Unidad N° 5: Números Reales y Complejos

- **Números racionales**

Sea la familia de ecuaciones $b.x = a$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

- Si b es divisor de a, la ecuación tiene solución entera

  Ejemplo: $3.x = -15 \rightarrow x = -5 \in \mathbb{Z}$

- Si b es no divisor de a, no existe solución en $\mathbb{Z}$
  Ejemplo: $3.x = 14 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{Z}$

Con las soluciones de todas las ecuaciones de la familia se forma un nuevo conjunto numérico.

Con $b \neq 0$, $\quad b.x = a \rightarrow x = \frac{a}{b}$ es la solución
El conjunto dado por

$$F = \left\{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \ \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$$

Se llama **Conjunto de Fracciones**

Relación de equivalencia en F
Sean $\frac{a}{b} \in F$, $\frac{c}{d} \in F$ se dice que:

$$\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a.d = b.c$$

Ejemplo: $\frac{2}{3}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{10}{15}$ son fracciones equivalentes
Una fracción es irreducible si el numerador y el denominador son coprimos, por ejemplo: $\frac{2}{3}$
Propiedad: La relación "$\cong$" definida en F es relación de equivalencia
Demostración:

- Reflexiva: $\forall \ \frac{a}{b} \in F : \frac{a}{b} \cong \frac{a}{b}$
  Probar que $a.b = b.a$
  $a.b = b.a$ pues el producto en $\mathbb{Z}$ es conmutativo
- Simétrica: $\forall \ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F : \frac{a}{b} \cong \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} \cong \frac{a}{b}$
  Probar que $c.b = d.a$
  Por hipótesis $a.d = b.c$ como el producto $\mathbb{Z}$ es conmutativo
  Conmutando en ambos miembros $d.a = c.b$
  Es decir $c.b = d.a$

- Transitiva: $\forall\ \frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f} \in F\colon \left(\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \cong \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} \cong \frac{e}{f}$

  Probar que $a.f = b.e$

  Por hipótesis: $a.d = b.c$ (1) $\wedge$ $c.f = d.e$ (2)

  Posmultiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por f

  $a.d.\boldsymbol{f} = b.c.\boldsymbol{f}$ (3)

  Premultiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por b

  $\boldsymbol{b}.c.f = \boldsymbol{b}.d.e$ (4)

  Como el segundo miembro de (3) es igual al primer miembro de (4), se tiene que:

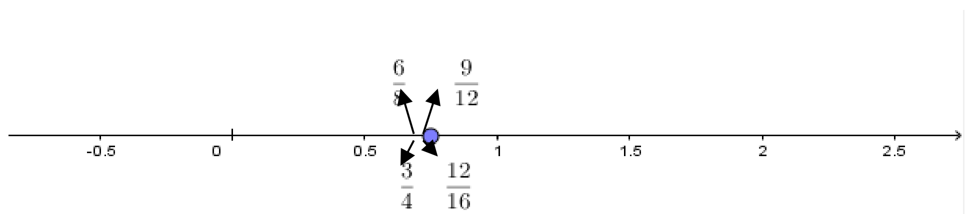
$$a.d.f = b.d.e$$

Como $d \neq 0$, dividimos ambos miembro por d,

$$\frac{a.d.f}{d} = \frac{b.d.e}{d}$$

$$\therefore a.f = b.e$$

Como el conjunto F se particiona en clases de equivalencia, en cada clase de equivalencia siempre existe una fracción irreducible.



Las fracciones equivalentes se representan en el mismo punto en la recta. Cada clase de equivalencia es un punto en la recta que llamamos **número racional**. El número racional se puede escribir mediante cualquier fracción de su clase de equivalencia. Es conveniente usar la fracción irreducible.

El conjunto de números racionales se denota: $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de clases de equivalencia distintas

Suma y multiplicación en $\boldsymbol{F}$

Sean $\frac{a}{b},\frac{c}{d} \in F$, se define:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d} \in F$$

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}\in F$$

Se prueba que si se cambia alguna fracción por otra fracción equivalente, el nuevo resultado de la suma o de la multiplicación es una fracción equivalente a la que se obtuvo anteriormente. Por lo tanto la suma y la multiplicación se pueden realizar con cualquier fracción de la clase de equivalencia con lo cual se traslada la suma (+) y la multiplicación (.) a los racionales.

Estructura algebraica en $\mathbb{Q}$

Los números racionales con la suma y la multiplicación tienen **estructura de cuerpo**.

Demostración:

Se prueba que

- "+" es asociativa
- "+" es conmutativa
- "+" tiene elemento neutro: $\frac{0}{b}\epsilon\ \mathbb{Q}$ con $b\ \epsilon\ \mathbb{N}$
- "+" tiene verifica existencia de elemento opuesto: $\forall\ \frac{a}{b}\epsilon\ \mathbb{Q}$ existe su opuesto $-\frac{a}{b}\epsilon\ \mathbb{Q}$

  $(\mathbb{Q},+)$ tiene estructura de grupo Abeliano
- "." Es asociativa
- "." Es conmutativa
- "." tiene elemento neutro: $\frac{n}{n}\epsilon\ \mathbb{Q}$ con $n\ \epsilon\ \mathbb{N}$
- "." Verifica la existencia de elemento inverso: $\forall\ \frac{a}{b}\epsilon\ \mathbb{Q}-\{0\}$ con $a\neq 0, b\neq 0,$

  Existe su inverso $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\ \epsilon\ \mathbb{Q}$
- Distributividad del producto respecto de la suma: $\forall\ \frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$ se verifica

$$\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.\frac{e}{f}$$

Por lo tanto $(\mathbb{Q},+,.)$ tiene estructura de **CUERPO**

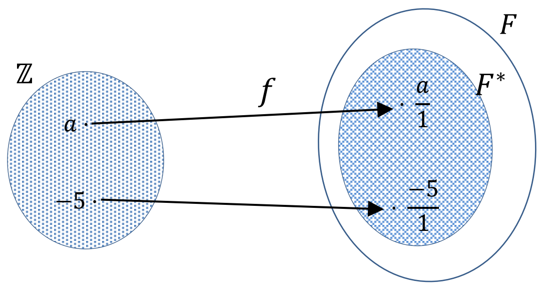
Los números enteros y las fracciones

Sea F^* el conjunto de fracciones de denominador 1

$$F^*=\left\{\frac{a}{b}\in F/b=1\right\}$$

Se define la función

$$f : \mathbb{Z} \to F^*$$
$$a \mapsto f(a) = \frac{a}{1}$$



Se prueba que:

- f es biyectiva
- f es compatible con la "+" (suma) y el "." (producto).

  $a, c \in \mathbb{Z}$: $\quad f(a+c) = f(a) + f(c)$
  $$f(a.c) = f(a).f(c)$$

Entonces identificamos el número entero "a" con $\frac{a}{1}$.

Orden en $\mathbb{Q}$

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a.d \leq b.c$$

Ejemplo:

$\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ pues 2.4 < 3.5

Se prueba que esta relación " $\leq$" es un Orden Amplio Total.

