos
- $a, b, c ....1, 2, 3...$ → Elementos
- $a \in A$ (pertenece) ; $+ \notin A$ (no pertenece)

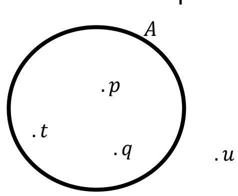
Un conjunto se puede definir por:

- Extensión: Nombrando todos sus elementos
- Comprensión: Mediante alguna propiedad que solo verifican los elementos del conjunto

Ejemplos $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ → por extensión

$D = \{x/x \ \ es\ digito\ del\ sistema\ decimal\}$ → por comprensión

Una de las formas más usadas para representar gráficamente los conjuntos es mediante un diagrama de Venn. En estos diagramas, una curva cerrada representa al conjunto y los elementos del mismo se identifican con puntos interiores a la curva.



$p \in A$; $t \in A$; $q \in A$; $u \notin A$

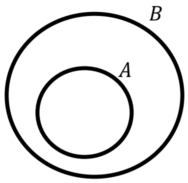
Conjuntos Especiales:

- U → Conjunto Universal o Referencial
- $\emptyset$ → Conjunto Vacío

(Se lo puede definir mediante una proposición siempre falsa Ej: $\emptyset = \{x\ /\ x\ \ es\ un\ triangulo\ de\ dos\ lados\}$)

Relación de Inclusión

Sean A, B conjuntos del mismo universo.
Se dice que A es subconjunto de B o que A esta incluido en B si todo elemento de A pertenece a B

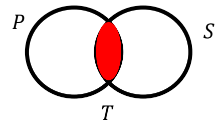


$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Ejemplo $U = Z$ → n° enteros

$$P = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; multiplo\; de\; 2\}$$
$$T = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; multiplo\; de\; 10\}$$
$$S = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; multiplo\; de\; 5\}$$

$T \subset P \;\; ; T \subset S$



Igualdad entre conjuntos

Sean A, B conjuntos del mismo universo.
Se dice que A es igual a B si todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

$$A = B \Leftrightarrow [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Ejemplo

$P = \{x/x \;\; es\; n°\; par\}$

$H = \{x/x \;\; es\; multiplo\; de\; 2\}$

$P = H$

$T = \{x/x \;\; es\; triángulo\; equilatero\;\}$

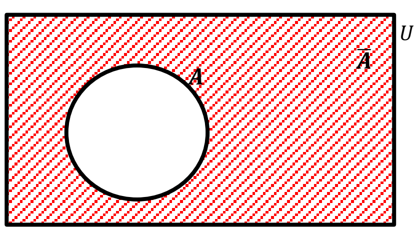
$A = \{x/x \;\; es\; triángulo\; equiángulo\}$

$T = A$

- **Operaciones entre conjuntos del mismo universo**

a. Complemento

Sea el conjunto A. El complemento de A está formado por todos los elementos que pertenecen al universo pero no pertenecen a A. Se simboliza con $\overline{A}$ o A^c.



$$\bar{A} = \{x \in U / x \;\; \notin A\} = A^c$$

Ejemplo

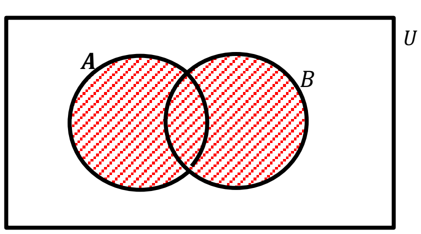
U= $\mathbb{Z}$

$P = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; n°\; par\}$

$\bar{P} = P^c = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; n°\; impar\}$

b. Unión

Sean A, B conjuntos del mismo universo. La unión de A y B está formada por todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B.



$$A \cup B = \{x \in U / (x \;\; \in A \;\vee\; x \in B)\}$$

Ejemplo

U= $\mathbb{Z}$

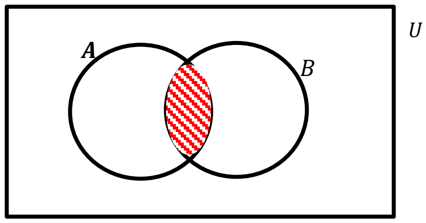
$S = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; > -1\}$

$P = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; n°\; par\}$

$S \cup P = \{x \in \mathbb{Z} \,/ x \;\; es\; n°\; par \;\vee\; x \;\; > -1\}$

c. Intersección

Sean A, B conjuntos del mismo universo. La intersección de A y B está formada por todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.



$A \cap B = \{x \in U\, /(x \in A \wedge x \in B)\}$

Ejemplo

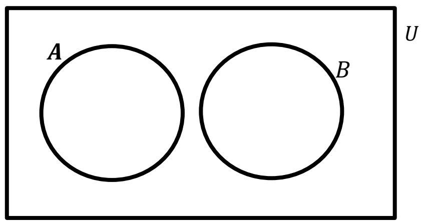
U= $\mathbb{Z}$

$S = \{x \in \mathbb{Z}\, /x > -1\}$

$P = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ n° \ par\}$

$S \cap P = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ n° \ par \wedge x > -1\}$

Caso particular



Ejemplo

U= $\mathbb{Z}$

$P = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ n° \ par\}$

$I = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ n° \ impar\}$

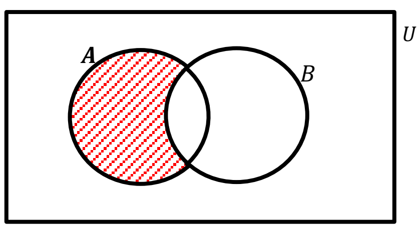
$P \cap I = \emptyset$

Nota:

Cuando la intersección de dos conjuntos es vacía se dice que los conjuntos son ***Disjuntos*** o ***Disyuntos.***

d. Diferencia

Sean A, B conjuntos del mismo universo. La diferencia de A y B está formada por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.



