2021

ÁLGEBRA II (LSI – PI)

UNIDAD Nº 1

VECTORES EN EL PLANO R^2 Y VECTORES EN ESPACIO R^3

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO

UNIDAD Nº 1

VECTORES EN EL PLANO R^2 Y VECTORES EN EL ESPACIO R^3

1. 1 Introducción

Los vectores surgieron en el siglo XVII por la necesidad de desarrollar un medio para efectuar cálculos algebraicos directamente sobre objetos geométricos sin usar planos de coordenadas, fueron utilizados en mecánica para representar la velocidad, la fuerza, el desplazamiento entre otras magnitudes. Sin embargo, no tuvieron repercusión entre los matemáticos hasta el siglo XIX cuando Gauss usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano. Con Hamilton se inicia el estudio de los vectores, a él se le debe el nombre de ***vector*** debido a la creación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominados "cuaterniones", muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio. Actualmente, casi todas las áreas de la física son representadas por medio del lenguaje de los vectores.

Definición 1

Un **vector en el plano real** es un par ordenado (a, b) de números reales. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales se denota con $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$**,** es decir

$$\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \, / \, x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}$$

Un **vector en el espacio real** es una terna ordenada (a, b, c) de números reales. El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales se denota con $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$**,** es decir

$$\mathbb{R}^{\mathbf{3}} \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \, / \, x \in \mathbb{R}, \ \ y \in \mathbb{R} \ \wedge \ z \in \mathbb{R}\}$$

Los vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ se designan, por lo general, con las últimas letras del alfabeto castellano, tales como $u, \ v, \ w$.

Ejemplos

a) $u = (1{,}4), v = (-1{,}5), w = (3{,}0)$ son vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^2$.

b) $u = (3, -4{,}2), v = (1{,}0{,}0), w = \left(5, -13, \frac{2}{3}\right)$ son vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^3$.

Definición 2

El **vector nulo de** $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ es el par ordenado $(0, 0)$ y el **vector nulo de** $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ es la terna ordenada $(0, 0, 0)$. Estos vectores se expresan con el símbolo 0_v. El contexto hará claro a cuál de ellos nos referimos.

Definición 3

Geométricamente se define un vector como un segmento orientado. El vector $\overrightarrow{OP}$ tiene como origen el punto O y como extremo el punto P

Todo vector tiene como elementos: dirección, sentido y módulo.

La ***dirección*** del vector $\overrightarrow{OP}$ está dada por la dirección de la recta que lo contiene.

El ***sentido*** del vector $\overrightarrow{OP}$ está dado por la flecha.

El ***módulo*** del vector $\overrightarrow{OP}$ es la longitud del segmento $\overrightarrow{OP}$ y se denota entre barras dobles, esto es $\|\overrightarrow{OP}\|$.

El módulo de un vector es siempre positivo o nulo (es decir, es no negativo).

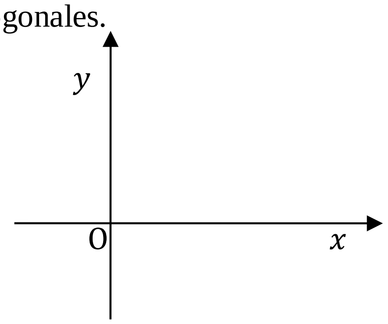
Nota

El vector nulo no tiene dirección ni sentido y su módulo es cero.

1.2 Representación geométrica

- En $\mathbb{R}^2$

La representación geométrica de los pares ordenados de números reales, más usual, es en el llamado ***Plano Cartesiano*** determinado por dos rectas reales (ejes) ortogonales, cuya intersección es un punto llamado origen. Éste es el conocido sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales.



Cada par ordenado de números reales (a, b) se identifica con un punto P de componentes a y b, esto es $P = (a, b)$, del plano cartesiano y recíprocamente cada punto P del plano cartesiano se identifica con un par ordenado de números reales. Es decir existe una correspondencia biyectiva entre los pares ordenados de números reales y los puntos del Plano Cartesiano.

En virtud de las Definiciones 1 y 3, cada par ordenado de números reales (a, b) es un vector $v = (a, b)$ con origen en $O = (0, 0)$ y extremo en el punto $P = (a, b)$

Por lo tanto, a cada punto P del Plano Cartesiano se le puede asociar un vector $\boldsymbol{v}$ con origen en el punto $(0, 0)$ y extremo en el punto P. Pero no debemos confundir punto con vector.

En la Fig. 1.1 (a) se ilustra representaciones de puntos del plano cartesiano mediante pares ordenados de números reales.

En la Fig. 1.1 (b) se ilustra representaciones de vectores del plano cartesiano con origen en el origen de coordenadas y extremo en los puntos representados por pares ordenados de números reales.

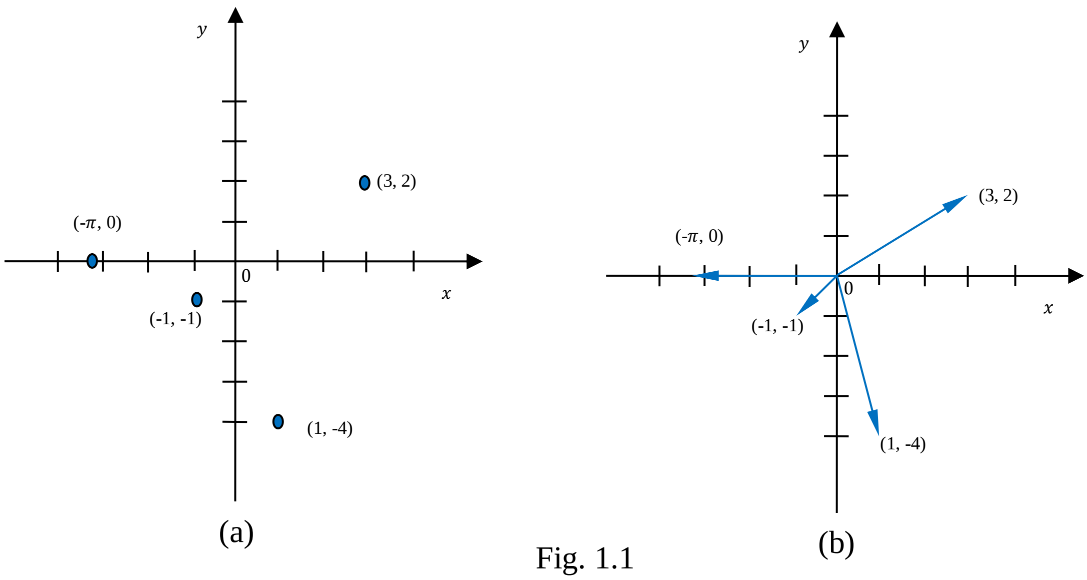


Fig. 1.1

- En $\mathbb{R}^3$

La representación geométrica de las ternas ordenadas de números reales es un punto en el espacio real determinado por tres rectas reales (ejes) ortogonales entre sí que se intersectan en un punto O, llamado origen. Fig. 1.2.

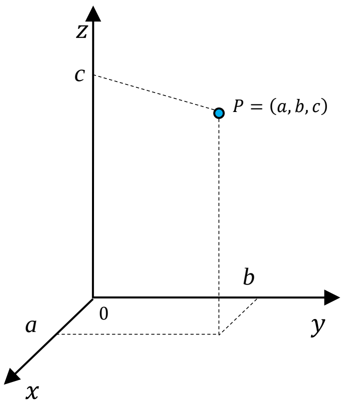


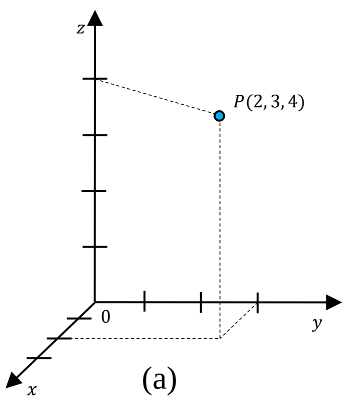
Fig. 1.2

Cada terna ordenada de números reales (a, b, c) se identifica con un punto P de componentes a, b y c , esto es $P = (a, b, c)$, del Espacio Real y recíprocamente cada punto

P del Espacio Cartesiano se identifica con una terna ordenada de números reales. Es decir existe una correspondencia biyectiva entre las ternas ordenadas de números reales y los puntos del Espacio Cartesiano.

En virtud de las Definiciones 1 y 3, cada terna ordenada de números reales (a, b, c) es un vector $v = (a, b, c)$ con origen en $O = (0,0,0)$ y extremo en el punto $P = (a, b, c)$

Por lo tanto, a cada punto P del Espacio Cartesiano se le puede asociar un vector $\boldsymbol{v}$ con origen en el punto $(0,0,0)$ y extremo en el punto P. Pero no debemos confundir punto con vector. En las Fig. 1.3 (a) y (b) se ilustra con un ejemplo.



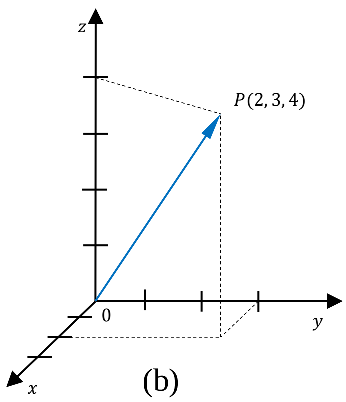


Fig. 1.3

1.3 Representación matricial

Un modelo no geométrico importante para representar vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, es mediante matrices fila o columna. Todo vector (a, b) perteneciente a $\mathbb{R}^2$ se puede considerar como una matriz columna (vector columna) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, o bien como una matriz fila (vector fila) $[a \ \ b]$.

