UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS
Carreras: –Profesorado en Informática
–Programador Universitario en Informática
Asignatura: LÓGICA **AÑO: 2022**

UNIDAD 4 – SISTEMAS AXIOMÁTICOS – ÁLGEBRA DE BOOLE

1 – CLASIFICACIÓN DE LAS CIENCIAS

El conocimiento científico se diferencia de otros tipos de conocimientos por ser: **objetivo, verificable, comunicable, metódico, sistemático.**

Las ciencias se **clasifican** en: **formales** y **fácticas.**

Para ello se tiene en cuenta:

- el **objeto de estudio,**
- el **tipo de enunciados** que usa, y
- el **método** por el cual se **verifican** sus enunciados.

1.1. Ciencias Formales

Las **ciencias formales** estudian **entes formales,** construcciones **ideales** que sólo existen en la mente de quien las estudia. Estos entes formales son formas vacías de contenido, y por eso tienen aplicaciones en otros campos del saber, ya que pueden recibir cualquier tipo de contenido, al establecer correspondencias entre estos objetos formales y otros niveles de la realidad.

Se caracterizan por ser **exactas, racionales, sistemáticas.**

Los **enunciados** que usan son meras **relaciones entre signos,** son **fórmulas analíticas,** que se convalidan sólo por un análisis racional.

Las ciencias formales establecen la verdad o falsedad de sus enunciados por **métodos** puramente **lógicos.** Su demostración es **completa** y **definitiva.** La verdad así establecida en una **verdad formal.**

> Una proposición es **formalmente verdadera** cuando es **consecuencia lógica** de otras proposiciones previamente establecidas como verdaderas.
> Luego, la **verdad** de un enunciado, depende de la **estructura lógica.**

- Son ciencias **formales** la **Lógica** y la **Matemática.**

1.2. Ciencias Fácticas

El **objeto de estudio** de las **ciencias fácticas** son **hechos.** Procuran ser **objetivas**, dar información sobre la realidad, ser una representación de lo real.

Sus **enunciados** son **afirmaciones** acerca de **hechos,** hacen referencia a **objetos empíricos.**

Para **confirmar** o **refutar** la **verdad** de sus enunciados, las ciencias fácticas recurren a la **experiencia.** Sus verificaciones son **incompletas,** y por lo tanto, **temporarias.**

La verdad así establecida en una **verdad fáctica.**

> Un enunciado es **fácticamente verdadero** cuando lo afirmado en él es confirmado por el conjunto de cosas a que dicho enunciado hace referencia; es decir, cuando puede ser contrastado con la realidad. Su verdad depende de **datos empíricos.**

- Son ciencias fácticas la **Física**, la **Química,** la **Biología,** la **Historia,** la **Sociología,** la **Psicología, etc.**

2 – SISTEMAS AXIOMÁTICOS

El **método** que emplean las **ciencias formales** para establecer la **verdad o falsedad** de sus enunciados, es el **método axiomático.**

Para especificar un **sistema formal** se requiere:
- Un **alfabeto de símbolos.**
  Constituye el **vocabulario** de una disciplina científica.
- Un conjunto de **fórmulas bien formadas** (fbfs).
  Éstas son **cadenas finitas** de símbolos del alfabeto.
- Un conjunto de **axiomas.**
  Son fórmulas proposicionales que se toman como punto de partida y que se construyen con los términos primitivos.
  Se aceptan **sin demostración;** es decir, sin establecer su verdad o falsedad.
- Un conjunto finito de **"reglas de deducción".**
  Éstas permiten **deducir** una fbf. a partir de un conjunto finito de otras fbfs.

Con estos **cuatro** elementos se pueden construir **deducciones** a partir de los **axiomas,** por medio de aplicaciones sucesivas de las **reglas de deducción** para obtener **teoremas**. Luego, los **teoremas** son **fórmulas proposicionales** obtenidas de los axiomas por aplicación reiterada de las **reglas de inferencia.**

Ejemplo:
Términos Primitivos: Un conjunto **A** y una relación **R** definida en **A**
Axiomas
Ax.1) $\forall x \in A: \sim(x,x) \in R$
Ax.2) $\forall x,y \in A: ((x,y) \in R \Rightarrow \sim(y,x) \in R)$
Ax.3) $\forall x,y,z \in A: ((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$
Ax.4) $\forall x,y \in A: (x \neq y \Rightarrow (x,y) \in R \vee (y,x) \in R)$

3 – INTERPRETACIÓN Y MODELO

Lo que se pide de un **sistema formal** es que tenga **aplicación,** que sirva para describir un cierto estado de cosas.

