Unidad VII: Vectores, matrices y determinante

- **Espacio Vectorial** K^{n}

Sea K el cuerpo de los $\mathbb{R}$ o el de los $\mathbb{C}$ y $\mathrm{n}\epsilon\mathbb{N}$, se define el espacio vectorial

$$\mathrm{K}^{\mathrm{n}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \;/ \forall i = 1,2,\dots,n: x_i \epsilon \mathrm{K}\}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow$ vector de n componentes o n-upla

Ejemplos:

$$\mathbb{C}^4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \;/ \forall i = 1,2,3,4: z_i \epsilon\ \mathbb{C}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \;/ \forall i = 1,2,3: a_i \epsilon\ \mathbb{R}\}$$

<u>Igualdad en K^{n}</u>

Dados los vectores $v = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$ y $w = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$.

$$v = w \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\dots,n: a_i = b_i$$

<u>Suma en $\mathbf{K}^{\mathbf{n}}$</u>

Sean $v = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$ y $w = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$.

$$v + w \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n + b_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$$

Observar que " $+$ " **es ley de composición interna en $\mathbf{K}^{\mathbf{n}}$**

<u>Producto de escalar por un vector</u>

Sean $\alpha \epsilon \mathrm{K}$ (número real o complejo) y $v = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$

$$\alpha . v \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha . a_1, \alpha . a_2, \dots, \alpha . a_i, \dots, \alpha . a_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$$

Observar que "**.**" **es ley de composición externa en $\mathbf{K}^{\mathbf{n}}$**

<u>Espacio Vectorial K^{n}</u>

<u>Propiedad:</u> El conjunto de vectores K^{n} con la suma y el producto de escalar por vector tiene estructura de **espacio vectorial**.

$$(\mathrm{K}^{\mathrm{n}}, +, K, \ .)\ \text{espacio vectorial}$$

Demostración: Se prueba que se cumplen los siguientes axiomas:

i. $+$ es asociativa

ii. $+$ es conmutativa

iii. $+$ tiene elemento neutro , $\exists 0_v = 0_n = (0,0,\ldots,0)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$

iv. $+$ verifica la existencia de vector opuesto

$\forall v = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)\ \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}, \exists -v = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_i, \ldots, -a_n) \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$

($\mathbf{K}^{\mathbf{n}}, +$) Grupo Abeliano

v. Asociatividad mixta: $\alpha, \beta \epsilon \mathrm{K}$, $v \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$

$$(\alpha.\beta).v = \alpha.(\beta.v)$$

vi. Distributividad en el producto escalar por vector

- ✓ $\alpha \epsilon \mathrm{K}$, $v_1, v_2 \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$: $\alpha.(v_1 + v_2) = \alpha.v_1 + \alpha.v_2$
- ✓ $\alpha, \beta \epsilon \mathrm{K}$, $v \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$: $(\alpha + \beta).v = \alpha.v + \beta.v$

vii. $1 \epsilon \mathrm{K}$, $v \epsilon \mathrm{K}^{\mathrm{n}}$: $\quad 1.v = v$

Por lo tanto ($\mathrm{K}^{\mathrm{n}}, +, K, .$) tiene estructura de espacio vectorial

Ejemplo:

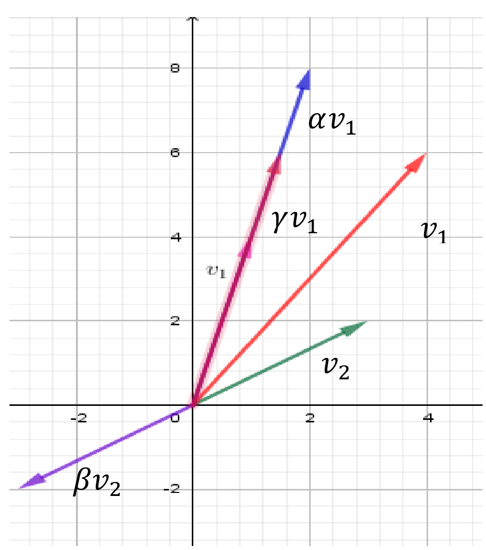
Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) / (a_1 \epsilon \mathbb{R} \wedge a_2 \epsilon \mathbb{R})\}$

v_1 =(1,4) y v_2 =(3,2) vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^2$ y los escalares $\alpha = 2, \beta = -1$, $\gamma = \frac{3}{2}$ en el cuerpo $\mathbb{R}$.

