2021

ÁLGEBRA II (LSI – PI)

UNIDAD Nº 4

ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO ESCALAR

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

UNIDAD Nº 4

ESPACIOS VECTORIALES – ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO ESCALAR

1.- ESPACIOS VECTORIALES

Definición 1

Sean $A \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$, $*$ es una *Ley de Composición Externa* (L.C.E.) en A con operadores en K si y sólo si $*$ es una función con dominio en el producto cartesiano $K \times A$ y con valores en A.

En símbolos,

$$*: K \times A \longrightarrow A$$

$$(a, \alpha) \longrightarrow a * \alpha$$

Nota

Otra forma de expresar que $*$ es una ley de composición externa en A con operadores en K es la siguiente,

$$a \in K, \alpha \in A \Longrightarrow a * \alpha \in A$$

Ejemplo

Un ejemplo de ley de composición externa en $\mathbb{R}^{m\times n}$, el conjunto de las matrices reales de tipo $m \times n$, con operadores en el conjunto de los reales $\mathbb{R}$, es la conocida multiplicación de escalar por matriz dada por

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$(r, A) \mapsto rA = r[a_{ij}] \overset{def}{\equiv} [ra_{ij}]$$

Definición 2

Sean V un conjunto no vacío de elementos llamados vectores, $(F, +, \cdot)$ un cuerpo cuyos elementos se llaman escalares y dos operaciones llamadas suma de vectores y multiplicación de escalar por vector, representadas por $+$ y $\cdot$ respectivamente.

La terna $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $(F, +, \cdot)$ si y sólo si se verifican los siguientes axiomas,

1. $(V, +)$ es grupo abeliano
   - a) $\forall\, u, v \in V;\ u + v \in V$ (+ es LCI en V)
   - b) $\forall\, u, v, w \in V; (u + v) + w = u + (v + w)$ (+ es asociativa)
   - c) $\exists\, 0_V \in V: \forall\, u \in V;\ u + 0_V = 0_V + u = u$ (0_V es elemento neutro)
   - d) $\forall\, u \in V;\ \exists -u \in V:\ u + (-u) = (-u) + u = 0_V$ ($-u$ es el opuesto de u)
   - e) $\forall\, u, v \in V;\ u + v = v + u$ (+ es conmutativa)
2. $\forall\, a \in F;\ \forall\, u \in V; a\, u \in V$ ($\cdot$ es LCE en V con escalares en F)
3. $\forall\, a \in F;\ \forall\, u, v \in V; a\,(u + v) = au + av$ ($\cdot$ es distributiva respecto a la suma de vectores)
4. $\forall\, a, b \in F;\ \forall\, u \in V; (a + b)\, u = au + bu$ ($\cdot$ es distributiva respecto a la suma de escalares)
5. $\forall\, a, b \in F;\ \forall\, u \in V; a\,(bu) = (ab)u$ (la multiplicación por escalares es asociativa)

6. $\forall\, u \in V;\ 1\,u = u$ (1 es la unidad del cuerpo F)

Notas

Si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $(F, +, \cdot)$, diremos simplemente *"V es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo F"*, y para simplificar la notación escribiremos "V_F".

A los vectores del espacio vectorial V los simbolizaremos con las últimas letras del abecedario (ej. u, v, w) y a los escalares del cuerpo F con las primeras letras del abecedario (ej. a, b, c), o las primeras letras del alfabeto griego (ej. α, β, γ).

Si bien las leyes de composición interna tanto en V como en F se simbolizan con $+$, éstas representan operaciones diferentes en general.

Además, tanto la ley de composición externa en V con escalares en F (multiplicación de escalar por vector) como la ley de composición interna en F (multiplicación de escalares) se representan con el símbolo $\cdot$, pero ambas leyes son de naturaleza diferente.

A la ley de composición externa, también se le denomina "***producto por escalares***" o "***producto de un escalar por un vector***".

Ejemplos

a) El conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ de vectores del plano cartesiano, representados por los pares ordenados de números reales, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Donde la suma de vectores del plano real viene dada por

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

donde $u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y

$$u + v \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La multiplicación de escalares reales por vectores del plano real está definido por,

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

en donde, $a \in \mathbb{R}, u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y

$$au \overset{\text{def}}{=} (ax, ay) \in \mathbb{R}^2.$$

b) El conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ de vectores del espacio, representados por los ternas ordenadas de números reales, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
La suma de vectores de $\mathbb{R}^3$ es una ley de composición interna dada por

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

donde $u = (x_1, y_1, z_1),\ v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y

$$u + v \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

La multiplicación de escalares reales por vectores del espacio real está definido por,

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

en donde, $a \in \mathbb{R}, u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y

$$au \overset{\text{def}}{=} (ax, ay, az) \in \mathbb{R}^3.$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-uplas ordenadas de números reales es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con la suma de n-uplas y la multiplicación de un número real por una n-upla.

En símbolos,

$$\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{n veces } \mathbb{R}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \cdots, n\}$$

La suma de n-uplas es una ley de composición interna

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (u, v) \quad &\mapsto u + v \end{aligned}$$

definida del siguiente modo, si $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n), v = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define

$$u + v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

La multiplicación de un escalar por una n-upla es una ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (a, u) &\mapsto au \end{aligned}$$

definida como sigue si $a \in \mathbb{R}$ y $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$au = a(x_1, x_2, \cdots, x_n) \overset{\text{def}}{=} (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$$

Observación

Es claro que para $n = 1$, $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial, es el espacio vectorial del conjunto de los reales sobre el cuerpo de los números reales. Geométricamente los vectores de este espacio vectorial se representan en la recta real.

c) El conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ de las matrices reales que tienen m filas y n columnas es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con la suma de matrices y la multiplicación de un número real por una matriz. En símbolos,
La suma de matrices es una ley de composición interna en $\mathbb{R}^{m \times n}$ esto es,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \\ (A, B) \quad &\mapsto \quad A + B \end{aligned}$$

definida del siguiente modo, si $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

La multiplicación de un escalar real por una matriz es ley de composición externa

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \\ (a, A) \quad &\mapsto \quad aA \end{aligned}$$

definida por si $a \in \mathbb{R}, A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se define

$$a\,A = a[a_{ij}] = [a\,a_{ij}].$$

Definición 3

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Cualesquiera sean u y v pertenecientes a V, se define la resta de vectores del siguiente modo

$$u - v \overset{\text{def}}{=} u + (-v)$$

Observación

En la Unidad 3, ya definimos la resta a partir de los grupos aditivos, y por ser $(V, +)$ un grupo aditivo tiene sentido hablar de resta de vectores, y por lo tanto la Definición 3 resulta redundante.

1.1.- Propiedades de los Espacios Vectoriales

Proposición 1

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. El escalar $0 \in F$, multiplicado por cualquier vector de V es igual al vector nulo de V. En símbolos,

$$u \in V;\ 0\,u = 0_V$$

Demostración

Sean $a \in F$ y $u \in V$, entonces

$$\begin{aligned} a\,u &= (a+0)\,u && (1)\\ a\,u &= a\,u + 0\,u && (2)\\ a\,u + 0_V &= a\,u + 0\,u && (3)\\ 0_V &= 0\,u && (4)\end{aligned}$$

Referencias

(1) El 0 es elemento neutro aditivo en el cuerpo F.

(2) Por Axioma 4 de la Definición 2.

(3) El vector nulo 0_V es el elemento neutro aditivo en el espacio vectorial V.

(4) Vale la ley cancelativa en el grupo abeliano $(V, +)$.

Q.E.D.

Proposición 2

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Cualquier escalar del cuerpo F multiplicado por el vector nulo de V es igual al vector nulo de V. En símbolos,

$$a \in F;\ a\,0_V = 0_V$$

Demostración

Sean $a \in F$ y $0_V \in V$. Es claro que,

$$\begin{aligned} a\,u &= a\,(u + 0_V) && (1)\\ a\,u &= a\,u + a\,0_V && (2)\\ a\,u + 0_V &= a\,u + a\,0_V && (3)\\ 0_V &= a\,0_V && (4)\end{aligned}$$

Referencias

(1) El vector nulo 0_V es elemento neutro aditivo en el espacio vectorial V.

(2) Por Axioma 3 de la Definición 2 de Espacio Vectorial.

(3) El vector nulo 0_V es el elemento neutro aditivo en el espacio vectorial V.