De manera semejante, todo vector $(a, \ b, \ c)$ perteneciente a $\mathbb{R}^3$ puede interpretarse como una matriz columna (vector columna) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ o como una matriz fila (vector fila) $[a \ \ b \ \ c]$.

De esta manera el vector $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ se expresa como $[2 \ \ 3]$ o bien como $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

<u>Definición 4</u>

- Dos vectores $(a_1, \ b_1)$ y $(a_2, \ b_2)$ de $\mathbb{R}^2$ son **iguales** si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.
- Dos vectores $(a_1, \ b_1, \ c_1)$ y $(a_2, \ b_2, \ c_2)$ de $\mathbb{R}^3$ son **iguales** si $a_1 = a_2, \ b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

Notas

- La igualdad de vectores es simplemente una igualdad de matrices.
- Si dos vectores u y v son iguales, simbolizaremos con $u = v$
- Si dos vectores u y v no son iguales, simbolizaremos con $u \neq v$

Ejemplos

a) Los vectores $(-2+3,\ \frac{1}{2})$ y $(1,\ 0.5)$ son iguales, y se expresa $(-2+3,\ \frac{1}{2}) = (1,\ 0.5)$

b) Los vectores $(x, 3)$ y $(-4,\ 3)$ son iguales si y sólo si $x = -4$

c) los vectores $(1,2,3)$ y $(1,3,2)$ no son iguales, y se expresa $(1,2,3) \neq (1,3,2)$.

1.4 Operaciones

Suma de Vectores

Definición 5

Sean $u = (a,b)$ y $v = (c,d)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

La **suma** de u y v es un vector de $\mathbb{R}^2$**,** que denotaremos con $u+v$, y se define como sigue

$$u+v = (a,b)+(c,d) \overset{def}{=} (a+c,\ b+d)$$

Sean $u = (a,b,c)$ y $v = (d,e,f)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

La **suma** de u y v es un vector de $\mathbb{R}^3$, que denotaremos con $u+v$, y está definida por

$$u+v = (a,b,c)+(d,e,f) \overset{def}{=} (a+d,\ b+e,\ c+f)$$

Notas

- El proceso de sumar dos vectores se llama **adición vectorial**.

- La adición de vectores es semejante a la suma de matrices fila o columna.

Ejemplos

a) La suma de los vectores $(3,-1)$ y $(6,8)$ es $(3,-1)+(6,8) = (3+6,\ -1+8) = (9,7)$.

b) La suma de los vectores $(1,2,3)$ y $(5,7,9)$ es $(1,2,3) + (5,7,9) = (6,9,12)$.

Interpretación geométrica de la suma

Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ no nulos con origen en O y no colineales, el vector suma $u+v$ queda representado por la diagonal del paralelogramo de lados u y v, siendo el origen de $u+v$ el mismo que el de los vectores u y v, como lo muestra la Fig. 1.4.

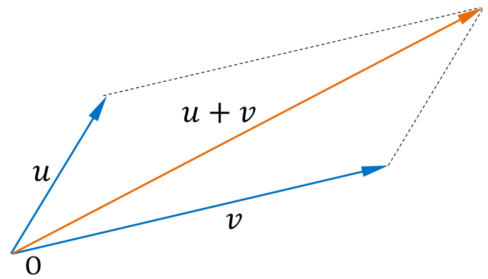


Figura 1.4

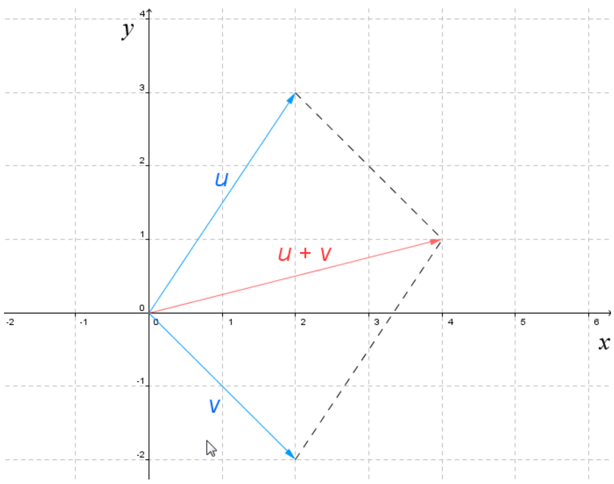
<u>Nota</u>

En general, el módulo de la suma no es igual a la suma de los módulos y esto se debe a una de las propiedades de los lados de un triángulo (La longitud de cada lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados).

<u>Ejemplo</u>

Sean $u=(2,3),\ v=(2,-2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

En virtud de la Definición 5, $u+v=(2,3)+(2,-2)=(4,1)$ y su representación gráfica se muestra en la siguiente figura.



Multiplicación de escalar por vector

<u>Definición 6</u>

Sean un vector (a,b) de $\mathbb{R}^2$, un vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ y k un escalar real. La operación de multiplicar un escalar por un vector se llama multiplicación de escalar por vector y está definida por

$$k(a,b) \overset{def}{\equiv} (ka, \quad kb)$$

$$k(a,b,c) \overset{def}{\equiv} (ka,kb,kc)$$

Ejemplos

a) Dados el escalar $k = 3 \in \mathbb{R}$ y el vector $u = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$,

$$ku = 3(3, -2) = (9, -6)$$

b) Dados el escalar $k = -2 \in \mathbb{R}$ y el vector $u = (7, -3, 0) \in \mathbb{R}^3$

$$ku = -2(7, -3, 0) = (-14, 6, 0)$$

Interpretación geométrica del producto de escalar por vector

El vector kv, donde k es un escalar real y v es un vector de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, queda representado por un vector de longitud $|k|\|v\|$, de igual dirección que v y el sentido depende de k.

Figura 1.4

El vector kv tiene distintas características según sea el valor del escalar k. En la Tabla 1, se describe el comportamiento del vector kv para los posibles valores de k.

	kv
$k = 0$	es igual al vector nulo $(0,0)$
$0 < k < 1$	igual sentido y dirección que v, pero de menor longitud que v
$k = 1$	igual al vector v
$k > 1$	igual sentido y dirección que v, de mayor longitud que v
$-1 < k < 0$	igual dirección que v, sentido contrario a v y menor longitud que v
$k = -1$	igual dirección y longitud que v y sentido contrario a v
$k < -1$	igual dirección, pero sentido contrario a v y mayor longitud que v

Tabla 1

Nota

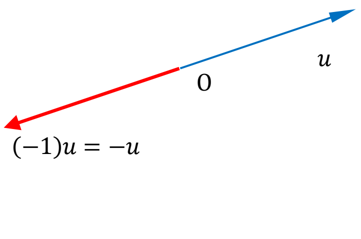
La multiplicación de un escalar por un vector es similar a la multiplicación de un escalar por una matriz fila o columna.

Definición 7

a. Sea u un vector de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, se define $-u = (-1)u$. Fig. 1.5 (a)

b. Sean u y v de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, se define la **sustracción de vectores** $u - v$ como sigue

$$u - v = u + (-v) = u + (-1)v \quad \text{Fig. 1.5 } (b)$$



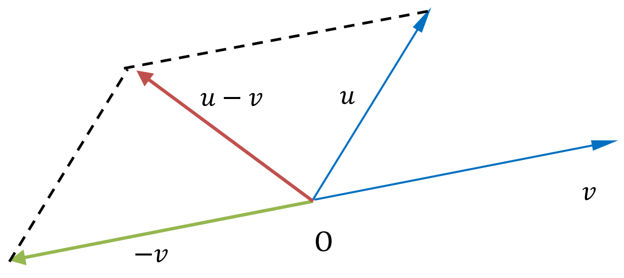


Figura 1.5

Nota

Se dice que el vector $-u$ es el opuesto del vector u**,** así por ejemplo si $u = (3. -5)$, el vector opuesto a u es

$$-u = (-1)u = (-1)(3, -5) = (-3,5)$$

Las propiedades básicas de la adición vectorial y la multiplicación por escalar se presentan en el Teorema 1.

Teorema 1

Sean u, v y w vectores de $\mathbb{R}^n$, donde $n = 2$ o $n = 3$. Supóngase que c y d son escalares reales. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

a. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Asociatividad de la adición)

b. $u + 0_v = 0_v + u = u$ (Elemento neutro aditivo)

c. $u + (-u) = (-u) + u = 0_v$ (Opuesto de cada vector)

d. $u + v = v + u$ (Conmutatividad de la adición)

e. $0u = 0_v$, con $0 \in \mathbb{R}$

f. $c(u + v) = cu + cv$ (la multiplicación de escalar por vector es distributiva respecto a la suma de vectores)

g. $(c + d)u = cu + du$ (la multiplicación de escalar por vector es distributiva respecto a la suma de escalares)

h. $(cd)u = c(du)$ (Asociatividad mixta de la multiplicación de escalar por vector)

i. $1u = u$, con $1 \in \mathbb{R}$

Demostración

Se demostrará el apartado (d) para vectores u y v de $\mathbb{R}^2$. El caso en el que u y v pertenecen a $\mathbb{R}^3$ es semejante. Los apartados restantes se dejan como ejercicio para el alumno.