Para ello es necesario asignar a los **términos primitivos** un **significado;** es decir, darles una **interpretación.**

Interpretar un sistema axiomático es asignar **significado** a sus términos primitivos, de manera tal que transforme las **variables** en **palabras** y los **axiomas** en **proposiciones.**

Si la **interpretación** es tal que todos los **axiomas** se transforman en **proposiciones verdaderas,** tendremos un **modelo** del sistema axiomático.
En caso contrario, tendremos un **contramodelo** o **contraejemplo.**

Modelo de un sistema axiomático es una **interpretación** que transforma los **axiomas** en **proposiciones verdaderas.**

Ejemplo:
Términos Primitivos: $A = \mathbb{N}$; $R =$ "<"
Axiomas
Ax.1) $\forall x \in \mathbb{N}: \sim(x < x)$
Ax.3) $\forall x,y,z \in \mathbb{N}: (x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$

Ax.2) $\forall x,y \in \mathbb{N}: (x < y \Rightarrow \sim(y<x))$ **Ax.4)** $\forall x,y \in \mathbb{N}: (x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x)$

4 – ÁLGEBRA DE BOOLE

George Boole (1815–1864) fue un matemático inglés autodidacta. En 1847, en respuesta a una controversia entre Augustus De Morgan y Sir William Hamilton, publica el folleto **"The Mathematical Analysis of Logic",** en el que utiliza técnicas algebraicas para tratar expresiones de la Lógica Proposicional.

En la actualidad, el Álgebra de Boole se aplica en el ámbito del **diseño electrónico.**

El **Álgebra de Boole** es una **estructura algebraica** que esquematiza las operaciones lógicas: **"no", "y", "o", "si … entonces …",** y las operaciones entre **conjuntos: unión, intersección** y **complemento.**

Sea **B** un conjunto **no vacío,** cuyos **elementos** se denominan **variables.**

- En **B** se define **una** operación **unitaria** que se denota con **"´":** $´ : B \to B$, $a \mapsto a´$
- En **B** se definen **dos** operaciones **binarias** que se denotan con **"+"** y **"•"**

$$+ : B X B \to B,\ (a,b) \mapsto a + b \quad ; \quad \bullet : B X B \to B,\ (a,b) \mapsto a \bullet b$$

y que verifican los siguientes **axiomas:**

Ax.1) <u>**Asociatividad de "+"** y **"•"**</u>

$\forall a,b,c \in B: (a + b) + c = a + (b + c)$; $\forall a,b,c \in B: (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$

Ax.2) <u>**Conmutatividad de "+"** y **"•"**</u>

$\forall a,b \in B: a + b = b + a$; $\forall a,b \in B: a \bullet b = b \bullet a$

Ax.3) <u>**Distributividad**</u>

–de **"+"** respecto a **"•"**: $\forall a,b,c \in B: a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$

$(a \bullet b) + c = (a + c) \bullet (b + c)$

–de **"•"** respecto a **"+"**: $\forall a,b,c \in B: a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$

Ax.4) <u>**Elemento Neutro respecto de "+"** y **"•"**</u>

El **"0"**$\in$**B** para **+** : $a + 0 = a$; El **"1"**$\in$**B** para $\bullet$: $a \bullet 1 = a$

Ax.5) <u>**Complementario**</u>

$\forall a \in B, \exists a´ \in B: \ a + a´ = a´ + a = 1 \quad \wedge \quad a \bullet a´ = a´ \bullet a = 0$

Por cumplir todos estos axiomas, la **cuaterna (B,´,+,•)** es un **Álgebra booleana** o **Álgebra de Boole.**

<u>NOTAS</u>

- Convendremos que el **"•"** se realiza **antes** que **"+",** salvo que ello se altere por el uso de paréntesis: $a + b \bullet c \equiv a + (b \bullet c)$; $a + b \bullet c \neq (a + b) \bullet c$
- La operación **"•"** muchas veces se omitirá: $a \bullet b + c \bullet d$ se escribirá **ab + cd** ; o también **a.b + c.d** cuando sea necesario.