(4) Vale la ley cancelativa en el grupo abeliano $(V, +)$. **Q.E.D.**

Proposición 3

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Si $a \in F$ y $u \in V$, entonces se verifica que

$$(-a)\, u = a\,(-u) = -(a\, u)$$

Demostración

i) Si $a \in F$ y $u \in V$, entonces $a\, u \in V$ y por ser $(V,+)$ un grupo se tiene que $-(a\, u) \in V$ y se verifica que

$$a\, u + [-(a\, u)] = [-(a\, u)] + a\, u = 0_V \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado,

$$a\, u + (-a)\, u \underbrace{=}_{(1)} \big(a + (-a)\big)\, u \underbrace{=}_{(2)} 0\, u \underbrace{=}_{(3)} 0_V \qquad \text{(II)}$$

$$(-a)\, u + a\, u \underbrace{=}_{(1)} \big((-a) + a\big)\, u \underbrace{=}_{(2)} 0\, u \underbrace{=}_{(3)} 0_V$$

En (II) podemos advertir que $(-a)\, u$ también es opuesto de $a\, u$ y como $(V,+)$ es un grupo, tenemos que el opuesto de cada elemento de V es único, por lo tanto

$$(-a)\, u = -(a\, u)$$

Referencias

(1) Por el Axioma 4 de la Definición 2 de Espacio Vectorial.
(2) En el grupo abeliano $(F,+)$, un elemento más su opuesto es igual al escalar cero.
(3) Por Proposición 1.

ii) Si $a \in F$ y $u \in V$, entonces $a\, u \in V$ y por ser $(V,+)$ un grupo se tiene que $-(a\, u) \in V$ y se verifica que

$$a\, u + [-(a\, u)] = [-(a\, u)] + a\, u = 0_V \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado,

$$a\, u + a\,(-u) \underbrace{=}_{(1)} a\,\big(u + (-u)\big) \underbrace{=}_{(2)} a\, 0_V \underbrace{=}_{(3)} 0_V \qquad \text{(II)}$$

$$a\,(-u) + a\, u \underbrace{=}_{(1)} a\,\big((-u) + u\big) \underbrace{=}_{(2)} a\, 0_V \underbrace{=}_{(3)} 0_V$$

Por (II), podemos observar que $a\,(-u)$ también es opuesto de $a\, u$ $a\, u$ y como $(V,+)$ es un grupo, tenemos que el opuesto de cada elemento de V es único, por lo tanto

$$a\,(-u) = -(a\, u)$$

Referencias

(1) Por axioma 3 de la Definición 2 de Espacio Vectorial.
(2) En el grupo abeliano $(V,+)$ un elemento más su opuesto es igual al vector nulo.
(3) Por Proposición 2.

Q.E.D.

Proposición 4

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Cualquiera sea $u \in V$ se verifica $(-1)\, u = -u$.

Demostración

Por Proposición 3, sabemos que

$$\forall a \in F \;\wedge \forall\, u \in V;\; (-a)\, u = a\,(-u) = -(a\, u)$$

En particular, tomando $a = -1$, tenemos

$$(-1)\,u = -(1\,u) = -u$$

Q.E.D.

Proposición 5

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Cualesquiera sean $a \in F$ y $u \in V$, se verifica que

$$a\,u = 0_V \Longrightarrow a = 0 \vee u = 0_V$$

Demostración

Sean $a \in F$ y $u \in V$, tales que $a\,u = 0_V \wedge a \neq 0$ entonces

$$a\,u = 0_V \underbrace{\Longrightarrow}_{(1)} a^{-1}(a\,u) = a^{-1}\,0_V \underbrace{\Longrightarrow}_{(2)} (a^{-1}a)\,u = 0_V \underbrace{\Longrightarrow}_{(3)} 1\,u = 0_V \underbrace{\Longrightarrow}_{(4)} u = 0_V$$

Referencias

(1) Ya que $a \neq 0$, existe a^{-1}. Se multiplica en ambos miembros por a^{-1}.
(2) Por Axioma 5 de la Definición 2 de Espacio Vectorial y por Proposición 2.
(3) En el grupo abeliano $(F - \{0\}, \cdot)$, cada elemento por su inverso es igual a la unidad.
(4) Por Axioma 6 de la Definición 2 de Espacio Vectorial.

Q.E.D.

Proposición 6

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F. Cualesquiera sean $a \in F$ y $u, v \in V$, se verifica que

$$a\,(u - v) = a\,u - a\,v.$$

Demostración

Sean $a \in F$ y $u, v \in V$, entonces

$$a\,(u - v) \underbrace{=}_{(1)} a\big(u + (-v)\big) \underbrace{=}_{(2)} a\,u + a\,(-v) \underbrace{=}_{(3)} a\,u + \big(-(a\,v)\big) \underbrace{=}_{(1)} a\,u - a\,v$$

Referencias

(1) Por Definición 3 de resta de vectores.
(2) Por Axioma 3 de la Definición 2 de Espacio Vectorial.
(3) Por Proposición 3.

Q.E.D.

2. - SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición 4

Sea V_F un espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de V $(S \subset V \wedge S \neq \emptyset)$. S es un subespacio vectorial de V si y sólo si S con la ley de composición interna $+$ y la ley de composición externa $\cdot$ definidas en V pero restringidas a S es un espacio vectorial.

Ejemplos

Son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$

- Los conjuntos $\{(0,0)\}$ y $\mathbb{R}^2$.
- Toda recta que contiene al origen. Por ejemplo

- ✓ El eje x, que viene representado analíticamente por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$.
- ✓ El eje y, que viene representado analíticamente por $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$.
- ✓ La primera bisectriz, que está representada analíticamente por $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$.

Notas

1.- Si S es un subespacio vectorial de V, denotaremos este hecho escribiendo $S \prec V$.

2.- Los conjuntos $\{\mathbf{0}_V\}$ y $\boldsymbol{V}$ se denominan subespacios vectoriales *triviales* de $\boldsymbol{V_F}$.

Proposición 7

Sea V_F un espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de V. Son condiciones necesarias y suficientes para que S sea un subespacio vectorial de V, que S sea cerrado para suma de vectores y para el producto por escalares. En símbolos,

$$S \prec V \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in S \Longrightarrow u + v \in S \\ a \in F \ \wedge u \in S \Longrightarrow a\, u \in S \end{cases}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Demostraremos que las condiciones son necesarias, esto es,

$$S \prec V \Longrightarrow \begin{cases} i)\ u, v \in S \Longrightarrow u + v \in S \\ ii)\ a \in F \ \wedge u \in S \Longrightarrow a\, u \in S \end{cases}$$

Por hipótesis S es subespacio vectorial de V, entonces por Definición 4 resulta que S es un espacio vectorial. Por lo tanto

1) la suma es ley de composición interna en S, es decir que se verifica i).
2) El producto por escalares es ley de composición externa en S con escalares en F, por lo tanto se verifica ii).

$\Leftarrow$) Ahora demostraremos que las condiciones son suficientes.

Hipótesis:

i). V es espacio vectorial

ii). $S \subset V$

iii). $S \neq \emptyset$

iv). $u, v \in S \Longrightarrow u + v \in S$

v). $a \in F \ \wedge u \in S \Longrightarrow a\, u \in S$

Tesis: $S \prec V$ que es equivalente a probar que

1). $S \subset V$

2). $S \neq \emptyset$

3). $(S, +)$ es grupo abeliano.

4). $\forall\, a \in F, \forall\, u \in S; a\, u \in S$.

5). $\forall\, a \in F, \forall\, u, v \in S; a\,(u + v) = a\, u + a\, v$.

6). $\forall\, a, b \in F, \forall\, u \in S; (a+b)\, u = a\, u + b\, u.$

7). $\forall\, a, b \in F, \forall\, u \in S; a\,(b\, u) = (ab)u.$

8). $\forall\, u \in S; 1\, u = u.$

En efecto,

1). $S \subset V$, por hipótesis ii).

2). $S \neq \emptyset$, por hipótesis iii).

3). $(S, +)$ es grupo abeliano.

- La hipótesis iv) nos indica que $+$ es ley de composición interna en S.
- $+$ es asociativa, ya que se verifica *por herencia*, puesto que $S \subset V$.
- $\exists\, 0_V \in S \colon \forall\, u \in S; u + 0_V = 0_V + u = u.$

  En efecto, por hipótesis v) tenemos que $a \in F \;\wedge u \in S \Longrightarrow a\, u \in S.$

  En particular, para $a = 0 \;\wedge u \in S$ tenemos que

  $$0\, u \in S \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Prop.1}} 0_V \in S.$$
- $\forall\, u \in S;\ \exists\,(-u) \in S \colon u + (-u) = (-u) + u = 0_V.$

  En efecto, por hipótesis v) tenemos que $a \in F \;\wedge u \in S \Longrightarrow a\, u \in S.$

  En particular, para $a = -1 \;\wedge u \in S$ tenemos que

  $$(-1)\, u \in S \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Prop.4}} -u \in S.$$
- $+$ es conmutativa, ya que se verifica *por herencia*, puesto que $S \subset V$.

4). $\forall\, a \in F, \forall\, u \in S; a\, u \in S$, por hipótesis v).

5), 6), 7) y 8) se verifican *por herencia*, pues $S \subset V$.

Q.E.D.

<u>Ejemplo</u>

a) En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ el conjunto $W = \{(a, b, 0)/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V. En efecto,

i) $W \subset V$ por definición de W.

ii) $W \neq \emptyset$ pues $(0,0,0) \in W$.

iii) Si $u = (a, b, 0),\ v = (a', b', 0) \in W$, entonces

$$u + v = (a, b, 0) + (a', b', 0) = (a + a', b + b', 0) \in W$$

iv) Si $k \in \mathbb{R}$ y $u = (a, b, 0) \in W$, entonces

$$ku = k\,(a, b, 0) = (ka, kb, 0) \in W$$

De i), ii), iii) y iv) se tiene que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

b) En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$, el conjunto $W = \{(a, b, c)/\, a = b^2\}$ no es un subespacio vectorial de V. Esto es así pues

i) $W \subset$ V por definición de W.

ii) $W \neq \emptyset$ pues $(0,0,0) \in W$.

iii) Sean $u = (a, b, c),\ v = (a', b', c') \in W$, esto implica que $a = b^2$ y $a' = (b')^2$ (*)

Efectuando la suma de u y v tenemos,

$$u + v = (a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c'),$$

Para que $u + v$ pertenezca a W debe ocurrir que

$$a + a' = (b + b')^2,$$

pero por (*) resulta que

$$a + a' = b^2 + (b')^2 \neq (b + b')^2,$$

luego

$$u + v \notin W$$

y por lo tanto al no ser W cerrado para la suma, W no es un subespacio de V.