(d) Supóngase que $u = (a_1,\, b_1)$ y $v = (a_2,\, b_2)$. Entonces, de la definición de suma vectorial y debido a que la suma de los números reales es conmutativa, tenemos

$$u + v = (a_1,\, b_1) + (a_2,\, b_2) = (a_1 +\, a_2,\, b_1 +\, b_2) = (a_2 +\, a_1,\, b_2 +\, b_1) =$$
$$= (a_2,\, b_2) + (a_1,\, b_1) = v + u$$

<u>Nota</u>

Las demostraciones de las propiedades son inmediatas partiendo del modelo matricial de los vectores.

<u>Ejemplo 1</u>

Sean u, v vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Resuelva la ecuación $x + u = v$ para determinar el vector x.

<u>Solución</u>

Dado que $\qquad x + u = v$

Sumando $-u$ a ambos miembros de la ecuación

$$(x + u) + (-u) = v + (-u)$$

Luego usando las propiedades (a), (c) y (b) del Teorema 1

$$x + \big(u + (-u)\big) = v - u$$

$$x + 0_v = v - u$$

Por lo tanto, $\qquad x = v - u$

<u>Ejemplo 2</u>

Sean $u + x = u + y$ para vectores u, y, x de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demuestre que $x = y$.

<u>Demostración</u>

$$u + x = u + y$$

$$(-u) + u + x = (-u) + u + y$$

$$\big((-u) + u\big) + x = \big((-u) + u\big) + y$$

$$0_v + x = 0_v + y$$

Por lo tanto, $\qquad x = y$

Fundamente el alumno los pasos realizados en la demostración con las propiedades enunciadas en el Teorema 1.

Ejercicios

1.- *Dados los vectores* $u = (2, -3)$, $v = (-1, 5)$ *y* $w = (0, -2)$, *resuelva analíticamente:*

a) $2u + v$

b) $u - v + \frac{1}{2}w$

2.- *Sean* $u = (x + 2, -5, 3)$, $v = (4, -3, 1)$ *y* $w = (-2, y - 1, 5)$. *Determine los valores de* x *e* y *de modo que* $w = 2u - v$

3.- *Determine los valores de* x, y, z *de modo que se verifique la igualdad:*

a) $(-x - 2y, 4) = (-3, 2x + 3y)$

b) $(x - 1, x + y, 2) = (3, z, y + z)$

1.5 Vectores Libres

En muchas ocasiones es necesario trabajar vectores cuyo punto inicial no es el origen. Para este propósito, considérese dos puntos P y Q del plano o del espacio. El segmento orientado cuyo origen es P y cuyo extremo es Q se simboliza con $\overrightarrow{PQ}$ (Fig.1.6).

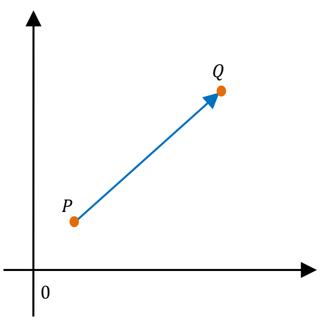
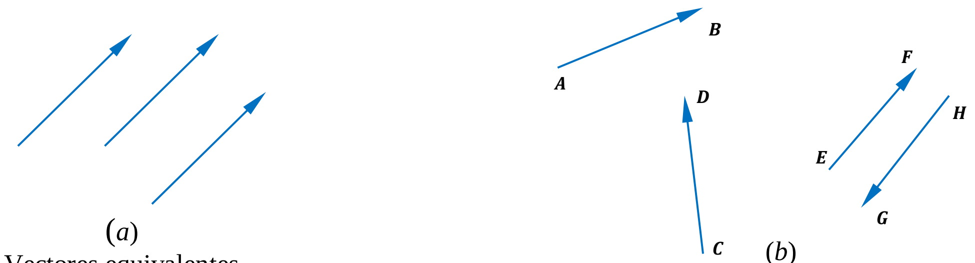


Figura 1.6
Ilustración de un vector en el plano

Definición 8

Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equivalentes**, lo que se expresa por $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$, si tienen igual *módulo, dirección y sentido*.

Obsérvese que, como en la Fig.1.7 (a), los vectores equivalentes no tienen necesariamente el mismo origen. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ de la Fig.1.7 (b) no son equivalentes, lo cual se escribe $\overrightarrow{AB} \ncong \overrightarrow{CD}$, ambos tienen igual módulo pero direcciones diferentes, de igual modo $\overrightarrow{EF} \ncong \overrightarrow{HG}$ ya que tienen igual módulo, igual dirección pero sentidos diferentes.



(a)
Vectores equivalentes

(b)
Vectores no equivalentes

Figura 1.7

Es claro que, dado cualquier vector $u = \overrightarrow{PQ}$ de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se puede obtener el vector $u' = \overrightarrow{OS}$, siendo O el origen de coordenadas, tal que $u \cong u'$. La técnica para construir u' se muestra en la siguiente figura.

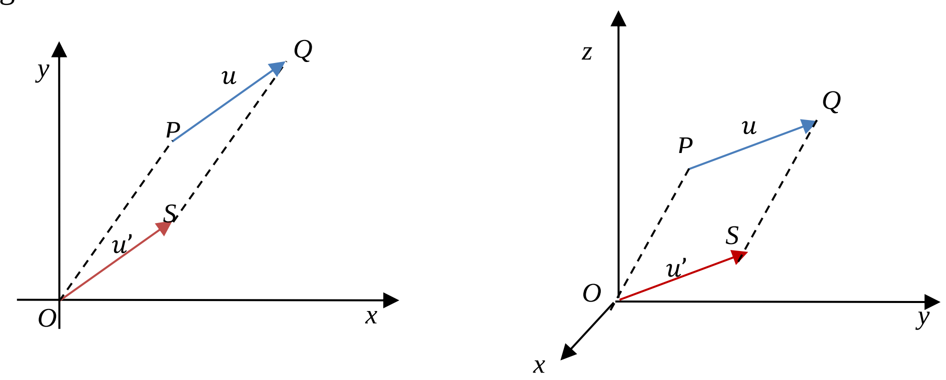


Figura 1.8

<u>Nota</u>

Si $u \cong v$ o $\overrightarrow{PQ} \cong \overrightarrow{RS}$, para simplicidad de notación también podemos escribir $u = v$ o bien $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

Suma de vectores libres con el mismo origen

Dados dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, es claro que ambos tienen el mismo origen, por lo tanto la suma de estos vectores $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ es el vector determinado por la diagonal de paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y que tiene origen en A.

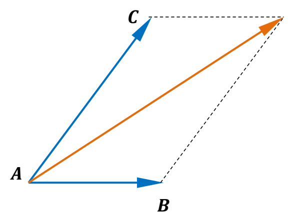


Figura 1.9

Suma de vectores libres con distinto origen

Dados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, obviamente no tienen el mismo origen, pero igualmente pueden sumarse. Para sumar estos vectores libres se procede del siguiente modo,

1) se construyen dos vectores semejantes a los vectores dados con la condición que tengan el mismo origen, esto es $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{EG}$ tal que $\overrightarrow{EF} \cong \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EG} \cong \overrightarrow{CD}$
2) se suman los vectores $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{EG}$ obteniéndose el vector $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$
3) finalmente el vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{EH}$ por definición.

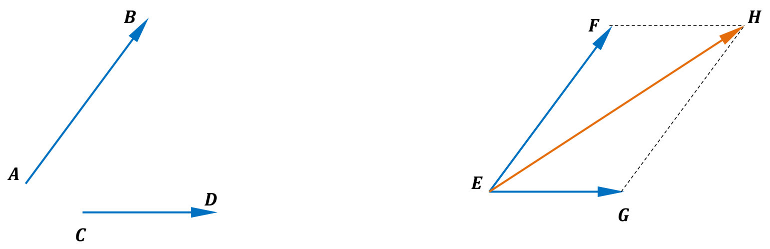
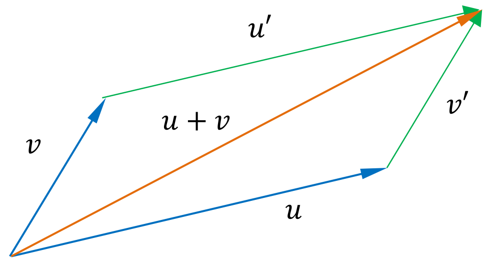


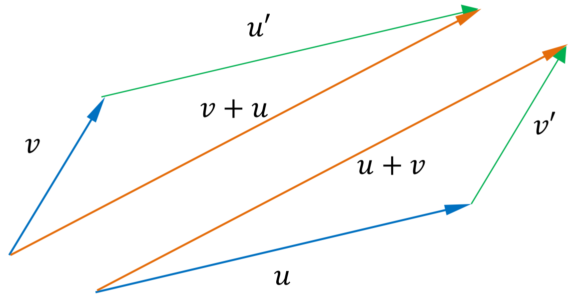
Figura 1.10

Suma de vectores por el método de la poligonal

Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, basta con tener en cuenta la interpretación geométrica de la suma de vectores queda determinada por la diagonal del paralelogramo de lados u y v.



Se puede observar claramente que $u \cong u'$ y $v \cong v'$ por lo tanto si se coloca en el extremo de v el origen de u' la suma $v + u$ tiene origen en el origen de v y extremo en el extremo de u'. Análogamente colocando en el extremo de u el origen de v', la suma $u + v$ tiene origen en el origen de u y extremo en el extremo de v'. En virtud del Teorema 1 d) resulta $u + v = v + u$. Este modo de obtener la suma de dos vectores u y v se llama método de la poligonal.



