Unidad N° 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Ecuación lineal con $\underline{m}$ incógnitas**

A la expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_mx_m \; = \; b$$

se le llama Ecuación Lineal con $\boldsymbol{m}$ incógnitas, donde:

- ✓ $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_m \;\; \longrightarrow$ son **Incógnitas del sistema**
- ✓ $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_m \;\; \longrightarrow$ son **Coeficientes** (Reales o Complejos) que acompañan a las variables
- ✓ $b \;\longrightarrow$ es **Término Independiente** (Real o Complejo)

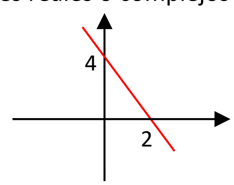
Ejemplo:

Dada la ecuación lineal $2x + y = 4$, encontrar los valores reales o complejos que verifican la ecuación.

***.- Resolución**

Despejando y tenemos $\quad y = -2x + 4$

Entonces $\; S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x+4 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$



Entonces **resolver la ecuación** es hallar todos los vectores de m componentes que verifican la ecuación planteada en dicha ecuación.

- **Sistema de $\underline{n}$ ecuaciones lineales con $\underline{m}$ incógnitas**

Para simbolizar este Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) es necesario utilizar un doble subíndice para los coeficientes numéricos que acompañan a las variables. El primero de los subíndices indica la ecuación y el segundo la incógnita que acompaña.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1m}x_m \; = \; b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2m}x_m \; = \; b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{i1}x_1 + \; a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{im}x_m = \; b_i \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nm}x_m \; = \; b_n \end{cases}$$

Entonces resolver el sistema es encontrar todos los vectores de $\boldsymbol{m}$ componentes que son solución simultánea de las $\boldsymbol{n}$ ecuaciones, es decir que verifican todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Notación Matricial del Sistema

Matriz de coeficientes del sistema: formada por los coeficientes que acompañan a las variables de las ecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{im} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$$

Vector de términos Independientes

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n \cong \in K^{n \times 1}$$

Vector de Incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m \cong \in K^{m \times 1}$$

Luego, en general:

$$\boxed{AX = B}$$ **Notación Matricial del Sistema**

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego:

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 5y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

Conjunto Solución del Sistema

Son todos los $\overline{\boldsymbol{x}} \in K^{m \times 1}$ que verifican las $\underline{\boldsymbol{n}}$ ecuaciones del sistema

$$S_B = \{ \overline{\boldsymbol{x}} \in K^{m \times 1} \ / \ A.\overline{\boldsymbol{x}} = B \}$$

- **Tipos de Sistema según el Conjunto Solución**

Sea el SEL $AX = B$ donde $\begin{cases} A \in K^{n\times m} \\ B \in K^{n\times 1} \\ X \in K^{m\times 1} \end{cases}$

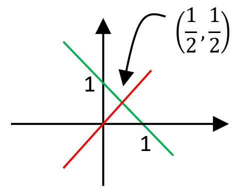
Si:

- $S_B = \emptyset$, $\nexists$ solución para el Sistema $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Sistema\ Incompatible}$ $o\ Inconsistente$
- $S_B \neq \emptyset$, $\exists$ solución para el sistema $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Sistema\ Compatible}$ $o\ Consistente$
  - ✓ S_B tiene un solo elemento $\Longrightarrow$ $Solucion\ Unica$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Sistema\ Compatible\ Determinado}$
  - ✓ S_B tiene más de un elemento $\Longrightarrow$ $Infinitas\ Soluciones$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Sistema\ Compatible\ Indeterminado}$

Ejemplos:

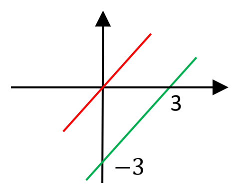
Dados los siguientes sistemas

$I)\ \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ despejando $\boldsymbol{y}$ en cada ecuación tenemos $\begin{array}{l} \mathbf{1} \rightarrow\ y = 1 - x \\ \mathbf{2} \rightarrow\ y = x \end{array}$



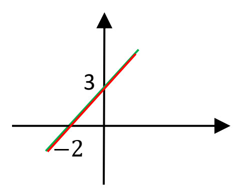
$S_B = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$
$Sol.Unica \rightarrow\ \boldsymbol{S.C.D.}$