Observación:

A cada número racional le corresponde un punto en la recta numérica que se coloca teniendo en cuenta el orden que se acaba de establecer. Cabe aclarar que no todos los puntos de la recta numérica son números racionales.

Densidad en los números racionales

Probaremos que entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales. Decimos que los racionales son densos en la recta.

Propiedad 1:

Entre dos racionales distintos existe otro racional.

Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, tal que $r_1 \neq r_2$.

Suponemos que $r_1 < r_2$.

Probar que el número racional $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ está entre r_1 y r_2

Es decir, se debe probar que: $r_1 < r < r_2$

Partimos de $r_1 < r_2$

Sumando r_1 miembro a miembro $r_1 + r_1 < r_2 + r_1$

$$2r_1 < r_2 + r_1$$

$$r_1 < \underbrace{\frac{1}{2}(r_2 + r_1)}_{r}$$

$$\boldsymbol{r_1 < r} \qquad (1)$$

De manera análoga, partimos de $r_1 < r_2$

Sumando r_2 miembro a miembro $r_1 + r_2 < r_2 + r_2$

$$r_1 + r_2 < 2r_2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(r_1 + r_2)}_{r} < r_2$$

$$\boldsymbol{r < r_2} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta las expresiones dadas en (1) y (2), resulta

$$r_1 < r < r_2$$

Propiedad 2

Entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales

Demostración:

Aplicando indefinidamente la propiedad 1 se obtienen los infinitos números irracionales que existen entre r_1 y r_2.

Conclusión: Los racionales son densos en la recta numérica.

- **<u>Los Números Reales</u>**

El sistema axiomático de los números reales

- Conceptos primitivos:
  - Un conjunto no vacío $\mathbb{R}$.
  - Dos operaciones en $\mathbb{R}$: + (suma) y **.** (multiplicación)

- Axiomas :
  1. Axiomas de cuerpo
  2. Axiomas de orden
  3. Axiomas de completitud

1. Axiomas de cuerpo

Axioma 1: La suma es asociativa en $\mathbb{R}$

Axioma 2: La suma es conmutativa en $\mathbb{R}$

Axioma 3: La suma tiene elemento neutro en $\mathbb{R}$: $\exists\, 0 \,\epsilon\, \mathbb{R} \,/\, \forall a \in \mathbb{R}: a + 0 = 0 + a = a$

Axioma 4: La suma verifica existencia de opuesto:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists a' = -a \in \mathbb{R}: a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Axioma 5: La "." es asociativa en $\mathbb{R}$

Axioma 6: La "." es conmutativa en $\mathbb{R}$

Axioma 7: La "." tiene neutro en $\mathbb{R}$: $\exists\, 1 \,\epsilon\, \mathbb{R} \,/\, \forall a \in \mathbb{R}: a.1 = 1.a = a$

Axioma 8: La "." verifica existencia de inverso en $\mathbb{R}$:

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R} : \; a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

Axioma 9: Propiedad distributiva de la "." respecto de la "+":

$$a, b, c \in \mathbb{R}: a.(b + c) = a.b + a.c$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}, +, \;.)$ es un **CUERPO**

Nota: A partir de los axiomas de cuerpo se obtienen todas las propiedades de la aritmética de los $\mathbb{R}$ y se pueden definir otras operaciones y funciones.

Resta en $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a - b \overset{\text{def}}{=} a + (-b)$

División en $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$: $\quad a \div b \overset{\text{def}}{=} a . b^{-1}$

Potenciación

Sean $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: $\quad a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\ veces}$

Propiedades: $a, b \in \mathbb{R}$

i. $-(-a) = a$
ii. $a \neq 0,\ (a^{-1})^{-1} = a$
iii. $-(a - b) = b - a$
iv. $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
v. Propiedad cancelativa: $a, b, c \in \mathbb{R}$
   $a + b = a + c \Rightarrow b = c$
   $a \neq 0, \quad a.b = a.c \Rightarrow b = c$

2. Axiomas de Orden

Definiremos un subconjunto de los números reales llamado **Clase Positiva (**$\mathbb{R}^+$**)** lo que permitirá definir un orden en $\mathbb{R}$. La presentación de $\mathbb{R}^+$ es axiomática.

Axiomas de Orden clase positiva $\mathbb{R}^+$

-Axioma O_1: $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a + b \in \mathbb{R}^+ \wedge a.b \in \mathbb{R}^+)$

-Axioma O_2: $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow (a \in \mathbb{R}^+ \vee -a \in \mathbb{R}^+)$

-Axioma O_3: $0 \notin \mathbb{R}^+$

Orden en $\mathbb{R}$

$a < b$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $a + t = b$

Observaciones:

- En la expresión "existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $a + t = b$" también podría considerarse como $b - a \in \mathbb{R}^+$
- Trabajando con los axiomas se prueba que "<" es orden estricto total.
- A partir de < se define $\leq, >, \geq$.

Propiedad: $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x > 0$
Demostración: $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \Leftrightarrow x - 0 = x \in \mathbb{R}^+$

Propiedad de Tricotomía:
$\forall a \in \mathbb{R}: \left(a = 0 \ \underline{\vee} \ \ a < 0 \ \ \underline{\vee} \ \ a > 0\right)$
$\forall a, b \in \mathbb{R}: \left(a = b \ \underline{\vee} \ a < b \ \underline{\vee} \ \ a > b\right)$

Propiedad: Leyes de Monotonía

Se refiere a la compatibilidad de la relación de orden con la suma y el producto

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

i. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
ii. $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow a + c < b + d$
iii. $(a < b \wedge c = 0) \Rightarrow a.c = b.c$
$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow a.c < b.c$
$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a.c > b.c$

Esta propiedad permite trabajar con inecuaciones

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **Cuerpo Ordenado**

3. Axiomas de completitud

Este axioma se puede presentar de diferentes maneras: mediante sucesiones convergentes, o encajes de intervalos, o cortaduras, etc. Veamos una presentación algebraica.

Recordamos: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Se dice que el número c es cota superior A si $\forall x \in A: x \leq c$.
- Si A tiene cota superior, se dice que A está acotado superiormente.
  Observación: Si un conjunto está acotado superiormente tiene infinitas cotas superiores.
- La menor de las cotas superiores se llama Supremo de A.
  Observación: Si el supremo pertenece al conjunto se lo llama máximo.

Ejemplos:
$A = \{2 + n / n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente.
$B = \left\{5 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ Si está acotado: $Sup\ B = 6$ y $Max\ B = 6$
$C = \left\{3 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ Si está acotado: $Sup\ C = 3$ y $Max\ C$ no existe

Nota: Análogamente se puede definir conjunto acotado inferiormente, ínfimo y mínimo.

Axioma de Completitud o Axioma del Supremo o Extremo Superior

Todo subconjunto no vacío acotado superiormente de números reales tiene **Supremo Real**.

Observación: Este axioma no es cumplido por los números racionales, ya que existen subconjuntos de racionales acotados superiormente y no tienen supremos racional.

Ejemplo: $T = \{ x \in \mathbb{Q}/x < \sqrt{2} \}$

En $\mathbb{R}$, el supremo de T es $\sqrt{2}$. Observar que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **Cuerpo ordenado y completo**

Observación: La propiedad de completitud nos permite afirmar que

Número real ↔ Punto en la recta numérica

Es decir, a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y a cada punto en la recta le corresponde un número real.

