NOCIONES BÁSICAS DE LA TEORÍA DE GRAFOS 2020

INTRODUCCIÓN:

La teoría de grafos es una rama de la teoría de conjuntos que ha dado resultados importantes en el tratamiento de problemas de economía, estrategia militar, organización industrial, sociología, química, biología, etc. Aporta una eficaz ayuda en los planteos combinatorios que aparecen en los dominios económicos, sociológicos y tecnológicos.-

Se pueden utilizar las palabras grafes, grafos y redes como vocablos equivalentes.-

DEFINICIÓN DE GRAFO:

Sea A un conjunto no vacío con una cantidad finita o numerable de elementos.

$A = \{ x_1 , x_2, x_3, \ldots , x_n\}, \; n \in N,$

y una relación R de A en A (biunívoca o multívoca). Esta relación R hace corresponder a cada elemento del conjunto A, ninguno, uno, dos o más elementos del mismo conjunto.

La expresión G = (A,R) constituye un grafo.-

REPRESENTACIÓN DE UN GRAFO MEDIANTE UNA FIGURA FORMADA POR VÉRTICES Y ARCOS:

A cada elemento de A se le asigna un punto sobre el papel y se lo llama **VÉRTICE** del grafo. Si dos elementos de A, x_i y x_j, están relacionados por R, se ligan los vértices correspondientes mediante una flecha que se llama **ARCO** del grafo.

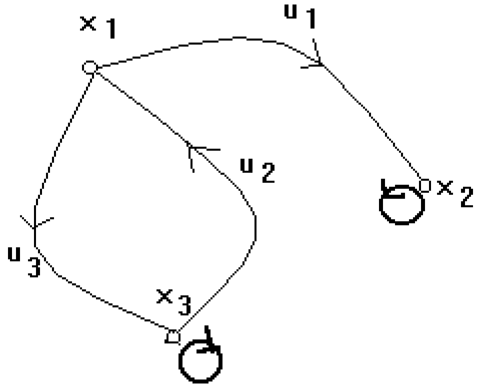
Al conjunto de los arcos lo llamaremos U y designaremos indistintamente un grafo mediante: (A,R) o (A,U).

Ejemplo: Sea $A = \{x_1, x_2, x_3\}$

$R = \{(x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_2, x_2) , (x_3, x_1) , (x_3, x_3)\}$

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$

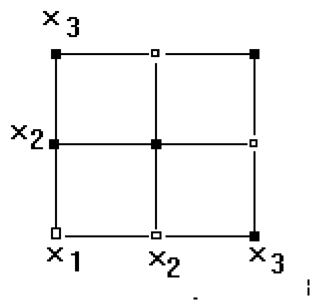
G = (A,R) = (A,U)



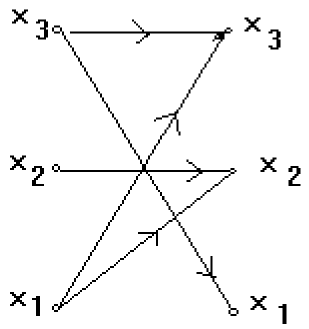
<u>Otras representaciones de un grafo</u>:

El grafo G = (A,R) puede también representarse mediante una grilla, puntos conectados (apareados) o una matriz.

En el ejemplo anterior:



En grilla



Por puntos apareados

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & & & \\ x_2 & & & \\ x_3 & & & \end{array}\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricialmente

<u>Conceptos referidos a un grafo orientado representado mediante vértices y arcos</u>

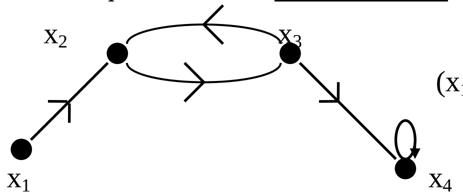
$A = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n \}$; $G = (A,R) = (A,U)$

<u>* Extremos:</u>

Dados el arco **u = (x_i, x_j);** a x_i se le llama ***<u>extremo inicial</u>*** y a x_j , ***<u>extremo final ó terminal.</u>***

<u>* Arcos adyacentes:</u>

Se dice que dos o más ***<u>arcos distintos</u>*** son ***<u>adyacentes</u>*** cuando tienen un **extremo** común.



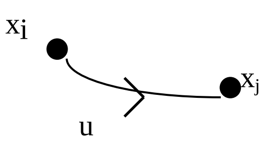
(x_1 , x_2), (x_2 , x_3) y (x_3 ,x_4) son adyacentes

<u>* Vértices adyacentes:</u>

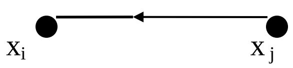
Dos ***<u>vértices distintos</u>*** x_i y x_j son ***<u>adyacentes</u>*** si existe un arco **(x_i, x_j)** o **(x_j, x_i).**

<u>* Arco incidente sobre un vértice:</u>

- Un arco u ***<u>incide en un vértice x_i hacia el exterior</u>*** si x_i es extremo inicial de u y si el extremo final es distinto x_i.



- Un arco u ***<u>incide en un vértice x_i hacia el interior</u>*** si x_i es extremo final de u y si el extremo inicial es distinto x_i.

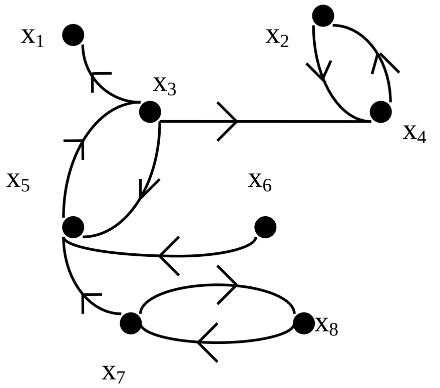


<u>* Semigrado de un vértice:</u>

- El ***<u>semigrado interior d^-</u>*** de un vértice x_i es el número de arcos que inciden interiormente en el.
- El ***<u>semigrado exterior d^+</u>*** de un vértice x_i es el número de arcos que inciden hacia el exterior de dicho vértice.