$v_1 + v_2 = (1,4) + (3,2) = (1 + 3,4 + 2) = (4,6)$

$\alpha v_1 = 2(1,4) = (2.1,2.4) = (2,8)$

$\beta v_2 = (-1).(3,2) = \big((-1).3, (-1).2\big) = (-3,-2)$



$\gamma v_1 = \frac{3}{2}(1{,}4) = \left(\frac{3}{2}.1, \frac{3}{2}.4\right) = \left(\frac{3}{2}, 6\right)$

Propiedad: Dado el espacio vectorial $(\mathrm{K}^n, +, K, \ .)$, entonces:

i. $0\epsilon\mathrm{K}, v\epsilon\mathrm{K}^n: 0.v = 0_v$

ii. $\alpha\epsilon\mathrm{K}, 0_v\epsilon\mathrm{K}^n: \ \alpha.0_v = 0_v$

iii. $\alpha\epsilon\mathrm{K}, v\epsilon\mathrm{K}^n: (-\alpha).v = -(\alpha v)$

$$(-1).v = -v$$

Producto interior en K^n

El siguiente producto utiliza dos vectores de K^n pero el resultado es un número real.

Sean $v = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)\ \epsilon\mathrm{K}^n$ y $w = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)\ \epsilon\mathrm{K}^n$

$$v \circ w \stackrel{\text{def}}{=} a_1.b_1 + a_2.b_2 + \cdots + a_i.b_i + \cdots + a_n.b_n \epsilon\mathrm{K}$$

$v \circ w$ se lee "v producto interior w"

Ejemplo:

$(-2{,}4{,}3) \circ (1{,}0,-5) = (-2).1 + 4.0 + 3.(-5) = (-2) + 0 + (-15) = -17 \rightarrow$ número real

- **Matrices**

Dados los conjuntos finitos I_n = {1, 2, 3, . . . ,i,..., n} y I_m = {1, 2, 3, . . . ,j,..., m}.

El producto cartesiano entre ellos está dado por:

$I_n \times I_m$= {1, 2, 3, . . . , i,..., n}× {1, 2, 3, . . . , j,..., m}= $\{(i,j)/(i \in I_n \wedge j \in I_m)\}$

Ejemplo:

$\boldsymbol{I_2}$ = {1, 2}

$\boldsymbol{I_3}$ = {1, 2, 3}

$\boldsymbol{I_2} \times \boldsymbol{I_3}$={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)}

Definición:

Sea el conjunto $A \neq \emptyset, A \subset K$ (K es el conjunto de los números reales o complejos)

Se define la función

$$\begin{array}{cccc} M: & I_n \times I_m & \rightarrow & A \\ & (i,j) & & a_{ij} \end{array}$$

Como el dominio de la función M es finito el codominio (rango) también lo es. Las imágenes se ubican en una tabla de doble entrada, con n filas y m columnas, teniendo en cuenta los subíndices ij.

$i \rightarrow$ indica la fila

$j \rightarrow$ indica la columna

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \text{Columna } j & & \phantom{a_{1m}} \end{array} & \\ M = & \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \text{Fila } i \text{ o fila } i\text{-ésima} \\ \epsilon K^{n\times m} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$K^{n\times m} \rightarrow$ conjunto de todas las matrices de n filas y m columnas, con elementos en el cuerpo K

$n \times m$ de denomina **orden de la matriz**, n indica la cantidad de filas y m la cantidad de columnas de la matriz.

Notación compacta: Sea $M \epsilon K^{n\times m}$

$$M = (a_{ij}) \quad \text{con } i = 1,2,\ldots,n$$

$$j = 1,2,\ldots,m$$

Ejemplo:

1) $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in K^{2\times 3}$

2) $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 5 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

3) $T = \begin{pmatrix} 2i & -6 & i \\ 0 & \frac{2}{5} & \sqrt{7} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

Igualdad en $K^{n\times m}$

Dos matrices del mismo orden son iguales **si y sólo si** sus elementos son ordenadamente iguales.

Dadas las matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,m}}$ y B= $\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,m}}$

$$A=B \quad si\ y\ sólo\ si \quad a_{ij}=b_{ij}\ ,\ \begin{array}{l}\forall i=1,2,\dots,n\\ \forall j=1,2,\dots,m\end{array}$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 5 & -1\\ \sqrt{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\quad , \quad B=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{5}\\ \sqrt{2} & 3\\ -6 & 0\end{pmatrix}$$

$A\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B\in\mathbb{R}^{3\times 2}$, las matrices A y B tienen el mismo orden, pero sus elementos no son ordenadamente iguales, pues, $a_{11}=-3$ y $b_{11}=0$ luego $a_{11}\neq b_{11}$.