3.- COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

Definición 5

Sea V_F un espacio vectorial definido sobre un cuerpo F y sea A un subconjunto (finito o infinito) no vacío de V. Sean $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vectores de A diferentes entre sí y $a_1, a_2, \cdots, a_n$ elementos cualesquiera del cuerpo F. Se denomina ***combinación lineal de vectores del conjunto A con escalares del cuerpo F*** a la expresión

$$a_1 u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \qquad (1)$$

Es claro que al efectuar las operaciones indicadas en (1) obtendremos como resultado un vector del espacio vectorial V. Sea v tal vector, es decir

$$v = a_1 u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i$$

Al vector v le llamaremos "*valor de la combinación lineal*" de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n \in A$. También diremos que "*$v$ se ha obtenido por medio de la combinación lineal $a_1 u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n u_n$*".

Si se considera una nueva selección de escalares $b_1, b_2, \cdots, b_n \in F$ podemos formar "otra" combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$, esto es

$$b_1 u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_n u_n \qquad (2)$$

Si u es el valor de esta combinación lineal, diremos que u se ha obtenido por medio de a combinación lineal (2)

$$u = b_1 u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_n u_n$$

También podemos formar la siguiente combinación lineal

$$0\, u_1 + 0\, u_2 + \cdots + 0\, u_n$$

Esta combinación lineal de los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ se denomina "***combinación lineal trivial***" la cual obviamente tiene el valor 0_V.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, y sea $A = \{(1,1), (2,3), (1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Si consideramos los escalares $1, 2, -2 \in \mathbb{R}$, formemos la siguiente combinación lineal de vectores del conjunto A

$$1(1,1) + 2(2,3) + (-2)(1,0) = (1,1) + (4,6) + (-2,0) = (3,7)$$

En donde $(3,7)$ es el valor de la combinación lineal.

Combinaciones Lineales Idénticas

Definición 6

Dos combinaciones lineales son idénticas si tienen los mismos términos no triviales.

Ejemplo

$$1u_2, \quad 0u_1 + 1u_2 + 0u_3, \qquad 0u_1 + 1u_2$$

son combinaciones lineales idénticas.

Notas

1.- Es claro que las combinaciones lineales idénticas tienen el mismo valor.

2.- De acuerdo a la Definición 5, dado un conjunto A y una combinación lineal de vectores de A

$$a_1u_1 + a_2\,u_2 + \cdots + a_nu_n$$

podemos suponer siempre que es una combinación lineal de ***todos*** los vectores de A, pues bastará completarla con términos triviales.

Así, por ejemplo, si $A = \{u_1, u_2, u_3\}$, la combinación lineal

$$a_1u_1 + a_2\,u_2$$

es una combinación lineal de todos los vectores de A, pues es idéntica a la combinación lineal

$$a_1u_1 + a_2\,u_2 + 0\,u_3$$

Observación

Aun cuando A sea un conjunto infinito, una combinación lineal no trivial de sus vectores tendrá siempre (por la forma en que fue definido el concepto) un número finito de términos no triviales.

3.1.- Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores

Sean V_F un espacio vectorial y $A \subset V \;\wedge\; A \neq \emptyset$. Sea $\bar{A}$ el conjunto de todos los vectores de V que se obtienen por medio de combinaciones lineales de vectores del conjunto A, al que representaremos en forma simbólica del siguiente modo

$$\bar{A} = \left\{ v \in V /\; v = a_1u_1 + a_2\,u_2 + \cdots + a_nu_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\,u_i\,, \quad a_i \in F \wedge u_i \in A, \qquad \forall i = 1,2,\cdots,n \right\}$$

Nota
El conjunto $\bar{A}$ se lee "*A barra*".

Proposición 8

El conjunto $\bar{A}$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración

1. $\bar{A} \subset V$, por definición de $\bar{A}$.

2. $\bar{A} \neq \emptyset$, pues $0_V \in \bar{A}$, ya que

$$0_V = 0\, u_1 + 0\, u_2 + \cdots + 0\, u_n$$

Es decir, 0_V es combinación lineal de vectores del conjunto A.

3. Mostraremos $\bar{A}$ es cerrado para la suma, esto es

$$u, v \in \bar{A} \Longrightarrow u + v \in \bar{A}$$

En efecto,

$$u, v \in \bar{A} \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \ \wedge v = \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i \qquad \text{con} \quad a_i, b_i \in F \wedge u_i \in A, \qquad \forall i = 1,2,\cdots,n$$

Luego

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i\, u_i + b_i\, u_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\ u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i$$

con $c_i = a_i + b_i, \forall i = 1,2,\cdots,n$.
Así, $u + v$ es una combinación lineal de vectores de A. Por lo tanto $u + v \in \bar{A}$.

4. Probaremos que $\bar{A}$ es cerrado para el producto por escalares, es decir

$$a \in F \ \wedge\ u \in \bar{A} \Longrightarrow a\, u \in \bar{A}$$

Es claro que

$$u \in \bar{A} \Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \qquad \text{con} \quad a_i \in F \wedge u_i \in A, \qquad \forall i = 1,2,\cdots,n$$

luego, si $a \in F$ tenemos,

$$a\, u = a \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i = \sum_{i=1}^{n} a\,(a_i\, u_i) = \sum_{i=1}^{n} (a\, a_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i \ \text{ con } \quad c_i = a\, a_i \in F \ \ \forall i = 1,2,\cdots,n$$

Es decir que $a\, u$ es una combinación lineal de vectores del conjunto A. Por lo tanto $a\, u \in \bar{A}$.

Entonces de 1, 2, 3 y 4 resulta que $\bar{A}$ es un subespacio vectorial de V.

Q.E.D

Notas

Dados un espacio vectorial V_F y un subconjunto no vacío A de V, las siguientes expresiones son equivalentes

a) A es un generador de $\bar{A}$.
b) $\bar{A}$ es el subespacio generado por A.
c) A genera a $\bar{A}$.

d) Todo vector de $\bar{A}$ es combinación lineal de vectores de A.

En el caso en que $\bar{A} = V$, tendremos

a) A es un generador de V.
b) El espacio vectorial V es generado por el conjunto A
c) A genera a V.
d) Todo vector de V es combinación lineal de vectores de A.

Ejercicio

Probar que $A \subset \bar{A}$.

Supongamos que $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$u_1 \in A, \quad u_1 = 1u_1 + 0\,u_2 + \cdots + 0\,u_n \Rightarrow u_1 \in \bar{A}$$
$$u_2 \in A, \quad u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + \cdots + 0\,u_n \Rightarrow u_2 \in \bar{A}$$
$$u_n \in A, \quad u_n = 0\,u_1 + 0\,u_2 + \cdots + 1\,u_n \Rightarrow u_n \in \bar{A}$$

Entonces $A \subset \bar{A}$.

Ejemplos

a) Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ y sea $A = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Determinaremos el subespacio generado por A del siguiente modo,

$$\bar{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0), \qquad \text{con } a_2, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Es claro que todo vector de $\bar{A}$ se expresa como combinación lineal de vectores del conjunto A

$$(x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0), \qquad \text{con } a_2, a_2 \in \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) = (a_1,0,0) + (0,a_2,0)$$
$$(x,y,z) = (a_1,a_2,0)$$

Como a_1 y a_2 representan cualquier par de número real entonces la condición para que (x,y,z) sea combinación lineal de vectores de A es que $z = 0$, es decir,

$$(x,y,z) \in \bar{A} \Leftrightarrow z = 0$$

por lo tanto, el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ generado por el conjunto $A = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es

$$\bar{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

Así, por ejemplo, el vector $(5,-1,0) \in \bar{A}$ pues existen los escalares reales 5 y -1 que permiten expresar a este vector como combinación lineal de los vectores de A,

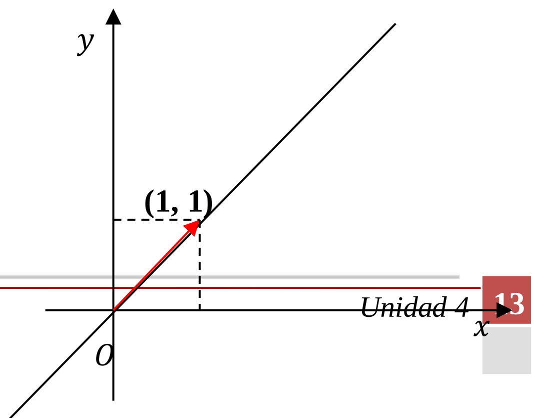
$$(5,-1,0) = 5(1,0,0) + (-1)(0,1,0)$$

b) Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ y el conjunto $A = \{(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$. El subespacio generado por el conjunto A es

$$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) = a\,(1,1)\}$$

Es decir todo vector de $\bar{A}$ tiene la forma

$$(x,y) = a\,(1,1), \text{ con } a \in \mathbb{R}$$
$$(x,y) = (a,a)$$



luego, $(x, y) \in \bar{A} \Leftrightarrow x = y$, es decir

$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$

La representación geométrica de $\bar{A}$ es la recta de ecuación $x = y$ (primera bisectriz). Para generar este subespacio vectorial bastó sólo un vector, el vector $(1,1)$.

c) Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ y el conjunto $A = \{(1,1), (1,0)\} \subset \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$. El subespacio generado por el conjunto A por definición viene dado por

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = a\,(1,1) + b(1,0)\}$$

Partiendo de la igualdad

$$a\,(1,1) + b(1,0) = (x, y)$$

y realizando las operaciones indicadas se tiene

$$(a, a) + (b, 0) = (x, y)$$
$$(a + b, a) = (x, y)$$

De donde se sigue el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b

$$\begin{cases} a + b = x \\ a \qquad = y \end{cases}$$

Uno de los modos de resolver este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es empleando el Método de Gauss (o Método de Eliminación Gaussiana)

$$\begin{array}{r|cc|c} & 1 & 1 & x \\ & 1 & 0 & y \\ \hline f_2 + (-1) f_1 & 1 & 1 & x \\ & 0 & -1 & -x + y \\ \hline (-1) f_2 & 1 & 1 & x \\ & 0 & 1 & x - y \end{array} \quad (*)$$

Es claro que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^a = 2 = \text{n° de incógnitas}$ y por el Teorema de Rouché-Frobenius y su Corolario, el sistema es *compatible determinado*. Es decir, cualesquiera sean x e y, existen y son únicos los escalares a y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$a\,(1,1) + b(1,0) = (x, y).$$

Luego $\bar{A} = \mathbb{R}^2$, es decir A es generador del espacio $\mathbb{R}^2$, o bien todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de vectores del conjunto A.

Empleando la técnica de sustitución hacia atrás en (*) obtenemos los escalares a y b en función de las componentes del cualquier vector de $\mathbb{R}^2$,

$$b = x - y$$

$$a = x - b = x - (x - y) = y$$

De modo que

$$a = y$$
$$b = x - y$$

Por lo tanto

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) = y(1,1) + (x - y)(1,0)$$

Así, por ejemplo

$$(2, -4) = (-4)(1,1) + 6(1,0)$$

$$(5,7) = 7(1,1) + (-2)(1,0)$$

Observación

Todo espacio vectorial es generador de sí mismo.

Proposición 9

Sea V_F un espacio vectorial y sean A y B dos subconjuntos de V no vacíos tales que $A \subset B$, entonces el subespacio generado por A está incluido en el subespacio generado por B. En símbolos,

$$A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$$

Demostración

Sean $A = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots, u_m\}$. Es claro que $A \subset B$.

Probar que $\bar{A} \subset \bar{B}$ equivale probar que $u \in \bar{A} \Longrightarrow u \in \bar{B}$. En efecto

$$\begin{aligned} u \in \bar{A} \Longrightarrow u &= a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = \\ &= a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n + 0\ u_{n+1} + 0\ u_{n+2} + \cdots + 0\ u_m \Longrightarrow u \in \bar{B} \end{aligned}$$

Esto es así porque u es una combinación lineal de los elementos de B.

4.- INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Definición 7

Sea V_F un espacio vectorial y sea $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$.

El conjunto A es ***linealmente independiente*** si y sólo si el único modo de obtener el vector nulo como combinación lineal de vectores de A es a través de la combinación lineal trivial.

En símbolos,

$$A \text{ es linealmente independiente } \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{n} a_iu_i = 0_V \Rightarrow \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ a_i = 0$$

Observaciones

En la Definición 7 podemos observar los siguientes aspectos

a) Si un conjunto $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ es linealmente independiente entonces el condicional

$$\sum_{i=1}^{n} a_iu_i = 0_V \Rightarrow \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ a_i = 0$$

siempre es verdadero.

b) Si el condicional

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_V \Rightarrow \forall i = 1, 2, 3, \dots, n;\ a_i = 0$$

es verdadero, entonces $A = \{u_1, u_1, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente.

c) Si un conjunto $A = \{u_1, u_1, \dots, u_n\} \subset V$ no es linealmente independiente, entonces el condicional de la derecha de la Definición 7 es falso.

d) Si el condicional de la derecha de la Definición 7 es falso, entonces $A = \{u_1, u_1, \dots, u_n\} \subset V$ no es linealmente independiente.

Ejemplos

a. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$, el conjunto $A = \{(1, 2, -5)\}$ es linealmente independiente.

Para ello aplicaremos la Definición 7, es decir, mostraremos que si una combinación lineal de vectores del A tiene valor $(0, 0, 0)$, entonces esta combinación lineal debe ser únicamente la combinación lineal trivial. En efecto, formamos una combinación lineal de valor cero vector con el único vector de A

$$a\,(1, 2, -5) = (0, 0, 0)$$

realizando la multiplicación indicada en el primer miembro tenemos,

$$(a, 2a, -5a) = (0, 0, 0)$$

Y por igualdad de ternas ordenadas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a = 0 \\ -5a = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene tres ecuaciones lineales con una incógnita. Éste es un sistema compatible determinado y la única solución es la trivial $a = 0$.

Luego, el condicional de la Definición 7 es verdadero y por lo tanto el conjunto A es linealmente independiente.

b. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, el conjunto $A = \{(1, 2), (1, 1)\}$ es linealmente independiente.

Procediendo de manera análoga al ejemplo precedente, partimos de una combinación lineal de vectores del conjunto A de valor cero vector.

$$\alpha\,(1, 2) + \beta\,(1, 1) = (0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha) + (\beta, \beta) = (0, 0)$$

$$(\alpha + \beta, 2\alpha + \beta) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Aquí tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas homogéneo y sabemos que es compatible, es decir tiene al menos una solución que es la solución trivial. Aplicamos ahora el método de eliminación gaussiana, para saber si es determinado o indeterminado.

$$\begin{array}{r|cc|c|l}
 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 2 & 1 & 0 & \\
\hline
f_2 + (-2) f_1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 0 & -1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & (-1) f_2 \\
 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Analizamos el rango de la matriz de coeficiente, que obviamente es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes, y vemos que coincide con el número de incógnitas, esto es

$$\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^a = 2 = \text{n° incógnitas},$$

y según el Teorema de Rouché-Frobenius y su Corolario, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo (1) es compatible determinado, luego la única solución es la trivial, esto es

$$\alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

Luego, por la Definición 7, el conjunto A es *linealmente independiente*.

c. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, el conjunto $D = \{(1, 2), (2, 4)\}$ no es linealmente independiente. En efecto, tomamos una combinación lineal de vectores del conjunto D de valor cero vector,

$$\alpha\,(1, 2) + \beta\,(2,4) = (0, 0)$$

$$(\alpha, 2\alpha) + (2\beta, 4\beta) = (0, 0)$$

$$(\alpha + 2\beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas homogéneo. Aplicamos ahora el Método de Eliminación Gaussiana

$$\begin{array}{cc|c}
1 & 2 & 0 \\
2 & 4 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0
\end{array}$$

en donde podemos observar que

$$\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^a = 1 \neq 2 = \text{n° incógnitas}.$$

Por lo tanto el sistema (2) es compatible indeterminado cuyo conjunto solución es

$$S_0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha = -2\beta\}$$

De modo que existen infinitas soluciones no triviales de la forma $(-2\beta, \beta)$, como por ejemplo $\alpha = 2$ y $\beta = -1$, y podemos ver que el vector nulo se puede obtener a través de la combinación lineal de vectores del conjunto D con estos escalares

$$2\,(1,2)\; + (-1)\,(2,4) \;=\; (0,0)$$

y podemos afirmar que el vector nulo se puede obtener de infinitas maneras como una combinación lineal de vectores del conjunto D.

Teniendo en cuenta la Definición 7, concluimos que el conjunto D no es linealmente independiente.

Observación

En los tres ejemplos precedentes, hemos partido de una combinación lineal, de valor cero, de vectores de un conjunto dado, la que nos permitió formular un sistema de ecuaciones lineales homogéneo del cual sabemos que es siempre compatible. Y observamos que sólo basta determinar que el sistema es *determinado* para poder afirmar que el conjunto dado es linealmente independiente y que el sistema es *indeterminado* para afirmar que el conjunto dado no es linealmente independiente.

Definición 8

Sea V_F un espacio vectorial y sea $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$.

El conjunto A es ***linealmente dependiente*** si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de valor 0_V.

En símbolos,

$$A \text{ es linealmente dependiente } \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists i \in \{1,2,3,\dots,n\}: a_i \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0_V$$

Observación

En virtud de las Definiciones 7 y 8 un conjunto $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ es linealmente dependiente si y sólo si A no es linealmente independiente.

Ejemplo

El conjunto D del Ejemplo c) precedente, es *linealmente dependiente*.

4.1.- Propiedades de los Conjuntos Linealmente Dependientes

Sea V_F un espacio vectorial y $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$.

Proposición 1

Si el vector nulo pertenece al conjunto A, entonces A es linealmente dependiente.

Demostración

Sin perder generalidad, se puede suponer que $u_1 = 0_V \in A$, entonces la siguiente combinación lineal de vectores de A

$$a_1 u_1 + 0\,u_2 + \cdots + 0\,u_n = 0_V \quad , \text{con } a_1 \in F \;\wedge\; a_1 \neq 0$$

es una combinación lineal no trivial de valor 0_V. Luego A es linealmente dependiente.