- El ***grado d* de un vértice** x_i es el número de arcos que tienen a éste vértice como extremo inicial o final.

$$d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$$



NOTA: Los conceptos de incidencia de arcos sobre un vértice se dan también sobre un conjunto A de vértices.

Simbolizamos:

$\cup_A^+$: conjunto de arcos incidentes en A hacia el exterior

$\cup_A^-$: conjunto de arcos incidentes en A hacia el interior.

$\cup_A$: conjunto de arcos que inciden en A.

En el ejemplo, si $A= \{ x_3, x_4, x_5, x_6 \}$ será

$\cup_A^+ = \{ (x_3, x_1), (x_4, x_2) \}$

$\cup_A^- = \{ (x_2, x_4), (x_7, x_5) \}$

$\cup_A = \{ (x_3, x_1), (x_4, x_2), (x_2, x_4), (x_7, x_5) \}$

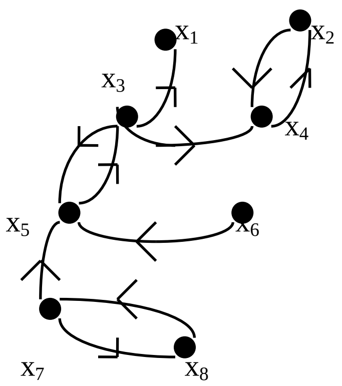
$\cup_A = \cup_A^+ \cup \cup_A^-$

*** Grafos que se definen a partir de un grafo dado**

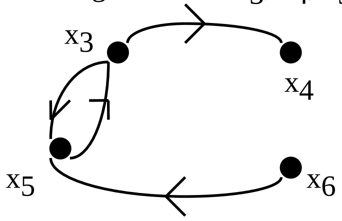
Dado un grafo $G= (E, \Gamma) = (E, \cup)$. Se puede obtener un:

- **Subgrafo:** suprimiendo uno o varios vértices del grafo dado y los arcos que tienen algún (o ambos) extremo en los vértices suprimidos.
- **Grafo parcial:** suprimiendo uno o varios arcos en el grafo dado.
- **Subgrafo parcial:** suprimiendo uno o varios arcos en un subgrafo del grafo dado.

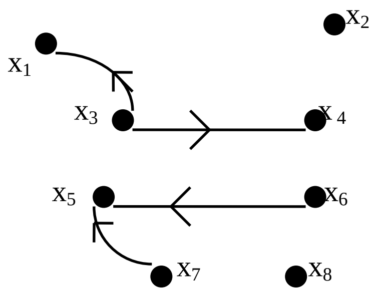
Ejemplo: $E= \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$



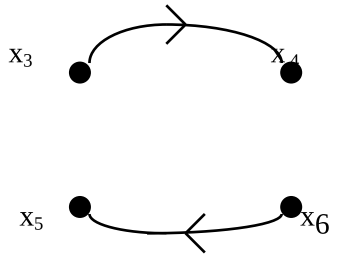
Subgrafo A = { x_3, x_4, x_5, x_6 } $\subset$ E



Grafo parcial



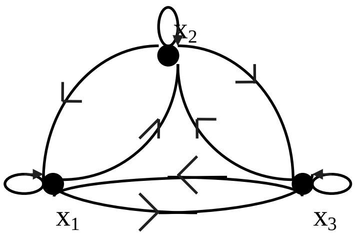
Subgrafo parcial



Grafo pleno

El grafo G = (E , U) = (E , Γ) es pleno si U tiene todos los arcos posibles, es decir si Γ = E x E

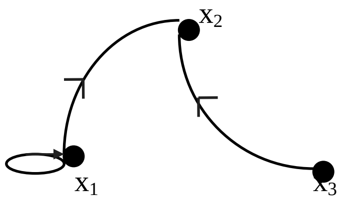
E = { x_1 , x_2 , x_3 }



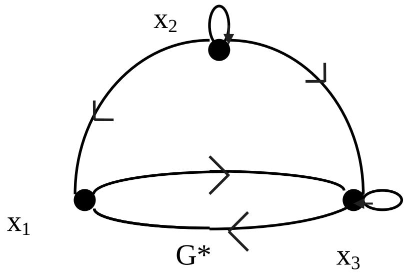
Grafo complementario

Dado el grafo G = (E , Γ) , el grafo G* = (E , Γ*) es su complementario si y sólo si Γ* = (E x E) - Γ

G* es el complementario de G y además G es el complementario de G* , es decir (G*)* = G



G

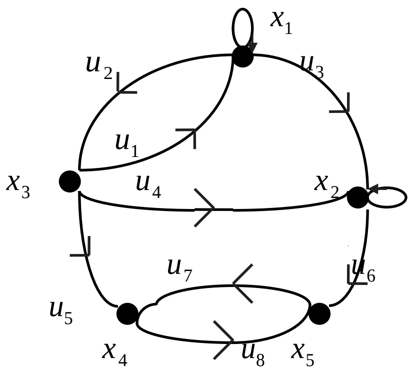


G*

Camino, camino sencillo y camino elemental

- Un **camino** es una secuencia (μ_1 ,μ_2 ,.....) de arcos tal que el extremo terminal (final) de cada arco coincide con el extremo inicial del siguiente. Un camino puede ser “finito” o “infinito”

Ejemplo :



$U_1 = (\ u_1,\ u_3,\ u_6\ )$

$U_2 = (\ u_2\ ,\ u_5,\ u_8)$

$U_3 = (u_2\ ,\ u_4\ ,\ u_6,\ u_7)$

Un camino se puede designar también mediante los vértices que contiene.

$U_1 = \{\ x_3, x_1, x_2, x_5\ \}$ $U_2 = \{\ x_1, x_3, x_4, x_5\ \}$ $U_3 = \{\ x_1, x_3, x_2, x_5, x_4\ \}$

- Un camino es **sencillo** cuando no utiliza dos veces el mismo arco, en caso contrario se denomina **compuesto.**
- Un camino es **elemental** si no utiliza dos veces el mismo vértice, en caso contrario se dice **no elemental**.