5 – DUALIDAD

Se llama **proposición dual** de una proposición del Álgebra de Boole, a la que se obtiene de ella **intercambiando** los **signos** de las **operaciones "+"** y **"•",** y sus respectivos **neutros "0"** y **"1".**

Ejemplo: Dado **(x + y)´ = x´.y´ ;** su **dual** es: **(x.y)´ = x´ + y´**

Principio de Dualidad
El **dual** de un **teorema** del **Álgebra de Boole,** es también un **teorema** de dicha **Álgebra de Boole.**

T es teorema $\Rightarrow$ **T*** es teorema

6 – PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

6.1. Idempotencia: $\forall a \in B$: **a + a = a** $\wedge$ **a • a = a**

6.2. Involutiva: $\forall a \in B$: **(a´)´ = a**

6.3. Leyes de De Morgan: $\forall a,b \in B$: **(a + b)´ = a´ • b´** $\wedge$ **(a • b)´ = a´ + b´**

6.4. Absorción: $\forall a,b \in B$: **a + (a • b) = a** $\wedge$ **a • (a + b) = a**

6.5. Complementarios de "0" y "1": **0´ = 1** $\wedge$ **1´ = 0**

6.6. Identidad de los elementos "0" y "1": $\forall a \in B$: **a + 1 = 1** $\wedge$ **a • 0 = 0**

7 – MODELOS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

El **Álgebra de Boole** se aplica en el **diseño** de **computadoras** y de **circuitos de distribución,** y permite **relacionar** el álgebra de **conjuntos** con el cálculo **proposicional.**

7.1. Sea $\mathcal{U}$ el **conjunto universal** y $\mathcal{P}(\mathcal{U}) = \{\varnothing, \mathcal{U}\}$ el **conjunto de partes** de $\mathcal{U}$.
En $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ se definen las operaciones: $\overline{}$, $\cup$ e $\cap$ mediante las siguientes tablas:

	$\overline{}$
$\mathcal{U}$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\mathcal{U}$

$\cup$	$\varnothing$	$\mathcal{U}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathcal{U}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$

$\cap$	$\varnothing$	$\mathcal{U}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\mathcal{U}$	$\varnothing$	$\mathcal{U}$

La cuaterna $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \overline{}, \cup, \cap)$ es un **modelo** del **Álgebra de Boole.**
El **neutro** de $\cup$ es: $\varnothing$, y el **neutro** de $\cap$ es: **A.**

7.2. También se puede considerar el conjunto de los **valores de verdad** de las **proposiciones lógicas** $\mathcal{V}$ **= {V, F},** con las **operaciones: negación (~), disyunción (**$\vee$**)** y **conjunción (**$\wedge$**),** definidas mediante las siguientes **tablas:**

p	~p
V	F
F	V

$\wedge$	V	F
V	V	F
F	F	F

$\vee$	V	F
V	V	V
F	V	F

La **cuaterna** $(\mathcal{V}, \sim, \vee, \wedge)$ es un **modelo** del **Álgebra de Boole.**
El **neutro** de $\vee$ es: **F,** y el **neutro** de $\wedge$ es: **V.**

7.3. Para que el **Álgebra de Boole** sea aplicable a **circuitos lógicos,** se define un conjunto **B** de **dos** elementos: **B = {1,0}**
Las **variables** de este conjunto se denominan **variables binarias** porque sólo pueden tomar uno de estos **dos** valores.

En **B** se definen las operaciones **"´", "+"** y **"•"** mediante las siguientes **tablas:**

a	a´
1	0
0	1

+	1	0
1	1	1
0	1	0

•	1	0
1	1	0
0	0	0

La **cuaterna (B,´,+, •)** es un **modelo** del **Álgebra de Boole.**
El **neutro** de **"+"** es: **"0",** y el **neutro** de **"•"** es: **"1".**

8 – RELACIÓN ENTRE EL ÁLGEBRA DE BOOLE BINARIA, EL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES Y EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Álgebra de Boole binaria		Álgebra de Proposiciones		Álgebra de Conjuntos	
Complementario	**´**	**Negación**	$\sim$	**Complemento**	$\overline{}$
Suma	**+**	**Disyunción**	$\vee$	**Unión**	$\cup$
Producto	**•**	**Conjunción**	$\wedge$	**Intersección**	$\cap$
Neutro de +	**0**	**Neutro de $\vee$**	**F**	**Neutro de $\cup$**	$\varnothing$
Neutro de •	**1**	**Neutro de $\wedge$**	**V**	**Neutro de $\cap$**	$\mathcal{U}$

9 – FUNCIONES BOOLEANAS

Las **funciones booleanas** se usan en el diseño y simplificación de **circuitos lógicos digitales** en los que está basada la arquitectura de las computadoras.
Las técnicas que estudiaremos nos sirven para **simplificar** las **funciones booleanas,** y esto a su vez, permite no sólo diseñar **circuitos digitales** más sencillos, sino también construir computadoras cada vez más pequeñas.

Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ **variables** cuyos valores se encuentran en un **álgebra booleana.**

Una **función booleana de n variables** es una **función** construida de acuerdo a las siguientes **reglas**:

- **Función Constante**: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$; donde **a** es un elemento **fijo** del álgebra booleana
- **Función Proyección**: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$
- Si para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **f** es una **función booleana,** entonces la función $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{=} (f(x_1, x_2, \ldots, x_n))'$ es **booleana.**
- Si **f** y **g** son **funciones booleanas,** entonces **f + g** y **f • g** son **funciones booleanas.**
- Cualquier **función** que pueda construirse por un número **finito** de aplicaciones de las reglas anteriores, es una **función booleana.**

Ejemplos: $f(x) = x + x'a$; $g(x,y) = x'y + xy' + y'$; $h(x,y,z) = axy'z + yz' + a + xy$

NOTAS

1) La **función proyección,** para el caso de **una** variable, es la **función identidad: f(x) = x**

2) Las **funciones booleanas** pueden construirse partiendo de la funciones **constante** y **proyección,** mediante un número **finito** de usos de las operaciones **"+"** y **"•"**

3) Una misma **función** puede expresarse de distintas maneras. Así, en el ejemplo, las funciones **f** y **g** son **iguales**, por aplicación de las leyes de **De Morgan.**

Ejemplo: $f(x,y) = (x + y)'$ y $g(x,y) = x' \bullet y'$ son la misma **función**

9.1. Forma Canónica de las Funciones Booleanas

Como vimos, una misma función puede expresarse de distintas maneras. Por lo tanto, para determinar si dos expresiones representan o no la misma función, es conveniente tener una **forma canónica** para expresarlas.

Teorema: Si **f** es una **función booleana** de **una variable,** entonces**:**

$$\forall x: f(x) = f(1).x + f(0).x'$$

De un modo análogo, si **f** es una **función booleana** de **dos variables,** entonces**:**

$$\forall x \forall y: f(x,y) = f(1,1).xy + f(1,0).xy' + f(0,1).x'y + f(0,0).x'y'$$

En general, si **f** es una **función booleana** de **n variables,** entonces**:**

$$\forall x_1 \forall x_2, \ldots, \forall x_n: f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum f(e_1, e_2, \ldots, e_n).x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

donde las e_i toman los valores **"0"** ó **"1",** y las $x_i^{e_i}$ se interpretan como x_i o x_i' según e_i tome el valor **"1"** ó **"0".**

Ejemplos

1) Sea **B = {0, a, a´, 1}.**

Obtendremos las **formas canónicas** de: $f(x) = x + x'.a$ y de $g(x,y) = x'.y + x.y' + y'$

Obtenemos las **imágenes** en cada una de ellas:

x	f(x) = x + x´.a
0	f(0) = 0 + 0´.a = 0 + 1.a = a
1	f(1) = 1 + 1´.a = 1 + 0.a = 1 + 0 = 1

La **forma canónica** es:

$f(x) = f(1).x + f(0).x' =$

$= 1.x + a.x' = x + x'.a$

(x,y)	g(x,y) = x´.y + x.y´+ y´
(0,0)	g(0,0) = 0´.0 + 0.0´ + 0´ = 1.0 + 0.1 + 1 = 1
(0,1)	g(0,1) = 0´.1 + 0.1´ + 1´ = 1.1 + 0.0 + 0 = 1
(1,0)	g(1,0) = 1´.0 + 1.0´ + 0´ = 0.0 + 1.1 + 1 = 1 + 1 = 1
(1,1)	g(1,1) = 1´.1 + 1.1´ + 1´ = 0.1 + 1.0 + 0 = 0

x	y	g(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La **forma canónica** es: $g(x,y) = g(1,1).xy + g(1,0).xy' + g(0,1).x'y + g(0,0).x'y' =$