$A - B = \{x \in U/(x \in A \wedge x \notin B)\}$

Ejemplo

U= $\mathbb{Z}$

$M = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ multiplo\ de\ 5\}$

$P = \{x \in \mathbb{Z}/x \ es\ n° \ par\}$

$M - P = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ termina\ en\ 5\}$

Generalización

Dada una familia de conjuntos del mismo universo se pueden generalizar las operaciones de unión e intersección.

$$flia\ finita\ de\ conjuntos : \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_m\} = \{A_i\}\ con\ i = 1, .., m$$

Unión $\longrightarrow$ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \{x/x \in A_i\ para\ algún\ i = 1, \dots, m\}$

Intersección $\longrightarrow$ $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m = \bigcap_{i=1}^{m} A_i = \{x/x \in A_i\ para\ todo\ i = 1, \dots, m\}$

Ejemplo

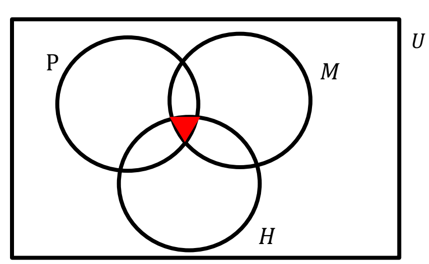
U= $\mathbb{Z}$

$P = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ n° \ par\}$

$M = \{x \in \mathbb{Z}\, /x \ es\ múltiplo\ de\ 5\}$

$H = \{x \in \mathbb{Z}\, /x\ múltiplo\ de\ 3\}$

$P \cap M \cap H = \{x \in \mathbb{Z}\, /x\ es\ múltiplo\ de\ 3\ que\ termina\ en\ 0\}$



- **Producto cartesiano entre conjuntos**

Par ordenado

Sean A, B conjuntos no vacíos, no necesariamente del mismo universo, se llama par ordenado a la expresión

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad con \;\; a \in A \;\wedge\; b \in B$$

1° componente 2° componente

Producto cartesiano

Sean A, B conjuntos no vacíos, no necesariamente del mismo universo. El producto cartesiano entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es un conjunto de pares ordenados dado por:

$$A \times B = \{(a, b) \;/\; a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

Ejemplo

$A = \{p, q, t\} \quad B = \{V, F\}$

$A \times B = \{(p, V), (p, F), (q.V), (q, F), (t, V), (t, F)\}$

Se demuestra que si los conjuntos A y B son finitos, entonces el número de pares de $A \times B$ es el producto del número de elementos de A por el número de elementos de B.

$$(card\ A = n \quad \wedge \quad card\ B = m) \;\Rightarrow\; card\ (A \times B) = n\,.\,m$$

Ejemplo

card A = 3; card B = 2; card(AxB) = 3.2 = 6

Si los conjuntos son infinitos no se puede calcular la cantidad de elementos del producto cartesiano

Ejemplo

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \;/\; a \in \mathbb{N} \;\wedge\; b \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2\{(x, y) \;/\; x \in \mathbb{R} \;\wedge\; y \in \mathbb{R}\}$$

Igualdad en $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

Dos pares ordenados son iguales si y solo si sus componentes son ordenadamente iguales.

$$(a, b) \in A \times B\,;\;\; (a', b') \in A \times B$$
$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$$

Ejemplo

$$(2{,}5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\;;\; (5{,}2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$
$$(2{,}5) \neq (5{,}2)$$

<u>**Generalización**</u>

Dados **n** conjuntos no vacíos, el resultado del producto cartesiano entre ellos es un conjunto de **n-uplas** o vectores de **n** componentes.

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad ; \;\; n \in \mathbb{N}$$
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) \;/\; a_i \in A_i \forall i = 1, \dots, n\}$$

Ejemplo

$A = \{p, q, t\}$
$B = \{V, F\}$
$C = \{1,2\}$

$$A \times B \times C = \{(p,V,1),(p,V,2),(p,F,1),(p,F,2),(q,V,1),(q,V,2),(q,F,1),(q,F,2),(t,V,1),(t,V,2),(t,F,1),(t,F,2)\}$$

$$Card\ (A \times B \times C) = card\ A.card\ B\ .card\ C = 3\ .2\ .2 = 12$$

- **Relación binaria**

Las relaciones que se estudiaran son relaciones en las que se vinculan elementos tomados de a dos, por este motivo reciben el nombre de **binarias**. Los elementos de las relaciones son, por lo tanto, pares ordenados. Las componentes de los pares pueden pertenecer a conjuntos distintos o bien pueden pertenecer al mismo conjunto.

Sean A y B conjuntos no vacíos.
Una relación R de A en B es un subconjunto de $A \times B$

$$R \subset A \times B$$

Ejemplo 1

$A = \{p, q, t\}$ $B = \{V, F\}$

$R_1 = \{(p,V),(q,V),(t,F)\}$
$R_2 = \{(q,F),(t,F)\}$
$R_3 = \{(p,F),(p,V),(t,V)\}$

Ejemplo 2

$A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
x R y si **x** "es divisor de" **y**

$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,3)$
$(3,6),(3,9),(4,4),(4,8),(5,5),(5,10)$
$(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10)\}$

<u>Relación de A en B ; $R \subset A \times B$</u>

$A \rightarrow Conjunto\ de\ partida\ de\ la\ relación$
$B \rightarrow Conjunto\ de\ llegada\ de\ la\ relación$

Al subconjunto de A formado por las primeras componentes de los pares de la relación se lo llama **Dominio** de la Relación**.** Y se denota por $\boldsymbol{D_R}$

Al subconjunto de B formado por las segundas componentes de los pares de la relación se lo llama **Codominio, Recorrido, Rango** de la Relación**.** Y se denota por $\boldsymbol{C_R}$

Considerando el ejemplo 1 anterior

$A = \{p, q, t\}$ $B = \{V, F\}$

$D_{R_1} = \{p, q, t\}$ $C_{R_1} = \{V, F\}$
$D_{R_2} = \{q, t\}$ $C_{R_2} = \{F\}$
$D_{R_3} = \{p, t\}$ $C_{R_3} = \{V, F\}$

- **Relación Inversa**

Sean A, B conjuntos no vacíos; R relación de A en B; $R \subset A \times B$.