Por lo tanto $A\neq B$

Suma de matrices

Sean las matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,m}}$ y B= $\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,m}}$

$$A+B \overset{\text{def}}{=} \left(a_{ij}+b_{ij}\right)\ ,\ \begin{array}{l}\forall i=1,2,\dots,n\\ \forall j=1,2,\dots,m\end{array}$$

Observar que " $+$ " **es ley de composición interna en** $\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$

Ejemplo: Sean las matrices $A\in\mathbb{C}^{2\times 3}$, $B\in\mathbb{C}^{2\times 3}$, dada por

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2i\\ \frac{2}{3} & 5-i & \sqrt{3}i\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}4i & -3 & i\\ 1 & 2i & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+4i & -1-3 & 2i+i\\ \dfrac{2}{3}+1 & 5-i+2i & \sqrt{3}i+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4i & -4 & 3i\\ \dfrac{5}{3} & 5+i & \sqrt{3}i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 3}$$

Producto de escalar por matriz

Sea el escalar $\alpha \in K$ y la matriz $A = (a_{ij}),\begin{matrix} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,m \end{matrix}$

$$\alpha . A \overset{\text{def}}{=} (\alpha . a_{ij}) \,,\ \begin{matrix} \forall i = 1,2,\dots,n \\ \forall j = 1,2,\dots,m \end{matrix}$$

Observar que "." (producto de escalar por matriz) **es ley de composición externa en** $\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$

Ejemplo: $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ y $\alpha = 3$

$$3A = \begin{pmatrix} 3.2 & 3.(-1) & 3.2i \\ 3.\frac{2}{3} & 3.(5-i) & 3.\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6i \\ 2 & 15-3i & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

- **Espacio vectorial de matrices**

Propiedad:

El conjunto de matrices $\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$ con la suma y el producto de escalar por matriz, tiene estructura de **espacio vectorial.**

$(\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}, +, K, .)$ espacio vectorial

Demostración:

Se prueba que se verifican las siguientes condiciones

1. "+" es asociativa: $\forall A, B, C \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}: (A+B)+C = A+(B+C)$
2. "+" es conmutativa: $\forall A, B \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}: A+B = B+A$
3. Existencia de neutro para la "+": $\exists 0_{m\times n} \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m} / \forall A \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}: A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$

   Matriz nula $0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (matriz con m fila y n columnas, todas nulas)

4. "+" verifica la existencia de Matriz opuesta: $\forall A = (a_{ij}),\begin{matrix} i = 1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{matrix}$

   $\exists -A = (-a_{ij}),\begin{matrix} i = 1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{matrix}$

   tal que $\quad A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$

$(\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}, +)$ es Grupo Abeliano

5. Asociatividad mixta: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}, \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$:

$$(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.\mathrm{A})$$

6. Distributividad: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{K}, \forall \mathrm{A} \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$:
   i. $(\alpha + \beta).\mathrm{A} = \alpha.\mathrm{A} + \beta.\mathrm{A}$
   ii. $\alpha.(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha.\mathrm{A} + \alpha.\mathrm{B}$
7. $1 \in \mathrm{K}, \mathrm{A} \in \mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}$: $1.A = A$

$\therefore (\mathrm{K}^{\mathrm{n}\times m}, +, K, .)$ espacio vectorial

- **Matriz asociada a una relación**

Sean A y B conjuntos finitos, donde $Card\ A = n$ y $Card\ B = m$, dados por

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m\}$, y

R una relación de A en B (es decir $R \subset A \times B$).

Se define la matriz:

$M_R = (m_{ij})$ con $i = 1,2, \dots, n$

$j = 1,2, \dots, m$

Tal que $m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (a_i, b_j) \in R \\ 0 & si\ (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

La matriz M_R se denomina **matriz asociada a la relación** R

Ejemplo: Sean los conjuntos finitos $P = \{p, q, t\}$, $S = \{v, f\}$, y la relación dada por

$R = \{(p, v), (q, v), (q, f), (t, f)\}$.

Determinaremos la matriz asociada a R.

Observamos que $Card\ P = 3$, $Card\ S = 2$ y $R \subset P \times S$. Luego

$M_R \in \mathrm{K}^{3\times 2}$ y está dada por

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso particular: **<u>Matriz asociada a un grafo</u>**

Sean los conjuntos A y B tal que $A = B$ con $Card\ A = n$.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ y R una relación definida en A (es decir $R \subset A \times A$)

La matriz asociada al grafo G dado por R, es:

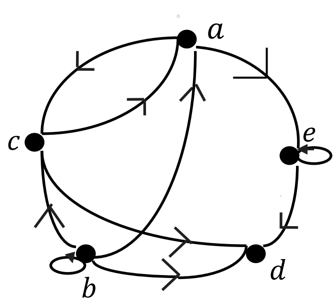
$M_G = (m_{ij})$ con $i = 1,2, \dots, n$

$j = 1,2, \dots, n$

Tal que $m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (a_i, a_j) \in R \\ 0 & si\ (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$

Ejemplo: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $Card\ A = 5$

Dado el grafo G, construimos la matriz asociada al mismo.