$= 0.xy + 1.xy' + 1.x'y + 1.x'y' = xy' + x'y + x'y'$

- Estas **formas canónicas** se conocen como **"suma de productos"** o **"forma normal disyuntiva".**

NOTA: También existe la **forma canónica dual** de esta **suma de productos** que, por la propiedad de **dualidad,** será un **"producto de sumas",** llamada **"forma normal conjuntiva".**

10 – APLICACIONES A CIRCUITOS LÓGICOS O DIGITALES

Consideraremos ahora el uso del **Álgebra de Boole** en el **diseño** de **circuitos lógicos o digitales.**

> Un **circuito lógico o digital** es un **dispositivo** que consta de **una** o **más "fuente de poder"** o **"entrada" (E),** y de **sólo una "señal"** o **"salida" (S),** y cuyos componentes realizan **operaciones binarias** tales como **"+"** y **"•".**
> En cada instante, cada **entrada** tiene un valor, **"0"** ó **"1".**
> Estos datos son procesados por el circuito para dar un valor **"0"** ó **"1"** en su **salida**.
> La información **binaria** que transmiten los **circuitos lógicos** pueden representarse también de la siguiente manera: "**Falso"** o **"Verdadero"; "On"** y **"Off"; "Abierto"** o **"Cerrado";** o cualquier mecanismo que represente dos estados mutuamente excluyentes.

Podemos asociar a cada **variable** un **interruptor, llave** o **válvula.**

> Un **interruptor** instalado en una **red eléctrica** es un **mecanismo** que puede producir **una** de **dos** respuestas posibles: **permite** o **impide** el paso de la corriente eléctrica.

Físicamente este **interruptor** puede ser una válvula en un sistema de conducción de aguas, un interruptor eléctrico, un transistor, un diodo, un despachador de almacén, o cualquier otra **persona** o **mecanismo** capaz de **permitir** o **prohibir** el paso de alguna **magnitud.**

Los **circuitos** pueden ser:
- **normalmente abiertos**
- **normalmente cerrados**

> El circuito se llama **"normalmente abierto"** (CNA), cuando el **interruptor** está en posición **"abierto".** Haremos corresponder el símbolo **"1"** a la instrucción **"accionar el interruptor"**, y el símbolo **"0"** a la de **"no accionar el interruptor"**.

> El circuito se llama **"normalmente cerrado"** (CNC), cuando el **interruptor** está en posición **"cerrado".** Haremos corresponder el símbolo **"1"** a la instrucción "no accionar el interruptor", y el símbolo **"0"** a la de "accionar el interruptor".

➢ Sólo estudiaremos **circuitos sencillos:**

10.1. El **circuito** más **simple** consiste en**:** un **hilo conductor** con **una entrada (E)** y de **una salida (S)** y con un **único interruptor abierto "x".**

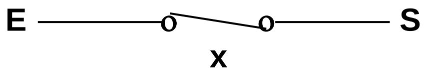
CNA

x	f(x)
0	0
1	1

función identidad

Habrá una **salida** si y sólo si el **interruptor** está **"cerrado".** En este caso**,** se le asigna a **"x"** el valor **"1".** Cuando el **interruptor** está **"abierto"** se le asigna el valor **"0".**

CNC



x	f(x)
0	1
1	0

función negación

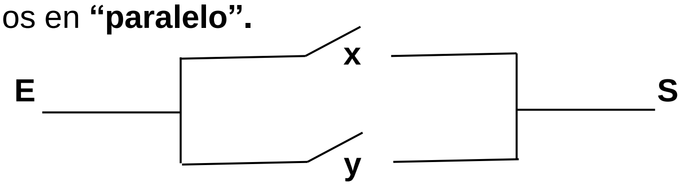
10.2. Veremos ahora el caso de una **red** con **dos interruptores "x"** y **"y"** conectados en **"serie".**

E x y S

x	y	f(x,y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

En este caso, habrá **salida** si y sólo si los **dos interruptores** están **"cerrados".**
En las otras posibilidades, el valor de la red será **"0".**
La operación que representa esta situación es **"•".**
Luego, esta **red** se representa por la **función booleana: f(x,y) = xy**

