

2021

ÁLGEBRA II (LSI)

UNIDAD N° 6

VALORES Y VECTORES PROPIOS



§1.- **Valores y Vectores Propios de una matriz**

Recordemos que toda matriz $A \in F^{m \times n}$ determina de modo natural una transformación lineal $T: F^{n \times 1} \rightarrow F^{m \times 1}$ definida por $T(X) = AX$.

En muchas aplicaciones resulta necesario encontrar vectores v , si existen, tales que Av y v (o bien $T(v)$ y v) resulten paralelos, es decir buscamos un vector v y un escalar λ tal que $Av = \lambda v$ o bien $T(v) = \lambda v$, es fácil advertir que para estos casos **m debe ser igual a n** .

Este tipo de problema se presenta en diversas aplicaciones relacionadas con la física, química, biología, etc.

Definición 1

Sea $A \in F^{n \times n}$. $\lambda \in F$ es un *valor propio* de A si y sólo si existe algún vector no nulo $v \in F^{n \times 1}$ tal que $Av = \lambda v$.

Definición 2

Si $\lambda \in F$ es un valor propio de $A \in F^{n \times n}$. Los vectores no nulos $v \in F^{n \times 1}$ que verifican la condición $Av = \lambda v$ se denominan *vectores propios* de A asociados al valor propio λ .

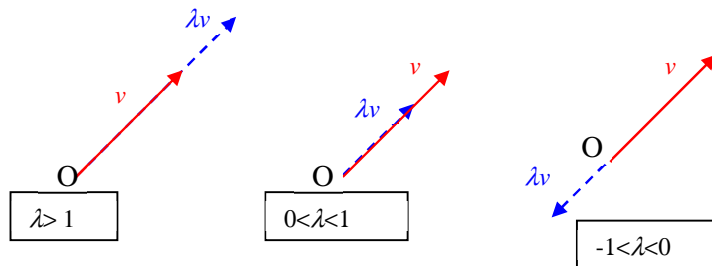
Notas

2.- Son sinónimos

- a) Valor propio, valor característico, raíz característica, autovalor, eigenvalor, valor espectral.
- b) vector propio, vector característico, autovector, eigenvector.

3.- Si v es un vector propio de A asociado a un valor propio λ , entonces Av es un múltiplo escalar de v , ya que $Av = \lambda v$. En el caso en que $\lambda \neq 0$ entonces v y Av son paralelos, por definición de paralelismo de vectores.

4.- Los valores y vectores propios tienen una interpretación geométrica útil en los espacios vectoriales reales \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 . Esto es así, ya que si v es un vector propio de una matriz $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ (o $\mathbf{R}^{3 \times 3}$), asociado a un valor propio λ , entonces la acción de la matriz A sobre v hace que éste se dilate, se contraiga, invierta su sentido, etc. según sea el valor de λ .

**Ejemplo 1**

Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ entonces

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ y el efecto que produce A sobre el vector v es pre multiplicarlo por 2, luego Av y v son paralelos.

Por otro lado

$$A v' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego v' no es un vector propio de A pues Av' no es múltiplo escalar de v' , es decir Av' y v' no son paralelos.

Espacio propio

Proposición 1

El conjunto E_λ de los vectores $v \in F^{n \times 1}$ tales que verifican la condición $Av = \lambda v$ es un subespacio vectorial de V . Esto es

$$E_\lambda = \{v \in F^{n \times 1} / Av = \lambda v\} \subset V$$

Demostración

Queda para el alumno.

Definición 3

El conjunto E_λ de los vectores $v \in F^{n \times 1}$ tales que verifican la condición $Av = \lambda v$ se denomina *espacio propio* correspondiente al valor propio λ .

Proposición 2

Sea $A \in F^{n \times n}$. El conjunto de vectores propios de A asociados a valores propios diferentes es linealmente independiente.

Demostración

Sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores propios de A asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ respectivamente, tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$.

Es decir,

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ si } i \neq j.$$

Debemos probar que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, es decir que debemos probar que es verdadera la siguiente proposición

$$\forall n \in \mathbb{N}; \left(\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0_v \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n; a_i = 0 \right) (*)$$

Para ello, emplearemos el Principio de Inducción Matemática en n

➤ Si $n = 1$, entonces

$$a_1 v_1 = 0_v \Rightarrow a_1 = 0$$

ya que v_1 es vector propio y por lo tanto $v_1 \neq 0_v$

por lo tanto $\{v_1\}$ es linealmente independiente. Luego, la proposición (*) es verdadera para $n = 1$,

➤ Si suponemos que la proposición (*) es verdadera para $n = h$, entonces debemos probar que también lo es para $n = h + 1$.

En esta situación la hipótesis inductiva es “la proposición (*) es verdadera para $n = h$ ”, es decir que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$ es linealmente independiente.

Debemos probar que la proposición (*) es verdadera para $n = h + 1$, es decir que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_h, v_{h+1}\}$ es linealmente independiente.

Para ello tomemos la siguiente combinación lineal, de valor 0_v , de estos $h + 1$ vectores propios

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i v_i = 0_v \quad (1)$$

Multiplicamos por A en ambos miembros de (1),

$$A \left(\sum_{i=1}^{h+1} a_i v_i \right) = A 0_v$$

Por propiedades del álgebra de matrices, resulta

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i A v_i = 0_v$$

Por hipótesis $A v_i = \lambda_i v_i$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$ entonces reemplazando en la expresión precedente se tiene

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_i v_i = 0_v \quad (2)$$

Ahora, multiplicamos ambos miembros por λ_{h+1} en (1)

$$\lambda_{h+1} \sum_{i=1}^{h+1} a_i v_i = \lambda_{h+1} 0_v$$

Por propiedad distributiva del producto de un escalar por una combinación lineal, es

$$\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_{h+1} a_i v_i = 0_v$$

Como el producto es conmutativo en el cuerpo F , resulta

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{h+1} v_i = 0_v \quad (3)$$

Si restamos miembro a miembro (3)-(2), tenemos

$$\sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_{h+1} v_i - \sum_{i=1}^{h+1} a_i \lambda_i v_i = 0_v$$

y realizando las operaciones correspondientes, obtenemos

$$\sum_{i=1}^h a_i (\lambda_{h+1} - \lambda_i) v_i = 0_v$$

esto es,

$$a_1 (\lambda_{h+1} - \lambda_1) v_1 + a_2 (\lambda_{h+1} - \lambda_2) v_2 + \dots + a_h (\lambda_{h+1} - \lambda_h) v_h = 0_v$$

Observemos que ésta expresión es una combinación lineal de valor 0_v de vectores del conjunto $\{v_1, \dots, v_h\}$, que es linealmente independiente por hipótesis inductiva, de modo que los escalares deben ser simultáneamente nulos.

Es decir,

$$\begin{aligned} a_1 (\lambda_{h+1} - \lambda_1) &= 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_2 (\lambda_{h+1} - \lambda_2) &= 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_h (\lambda_{h+1} - \lambda_h) &= 0 \Rightarrow a_h = 0 \end{aligned}$$

Esto es así ya que los valores propios son diferentes entre sí, por hipótesis del teorema, por lo tanto los escalares son simultáneamente nulos

$$a_1 = a_2 = \dots = a_h = 0$$

Reemplazando en (1) el valor de estos escalares, obtenemos

$$0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_h + a_{h+1} v_{h+1} = 0_v$$

de donde,

$$a_{h+1} v_{h+1} = 0_v \Rightarrow a_{h+1} = 0$$

ya que $v_{h+1} \neq 0_v$ por ser vector propio de A .

Luego $\{v_1, v_2, \dots, v_h, v_{h+1}\}$ es linealmente independiente, y por lo tanto la proposición (*) es verdadera.

Q.E.D.

Observación

La proposición recíproca de la Proposición 2 es falsa, pues puede ocurrir que un conjunto de vectores propios sea linealmente independiente y estos vectores estén asociados a valores propios no necesariamente distintos, hasta puede ocurrir que todos los valores propios sean iguales. Tal es el caso de la matriz identidad de orden 3, en donde el conjunto de vectores propios $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es linealmente independiente y estos vectores propios están asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Proposición 3

Sea $A \in F^{n \times n}$, $\lambda \in F$ es un valor propio de A si y sólo si la matriz $\lambda I_n - A$ es singular (no inversible), siendo I_n la matriz unidad de orden n .

Demostración

$$\begin{aligned} \lambda \in F \text{ es un valor propio de } A &\Leftrightarrow \exists v \in F^{n \times 1} \wedge v \neq 0_v, \text{ tal que } Av = \lambda v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v \in F^{n \times 1} \wedge v \neq 0_v \text{ tal que } \lambda I_n v - Av = 0_v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v \in F^{n \times 1} \wedge v \neq 0_v \text{ tal que } (\lambda I_n - A)v = 0_v \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{el sistema de ecuaciones homogéneo } (\lambda I_n - A)v = 0_v \text{ es compatible indeterminado} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{la matriz } \lambda I_n - A \text{ no es inversible (es singular).} \end{aligned}$$

Definición 4

Sea $A \in F^{n \times n}$.

- ✓ $\lambda I_n - A$ se denomina *Matriz Característica*.
- ✓ $\det(\lambda I_n - A)$ se denomina *Polinomio Característico*. Es un polinomio de grado n en la variable λ con coeficientes en el cuerpo F . La notación usual es $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
- ✓ $\det(\lambda I_n - A) = 0$ se denomina *Ecuación Característica*. Es una ecuación de grado n en la variable λ con coeficientes en el cuerpo F .

Nota:

Por el Corolario del Teorema Fundamental de Álgebra, la ecuación característica $\det(\lambda I_n - A) = 0$ admite exactamente n raíces. Estas raíces pueden o no pertenecer al cuerpo F . Únicamente las raíces pertenecientes al cuerpo F son los valores propios de la matriz $A \in F^{n \times n}$.

Procedimiento para determinar los valores y vectores propios

Sea $A \in F^{n \times n}$.

- I. $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Las raíces de esta ecuación pertenecientes al cuerpo F son los valores propios de la matriz A .
- II. Para cada valor propio $\lambda_i \in F$, formamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\lambda_i I_n - A)v = 0_v$, donde v es el vector incógnita. De cada uno de estos sistemas de ecuaciones lineales se determina el conjunto solución, que es precisamente el espacio propio E_{λ_i} correspondiente al valor propio λ_i .
- III. Determinamos una base \mathcal{B}_i de cada espacio propio E_{λ_i} . Cada una de estas bases está formada por los vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio λ_i .

Ejemplo 2:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}$

- I. La matriz característica de A es:

$$\lambda I_2 - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 1)(\lambda + 3),$$

por lo que la característica es $(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$ y sus raíces que son los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3$$

- II. Para cada valor propio se obtiene el espacio propio asociado,

* Para $\lambda_1 = 1$

formamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\lambda_i I_n - A) v = 0_v$, es decir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ 0 & \lambda_1 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Reemplazando,

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & -2 \\ 0 & 1 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

cuyo conjunto solución es el espacio propio correspondiente a λ_1 ,

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^{2 \times 1} / y = 0 \right\}$$

* Para $\lambda_2 = -3$

formamos el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $(\lambda_i I_n - A) v = 0_v$, es decir:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 \\ 0 & \lambda_2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Reemplazando,

$$\begin{bmatrix} -3 - 1 & -2 \\ 0 & -3 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

cuyo conjunto solución es el espacio propio correspondiente a λ_2 ,

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^{2 \times 1} / y = -2x \right\}$$

III. Determinamos una base \mathcal{B}_i de cada espacio propio E_{λ_i} .

Una base de $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^{2 \times 1} / y = 0 \right\}$ es $\mathcal{B}_1 = \{(1,0)\}$

Una base de $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^{2 \times 1} / y = -2x \right\}$ es $\mathcal{B}_2 = \{(1,-2)\}$

Los vectores propios $(1,0)$ y $(1,-2)$ de A que están asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Proposición 4

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal principal.

Demostración

Sea $A \in F^{n \times n}$, una matriz triangular superior, dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Es claro que si calculamos el polinomio característico de A tenemos

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

Ahora consideramos la ecuación característica

$$\det(\lambda I_n - A) = 0,$$

esto es,

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

Al resolver la ecuación característica, observamos que las raíces son precisamente los elementos de la diagonal principal de la matriz triangular superior A , esto es,

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_{11} \\ \lambda_2 = a_{22} \\ \vdots \\ \lambda_n = a_{nn} \end{cases}$$

es decir, que los valores propios de la matriz A son los elementos de su diagonal principal.

En forma análoga procedemos si la matriz A es una matriz triangular inferior.

Q.E.D.

Ejemplo 3

La matriz A del ejemplo 2 es una matriz triangular superior y allí se observa que sus valores propios son los elementos de su diagonal principal.

Proposición 5

Los valores propios de una matriz diagonal son los elementos de su diagonal principal.

Demostración

(Queda para el alumno)

Semejanza de Matrices**Definición 5**

Sean dos matrices $A, B \in F^{n \times n}$.

A es *semejante* a B si y sólo si existe una matriz $P \in F^{n \times n}$ inversible, tal que $B = P^{-1} A P$.

Proposición 6

La relación de semejanza de matrices es una *relación de equivalencia*.

Demostración

La relación de semejanza de matrices es *Reflexiva*

Sea la matriz $A \in F^{n \times n}$. Es claro que A es semejante a A , ya que existe la matriz unidad $I_d \in F^{n \times n}$, que es inversible, tal que $A = I_d^{-1} A I_d$

i) La relación de semejanza de matrices es *Simétrica*

Sean dos matrices $A, B \in F^{n \times n}$. Probaremos que “si A es semejante a B , entonces B es semejante a A ”.

Como A es semejante a B , entonces existe una matriz $P \in F^{n \times n}$ inversible, tal que

$$B = P^{-1} A P$$

Multiplicamos en ambos miembros a la izquierda por P y a la derecha por P^{-1} , y tenemos

$$P B P^{-1} = P (P^{-1} A P) P^{-1}$$

como el producto de matrices es asociativo resulta

$$P B P^{-1} = (P P^{-1}) A (P P^{-1})$$

de aquí se sigue

$$P B P^{-1} = A$$

Luego B es semejante a A , ya que P es la inversa de P^{-1} .

ii) La relación de semejanza de matrices es *Transitiva*

Sean tres matrices $A, B, C \in F^{n \times n}$. Probaremos que “si A es semejante a B y B es semejante a C , entonces A es semejante a C ”.

Como A es semejante a B y B es semejante a C entonces, existen dos matrices inversibles $P, S \in F^{n \times n}$ tales que

$$B = P^{-1} A P \wedge C = S^{-1} B S$$

entonces,

$$C = S^{-1} (P^{-1} A P) S$$

y como la multiplicación de matrices es asociativa, resulta

$$C = (S^{-1} P^{-1}) A (P S)$$

empleando la propiedad de la inversa del producto de matrices inversibles $((PS)^{-1} = S^{-1} P^{-1})$,

observamos que existe una matriz inversible $P \in F^{n \times n}$ tal que

$$C = (P S)^{-1} A (P S)$$

por lo tanto A es semejante a C .

Finalmente de i), ii) y iii) se sigue que la relación de semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

Q.E.D.

Nota

En adelante, si una matriz A es semejante a otra matriz B diremos simplemente que “ A y B son semejantes”, esto es debido a que la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

Proposición 7

Si dos matrices son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto tienen los mismos valores propios.

Demostración

Sean $A, B \in F^{n \times n}$ matrices semejantes y sea $P \in F^{n \times n}$ inversible tal que $B = P^{-1} A P$. Probaremos que $\det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - A)$

En efecto,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - B) &= \det(\lambda I_n - P^{-1} A P) = \det(\lambda I_n (P^{-1} P) - P^{-1} A P) = \\ &= \det(P^{-1} (\lambda I_n) P - P^{-1} A P) = \det(P^{-1} (\lambda I_n - A) P) = \det(P^{-1}) \det(\lambda I_n - A) \det(P) = \\ &= \det(P^{-1}) \det(P) \det(\lambda I_n - A) = \det(P^{-1} P) \det(\lambda I_n - A) = \det(I_n) \det(\lambda I_n - A) = \\ &= \det(\lambda I_n - A) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ejemplo 4

Las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ son semejantes, ya que existe la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

inversible, tal que $B = P^{-1} A P$.

En efecto, P es inversible pues es fácil ver que $\det(P) \neq 0$ y calculando P^{-1} por el método más

conveniente resulta $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$$\text{luego } B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico para las matrices A y B están dados por

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-3)(\lambda-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\det(\lambda I_2 - B) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda-3)(\lambda-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

por lo que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores propios como valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$

Observación

El recíproco de la Proposición 7 es falso, ya que dos matrices pueden tener los mismos valores propios sin ser matrices semejantes.

Ejemplo 5

La matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene por valores propios los elementos de la diagonal principal por ser una matriz diagonal, según Proposición 5, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

La matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tiene por valores propios los elementos de la diagonal principal por ser una matriz triangular, según Proposición 4, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ambas matrices tienen los mismos valores propios, sin embargo no son semejantes ya que no existe una matriz P inversible que satisfaga

$$B = P^{-1}I_2P \quad (*)$$

pues al ser I_2 el neutro para el producto de matrices, la igualdad $(*)$ se reduciría a

$$B = P^{-1}P$$

pero esto no es posible ya que el producto $P^{-1}P$ es la matriz identidad y $B \neq I_2$.

Matrices Diagonalizables

Definición 6

Sea $A \in F^{n \times n}$. La matriz A es *diagonalizable* si y sólo si existe una matriz diagonal $D \in F^{n \times n}$ tal que A es semejante a D .

Observaciones

1.- Como vimos en la Proposición 7, si una matriz A es semejante a una matriz D , entonces resulta que A y D tienen los mismos valores propios. Además, la Proposición 5, asegura que si D es una matriz diagonal entonces los valores propios de D son los elementos de su diagonal principal. De estos resultados se desprende que si una matriz A es

semejante a una matriz diagonal D entonces los valores propios de A son precisamente los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal D y por Definición 6 la matriz A es diagonalizable.

2.- Empleando las definiciones 6 y 5 podemos realizar el siguiente razonamiento,

$A \in F^{n \times n}$ es diagonalizable \Leftrightarrow existe una matriz diagonal $D \in F^{n \times n}$ tal que A es semejante a $D \Leftrightarrow$
por Def. 6

\Leftrightarrow existe una matriz inversible $P \in F^{n \times n}$ tal que $D = P^{-1} A P$
por Def. 5

3.- De las observaciones 1 y 2 podemos advertir que la matriz inversible P *diagonaliza* a la matriz A y la matriz diagonal D semejante a A , tiene en su diagonal principal a los valores propios de la matriz A .

Proposición 8

Una matriz $A \in F^{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente.

En tal caso la matriz diagonal D semejante a la matriz A está dada por,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{n \times n}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A . Si $P \in F^{n \times n}$ es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de la matriz A entonces

$$D = P^{-1} A P.$$

Demostración:

- a) Supongamos que A tiene n vectores propios linealmente independientes v_1, v_2, \dots, v_n respectivamente asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente diferentes) de la matriz A . Es decir,

$$A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A v_2 = \lambda_2 v_2, \quad \dots, \quad A v_n = \lambda_n v_n \quad (1)$$

Probaremos que la matriz A es diagonalizable. Para ello, sea $P \in F^{n \times n}$ la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores propios v_1, v_2, \dots, v_n de la matriz A , esto es,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad v_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} \in F^{n \times 1}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Si calculamos AP

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

podemos observar que las componentes de la columna j -ésima de AP son iguales a las componentes del vector Av_j , es decir

$$Av_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p_{1j} + a_{12}p_{2j} + \cdots + a_{1n}p_{nj} \\ a_{21}p_{1j} + a_{22}p_{2j} + \cdots + a_{2n}p_{nj} \\ \vdots \\ a_{n1}p_{1j} + a_{n2}p_{2j} + \cdots + a_{nn}p_{nj} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$AP = [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_j \ \cdots \ Av_n]$$

luego, por (1), se tiene

$$AP = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_j v_j \ \cdots \ \lambda_n v_n] \quad (2)$$

Por otro lado, si calculamos PD

$$PD = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

obtenemos,

$$PD = \begin{bmatrix} p_{11}\lambda_1 & p_{12}\lambda_2 & \cdots & p_{1j}\lambda_j & \cdots & p_{1n}\lambda_n \\ p_{21}\lambda_1 & p_{22}\lambda_2 & \cdots & p_{2j}\lambda_j & \cdots & p_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1}\lambda_1 & p_{n2}\lambda_2 & \cdots & p_{nj}\lambda_j & \cdots & p_{nn}\lambda_n \end{bmatrix}$$

y podemos observar que las componentes de la columna j -ésima de PD son iguales a las componentes del vector $\lambda_j v_j$, esto es

$$P \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1j} \lambda_j \\ p_{2j} \lambda_j \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{nj} \lambda_j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = \lambda_j v_j,$$

por lo tanto podemos escribir simbólicamente,

$$PD = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_j v_j \quad \dots \quad \lambda_n v_n] \quad (3)$$

Teniendo en cuenta (2) y (3) se sigue que

$$PD = AP \quad (4)$$

y como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, entonces P es inversible, por lo tanto si multiplicamos a izquierda en ambos miembros de (4) por P^{-1} , resulta

$$D = P^{-1}AP \quad (5)$$

Es claro que D es una matriz diagonal semejante a A , ya que existe una matriz P inversible que verifica la igualdad (5), luego, por Definición 6, A es diagonalizable.

b) Ahora demostraremos el siguiente condicional,

“Si la matriz A es diagonalizable, entonces A tiene n vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente”.

Por hipótesis la matriz A es diagonalizable, entonces por Definición 6 existe una matriz diagonal D semejante a A , y en consecuencia por Definición 5, existe una matriz P inversible tal que

$$D = P^{-1}AP \quad (\alpha)$$

multiplicamos a izquierda en ambos miembros de (α) por P y resulta

$$PD = P(P^{-1}AP)$$

aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices tenemos

$$PD = (P P^{-1})AP$$

luego

$$PD = AP \quad (\beta)$$

Ahora, si a la matriz diagonal D la representamos por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in F^{n \times n},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ no son necesariamente diferentes. Y si a la matriz P la expresamos a través de sus columnas, es decir

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_j & \dots & v_n \end{bmatrix} \in F^{n \times n}, \text{ con } v_j \text{ columna de } P; \quad \forall j = 1, \dots, n$$

entonces los productos PD y AP expresados en términos de sus columnas son

$$PD = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_j v_j & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} \quad (\delta)$$

y

$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_j & \dots & Av_n \end{bmatrix} \quad (\rho)$$

Luego, de (β) , (δ) y (ρ) se sigue que las respectivas columnas de PD y de AP son iguales es decir

$$A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A v_2 = \lambda_2 v_2, \quad \dots, \quad A v_n = \lambda_n v_n$$

Esto nos indica que v_1, v_2, \dots, v_n son vectores propios de A asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente; y como P es inversible entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Q.E.D.

Corolario

Si $A \in F^{n \times n}$ admite n valores propios diferentes entonces A es diagonalizable.

Demostración

Por hipótesis la matriz A tiene n valores propios diferentes. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los n valores propios diferentes de la matriz A , y sean v_1, v_2, \dots, v_n n vectores propios de A asociados a cada uno de los valores propios respectivamente, esto es

$$A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A v_2 = \lambda_2 v_2, \quad \dots, \quad A v_n = \lambda_n v_n,$$

entonces, por *Proposición 2*, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Esto es, la matriz A tiene n vectores propios que forman un conjunto linealmente independiente, entonces por la *Proposición 8* resulta que A es diagonalizable.

Q.E.D.

Teorema de Cayley-Hamilton (sin demostración)

Toda matriz $A \in F^{n \times n}$ es un cero de su polinomio característico.

Ejemplo 6:

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ del ejemplo 2, tiene como polinomio característico a:

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 2\lambda - 3,$$

Según el teorema de Cayley-Hamilton la matriz A es un cero de su polinomio característico, es decir que se debe verificar que

$$A^2 + 2A - 3I_2 = 0$$

Puede observarse que esto es así al efectuar los cálculos correspondientes

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