- **<u>Número irracionales</u>**

Un número es irracional si no se puede escribir como fracción, en particular como fracción irreducible.

Ejemplo: $\pi, e, \ldots$

Veamos que existen infinitos números irracionales. Probaremos que la raíz cuadrada ($\sqrt{}$) o raíz cúbica ($\sqrt[3]{}$) o de cualquier índice natural de un número primo positivo es un número irracional.

Propiedad: $\sqrt{2}$ no es un número racional

Demostración:

Realizaremos la demostración por el absurdo, para ellos supondremos lo contrario a lo que queremos probar.

Probaremos que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción irreducible.

Suponemos $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ →fraccion irreducible a y b coprimos

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2.b^2 = a^2 \Rightarrow 2/a^2 \Rightarrow 2/a$ *

Si $2/a$ existe $k \epsilon \mathbb{Z}/a = 2.k$

Reemplazando a en $2.b^2 = a^2$, se tiene:

$2.b^2 = a^2 \Rightarrow 2.b^2 = 2^2.k^2 \Rightarrow b^2 = 2.k^2 \Rightarrow 2/b^2 \Rightarrow 2/b$ **

Teniendo en cuenta * y **, resulta:

$2/a \ \wedge \ 2/b$ ¡Absurdo¡

Pues a y b son coprimos.

Este absurdo provino de suponer que $\sqrt{2}$ se podía escribir como fracción.

Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción, $\sqrt{2}$ es irracional.

Nota: La demostración anterior no varía si en lugar del número 2 se consideraba cualquier número primo $p > 1$. Como Euclides probó que los números primos son infinitos, afirmamos que existen infinitos números irracionales, además:

i. t número irracional y $r \in \mathbb{Q}$ entonces $t + r$ es irracional

REVISAR ii. Si t es un número irracional y $r \in \mathbb{Q} - \{0\}$ entonces $r.t = t.r$ es irracional

iii. Si t es irracional y $r \neq 0$, $s \in \mathbb{Q}$, entonces $r.t + s$ es irracional

t = 2^(1/2) r = 2^(1/2) s = 1/2 [2^(1/2)*2^(1/2)] + 1/2 = 5/2

Valor absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real x, se denota por $|x|$ y se define por

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|4| = 4$; $|-2| = -(-2) = 2$; $|0| = 0$

Propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}: -|x| \leq x \leq |x|$
2. $a \in \mathbb{R}^+$
   $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $a \in \mathbb{R}^+$
   $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \vee x < -a)$
4. $a, b \in \mathbb{R}$: $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

5. $a, b \in \mathbb{R}$: $|a.b| = |a|.|b|$

$b \neq 0$: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

<u>Los números reales y las expresiones decimales</u>

Las expresiones decimales pueden ser finitas o infinitas, estas últimas periódica o no periódicas.

$$\text{EXPRESION DECIMAL}\begin{cases}\text{FINITA}\\ \text{INFINITA} \begin{cases}\text{PERIODICA}\\ \text{NO PERIODICA}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos:

Expresión decimal finita: 4,231 ; 0,25

Expresión decimal Infinita periódica: $7{,}21\hat{4}$; $10,\widehat{21}$

Expresión decimal Infinita no periódica: 4,1125448792234… ; 13,24051236000478…

<u>Números racionales y expresiones decimales</u>

Las expresiones decimales finitas y las infinitas periódicas son números racionales, pues pueden expresarse como fracción.

Ejemplos:

Expresión decimal finita: $3{,}24 = \frac{324}{100}$

Expresión decimal infinita periódica: $2{,}4\hat{3}$=$\frac{243-24}{90}$

A su vez, todo número racional tiene una expresión decimal.

Dada una fracción $\frac{a}{b}$:

- Si en la división $a \div b$ se obtiene resto 0, la expresión decimal es finita. Ejemplo $$\frac{16}{5} = 3{,}2$$

- Si en la división $a \div b$ no se tiene el resto 0, la expresión decimal no es finita, pero como el número de restos posibles es limitado (serán números enteros positivos menores que el divisor) en algún momento se repite alguno de ellos, lo cual indica la formación del periodo de repetición.

  Ejemplo

$$\frac{4}{3} = 1,\hat{3}$$

Por lo que, los números racionales pueden escribirse como expresiones decimales finitas o como expresiones decimales infinitas periódicas y a su vez estas expresiones decimales pueden escribirse como un número racional (como fracción).

$$Número\ Racional \leftrightarrow expresión\ decimal\ finita\ o\ infinita\ peródica$$

Además, cada número irracional se escribe en forma decimal con infinitas cifras decimales no periódicas y cada expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódica se escribe como irracional.

$$Número\ irracional \leftrightarrow expresión\ decimal\ infinita\ no\ peródica$$

Observación: Como los racionales son densos, se puede aproximar cualquier irracional por un racional. Ej: $\pi \cong 3{,}14$; $\pi \cong 3{,}1415$

Nota: Como cada número irracional se escribe en forma decimal con infinitas cifras decimales no periódica, para los cálculos con dichos números usamos aproximaciones racionales.

- **<u>Números complejos</u>**

Existen muchas ecuaciones con coeficientes reales que no tienen solución real. Se crea un nuevo conjunto numérico que satisfaga a esas ecuaciones y que se coordine con los números reales.

Ejemplo: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$
Si $x \epsilon \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$
Luego, la ecuación dada no tiene solución en $\mathbb{R}$
<u>En general</u>: La ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ tal que $b^2 - 4ac < 0$, **no tiene solución en** $\mathbb{R}$.
Por estos motivos se crea el conjunto de los números complejos.

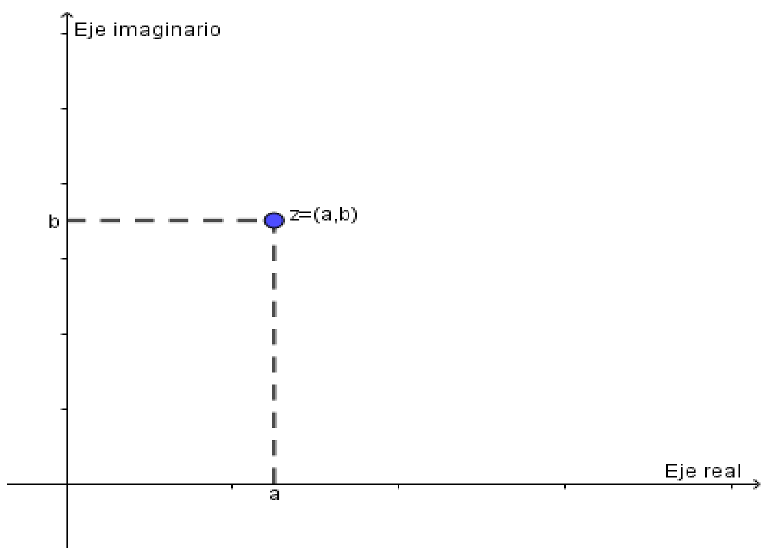
Definición: Llamamos número complejo a todo para ordenado de números reales. Por lo que el conjunto de los número complejos está dado por:

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b)/a\epsilon\mathbb{R} \wedge b\epsilon\mathbb{R}\}$$

Ejemplo: $z = (\frac{2}{3}, -1)\epsilon\ \mathbb{C}$; $z = (0, \sqrt{9})\epsilon\ \mathbb{C}$

Los números complejos se representan geométricamente en el plano. Cuando el plano se usa para representar números complejos, se lo llama Plano de Gauss.