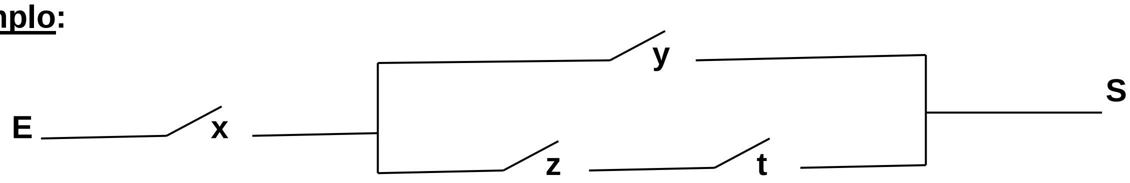
10.3. Ahora consideraremos una **red** que consiste también en **dos interruptores,** pero conectados en **"paralelo".**



x	y	f(x,y)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En este caso, habrá **salida** si y sólo si **uno** de los dos **interruptores** está **"cerrado".**
Por lo tanto, el valor de la red será **"0"** sólo cuando los **dos interruptores** estén **"abiertos".**
La operación que representa esta situación es **"+".** Esta **red** se representa por la **función booleana: f(x,y) = x + y**

10.4. Empleando **más interruptores,** pueden diseñarse **redes** más **complejas.**
Ejemplo:



La **función booleana** asociada a esta red es: **f(x,y,z,t) = x.(y + z.t)**
Sugerencia: realizar la tabla para esta función

NOTA
Hasta aquí hemos considerado que **todos** los **interruptores** actúan **independientemente** unos de otros, sin embargo, **dos** o **más interruptores** pueden estar conectados de manera tal que:
a) Se **abran** (o cierren) **simultáneamente.** En este caso se denotan **todos** los **interruptores** con la misma letra.
b) El **cierre** (o apertura) de **uno abra** (o cierre) **otro** u **otros.** En este caso se denotará a **uno** de los **interruptores** con **"x",** y a los otros con el **complementario: "x´".**

11 – SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

En muchas ocasiones, las **redes** resultan innecesariamente **complicadas,** por lo que es importante disponer de **técnicas** que permitan obtener una **red** más **simple,** que contenga **menos interruptores** y **conexiones,** pero que sea **equivalente** a la dada.
Para ello, se aplican los **axiomas** o **propiedades** del **Álgebra de Boole.**

Ejemplo: Sea la **función booleana** asociada a una **red: f(x,y,z) = y.x + (x + z).y´ (1)**

f(x,y,z) = y.x + (x + z).y´ =
= y.x + x.y´ + z.y´ = por **distributividad** de **"•"** respecto de **"+"**
= (x.y + x.y´) + z.y´ = por **conmutatividad** de **"•"** y **asociatividad** de **"+"**

= x.(y + y´) + z.y´ = por **distributividad** de **“•”** respecto de **“+”**
= x.1 + z.y´ = por **distributividad** de **“•”** respecto de **“+”**
= x + z.y´ por **neutro** de **“•”**

Luego, **f(x,y,z) = x + z.y´** es la forma más **simple** de la expresión **(1).** Para probar la **equivalencia** basta realizar las **tablas** de ambas expresiones.

x	y	y´	z	f(x,y,z) = x + z.y´	f(x,y,z) = y.x + (x + z).y´
1	**1**	**0**	**1**	**1 + 1.0 = 1 + 0 = 1**	**1.1 + (1 + 1).0 = 1 + 0 = 1**
1	**1**	**0**	**0**	**1 + 0.0 = 1 + 0 = 1**	**1.1 + (1 + 0).0 = 1 + 0 = 1**
1	**0**	**1**	**1**	**1 + 1.1 = 1 + 1 = 1**	**0.1 + (1 + 1).1 = 0 + 1.1 = 0 + 1 = 1**
1	**0**	**1**	**0**	**1 + 0.1 = 1 + 0 = 1**	**0.1 + (1 + 0).1 = 0 + 1.1 = 0 + 1 = 1**
0	**1**	**0**	**1**	**0 + 1.0 = 0 + 0 = 0**	**1.0 + (0 + 1).0 = 0 + 0 = 0**
0	**1**	**0**	**0**	**0 + 0.0 = 0 + 0 = 0**	**1.0 + (0 + 0).0 = 0 + 0 = 0**
0	**0**	**1**	**1**	**0 + 1.1 = 0 + 1 = 1**	**0.0 + (0 + 1).1 = 0 + 1.1 = 0 + 1 = 1**
0	**0**	**1**	**0**	**0 + 0.1 = 0 + 0 = 0**	**0.0 + (0 + 0).1 = 0 + 0 = 0**