Si se cambia el orden de los pares de la relación R se obtiene una relación de B en A llamada relación inversa de R y expresada con R^{-1}(R^{-1} relación de B en A ; $R^{-1} \subset B \times A$)

$$y\, R^{-1}\, x \iff x\, R\, y$$

$$(y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R \quad \text{donde } x \in A \wedge y \in B$$

Considerando el ejemplo 1 anterior

$A = \{p, q, t\} \quad B = \{V, F\}$

$R_1{}^{-1} = \{(V, p), (V, q), (F, t)\}$

$R_2{}^{-1} = \{(F, q), (F, t)\}$

$R_3{}^{-1} = \{(F, p), (V, p), (V, t)\}$

En general el <u>dominio</u> de la relación inversa es el <u>codominio</u> de la relación original y el <u>codominio</u> de la relación inversa es el <u>dominio</u> de la relación original.

Sea R^{-1} : $y\, R^{-1} x \quad si \quad "x\ es\ multiplo\ de\ y"$ se verifica que $D_{R^{-1}} = C_R \quad \wedge \quad C_{R^{-1}} = D_R$

- **Relación definida en un conjunto**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación definida en A, $R \subset A \times A$

Ejemplo

$A = \{a, b, c, d\}$

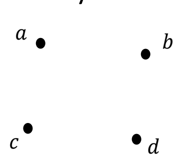
$R = \{(a, b), (a, c), (b, b)(d, a)\}$

Si A es finito, $card\ A = n$, la relación se representa gráficamente mediante un **Grafo**. Los grafos están formados por **Vértices** y **Arcos orientados.**

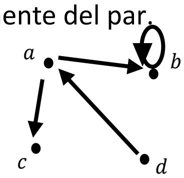
- **Vértices**: los elementos de un conjunto A se representan mediante puntos en el plano que identifican al elemento que representan y están ubicados como se desee.

Ejemplo

$A = \{a, b, c, d\}$



- **Arcos Orientados**: los pares de la relación se representan mediante arcos orientados con flechas, cuyo origen está en el vértice que es la primera componente del par y el extremo final está en el vértice que es la segunda componente del par.



<u>Observación:</u> Si se conoce el grafo es posible escribir la relación que representa.

- **Posibles propiedades de una relación definida en un conjunto**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación definida en A, R es:

- ✓ **Reflexiva** si $\forall\, a \in A : a\, R\, a$

- ✓ **Arreflexiva** si $\forall\, a \in A : a \cancel{R}\, a$

- ✓ **Simétrica** si $\forall\, a, b \in A : (a\, R\, b \Rightarrow b\, R\, a)$

- ✓ **Asimétrica** si $\forall\, a, b \in A : (a\, R\, b \Rightarrow b \cancel{R}\, a)$
  Observamos que en una relación asimétrica no pueden existir bucles y tampoco doble arco entre vértices distintos. La relación de "<" o ">" entre números es asimétrica.

- ✓ **Antisimétrica** si $\forall\, a, b \in A : [(a\, R\, b \wedge b\, R\, a) \Rightarrow a = b]$
  Observamos que en una relación antisimétrica no puede existir doble arco entre vértices distintos, pero si permite bucles.

- ✓ **Transitiva** si $\forall\, a, b, c \in A : [(a\, R\, b \wedge b\, R\, c) \Rightarrow a\, R\, c]$

- ✓ **Circular** si $\forall\, a, b, c \in A : [(a\, R\, b \wedge b\, R\, c) \Rightarrow c\, R\, a]$

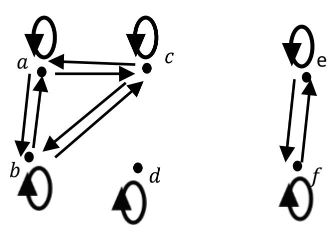
- **Relación de Equivalencia**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación definida en A
R es relación de equivalencia en A si verifica las siguientes propiedades:

- ✓ Reflexiva
- ✓ Simétrica
- ✓ Transitiva

Ejemplo

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f)$
$(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)$
$(e,f), (f,e)\}$



Observación: el conjunto A con la relación equivalencia definida en él, queda partido en 3 zonas diferentes

- **Clases de equivalencia**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación de equivalencia definida en A
La clase de equivalencia de un elemento está formada por todos los elementos del conjunto A que están relacionados con dicho elemento.

$$a \in A;\ \underbrace{\bar{a} = [a]}_{\text{Clase de } \boldsymbol{a}} = \underbrace{\{x \in A \ / \ x\,R\,a\}}_{\text{Conjunto de elementos relacionados con } \boldsymbol{a}}$$

En el ejemplo anterior

$\bar{a} = \{a, b, c\}$	$\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$
$\bar{b} = \{a, b, c\}$	
$\bar{c} = \{a, b, c\}$	
$\bar{d} = \{d\}$	$\bar{d}$
$\bar{e} = \{e, f\}$	$\bar{e} = \bar{f}$
$\bar{f} = \{e, f\}$	