<u>Nota</u>

Obsérvese que este método se utiliza tanto para vectores con origen en el origen del sistema de coordenadas como para vectores libres, teniendo la precaución en este último caso de trabajar con vectores equivalentes cuyo origen coincida con el origen del sistema de coordenadas.

Ejemplo

Dados los vectores $u = (4,1), v = (3,3),\ w = (-1,4)$ del plano real, empleando el método de la poligonal el vector suma $u + v + w$, se muestra la Figura 1.11.

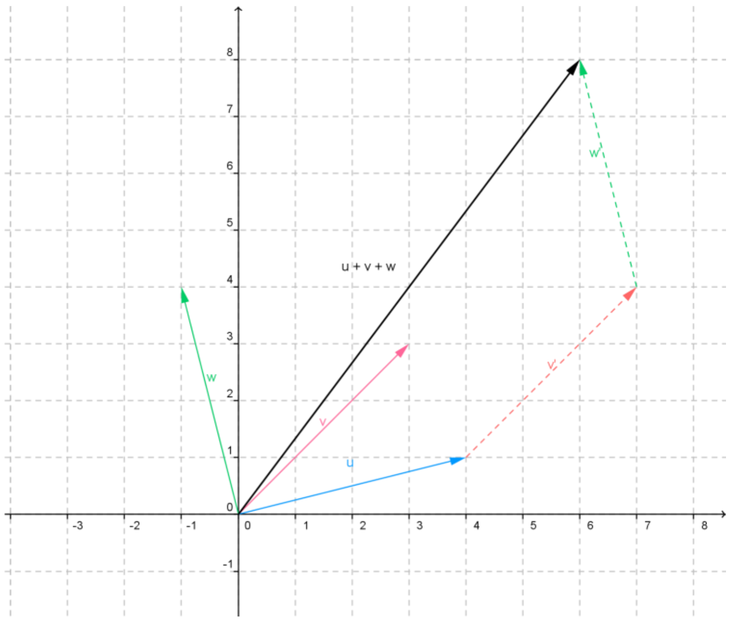


Figura 1.11

Diferencia de vectores

Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, geométricamente el vector $u - v$ queda determinada por la diagonal del paralelogramo de lados u y $-v$ como se muestra en la Fig. 1.12 (a), y por equivalencia de vectores libres, $u - v$ es equivalente al vector que tiene origen en el extremo de v y extremo en el extremo de u como se indica Fig. 1.12 (b).

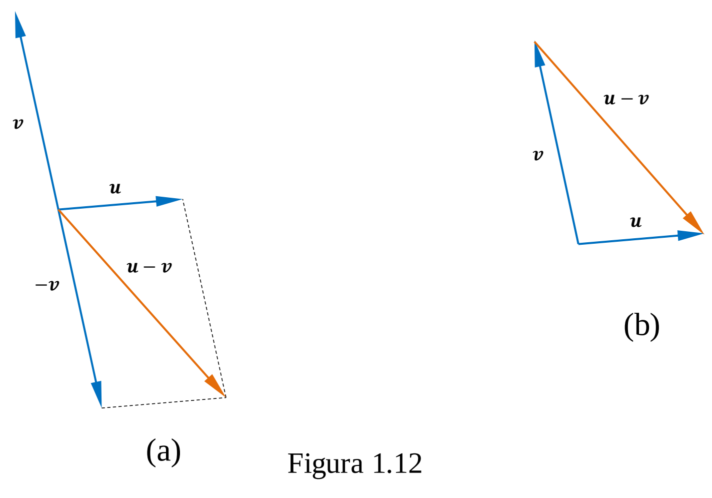


Figura 1.12

Nota

La sustracción de vectores no es conmutativa. Compruebe el alumno esta afirmación.

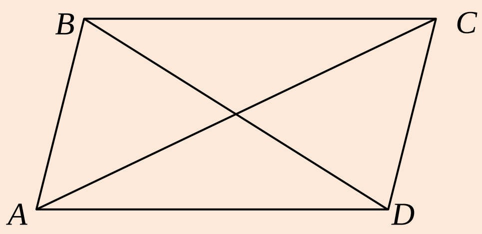
EJERCICIOS

4.- *Dado el paralelogramo $ABCD$ en el cual se han trazado sus diagonales,*

a) resalte con color azul los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

b) resalte con color rojo el vector suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c) resalte con color verde el vector diferencia $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.



5.- *Sean $P = (3,5)$ y $Q = (6,7)$ dos puntos del plano. Determine el vector w, con origen en el origen de coordenadas, tal que $w \cong \overrightarrow{PQ}$.*

<u>Solución</u>

Considérese los vectores $u = (3,5)$ y $v = (6,7)$ en la Fig. 1.13. Es claro que

$$\overrightarrow{PQ} = v - u = (6,7) - (3,5) = (6-3, 7-5) = (3,2)$$

Luego el vector buscado es $w = (3,2)$.

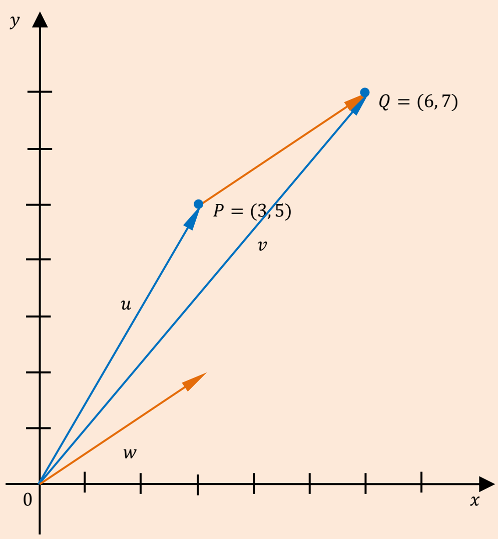


Figura 1.13

En general, dados dos puntos cualesquiera del plano o del espacio real, es posible determinar un vector w, con origen en el origen de coordenadas equivalente al vector $\overrightarrow{PQ}$ del siguiente modo

Si $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ son puntos del plano real, entonces

$$\overrightarrow{PQ} \cong (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = w$$

Si $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ son puntos del espacio real, entonces

$$\overrightarrow{PQ} \cong (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = w$$

EJERCICIOS

6.- *Obtenga un vector con punto inicial en $P = (2,3)$ y que sea equivalente al vector $v = (3,1)$. Represente gráficamente.*

1.6 Producto Escalar

Para que los vectores sean un instrumento geométrico útil, deben describir conceptos geométricos fundamentales de manera sencilla. El *producto escalar* de vectores explica fácilmente dos de estos conceptos, longitud y ángulo.

Definición 9

a). Sean $u = (a_1, a_2)$ y $v = (b_1, b_2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces el **producto escalar** de u y v, es un escalar real, denotado por $u \cdot v$, y está definido por

$$u \cdot v \overset{def}{\triangleq} a_1 b_1 + a_2 b_2$$

b). Sean $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces el **producto escalar** de u y v, es un escalar real, denotado por $u \cdot v$, y está definido por

$$u \cdot v \overset{def}{\triangleq} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Notas

- El producto escalar también se denomina **producto punto.**
- $u \cdot v$ se lee "u producto escalar v" o "u punto v".
- Es importante remarcar que $u \cdot v$ es un *escalar* real y no es un *vector*.

Observación

Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, si se considera a los vectores u y v como matrices columna, entonces el producto escalar viene dado por

$$u \cdot v = u^t v$$

Es decir,

a) si $u = (a_1, a_2)$ y $v = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$, el producto escalar de u y v se calcula de la siguiente forma

$$u \cdot v = u^t v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

b) si $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, el producto escalar de u y v se calcula del siguiente modo

$$u \cdot v = u^t v = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ejemplos

a. Evalúe $u \cdot v$ siendo $u = (-2, 4)$ y $v = (8, 3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$

b. Evalúe $u \cdot v$ siendo $u = (2, 4, 6)$ y $v = (8, 10, 12)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$

Solución

a. $u \cdot v = (-2, 4) \cdot (8, 3) = (-2)(8) + (4)(3) = -4$

b. $u \cdot v = (2, 4, 6) \cdot (8, 10, 12) = 2(8) + 4(10) + 6(12) = 128$

Propiedades del Producto Escalar

Teorema 2

Sean u, v y w vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces

a. $u \cdot v = v \cdot u$ (Conmutatividad)

b. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w = v \cdot u + w \cdot u = (v + w) \cdot u$ (Distributividad del producto escalar con respecto a la suma de vectores)

c. $u \cdot (av) = (au) \cdot v = a(u \cdot v)$

d. $u \cdot u \geq 0$ y

$u \cdot u = 0$ si y sólo si $u = 0_v$

Demostración

Se deja como ejercicio

Nota

Puesto que $u \cdot v$ es un escalar, las expresiones $(u \cdot v) \cdot w$ y $u \cdot (v \cdot w)$ carecen de sentido. Por lo tanto no podemos hablar de asociatividad del producto escalar.

1.7 Norma o módulo de un vector

La **norma** del vector $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ es la longitud de v, es decir es la longitud del segmento determinado por los puntos $(0, 0)$ y (a, b). Análogamente la **norma** del vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es la longitud de v, es decir, la longitud del segmento determinado por los puntos $(0, 0, 0)$ y (a, b, c).