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS n° 4

1) Considere el alfabeto: **△,▽, □, ⊕, ⊗, ( )** y las siguientes **reglas de formación:**
R1) ⊕ sólo se escribe delante de △ y ▽
R2) ⊗ se escribe entre **(**△ ó ▽**)** y □**,** o entre fórmulas obtenidas por la aplicación de **R1**, o entre dichas fórmulas y □**,** o entre fórmulas obtenidas mediante esta regla.
1.1. Diga si las siguientes fórmulas están **bien formadas** o no. Justifique:

1.1.1. (⊕▽ ⊗ ⊕△) ⊗ □ ……………………………………………………………………..

1.1.2. (△ ⊗ □) ⊗ (⊕▽ ⊗ □) ....

1.1.3. (⊕△ ⊗ ⊕ □) ⊗ □ ……………………………………………………………………...

1.1.4. (⊗▽ ⊗ ⊕△) ……………………………………………………………………………

1.1.5. (▽ ⊗ □) ⊗ (⊕△ ⊗ ⊕▽) ……………………………………………………………..

2) Considere un alfabeto que consiste sólo de las letras **“s” y “t**”, junto con las siguientes reglas, que pueden aplicarse en cualquier orden para crear nuevas **“palabras”** a partir de las ya existentes.
R1) Duplique la palabra actual.
R2) Elimine **“tt”** de la palabra actual.
R3) Ponga **“t”** en la palabra actual en lugar de **“sss”.**

R$_4$**)** Si la última letra es **"s"** añada **"t"** a la derecha de la palabra actual.

2.1. Use el sistema dado para **demostrar** los siguientes **"teoremas",** justificando cada paso:

2.1.1. s → tst

2.1.2. s → stst

2.1.3. ts → tsst

2.1.4. ts → st

3) Considere el siguiente **sistema axiomático:**

__Términos primitivos__**:** un conjunto **S ≠ ∅** y una relación **"=$_c$"**

__**Axiomas**__

Ax.1) Para todo elemento **x** del conjunto **S** se verifica que: $x =_c x$

Ax.2) Para elementos cualesquiera **x, y, z** del conjunto **S**, se verifica que:

$$x =_c z \wedge y =_c z \Rightarrow x =_c y$$

3.1. Demuestre los siguientes **teoremas,** para cualquier elemento **x, y, z** del conjunto **S.**

3.1.1. Si $x =_c y$ entonces $y =_c x$

3.1.2. Si $x =_c y$ y $y =_c z$ entonces $x =_c z$

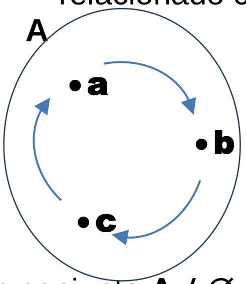
4) Considere los siguientes **sistemas axiomáticos** y determine si las representaciones que figuran más abajo son un **modelo** del sistema dado. Justifique.

4.1. Un conjunto **A ≠ ∅** , una relación **R** entre sus elementos, y los axiomas:

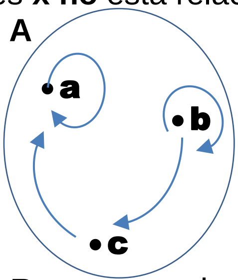
Ax.1) Ningún elemento de **A** está relacionado consigo mismo.

Ax.2) Para todo elemento de **A** se verifica que: si **x** está relacionado con **y** y **y** está relacionado con **z**, entonces **x no** está relacionado con **z.**

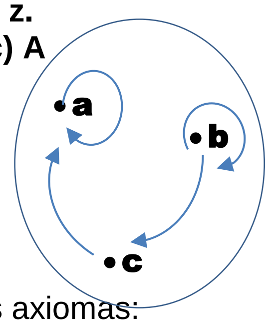
a) **A**



b) **A**



c) A

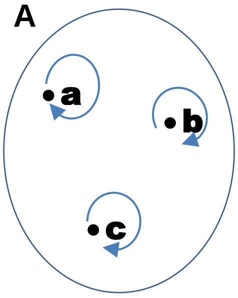


4.2. Un conjunto **A ≠ ∅** , una relación **R** entre sus elementos y los axiomas:

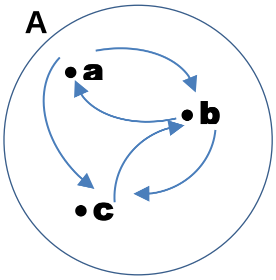
Ax.1) $\forall x\ \forall y \in A : x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