- **Conjunto cociente por una relación de equivalencia**

Las clases distintas que se forman se agrupan en un conjunto cociente

$$A/_R \rightarrow \textit{Conjunto formado por las distintas clases de equivalencia.} \qquad A/_R = \{\bar{b}, \bar{d}, \bar{f}\}$$

- **Propiedades de las clases de equivalencia**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación de equivalencia definida en A

- **Prop 1**

La clase de un elemento no es vacía

Demostración

$$\left.\begin{array}{r} a \in A \\ a \in \bar{a} \end{array}\right\} \text{Todo elemento de A, por propiedad reflexiva, está vinculado consigo mismo por lo tanto pertenece a su propia clase.}$$

$$\Rightarrow \bar{a} \neq \emptyset \ \} \text{ Luego la clase no es vacía}$$

La clase de a es igual a la clase de b $(\bar{a} = \bar{b})$ si y solo si a esta relacionado con b $(a\,R\,b)$

$$\bar{a} = \bar{b} \iff a\,R\,b$$

Demostración

$\Rightarrow)$ $probar \quad \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow a\,R\,b$

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow (a \in \bar{a} \wedge a \in \bar{b}) \Rightarrow a\,R\,b$$

$\Rightarrow)$ $probar \quad a\,R\,b \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ (nota: se debe probar $\bar{a} \subset \bar{b} \wedge \bar{b} \subset \bar{a}$)

$$\left.\begin{array}{l} * \; x \in \bar{a} \Longrightarrow (x\,R\,a \wedge a\,R\,b) \Longrightarrow x\,R\,b \Longrightarrow x \in \bar{b} \Longrightarrow \\ * \; x \in \bar{b} \Longrightarrow (x\,R\,b \wedge a\,R\,b) \Longrightarrow (x\,R\,b \wedge b\,R\,a) \Longrightarrow x\,R\,a \Longrightarrow x \in \bar{a} \Longrightarrow \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \bar{a} \subset \bar{b} \\ \bar{b} \subset \bar{a} \end{array}\right\} \bar{a} = \bar{b}$$

- **Prop 3**

Si las clases son distintas entonces son disjuntas

$$\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$$

Demostraremos la propiedad mediante el condicional contrarrecíproco $\sim q \Longrightarrow \sim p$

$$\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

Demostración

$$\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x \in \bar{a} \cap \bar{b} \Longrightarrow \left(x \in \bar{a} \wedge x \in \bar{b}\right) \Longrightarrow (x\,R\,a \wedge x\,R\,b) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (a\,R\,x \wedge x\,R\,b) \Longrightarrow a\,R\,b \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

Luego es verdadero que si las clases son distintas entonces son disjuntas.

- **Partición de un conjunto**

Sea $A \neq \emptyset$

La familia de subconjuntos no vacíos $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ es una partición de A si verifica:

1) $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

2) La intersección de a dos de los subconjuntos es vacía (son disjuntos de a dos)
$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$

Ejemplo

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$
$$A_1 = \{d, f\} \quad A_2 = \{a, g, c\} \quad A_3 = \{b, e\}$$

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- $A_1 \cap A_3 = \emptyset$
- $A_2 \cap A_3 = \emptyset$

Luego, la familia A_1, A_2, A_3 es una partición de A

- **Prop 4**
  Sea $A \neq \emptyset$, R relación de equivalencia definida en A
  Las clases de equivalencia distintas son una partición de A

  Demostración
  1) Como todo elemento pertenece a su propia clase, cumple que la unión de las clases es el conjunto A.
  2) En la **prop 3** vimos que si las clases son distintas entonces son disjuntas

  Luego, se cumplen las dos **condiciones de partición**

- **Prop 5**
  Si en el conjunto está definida una partición, entonces existe una relación de equivalencia cuyas clases son los subconjuntos de la partición.

  Demostración
  1) Se define en A la siguiente relación ***"a R b si pertenece al mismo subconjunto de la partición"***
  2) R verifica las tres condiciones (Reflexiva, Simétrica, Transitiva

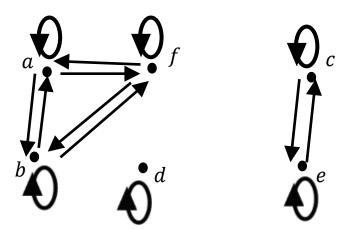
  Los elementos relacionados están en el mismo conjunto de la partición, por lo tanto, las clases de equivalencia coinciden con los subconjuntos de la partición.

Ejemplo

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A_1 = \{c, e\}$ $\quad A_2 = \{a, f, b\}$ $\quad A_3 = \{d\}$

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\\ (a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b)\\ (c,e),(e,c)\}$$



Clases de equivalencia

$\bar{c} = \bar{e} = \{c, e\} = A_1$

$\bar{a} = \bar{b} = \bar{f} = \{a, b, f\} = A_2$

$\bar{d} = \{d\} = A_3$

➢ **Relaciones de orden**

Sea $A \neq \emptyset$, R relación definida en A

Existen distintas formas o criterios para ordenar los elementos del conjunto A. Si R es un orden en A diremos

$$\boldsymbol{a}\ R\ \boldsymbol{b}$$

Precede a "$\boldsymbol{b}$" Sucede a "$\boldsymbol{a}$"

Un orden siempre es **Transitivo**.

