UNSE –FCEyT

ALGEBRA I - ALGEBRA

GUÍA PRÁCTICA Nº 6 – 2020

TEMA: POLINOMIOS

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Indique si las siguientes expresiones en la variable x son polinomios

a) $P(x) = x^3 + x^2 - (5-2i)x + 3 + 6i$, es un polinomio $\mathbb{C}[x]$

b) $Q(x) = -4x^{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{x^2} - x^3 - 1$, no es un polinomio, pues los exponentes no pertenecen a los Naturales.

c) $R(x) = x^3 + \frac{3}{x^2} - 5x^4 - 2$, no es un polinomio, pues los exponentes no pertenecen a los Naturales.

d) $S(x) = 2x^{-4} - 3x^2 - 2\pi$, no es un polinomio, pues los exponentes no pertenecen a los Naturales.

2.- Escribe:

i) Un polinomio de grado 4, con coeficientes complejos.

$$R(x) = -ix^4 + 4x^3 + (3-i)x^2 - 9x + 5i$$

ii) Un polinomio de grado 5, completo, ordenado y con coeficientes reales.

$$S(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 8x^2 + x + 9$$

3.- Dado el polinomio $P(x) = (x+3)(x^2 - x - 6)$. Determine cuál de los siguientes polinomios es igual al polinomio dado

a) $Q(x) = (x-3)^2.(x+3)$ **b)** $T(x) = (x+2).(x^2-9)$

La respuesta es el **b)**, pues si lo desarrollamos resulta:

$$T(x) = (x+2).\left(x^2 - 9\right) =^{1} (x+2).(x-3).(x+3) =^{2} \left(x^2 - 3x + 2x - 6\right).(x+3) =$$

$$= \left(x^2 - x - 6\right).(x+3) =^{3} (x+3).(x^2 - x - 6)$$

Referencias

1. Diferencia de cuadrados: $(x^2 - 9) = (x^2 - 3^2) = (x-3).(x+3)$

2. Multiplicando $(x+2).(x-3)$

3. Por propiedad conmutativa de la multiplicación.

4.- i)-Halle el valor del polinomio para $x = -1$

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 7(-1)^2 - 1 + 6 = 1 - (-1) - 7.1 - 1 + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

$$\therefore P(-1) = 0$$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$Q(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$

$$\therefore Q(-1) = 8$$

c) $S(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$S(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) = -1 - 3 - 2 = -6$

$$\therefore S(-1) = -6$$

ii)- Verifique los valores obtenidos en i) aplicando el teorema del resto.

Por Teorema del Resto sabemos que: $\boldsymbol{P(\alpha) = R(x)}$

Haremos uso de la regla de Ruffini, dividiendo cada uno de los polinomios por el polinomio $(\boldsymbol{x - \alpha})$, donde $\boldsymbol{\alpha = -1}$, por lo que resulta $(\boldsymbol{x + 1})$

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$P(x) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 2 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow R(x) = 0$$

$$\therefore por\ el\ Teorema\ del\ Resto\ se\ verifica\ que\ P(-1) = 0$$

b) $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$Q(x) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \boxed{8} \end{array} \Rightarrow R(x) = 8$$

$$\therefore por\ el\ Teorema\ del\ Resto\ se\ verifica\ que\ Q(-1) = 8$$

c) $\boldsymbol{S(x) = x^3 - 3x^2 + 2x}$

$\boldsymbol{S(x): (x+1)}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \boxed{-6} \end{array} \Rightarrow R(x) = -6$$

$\therefore por\ el\ Teorema\ del\ Resto\ se\ verifica\ que\ S(-1) = -6$

5.- Sean los polinomios:

$\boldsymbol{P(x) = -2x^3 + x^2 - 3}$ $\boldsymbol{Q(x) = 2x^4 - x^2 + x}$

$\boldsymbol{S(x) = x^3 - x + 5}$ Escriba aquí la ecuación.