Bucle

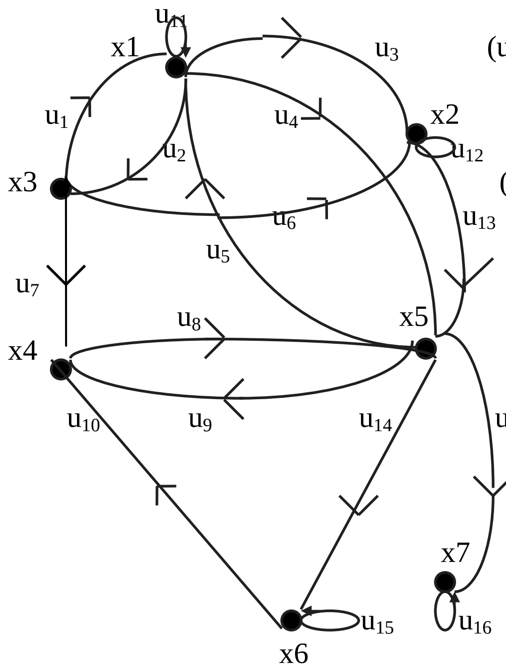
Se dice que un arco u = (x_i ,x_j) es un “bucle” cuando $x_i = x_j$.

Circuito

Un circuito es un camino finito (μ_1,μ_2,...,μ_k) en el cual, el vértice inicial de μ_1 coincide con el vértice final de μ_k. Se puede indicar mediante los arcos o vértices que contiene. El bucle es un circuito formado por un solo arco y un solo vértice.

Un circuito es “elemental ” si todos los vértices que atraviesa son distintos salvo el inicial y el final, los cuales coinciden.

Ejemplo:



(u_1, u_3 , u_{13} , u_9)camino sencillo y elemental

(u_7 , u_8 , u_{14} , u_{10} , u_8 , u_{17})camino compuesto

(u_8 , u_5 , u_3 , u_{13} , u_{17})camino sencillo no elemental

(u_7 , u_8 , u_{14} , u_{10} , u_8 , u_{17})camino compuesto y no elemental

u_{11} , u_{12} , u_{15} y u_{16} bucles

(u_8 , u_{14} , u_{10}) circuito elemental

(u_2 , u_7 , u_8 , u_5)circuito elemental

<u>Teorema</u> : Todo camino elemental es sencillo.

Si G contiene circuitos, con reiteraciones del mismo es posible determinar caminos infinitos.
Ejercicio :
Probar que G carece de circuitos si y sólo si todos sus caminos son elementales.

- Un camino de G que contiene todos sus arcos y es sencillo se llama **Euleriano**
- Un camino de G que es elemental e incide en todos sus vértices es **Hamiltoniano**

<u>Longitud de un camino</u>

La longitud de un camino $\mu = (\mu_1, \mu_2,..., \mu_s)$ es el número de arcos que contiene la secuencia. $l(\mu) = s$

Si el camino es infinito, entonces $\quad l(\mu) = \infty$

$\mu_1 = (x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ,x_5 ,x_6) \quad l(\mu_1) = 5$

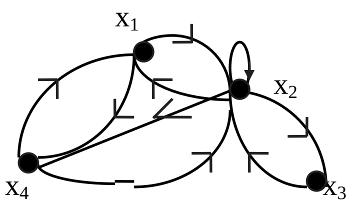
$\mu_2 = (x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_2 , x_3 ,x_6) \quad l(\mu_2) = 7$

<u>Grafo simétrico y grafo asimétrico</u>

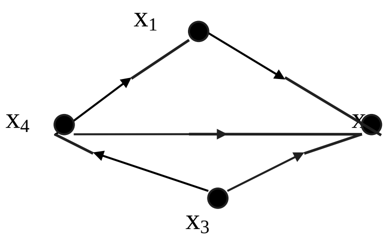
Un grafo G = (E , Γ) es **simétrico** si su relación Γ es simétrica, es decir $x \Gamma y \Rightarrow y \Gamma x$

Un grafo G = (E , Γ) es **asimétrico** si su relación Γ es asimétrica $x \Gamma y \Rightarrow y \not\Gamma x$
En este grafo no puede haber bucles.

Un grafo es **reflexivo** si la relación es reflexiva (presenta bucles en todos los vértices).
Un grafo es **transitivo estricto** si para cualquier camino que no es circuito existe un arco que vincula origen y extremidad de dicho camino.



Grafo simétrico



Grafo asimétrico

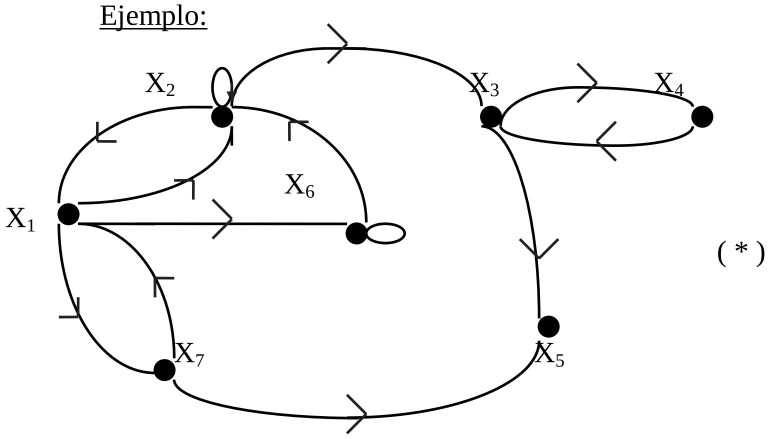
<u>Relación de equivalencia asociada a un grafo</u>

Sea $E = \{ x_1 , x_2,...,x_n \}$ el conjunto de vértices del grafo G = (E , Γ).
Se define en E la siguiente relación:

$$x_i \equiv x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_j \\ \vee \\ \text{Existe un camino de } x_i \text{ a } x_j \text{ y de } x_j \text{ a } x_i \end{cases}$$

<u>Ejercicio</u> : Probar que la relación definida es de equivalencia.
Las clases de equivalencia definidas por esta relación forman una **Partición** de E.