Representación del complejo $z = (a,b)$ en forma cartesiana en el plano de Gauss



Igualdad en $\mathbb{C}$

$z_1 = (a_1, b_1)\ \epsilon\ \mathbb{C}$, $z_2 = (a_2, b_2)\ \epsilon\ \mathbb{C}$

$z_1 = z_2$ si y sólo si ($a_1 = a_2\ \wedge\ b_1 = b_2$)

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} z_1 = (-2, \frac{5}{3}) \\ z_2 = (-2, -\frac{5}{3}) \end{array}\right\} z_1 \neq z_2$$

Leyes de composición interna en $\mathbb{C}$

Sean $z_1 = (a_1, b_1) \epsilon\ \mathbb{C}$ y $z_2 = (a_2, b_2) \epsilon\ \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \rightarrow Definición\ de\ la\ \boldsymbol{SUMA}$$
$$z_1 . z_2 = (a_1, b_1) . (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 . a_2 - b_1 . b_2\ ,\ a_1 . b_2 + b_1 . a_2) \rightarrow Definición\ de\ la\ \boldsymbol{MULTIPLICACION}$$

Ejemplo: Sean los complejos $z_1 = (2, -3)$ y $z_2 = (1,7)$

$$z_1 + z_2 = (2, -3) + (1,7) = (2 + 1, -3 + 7) = (3,4)$$
$$z_1 . z_2 = (2, -3) . (1,7) = (2.1 - (-3).7\ , 2.7 + (-3).1) = (23,11)$$

<u>Estructura algebraica en los complejos</u>

Propiedad: Los números complejos con la " $+$ " y " $.$ " tienen estructura de CUERPO.

$(\mathbb{C}, +, .)$ **CUERPO**

Demostración:
Se prueba que se cumplen las siguientes propiedades
1) La suma es **asociativa** en $\mathbb{C}$
2) La suma es **conmutativa** en $\mathbb{C}$
3) La suma tiene elemento **neutro** en $\mathbb{C}$: $\exists (0,0) \epsilon \mathbb{C}$
4) La suma verifica existencia de **opuesto:**

$$\forall\ z = (a, b) \in \mathbb{C} : \exists -z = (-a, -b) \in \mathbb{C}\ /\ z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = \big(a + (-a), b + (-b)\big) = (0,0)$$

$(\mathbb{C}, +)$ **Grupo Conmutativo**

5) La "." es **asociativa** en $\mathbb{C}$
6) La "." es **conmutativa** en $\mathbb{C}$

7) La "." tiene **neutro** en $\mathbb{C}$: $\exists (1,0)\ \epsilon\ \mathbb{C}$

8) La "." verifica existencia de **inverso** para cada complejo no nulo:

$$\forall\ z = (a, b) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\} :\ \exists\ z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}\quad z . z^{-1} = (a, b) . \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$$

9) La "." cumple la propiedad distributiva respecto de la "+".

$$\forall\ z_1, z_2, z_3\ \in \mathbb{C} :\ z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$

Por lo tanto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Resta y división en $\mathbb{C}$

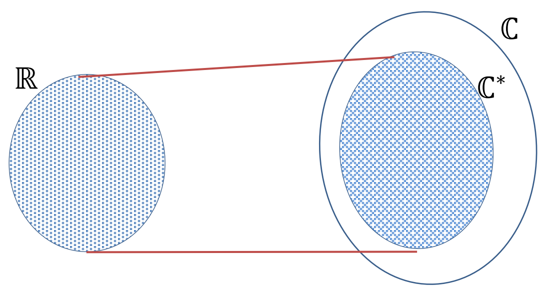
Sean $z_1 = (a_1, b_1) \epsilon\ \mathbb{C}$ y $z_2 = (a_2, b_2) \epsilon\ \mathbb{C}$

$$z_1 - z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 + (-z_2) = (a_1, b_1) + (-a_2, -b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \div z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 . {z_2}^{-1} = (a_1, b_1).\left(\frac{a_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}, \frac{-b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}\right)$$

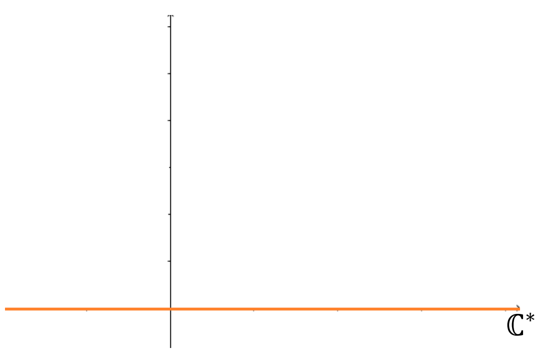
Identificación de $\mathbb{R}$ con un subconjunto de $\mathbb{C}$

Como los números complejos son pares ordenados de números reales, es imposible que los números reales sean un subconjunto de los complejos.

Identificaremos a los reales con un subconjunto de los complejos.



$\mathbb{C}^* = \{(a, b) \epsilon\ \mathbb{C} / b = 0\} \rightarrow$ Complejos reales



Propiedades en $\mathbb{C}^*$

Sean $z_1 = (a_1, 0) \epsilon\ \mathbb{C}^*$ y $z_2 = (a_2, 0) \epsilon\ \mathbb{C}^*$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0 + 0) = (a_1 + a_2, 0)\ \epsilon\ \mathbb{C}^* \ \longrightarrow\ \boldsymbol{SUMA}$
$z_1 . z_2 = (a_1 . a_2 - 0.0,\ a_1 . 0 + 0 . a_2) = (a_1 . a_2, 0)\ \epsilon\ \mathbb{C}^* \ \longrightarrow\ \boldsymbol{MULTIPLICACION}$

Neutros:

Para la "+": $z_n = (0,0) \epsilon\ \mathbb{C}^*$

Para la ".": $z_u = (1,0) \epsilon\ \mathbb{C}^*$

Opuesto: $z = (a,0) \epsilon\ \mathbb{C}^* \Rightarrow -z = (-a,0) \epsilon\ \mathbb{C}^*$

Inverso: $z = (a,0) \neq (0,0) \Rightarrow\ z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+0^2}, \frac{-0}{a^2+0^2}\right) = (\frac{1}{a}, 0)\ \epsilon\ \mathbb{C}^*$

$(\mathbb{C}^*, +, .)$ es un cuerpo dentro de $\mathbb{C}$

Se define una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}^*$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$$
$$r \mapsto f(r) = (r,0)$$

Se prueba que:

- f es biyectiva
- f es morfismo con respecto a "+" y "." :
  $r_1, r_2 \epsilon \mathbb{R} : f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$

  $r_1, r_2 \epsilon \mathbb{R} : f(r_1 . r_2) = f(r_1) . f(r_2)$

Por lo que f es Isomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}^*$.

Este Isomorfismo permite identificar a cada número real con su correspondiente complejo real.

$$\underset{\boldsymbol{Isomorfos}}{\mathbb{R} \cong \mathbb{C}^*}$$

Para cualquier número real r: $r = (r,0)$

Ejemplos:

$-5 = (-5,0)$

$\sqrt{2} = (\sqrt{2}, 0)$

Producto de un $\mathbb{R}$ por un $\mathbb{C}$

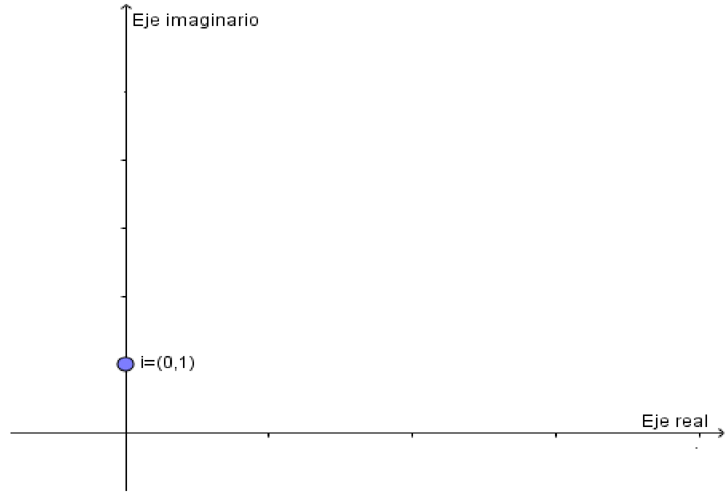
Sean $r \epsilon \mathbb{R}$ y $z = (a,b) \epsilon\ \mathbb{C}$

$$r.z = (r,0).(a,b) = (r.a - 0.b, r.b + 0.a)$$
$$= (r.a, r.b)$$

Ejemplo:

$r = 2$ y $z = (-1, \frac{3}{4})$

$$r.z = (2,0).\left(-1,\frac{3}{4}\right) = \left(2.(-1), 2.\frac{3}{4}\right) = \left(-2,\frac{3}{2}\right)$$



La Unidad Imaginaria

$i \overset{\text{def}}{=} (0,1)$

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) \underbrace{=}_{isomorfismo} -1$$

Luego, por transitividad:
$i^2 = -1$

Resolvemos la siguiente ecuación, teniendo en cuenta el resultado anterior:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = i$$

Verificamos:
$x = i \Rightarrow i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$

Verificar que $-i = (0,-1)$ también es solución de $x^2 + 1 = 0$

Potencias naturales de i

i^n con $n \in \mathbb{N}_0$

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4.i = 1.i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5.i = i.i = -1$
$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$	$i^7 = i^6.i = -1.i = -i$

Las potencias de i se repiten con un período de 4 resultados distintos: 1, i, -1, - i.
En general, calcular i^n con $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \hline r & = c \end{array} \qquad \text{Con} \qquad 0 \leq r < 4$$

Por el algoritmo de la división, resulta: $n = 4.c + r$

Luego

$$i^n = i^{4.c+r} = i^{4.c}.i^r = (i^4)^c.i^r = 1^c.i^r = 1.i^r = i^r$$

Por transitividad $\boxed{i^n = i^r}$

Ejemplo: Calcular i^{35}

$i^{35} = i^3 = -i$, pues el resto de dividir 35 entre 4 es 3.

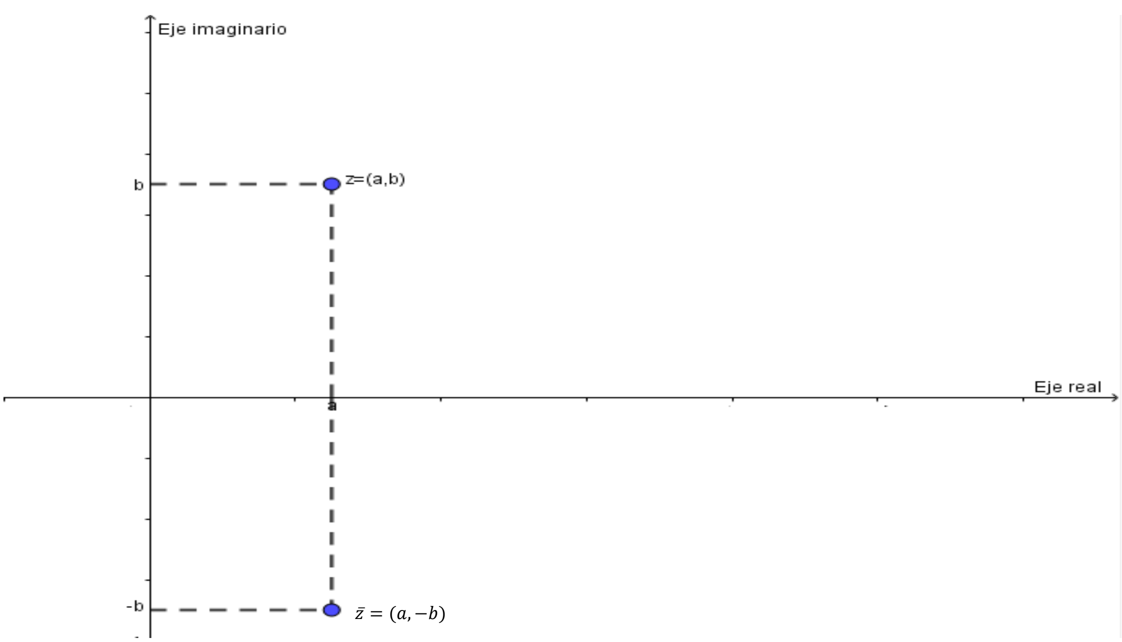
C.A
$$\begin{array}{l|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & = 8 \end{array}$$

<u>Conjugado de un número complejo</u>

Dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

El conjugado de z , es otro número complejos que se denota $\bar{z}$ y define por: $\bar{z} = (a, -b)$

Es decir, el conjugado de un número complejo se obtiene cambiando de signo la componente imaginaria.



Propiedades

Dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$

1. $z + \bar{z} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2a$
2. $z.\bar{z} = (a, b).(a, -b) = (a.a - b.(-b), a.(-b) + b.a) = (a^2 + b^2, -a.b + a.b) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2$
3. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

   $\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

   $\bar{z_1}.\bar{z_2} = \overline{z_1.z_2}$

<u>Forma binómica de un número complejo</u>

Usando los números complejos en la forma cartesiana, escribiremos el número complejo como un binomio.

Calculemos:

$(b, 0)i = (b, 0).(0,1) = (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) = (0, b)$

Referencias:
(1) Resultado anterior
$(0, b) = (b, 0)i$
(2) Por Isomorfismo en entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Luego

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \underbrace{=}_{(1)} (a, 0) + (b, 0)i = (a + bi,\ 0) \underbrace{=}_{(2)} a + bi$

$z = a + bi \rightarrow$ Forma binómica de z

Ejemplo:

$z = (-4, 2) \rightarrow z = -4 + 2i$

$z = (1, -5) \rightarrow z = 1 - 5i$

<u>Suma y producto en forma binómica</u>

Sean los complejos $z_1 = a_1 + b_1 i \quad \wedge \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1.z_2 = (a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i) = a_1.a_2 + a_1.b_2 i + b_1 i.a_2 + b_1 i.b_2 i = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_1.b_2 + b_1.a_2)i$

<u>Conjugado en forma binómica</u>

Dado el complejo $z = a + bi$, su conjugado es $\bar{z} = a - bi$

Se cumple que:

$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{y} \quad z.\bar{z} = a^2 + b^2$$

Aplicación de la conjugación a la división

Sean los complejos $z_1 = (a_1, b_1) \quad \wedge \quad z_2 = (a_2, b_2) \neq (0,0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \div z_2 \overset{\text{def}}{=} z_1 . z_2^{-1} = z_1 . \left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) = z_1 . \frac{1}{\underbrace{a_2^2+b_2^2}_{z_2.\bar{z}_2}} \overbrace{(a_2, -b_2)}^{\bar{z}_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{z_2.\bar{z}_2}$$

Regla práctica

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad z_2 \neq (0,0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{z_2 . \bar{z}_2}$$

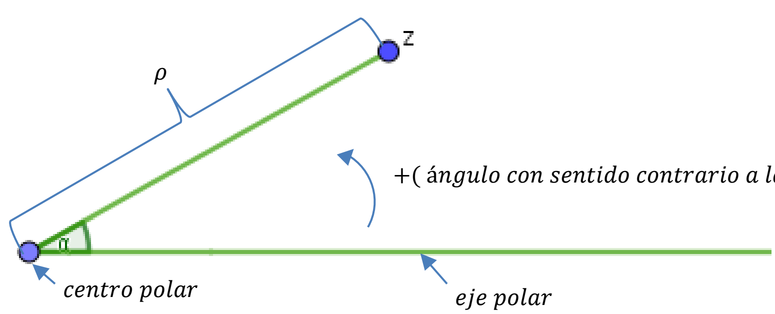
Ejemplo: $z_1 = 2 - i \quad \wedge \quad z_2 = 1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i).(1-3i)}{(1+3i).(1-3i)} = \frac{2.1+2(-3i)+(-i).1+(-i).(-3i)}{1^2+3^2} = \frac{2-6i-i+3i^2}{10} = \frac{2-6i-i-3}{10} = \frac{(2-3)+(-6i-i)}{10} = \frac{-1-7i}{10} = \frac{-1}{10} + \frac{-7}{10} i$$

Nota: Las formas cartesiana y binómica son útiles para resolver suma, resta, multiplicación y división de complejos. No son cómodas para trabajar con potenciación y no se las puede usar en raíces y logaritmos de complejos.

Forma polar de un número complejo

Geométricamente un número complejo es un punto en el plano. El punto se identifica mediante números o parámetros vinculados al sistema de referencia que usamos.



Dado $z \in \mathbb{C}$, z es un punto en el plano.

$\overline{oz} = \rho \rightarrow distancia\ de\ z\ al\ centro\ polar\ "o"$

ρ se denomina módulo de z y es la medida del segmento $\overline{oz}$.

Módulo de $z = \rho \quad$ con $\rho \in \mathbb{R}_0^+$

Consideremos el ángulo limitado por el eje polar y la semirecta $\overrightarrow{oz}$. La Medida del ángulo es un número real α llamado “Argumento de z”

Argumento de $z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Escritura de un complejo en forma polar:

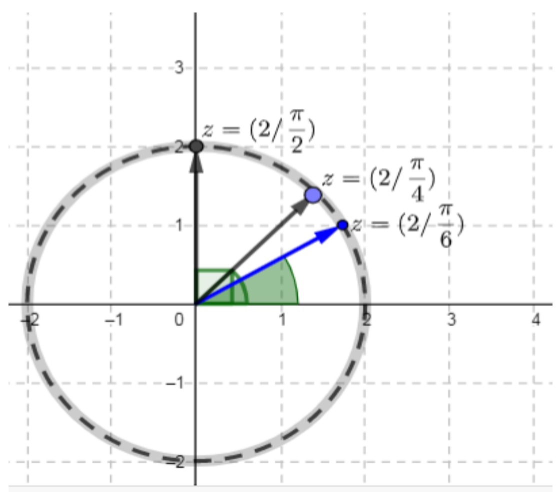
$$z = (\rho/\alpha)$$

Argumento

Módulo

Ejemplo: Representamos gráficamente en el plano de gauss los siguientes complejos

$z = (2/\frac{\pi}{6}), z = (2/\frac{\pi}{4}), z = (2/\frac{\pi}{2})$



Argumento congruentes

Dos argumentos son congruentes si la diferencia entre ellos es un múltiplo entero de 2π, es decir la diferencia entre ellos es un número entero de giros.

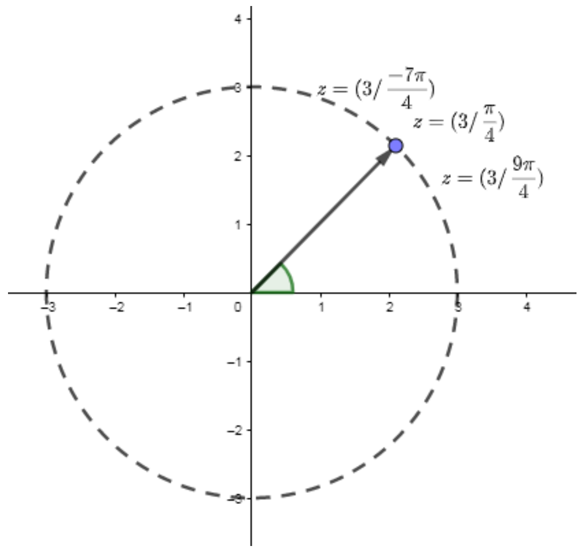
Ejemplo: $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{7\pi}{3}$, $\alpha_3 = \frac{19\pi}{3}$

$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{7\pi}{3} = \frac{-6\pi}{3} = -2\pi = (-1).2\pi$ Luego $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ (se lee: α_1 congruente con α_2)

$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{7\pi}{3} - \frac{19\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi = 2.2\pi$. Por lo tanto $\alpha_2 \equiv \alpha_3$

Igualdad de complejos en forma polar

Representamos gráficamente: $z = (3/\frac{\pi}{4})$, $z = (3/\frac{9\pi}{4})$, $z = (3/\frac{-7\pi}{4})$



Observamos que el mismo complejo se puede escribir con módulos iguales y argumentos congruentes.

Definición

Dados los complejos $z_1 = (\rho_1/\alpha_1) \wedge \quad z_2 = (\rho_2/\alpha_2)$

$$z_1 = z_2 \quad si\ y\ sólo\ si \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 & módulos\ iguales \\ \underbrace{\alpha_1 \equiv \alpha_2}_{\alpha_1 = \alpha_2 + k.2\pi \ con\ k \in \mathbb{Z}} & argumentos\ congruentes \end{cases}$$

Ejemplo

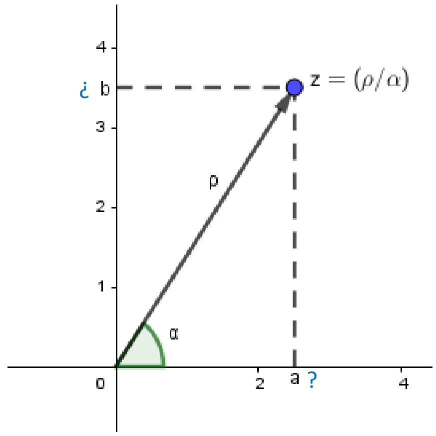
$$\left.\begin{matrix} z_1 = (3/\frac{\pi}{4}) \\ z_2 = (3/-7\frac{\pi}{4}) \end{matrix}\right\} z_1 = z_2$$

Nota: Es frecuente escribir al complejo con el argumento que corresponde al primer giro positivo, dicho argumento se llama **Argumento Principal.**

$$0 \leq \underbrace{\alpha}_{\substack{Argumento \\ Principal \\ de\ z}} < 2\pi$$

Pasaje de forma polar a cartesiana

Dado el complejo en forma polar $z = (\rho/\alpha)$, lo pasaremos a la forma cartesiana $z = (a, b)$



Las coordenadas cartesianas a y b se determinan de la siguiente manera:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{\rho} \Rightarrow \boxed{b = \rho. sen\ \alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\rho} \Rightarrow \boxed{a = \rho. cos\ \alpha}$$

Observar que, podemos escribir:

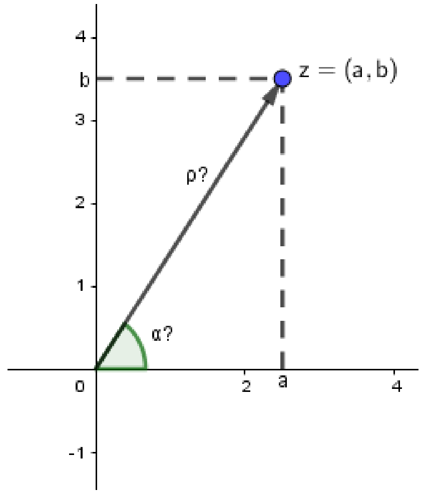
$$z = (a, b) = (\rho. cos\ \alpha, \rho. sen\ \alpha)$$

Y

$$z = a + bi = \rho. cos\ \alpha + (\rho. sen\ \alpha)i = \rho. (\ cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)$$

<u>Pasaje de la forma cartesiana a la polar</u>

Dado el complejo en forma cartesiana $z = (a, b)$, lo pasaremos a la forma polar $z = (\rho/\alpha)$



Las coordenadas ρ y α se determinan de la siguiente manera:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Y sabiendo que

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\ \alpha = \frac{b}{\rho} \\ \cos\alpha = \frac{a}{\rho} \end{array}}$$

O que

$$\boxed{tg\ \alpha = \frac{b}{a}}$$

Se determina el argumento "α" con las funciones inversas $arcsen, arccos$ o $arctg$.

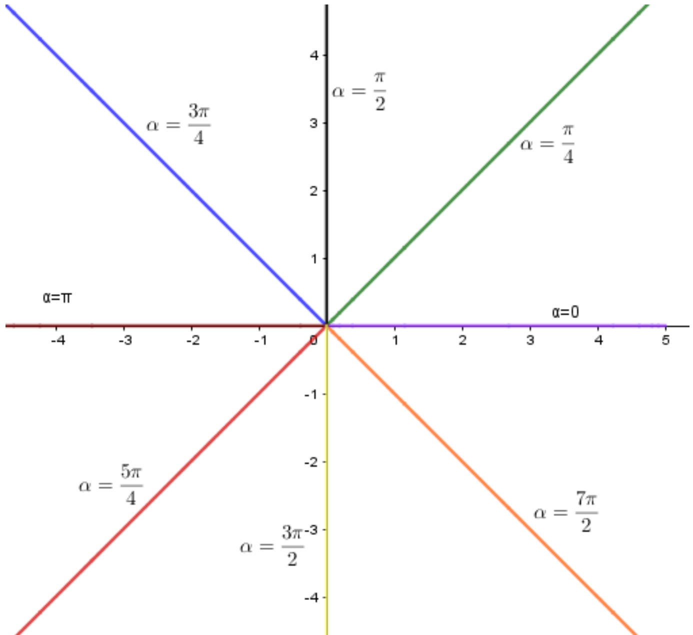
Forma práctica

Trabajando con valores positivos de a y b, se determina un valor α^* (donde $\alpha^* = arctg\ \left|\frac{b}{a}\right|$).
Para determinar α, se analiza el cuadrante donde está ubicado z teniendo en cuenta las coordenadas a y b, y se procede de la siguiente manera:

- α está en el **primer cuadrante** → $\alpha = \alpha^*$
- α está en el **segundo cuadrante** → $\alpha = \pi - \alpha^*$
- α está en el **tercer cuadrante** → $\alpha = \pi + \alpha^*$
- α está en el **cuarto cuadrante** → $\alpha = 2\pi - \alpha^*$

Nota: Casos particulares en la forma polar.

Si los complejos están ubicados en los ejes coordenados o en las bisectrices de los cuadrantes, se conoce fácilmente los argumentos.



Ejemplo:

$z_1 = (5,0) \to z_1 = (5/0)$

$z_2 = (1,1) \to z_2 = (\sqrt{2}/\frac{\pi}{4})$

$z_3 = (0,4) \to z_3 = (4/\frac{\pi}{2})$

$z_4 = (-1,1) \to z_4 = (\sqrt{2}/\frac{3\pi}{4})$

$z_5 = (-3,0) \to z_5 = (3/\pi)$

$z_6 = (-2,-2) \to z_6 = (\sqrt{8}/\frac{5\pi}{4})$

$z_7 = (0,-3) \to z_7 = (3/\frac{3\pi}{2})$

$z_8 = (1,-1) \to z_8 = (\sqrt{2}/\frac{7\pi}{4})$

Operaciones en forma polar

En forma polar no está definida la suma ni la resta.

- **Multiplicación**

Sean los complejos $z_1 = (\rho_1/\alpha_1)$ y $z_2 = (\rho_2\,/\alpha_2)$

$z_1.z_2 = (\rho_1/\alpha_1).(\rho_2\,/\alpha_2) = (\rho_1.\rho_2\,/\alpha_1 + \alpha_2)$

- **Inverso de un complejo no nulo**

Dado el complejo $z = (\rho/\alpha) \neq (0/0)$, ¿qué forma tiene el inverso z^{-1}?

