Unidad N° 6: Polinomios y Ecuaciones Algebraicas

- **Polinomios**

El estudio de los polinomios es útil ya que presentados como función son modelos frecuentes de aplicación matemática en otras ciencias como física, economía, estadísticas, etc. Estas curvas son continuas y con derivadas continuas, para estudiarlas es necesario determinar los puntos o valores donde ellas o sus derivadas se anulan. En esta unidad nos dedicaremos a la búsqueda de dichos valores.

Definición:

Sea x una variable o indeterminada que será sustituida por cualquier objeto matemático que tenga definidas las potencias de exponente natural $h \in \mathbb{N}_0$.

Sea K cualquier cuerpo de los números reales o complejos.

Consideramos los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_h$ que son números reales o complejos.

Se llama **Polinomio** en la indeterminada x y con coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_h$, a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_h x^h + a_{h-1} x^{h-1} + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$
$$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_{h-1} x^{h-1} + a_h x^h$$

Término independiente

Coeficiente Director ($a_h \neq 0$)

$$P(x) = \sum_{i=0}^{h} a_i x^i$$

<u>Conjunto de polinomios $K[x]$:</u>

Si los coeficientes son reales $\mathbb{R}[x]$
Si los coeficientes son complejos $\mathbb{C}[x]$

<u>Grado de un Polinomio</u>

Es el número natural que es exponente de la mayor potencia cuyo coeficiente es distinto de 0

Ejemplo

$P(x) = 3ix^5 + 0x^6 + 4x^3 - 8$
$gr\ P(x) = 5$

Sea $Q(x) = a_0$

- Si $a_0 \neq 0$ entonces $gr\ P(x) = 0$ y se lo llama polinomio constante

Ejemplo

$Q(x) = \sqrt{5} + 3i \ \longrightarrow\ gr\ Q(x) = 0$
$T(x) = -\frac{2}{3} \ \longrightarrow\ gr\ T(x) = 0$

- Si $a_0 = 0$ entonces $N(x) = 0$ se llama polinomio Nulo y **no tiene grado**

<u>Igualdad de Polinomios</u>

Dos polinomios de igual grado son iguales si tienen ordenadamente los mismos coeficientes

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \wedge \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$$P(x) = Q(x) \quad sí\ y\ solo\ si \quad a_i = b_i \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$P(x)=3x^2+4x-1$ y $Q(x)= 3x^2+4x-1$ entonces $P(x)=Q(x)$

<u>Valor de un Polinomio</u>

Sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \in \quad K[x]$$

Si se reemplaza la variable por un número real o complejo se obtiene como resultado el llamado valor del polinomio

α nro real o complejo $\quad P(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}^i \quad$ Valor del polinomio $P(x)$ en α

Ejemplo

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

entonces si $x = 1$ tenemos $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 5.\mathbf{1} + 6 = 2$, luego $P(1) = 2$

otros valores son $P(0) = 6;\ P(i) = 5 - 5i$

<u>Cero de un Polinomio</u>

Sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \in \quad K[x] \qquad \alpha \text{ nro real o complejo}$$

α es cero de $P(x)$ si $P(\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow \quad O_P = \{\alpha \in \mathbb{C} \ / \ P(\alpha) = 0\}$

Conjunto de ceros de P

Ejemplo

$Q(x) = x^2 + 1$

$\alpha = i \longrightarrow Q(i) = 0$

$\alpha = -i \longrightarrow Q(-i) = 0$

$0_Q = \{i, -i\}$

- **Estructura Algebraica de $K[x]$**

Propiedad

$K[x]$ con la suma y la multiplicación tiene estructura de **<u>Anillo Conmutativo con Unidad</u>**

Demostración: Se prueba que se cumplen los siguientes axiomas.

- ✓ **Axioma 1**: La suma es ***Asociativa***
- ✓ **Axioma 2**: La suma es ***Conmutativa***
- ✓ **Axioma 3**: Existe ***Neutro*** para la suma ($N(x) = 0$ es Polinomio Nulo)
- ✓ **Axioma 4**: Existencia de Polinomio ***Opuesto***

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \wedge \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \quad / \quad P(x) + Q(x) = 0 \text{ es decir } Q(x) = -P(x)$$

- ✓ **Axioma 5**: La multiplicación es ***Asociativa***
- ✓ **Axioma 6**: La multiplicación es ***Conmutativa***
- ✓ **Axioma 7**: Existe ***Neutro*** para la multiplicación ($U(x) = 1$ es Polinomio Unidad)
- ✓ **Axioma 8**: Propiedad distributiva de la Multiplicación respecto de la Suma

$P(x), Q(x), T(x) \in K[x] : \ P(x).\big(Q(x) + T(x)\big) = P(x).Q(x) + P(x).T(x)$

$(K[x], +, \cdot)$ **Anillo Conmutativo con Unidad**

Observación:

- La existencia de polinomios opuestos permite definir la resta en $K[x]$
- Los únicos polinomios que tienen inverso multiplicativo son los polinomios constantes distintos de 0.

➢ Algoritmo de la División en $K[x]$

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $Q(x)$ no nulo y $grQ(x) \leq grP(x)$, entonces existen y son únicos los polinomios $C(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) que verifican:

i. $P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$
ii. $grR(x) < grQ(x) \quad \vee \quad R(x) = 0$

Nota:
El algoritmo de la división permite desarrollar una teoría de divisibilidad de polinomios:

1. Si $R(x) = 0$ se dice que $Q(x)$ es divisor de $P(x)$
2. Un polinomio es irreducible si sus únicos divisores son polinomios constantes o el mismo polinomio multiplicado por una constante.

Ejemplos

$P(x) = 4x + 10 \ \in \ \mathbb{R}[x]$

$P(x) = 2(x + 5)$

$Q(x) = x^2 + 1$ irreducible en $\mathbb{R}[x]$

Pero en $\mathbb{C}[x]$ $\quad x^2 + 1 = (x + i).(x - i)$

3. Se prueba que todo polinomio se puede escribir como producto de polinomios irreducibles. Esta descomposición es única salvo constantes.

- **Función Polinómica**

Sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \in \quad K[x]$$

$$\begin{aligned} P : K &\longrightarrow K \\ \alpha &\longmapsto P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}^i \end{aligned}$$

Función: La función polinómica es real si los coeficientes son reales y los valores para la variable también son reales.

- **Teorema del Resto**

Sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \in \quad K[x]$$, α nro real o complejo

El valor de $P(x)$ en α es igual al resto de la división $P(x)\colon (x-\alpha)$

Demostración por algoritmo de la división:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha) \\ \hline R & = C(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} P(x) &= C(x).(x-\alpha) + R \\ P(\alpha) &= C(\alpha).(\alpha-\alpha) + R \\ P(\alpha) &= R \end{aligned}$$

$gr = 0$
o
Pol. Nulo

Consecuencia:
Si α es cero del polinomio $P(x)$ entonces $P(\alpha) = 0$, por lo tanto el resto de la división $P(x)\colon (x-\alpha)$ es cero.

- **Ecuación Algebraica Asociada a un Polinomio**

Sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ \ de\ grado\ n\,, \qquad \in \quad K[x]$$

Para hallar los ceros de $P(x)$ es necesario resolver la siguiente ecuación: $P(x) = 0$

$$a_n x^n + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$$

Ecuación Algebraica Asociada a $P(x)$

Si $a_n \neq 0$, la ecuación es de grado n

Resolver la ecuación es encontrar los números reales o complejos que al reemplazarlos en x verifican la igualdad. A éstos números se los llama raíces de la ecuación. En general el problema será determinar los **ceros** del polinomio o **raíces** de la ecuación.

- **Teorema Fundamental del Algebra**

Teorema:
Todo polinomio $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ de grado no nulo tiene al menos una raíz (real o compleja) en $\mathbb{C}$.

Demostración: No está al alcance de este curso.

Como consecuencia de este teorema tenemos un importante resultado conocido como Teorema de Descomposición Factorial o Factorización de un Polinomio .

- **Teorema de Descomposición Factorial**

Sea $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n>0$.
Entonces $P(x)$ tiene n raíces $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ y se descompone (factoriza) de manera única.

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

Demostración: Mediante el Método de Inducción Completa con respecto al grado n del polinomio.

$\boldsymbol{n=1}$

Pol de 1° grado $P(x)=a_1x+a_0$ con $a_1\neq 0$

$a_1.\boldsymbol{\alpha}+a_0=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}=-\frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a_1}}$

Probar: $P(x)=a_1.(x-\boldsymbol{\alpha})$

$$a_1.(x-\boldsymbol{\alpha})=a_1.\left(x-\left(-\frac{\boldsymbol{a_0}}{\boldsymbol{a_1}}\right)\right)=a_1x+\cancel{a_1}.\frac{\boldsymbol{a_0}}{\cancel{\boldsymbol{a_1}}}=a_1x+a_0=P(x)$$

∴ Para $n=1$ el enunciado es veradadero.

$\boldsymbol{n=h}$

Pol de grado h;

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{h} b_i x^i\ ,\quad b_h\neq 0$$

Suponemos verdadero lo siguiente (hipótesis de inducción):
$Q(x)$ tiene h raices: $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_h$ y se factoriza como
$Q(x)=b_h.(x-\beta_1).(x-\beta_2)\dots(x-\beta_h)$

$\boldsymbol{n=h+1}$

Pol de grado $h+1$;

$$P(x)=a_{h+1}x^{h+1}+a_hx^h+\dots+a_1x^1+a_0x^0;\quad a_{h+1}\neq 0$$

Probar que $P(x)$ tiene $h+1$ raices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h, \alpha_{h+1}$ y se descompone
$P(x) = a_{h+1}.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_h).(x-\alpha_{h+1})$

Por teorema fundamental del álgebra sabemos que $P(x)$ tiene por lo menos una raíz α

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha) \\ \cline{2-2} 0 & = Q(x) \end{array}$$

porque α es raiz de $P(x)$

Entonces
$P(x) = Q(x).(x-\alpha)$

$grP(x) = h+1$
$gr(x-\alpha) = 1$
$grQ(x) = (h+1)-1 = h$

Por hipótesis de inducción $Q(x)$ tiene h raíces $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h$ y se factoriza:
$Q(x) = b_h.(x-\beta_1).(x-\beta_2)\dots(x-\beta_h)$

<u>Obs</u>:
$P(x) = Q(x).(x-\alpha)$
Si β es raíz de $Q(x)$ entonces $P(\beta) = Q(\beta).(\beta-\alpha) = 0$, por lo que β también es raíz de $P(x)$.
Las raíces de $P(x)$ son: $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h$

$$P(x) = \underbrace{b_h.(x-\beta_1).(x-\beta_2)\dots(x-\beta_h)}_{Q(x)}.(x-\alpha)$$

- Cambiamos el nombre de las raíces

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots,\ \alpha_h = \beta_h,\ \alpha_{h+1} = \alpha$$

- $P(x):(x-\alpha)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_{h+1} & a_h & \dots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & & & & \\ \hline & \multicolumn{4}{l}{\underbrace{a_{h+1}\qquad\qquad\qquad}_{Q(x)}} & \boxed{0} \end{array} \quad \Longrightarrow \ a_{h+1} = b_h$$

$$P(x) = a_{h+1}.(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_h).(x-\alpha_{h+1})$$

Se prueba que la descomposición es única usando propiedades de la teoría de divisibilidad de polinomios.

Nota:

1) Si $grP(x) = n$, por teorema anterior $P(x)$ tiene $\boldsymbol{n}$ raíces reales o complejas pero no es necesario que sean todas distintas.

2) El número de veces que el polinomio irreducible $(x-\alpha)$ aparece en la descomposición factorial de $P(x)$ es la multiplicidad de la raíz α.
3) La suma de las multiplicidades de todas las raíces distintas da por resultado el grado del polinomio.

Ejemplo

$$P(x)=\frac{2}{3}.(x-5).(x-5).(x-5).\left(x+\frac{1}{4}\right).(x-i).(x+i).\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=5 \ \rightarrow \text{ multiplicidad 3}\\ \alpha_2=-\frac{1}{4} \ \rightarrow \text{ multiplicidad 2}\\ \alpha_3=i \ \rightarrow \text{ multiplicidad 1}\\ \alpha_4=-i \ \rightarrow \text{ multiplicidad 1}\end{array}\right\} \Longrightarrow grP(x)=3+2+1+1=7$$

<u>**Obs**</u>:
$P(x)=x^2+1$ no tiene raíces reales
Raíces complejas $\alpha_1=i \ \wedge \ \alpha_2=-i \ \Longrightarrow \ P(x)=(x-i).(x+i)$
$P(x)$ no puede descomponerse en $\mathbb{R}$ pero si en $\mathbb{C}$.

"Todo polinomio de grado n se puede descomponer en $\mathbb{C}$. Se dice que los números complejos son <u>**Algebraicamente Cerrados**</u>"

- **Resolución de Ecuaciones Algebraicas**

La búsqueda de raíces fue un problema que preocupo a los matemáticos desde hace mucho tiempo. El matemático noruego Abel probó que no existe un método general de resolución para las ecuaciones de grado ≥ 5, para las cuales se trabaja con casos particulares o con métodos de aproximación de raíces.

- **Ecuación general de 1° grado**

$$a_1x+a_0=0 \ \text{ con } \ a_1\neq 0 \Longrightarrow \quad \alpha=-\frac{a_0}{a_1}$$

- **Ecuación general de 2° grado**

$ax^2+bx+c=0$ con a,b,c nros reales o complejos y $a\neq 0$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

donde
- $\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$
- $\alpha_1.\alpha_2=\frac{c}{a}$

si a,b,c nros reales:

$\Delta=b^2-4.a.c \ \longrightarrow$ discriminante

- ✓ Si $\Delta>0 \longrightarrow$ se tiene 2 raíces reales distintas
- ✓ Si $\Delta=0 \longrightarrow$ se tiene 1 raíz real doble
- ✓ Si $\Delta<0 \longrightarrow$ se tiene 2 raíces complejas conjugadas

- **Ecuaciones particulares de grado $n > 2$**

Existen muchos métodos de resolución de ecuaciones particulares. Estudiaremos solamente dos de ellos.

1) $a_n x^n + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$

n raíces $\longrightarrow$ $\alpha = \sqrt[n]{-\frac{a_0}{a_n}}$

2) Ecuaciones bicuadradas

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$, a, b, c números reales o complejos, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Ejemplo

$$5x^8 + 3x^4 - 1 = 0$$

Método de resolución

i. **Cambio de variable**

$$\boldsymbol{u} = x^n \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}^2 = x^{2n}$$

$$a\boldsymbol{u}^2 + b\boldsymbol{u} + c = 0$$

ii. **Resolución de la ecuación de 2° grado**

$$au^2 + bu + c = 0 \begin{cases} \nearrow u_1 \\ \searrow u_2 \end{cases}$$

iii. **Reemplazo en la variable original**

$$u_1 = x^n \quad \wedge \quad u_2 = x^n$$

$$x = \sqrt[n]{u_1} \qquad x = \sqrt[n]{u_2}$$

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + x^2 - 2 = 0 \\ u = x^2 \Rightarrow u^2 = x^4 \\ u^2 + u - 2 = 0 \\ u_1 = 1 \wedge u_2 = -2 \end{array}\right\}$$

$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$\alpha_1 = 1 \wedge \alpha_2 = -1$$

$$x^2 = -2$$
$$x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}.\sqrt{-1}$$
$$\alpha_3 = \sqrt{2}i \wedge \alpha_4 = -\sqrt{2}i$$

Polinomios a coeficientes reales

- **Raíces complejas de un polinomio a coeficientes reales**

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$; $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad con \ a_i \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{C}$

Teorema:

Si el número complejo α es raíz del polinomio a coeficientes reales $P(x)$ también el complejo $\bar{\alpha}$ (conjugado) es raíz de $P(x)$

Demostración:

Probar: $P(\bar{\alpha}) = 0$

$$P(\bar{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\bar{\alpha})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

$\therefore \ P(\bar{\alpha}) = 0$

Por lo tanto $\bar{\alpha}$ es cero de $P(x)$.

Observación:

1) Si un polinomio a coeficientes reales tiene alguna raíz compleja siempre está su conjugada como raíz, por lo tanto tiene un número par de raíces complejas.
2) Si un polinomio a coeficientes reales es de grado impar observamos que debe tener alguna raíz real.

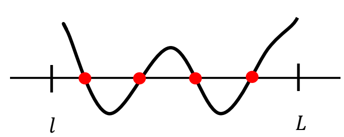
- **Búsqueda de raíces reales en polinomios a coeficientes reales**

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad con \ a_i \in \mathbb{R}$

<u>Etapas en la búsqueda de raíces reales</u>

1) **Acotación**

Se determina el intervalo real (l, L) que contenga a todas las raíces reales del polinomio $P(x)$.



Teorema de Laguerre

Sea L un número real positivo, $L > 0$

Si en la división $P(x)/(x-L)$ todos los coeficientes del polinomio cociente y el resto R son reales positivos, entonces L es cota superior de las raíces de $P(x)$.
P(x)=C(x)(x-L)+R

¿Existirá alguna raíz $\alpha > L$?

$$P(\boldsymbol{\alpha}) = \underbrace{C(\boldsymbol{\alpha})}_{>0} . \underbrace{(\boldsymbol{\alpha} - L)}_{>0} + \underbrace{R}_{>0} \quad > 0 \implies \boldsymbol{\alpha} \;\; no\ puede\ ser\ raiz$$

Forma Práctica de Trabajo

i) El teorema anterior da el método para hallar la cota superior L

$$\begin{array}{c|cccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \;\; a_0 \\ L & \downarrow & & & \\ \hline & a_n & & & \end{array}$$

ii) Si $a_n < 0$ entonces se trabaja con $-P(x) = \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i$ que tiene las mismas raíces que $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

iii) El teorema anterior también nos permite determinar la cota inferior para las raíces reales aplicando la siguiente sustitución.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \qquad x = -\boldsymbol{u} \implies Q(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-\boldsymbol{u})^i$$

Se prueba que $Q(u)$ tiene como raíces los valores opuestos de las raíces de $P(x)$.
Aplicando Laguerre obtenemos una cota superior para $Q(u)$, $\tilde{L}$ y haremos $l = -\tilde{L}$, luego l es cota inferior de las raíces de $P(x)$.

Ejemplo

$P(x) = 8x^3 + 22x^2 - 7x - 3$

Cota superior

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 22 & -7 & -3 \\ 1 & & 8 & 30 & 23 \\ \hline & 8 & 30 & 23 & 20 \end{array} > 0 \implies L = 1$$

Cota Superior

$\therefore (l\,, L) = (-4, 1)$

Es el intervalo de acotación.

Cota inferior

$x = -u \implies Q(u) = -8u^3 + 22u^2 + 7u - 3$

Debido a que $a_n < 0$ se trabaja con $-Q(u)$

$-Q(u) = 8u^3 - 22u^2 - 7u + 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -22 & -7 & 3 \\ 1 & & 8 & -14 & \\ \hline & 8 & -14 & & \end{array} < 0 \implies \text{no puede ser cota}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -22 & -7 & 3 \\ 4 & & 32 & 40 & 132 \\ \hline & 8 & 10 & 33 & 129 \end{array} > 0 \implies \tilde{L} = 4 \implies l = -4$$

Cota Inferior

2) **Determinación**: de raíces enteras o fraccionarias.
Esta etapa es posible si el polinomio tiene coeficientes enteros

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ que tiene coeficientes enteros

Teorema de Gauss

Si la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de $P(x)$, entonces p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n .

Ejemplo

$P(x) = 8x^3 + 22x^2 - 7x - 3$ posibles p: $\pm 1, \pm 3$

Term. Indep. $= -3$ posibles q: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Coef. Direct. $= 8$ posibles raíces $\frac{p}{q}: \pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}$

- ✓ Se conocen los valores $\frac{p}{q}$ que están en el intervalo de acotación (l, L)
- ✓ Se prueba con cada uno de ellos hasta obtener las raíces

Se obtiene que $\alpha_1 = -3$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}$; $\alpha_3 = -\frac{1}{4}$

Observaciones:

- ✓ No todas las posibles fracciones $\frac{p}{q}$ son raíz de $P(x)$
- ✓ Si $P(x)$tiene coeficientes fraccionarios, se multiplica $P(x)$ por un múltiplo común de los denominadores a las fracciones coeficientes:
  $k.P(x) = Q(x)$
  El nuevo polinomio $Q(x)$ tiene coeficientes enteros y las mismas raíces que $P(x)$.

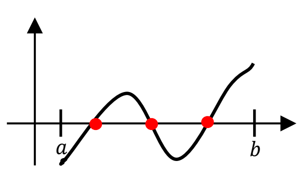
3) **Separación**: En el intervalo de acotación se obtienen subintervalos que contengan solo una raíz.

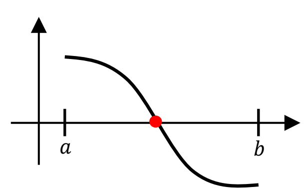
Conocido el intervalo de acotación (l, L) se desea obtener subintervalos que contengan una sola raíz.
Sabemos que la fracción polinómicas es continua, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Bolzano para las funciones continuas.

Teorema de Bolzano

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ y $[a, b]$ intervalo real

Si $signoP(a) \neq signoP(b)$ entonces existe $\alpha \in (a, b)$ tal que $P(\alpha) = 0$ (siendo α raíz de $P(x)$)





Obs:
El objetivo al aplicar Bolzano es detectar subintervalos que presenten cambios de signo.

Nota:

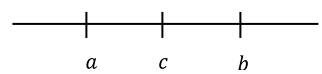
1) Bolzano no detecta raíces de multiplicidad par ya que no se producen cambios de signo.
2) Es muy difícil detectar cambios de signo cuando las raíces son muy próximas. Se necesita un poco de suerte para separar todas las raíces reales de un polinomio aplicando Bolzano.

4) **Aproximación**: de raíces reales. Veremos tres métodos iterativos de aproximación de raíces.

Sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ y sea (a, b) algún intervalo real que contiene sólo una raíz de $P(x)$.

I. Método Dicotómico o de Bisección

$signoP(a) \neq signoP(b)$



$c = \frac{a+b}{2} \longrightarrow signoP(c)$

Si $signoP(c) = signoP(a) \Longrightarrow$ cambio $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{c}$

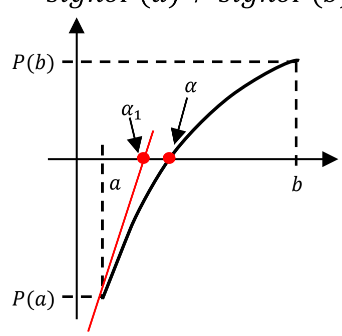
Si $signoP(c) = signoP(b) \Longrightarrow$ cambio $\boldsymbol{b}$ por $\boldsymbol{c}$

Luego de varias aplicaciones sucesivas de método se obtiene un intervalo (a_h, b_k) en el que se suponen h cambios para a y k cambios para b, donde $\alpha \in (a_h, b_k)$.

$$\alpha^* = \frac{a + b_c}{2} \qquad , \qquad |\alpha - \alpha^*| < \frac{1}{2}(b_k - a_h)$$

II. Método de Newton-Raphsow

$signoP(a) \neq signoP(b)$



La función polinómica P es continua , la derivada P''(derivada segunda) es continua y según la concavidad de la curva tiene signo determinado en (a, b)

En el grafico $signoP''(\alpha) < 0 \ \forall \alpha \in (a, b)$

- Se elige un extremo de trabajo comparando los $signoP(a)$ y $signoP(b)$ con $signoP''$. Se elige el extremo de igual signo.
- Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva en el extremo elegido. En nuestro caso $(a, P(a))$.

$$y - P(a) = P'(a).(x - a)$$

- La intersección de la recta tangente con el eje x es la primera aproximación del valor de la raíz buscada.

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{P(a)}{P'(a)} + a \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)}$$

- El procedimiento se reitera cambiando $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{\alpha_1}$

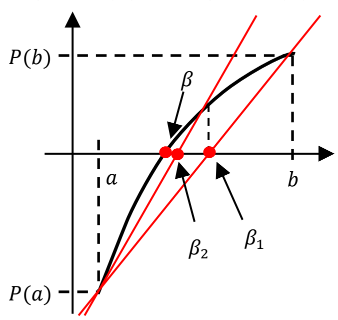
$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{P(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)}$$

En general

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{P(\alpha_{n-1})}{P'(\alpha_{n-1})}$$

III. Método de la cuerda

$$signoP(a) \neq signoP(b)$$



- Se considera la recta que pasa por los puntos $(a, P(a))$ y $(b, P(b))$

$$y - P(b) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}(x - b)$$

- La primera aproximación es el valor dado por la intersección de la recta secante con el eje x

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = b - \frac{P(b)}{\frac{P(b) - P(a)}{b - a}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_1 = b - \frac{P(b)}{\frac{P(b) - P(a)}{b - a}}$$

En general

$$\beta_n = \beta_{n-1} - \frac{P(\beta_{n-1})}{\frac{P(\beta_{n-1}) - P(a)}{\beta_{n-1} - a}}$$