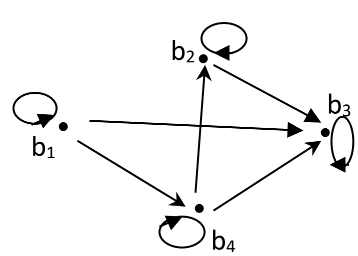


$$M_G \in \mathrm{K}^{5\times5},\ M_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, conociendo la matriz es posible construir el grafo.

Ejemplo: Dada la matriz M_G, determinaremos el grafo G

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Producto de matrices

Para que dos matrices A y B puedan multiplicarse, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz. La matriz producto C tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz.

En símbolos:

$A \in K^{n \times p}$ y B$\in K^{p \times m}$

$A.B = C \in K^{n \times m}$

Observación: Las filas y las columnas son vectores. Los vectores filas de la primera matriz tienen p componentes y los vectores columna de la segunda matriz también tienen p componentes. Los elementos de la matriz producto se obtienen haciendo ordenadamente
el producto interior entre las filas de A y las columnas de B.

En notación compacta:

$A = (a_{ik})$ con $i = 1,2, \dots, n$; $k = 1,2, \dots, p$

$B = (b_{kj})$ con $k = 1,2, \dots, p$; $j = 1,2, \dots, m$

donde

$A.B = C = (c_{ij})$ con $i = 1,2, \dots, n$; $j = 1,2, \dots, m$

tal que $c_{ij} = (fila\ i)_A \circ (columna\ j)_B = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} . b_{kj}$

Donde el desarrollo de la sumatoria dada es: $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} . b_{kj} = a_{i1}. b_{1j} + a_{i2}. b_{2j} + \dots + a_{ip}. b_{pj}$

Ejemplo: Sean las matrices, dadas por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$A \in K^{3 \times 2}$ y B$\in K^{2 \times 4}$, luego $A.B \in K^{3 \times 4}$

$$A.B = C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 0 & 15 \\ 7 & 4 & -1 & 21 \end{pmatrix}$$

Cálculo auxiliares:

$c_{11} = (-1).3 + 2.1 = -1$ $\quad$ $c_{21} = 0.3 + 3.1 = 3$ $\quad$ $c_{31} = 1.3 + 4.1 = 7$

$c_{12} = (-1).0 + 2.1 = 2$ $\quad$ $c_{22} = 0.0 + 3.1 = 3$ $\quad$ $c_{32} = 1.0 + 4.1 = 4$

$c_{13} = (-1).(-1) + 2.0 = 1$ $\quad$ $c_{23} = 0.(-1) + 3.0 = 0$ $\quad$ $c_{33} = 1.(-1) + 4.0 = -1$

$c_{14} = (-1).1 + 2.5 = 9$ $\quad$ $c_{24} = 0.1 + 3.5 = 15$ $\quad$ $c_{34} = 1.1 + +4.5 = 21$

Nota:

1. El producto de matrices no es conmutativo
2. El producto de matrices es asociativo

- **Traspuesta o transpuesta de una matriz**

Sea la matriz $A \in K^{n \times m}$.

Si cambiamos las filas por las columnas en la matriz A, obtenemos una nueva matriz $B \in K^{m \times n}$ llamada **traspuesta** de A. Escribimos $A^t = B$.

$A^t = B = (b_{ij})$ si y sólo si $b_{ij} = a_{ji}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Propiedades de la trasposición

1. $A \in K^{n\times m}: (A^t)^t = A$
2. $A, B \in K^{n\times m}: (A + B)^t = A^t + B^t$
3. $\alpha \in K, A \in K^{n\times m}: (\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $A \in K^{n\times p}$ y B$\in K^{p\times m}: (A.B)^t = B^t.A^t \in K^{m\times n}$

5. $A = (z_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$

   $\bar{A} = (\bar{z}_{ij}) \rightarrow$ matriz conjugada

   $* \rightarrow$ operador

   $A^* = (\bar{A})^t = \overline{A^t}$

<u>Matrices cuadradas</u>

Si el número de filas coincide con el número de columnas, entonces decimos que la matriz es cuadrada.

$$A \in K^{n\times n} \rightarrow A \text{ es de orden } n$$

Observación: La suma y el producto de matrices cuadradas de igual orden, son leyes de composición interna.