Ax.2) $\forall x\ \forall y\ \forall z \in A : x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$

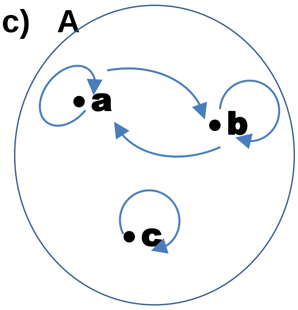
a) **A**



b) **A**



c) **A**



5) Proponga **dos modelos** para el siguiente **sistema axiomático:**

5.1. __**Términos primitivos**__**:** $A \neq \emptyset$; $* : AXA \to A$; $e \in A$

__**Axiomas**__

Ax.1) $\forall x\ \forall y\ \forall z : (x * y) * z = x * (y * z)$

Ax.2) $\forall x : e * x = x$

Ax.3) $\forall x\ \exists x' : x * x' = x' * x = e$

6) Escriba el **dual** de cada una de las siguientes fórmulas:

6.1. **(a + b + c)´ = a´.b´.c´** ………………………………………………………

6.2. **$(b + c).(c´+ b) = b$** ……………………………………………………

6.3. **$(a + b).(a + 1) = a + ab + b$** ……………………………………………………

6.4. **$(a + ba)´ + 1 = 1$** ……………………………………………………

6.5. **$a´ + a.b´ = a´ + b$** ……………………………………………………

6.6. **$a + a.(b + 1) = a$** ……………………………………………………

7) Aplique **propiedades** del **Álgebra de Boole** para **simplificar** las siguientes expresiones:

7.1. **$a´+ (a´ + b).(a´+ b + c) =$** ……………………………………………………….

7.2. **$a.(b + a´ + c) + b´.a.c =$** ……………………………………………………….

7.3. **$(a.b´+ a´.b)´ =$** ……………………………………………………….

7.4. **$(a + b.(a + c))´ =$** ……………………………………………………….

7.5. **$(a´+ b.c.(a + b)´ + a).a + (c + d´).(c + b + d´) =$** ……………………………………………

8) Establezca la **forma normal disyuntiva** de cada una de las siguientes funciones:

8.1. **$f(x,y) = x + x.y$**

8.2. **$f(x,y) = x + x.y´$**

8.3. **$f(x,y) = (x + y).(x´+ y´)$**

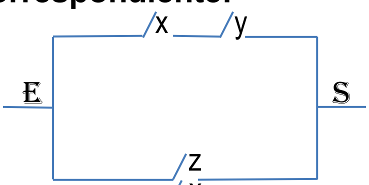
8.4. **$f(x,y,z) = x + y.(x + z´)$**

8.5. **$f(x,y,z) = x.(x + y.z)´$**

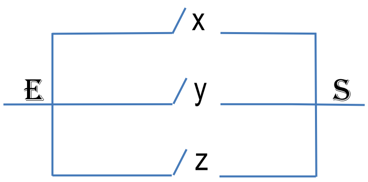
8.6. **$f(x,y,z) = x + y.(x´+ z´)$**

9) Escriba la **función** representada en los siguientes **circuitos** y realice la **tabla correspondiente:**

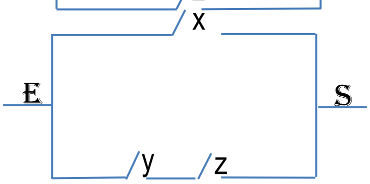
9.1.



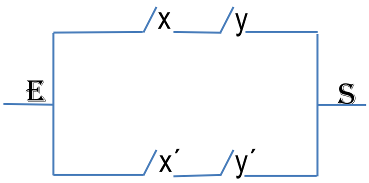
9.2.



9.3.



9.4



10) Construya un circuito correspondiente a la siguiente función: **$f(x,y) = x.y´ + x´.y + x´.y´$**

11) Simplifique el siguiente circuito: