



➤ **Notación Matricial del Sistema**

Matriz de coeficientes del sistema: formada por los coeficientes que acompañan a las variables de las ecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nj} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$$

Vector de términos Independientes

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n \cong \in K^{n \times 1}$$

Vector de Incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m \cong \in K^{m \times 1}$$

Luego, en general:

$$AX = B$$

**Notación Matricial  
del Sistema**

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 5y - 3z = 0 \end{cases} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + 5y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$$

➤ **Conjunto Solución del Sistema**

Son todos los  $\bar{x} \in K^{m \times 1}$  que verifican las n ecuaciones del sistema

$$S_B = \{\bar{x} \in K^{m \times 1} / A \cdot \bar{x} = B\}$$

### ➤ Tipos de Sistema según el Conjunto Solución

Sea el SEL  $AX = B$  donde  $\begin{cases} A \in K^{n \times m} \\ B \in K^{n \times 1} \\ X \in K^{m \times 1} \end{cases}$

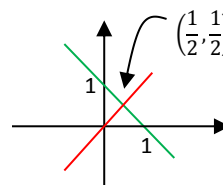
Si:

- $S_B = \emptyset$  ,  $\nexists$  solución para el Sistema  $\Rightarrow$  **Sistema Incompatible o Inconsistente**
- $S_B \neq \emptyset$  ,  $\exists$  solución para el sistema  $\Rightarrow$  **Sistema Compatible o Consistente**
  - ✓  $S_B$  tiene un solo elemento  $\Rightarrow$  *Solucion Unica*  $\Rightarrow$  **Sistema Compatible Determinado**
  - ✓  $S_B$  tiene más de un elemento  $\Rightarrow$  *Infinitas Soluciones*  $\Rightarrow$  **Sistema Compatible Indeterminado**

Ejemplos:

Dados los siguientes sistemas

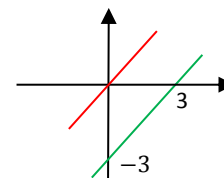
I)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}$  despejando  $y$  en cada ecuación tenemos  $\begin{matrix} \text{1} \rightarrow y = 1 - x \\ \text{2} \rightarrow y = x \end{matrix}$



$$S_B = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Sol. Unica  $\rightarrow$  **S.C.D.**

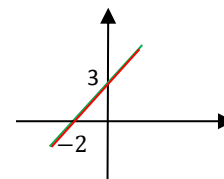
II)  $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$  despejando  $y$  en cada ecuación tenemos  $\begin{matrix} \text{1} \rightarrow y = x \\ \text{2} \rightarrow y = x - 3 \end{matrix}$



$$S_B = \emptyset$$

$\nexists$  Solución  $\rightarrow$  **S.I.**

III)  $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$  despejando  $y$  en cada ecuación tenemos  $\begin{matrix} \text{1} \rightarrow y = 2 + x \\ \text{2} \rightarrow y = 2 + x \end{matrix}$



$x$  es variable libre  
 $x = \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow y = \alpha + 2$   
 $S_B = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + 2 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$   
Infinitas Sol.  $\rightarrow$  **S.C.I.**

### ➤ Sistema Homogéneo

Un sistema es homogéneo cuando el vector de términos independientes es el vector nulo.

Sea el SEL  $AX = 0_n$  donde  $\begin{cases} A \in K^{n \times m} \\ B = 0_n \in K^{n \times 1} \\ X \in K^{m \times 1} \end{cases}$

Ej.  $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \end{cases} \rightarrow$  Sol. Trivial  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Todo sistema homogéneo tiene por lo menos una solución que es la que tiene el valor 0 para cada incógnita. Esta solución se llama **Solución Trivial**. Un sistema homogéneo de solución única tiene solamente la solución trivial. Un sistema homogéneo compatible indeterminado tiene infinitas soluciones no triviales además de la solución trivial.

### ➤ Sistemas Lineales Cuadrados

Si el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones, entonces el sistema lineal es **Cuadrado**.

Sea el SEL  $AX = B$  donde  $\begin{cases} A \in K^{n \times n} \\ B \in K^{n \times 1} \\ X \in K^{n \times 1} \end{cases}$

### ➤ Teorema de Cramer

El sistema cuadrado  $AX = B$  tiene solución única (es compatible determinado) si y sólo si  $D(A) \neq 0$ .

Demost)

Sea  $AX = B$ , con  $A \in K^{n \times n}$

Sabemos que  $A$  tiene inversa si y sólo si  $D(A) \neq 0$

$$D(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in K^{n \times n} / A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n \times n}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_{n \times n}} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

→

**Solución Única**

porque  $A^{-1}$  es única

**Nota:**

Sea  $AX = B$  un sistema cuadrado

- Si  $D(A) \neq 0$  se dice que el sistema cuadrado es **Crameriano**
- Si  $D(A) = 0$  el sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones.

### ➤ Regla de Cramer

Sea  $AX = B$  un sistema cuadrado

Si  $D(A) \neq 0$ , es decir, si el sistema es crameriano, las incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$  se determinan mediante la expresión:

Sean  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  y  $A = (A_1, A_2, \dots, \overset{col j}{\tilde{A}_j}, \dots, A_n) \rightarrow$  Notación por columnas de la matriz  $A$

$$x_j = \frac{D\left(A_1, A_2, \dots, \overset{col j}{\tilde{B}}, \dots, A_n\right)}{D(A)}$$

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = -3 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2+f_1 \\ f_3+f_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{desarrollo} \\ \text{por fila 3}}}{=} 3 \cdot A_{13} = 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0 - 3) = -9$$

Como  $D(A) \neq 0$ , el sistema es Crameriano (Sol. Única)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \color{red}{2} & 1 & 1 \\ \color{red}{-3} & 2 & -1 \\ \color{red}{1} & -1 & -1 \end{vmatrix}}{D(A)} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \color{red}{2} & 1 \\ 1 & \color{red}{-3} & -1 \\ 2 & \color{red}{1} & -1 \end{vmatrix}}{D(A)} = \frac{-18}{-9} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \color{red}{2} \\ 1 & 2 & \color{red}{-3} \\ 2 & -1 & \color{red}{1} \end{vmatrix}}{D(A)} = \frac{9}{-9} = -1$$

Luego, el conjunto solución del sistema es  $S_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

### ➤ Compatibilidad de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Sea  $AX = B$  un sistema, donde  $\begin{cases} A \in K^{n \times m} \\ B \in K^{n \times 1} \\ X \in K^{m \times 1} \end{cases}$  y  $A = (A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n) \rightarrow$  Matriz de coeficientes del sistema

### Matriz Ampliada

Es la matriz que se obtiene al agregarle la columna de términos independientes a la matriz de coeficientes.

$$A^a = (A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n, \color{red}{B}) \in K^{n \times (m+1)}$$

$\uparrow$   
 Columna de términos independientes

Interesa analizar si la **Matriz de Coeficientes**  $A$  tiene el mismo **rango** que la **Matriz Ampliada**  $A^a$

### ➤ Teorema de Rouché – Frobenius

Sea  $AX = B$  un SEL con  $A \in K^{n \times m}$  y  $A^a \in K^{n \times (m+1)}$

El sistema  $AX = B$  es compatible si y solo si el rango de la matriz de coeficientes  $\underline{A}$  es igual al rango de la matriz ampliada con el vector de términos independientes  $\underline{A^a}$ .

$rg(A) = rg(A^a)$

### Solución para un Sistema Compatible

Sea  $AX = B$  un SEL ;  $rg(A) = rg(A^a) = r$  y  $m$  : número de incógnitas

Si :

- $r = m \rightarrow$  El sistema es compatible de **solución única** (Sistema Compatible Determinado)
- $r < m \rightarrow$  El sistema es compatible de **infinitas soluciones** (Sistema Compatible Indeterminado)

**Obs:**

$m - r$  : número de variables libres (o independientes) en el conjunto solución

### Resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con Gauss – Jordan

1) Hallar el  $rg(A)$  y el  $rg(A^a)$  de manera simultánea usando el método de Gauss – Jordan.

$$\begin{array}{c|c} & A^a \\ \hline A & B \end{array}$$

2) Si :

- ✓  $rg(A) = rg(A^a) \rightarrow$  Sistema Compatible
- ✓  $rg(A) \neq rg(A^a) \rightarrow$  Sistema Incompatible

3) Si el sistema es compatible se considera la última matriz equivalente que se obtuvo con Gauss – Jordan y se construye el sistema equivalente al dado (que tiene el mismo conjunto solución que  $AX = B$ ).

4) Se resuelve el sistema equivalente.

Ejemplos:

1) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} a + b - c = 1 \\ a - b + 3c = -3 \\ a + c = 1 \end{cases} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$f_2 + f_1$

$f_1 + (-1)f_3$

$f_2 + (-2)f_3$

#### Análisis del Sistema

$$rg(A) = 2$$

$$rg(A^a) = 3$$

$rg(A) \neq rg(A^a) \Rightarrow$  **Sistema Incompatible**

$$S_B = \emptyset$$

En esta columna es posible construir otro vector canónico distinto a los anteriores

2) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\downarrow f_1 + f_2$   
 $\downarrow \frac{1}{2}f_1$

Análisis del Sistema

$$\begin{aligned} rg(A) &= 2 \\ rg(A^a) &= 2 \end{aligned}$$

$$rg(A) = rg(A^a) \Rightarrow \text{Sistema Compatible}$$

$$\begin{aligned} m &= n^{\circ} \text{ incog} = 3 \\ r &< m ; 2 < 3 \rightarrow 1 \text{ var libre (indep)} \end{aligned}$$

$\therefore$  **Sistema Compatible Indeterminado**

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1/2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Eligiendo a  $x_2$  como variable independiente

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 - x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

$$\alpha = x_2$$

Conjunto Solución

$$S_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 - \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Dado el sistema de ecuaciones lineales (SEL)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$\downarrow f_2 + f_1$   
 $\downarrow f_3 + f_1$   
 $\downarrow \frac{1}{3}f_2$   
 $\downarrow f_1 + (-1)f_2$   
 $\downarrow f_3 + (-2)f_2$   
 $\downarrow \frac{1}{3}f_3$   
 $\downarrow f_1 + (-1)f_3$

Análisis del Sistema

$$\begin{aligned} r &= rg(A) = 3 \\ rg(A^a) &= 3 \end{aligned}$$

$$rg(A) = rg(A^a) \Rightarrow \text{Sistema Compatible}$$

$$m = n^{\circ} \text{ incog} = 3 \Rightarrow r = m$$

$\therefore$  **Sistema Compatible Determinado**

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ reordenando } \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Conjunto Solución

$$S_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$