$II)\ \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$ despejando $\boldsymbol{y}$ en cada ecuación tenemos $\begin{array}{l} \mathbf{1} \rightarrow\ y = x \\ \mathbf{2} \rightarrow\ y = x - 3 \end{array}$



$S_B = \emptyset$
$\nexists\ Solución \rightarrow\ \boldsymbol{S.I.}$

$III)\ \begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$ despejando $\boldsymbol{y}$ en cada ecuación tenemos $\begin{array}{l} \mathbf{1} \rightarrow\ y = 2 + x \\ \mathbf{2} \rightarrow\ y = 2 + x \end{array}$



$x\ es\ variable\ libre$
$x = \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow y = \alpha + 2$
$S_B = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + 2 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
$Infinitas\ Sol. \rightarrow\ \boldsymbol{S.C.I.}$

- **Sistema Homogéneo**

Un sistema es homogéneo cuando el vector de términos independientes es el vector nulo.

Sea el SEL $AX = 0_n$ donde $\begin{cases} A \in K^{n\times m} \\ B = 0_n \in K^{n\times 1} \\ X \in K^{m\times 1} \end{cases}$

Ej.

$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x \qquad\ + z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow\ Sol.Trivial\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Todo sistema homogéneo tiene por lo menos una solución que es la que tiene el valor 0 para cada incógnita. Esta solución se llama **Solución Trivial**. Un sistema homogéneo de solución única tiene solamente la solución trivial. Un sistema homogéneo compatible indeterminado tiene infinitas soluciones no triviales además de la solución trivial.

- **Sistemas Lineales Cuadrados**

Si el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones, entonces el sistema lineal es **Cuadrado.**

Sea el SEL $AX = B$ donde $\begin{cases} A \in K^{n\times n} \\ B \in K^{n\times 1} \\ X \in K^{n\times 1} \end{cases}$

- **Teorema de Cramer**

El sistema cuadrado $AX = B$ tiene solución única (es compatible determinado) si y sólo si $D(A) \neq 0$.

Demost)

Sea $AX = B$, con $A \in K^{n\times n}$

Sabemos que A tiene inversa si y sólo si $D(A) \neq 0$

$$D(A) \neq 0 \iff \exists\ A^{-1} \in K^{n\times n} \ /\ A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_{n\times n}$$

$$A.X = B$$

$$\underbrace{\boldsymbol{A^{-1}}.A}_{I_{n\times n}}.X = \boldsymbol{A^{-1}}.B$$

$$\boxed{X = \boldsymbol{A^{-1}}.B} \longrightarrow$$

Solución Única
porque $\boldsymbol{A^{-1}}$ es única

Nota:
Sea $AX = B$ un sistema cuadrado

- Si $D(A) \neq 0$ se dice que el sistema cuadrado es **Crameriano**
- Si $D(A) = 0$ el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones.

- **Regla de Cramer**

Sea $AX = B$ un sistema cuadrado

Si $D(A) \neq 0$, es decir, si el sistema es crameriano, las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ se determinan mediante la expresión:

Sean x_j , $j = 1, .., n$ y $A = (A_1, A_2, \dots, \overbrace{A_j}^{col\ j}, \dots, A_n) \longrightarrow$ Notación por columnas de la matriz A

$$\boxed{x_j = \frac{D\left(A_1, A_2, \dots, \overbrace{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{col\ j}}, \dots, A_n\right)}{D(A)}}$$

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y-z=-3 \\ 2x-y-z=1 \end{cases} \text{ donde } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{f_2+f_1 \\ f_3+f_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{desarrollo \\ por\ fila\ 3}} 3.A_{13}=3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3.(0-3)=-9$$

Como $D(A)\neq 0$, el sistema es Crameriano (Sol. Única)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-3} & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & -1 & -1 \end{vmatrix}}{D(A)}=\frac{-9}{-9}=\mathbf{1} \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-3} & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix}}{D(A)}=\frac{-18}{-9}=\mathbf{2} \quad , \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & \mathbf{-3} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix}}{D(A)}=\frac{9}{-9}=\mathbf{-1}$$