<u>Propiedad:</u> $K^{n\times n}$ con la suma y la multiplicación es **Anillo no conmutativo con unidad**

$$(K^{n\times n}, +, .) \text{ Anillo no conmutativo con unidad}$$

Demostración:

Se prueba que

i. "+" es asociativa

ii. "+" es conmutativa

iii. "+" tiene elemento neutro: Matriz nula $0_{n\times n}$

iv. En"+" existe opuesto para cada elemento:$\forall\, A \in K^{n\times n}$, $\exists -A \in K^{n\times n}$

v. "." es asociativa

vi. "." Tiene neutro: matriz unidad o identidad: $\mathbb{I}_{n\times n} = \delta_{ij}$ tal que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

vii. Propiedad distributiva: $A, B, C \in K^{n\times n}$: $A.(B + C) = A.B + A.C$; $(A + B).C = A.C + B.C$

Por lo tanto $(K^{n\times n}, +, .)$ tiene estructura de Anillo no conmutativo con unidad

Matriz cuadrada inversible

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es inversible si existe $B \in K^{n\times n}$ tal que

$$A.B = B.A = \mathbb{I}_{n\times n}$$

Propiedades

1. Si $A \in K^{n\times n}$ es inversible entonces su inversa $A^{-1} \in K^{n\times n}$ es única
2. Si A, B son matrices inversibles del mismo orden, entonces $A.B$ es también inversible. Además $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Observación: Veremos luego una condición necesaria y suficiente que debe cumplir la matriz cuadrada para tener inversa.

Matrices cuadradas particulares

Sea la matriz cuadrada $A \in K^{n\times n}$

$i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$i = j$ diagonal principal

$i > j$

En notación compacta: $A = (a_{ij})$ con $i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,n$

I) Matrices triangulares

i.Matriz triangular superior

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es triangular superior si $\forall i > j$: $a_{ij} = 0$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Observar que los elemento debajo de la diagonal principal son todos nulos

ii. Matriz triangular inferior

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es triangula inferior si $\forall i < j$: $a_{ij} = 0$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 4 & 0 \\ 6 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

Observar que los elemento arriba de la diagonal principal son todos nulos.

II) <u>**Matrices diagonales**</u>

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es matriz diagonal si $\forall i \neq j$: $a_{ij} = 0$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{11} \end{pmatrix}$

Caso particular: Una matriz diagonal es matriz escalar si los valores de la diagonal son iguales

$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in K$

Observar que B se puede escribir como el escalar α por la matriz identidad

$B = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III) **Matriz simétrica**

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es simétrica si $A = A^t$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{7} \\ -3 & 5 & 4 \\ \sqrt{7} & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{7} \\ -3 & 5 & 4 \\ \sqrt{7} & 4 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$\boldsymbol{IV})$ **Matriz antisimétrica**

Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

A es simétrica si $A = -A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & \sqrt{7} \\ 3 & 0 & 4 \\ -\sqrt{7} & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{7} \\ -3 & 0 & -4 \\ \sqrt{7} & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$-A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & \sqrt{7} \\ 3 & 0 & 4 \\ -\sqrt{7} & -4 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Observación: En una matriz antisimétrica los elementos de la diagonal principal son 0 (cero).

- **Operaciones elementales sobre cualquier matriz de $K^{n\times m}$**

Sea la matriz $A \in K^{n\times m}$

Es posible realizar cambios en la matriz A que permitan obtener una nueva matriz equivalente a la dada.

Operaciones elementales sobre A:

1. Permutar una fila (columna) con otra fila (columna).
2. Multiplicar un escalar distinto de cero $\alpha \neq 0$ por una fila (columna).
3. Sumar a una fila (columna) otra fila (columna).

Definición: $A \in K^{n\times m}, B \in K^{n\times m}$

Se dice que B es equivalente a A, si es posible obtener B aplicando operaciones elementales a A.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\overset{\longrightarrow}{permuto}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{4}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_1 + f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

B es equivalente a A, pues B se obtuvo aplicando operaciones elementales en A.

Las matrices equivalentes tienen el mismo rango. Es posible obtener el determinante de una a partir del determinante de la otra. Si están asociadas a un sistema de ecuaciones tienen el mismo conjunto solución.

- **Método de Gauss - Jordan**

Sea la matriz $A \in K^{n\times m}$

Este método aplica operaciones elementales sobre las filas de la matriz A con el objetivo de obtener una matriz equivalente que tenga en sus columnas el mayor número posible de vectores canónicos distintos (vectores que tienen un "1" y los demás elementos son "0").

Usaremos este método para:

- Hallar el rango de una matriz.
- Determinar, si existe, la matriz inversa de una matriz cuadrada.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Procedimiento para aplicar el método de Gauss Jordan

1. Elegir en A algún elemento no nulo. Dividir la fila de ese elemento por ese número.
   Se obtuvo un "1" (pivote) en la posición del elemento elegido.
2. Aplicar operaciones elementales a las filas para obtener "0" en los demás elementos de la columna del pivote.
   Se obtuvo un vector columna canónico.
3. Se reitera el paso 1 eligiendo un elemento no nulo ubicado en alguna fila distinta de las filas de los pivotes anteriores.
4. El procedimiento termina cuando no es posible reiterar el paso 3.

- **Rango de una matriz**

Sea la matriz $A \in K^{n\times m}$. El rango de una matriz es un número natural que indica el número de columnas independientes de la matriz o , lo que es lo mismo, el número de filas independientes de la matriz.

Aplicando Gauss - Jordan a la matriz, el rango es igual al número de vectores columnas canónicos distintos que se obtuvo al finalizar el método.

Denotamos al rango de una matriz A como $rg\ A$ o $r(A)$

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \\ f_1+f_3 & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{c} f_1 + (-1).f_2 \\ f_3 + f_2 \end{array} & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 8 & 0 & -13 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observamos que, al finalizar la aplicación del método de Gauss Jordan, se obtuvo 2 vectores columna canónico, por lo tanto

$$r(A) = 2$$

- **Inversa de una matriz con Gauss- Jordan**

Sea la **matriz cuadrada** $A \in K^{n\times n}$

A	$\mathbb{I}_{n\times n}$
$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{I}_{n\times n}$	A^{-1}

1. Se aplica simultáneamente Gauss - Jordan a la matriz A y a la matriz identidad del mismo orden que A.

2. Se desea obtener, en el cuadro de la izquierda, una matriz equivalente a A con n vectores canónicos columnas diferentes. Si esto no es posible porque se anula alguna fila en la matriz equivalente a la matriz A, se concluye que la matriz dada no tiene inversa.

3. Si se obtuvieron los n vectores columnas canónicos se los ordena permutando las filas, con el objeto de obtener en el cuadro de la izquierda la matriz identidad y en el cuadro de la derecha se obtiene la matriz inversa de A, es decir A^{-1}.

Ejemplo: Hallar, si existe, la inversa de la matriz A ,dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{l rrr|rrr}
 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
f_1 + f_2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
f_3 + (-3)f_2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{2-7}
 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
f_2 + (-1)f_1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
f_3 + f_1 & -6 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ \cline{2-7}
 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
(-1)f_3 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \cline{2-7}
f_1 + (-5)f_3 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
f_2 + 3f_3 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cline{2-7}
 & 0 & 0 & 1 & 6 & -9 & 5 \\
f_1 \leftrightarrow f_3 & 0 & 1 & 0 & -4 & 6 & -3 \\
 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cline{2-7}
 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & -4 & 6 & -3 \\
 & 0 & 0 & 1 & 6 & -9 & 5 \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbb{I}_{3\times 3}}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}}
\end{array}
$$

De donde, la inversa de A es la matriz: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}$

- **DETERMINANTES**

El determinante es una función que a cada matriz cuadrada le asigna un número.

$$\begin{aligned} D : K^{n\,x\,n} &\rightarrow K \\ A &\mapsto D(A) \end{aligned}$$

D es función determinante si verifica los siguientes axiomas:

Ax 1) $D(A_1, A_2,\ldots,A_J + A_{J'},\ldots,A_n) = D(A_1, A_2,\ldots, A_J,\ldots, A_n) + D(A_1, A_2,\ldots,A_{J'},\ldots,A_n)$, para $j = 1, 2, \ldots, n$

Ax 2) $\forall \alpha \in K$, $D(A_1, A_2,\ldots,\alpha A_J,\ldots,A_n) = \alpha D(A_1, A_2,\ldots, A_J,\ldots, A_n)$

Ax 3) Siempre que la columna $A_j = A_k$ $(k \neq j)$: $D(A_1, A_2,\ldots,A_J,\ldots,A_k,\ldots,A_n) = 0$

Ax 4) $D(\mathbb{I}_{n\,x\,n}) = 1$

Ejemplo: Sea $A \in K^{2\,x\,2}$, esto es $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $D(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$, la función así definida, verifica los axiomas?

<u>**Propiedades:**</u> Sea la matriz cuadrada $A \in K^{n\times n}$, dada en términos de sus columnas

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$$

1. Si una de las columnas de la matriz es el vector nulo, su determinante es 0. Esto es, si

   $A = (A_1, A_2,\ldots, 0,\ldots, A_n)$, probar que $D(A) = 0$.

   <u>Demostración</u>:

   Tener en cuenta que el vector nulo 0_n, puede ser escrito como $0.A_j$, siendo A_j un vector cualquiera.

   $D(A) = D(A_1, A_2,\ldots, 0\,A_j,\ldots, A_n) = 0\,D(A_1, A_2,\ldots, A_j,\ldots, A_n) = 0$ (Ax 2)

2. Si en una matriz se permutan dos columnas, el determinante es opuesto al de la matriz dada.

   Si $A = (A_1, A_2,\ldots, A_j,\ldots,A_k,\ldots,A_n)$ y $\tilde{A} = (A_1, A_2,\ldots, A_k,\ldots,A_j,\ldots,A_n)$, probar que $D(\tilde{A}) = -D(A)$

Observación: Si se realizan un número par de permutaciones, el determinante no varía. En cambio, si se efectúa un número impar de permutaciones, los determinantes resultan opuestos.

3. Si a una columna de una matriz se le suma otra columna multiplicada por un escalar, el determinante no varía.

Si $A = (A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$, y $\forall \alpha \in K$; $\tilde{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_j + \alpha A_k, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$, entonces,

$D(A) = D(\tilde{A})$

Observación: Hemos probado que si una matriz tiene 2 columnas proporcionales, su determinante es 0.

4. Generalizando la propiedad anterior podemos enunciar: “Si a una columna de una matriz se le suma una combinación lineal de las restantes columnas, el determinante no varía”.

Se demuestra que:

a) $A, B \in K^{n \times n} : D(A.B) = D(A) . D(B)$.

b) $A, A^t \in K^{n \times n} : D(A) = D(A^t)$.

c) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

<u>NOTA</u>: La propiedad 4.b) nos permite afirmar que los axiomas y propiedades anteriores son verdaderas, si son enunciadas para las filas de una matriz.

- **Obtención del determinante de una matriz aplicando Axiomas y propiedades**

Dada una matriz $A \in K^{n\times n}$ se aplican operaciones elementales a sus filas y columnas con el objeto de obtener una matriz triangular equivalente a la dada. En cada paso se debe tener en cuenta el comportamiento de la función determinante con respecto a la operación elemental que se aplica. La propiedad más usada es la propiedad 4.c).

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(A)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&2&-2\\2&-1&1\end{vmatrix}\underset{\substack{f_2+(-1)f_1\\f_3+(-2)f_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&-1&3\end{vmatrix}\underset{C_2+\frac{1}{3}C_3}{=}\begin{vmatrix}1&-\frac{1}{3}&-1\\0&\frac{5}{3}&-1\\0&0&3\end{vmatrix}\underset{\text{Por propiedad 4.c)}}{=}1.\tfrac{5}{3}.3=5$$

- **EXISTENCIA DE LA FUNCION DETERMINANTE**

Presentaremos aquí la función determinante para una matriz de orden n en forma recurrente.

Noción de Cofactor de un elemento

Sea A ∈ $K^{n\times n}$,esto es $A=(a_{ij})$ con $\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,n}$

El cofactor del elemento a_{ij} está dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D(A(i/j)) \text{ (esto es un numero real)}$$

donde A(i/j) es la matriz que se obtiene suprimiendo la fila i y la columna j de la matriz A.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$

Cofactores de elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-2\\-1&1\end{vmatrix}=1.(2-2)=0$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=(-1).(1+4)=-5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=1.(-1-4)=-5$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&1\end{vmatrix}=(-1).(0-1)=1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=1.(1+2)=3$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=(-1).(-1-0)=1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1.(0+2) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1).(-2+1) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(2-0) = 2$$

Con los cofactores se puede armar la matriz de cofactores de A, que denotaremos como $CofA$ o bien (A_{ij})

Dada la matriz cuadrada $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores de A está dada por

$$Cof\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \dots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nj} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Para la matriz A dada en el ejemplo anterior, la matriz de cofactores está dada por

$$Cof\ A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Desarrollo del determinante por una de las filas o columnas de la matriz**

Sea la matriz cuadrada $A \in K^{n \times n}$

Cálculo del determinante de A a través de la fila i:

$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$ para cada $i = 1,2,\dots,n$

El determinante se calcula como la suma de los productos de los elementos de la fila i por sus cofactores. También se puede trabajar con cualquier columna.