Q.E.D.

Ejemplos

a. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$, el conjunto $A = \{(1,2,-5),(1,-1,4),(0,0,0)\}$ es linealmente dependiente.

b. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 3}_{\mathbb{R}}$, el conjunto $A = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ linealmente dependiente.

Proposición 2

El conjunto $A = \{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \cdots, u_n\} \subset V$ es linealmente dependiente si y sólo si existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A.

Demostración

$\Rightarrow$) Demostraremos que la condición es necesaria, es decir

"Si A es linealmente dependiente entonces existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores".

En efecto, por hipótesis A es linealmente dependiente, entonces por Definición 8 existe una combinación lineal no trivial de vectores de A de valor 0_V, es decir

$$\exists\, j \in \{1,2,\cdots,n\} \text{ tal que } a_j \neq 0 \text{ y}$$

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_{j-1}u_{j-1} + a_ju_j + a_{j+1}u_{j+1} + \cdots + a_nu_n = 0_V,$$

donde $, \forall\, j = 1,2,\dots,n;\ u_j \in A \ \wedge a_j \in F$.

Luego

$$a_ju_j = -a_1u_1 - a_2u_2 - \cdots - a_{j-1}u_{j-1} - a_{j+1}u_{j+1} - \cdots - a_nu_n,$$

como $a_j \neq 0$, existe $\frac{1}{a_j}$, entonces pre-multiplicando por $\frac{1}{a_j}$ en ambos miembros de la igualdad precedente se tiene

$$\frac{1}{a_j}a_ju_j = \frac{1}{a_j}\left(-a_1u_1 - a_2u_2 - \cdots - a_{j-1}u_{j-1} - a_{j+1}u_{j+1} - \cdots - a_nu_n\right),$$

con lo que

$$u_j = -\frac{a_1}{a_j}u_1 - \frac{a_2}{a_j}u_2 - \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j}u_{j-1} - \frac{a_{j+1}}{a_j}u_{j+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_j}u_n \qquad (\alpha)$$

Sea $b_i = -\frac{a_i}{a_j}$, $\forall\, i = 1,2,\cdots,n; i \neq j$, al reemplazar en (α), se tiene que

$$u_j = b_1\,u_1 + b_2\,u_2 + \cdots + b_{j-1}\,u_{j-1} + b_{j+1}\,u_{j+1} + \cdots + b_n\,u_n$$

luego u_j es una combinación lineal de los restantes vectores de A.

$\Leftarrow$) Demostraremos que la condición es suficiente

"Si existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A, entonces A es linealmente dependiente".

Sea $u_j \in A$ tal que, u_j es combinación lineal de los restantes vectores de A. Esto es,

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} b_i \, u_i$$

es decir

$$u_j = b_1 \, u_1 + b_2 \, u_2 + \cdots + b_{j-1} \, u_{j-1} + b_{j+1} \, u_{j+1} + \cdots + b_n \, u_n$$

sumando en ambos miembros $\left(-u_j\right) = (-1) \, u_j$

$$0_V = b_1 \, u_1 + b_2 \, u_2 + \cdots + b_{j-1} \, u_{j-1} + b_{j+1} \, u_{j+1} + \cdots + b_n \, u_n + \ (-1) \, u_j$$

reordenando los términos

$$0_V = b_1 \, u_1 + b_2 \, u_2 + \cdots + b_{j-1} \, u_{j-1} + (-1) \, u_j \ + b_{j+1} \, u_{j+1} + \cdots + b_n \, u_n$$

ya que uno de los escalares es -1, esta es una combinación lineal **no trivial** de vectores de A de valor 0_V. En consecuencia, el conjunto A es linealmente dependiente.

Q.E.D.

<u>Proposición 3</u>

Sea A un subconjunto no vacío del espacio vectorial V y tal que $A \neq \{0_V\}$. El conjunto A es linealmente dependiente si y sólo si existe un subconjunto propio de A que genera el mismo subespacio que genera A.

En símbolos,

$$A \text{ es linealmente dependiente} \Leftrightarrow \exists \ A' \subset A \ \wedge \ A' \neq A \colon \bar{A'} = \bar{A}$$

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Demostraremos que la condición es necesaria, esto es

$$A \text{ es linealmente dependiente} \Rightarrow \exists \ A' \subset A \ \wedge \ A' \neq A \colon \bar{A'} = \bar{A}$$

Por hipótesis A es linealmente dependiente y $A \neq \{0_V\}$, entonces por Proposición 2

$$\exists \ u_j \in A\colon \ u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \, u_i \qquad (\beta)$$

Con $a_i \in F \wedge u_i \in A, \forall \ i = 1, 2, \cdots, n$.

Sea $A' = A - \{u_j\}$ entonces, es claro que existe $A' \subset A \ \wedge \ A' \neq A$.

Ahora probaremos que

$$\bar{A'} = \bar{A}$$

Por definición de igualdad de conjuntos equivale a demostrar las inclusiones

$$\bar{A'} \subset \bar{A} \quad \wedge \quad \bar{A} \subset \bar{A'}$$

a) Como $A' \subset A$, por la Proposición 9 se sigue que $\bar{A'} \subset \bar{A}$.

b) Probaremos que $\bar{A} \subset \bar{A'}$

Sea $u \in \bar{A}$, entonces u es una combinación lineal de vectores del conjunto $A = \{u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n\}$. Es decir,

$$u = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_j\, u_j + b_{j+1}\, u_{j+1} + \cdots + b_n\, u_n.$$

Pero como u_j es una combinación lineal de los restantes vectores de A por (β), entonces

$$u = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_j \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_i\, u_i + b_{j+1}\, u_{j+1} + \cdots + b_n\, u_n.$$

Es decir

$$u = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \cdots + b_{j-1}\, u_{j-1} + b_j\, (a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_{j-1}\, u_{j-1} + a_{j+1}\, u_{j+1} + \cdots + a_n\, u_n) + b_{j+1}\, u_{j+1} + \cdots + b_n\, u_n.$$

Realizando la operación indicada, aplicando axiomas de la estructura de espacio vectorial y agrupando convenientemente se llega a la siguiente combinación lineal

$$u = (b_1 + b_j\, a_1)\; u_1 + (b_2 + b_j\, a_2)\, u_2 + \cdots + (b_{j-1} + b_j\, a_{j-1})\, u_{j-1} + (b_{j+1} + b_j\, a_{j+1}) u_{j+1} + \cdots + (b_n + b_j\, a_n) u_n.$$

Es claro que u es una combinación lineal de vectores del conjunto A' esto significa que u pertenece al subespacio generado por el conjunto A', es decir $u \in \overline{A'}$.

Luego, por a) y b) tenemos que $\overline{A'} = \bar{A}$

$\Leftarrow$) Demostraremos ahora, que la condición es suficiente, en símbolos

$$\exists\, A' \subset A \;\wedge\; A' \neq A : \overline{A'} = \bar{A} \Rightarrow A \text{ es linealmente dependiente}$$

Supóngase que existe A' subconjunto propio de A tal que $\overline{A'} = \bar{A}$. Entonces

$$A - A' \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, u_j \in A - A' \Longrightarrow u_j \in A \;\wedge\; u_j \notin A'$$

además como $u_j \in A$, entonces $u_j \in \bar{A}$ y como por hipótesis $\overline{A'} = \bar{A}$ resulta que

$$u_j \in \overline{A'}$$

Por lo tanto u_j es una combinación lineal de los vectores de A'. Pero los vectores de A' son vectores de A pues $A' \subset A$, por lo tanto u_j es combinación lineal de los vectores de A, excepto él mismo. Y como $u_j \in A$ existe un vector de A que es combinación lineal de los restantes vectores de A, entonces por Proposición 2 el conjunto A es linealmente dependiente.

Q.E.D.

Proposición 4

Todo conjunto que contiene a un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

En símbolos,

$$A' \subset A \;\wedge\; A' \text{es linealmente dependiente} \;\Longrightarrow A \text{ es linealmente dependiente}$$

Demostración

Sea A' linealmente dependiente. Entonces existe una combinación lineal de vectores de A' no trivial de valor 0_V. Pero toda combinación de vectores de A' es combinación de vectores de A, pues por hipótesis $A' \subset A$. Luego A es linealmente dependiente.

Q.E.D.

4.2.- Propiedades de los Conjuntos Linealmente Independientes

Se puede enunciar las propiedades referidas a conjuntos linealmente independientes tomando los contra-recíprocos de los condicionales de las propiedades de los conjuntos linealmente dependientes.

Proposición 1'

Si el conjunto A es linealmente independiente, entonces el vector nulo no pertenece al conjunto A.

Proposición 2'

El conjunto A es linealmente independiente si y sólo si ningún vector de A es combinación lineal de los restantes vectores de A.

Proposición 3'

El conjunto A es linealmente independiente si y sólo si ningún subconjunto propio de A genera el mismo subespacio que el que genera A.

Proposición 4'

Todo subconjunto no vacío de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.

4.3.-Rango de una Matriz

Definición 9

El ***rango*** de una matriz $M \in F^{m \times n}$ es el mayor número de vectores filas (o columnas) linealmente independientes que tiene la matriz M.

Notación

El rango de la matriz M se denota con $\text{rg } M$.

Ejemplo

Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, el conjunto formado por las filas de M es $f_M = \{[-1 \quad 2], [2 \quad -4]\}$ es linealmente dependiente por Proposición 2 de dependencia lineal ya que $[2 \quad -4] = -2[-1 \quad 2]$, por lo tanto $\text{rg } M \neq 2$ pero es claro que el conjunto $\{[-1 \quad 2]\}$ es linealmente independiente de lo que se sigue que $\text{rg } M = 1$.

5.- BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 10

Sea V_F un espacio vectorial y sea B un subconjunto no vacío y **ordenado** de V. El conjunto B es una base del espacio vectorial V si y sólo si,

i) B es generador del espacio vectorial V.

ii) B es linealmente independiente.

Notas

- Consideraremos en adelante sólo espacios vectoriales que tienen bases finitas.
- Remarcamos que el orden en que están dados los elementos de toda base es una cuestión muy importante, este hecho podremos observarlo más adelante.

Ejemplo

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ y consideremos el conjunto ordenado $E = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ donde E_i representa a la n-upla cuya i-ésima componente es 1 y las restantes son 0. Esto es

$$E = \{(1,0,\cdots,0), (0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,\cdots,1)\}$$

El conjunto E es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$, en efecto

i) E es Generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$.

Sea $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ si existen escalares $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_1(1,0,\cdots,0) + b_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + b_n(0,0,\cdots,1)$$

entonces debe ocurrir que

$$b_1 = x_1, b_2 = x_2, \cdots, b_n = x_n.$$

ii) E es linealmente independiente.

Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n = (0,0,\cdots,0)$.

Es decir,

$$a_1(1,0,\cdots,0) + a_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + a_n(0,0,\cdots,1) = (0,0,\cdots,0)$$

$$(a_1, 0, \cdots, 0) + (0, a_2, \cdots, 0) + \cdots + (0,0,\cdots,a_n) = (0,0,\cdots,0)$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (0,0,\cdots,0)$$

Por igualdad de n-uplas ordenadas de números reales resulta

$$a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \cdots \wedge a_n = 0.$$

De i) y ii) se sigue que es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$.

Nota

A la base E se le denomina ***base canónica***, observemos que tiene n elementos. En particular,

- si $n = 1$, la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ es $B = \{(1)\}$;
- si $n = 2$, la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ es $B = \{(1,0), (0,1)\}$;
- si $n = 3$, la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ es $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
- si $n = 4$, la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$ es $B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

Ejercicio

Pruebe que en el espacio vectorial $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^{m\times n}$ de las matrices reales de tipo $m \times n$, una base es el conjunto ordenado con mn elementos dado por

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nota:

Esta base es la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^{m\times n}$. En particular la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^{2\times 2}$ es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Proposición 10

Sea V_F un espacio vectorial. Si B es una base de V, entonces todo vector del espacio vectorial V se escribe de modo único como combinación lineal de vectores de la base dada B.

Demostración

Sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ base de V. Probaremos que:

$$v \in V \Longrightarrow \exists!\ a_1, a_2, \cdots, a_n \in F: v = a_1\, u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Por ser $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ **generador** del espacio vectorial V se tiene,

$$v \in V \Longrightarrow \exists\ a_1, a_2, \cdots, a_n \in F: v = a_1\, u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \qquad (1)$$

Como debemos probar que los escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ son únicos, supondremos que existen otros escalares que permiten expresar al vector v como combinación lineal de los vectores de B, es decir,

$$\exists\ b_1, b_2, \cdots, b_n \in F: v = b_1\, u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n \qquad (2)$$

Restando $(2) - (1)$ miembro a miembro, obtenemos

$$0_V = (b_1\, u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n) - (a_1\, u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n),$$

esto es,

$$0_V = b_1\, u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n - a_1\, u_1 - a_2 u_2 - \cdots - a_n u_n,$$

$$0_V = (b_1 - a_1)\, u_1 + (b_2 - a_2) u_2 + \cdots + (b_n - a_n) u_n.$$

Como B es **linealmente independiente** y ésta es una combinación lineal de vectores de B de valor 0_V entonces esta combinación lineal debe ser la trivial, es decir los escalares deben ser simultáneamente cero

$$\begin{gathered} b_1 - a_1 = 0 \Longrightarrow b_1 = a_1 \\ b_2 - a_2 = 0 \Longrightarrow b_2 = a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n = 0 \Longrightarrow b_n = a_n \end{gathered}$$

Luego, los escalares son únicos. **Q.E.D.**

Definición 11

A los únicos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$, que permiten escribir a un vector $v \in V$ como combinación lineal de vectores de una base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, se les denomina *coordenadas del vector v con respecto a la base B de V* y se denota con,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Es claro que los escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ caracterizan al vector $v \in V$, en el sentido de que son los únicos posibles que permiten expresarlo en términos de los vectores de la base dada B.

Ejercicio 1

Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ y el conjunto $B = \{(1,0), (0,1)\}$.

a) Muestre que B es una base de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

b) Determine las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, con respecto a la base B.

a)

i) B es generador de V. En efecto,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists\, a, b \in \mathbb{R}: (x, y) = a\,(1,0) + b\,(0,1)$$
$$(a, 0) + (0, b) = (x, y)$$
$$(a, b) = (x, y)$$
$$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases} \qquad (*)$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a y b. Es evidente que

$$\text{rg } A = \text{rg } A^a = 2 = \text{n° de incógnitas}$$

por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, luego existen y son únicos los escalares que permiten escribir a todo vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, como combinación lineal de vectores del conjunto B. En esta situación los escalares coinciden con las propias componentes de todo vector (x, y).

ii) B es linealmente independiente.

Para ello tomaremos una combinación lineal de valor $(0, 0)$ de vectores del conjunto B.

$$a\,(1,0) + b\,(0,1) = (0,0)$$
$$(a, 0) + (0, b) = (0,0)$$
$$(a, b) = (0,0)$$
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Es claro que la única solución de este sistema homogéneo es la trivial, por lo tanto el conjunto B es linealmente independiente.

Luego por i) y ii) B es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$. Es más B es la *base canónica* de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

b)

Por el ítem a) las coordenadas de un vector cualquiera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ respecto de la base B son las componentes del vector, por lo tanto el vector de coordenadas es,

$$[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Así por ejemplo, el vector de coordenadas de $(1,5)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ es

$$[(1,5)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nota

Observemos que en los ítems i) y ii) del apartado a) del ejercicio precedente, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales (*) y su sistema homogéneo asociado. Por lo tanto en vez de resolver por separado los dos sistemas de ecuaciones lineales es conveniente resolverlos en forma simultánea como veremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, considere el conjunto $A = \{(1,1), (1,0)\}$.

a) Muestre que A es una base de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.
b) Determine las coordenadas de cualquier vector de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, con respecto a la base A.

En efecto:

a) Para mostrar que A es generador de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y consideremos la siguiente combinación lineal de vectores de A

$$a\,(1,1) + b\,(1,0) = (x, y)$$
$$(a, a) + (b, 0) = (x, y)$$
$$(a + b, a) = (x, y)$$
$$\begin{cases} a + b = x \\ a = y \end{cases} \qquad (1)$$

Dejemos pendiente por un momento la resolución del sistema de ecuaciones (1).

Para mostrar que A es linealmente independiente, consideremos la siguiente combinación lineal de vectores de A de valor cero vector,

$$a\,(1,1) + b\,(1,0) = (0, 0)$$
$$(a, a) + (b, 0) = (0, 0)$$
$$(a + b, a) = (0,0)$$
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Retomemos ahora los SEL (1) y (2). Son dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen la misma matriz de coeficientes, luego es posible aplicar el método de Gauss-Jordan a la matriz ampliada con la columna de términos independientes del sistema (1) y con la columna de términos independientes del sistema (2) simultáneamente de la siguiente manera

$$\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ \hline \end{array} \quad \downarrow f_2 + (-1)f_1$$

1	1	x	0	
0	−1	$y-x$	0	(-1)f_2
1	1	x	0	
0	1	$x-y$	0	
1	0	y	0	f_1+(-1)f_2
0	1	$x-y$	0	

De aquí se puede deducir por simple observación, teniendo en cuenta el concepto de rango de una matriz en términos de su matriz escalón reducida por filas, que

$$\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^a = 2 = \text{n° de incógnitas} \qquad (*)$$

Esto significa que los sistemas (1) y (2) son compatibles determinado, es decir que

i. $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \exists\, a,b \in \mathbb{R}: (x,y) = a(1,1) + b(1,0)$, luego A es generador de $\mathbb{R}^2$.

ii. la única solución del sistema (2) es la trivial, luego A es L.I.

Por i. y ii. A es una base de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

b) El vector de coordenadas de todo vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ respecto de la base A viene dado por,

$$[(x,y)]_A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Reformulando el sistema (1)

$$\begin{cases} a = y \\ b = x - y \end{cases}$$

tenemos el vector de coordenadas en término de las componentes del vector $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$[(x,y)]_A = \begin{bmatrix} y \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$[(1,5)]_A = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

<u>Observaciones</u>

1. Si la base del espacio vectorial V es la canónica, las coordenadas de todo vector de V son las componentes del vector.
2. Como podemos observar en los dos ejemplos precedentes, en un mismo espacio vectorial las coordenadas de un mismo vector respecto de una base varían si cambiamos de base.
3. No resulta evidente que dado un espacio vectorial cualquiera, éste posea una base. Ahora veremos que en realidad es posible determinar por lo menos una base.

<u>Teorema de Existencia de bases</u>

Todo espacio vectorial $V_F \neq \{0_V\}$ admite al menos una base.

<u>Idea de la demostración</u>

La idea subyacente de la demostración del teorema precedente es que, dado un generador de un espacio vectorial V se pueden ir eliminando de él los vectores "redundantes" (aquellos que son combinaciones lineales de otros vectores) hasta quedar con un conjunto linealmente independiente que siga generando al espacio V. En otras palabras se muestra que "todo generador de un espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ contiene a una base".

Observación

No debemos perder de vista que un espacio vectorial puede tener más de una base. Por ejemplo bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ son los conjuntos ordenados $\{(1,1),(1,0)\}, \{(1,0),(0,1)\}, \{(2,0),(0,2)\}$.

Ejemplo

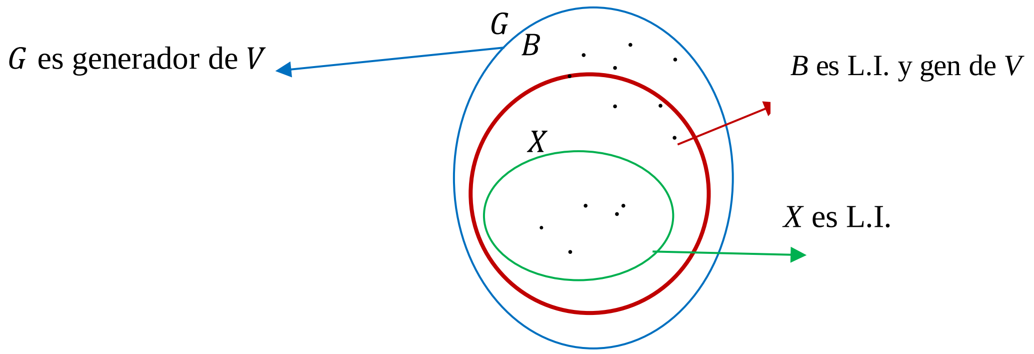
El conjunto $G = \{(1,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$ es un generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ y G contiene al conjunto $\{(1,1),(1,0)\}$ que es linealmente independiente y también es generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$, es decir es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

Teorema

Sea V_F un espacio vectorial. Si el conjunto X es linealmente independiente y G es un generador de V, tales que $X \subset G$, entonces existe B base de V tal que $X \subset B \subset G$.

Idea de la demostración

La idea de la demostración consiste en ir "agregando" al conjunto X vectores $v', v'', \cdots$, pertenecientes a $G - X$ de tal modo que los sucesivos conjuntos que se obtengan $X \cup \{v'\}, X \cup \{v', v''\}, \cdots$ sean también linealmente independiente hasta lograr un conjunto B que sea linealmente independiente y además que genere al espacio V.



Nota

De acuerdo con el enunciado de este teorema, podemos concluir también que todo conjunto linealmente independiente puede ser ampliado a una base del espacio. En otras palabras, dado un conjunto linealmente independiente, existe una base que lo contiene.

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$, consideremos los siguientes conjuntos

$$X = \{(1,0,0)\}, \quad G = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$$

Es claro que X es linealmente independiente y G es un generador del espacio vectorial V y además $X \subset G$.

A partir de $X = \{(1,0,0)\}$ agregando un vector de $G - X$ conseguimos

$$Y = \{(1,0,0), (0,1,0)\},$$

este conjunto es linealmente independiente pero no genera $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Agregamos a Y otro vector de $G - X$, y obtenemos

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

este conjunto es linealmente independiente y genera el espacio $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$, por lo tanto es una base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$. Además verifica la condición $X \subset B \subset G$ que indica el teorema.

Proposición 11 *(Sin demostración)*

Sea V_F un espacio vectorial. Si X es un subconjunto linealmente independiente de V y G generador de V, entonces el número de elementos de X es menor o igual que el número de elementos de G.

En símbolos,

$$X \text{ linealmente independiente} \wedge G \text{ generador de } V \Longrightarrow \#X \leq \#G.$$

Proposición 12

Toda base de un espacio vectorial V_F tiene el mismo número de elementos.

Demostración

Sean B_1 y B_2 bases de V_F, entonces por ser B_1 linealmente independiente y B_2 generador de V, es

$$\#B_1 \leq \#B_2 \qquad (\alpha)$$

Por ser B_2 linealmente independiente y B_1 generador de V, es

$$\#B_2 \leq \#B_1 \qquad (\beta)$$

Luego de (α) y (β) se tiene

$$\#B_1 = \#B_2$$

Q.E.D.

Ejemplos

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ toda base tiene n elementos.
- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^{m\times n}_{\mathbb{R}}$ toda base tiene mn elementos.
- En el espacio vectorial $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ toda base tiene dos elementos.

5.1.- Dimensión de un Espacio Vectorial

Dado que toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos podemos considerar a este número como una propiedad del espacio.

Definición 12

La ***dimensión*** de un espacio vectorial V_F, a la que denotaremos con $\dim V_F$, es el número de elementos de una base cualquiera de V.

Nota:

En virtud de la Definición 12, si una base cualquiera de un espacio vectorial V_F tiene n elementos, entonces la dimensión de V es n, esto es

$$\dim V_F = n.$$

Definición 13

La dimensión del espacio vectorial $V = \{0_V\}$ es 0. Esto es,

$$\dim\{0v\} \overset{def}{\equiv} 0$$

Ejemplos

- $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{R}} = 1$
- $\dim \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}} = 2$
- $\dim \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}} = 3$
- $\dim \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}} = n$
- $\dim \mathbb{R}^{m\times n}_{\mathbb{R}} = mn$
- $\dim$ sim $(3) = 6$, dimensión el espacio de matrices simétricas de orden 3.
- $\dim$ TS $(3) = 6$, dimensión el espacio de matrices triangulares superior de orden 3.
- $\dim$ Diag $(3) = 3$, dimensión el espacio de matrices diagonales de orden 3.

Observaciones:

Si V un espacio vectorial de dimensión finita n, entonces

1. Todo generador de V tiene ***al menos*** n elementos (pues todo generador contiene una base). Por lo tanto una base tiene la menor cantidad de vectores que genera el espacio vectorial V.
2. Todo conjunto linealmente independiente en V tiene ***a lo sumo*** n vectores (pues todo conjunto linealmente independiente puede ampliarse a una base). Por lo tanto toda base de V tiene la mayor cantidad de vectores linealmente independientes.

El siguiente enunciado establece una relación entre las dimensiones de un espacio vectorial $\boldsymbol{V_F}$ y un subespacio vectorial cualquiera del mismo.

Teorema

Sea V_F un espacio vectorial de dimensión finita n. Si S es un subespacio vectorial de V, entonces

i) $\dim S \leq \dim V = n$.

ii) Si $\dim S = n$, entonces $S = V$.

Demostración

i) Si $S = \{0_V\}$ es claro que $\dim S = 0 \leq \dim V = n$.

Supongamos entonces que $S \neq \{0_V\}$ y sea X una base de S.

Por ser X linealmente independiente en S es también un subconjunto linealmente independiente de V, por lo que tiene a lo sumo n vectores, por lo tanto

$$\dim S = \#X \leq \dim V = n.$$

Luego

$$\dim S \leq \dim V = n.$$

ii) Si S es tal que, $\dim S = n$, entonces toda base X de S, tiene n elementos. Por lo tanto X es también base de V, ya que al ser X un subconjunto linealmente independiente de V que tiene n elementos, genera al espacio V. Es claro que si X no genera el espacio V, por ser X linealmente independiente existe B base de V tal que $X \subset B \wedge X \neq B$ y de acuerdo con esto existe una base de V con más de n vectores, lo que contradice la hipótesis $\dim V = n$. Por lo tanto X es generador de V, es decir $\bar{X} = V$. Pero X es también generador de S, esto es $\bar{X} = S$, de lo que se deduce que $S = V$.

Q.E.D.

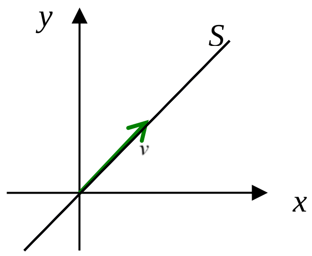
Ejemplo

En el espacio vectorial $V_F = \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ consideremos al conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$.

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}} = 2$ y que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ generado por el conjunto $\{(1,1)\}$ que es linealmente independiente. Por lo tanto $\{(1,1)\}$ es una base de S y de allí que

$$\dim S = 1 < \dim \mathbb{R}^2_{\mathbb{R}} = 2.$$

Geométricamente, el subespacio vectorial S se representa por la primera bisectriz.



6.- ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO ESCALAR

Trabajaremos a continuación con los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ con el producto escalar definido en cada uno de ellos.

Recordemos que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ la función producto escalar definida por

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto u \bullet v$$

donde,

$$u \bullet v = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \bullet (b_1, b_2, \cdots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

El producto escalar goza de las siguiente propiedades:

1. $\forall\, u\,, v \in V; u \bullet v = v \bullet u$
2. $\forall\, u\,, v, w \in V; u \bullet (v + w) = u \bullet v + \, u \bullet w$
3. $\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, u, v \;\in V; (a\, u) \bullet v = a(u \bullet v)$
4. $\forall\, u \;\in V; u \bullet u \geq 0 \;\wedge\; u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

6.1.- Conjuntos Ortogonales y Ortonormales de Vectores

Definición 14

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ con el producto escalar y sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un subconjunto no vacío de V. El conjunto S es *ortogonal* si y sólo si sus vectores son mutuamente ortogonales.

En símbolos,

$$S \text{ es ortogonal } \Leftrightarrow (i \neq j \Longrightarrow u_i \bullet u_j = 0)$$

Ejemplo

El conjunto $S = \{(-1,1), (1,1)\}$ es un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar.

Definición 15

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ con el producto escalar y sea S un subconjunto no vacío de V. El conjunto S es *ortonormal* si y sólo si sus vectores son mutuamente ortogonales y unitarios.

En símbolos,

$$S \text{ es ortonormal } \Leftrightarrow \begin{cases} i \neq j \Longrightarrow u_i \bullet u_j = 0 \\ \forall\, i = 1,2, \cdots, n;\; \|u_i\| = 1 \end{cases}$$

Ejemplo

Las bases canónicas de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}_{\mathbb{R}}$ con el producto escalar son conjuntos ortonormales, en otras palabras son bases ortonormales.

Normalización de un conjunto ortogonal

Sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\mathbb{R}}$. Entonces el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\|u_1\|} u_1, \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \dots, \frac{1}{\|u_n\|} u_n\right\}$$

es un conjunto ortogonal y sus vectores son unitarios por ser versores de los vectores de S. Luego es un conjunto ortonormal.

Ejemplo

El conjunto $S = \{(-1,2), (2,1)\}$ es un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ ya que

$$(-1,2) \bullet (2,1) = -2 + 2 = 0$$

si se normaliza cada uno de estos vectores,

$$\frac{1}{\|(-1,2)\|}(-1,2) = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}(-1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{1}{\|(2,1)\|}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

se obtiene el conjunto ortonormal

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Proposición 13

Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos de $V = \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$ es linealmente independiente.

Demostración

Sea $S \subset V \;\wedge S \neq \emptyset$, y S es un conjunto ortogonal de vectores no nulos.

Supongamos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i = 0_V \qquad (con\ a_i \in F \wedge u_i \in S)$$

es decir

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n = 0_V$$

- Multiplicando con el producto escalar en ambos miembros por u_1

$$(a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n)\bullet u_1 = 0_V \bullet u_1 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} (a_1\, u_1)\bullet u_1 + (a_2\, u_2)\bullet u_1 + \cdots + (a_n\, u_n)\bullet u_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} a_1(u_1\bullet u_1) + a_2\,\underbrace{(u_2\bullet u_1)}_{=0} + \cdots + a_n\,\underbrace{(u_n\bullet u_1)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} a_1\,\underbrace{(u_1\bullet u_1)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$$

Referencias

(1) Por propiedad 2 de producto escalar.
(2) Por propiedad 3 de producto escalar.
(3) Por propiedad 4 de producto escalar.

- Multiplicando con el producto escalar en ambos miembros por u_2

$$(a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n)\bullet u_2 = 0_V \bullet u_2 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} (a_1\, u_1)\bullet u_2 + (a_2\, u_2)\bullet u_2 + \cdots + (a_n\, u_n)\bullet u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} a_1\,\underbrace{(u_1\bullet u_2)}_{=0} + a_2(u_2\bullet u_2) + \cdots + a_n\,\underbrace{(u_n\bullet u_2)}_{=0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} a_2\,\underbrace{(u_2\bullet u_2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

Referencias

(1) Por propiedad 2 de producto escalar.

(2) Por propiedad 3 de producto escalar.
(3) Por propiedad 4 de producto escalar.

Se procede de manera análoga hasta llegar al último vector u_n.

- Multiplicando con el producto escalar en ambos miembros por u_n

$$(a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n) \bullet u_n = 0_V \bullet u_n \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} (a_1\, u_1) \bullet u_n + (a_2\, u_2) \bullet u_n + \cdots + (a_n\, u_n) \bullet u_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} a_1\, \underbrace{(u_1 \bullet u_n)}_{=0} + a_2\, \underbrace{(u_2 \bullet u_n)}_{=0} + \cdots + a_n (u_n \bullet u_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} a_n\, \underbrace{(u_n \bullet u_n)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow a_n = 0$$

Por lo tanto el conjunto S es linealmente independiente.

Referencias
(1) Por propiedad 2 de producto escalar.
(2) Por propiedad 3 de producto escalar.
(3) Por propiedad 4 de producto escalar.

Q.E.D.

6.2- Ortonormalización de una Base

Teorema

Todo espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n_{\mathbb{R}} \neq \{0_V\}$ con el producto escalar (con $n \geq 2$), admite una base ortonormal.

Demostración

Demostraremos este teorema para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Sabemos que todo espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$ admite al menos una base, por lo tanto podemos tomar una base cualquiera de V.

Sea $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

A partir de esta base construiremos vectores w_1, w_2, w_3 empleando el conocido **Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt,** del siguiente modo

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2$$

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto formado por esos vectores, esto es

$$\mathfrak{C} = \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Probaremos que el conjunto $\mathfrak{C}$ es un **conjunto ortogonal de vectores no nulos.**

En efecto, todos los vectores de $\mathfrak{C}$ son no nulos, es decir:

$$\forall\, i = 1,2,3;\ w_i \neq 0_V \qquad\qquad (\alpha)$$

Esto es así ya que por el contrario, si existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $w_i = 0_V$, por ejemplo w_3

$$0_V = v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$v_3 = \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$v_3 = \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} v_1 + \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} \left(v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \right)$$

$$v_3 = \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} v_1 + \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} \left(v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} v_1 \right)$$

$$v_3 = \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} v_1 + \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} v_2 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} v_1$$

$$v_3 = \left(\frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} \right) v_1 + \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} v_2$$

Es decir, v_3 es combinación lineal de los anteriores vectores v_1 y v_2 de la base dada $\mathfrak{B}$, y esto es una **contradicción**, ya que ningún vector de $\mathfrak{B}$ puede ser combinación lineal de los restantes, puesto que $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente. Luego la proposición (α) resulta verdadera.

Ahora, probaremos que cada vector de $\mathfrak{C}$ es ortogonal a los anteriores vectores.

$$w_2 \bullet w_1 \underbrace{=}_{(1)} \left(v_2 - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \right) \bullet w_1 \underbrace{=}_{(2)} (v_2 \bullet w_1) - \left(\frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \right) \bullet w_1 \underbrace{=}_{(3)}$$

$$(v_2 \bullet w_1) - \frac{v_2 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} (w_1 \bullet w_1) = (v_2 \bullet w_1) - (v_2 \bullet w_1) = 0$$

Luego w_2 es ortogonal a w_1.

$$w_3 \bullet w_1 \underbrace{=}_{(1)} \left(v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2 \right) \bullet w_1 \underbrace{=}_{(2)}$$

$$= (v_3 \bullet w_1) - \left(\frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \right) \bullet w_1 - \left(\frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2 \right) \bullet w_1 \underbrace{=}_{(3)}$$

$$= (v_3 \bullet w_1) - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} (w_1 \bullet w_1) - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} \underbrace{(w_2 \bullet w_1)}_{=0} = (v_3 \bullet w_1) - (v_3 \bullet w_1) = 0$$

Luego w_3 es ortogonal a w_1.

$$w_3 \bullet w_2 \underbrace{=}_{(1)} \left(v_3 - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2 \right) \bullet w_2 \underbrace{=}_{(2)}$$

$$= (v_3 \bullet w_2) - \left(\frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \right) \bullet w_2 - \left(\frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2} w_2 \right) \bullet w_2 \underbrace{=}_{(3)}$$

$$= (v_3 \bullet w_2) - \frac{v_3 \bullet w_1}{\|w_1\|^2}\underbrace{(w_1 \bullet w_2)}_{=0} - \frac{v_3 \bullet w_2}{\|w_2\|^2}(w_2 \bullet w_2) = (v_3 \bullet w_2) - (v_3 \bullet w_2) = 0$$

Luego w_3 es ortogonal a w_2.

Referencias

(1) Teniendo en cuenta la construcción de los vectores

(2) Por la distributividad del producto escalar respecto a la resta de vectores

(3) Por propiedad de producto escalar. Por ser $w_h \bullet w_j = 0$ si $h \neq j$ y además $w_h \bullet w_j \neq 0$ si $h = j$ ya que todos los vectores los vectores son no nulos. Y por definición de norma de un vector.

Por lo tanto, hemos probado que $\mathfrak{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos.

Ahora bien, teniendo en cuenta que "Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente" resulta que $\mathfrak{C}$ es linealmente independiente, además $\mathfrak{C}$ tiene 3 vectores del espacio $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ por lo tanto $\mathfrak{C}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Finalmente, si se normaliza la base ortogonal $\mathfrak{C}$, es decir si se toma el versor de cada vector de $\mathfrak{C}$ se obtiene el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\|w_1\|}w_1, \quad \frac{1}{\|w_2\|}w_2, \quad \frac{1}{\|w_3\|}w_3\right\}$$

el cuál es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.