Luego, el conjunto solución del sistema es $S_B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

- **Compatibilidad de un Sistema de Ecuaciones Lineales**

Sea $AX=B$ un sistema, donde $\begin{cases} A\in K^{n\times m} \\ B\in K^{n\times 1} \\ X\in K^{m\times 1} \end{cases}$ y $A=(A_1,A_2,\dots,A_j,\dots,A_n)\longrightarrow$ Matriz de coeficientes del sistema

<u>Matriz Ampliada</u>

Es la matriz que se obtiene al agregarle la columna de términos independientes a la matriz de coeficientes.

$$\boldsymbol{A^a}=(A_1,A_2,\dots,A_j,\dots,A_n,\boldsymbol{B})\in K^{n\times(m+1)}$$

Columna de términos independientes

Interesa analizar si la **Matriz de Coeficientes $\boldsymbol{A}$** tiene el mismo **rango** que la **Matriz Ampliada $\boldsymbol{A^a}$**

- **Teorema de Rouche – Frobenius**

Sea $AX=B$ un SEL con $A\in K^{n\times m}$ y $A^a\in K^{n\times(m+1)}$

El sistema $AX=B$ es compatible si y solo si el rango de la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ es igual al rango de la matriz ampliada con el vector de términos independientes $\boldsymbol{A^a}$.

$$\boxed{rg(A)=rg(A^a)}$$

<u>Solución para un Sistema Compatible</u>

Sea $AX = B$ un SEL ; $rg(A) = rg(A^a) = r$ y m : número de incógnitas

Si :

- $r = m \longrightarrow$ El sistema es compatible de **solución única** (Sistema Compatible Determinado)
- $r < m \longrightarrow$ El sistema es compatible de **infinitas soluciones** (Sistema Compatible Indeterminado)

Obs:

$\boldsymbol{m - r}$ **:** número de variables libres (o independientes) en el conjunto solución

<u>Resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con Gauss – Jordan</u>

1) Hallar el $rg(A)$ y el $rg(A^a)$ de manera simultánea usando el método de Gauss – Jordan. $\overbrace{A \mid B}^{A^a}$

2) Si :

✓ $rg(A) = rg(A^a) \longrightarrow \ Sistema\ \ Compatible$

✓ $rg(A) \neq rg(A^a) \longrightarrow \ Sistema\ \ Indeterminado$

3) Si el sistema es compatible se considera la última matriz equivalente que se obtuvo con Gauss – Jordan y se construye el sistema equivalente al dado (que tiene el mismo conjunto solución que $AX = B$).

4) Se resuelve el sistema equivalente.

Ejemplos:

1) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} a + b - c = 1 \\ a - b + 3c = -3 \\ a \qquad + c = 1 \end{cases} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \downarrow f_2 + f_1 \\ \\ \downarrow f_1 + (-1)f_3 \\ \quad\ f_2 + (-2)f_3 \end{array}$$

En esta columna es posible construir otro vector canónico distinto a los anteriores

<u>Análisis del Sistema</u>

$rg(A) = 2$

$rg(A^a) = 3$

$rg(A) \neq rg(A^a) \Longrightarrow$ ***Sistema Incompatible***

2) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Análisis del Sistema

$$rg(A) = 2$$
$$rg(A^a) = 2$$

$$rg(A) = rg(A^a) \Rightarrow \textbf{Sistema Compatible}$$

$$m = n^\circ\ incog = 3$$
$$r < m \;\; ; \;\; 2 < 3 \longrightarrow 1\ var\ libre$$

$\therefore$ ***Sistema Compatible Indeterminado***

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1/2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Eligiendo a x_2 como variable independiente

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 - x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = x_2$$

Conjunto Solución

$$S_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 - \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} / \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 + f_1]{f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 + (-2)f_2]{f_1 + (-1)f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + (-1)f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Análisis del Sistema

$$r = rg(A) = 3$$
$$rg(A^a) = 3$$

$$rg(A) = rg(A^a) \Rightarrow \textbf{Sistema Compatible}$$

$$m = n^\circ\ incog = 3 \;\; \Rightarrow r = m$$

$\therefore$ ***Sistema Compatible Determinado***

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Conjunto Solución

$$S_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$