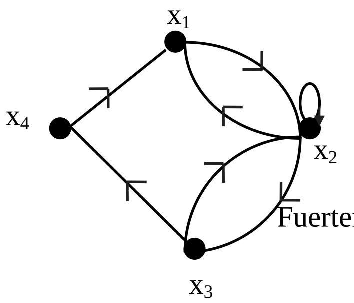
Ejemplo:



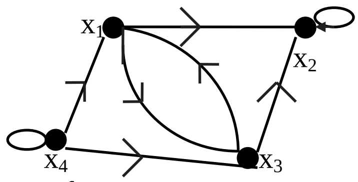
(*)

Grafo fuertemente conexo

Un grafo es “fuertemente conexo” si $\forall\ x_i$ y $\forall\ x_j$ $(x_i \neq x_j)$ existe un camino de x_i a x_j .



Fuertemente conexo



No es fuertemente conexo

Arborescencia

Es una noción que surge en el estudio de grafos orientados finitos.

Un grafo finito G = (E,U) es una **arborescencia de raíz** x_1

$(x_1 \in E)$ si :

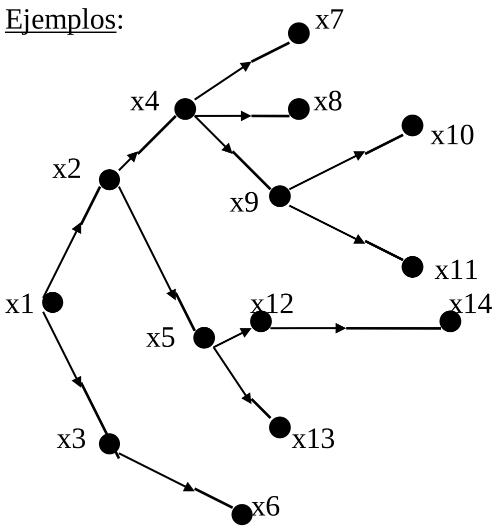
1- Todo vértice $x_i \neq x_1$ es extremidad final de un solo arco.

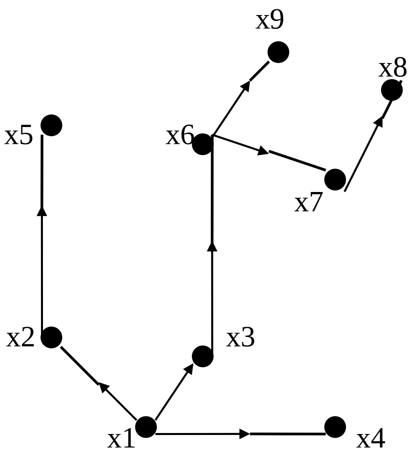
2- x_1 no es extremo final de algún arco.

3- El grafo no tiene circuito.

Observación: $\forall\ x_i \in E$ existe un camino que va de x_1 a x_i. $(x_i \neq x_1)$

Ejemplos:



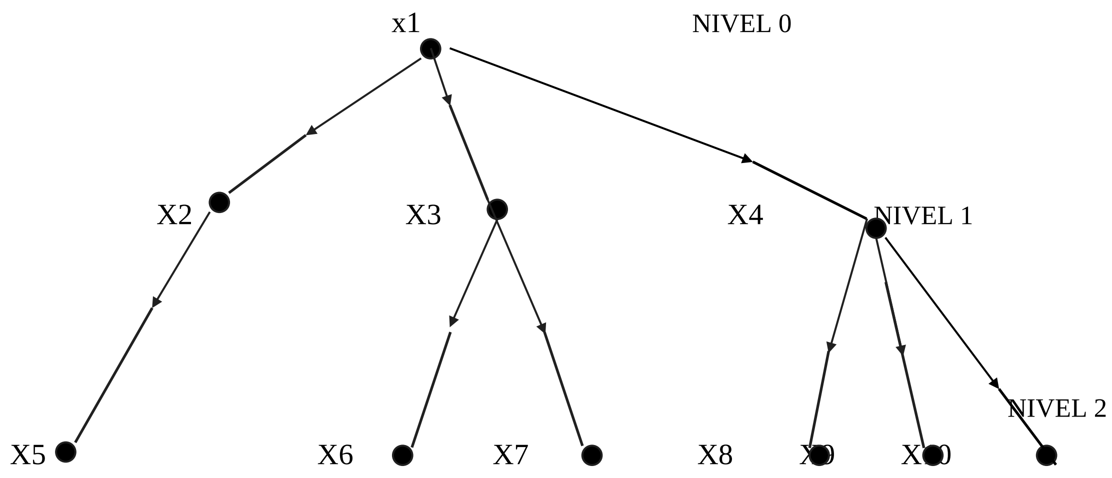


Construcción Geométrica de una Arborescencia

Primeramente se dibuja la raíz x_1, ningún arco llega a x_1 pero de él pueden salir varios. Se dice que x_1 está en el nivel 0. Los vértices donde terminan los arcos que se originan en x_1 se llamarán "vértices del nivel 1". Ningún vértice del nivel 1 tendrá otros arcos que lleguen a él pero cada uno de elllos puede tener arcos que salgan de él. Los arcos que tengan como extremo inicial un vértice del nivel 1 se dibujarán hacia abajo y tendrán el extremo final en vértices del nivel 2.

Este proceso continuará en todos los niveles necesarios hasta completar el grafo dirigido. Al número de niveles de una arborescencia se le llama "altura de la arborescencia".Como el grafo es finito la arborescencia tiene siempre un último nivel. A los vértices de la arborescencia de los cuales no salen arcos se les llama "hojas de la arborescencia".

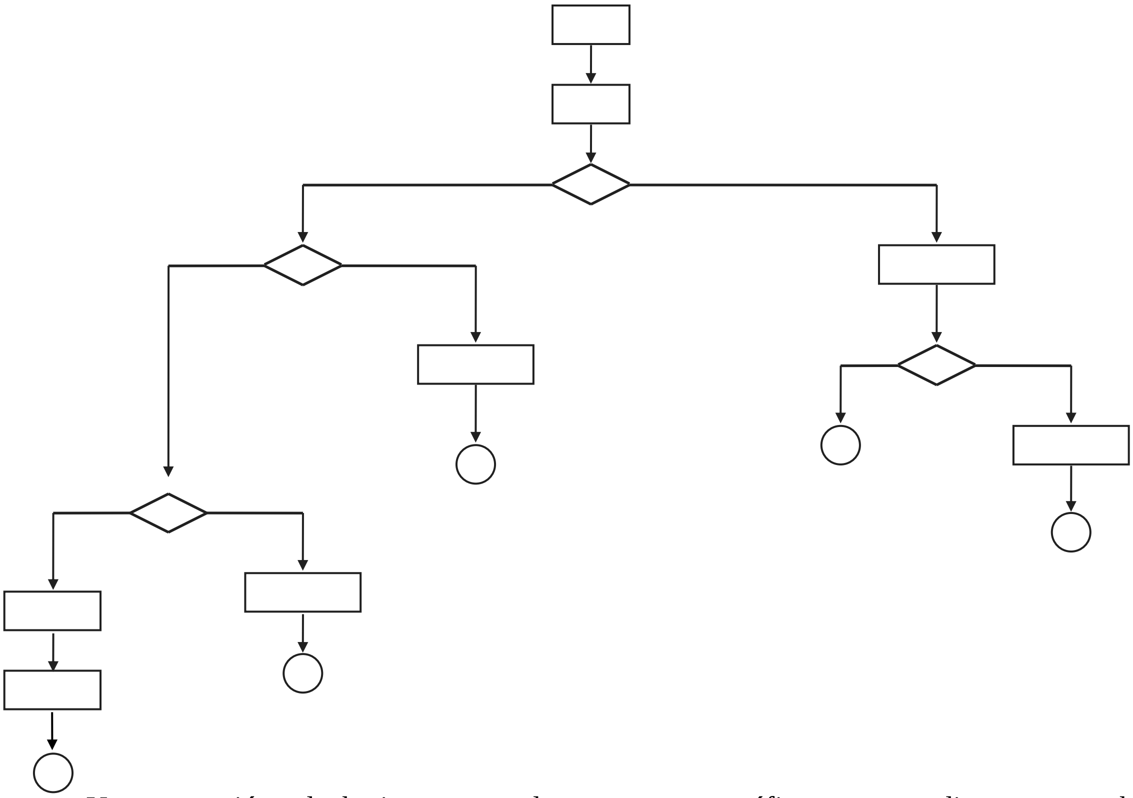
Ejemplo



Arborescencias Etiquetadas

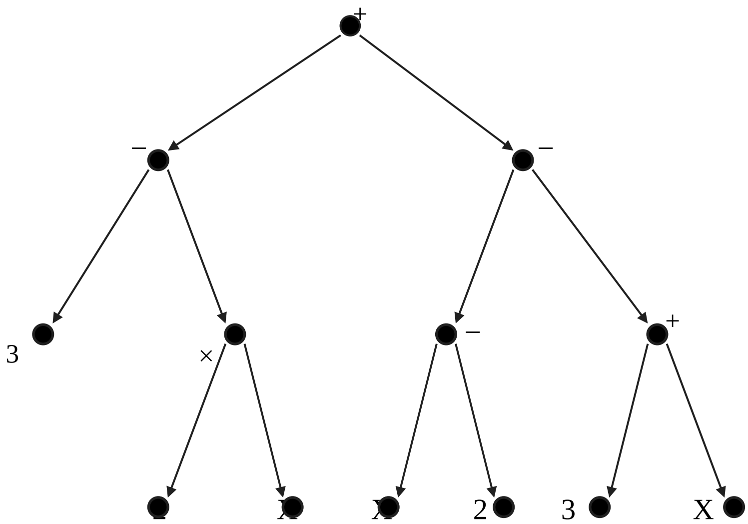
A veces, es conveniente etiquetar los vértices o los arcos de un grafo orientado para indicar que éste se usa para un objeto particular.

Un diagrama de flujo puede ser una arborescencia etiquetada.

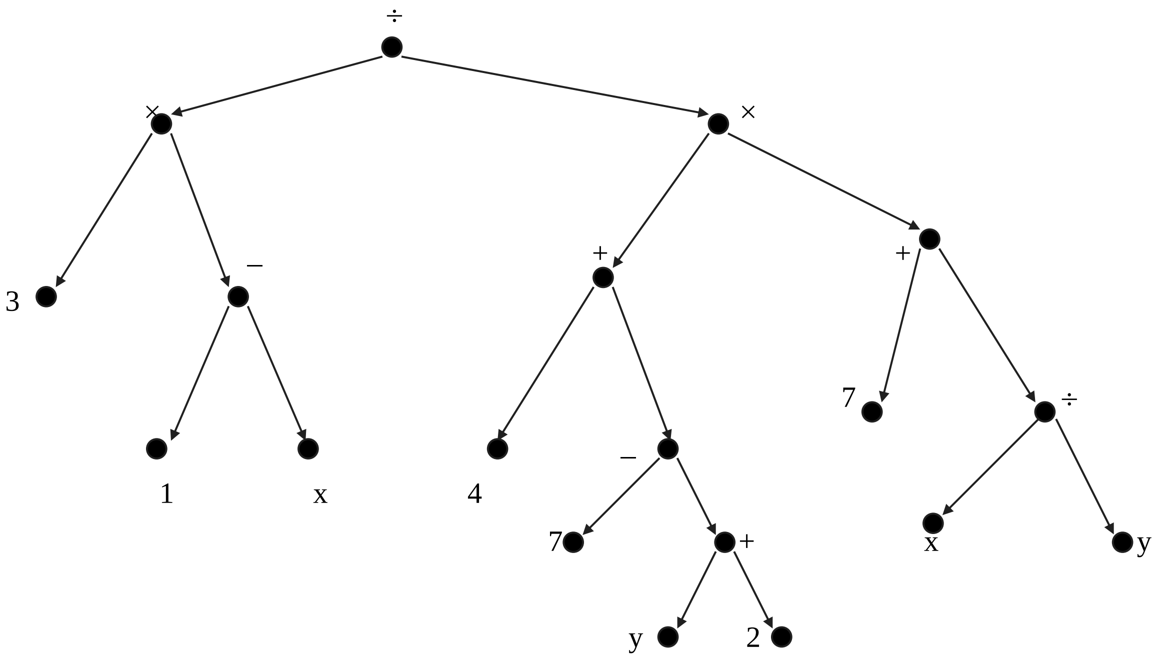


Una expresión algebraica se puede representar gráficamente mediante una arborescencia etiquetada.