Definición 10

La **norma** (o **módulo**) de un vector $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, denotada por $\|v\|$, está definida por

$$\|v\| \overset{def}{\cong} \sqrt{a^2 + b^2}$$

La **norma** (o **módulo**) de un vector $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, escrita $\|v\|$, está definida por

$$\|v\| \overset{def}{\cong} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Notas

1.- Estas definiciones se justifican fácilmente mediante el Teorema de Pitágoras. (Fig. 1.14).

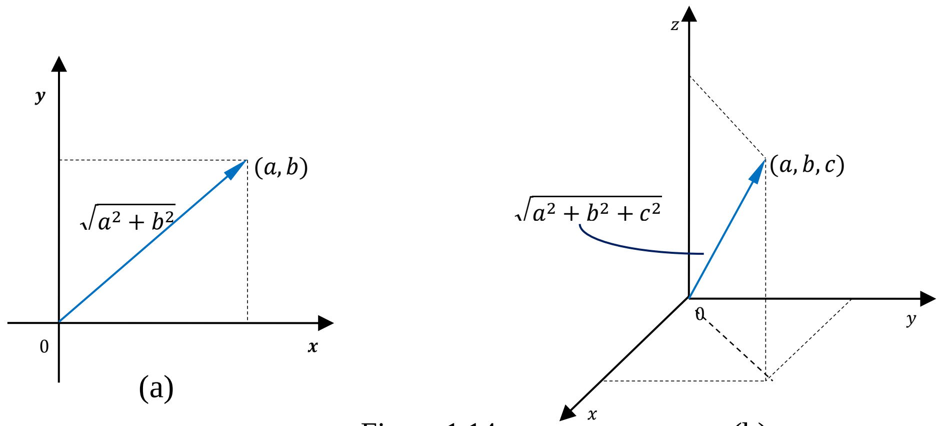


Figura 1.14

2.- Si $v \in \mathbb{R}^2$o $\mathbb{R}^3$, diremos que v es un **vector unitario** si la norma de v es igual a 1. Es decir si satisface la condición $\|v\| = 1$.

Ejemplos

a) La norma del vector $v = (3, 4)$ es

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

b) La norma del vector $v = (1, 2, 3)$ es

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

c) Son vectores unitarios: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Propiedades de la norma de un vector

Teorema 3

Sea u un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades

a. $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_v$

b. $\|a\, u\| = |a|\; \|u\|$

c. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad triangular)

d. $\|u\|^2 = u \cdot u$, o bien $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$

e. $|u.v| \leq \|u\|\|v\|$ (Desigualdad de Cauchy- Schwarz)

1.8 Distancia de vectores

Definición 11

Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. La distancia de u a v es igual a la norma del vector $v - u$.

En símbolos,

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

Es decir

Si $u = (a_1, a_2)$ y $v = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$v - u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

y la distancia de u a v es

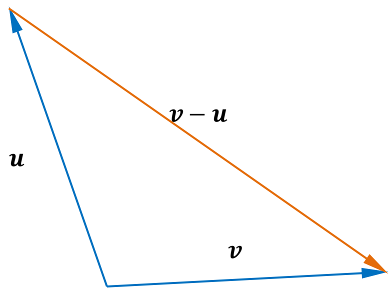
$$d(u, v) = \|v - u\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Si $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$v - u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

y la distancia de u a v es

$$d\,(u, v) = \|v - u\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



La distancia de u a v es la longitud del vector $v - u$.

Ejemplo

Dados los vectores $u = (1, 4)$ y $v = (0, 5)$ de $\mathbb{R}^2$, determine la distancia de u a v.

Solución

Primero se obtiene $v - u$

$$v - u = (0, 5) - (1, 4) = (-1, 1)$$

luego

$$d(u,v) = \|v-u\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Propiedades de la distancia de vectores

Teorema 4

Sea u, v y w vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Entonces se verifican las siguientes propiedades

a. $d(u,v) \geq 0$

b. $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

c. $d(u,v) = d(v,u)$

d. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Nota

Dados dos vectores u y v hablaremos de la distancia **entre** u y v debido a la propiedad c.

Paralelismo de vectores

Definición 12

Sean u y v vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

El vector u es paralelo al vector v si y sólo si existe un escalar real no nulo c tal que $u = cv$.

En símbolos,

$$u \parallel v \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0:\ \ u = cv$$

Ejemplo

Sean $u = (1,-2)$ y $v = (-2,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Es claro que u es paralelo al vector v pues,

$$\exists\, c = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}:\ \ (1,-2) = -\frac{1}{2}(-2,4)$$

Notas

1.- El paralelismo de vectores es una relación de equivalencia, es decir que es:

- Reflexiva: "todo vector es paralelo a sí mismo".
- Simétrica: "si un vector u es paralelo a otro vector v entonces el vector v es paralelo al vector u".
- Transitiva: "si un vector u es paralelo a un vector v y éste es paralelo a un vector w, entonces el vector u es paralelo al vector w".

2.- Cuando un vector u sea paralelo a un vector v, diremos simplemente que **"u y v son paralelos"**, esto se debe a que el paralelismo de vectores es una relación simétrica.

3.- Decir que "dos vectores son paralelos" equivale a decir que "uno cualquiera de ellos es combinación lineal del otro" o bien que "uno cualquiera de ellos es un múltiplo escalar del otro".

Ortogonalidad

Definición 13

Sean u y v vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

Diremos que u es ortogonal a v si y sólo si el producto escalar de u y v es igual a cero.

En símbolos,

$$u \perp v \overset{def}{\Longleftrightarrow} u \cdot v = 0$$

Convención

Como cualquiera sea u de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$**,** se verifica que

$$u \cdot 0_v = 0_v \cdot u = 0,$$

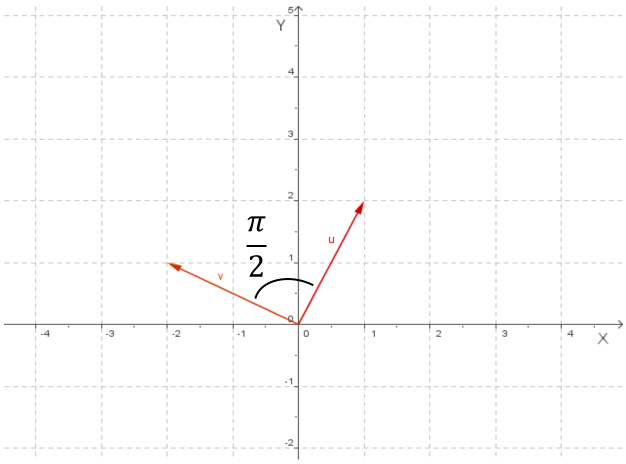
convenimos en decir que "el vector nulo 0_v e**s** ortogonal a todo vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$".

Ejemplo

Sean los vectores $u = (1, 2)$ y $v = (-2, 1)$. Es claro que u y v son ortogonales, pues

$$u \cdot v = (1, 2) \cdot (-2, 1) = -2 + 2 = 0$$

En la siguiente figura se observa que u y v son ortogonales, es decir que la medida del ángulo que forman es $\frac{\pi}{2}$ lo que precisaremos más adelante.



Nota

La ortogonalidad de vectores es una relación simétrica. Por lo tanto, cuando un vector u sea ortogonal a un vector v, diremos simplemente que "u y v son ortogonales"

EJERCICIOS

7.- Sean $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{4})$ y $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{\alpha})$. Determine $\boldsymbol{\alpha}$ tal que:

a) u y v sean ortogonales
b) u y v sean paralelos

Versor de un vector

Definición 14

Sea $\boldsymbol{u}$ un vector **no nulo** de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se llama ***versor del vector*** u al vector $\frac{1}{\|u\|}u$.

Propiedades del versor de un vector

El versor del vector no nulo u tiene las siguientes propiedades

i) Es unitario. En efecto,

$$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\| = \left|\frac{1}{\|u\|}\right|\|u\| = \frac{1}{\|u\|}\|u\| = 1$$

ii) Es paralelo al vector u, puesto que es un múltiplo escalar del vector u.

Ejemplo

El vector $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$ es el versor del vector $u = (3, -4, 0) \in \mathbb{R}^3$.

El vector $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es el versor del vector $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Representación de un vector en función de versores fundamentales

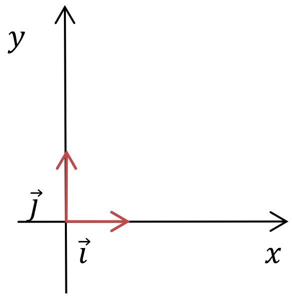
- En $\mathbb{R}^2$ se consideran los vectores $E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)$, es fácil comprobar que estos vectores son unitarios y ortogonales entre sí, es decir:

  i) $\forall\, i = 1, 2$: $\|E_i\| = 1$.

  ii) $E_1 \cdot E_2 = 0$

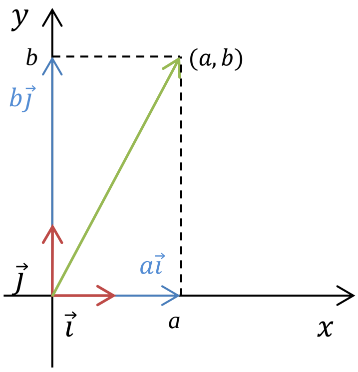
A los vectores E_1 y E_2 se los denomina *versores fundamentales* en $\mathbb{R}^2$ y se los denota con $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ respectivamente

Los vectores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ constituyen un sistema muy importante de vectores unitarios, que tienen por direcciones las correspondientes a los ejes (en su dirección positiva) del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el plano.