- **Orden Estricto**

R es un orden Estricto en A si verifica las propiedades
- Arreflexiva
- Asimétrica
- Transitiva

Ejemplo s

" $<$ "," $>$ " entre números

- **Orden Amplio**

R es un orden Amplio en A si verifica las propiedades
- Reflexiva
- Antisimetrica
- Transitiva

Ejemplo s

" $\leq$ "," $\geq$ " entre números

Cada uno de los órdenes anteriores puede ser:

- **Orden Total:** Dados dos elementos distintos de A siempre existe alguna vinculación entre ellos.

$$\forall a, b \in A, a \neq b : \ (a\, R\, b \ \ \vee \ \ b\, R\, a)$$

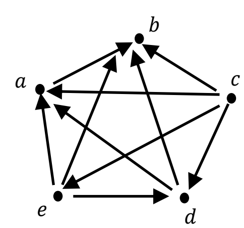
- **Orden Parcial:** Existen al menos dos elementos distintos de A sin vinculación entre ellos.

$$\exists\, a, b \in A, a \neq b : \ (a \not R\, b \ \ \wedge \ \ b \not R\, a)$$

Ejemplos

1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{(c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (e, a)$
$(e, b), (e, d), (d, a), (d, b), (a, b)\}$



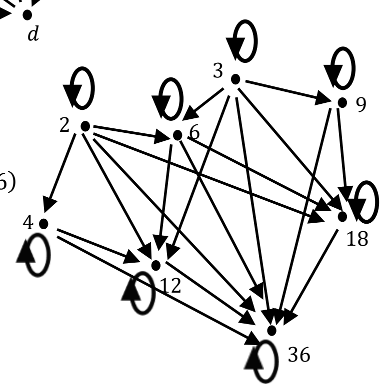
- Arreflexiva
- Asimétrica
- Transitiva

Orden Estricto — Total

2) $A = \{2,3,4,6,9,12,18,36\}$

$x\, R\, y$ si x “es divisor de ” y

$R = \{(2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (9,9), (12,12), (18,18), (36,36)$
$(2,4), (2,6), (2,12), (2,18), (2,36), (3,6), (3,9), (3,12)$
$(3,18), (3,36), (4,12), (4,36), (6,12), (6,18), (6,36)$
$(9,18), (9,36), (12,36), (18,36)\}$



- Reflexiva
- Antisimétrica
- Transitiva

Orden Amplio — Parcial

<u>Obs:</u> La relación dada en el ejemplo 2 es orden parcial pues, por ejemplo,$(2,3) \notin R \wedge (3,2) \notin R$, es decir, hay al menos un par de elementos sin vinculación.

Elementos particulares en una Relación de Orden

Sea $A \neq \emptyset$, R relación de orden definida en A

- ✓ Un elemento de A es **Mínimo** si precede a **Todos** los demás elementos.
- ✓ Un elemento de A es **Máximo** si sucede a **Todos** los demás elementos.

Observación: Si existe mínimo o máximo es **único**.

- ✓ Un elemento de A es **Minimal** si sólo precede (**nunca sucede**)
- ✓ Un elemento de A es **Maximal** si sólo sucede (**nunca precede**)

Observación: Puede existir más de un minimal o más de un maximal.

Nota: Para identificar los elementos particulares no se tienen en cuenta los bucles.

En ejemplo 1
Mínimo: **"c"**
Máximo: **"b"**

En ejemplo 2
Minimales: **"2", "3"**
Máximo: **"36"**

Elementos particulares en una Relación de Orden

Sea $A \neq \emptyset$, R relación de orden definida en A
Sea $a, b \in A \ \wedge a \neq b$, decimos que b es consecutivo de a si verifica:

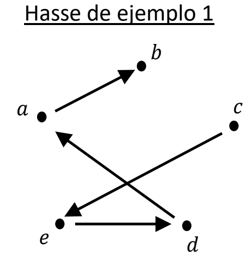
1) $a\ R\ b$
2) $\nexists\ c \in A \ / \ (a\ R\ c \ \wedge \ c\ R\ b)$ "Entre a y b no existe otro elemento"

- **Diagrama de HASSE**

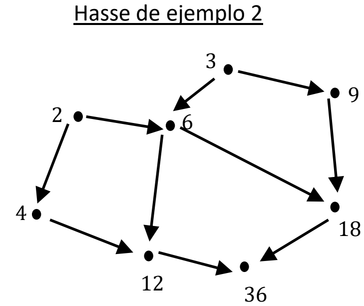
Sea $A \neq \emptyset$, R relación de orden definida en A
Un diagrama de Hasse es una forma de graficar relaciones de orden empleando un número menor de arcos o aristas. En estos diagramas se vinculan solamente los elementos (vértices) consecutivos.

- ✓ Hasse Orientado
  - Los vértices se distribuyen de cualquier forma en el plano
  - Se vinculan los elementos consecutivos mediante arcos orientados (flechas). Se parte del elemento mínimo o minimales y se llega al máximo o maximal.
  - El diagrama se lee siguiendo los arcos. Dos elementos están relacionados si hay un camino de arcos orientados entre ellos.

Hasse de ejemplo 1



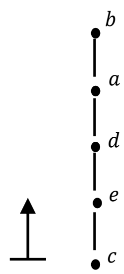
Hasse de ejemplo 2



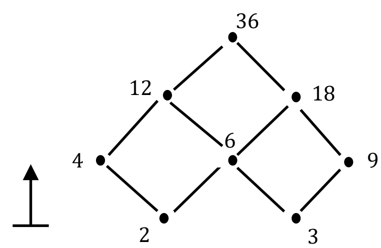
✓ Hasse No Orientado

- La vinculación entre los vértices consecutivos se hace mediante segmentos o aristas (sin flecha).
- Los vértices del diagrama se ubican por niveles. En el primer nivel se coloca el mínimo o los minimales. En el segundo nivel los consecutivos del primer nivel. Así hasta llegar al último nivel con el máximo o maximales.
- El diagrama se lee siguiendo las cadenas que se forman desde el primer nivel hasta el último.