Ejemplos: (3 - (2 * x)) + ((x - 2) - (3 + x))



(3 * (1 - x)) / ((4 + (7 - (y + 2))) * (7 + (x / y)))

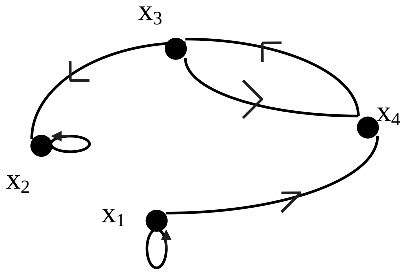


Conceptos no orientados

Sea G = (E , Γ) un grafo

- **Arista :** se llama arista del grafo G a todo par de vértices distintos x_i y x_j tal que le corresponda el arco (x_i , x_j) o el arco (x_j , x_i) . Indicaremos arista con

$\overline{u} = \overline{(x_i , x_j)}$



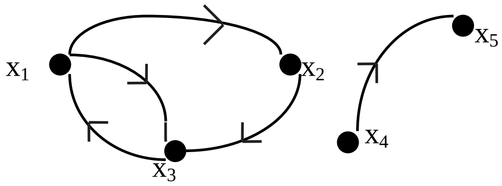
$\overline{U} = \{ \overline{(x_1 , x_4)} , \overline{(x_3 ,x_4)}, \overline{(x_2 ,x_3)} \}$

Este grafo posee seis arcos y tres aristas.

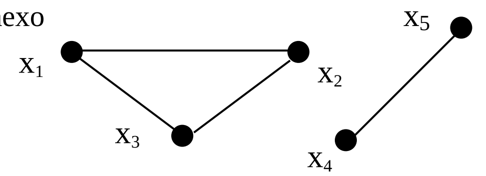
- **Cadena :** es una secuencia de aristas (u_1, u_2,......) tal que cada arista uk está ligada a u_{k-1} por uno de sus extremos y a u_{k+1} por el otro. Generalmente se la designa por de sus vértices.
  (x_2 , x_3 , x_4) ; (x_1, x_4 , x_3) ; (x_1 , x_4 , x_3 , x_2)
- **Ciclo :** es una cadena cerrada, parte de x_i y llega a x_i.
- Una cadena es **sencilla** si las **aristas** son todas distintas.
- Una cadena es **elemental** si no encuentra dos veces el mismo **vértice**.
- **Grafo conexo** : se dice que un grafo es conexo si $\forall x_i$ y $\forall x_j$ ($x_i \neq x_j$) existe una cadena entre ellos.

Ejemplos :

1) El grafo (*) que no es fuertemente conexo es conexo.
2)



No es conexo



Observación : un grafo fuertemente conexo, es conexo.

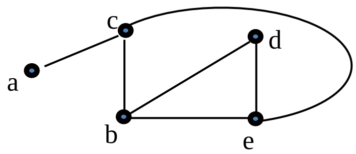
Operaciones elementales entre grafos

Dados los grafos $G_1 = (E_1,U_1)$ y $G_2 = (E_2 ,U_2)$, se pueden obtener, mediante las operaciones unión e intersección los grafos :

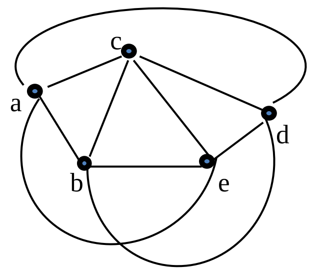
$G_3= (E_1 \cup E_2 , U_1 \cup U_2)$
$G_4= (E_1 \cap E_2 , U_1 \cap U_2)$

Grafo Planar

Un grafo es planar si se puede dibujar sin que las aristas se crucen



Grafo Planar

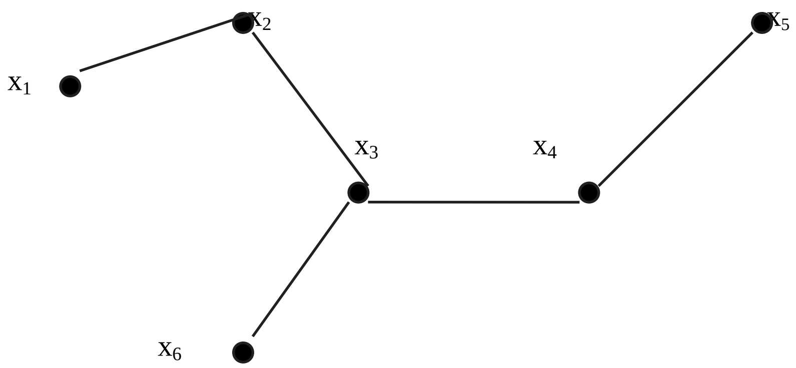


Grafo NO Planar

ARBOL

Es un concepto considerado en el estudio de grafos no orientados finitos.

Se llama "árbol" a un grafo finito conexo sin ciclo que tiene por lo menos dos vértices.



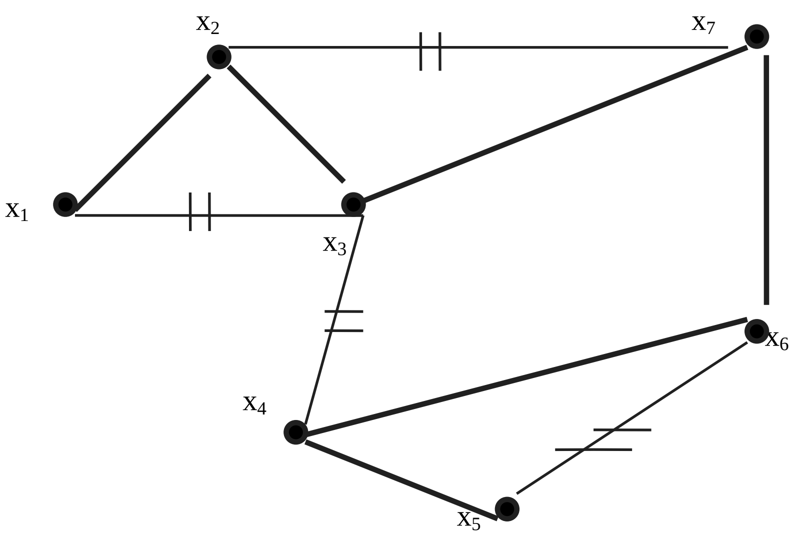
Observaciones:

* Si G es árbol y n es el número de vértices entonces G tiene n-1 aristas.
* Si G es árbol y se suprime una arista, deja de ser grafo conexo
* En un árbol todo par de vértices está ligado mediante una y sólo una cadena.

Árbol Parcial de un Grafo

Se llama **árbol parcial** del grafo G a un grafo parcial de G que es un árbol.

Un grafo admite un árbol parcial si y sólo si es conexo. Para construir un árbol parcial a partir de un grafo conexo se suprimen las aristas que "no desconectan" el grafo.

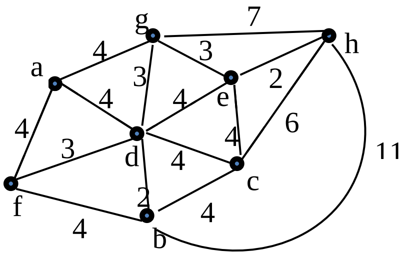


Grafo ponderado con peso

Si a las aristas del grafo se le asigna un valor numérico llamado peso o costo se dice que el grafo esta ponderado.

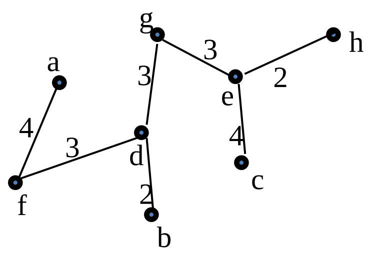
Si el grafo es conexo, interesa determinar un árbol generador de peso mínimo (o máximo).

Existen algoritmos que permiten obtener el árbol generador mínimo.



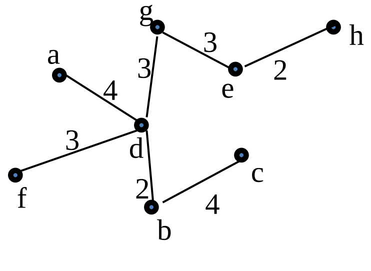
Algoritmo de PRIM

1) Seleccionar una arista de peso mínimo.
2) De los vértices de los extremos seleccionar una arista de peso mínimo
3) Desde los vértices anteriores, seleccionar una arista de peso mínimo <u>sin formar bucle</u>.
4) Reiterar hasta que se involucren todos los vértices (se suele utilizar un contador de vértices)



Algoritmo de KRUSKAL

1) Ordenar las aristas del grafo según el peso.
2) Tomar una arista de menor peso o costo.
3) Agregar una arista de menor peso que <u>no forme bucle</u>
4) El proceso re reitera hasta obtener n-1 aristas.



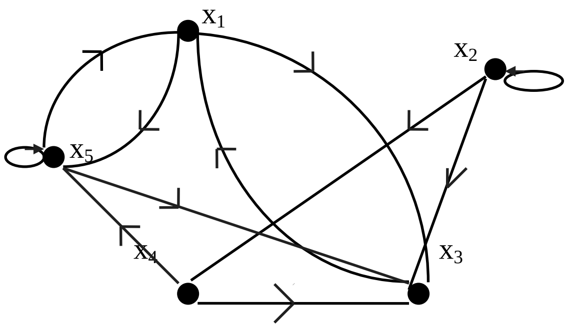
Matriz asociada a un grafo

Sea un grafo finito G = (E , U) = (E , Γ) con n vértices.

Se define la matriz $M \ \varepsilon \ R^{nxn}$ / $\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin U \\ m_{ij} = 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \end{cases}$

a M se le llama **matriz asociada** a G.

Ejemplo :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios :

1. Verificar que M^t corresponde al grafo (E ,Γ^{-1})
2. Si $\overline{M}$ es la matriz complementaria de M

$\overline{m}_{ij} = 0$ si $m_{ij} = 1$

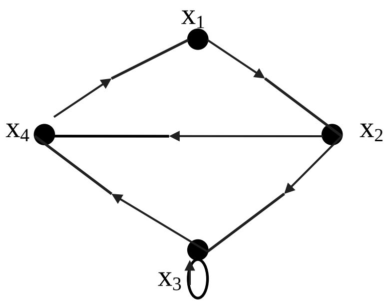
$\overline{m}_{ij} = 1$ si $m_{ij} = 0$

verificar que $\overline{M}$ es asociada al grafo complementario de G para el cual $\overline{\Gamma} = (E \times E) - \Gamma$.

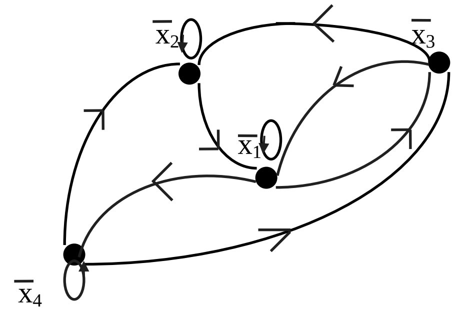
Nota 1 : M es simétrica si y sólo si G es simétrico.

Nota 2 : Si en un grafo se varía el orden de los vértices se obtienen matrices diferentes. Estas matrices se hallan vinculadas mediante permutaciones de sus filas y columnas.

Ejemplo :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pueden realizar programas que decidan si dos matrices representan el mismo grafo.

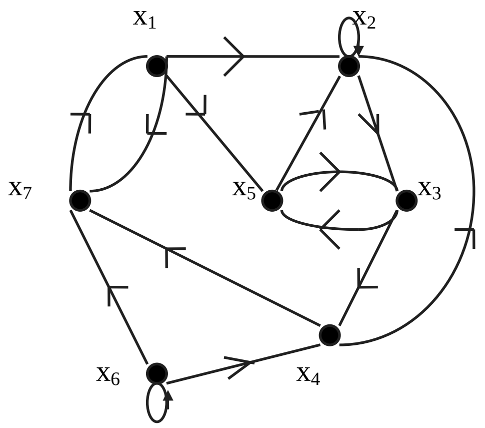
<u>Potencias de la matriz asociada</u>

Sea G = (E , Γ) = (E , U) y M su matriz asociada.

M^n = MxMx...............xM , $n \in IN$

- Si la multiplicación se realiza en sentido aritmético clásico, M^2 es la matriz cuyos elementos indican el número de caminos distintos de longitud 2 que existen entre los pares de vértices correspondientes a la ubicación de los elementos matriciales. En general M^k indica el número de caminos de longitud k que existen entre los pares de vértices correspondientes a la ubicación de los elementos matriciales.
- Si la multiplicación se realiza según la aritmética booleana, M^2 es la matriz cuyos elementos (1 o 0) indican si existe o no algún camino de longitud 2 entre los vértices correspondientes a la ubicación de los elementos matriciales. En general M^k indica la existencia de caminos de longitud k que existen entre los pares de vértices correspondientes a la ubicación de los elementos matriciales.
-

<u>Ejemplo</u> :



$M \in R^{7x7}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicios :</u>

1. Escribir los caminos que indican las matrices.
2. Realizar la multiplicación booleana y comparar los resultados.
3. Probar que si en un grafo de n vértices existe un camino de longitud m > n entonces el grafo tiene algún circuito.

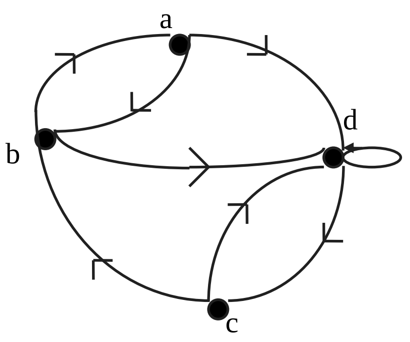
Dados dos grafos cuyo conjunto de vértices es el mismo

$G_1 = (E ,\Gamma_1)$ y $G_2 = (E ,\Gamma_2)$

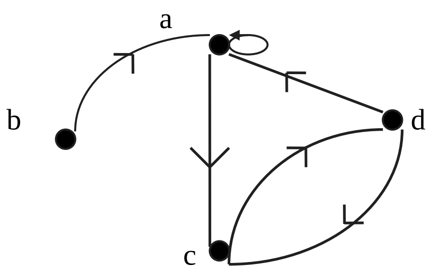
se verifica que la "suma booleana" de las matrices asociadas es la matriz asociada al grafo $(E, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ y el producto booleano de las mismas corresponde a la matriz asociada al grafo $(E , \Gamma_2 \circ \Gamma_1)$

<u>Ejemplo :</u>

$E = \{ a , b , c, d \}$



$G_1 = (E ,\Gamma_1)$



$G_2 = (E ,\Gamma_2)$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_1 \vee M_2 \quad \text{corresponde a} \quad (E, \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$$

$$M_1 \bullet M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{corresponde a} \quad (E, \Gamma_2 \circ \Gamma_1)$$

$$M_1 \wedge M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{corresponde a} \quad (E, \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$$

Verificar que M^t es la asociada al grafo (E ,Γ^{-1})

MATRIZ DE INCIDENCIA

1- <u>Matriz de Incidencia para Grafo Orientado</u>

Sea G un grafo sin bucles: G = (E,U)
E = { x_1, x_2, ... , x_n } y el conjunto de arcos U = { u_1, u_2, ... , u_m }
asociamos la matriz A cuyos elementos a_{ij} se obtienen:

$a_{ij} = 1$ si x_i es el extremo inicial del arco u_j

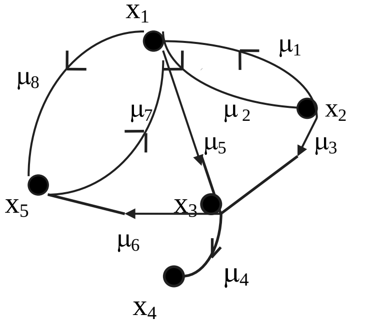
$a_{ij} = -1$ si x_j es el extremo final del arco u_j

$a_{ij} = 0$ si x_i no es extremidad de u_j

A es una matriz de orden n x m

n° de vértices — n° de arcos

Ejemplo:



$$
\begin{array}{c}
\\
x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$A \;\varepsilon\; R^{5x8}$

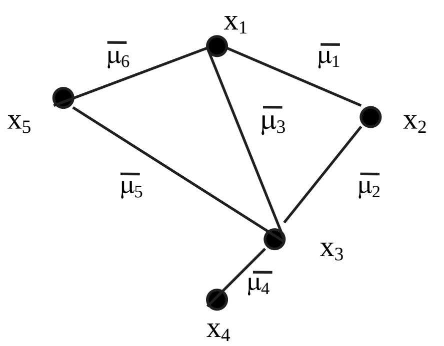
2- <u>Matriz de Incidencia para Grafo No Orientado</u>

$E = \{ x_1, x_2, ... , x_n \}$ y el conjunto de aristas $U' = \{ u'_1, u'_2, ... , u'_m \}$

$A' = (a'_{ij}) \;\varepsilon\; R^{\,nxm}$;

$$
a'_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ es extremidad de } u'_j \\ 0 \text{ si } x_i \text{ no es extremidad de } u'_j \end{cases}
$$

<u>Ejemplo</u>



$$
\begin{array}{c}
\\
x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & u'_5 & u'_6 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$