Calcule:

a) $\boldsymbol{P(2) + Q(1).S(-1)}$ **b)** $\boldsymbol{S(x): (x-1) - 2P(x)}$

a) $\boldsymbol{P(2) + Q(1).S(-1) =}$

$= -15 + 2.5 - (4 + 2i) = -15 + 10 = \boldsymbol{-5}$

C.A

$\boldsymbol{P(2)} = (-2).2^3 + 2^2 - 3 = (-2).8 + 4 - 3 = -16 + 4 - 3 = -15$

$\boldsymbol{Q(1)} = 2.1^4 - 1^2 + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$

$\boldsymbol{S(-1)} = (-1)^3 - (-1) + 5 = -1 + 1 + 5 = 5$

b) $\boldsymbol{P(x): (x+1) - 2S(x) =}$

$= -2x^2 + 3x - 3 - 2(x^3 - x + 3) = -2x^2 + 3x - 3 - 2x^3 + 2x - 6 =$

$= \boldsymbol{-2x^3 - 2x^2 + 5x - 6}$

C.A

$\boldsymbol{P(x): (x+1)}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & & 2 & -3 & 3 \\ \hline & -2 & 3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x): (x+1) = -2x^2 + 3x - 3 \quad pues\ R(x) = 0$

$C(x) = -2x^2 + 3x - 3$

6.- Resuelva las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^2 + ix + 2 = 0}$

*Para resolver las ecuaciones de 2° grado haremos uso de la fórmula:

$$\boxed{x_1,x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}, \quad \boldsymbol{a = 1}, \quad \boldsymbol{b = 2}, \quad \boldsymbol{c = -8}$

$$x_1,x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-2+6}{2} \ \wedge\ x_2 = \frac{-2-6}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \ \wedge\ x_2 = -4$$

Luego $\boldsymbol{x = 2}$ y $\boldsymbol{x = -4}$ son las soluciones de la ecuación de 2° grado dada.

$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{x^2 + ix + 2 = 0}, \quad \boldsymbol{a = 1}, \quad \boldsymbol{b = i}, \quad \boldsymbol{c = 2}$

$$x_1,x_2 = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{-i \pm \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{9.(-1)}}{2} =$$

$$= \frac{-i \pm \sqrt{9}.\sqrt{(-1)}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-i+3i}{2} \ \wedge\ x_2 = \frac{-i-3i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2i}{2} \ \wedge\ x_2 = \frac{-4i}{2} \Rightarrow x_1 = \mathrm{i} \ \wedge\ x_2 = -2\mathrm{i}$$

Luego $\boldsymbol{x = i}$ y $\boldsymbol{x = -2i}$ son las soluciones de la ecuación de 2° grado dada.

7.- Halle todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

i) $\boldsymbol{x^4 - (1 + i) = 0}$ **ii)** $\boldsymbol{64x^3 + 64 = 0}$

$\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{x^4 - (1+i) = 0} \Rightarrow x^4 = 1 + i \Rightarrow x = \sqrt[4]{1+i} \longrightarrow paso\ a\ forma\, polar$

$$x = \sqrt[4]{\left(\sqrt{2}/_{\frac{\pi}{4}}\right)} = \left(\sqrt[4]{\sqrt{2}}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}\right)$$

C.A.

$Z = 1 + i$

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$

*Para k=0

$$x_1 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2.0.\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\pi}{16}}\right)$$

*Para k=1

$$x_2 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2.1.\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{9}{16}\pi}\right)$$

*Para k=2

$$x_3 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2.2.\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{17}{16}\pi}\right)$$

*Para k=3

$$x_4 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\frac{\pi}{4}+2.3.\pi}{4}}\right) = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{25}{16}\pi}\right)$$

Luego las raíces de la ecuación dada son:

$$x_1 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{\pi}{16}}\right), \quad x_2 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{9}{16}\pi}\right), \quad x_3 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{17}{16}\pi}\right), \quad x_4 = \left(\sqrt[8]{2}/_{\frac{25}{16}\pi}\right)$$

$\boldsymbol{ii)\ 64x^3 + 64 = 0} \Rightarrow 64x^3 = -64 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \longrightarrow paso\ a\ forma\ polar$

$$x = \sqrt[3]{\left(1/_{\pi}\right)} = \left(\sqrt[3]{1}/_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}\right) = \left(1/_{\frac{\pi+2k\pi}{3}}\right)$$

C.A.