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo del $D(A)$ por la $fila\ 1 \rightarrow D(A) = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} = 1.0 + 0.(-5) + (-1).(-5) = 5$

Cálculo del $D(A)$ por la $fila\ 2 \rightarrow D(A) = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} = 1.1 + 2.3 + (-2).1 = 5$

Cálculo del $D(A)$ por la $columna\ 2 \rightarrow D(A) = a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32} = 0.(-5) + 2.3 + (-1).1 = 5$

Nota:

1. El determinante no varía si para su desarrollo se cambian de fila o columna.
2. Se demuestra que esta definición de función determinante verifica los cuatro axiomas.
3. Se demuestra que la función determinante es única.

Observación: Si A $\in$ $K^{4 \times 4}$, se necesitan 4 determinantes de orden 3, cada uno de ellos necesitan 3 determinantes de orden 2, entonces se necesitan 12 determinantes de orden 2, para obtener su desarrollo completo.

Si n = 5, necesitaremos 60 determinantes de orden 2 (12 x 5) y así sucesivamente.

Observamos que si la matriz es de orden grande, esta forma recurrente de trabajar nos conduce a un gran número de determinantes de orden 2. En forma práctica es conveniente aplicar propiedades para lograr una fila que tenga la mayor cantidad de elementos nulos (si el elemento es cero no hace falta calcular su cofactor). Luego se lo desarrolla por esa fila.

Propiedad: La suma de los productos de los elementos de una fila por los cofactores de otra fila es igual a cero (Ídem columnas)

Ejemplo: Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Cof\ A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$f_2 \circ Cof\ f_1 = a_{21}.A_{11} + a_{22}.A_{12} + a_{23}.A_{13} = 1.0 + 2.(-5) + (-2).(-5) = 0$

$f_3 \circ Cof\ f_2 = a_{31}.A_{21} + a_{32}.A_{22} + a_{33}.A_{23} = 2.1 + (-1).3 + 1.1 = 0$

$c_3 \circ Cof\ c_1 = a_{13}.A_{11} + a_{23}.A_{21} + a_{33}.A_{31} = (-1).0 + (-2).1 + 1.2 = 0$

- **Adjunta de una matriz**

Se la matriz $A \in K^{n\times n}$, la matriz Adjunta de A se obtiene trasponiendo la matriz de cofactores de A.

$$Adj\ A = (Cof\ A)^t$$

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores es $Cof\ A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Y la matriz adjunta de A es:

$$Adj\ A = (Cof\ A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La adjunta de una matriz cuadrada siempre existe y la usaremos para obtener la inversa de una matriz cuadrada (cuando sea inversible).

Conociendo que la suma de los productos de los elementos de una fila por sus cofactores es $D(A)$ y la propiedad anterior, se muestra el siguiente resultado.

Propiedad: Sea la matriz $A \in K^{n\times n}$

$$A.Adj\ A = Adj\ A.A = D(A).\mathbb{I}_{n\times n}$$

Ejemplo: Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $Adj\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A.\ Adj\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{matrix}}_{Cof\ f_1} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}}_{Cof\ f_2} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}}_{Cof\ f_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5\mathbb{I}_{3\times 3}$$

- **Condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa**

Sea la matriz cuadrada $A \in K^{n\times n}$

Teorema:

$A \in K^{n\times n}$ es inversible $\Leftrightarrow D(A) \neq 0$

<u>Demostración:</u>

$\Rightarrow$) Partiendo de la hipótesis que A tiene inversa, probaremos $D(A) \neq 0$

Por hipótesis

$$\exists B \in K^{n\times n} / A.B = B.A = \mathbb{I}_{n\times n}$$

A la igualdad

$$A.B = \mathbb{I}_{n\times n}$$

Aplicamos la función determinante miembro a miembro

$$D(A.B) = D(\mathbb{I}_{n\times n})$$

Por propiedad 4.a y Axioma 4

$$\underbrace{D(A).D(B)}_{\substack{ambos\ deben\ ser \\ distintos\ de\ 0, \\ para\ obtener\ un\ valor \\ no\ nulo}} = 1 \Rightarrow D(A) \neq 0$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis $D(A) \neq 0$, probaremos que $\exists A^{-1}$

Por una proposición vista anteriormente

$$A.Adj\ A = Adj\ A.A = \underbrace{D(A)}_{\substack{\neq 0\ por \\ hipótesis}} .\mathbb{I}_{n\times n}$$

Multiplicamos cada miembro por $\frac{1}{D(A)}$ y asociamos convenientemente.

$$A.\underbrace{\left(\frac{1}{D(A)}.Adj\ A\right)}_{A^{-1}} = \underbrace{\left(\frac{1}{D(A)}.Adj\ A\right)}_{A^{-1}}.A = \mathbb{I}_{n\times n}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)}.Adj\ A$$

■