Hasse de ejemplo 1



Hasse de ejemplo 2



Relación de Inclusión (Retículo)

Ejemplo 3

$$A = \{a, b, c\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

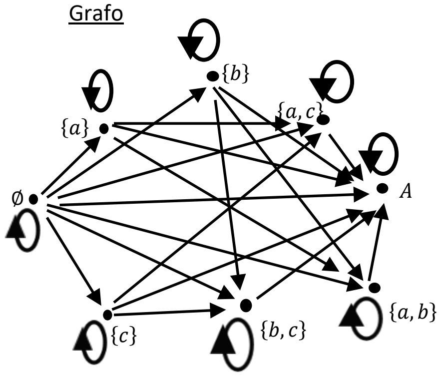
Conjunto de subconjuntos de A

$Card\ P(A) = 2^n$ (donde $\boldsymbol{n}$ es el nro de elementos de A)

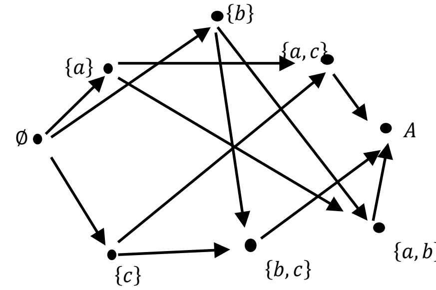
- ✓ Reflexiva: todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Esta incluido en sí mismo.
- ✓ Antisimétrica: $(S \subset T \ \wedge \ T \subset S) \Longrightarrow S = T$
- ✓ Transitiva: $(S \subset T \ \wedge \ T \subset H) \Longrightarrow S \subset H$

Observación: la relación de inclusión es un orden parcial ya que existen subconjuntos sin vinculación.

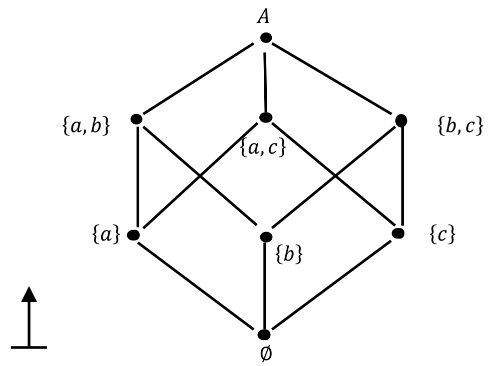
Grafo



Hasse Orientado



Hasse No Orientado



- **Función**

Sean A y B conjuntos no vacíos.
Sea f una relación de A en B; $f \subset A \times B$
f es una función de A en B si verifica:

1) Existencia de Imagen

$$\forall x \in A \; \exists y \in B \;/\; (x, y) \in f$$

"Todo elemento del conjunto de partida tiene vinculación $D_f = A$"

2) Unicidad de Imagen

$$a \in A; \;\; b, c \in B$$
$$[(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f] \Longrightarrow b = c$$

"Cada elemento de A tiene solo una imagen (vinculación)"

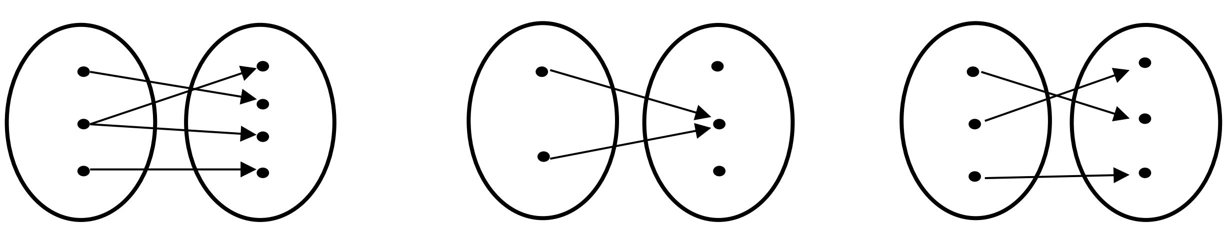
Conclusión: f es una función de A en B sí y solo sí todo elemento de A tiene una y solo una imagen en B.

Notación:

$x \in A, y \in B$
$(x, y) \in f \rightarrow f(x) = y$

preimagen de y Imagen de x

También es posible escribir en notación de conjunto, así: $f = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$



No es función Es función Es función

- **Tipos de función**
  - **Función Inyectiva**

    Sean $A, B \neq \emptyset$

    $$f: A \to B$$
    $$x \longmapsto f(x)$$

    $$\forall x_1, x_2 \in A;\ \ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

    "Elementos distintos del dominio deben tener imágenes distintas"

  - **Función Sobreyectiva**

    Sean $A, B \neq \emptyset$

    $$f: A \to B$$
    $$x \longmapsto f(x)$$

    $$\forall y \in B\ \ \exists x \in A\ /\ f(x) = y$$

    "Todo elemento del conjunto de llegada tiene preimagen"

  - **Función Biyectiva**

    Sean $A, B \neq \emptyset$

    $$f: A \to B$$
    $$x \longmapsto f(x)$$

    "f es **Biyectiva** sí y solo sí es **Inyectiva** y **Sobreyectiva**"

Ejemplos

2) $A = \{p, q, t\}$; $B = \{0,1\}$

$f = \{(p,0), (q,1), (t,0)\}$ $\longrightarrow$ f no es inyectiva; f es sobreyectiva

$h = \{(p,1), (q,1), (t,1)\}$ $\longrightarrow$ h no es inyectiva; h no es sobreyectiva

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 2x + 3 = \mathrm{y}$

¿es f sobreyectiva?

$y = 2x + 3 \ \longrightarrow\ \ x = \frac{1}{2}(y - 3)$

$C_f = \mathbb{R} \Longrightarrow f$ es sobreyectiva

¿es f inyectiva?

Utilizando el condicional contrarrecíproco

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

f es inyectiva

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = x^2$

¿es f sobreyectiva?