$Z = -1$

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0} = 1; \quad \alpha = 180° = \pi$

*Para k=0

$$x_1 = \left(1/_{\frac{\pi+2.0.\pi}{3}}\right) = \left(1/_{\frac{\pi}{3}}\right)$$

*Para k=1

$$x_2 = \left(1/_{\frac{\pi+2.1.\pi}{3}}\right) = \left(1/_{\pi}\right)$$

*Para k=2

$$x_3 = \left(1 \Big/ \frac{\pi + 2.2.\pi}{3} \right) = \left(1 \Big/ \frac{5}{3}\pi \right)$$

Luego las raíces de la ecuación dada son:

$$x_1 = \left(1 \Big/ \frac{\pi}{3} \right), \qquad x_2 = \left(1/\pi \right), \qquad x_3 = \left(1 \Big/ \frac{5}{3}\pi \right)$$

8.- Determine una ecuación de grado mínimo, cuyas raíces sean los siguientes pares de números:

a) $\boldsymbol{\alpha = 3 \;;\; \beta = -1}$ **b)** $\boldsymbol{\alpha = 1 - i \;;\; \beta = 1 + i}$

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{\alpha = 3 \;;\; \beta = -1}$

$P(x) = a(x-3)(x+1) = a(x^2 + x - 3x - 3) = a(x^2 - 2x - 3)$

Para $a = 1$ tenemos:

$P(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $\boldsymbol{\alpha = 1 - i \;;\; \beta = 1 + i}$

$S(x) = a\big(x - (1-i)\big)\big(x - (1+i)\big) = a\big(x^2 - x(1+i) - (1-i)x + (1-i)(1+i)\big) =$

$= a(x^2 - x - ix - x + ix + 1 + i - i + 1) = a(x^2 - 2x + 2)$

Para $a = 3$ tenemos:

$S(x) = 3(x^2 - 2x + 2) \Rightarrow S(x) = 3x^2 - 6x + 6$

9.- Resuelva las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $\boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 10x^2 + 9 = 0}$

c) $\boldsymbol{7(t+2)^4 + 4(t+2)^2 - 3 = 0}$

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$

*****Llamamos $x^2 = u$, si elevamos ambos miembros al cuadrado resulta $x^4 = u^2$

*Reemplazando en la ecuación original resulta:

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 6 = 0$

*Como es una ecuación de 2° grado, aplicamos la fórmula:

$$u_1, u_2 = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{5+1}{2} \wedge u_2 = \frac{5-1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{u_1 = 3 \wedge u_2 = 2}$$

*Como $x^2 = u$

- Si $u = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = \sqrt{3} \wedge x_2 = -\sqrt{3}}$
- Si $u = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_3 = \sqrt{2} \wedge x_4 = -\sqrt{2}}$

Luego $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$, son las soluciones de la ecuación bicuadrada $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

b) $\boldsymbol{x^4 - 10x^2 + 9 = 0}$

***Llamamos** $x^2 = u$, si elevamos ambos miembros al cuadrado resulta $x^4 = u^2$

*Reemplazando en la ecuación original resulta:

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$

*Como es una ecuación de 2° grado, aplicamos la fórmula:

$$u_1, u_2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4.1.9}}{2.1} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{10+8}{2} \wedge u_2 = \frac{10-8}{2} \Rightarrow \boldsymbol{u_1 = 9 \wedge u_2 = 1}$$

*Como $x^2 = u$

- Si $u = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = 3 \wedge x_2 = -3}$
- Si $u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow$ $\boldsymbol{x_3 = 1 \wedge x_4 = -1}$

Luego $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, son las soluciones de la ecuación bicuadrada $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

c) $\boldsymbol{7(t+2)^4 + 4(t+2)^2 - 3 = 0}$

***Llamamos** $(t+2)^2 = u$, si elevamos ambos miembros al cuadrado resulta $(t+2)^4 = u^2$

*Reemplazando en la ecuación original resulta:

$7(t+2)^4 + 4(t+2)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 7u^2 + 4u - 3 = 0$

*Como es una ecuación de 2° grado, aplicamos la fórmula:

$$u_1,u_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.7.(-3)}}{2.7} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{14} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{14} = \frac{-4 \pm 10}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{-4+10}{14} \wedge u_2 = \frac{-4-10}{14} \Rightarrow \boldsymbol{u_1 = \frac{3}{7} \wedge u_2 = -1}$$

*Como $(t+2)^2 = u$

- Si $u = \frac{3}{7} \Rightarrow (t+2)^2 = \frac{3}{7} \Rightarrow t+2 = \pm\sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{3}{7}} - 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boldsymbol{t_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} - 2 \wedge t_2 = -\sqrt{\frac{3}{7}} - 2}$

- Si $u = -1 \Rightarrow (t+2)^2 = -1 \Rightarrow t+2 = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow t+2 = \pm i \Rightarrow t = \pm i - 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boldsymbol{t_3 = -2 + i \wedge x_4 = -2 - i}$