Además, todo vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar en términos de los versores fundamentales

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$$



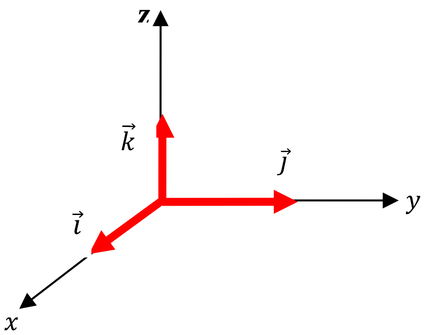
- En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores $E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$ es fácil comprobar que estos vectores son unitarios y ortogonales entre sí, es decir:

  i) $\forall\, i = 1,2,3:\ \|E_i\| = 1$.

  ii) $E_i \cdot E_j = 0$, si $i \neq j$

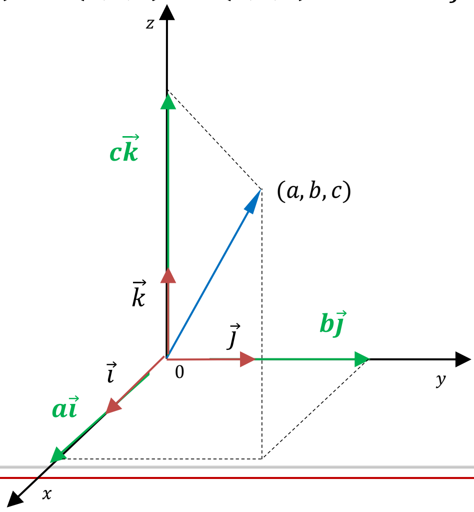
  A los vectores E_1, E_2 y E_3 se los denomina *versores fundamentales* en $\mathbb{R}^3$ y se los denota con $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ y $\vec{k}$ respectivamente.

Los vectores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ y $\vec{k}$ constituyen un sistema muy importante de vectores unitarios, que tienen por direcciones las correspondientes a los ejes (en su dirección positiva) del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en el espacio.



Además, todo vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar en términos de los versores fundamentales

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} + c\,\vec{k}$$



1.9 Ángulo entre vectores

Teorema 5

Sean u, v vectores **no nulos** de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y sea $\cdot$ el producto escalar, entonces existe y es único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

Demostración

Por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* (Teorema 3 e.)

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n, \text{ con } n = 2, 3\colon |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

en particular,

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n - \{0_v\}, \text{ con } n = 2, 3\colon |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \underset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$-\|u\|\, \|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\, \|v\| \underset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$-\frac{\|u\|\, \|v\|}{\|u\|\, \|v\|} \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\, \|v\|} \leq \frac{\|u\|\, \|v\|}{\|u\|\, \|v\|} \underset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n - \{0_v\}, \text{ con } n = 2, 3\colon -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\, \|v\|} \leq 1$$

llamando

$$k = \frac{u \cdot v}{\|u\|\, \|v\|}$$

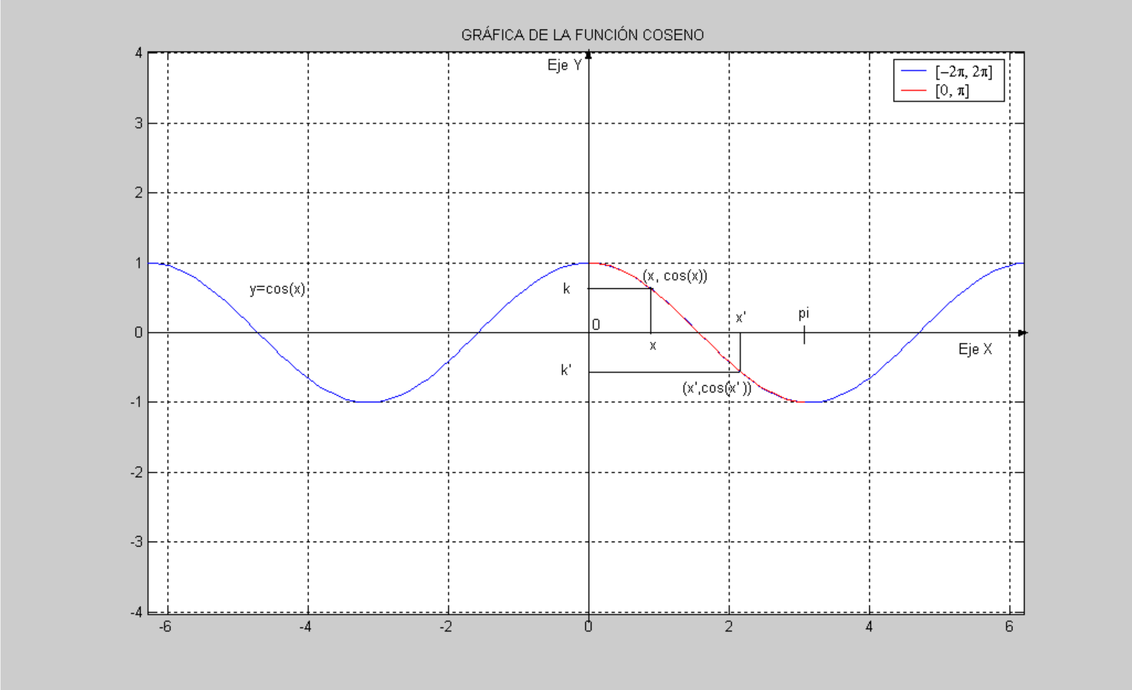
se tiene

$$-1 \leq k \leq 1$$

Vemos entonces que, cualesquiera sean $u \neq 0_v$ y $v \neq 0_v$, el número $k = \frac{u \cdot v}{\|u\|\, \|v\|}$ conseguido en base a estos vectores es un número real perteneciente al intervalo $[-1, 1]$.

Por lo tanto, dado $k \in [-1, 1]$, existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $k = \cos \alpha$.

Y como la función coseno en el intervalo $[0, \pi]$ es biyectiva, como podemos ver en la gráfica



se puede asegurar que, dado $k \in [-1,1]$, existe un único $\alpha \in [0,\pi]$ tal que $k = \cos\alpha$.

Con esto, se ha probado que

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} - \{0_v\}, \text{con } n = 2,3;\ \ \exists!\, \alpha \in [0,\pi]: \cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}$$

<u>Referencias</u>:

(1) Por propiedad de valor absoluto.

(2) Multiplicando en cada miembro por $\frac{1}{\|u\|\ \|v\|}$. Esto se puede hacer porque $\|u\|\ \|v\| \neq 0$, pues $u \neq 0_v$ y $v \neq 0_v$.

(3) Simplificando en ambos miembros

Q.E.D.

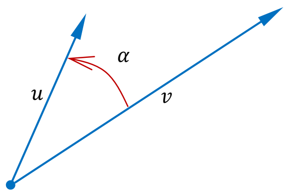
<u>Definición 15</u>

Se denominará "el ángulo entre los vectores u y v" al único número real $\alpha \in [0,\pi]$:

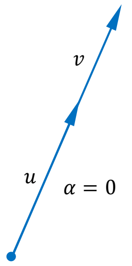
$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\ \|v\|}$$

<u>Notas</u>

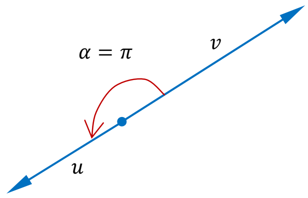
1. El ángulo α entre u y v es tal que $0 \leq \alpha \leq \pi$ (o bien $0 \leq \alpha \leq 180°$).



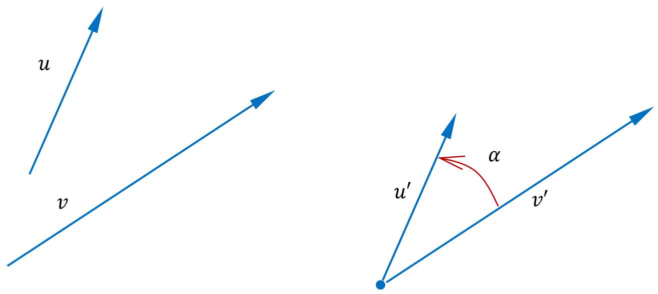
2. Si $u = av$ donde $a > 0$, entonces $\alpha = 0$.



3. Si $u = av$ donde $a < 0$, entonces $\alpha = \pi$.



4. En el caso en que u y v no tengan origen común, se eligen vectores u' y v' con el mismo origen, de tal modo que $u \cong u'$ y $v \cong v'$, luego la medida del ángulo entre u y v es igual a la medida del ángulo entre u' y v'.



Ejemplo

Determine el coseno del ángulo comprendido entre los vectores $u = (1, 2, 3)$ y $v = (-4, -5, -6)$.