$C_f = \mathbb{R}_0^+$

Los reales negativos no tienen preimagen

g no es sobreyectiva

¿es f inyectiva?

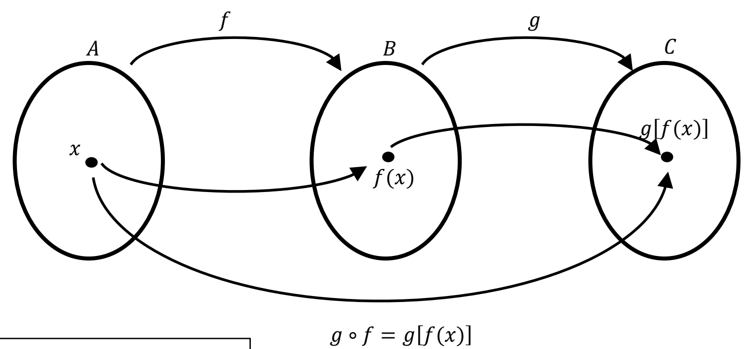
Observamos que 5 y -5 tienen la misma imagen

$5^2 = (-5)^2 = 25$. Todo número real y su opuesto tienen la misma imágen.

g no es inyectiva

- **Composición de Funciones**

Sean $A, B, C \neq \emptyset$
Sean $f: A \to B$ función y $g: B \to C$ función (debe ocurrir que $C_f \subset D_g$)



$$g \circ f \ : \ A \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Ejemplos

1) $A = \{p, q, t\}$; $B = \{V, F\}$; $C = \{0,1,2\}$

$f : A \longrightarrow B$; $f = \{(p, F), (q, V), (t, F)\}$
$g : B \longrightarrow C$; $g = \{(V, 2), (F, 0)\}$

$C_f = \{F, V\} = D_g$

$g \circ f \ : \ A \longrightarrow C$; $g \circ f = \{(p, 0), (q, 2), (t, 0)\}$

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = 2x + 3$ $\quad$ $x \longmapsto g(x) = x^2$

$C_f = \mathbb{R} = D_g$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[2x + 3] = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$g \circ f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (g \circ f)(x) = (2x + 3)^2$

Nota:

En el ejemplo 1 observamos que no es posible obtener $f \circ g$
En el ejemplo 2 observamos que es posible obtener $f \circ g$ y está dada por:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2] = 2x^2 + 3$$

Conclusión: "La composición de funciones no es conmutativa"

- **Función Inversa**

Sean $A, B, C \neq \emptyset$; $f: A \to B$ función
Toda función es una relación de A en B; $f \subset A \times B$
Por ser relación existe su Relación Inversa; $f^{-1}: B \to A$

¿Es la relación inversa f^{-1} una función?

$A=\{a,b,c\}$ $\quad f=\{(a,2),(b,1),(c,2)\} \quad \longrightarrow f^{-1}=\{(2,a),(1,b),(2,c)\}$ **No es Función**.

$B=\{0,1,2\}$ $\quad g=\{(a,0),(b,1),(c,2)\} \quad \longrightarrow g^{-1}=\{(0,a),(1,b),(2,c)\}$ **Es Función**.

- ✓ **Propiedad 1**
  Sea $f: A \rightarrow B$ función
  Si f es una función **No Inyectiva**, entonces su relación inversa f^{-1} **No es Función**.

  Demostración:
  Si f no es inyectiva, dos elementos del dominio tienen la misma imagen
  Sean $x_1, x_2 \in A$:
  $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)=y$; $\quad (x_1,y) \in f \wedge (x_2,y) \in f \Longrightarrow (y,x_1) \in f^{-1} \wedge (y,x_2) \in f^{-1}$
  entonces y tiene dos imágenes distintas en f^{-1}. Por lo tanto f^{-1} no cumple la condición de Unicidad de Imagen. f^{-1} No es Función.

- ✓ **Propiedad 2**
  Sea $f: A \rightarrow B$ función
  Si f es una función **No Sobreyectiva**, entonces su relación inversa f^{-1} **No es Función**.

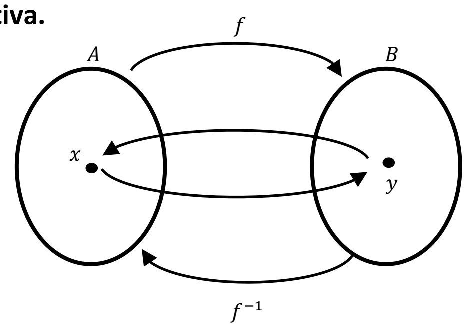
  Demostración:
  Si f no es sobreyectiva $\exists y \in B$ que no tiene preimagen, por lo tanto y no tendrá imagen por f^{-1}.
  Luego f^{-1} no cumple con la condición de Existencia de Imagen. f^{-1} **No es Función**.

Si leemos las propiedades 1 y 2 usando el condicional contrarrecíproco vemos que para que f^{-1} sea función, f debe ser **Inyectiva** y **Sobreyectiva.**

Teorema:
Sea $f: A \rightarrow B$ función
f^{-1} es función sí y solo sí f es función **Biyectiva.**

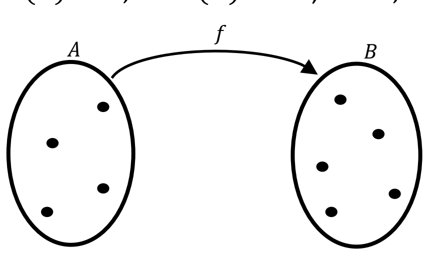
Además:

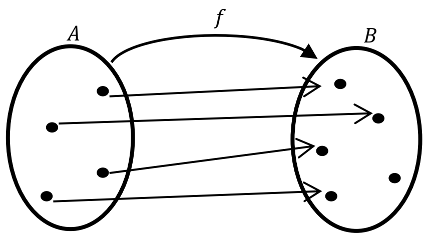
$(f^{-1} \circ f)(x) = x = Id_A$
$(f \circ f^{-1})(y) = y = Id_B$



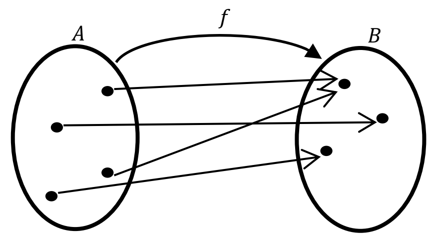
- ➢ **Función Biyectiva entre dos conjuntos**

Sea $f: A \rightarrow B$ función, $card(A)=n; card(B)=m$; con $n,m \in \mathbb{N}$





Si f es **inyectiva**, entonces el $\boldsymbol{card}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{card}(\boldsymbol{B})$



Si f es **sobreyectiva**, entonces el $\boldsymbol{card}(\boldsymbol{A}) \geq \boldsymbol{card}(\boldsymbol{B})$

Conclusión:

Si $f: A \to B$ es función **Biyectiva**, entonces $\boldsymbol{card}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{B})$**.**

- **Ley de composición Interna**

Sea $A \neq \emptyset$

$*$ es una Ley de Composición Interna en A si es una función que a cada par de elementos de A le asigna otro elemento en A .

$$\begin{aligned} * \ : \quad & A \times A \longrightarrow A \\ & (a, b) \longmapsto a * b \in A \end{aligned}$$

Ejemplo

I.- $\mathbb{R} \longrightarrow n°\ reales$ con las operaciones : $+, \ -, \ \cdot$
$\mathbb{R} - \{0\}$ con $\div$
$\mathbb{N} \longrightarrow n°\ naturales$ con las operaciones: $+, \ \cdot$

Observación: La resta y la división no son Leyes Internas u operaciones en $\mathbb{N}$ puesto que no siempre el resultado es un numero natural. Ej.

$$5 - 7 = -2 \ \notin \mathbb{N}$$
$$5/7 = \tfrac{5}{7} \ \notin \ \mathbb{N}$$

Ejemplo

II.- $A = \{u, t\}$
$A \times A = \{(u,u), (u,t), (t,u), (t,t)\}$

$* \ : \quad A \times A \longrightarrow A$

*	*u*	*t*
u	*u*	*t*
t	*t*	*t*

Observación: $*$ es ley interna en A, ya que para cada elemento de $A \times A$, en la tabla, se obtiene como resultado un elemento del conjunto A

Ejemplo

III.- A partir de las operaciones conocidas en conjuntos numéricos es posible definir nuevas operaciones en dichos conjuntos
$\mathbb{Z} \longrightarrow nros\ enteros$ con $+, -, \ \cdot$

$$\begin{aligned} * \ : \quad & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & (a, b) \longmapsto a * b = 2a + b \end{aligned}$$

Sea $A \neq \emptyset$, LCI en A
$*$ es:

1) **Asociativa** en A si: $\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$
2) **Conmutativa** en A si: $\forall a, b \in A: a * b = b * a$

$*$ tiene:

3) **Elemento Neutro** en A si: $\exists e \in A \ / \ \forall a \in A: a * e = e * a = a$

$*$ verifica:

4) **Existencia de Inverso** si: $\forall a \in A \ / \exists a' \in A \quad a * a' = a' * a = e$

Observaciones: para analizar que la operación o ley interna verifique la existencia de inverso es necesario que tenga neutro

5) Si en A están definidas dos Leyes de Composición Internas: $* \ \ y \ \ \triangle$ se puede cumplir con la Propiedad Distributiva $\forall a, b, c \in A$: $a * (b \triangle c) = (a * b) \triangle (a * c)$
$a \triangle (b * c) = (a \triangle b) * (a \triangle c)$

Nota:

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ operación definida en A
$(A\ ,\ *) \longrightarrow$ es un ***Sistema o Estructura Algebraica.***

- **Semigrupo**
  Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ operación o LCI definida en A
  El sistema algebraico $(A\ ,\ *)$ es **Semigrupo**, si $*$ verifica la propiedad **Asociativa**

  ejemplo

- **Grupo**
  Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ operación o LCI definida en A
  El sistema algebraico $(A\ ,\ *)$ es **Grupo**, si $*$ verifica las propiedades: **Asociativa, Existencia de Neutro y Existencia de Inverso.**

  ejemplo

$(A\ ,\ *)$ es **Grupo**
Además $a * b = b * a$, entonces $*$ es conmutativa.

$\therefore$ $(A,*)$ es **Grupo Conmutativo o Abeliano**

- **Unicidad del Neutro**

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ operación o LCI definida en A

Propiedad: Si $(A\,,\ *)$ tiene neutro, entonces es único.

Demostración: (se demuestra por el absurdo)

Suponemos que e y e' son neutros en $(A\,,\ *)$

Es decir $\forall a \in A: a * e = e * a = a$

$\forall a \in A: a * e' = e' * a = a$

$e = e * e' = e' \quad \therefore \quad e = e'$, el **neutro es UNICO**

ejemplo

- **Unicidad del Inverso**

Sea $A \neq \emptyset$ y $*$ operación o LCI definida en A

Propiedad: Si $(A\,,\ *)$ es **Semigrupo** (con neutro) y cada elemento tiene inverso, entonces éste es único (para cada elemento).

Demostración: $a \in A$ supongamos que tiene los inversos $a'\,y\,a''$

$a * a' = a' * a = e$

$a * a'' = a'' * a = e$

$\boldsymbol{a}' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = \boldsymbol{a}''$

$a' = a'' \;\therefore$ el **inverso de $\boldsymbol{a}$ es UNICO**

ejemplo