Luego $t_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} - 2$, $t_2 = -\sqrt{\frac{3}{7}} - 2$, $t_3 = -2 + i$, $t_4 = -2 - i$, son las soluciones de la ecuación bicuadrada $7(t+2)^4 + 4(t+2)^2 - 3 = 0$

10.- Determine la multiplicidad, como raíz de:

a) 3 en $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

b) −1 en $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

*Para determinar la multiplicidad de la raíz, debemos aplicar Ruffini reiteradas veces:

a) 3 en $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 3 & 9 \\ 3 & & 3 & -6 & -9 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Luego la raíz $\boldsymbol{\alpha = 3}$ tiene multiplicidad 2

b) -1 en $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -1 & -5 & 1 & 8 & 4 \\
-1 & & -1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 3 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 & 4 & \boxed{0} & \\
-1 & & -1 & 4 & -4 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

Luego la raíz $\boldsymbol{\alpha = -1}$ tiene multiplicidad 3

11.- Determine un polinomio de segundo grado, tal que:

a) $\boldsymbol{P(0) = 8}$ **;** $\boldsymbol{P(-1) = 10}$ **;** $\boldsymbol{P(3) = -10}$

*Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$

*Sabemos que $P(0) = 8$, calculamos $P(0)$ e igualamos a 8:

$P(0) = a.0 + b.0 + c = 8 \Rightarrow \boldsymbol{c = 8}$

*Ahora tenemos que $P(x) = ax^2 + bx + \boldsymbol{8}$

*Sabemos que $P(-1) = 10$; $P(3) = -10$, calculamos $P(-1)$ y $P(3)$ e igualamos a 10 y -10 respectivamente:

$$
\begin{array}{l}
P(-1) = a.(-1)^2 + b.(-1) + 8 = 10 \Rightarrow a - b + 8 = 10 \\
P(3) = a.3^2 + b.3 + 8 = -10 \Rightarrow 9a + 3b + 8 = -10
\end{array}
\Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 9a + 3b = -18 \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} a = 2 + b \\ 9a + 3b = -18 \end{cases} \Rightarrow 9(2+b) + 3b = -18 \Rightarrow 18 + 9b + 3b = -18 \Rightarrow 12b = -36 \Rightarrow \boldsymbol{b = -3}
$$

Luego reemplazando el valor de b en a resulta: $a = 2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{a = -1}$

$$\therefore \boldsymbol{P(x) = -x^2 - 3x + 8}$$

b) $\boldsymbol{P(0) = 6}$ **;** $\boldsymbol{P(1) = 4}$ **;** $\boldsymbol{P(-2) = -20}$

*Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$

*Sabemos que $P(0) = 6$, calculamos $P(0)$ e igualamos a 6:

$P(0) = a.0 + b.0 + c = 6 \Rightarrow \boldsymbol{c = 6}$

*Ahora tenemos que $P(x) = ax^2 + bx + \mathbf{6}$

*Sabemos que $P(1) = 4$; $P(-2) = -20$, calculamos $P(1)$ y $P(-2)$ e igualamos a 4 y -20 respectivamente:

$$\begin{array}{r} P(1) = a.1^2 + b.1 + 6 = 4 \Rightarrow a + b + 6 = 4 \\ P(-2) = a.(-2)^2 + b.(-2) + 6 = -20 \Rightarrow 4a - 2b + 6 = -20 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - 2b = -26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 - b \\ 4a - 2b = -26 \end{cases} \Rightarrow 4(-2 - b) - 2b = -26 \Rightarrow -8 - 4b - 2b = -26 \Rightarrow -6b = -18 \Rightarrow \boldsymbol{b = 3}$$

Luego, reemplazando el valor de b en a ,resulta: $a = -2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{a = -5}$

$$\therefore \boldsymbol{P(x) = -5x^2 + 3x + 6}$$

12.- Construya un polinomio de grado mínimo cuyas ecuaciones respectivas cumplen con las siguientes condiciones:

a) Raíces simples: $\boldsymbol{1, 3i, -3i} \quad \wedge \quad \boldsymbol{P(0) = -9}$

Como tenemos 3 raíces, el grado del polinomio será de grado 3:

$P(x) = \mathrm{a}_3 x^3 + \mathrm{a}_2 x^2 + \mathrm{a}_1 x + a_0$

En forma factorizada sería: $P(x) = \mathrm{a}_3 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$, reemplazando el valor de las raíces:

$P(x) = \mathrm{a}_3 (x - 1)(x - 3i)(x + 3i)$

*Sabemos que $P(0) = -9$, calculamos $P(0)$ e igualamos a -9:

$P(0) = \mathrm{a}_3 (0 - 1)(0 - 3i)(0 + 3i) = \mathrm{a}_3 (-1)(-3i)3i = \mathrm{a}_3.(-9) = -9 \Rightarrow \mathbf{a_3 = 1}$

*Reemplazamos y desarrollamos $P(x)$

$P(x) = 1.(x - 1)(x - 3i)(x + 3i) = (x - 1)(x^2 + 3ix - 3ix + 9) = (x - 1)(x^2 + 9) =$

$= x^3 + 9x - x^2 - 9$, Luego $\boldsymbol{P(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9}$

b) Raíz simple: 1 ; raíz doble : $\boldsymbol{-i} \quad \wedge \quad \boldsymbol{P(-1) = 4i}$ ¿es un polinomio a coeficientes reales?

Como tenemos 3 raíces, el grado del polinomio será de grado 3:

$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

En forma factorizada sería: $P(x) = a_3(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)^2$, reemplazando:

$P(x) = a_3(x-1)(x+i)^2$

*Sabemos que $P(-1) = 4i$, calculamos $P(-1)$ e igualamos a $4i$:

$P(-1) = a_3(-1-1)(-1+i)^2 = a_3(-2)(1-2i-1) = 4ia_3 = 4i \Rightarrow \mathbf{a_3 = 1}$

*Reemplazamos y desarrollamos $P(x)$

$P(x) = 1.(x-1)(x+i)^2 = (x-1)(x^2+2ix-1) = x^3 + 2ix^2 - x - x^2 - 2ix + 1 =$

$= x^3 + (-1+2i)x^2 + (-1-2i)x + 1$,Luego $\boldsymbol{P(x) = x^3 + (-1+2i)x^2 + (-1-2i)x + 1}$

No es un polinomio a coeficientes reales, pues sus coeficientes pertenecen al conjunto de los números complejos.

13.- Halle el polinomio Mónico a coeficientes reales de grado mínimo que entre sus raíces tenga:

a) $\boldsymbol{-1, i, 1-i}$ **b)** $\boldsymbol{2, -i, 1}$

Al pedirnos un polinomio Mónico, el coeficiente director es **"1"**; además al ser un polinomio a coeficientes reales, si existe una raíz compleja, su conjugada también es raíz.

$\boldsymbol{a}) \ -1, i, 1-i, \boldsymbol{-i, 1+i}$

Como hay 5 raíces, el grado del polinomio será 5; además es Mónico, en forma factorizada nos quedaría:

$P(x) = (x+1)(x-i)(x+i)\big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big) = (x+1)(x^2+1)(x^2-2x+2) =$

$= (x^3+x^2+x+1)(x^2-2x+2) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x^3 - 2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 2 =$

$= x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2$, Luego $\boldsymbol{P(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2}$

C.A

$* \ (x-i)(x+i) = x^2 + ix - ix - i^2 = x^2 + 1$

$* \ \big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big) = x^2 - (1+i)x - (1-i)x + (1-i)(1+i) =$

$= x^2 + (-1-i-1+i)x + (1+i-i+1) = x^2 - 2x + 2$

b) $2, -i, 1, \boldsymbol{i}$

Como hay 4 raíces, el grado del polinomio será 4; además es Mónico, en forma factorizada nos quedaría:

$P(x) = (x-2)(x-1)(x-i)(x+i) = (x^2-3x+2)(x^2+1) =$

$= x^4 + x^2 - 3x^3 - 3x + 2x^2 + 2 = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Luego $\boldsymbol{P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$

C.A

$* \ (x-2)(x-1) = x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$

$* \ (x-i)(x+i) = x^2 + ix - ix - i^2 = x^2 + 1$

14.- Determine el intervalo en el cual se encuentran las raíces reales, calcule las raíces racionales de los siguientes polinomios y realice la descomposición factorial;

a) $\boldsymbol{P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 12x^2 - 3x + 12}$

c) $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1}$ **d)** $\boldsymbol{P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 35x^2 - 25x + 12}$

Procedimiento a seguir:

1. Buscamos el intervalo de acotación, definido por (l, L), donde l es la cota inferior y L la cota superior, para ello aplicamos el **Teorema de Laguerre.**

   - Para determinar la cota superior (L) trabajamos con $P(x)$, aplicamos Ruffini para efectuar la división $P(x): L$, donde el número L por el cual dividimos al polinomio, debe lograr que los coeficientes del cociente C(x) y el resto sean positivos; además se debe cumplir que sea el mínimo de los números que cumplen con la condición antes mencionada.

   En el caso de que $a_n < 0$, entonces se trabaja con $-P(x) = \sum_{i=0}^{n} -a_i x^i$ que tiene las mismas raíces que $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

- Para determinar la cota inferior (l) , aplicamos la siguiente sustitución.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \qquad x = -\boldsymbol{u} \implies Q(-\boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (-\boldsymbol{u})^i$$

Trabajamos con $Q(-u)$, aplicamos Ruffini para efectuar la división $Q(-u): l'$, donde el número l' por el cual dividimos al polinomio, debe lograr que los coeficientes del cociente C(x) y el resto sean positivos; además se debe cumplir que sea el mínimo de los números que cumplen con la condición antes mencionada. Luego la cota inferior $l = -l'$

2. Determinación de las raíces enteras o fraccionarias. Esta etapa es posible si el polinomio tiene coeficientes enteros.

   Para determinar las raíces enteras o fraccionarias se debe:
   - Identificar el valor del coeficiente director y el valor del término independiente.
   - Debemos hallar los divisores del coeficiente director (a los cuales llamaremos **q**) y los divisores del término independiente (a los cuales llamaremos **p**).
   - Determinar los posibles valores de $\frac{p}{q}$.
   - Se determinar los valores $\frac{p}{q}$ que están en el intervalo de acotación (l, L)
   - Se prueba, aplicando Ruffini, con cada uno de ellos hasta obtener las raíces.

3. Se realiza la descomposición factorial.

$\boldsymbol{a)\ P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2}$

1. Buscamos el intervalo de acotación (l, L):

*Para la cota superior trabajamos con $P(x)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & & 4 & 14 & 20 & 34 \\ \hline & 2 & 7 & 10 & 17 & \boxed{36} \end{array} \rightarrow \textit{como todos los coeficientes son} > 0,\ \boldsymbol{L = 2}\ \textit{es cota superior}$$

*Para la cota inferior trabajamos con $Q(-u)$

$Q(-u) = 2(-u)^4 + 3(-u)^3 - 4(-u)^2 - 3(-u) + 2$

$Q(-u) = 2u^4 - 3u^3 - 4u^2 + 3u + 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & -4 & 3 & 2 \\ 3 & & 6 & 9 & 15 & 54 \\ \hline & 2 & 3 & 5 & 18 & \boxed{56} \end{array} \rightarrow \textit{como todos los coeficientes son} > 0,\ \boldsymbol{l' = 3}$$

$como\ l = -l' \Rightarrow \boldsymbol{l = -3}\ es\ cota\ inferior\ de\ P(x)$

Luego el intervalo de acotación es $(\boldsymbol{-3, 2})$

2. Cálculo de las raíces enteras o fraccionarias:

   * El valor de a_n es 2 y de a_0 es 2

*Buscamos los divisores del coeficiente director y del término independiente, es decir, q y p respectivamente.

$$\text{Posibles } q: 1, -1, 2, -2$$

$$\text{Posibles } p: 1, -1, 2, -2$$

*Las posibles raices $\frac{p}{q}$:

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -2$$

*Como obtuvimos el intervalo de acotación (-3,2), eliminamos los valores $\frac{p}{q}$ que no pertenecen a dicho intervalo. Con lo que nos queda:

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2$$

*Ahora, aplicando Ruffini, dividimos P(x) entre las posibles raíces; si el resto es igual a 0, entonces el valor $\frac{p}{q}$ por el que se está dividiendo es una raíz. Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 3 & -4 & -3 & 2 \\
1 & & 2 & 5 & 1 & -2 \\
\hline
 & 2 & 5 & 1 & -2 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_1 = \mathbf{1\ es\ raíz} \\
-1 & & -2 & -3 & 2 & \\
\hline
 & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_2 = \mathbf{-1\ es\ raíz} & \\
-2 & & -4 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_3 = \mathbf{-2\ es\ raíz} & & \\
\frac{1}{2} & & 1 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_4 = \mathbf{\frac{1}{2}\ es\ raíz} & & &
\end{array}$$

Coeficiente director

Luego la descomposición factorial de $P(x)$ es:

$$\boldsymbol{P(x) = 2(x-1)(x+1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

b) $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 12x^2 - 3x + 12}$

1. Buscamos el intervalo de acotación (l, L):

*Para la cota superior trabajamos con $P(x)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -12 & -3 & 12 \\ 5 & & 15 & 15 & 60 \\ \hline & 3 & 3 & 12 & \boxed{72} \end{array} \rightarrow \textit{como todos los coeficientes son} > 0,\ \boldsymbol{L = 5}\ \textit{es cota superior}$$

*Para la cota inferior trabajamos con $Q(-u)$

$Q(-u) = 3(-u)^3 - 12(-u)^2 - 3(-u) + 12$

$Q(-u) = -3u^3 - 12u^2 + 3u + 12 \rightarrow$ Como el coeficiente director es negativo, trabajaremos con $-Q(-u)$:

$-Q(-u) = 3u^3 + 12u^2 - 3u - 12$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 12 & -3 & -12 \\ 2 & & 6 & 36 & 66 \\ \hline & 3 & 18 & 33 & \boxed{54} \end{array} \rightarrow \textit{como todos los coeficientes son} > 0,\ \boldsymbol{l' = 2}$$

$como\ l = -l' \Rightarrow \boldsymbol{l = -2}\ es\ cota\ inferior\ de\ P(x)$

Luego el intervalo de acotación es $(\mathbf{-2, 5})$

2. Cálculo de las raíces racionales:

*El valor de a_n es 3 y de a_0 es 12 en P(x)

*Buscamos los divisores de a_n y a_0, es decir q y p respectivamente.

$$posibles\ q: 1, -1, 3, -3$$

$$posibles\ p: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$$

*Las posibles raíces son los números $\frac{p}{q}$.

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 6, -6, 12, -12$$

*Como obtuvimos el intervalo de acotación (-2,5), eliminamos los valores de $\frac{p}{q}$ que no pertenecen a dicho intervalo.

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, 4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

*Ahora, dividimos P(x) entre las posibles raíces $\frac{p}{q}$, aplicando Ruffini; si el resto es igual a 0, entonces el valor $\frac{p}{q}$ por el que se está dividiendo es una raíz. Como el polinomio es de grado 3, tiene 3 raíces:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -12 & -3 & 12 \\
1 & & 3 & -9 & -12 \\
\hline
 & 3 & -9 & -12 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_1 = \mathbf{1}\ \boldsymbol{es\ raíz} \\
-1 & & -3 & 12 & \\
\hline
 & 3 & -12 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_2 = -\mathbf{1}\ \boldsymbol{es\ raíz} & \\
4 & & 12 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{0} \Rightarrow \alpha_3 = \mathbf{4}\ \boldsymbol{es\ raíz} & &
\end{array}
$$

Coeficiente director

Luego la descomposición factorial de $P(x)$ es:

$$\boldsymbol{P(x) = 3(x-1)(x+1)(x-4)}$$

c) $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - x^2 - 3x + 1}$

1. Buscamos el intervalo de acotación (l, L):

*Para la cota superior trabajamos con $P(x)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -1 & -3 & 1 \\
2 & & 6 & 10 & 14 \\
\hline
 & 3 & 5 & 7 & \boxed{15}
\end{array}
\rightarrow como\ todos\ los\ coeficientes\ son > 0,\ \boldsymbol{L = 2}\ es\ cota\ superior
$$

*Para la cota inferior trabajamos con $Q(-u)$

$Q(-u) = 3(-u)^3 - (-u)^2 - 3(-u) + 1$

$Q(-u) = -3u^3 - u^2 + 3u + 1 \rightarrow$ Como el coeficiente director es negativo, trabajaremos con $-Q(-u)$:

$-Q(-u) = 3u^3 + u^2 - 3u - 1$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 1 & -3 & -1 \\
2 & & 6 & 14 & 22 \\
\hline
 & 3 & 7 & 11 & \boxed{21}
\end{array}
\rightarrow como\ todos\ los\ coeficientes\ son > 0,\ \boldsymbol{l' = 2}
$$

$como\ l = -l' \Rightarrow \boldsymbol{l = -2}\ es\ cota\ inferior\ de\ P(x)$

Luego el intervalo de acotación es $(\mathbf{-2,2})$

2. Cálculo de las raíces enteras o fraccionarias
   *El valor de a_n es 3 y de a_0 es 1.

   *Buscamos los divisores de a_n y a_0, es decir q y p respectivamente

$$posibles\ q: 1, -1, 3, -3$$

$$posibles\ p: 1, -1$$

   *Las posibles raíces $\frac{p}{q}$:

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$

*Como obtuvimos el intervalo de acotación $(-2,2)$, eliminamos los $\frac{p}{q}$ que no pertenecen a dicho intervalo del conjunto. En este caso, todos los elementos del conjunto pertenecen al intervalo.

*Ahora, dividimos P(x) entre las posibles raíces aplicando Ruffini; si el resto es igual a 0, entonces es una raíz. Como el polinomio es de grado 3, tiene 3 raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -1 & -3 & 1 \\
1 & & 3 & 2 & -1 \\
\hline
 & 3 & 2 & -1 & \boxed{0} \\
-1 & & -3 & 1 & \\
\hline
 & 3 & -1 & \boxed{0} & \\
\frac{1}{3} & & 1 & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \mathbf{1\ es\ raíz}$

$\Rightarrow \alpha_2 = \mathbf{-1\ es\ raíz}$

$\Rightarrow \alpha_3 = \mathbf{\frac{1}{3}\ es\ raíz}$

Coeficiente director

Luego la descomposición factorial de $P(x)$ es:

$$\boldsymbol{P(x) = 3(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

$\boldsymbol{d)\ P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 35x^2 - 25x + 12}$

1. Buscamos el intervalo de acotación (l, L):

*Para la cota superior trabajamos con $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 5 & -35 & -25 & 12 \\
4 & & 12 & 108 & 292 & 1068 \\
\hline
 & 3 & 17 & 73 & 267 & \boxed{1080}
\end{array}$$

$\rightarrow$ *como todos los coeficientes son* > 0, $\mathbf{L = 4}$ *es cota superior*

*Para la cota inferior trabajamos con $Q(-u)$

$Q(-u) = 3(-u)^4 + 5(-u)^3 - 35(-u)^2 - 25(-u) + 12$

$Q(-u) = 3u^4 - 5u^3 - 35u^2 + 25u + 12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -5 & -35 & 25 & 12 \\ 5 & & 15 & 50 & 75 & 500 \\ \hline & 3 & 10 & 15 & 100 & \boxed{512} \end{array} \rightarrow como\ todos\ los\ coeficientes\ son > 0,\ \boldsymbol{l' = 5}$$

$como\ l = -l' \Rightarrow \boldsymbol{l = -5}\ es\ cota\ inferior$

Luego el intervalo de acotación es $(\mathbf{-5, 4})$

2. Cálculo de las raíces racionales:

*El valor de a_n es 3 y de a_0 es 12 .

*Buscamos los divisores de a_n y a_0, es decir, q y p respectivamente.

$$posibles\ q: 1, -1, 3, -3$$

$$posibles\ p: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$$

*Las posibles raíces se forman como $\frac{p}{q}$:

$$posibles\ \ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 6, -6, 12, -12$$

*Como obtuvimos el intervalo de acotación $(-5,4)$, eliminamos los $\frac{p}{q}$ que no pertenecen a dicho intervalo.

$$posibles\ raices\ \frac{p}{q}: 1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, -4, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$$

*Ahora, divido P(x) entre las posibles raíces aplicando Ruffini; si el resto es igual a 0, entonces es una raíz. Como el polinomio es de grado 4, tiene 4 raíces:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -35 & -25 & 12 \\ -1 & & -3 & -2 & 37 & -12 \\ \hline & 3 & 2 & -37 & 12 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \alpha_1 = \mathbf{-1}\ \boldsymbol{es\ raíz}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & & 9 & 33 & -12 \\ \hline & 3 & 11 & -4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \alpha_2 = \mathbf{3}\ \boldsymbol{es\ raíz}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -4 & & -12 & 4 \\ \hline & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \alpha_3 = \mathbf{-4}\ \boldsymbol{es\ raíz}$$

$$\begin{array}{r|rr} \frac{1}{3} & & 1 \\ \hline & 3 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \alpha_4 = \frac{1}{3}\ \boldsymbol{es\ raíz}$$

Coeficiente director

Luego la descomposición factorial de $P(x)$ es:

$$\boldsymbol{P(x) = 3(x+1)(x-3)(x+4)\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$