Solución

De acuerdo a la *Definición 15*, $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$

Calculando

$$u \cdot v = 1(-4) + 2(-5) + 3(-6) = -32\,,$$

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad \text{y} \quad \|v\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{77},$$

se tiene

$$\cos\alpha = \frac{-32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} = \frac{-32}{(7\sqrt{22})} \approx -0{,}975$$

Ejercicios

8.-

a. *Si* $u \cdot v > 0$ *determine si el ángulo* α *comprendido entre los vectores vectores* u *y* v *es el ángulo agudo* $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ *u obtuso* $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$*. Explique.*

b. *Si* $u \cdot v < 0$, *determine si el ángulo* α *comprendido entre los vectores* u *y* v *es agudo u obtuso.*

c. *Dos vectores no nulos* u *y* v *de* $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$, *son perpendiculares si y sólo si el ángulo entre ellos es de* $90°$ *(o bien* $\frac{\pi}{2}$ *radianes). Puesto que* $\cos\alpha = 0$ *si y sólo si* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *(cuando* $0 \leq \alpha \leq \pi$*), determine el valor de* $u \cdot v$.

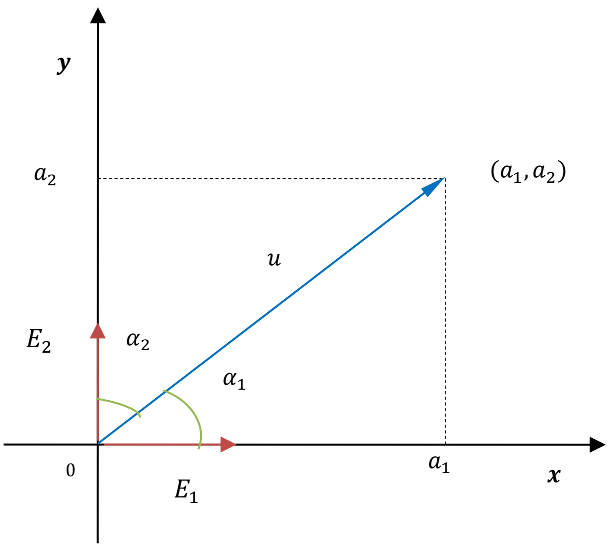
1.10- Ángulos y cosenos directores

Definición 16

Sea $\mathbb{R}^2$ y sea el conjunto $B = \{E_1, E_2\} \subset \mathbb{R}^2$, donde

$$E_1 = (1,0),\ E_2 = (0,1).$$

Sea un vector no nulo $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Llamaremos ***ángulos directores*** del vector u a los ángulos α_1 y α_2 entre u y cada uno de los versores fundamentales E_1 y E_2 respectivamente.



Además a los números reales $\cos\alpha_1$ y $\cos\alpha_2$ les llamaremos *cosenos directores* del vector u. Buscaremos una expresión que nos permita calcular los cosenos directores de un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ en forma inmediata.

Supongamos que $u = (a_1, a_2)$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Llamaremos

α_1 al ángulo entre u y E_1

y α_2 al ángulo entre u y E_2

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores, se satisface

$$\cos\alpha_1 = \frac{u \cdot E_1}{\|u\|\,\|E_1\|} = \frac{a_1}{\|u\|} \Longrightarrow a_1 = \|u\|\cos\alpha_1$$

①

$$\cos\alpha_2 = \frac{u \cdot E_2}{\|u\|\,\|E_2\|} = \frac{a_2}{\|u\|} \Longrightarrow a_2 = \|u\|\cos\alpha_2$$

luego

$$u = (a_1, a_2) = \|u\|\,(\cos\alpha_1\,, \cos\alpha_2).$$

Observación

Todo vector unitario de $\mathbb{R}^2$ tiene como componentes a sus cosenos directores. En efecto, si el vector $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ es unitario, es decir $\|u\| = 1$ entonces

$$u = (a_1, a_2) = (\cos\alpha_1\,, \cos\alpha_2)$$

es decir que

$$a_1 = \cos\alpha_1 \;\text{ y }\; a_2 = \cos\alpha_2.$$

Ejemplo

Sea $u = (3,4) \in \mathbb{R}^2$, sus cosenos directores son

$$\cos\alpha_1 = \frac{(3,4)\cdot(1,0)}{\|(3,4)\|\,\|(1,0)\|} = \frac{3}{\|(3,4)\|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{luego} \quad \alpha_1 = 53{,}13^\circ$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{(3,4)\cdot(0,1)}{\|(3,4)\|\,\|(0,1)\|} = \frac{4}{\|(3,4)\|} = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \quad \text{luego} \quad \alpha_2 = 36{,}87^\circ$$

Teorema 6

Sea $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar y sean α_1 y α_2 los ángulos directores de un vector no nulo $u = (a_1, a_2)$. Entonces se verifica que

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$$

Demostración

Si $u = (a_1, a_2)$, y α_1, α_2 sus ángulos directores, entonces por el resultado ①

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{\|u\|}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_2}{\|u\|}$$

Se tiene entonces

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = \frac{{a_1}^2}{\|u\|^2} + \frac{{a_2}^2}{\|u\|^2} = \frac{{a_1}^2 + {a_2}^2}{\|u\|^2}$$

por definición de norma

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = \frac{\| u\|^2}{\| u\|^2}$$

luego

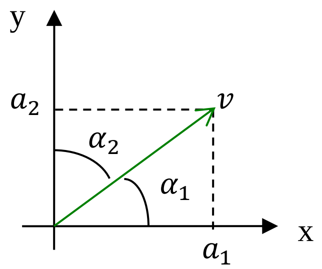
$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1.$$

Q.E.D.

La relación Pitagórica

En $\mathbb{R}^2$, sea $v = (a_1, a_2)$. Y sean α_1 y α_2 sus ángulos directores, entonces según el teorema 6

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1 \qquad ②$$



Pero cualquiera sea $v \in \mathbb{R}^2$, si los ángulos directores son complementarios, es decir si

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

se verifica

$$\cos \alpha_1 = \sin \alpha_2$$
$$\cos \alpha_2 = \sin \alpha_1$$

Reemplazando en ②, se tiene

$$\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 = 1$$
$$\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = 1$$

Comprobamos con esto, que de la propiedad $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$, se puede deducir la conocida Identidad Pitagórica:

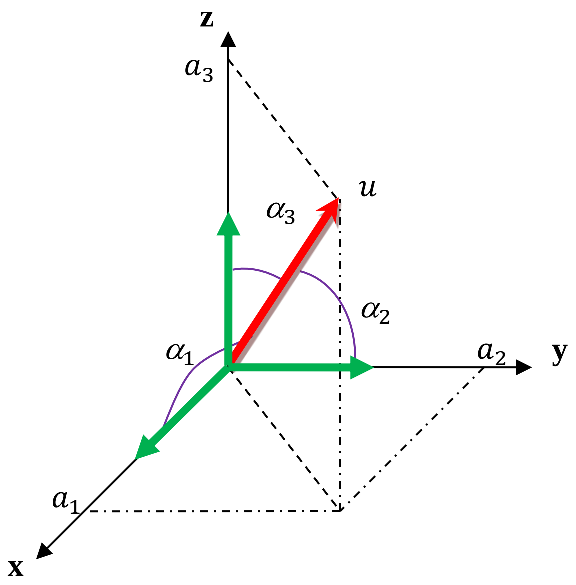
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Definición 17

Sea $\mathbb{R}^3$ y sea el conjunto $B = \{E_1, E_2, E_3\} \subset \mathbb{R}^3$, donde

$$E_1 = (1, 0, 0), E_2 = (0, 1, 0), E_3 = (0, 0, 1).$$

Sea un vector no nulo $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Llamaremos ***ángulos directores*** del vector u a los ángulos α_1, α_2 y α_3 entre u y cada uno de los versores fundamentales E_1, E_2 y E_3 respectivamente.



Además a los números reales $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ y $\cos\alpha_3$ les llamaremos *cosenos directores* del vector u.

Buscaremos una expresión que nos permita calcular los cosenos directores de un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$ de forma inmediata.

Supongamos que $u = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$. Llamemos

α_1 al ángulo entre u y E_1

α_2 al ángulo entre u y E_2

α_3 al ángulo entre u y E_3

De acuerdo con la definición de ángulo entre dos vectores, se satisface

$$\cos\alpha_1 = \frac{u \cdot E_1}{\|u\|\,\|E_1\|} = \frac{a_1}{\|u\|} \Longrightarrow a_1 = \|u\| \cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{u \cdot E_2}{\|u\|\,\|E_2\|} = \frac{a_2}{\|u\|} \Longrightarrow a_2 = \|u\| \cos\alpha_2$$

③

$$\cos\alpha_3 = \frac{u \cdot E_3}{\|u\|\,\|E_3\|} = \frac{a_3}{\|u\|} \Longrightarrow a_3 = \|u\| \cos\alpha_3$$

luego

$$u = (a_1, a_2, a_3) = \|u\| (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$$

<u>Observación</u>

Todo vector unitario de $\mathbb{R}^3$ tiene como componentes a sus cosenos directores. En efecto, si el vector $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ es unitario, es decir $\|u\| = 1$ entonces

$$u = (a_1, a_2, a_3) = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$$

es decir que

$$a_1 = \cos\alpha_1, \qquad a_2 = \cos\alpha_2, \qquad a_3 = \cos\alpha_3$$

Teorema 7

Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar y sean α_1, α_2 y α_3 los ángulos directores de un vector no nulo $u = (a_1, a_2, a_3)$. Entonces se verifica que

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

Demostración

La demostración es análoga al caso de$\mathbb{R}^2$

Ejercicios

9.- *Determine los ángulos directores del vector* $u = (1, 0, -1)$ *perteneciente a* $\mathbb{R}^3$.

10.- *Si* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *son los ángulos directores de* $u \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $\|u\| = 15$,

$\cos\ \alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha_2 = \frac{2}{3}$. *Halle las componentes del vector* u.

1.11- Proyección de un vector sobre otro vector

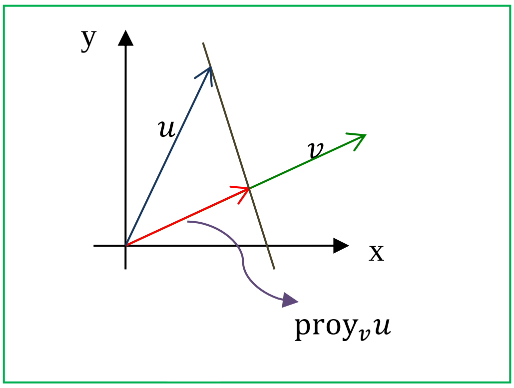
Definición 18

Sea $\mathbb{R}^n$ con $n = 2$ o $n = 3$ y sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ con v no nulo. La proyección de u sobre v se define como el vector

$$\text{proy}_v u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$$

Vizualización del concepto

Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$



Ejemplo

Sean $u = (1, 5)$ y $v = (3, 4)$. Entonces

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{(1,5) \cdot (3,4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} (3,4) = \frac{23}{25} (3,4) = \left(\frac{69}{25}, \frac{92}{25}\right)$$

Ejercicios

11.- *Determine la proyección del vector* $u = (2, 3)$ *sobre el vector* $v = (1, 1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y grafique.*

Propiedades

I. $\text{proy}_v u \parallel v$.

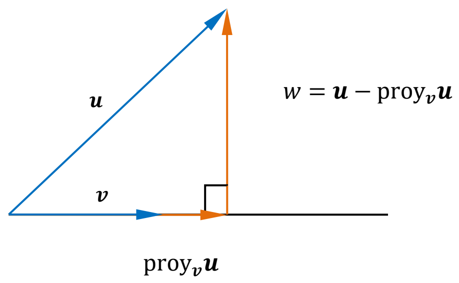
II. $\text{proy}_v u$ tiene el mismo sentido de v si $u \cdot v > 0$.

III. $\text{proy}_v u$ tiene sentido contario de v si $u \cdot v < 0$.

IV. $\text{proy}_v u$ es el vector nulo si $u \cdot v = 0$, es decir si $u \perp v$.

V. $w = u - \text{proy}_v u$ es ortogonal a v.

En la siguiente figura se pueden observar claramente las propiedades I y V



Ejercicios

12.- *Demuestre la Propiedad V precedente.*

1.12- Producto vectorial

Definición 19

Sea $\mathbb{R}^3$ y consideremos la ley de composición interna

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \quad \longmapsto \quad u \times v$$

definida por

$$u \times v = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (\, a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1)$$

donde $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ pertenecen a $\mathbb{R}^3$.

Al vector $u \times v \in \mathbb{R}^3$ así definido, se le llama ***producto vectorial*** de u y v.

Propiedades del producto vectorial

Proposición 1

Cualesquiera sean u y v vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ se verifica que el vector $u \times v$ es ortogonal tanto a u como a v. En símbolos,

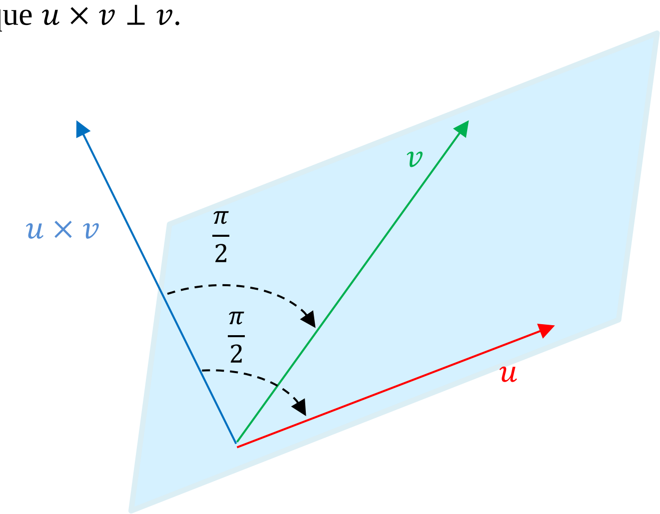
$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0_v\}:\ u \times v \perp u \ \wedge\ u \times v \perp v.$$

<u>*Demostración*</u>

Probar que $u \times v \perp u$ es equivalente a probar que $(u \times v) \cdot u$, según la definición de ortogonalidad entre vectores. Así

$$(u \times v) \cdot u = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\ \ a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1) \cdot (a_1, a_2, a_3) =$$
$$= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)a_1 + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)a_2 + (\, a_1\, b_2 - a_2\, b_1)a_3 =$$
$$= a_2\, b_3 a_1 - a_3\, b_2 a_1 + a_3\, b_1 a_2 - a_1\, b_3 a_2 + \ a_1\, b_2 a_3 - a_2\, b_1 a_3 = 0$$

En forma análoga se prueba que $u \times v \perp v$.



<u>*Proposición 2*</u>

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3: \|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

(A esta igualdad se la conoce con el nombre de *Identidad de Lagrange*)

<u>*Demostración*</u>

Para el alumno.

<u>*Proposición 3*</u>

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0_v\}: \|u \times v\| = \|u\|\ \|v\|\ \sin\alpha$$

donde α es la medida del ángulo entre u y v.

<u>*Demostración*</u>

Partimos de la Proposición 2

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \qquad (1)$$

Si llamamos α a la medida del ángulo entre u y v, es claro que

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \Longrightarrow u \cdot v = \|u\|\,\|v\|\,\cos\alpha \Longrightarrow (u \cdot v)^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2\,\cos^2\alpha$$

Sustituyendo en la identidad de Lagrange (1), tenemos

$$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\,\|v\|^2\,\cos^2\alpha$$

$$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2\,(1-\cos^2\alpha) \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta la identidad Pitagórica

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

Sustituyendo en (2) se obtiene

$$\|u\times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2\,\sin^2\alpha$$

Ahora bien, como α es la medida del ángulo entre u y v, es claro que $0 \le \alpha \le \pi$, por lo tanto $\sin\alpha \ge 0$, $\forall\,\alpha: 0 \le \alpha \le \pi$, en consecuencia:

$$\|u\times v\| = \|u\|\,\|v\|\,\sin\alpha$$

<u>Proposición 4</u>

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3: u\times v = -(v\times u).$$

<u>Demostración</u>

Queda para el alumno.

<u>Proposición 5</u>

$$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^3:\ u\times(v+w) = u\times v + u\times w.$$

<u>Demostración</u>

Queda para el alumno.

<u>Proposición 6</u>

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \forall\, u, v \in \mathbb{R}^3:\ u\times(av) = (au)\times v = a(u\times v).$$

<u>Demostración</u>

Queda para el alumno.

<u>Proposición 7</u>

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0_v\}:\ u \times v = 0_v \Leftrightarrow u \parallel v.$$

Demostración

Como por Proposición 3

$$\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\|\ \sin\alpha$$

el producto vectorial $u \times v$ se puede escribir

$$u \times v = (\|u\|\,\|v\|\ \sin\alpha)\, w = 0_v$$

siendo w un vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que el vector $u \times v$.

Decir que

$$u \times v = (\|u\|\,\|v\|\ \sin\alpha)\, w = 0_v$$

es equivalente a decir que $\sin\alpha = 0$ dado que hemos supuesto $u \neq 0_v$ y $v \neq 0_v$.

Luego,

$$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0\ \vee \alpha = \pi \Leftrightarrow u \text{ y } v \text{ tienen la misma dirección} \Leftrightarrow u\ y\ v \text{ son paralelos.}$$

Proposición 8

a) $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0_v$

b) $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$

c) $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$

d) $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

Demostración

Queda para el alumno.

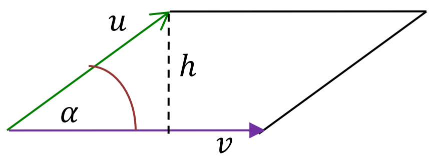
Proposición 9

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R}^3 - \{0_v\}:\ \|u \times v\|\ \ es\ el\ área\ del\ paralelogramo\ de\ lados\ u\ y\ v.$$

Demostración

De acuerdo con las nociones elementales de geometría, el área del paralelogramo de la figura es $A = h\,\|v\|$, pero $h = \|u\|\,\sin\alpha$, siendo α la medida del ángulo entre los vectores $u\ y\ v$, sustituyendo y teniendo en cuenta la Proposición 3 de producto vectorial se tiene

$$A = \|u\|\,\|v\|\,\sin\alpha = \|u \times v\|$$



Proposición 10

$\forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^3 - \{0_v\}$: $|u \cdot (v \times w)|$ es el volumen de un paralelepípedo de aristas u, v y w.

Demostración

Queda para el alumno.

Nota

Dados $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, sabemos que

$$u \times v = (\, a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\quad a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1)$$

o bien

$$u \times v = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, \vec{i} + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\vec{j} + (\, a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, \vec{k}$$

En visto de ello, hacemos el siguiente acuerdo: $u \times v$ puede considerarse formalmente expresado por el desarrollo del siguiente determinante por medio de los cofactores de los elementos de la primera fila

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad ④$$

Debemos tener en cuenta que es un acuerdo puramente notacional, basado exclusivamente en la forma de la expresión ④.

Ejercicios

***13.-** Determine el área del triángulo de vértices* $(0, -2, 3), (1, 0, 4), (2, 1, 3)$.