Sabemos que

$z.z^{-1} = \underbrace{(1/0)}_{neutro}$ (1)

El complejo $z^{-1} = (\frac{1}{\rho}/-\alpha)$ verifica la igualdad (1)

Pues $z.z^{-1} = (\rho/\alpha).(\frac{1}{\rho}/-\alpha) = (\frac{\rho}{\rho}/\alpha - \alpha) = (1/0)$

- **División**

Sean los complejos $z_1 = (\rho_1/\alpha_1)$ y $z_2 = (\rho_2\,/\alpha_2) \neq (0/0)$

$\frac{z_1}{z_2} = z_1.{z_2}^{-1} = (\rho_1/\alpha_1).(\frac{1}{\rho_2}/-\alpha_2) = (\frac{\rho_1}{\rho_2}/\alpha_1 - \alpha_2)$

Ejemplo: $z_1 = (2/\frac{3}{4}\pi)$ y $z_2 = (1/\pi)$

$$z_1.z_2 = (2/\frac{3}{4}\pi).(1/\pi) = (2.1/\frac{3}{4}\pi + \pi) = (2/\frac{7}{4}\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2/\frac{3}{4}\pi)}{(1/\pi)} = (\frac{2}{1}/\frac{3}{4}\pi - \pi) = (2/-\frac{1}{4}\pi)$$

- **Potencia natural de un complejo en forma polar**

Si $z = a + bi$ y $n \in \mathbb{N}$

$z^n = (a + bi)^n$ se puede desarrollar mediante la Fórmula del Binomio de Newton

Escribiendo al complejo z en forma polar

$z = (\rho/\alpha)$

$z^n = (\rho/\alpha)^n = (\rho^n/n.\alpha) \rightarrow$ **Fórmula de De Moivre**

Ejemplo: Dado $z = (1 + i)$ y $n = 5$

Calcular $(1 + i)^5$

$$(1+i)^5 \underbrace{=}_{(1)} \left(\sqrt{2}/\frac{\pi}{4}\right)^5 \underbrace{=}_{(2)} ((\sqrt{2})^5/5.\frac{\pi}{4}) = (4\sqrt{2}/\frac{5}{4}\pi)$$

Referencias

(1) $z = (1+i) \rightarrow z = (1,1) \rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

(2) Se aplica Fórmula de De Moivre

<u>Demostración de la Fórmula de De Moivre</u>

Sean $z = (\rho/\alpha)$ y $n \in \mathbb{N}$

Probar: $(\rho/\alpha)^n = (\rho^n/n.\alpha)$

Para la prueba utilizaremos el ***Método de Inducción Completa***

$P(n)$: $\quad (\rho/\alpha)^n = (\rho^n/n.\alpha)$

$\boldsymbol{n = 1}$

Verificar: $(\rho/\alpha)^1 = (\rho^1/1.\alpha)$

Calculando cada miembro por separado, se tiene:

$\left.\begin{array}{l}(\rho/\alpha)^1=(\rho/\alpha)\\(\rho^1/1.\alpha)=(\rho/\alpha)\end{array}\right\}$ son iguales

Luego, $P(1)$ es verdadera

$\boldsymbol{n = h}$

hipótesis inductiva

$(\rho/\alpha)^h = (\rho^h/h.\alpha)$ se supone verdadero

$\boldsymbol{n = h + 1}$

Probar $(\rho/\alpha)^{h+1} = (\rho^{h+1}/\,(h+1).\alpha)$

$$(\rho/\alpha)^{h+1} = (\rho/\alpha)^h.(\rho/\alpha) \underbrace{=}_{(1)} (\rho^h/h.\alpha).(\rho/\alpha) \underbrace{=}_{(2)} (\rho^h.\rho/h.\alpha + \alpha) \underbrace{=}_{(3)} (\rho^{h+1}/\,(h+1).\alpha)$$

Por lo tanto $P(h+1)$ es verdadero

Luego $P(n)$ es verdadero para toda $n \in \mathbb{N}$

Referencias (1) Por la hipótesis inductiva (2) Producto en forma polar (3) Por propiedad de potencia y por factor común.

∎

- **Raíces n-ésimas de un complejo**

Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$

Veremos que para la $\sqrt[n]{z}$ existen tantas raíces distintas como indica el índice. Para ello el número complejo z debe estar expresado en forma polar.

Definición

Sea $z = (\rho/\alpha)$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z}$$

Hay que determinar las raíces w , es decir

$w = (\overbrace{\tilde{\rho}}^{?}/\overbrace{\tilde{\alpha}}^{?})$ se debe determinar el módulo y el argumento de las soluciones w

$$\sqrt[n]{(\rho/\alpha)} = (\tilde{\rho}/\tilde{\alpha}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} (\tilde{\rho}/\tilde{\alpha})^n = (\rho/\alpha) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} (\tilde{\rho}^n/n.\tilde{\alpha}) = (\rho/\alpha) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)} \begin{cases} \tilde{\rho}^n = \rho \\ n.\tilde{\alpha} = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho} \\ \tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \ con\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Referencias
(1) Por definición de raíz n-ésima
(2) Por Fórmula de De Moivre
(3) Por igualdad de complejos en forma polar

Nota: Como k varía en los enteros, pareciera que los com infinitos argumentos distintos. Por congruencia de argumentos, en realidad se repiten con periodos de n valores enteros consecutivos. Se acostumbra a tomar como solución los valores que se obtienen para $k = 0,1,2, \dots, n-1$

Conjunto solución

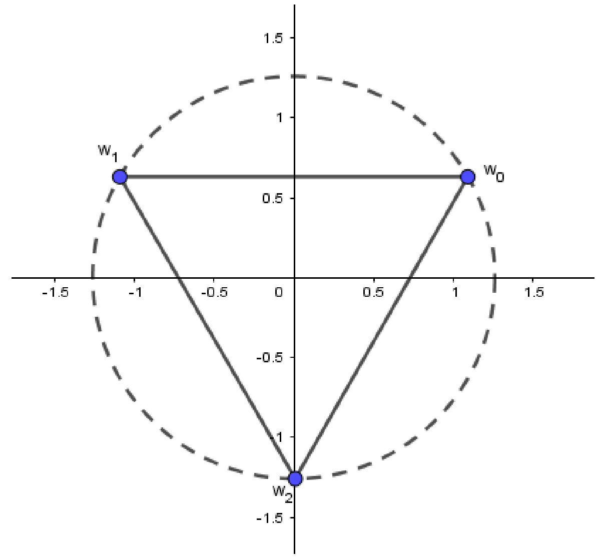
$$\left\{ w_k / w_k = \left(\sqrt[n]{\rho} / \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \ con\ k = 0,1,2, \dots, n-1 \right\}$$

Ejemplo: Dado $z = (0,2)$. Calcular $\sqrt[3]{z}$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{(2/\frac{\pi}{2})} = \left(\sqrt[3]{2} / \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$ con $k = 0,1,2$

Conjunto solución:

$$\left\{w_0 = (\sqrt[3]{2} \,/ \frac{\pi}{6}), w_1 = (\sqrt[3]{2} \,/ \frac{5\pi}{6}), w_2 = (\sqrt[3]{2} \,/ \frac{9\pi}{6})\right\}$$



Observación: Las raíces se ubican en una circunferencia cuyo radio tiene el mismo valor del módulo $\sqrt[n]{\rho}$ de las soluciones. Si se une con segmentos las raíces consecutivas se obtiene un polígono regular de n lados iguales.

Forma exponencial de un complejo

$e = 2{,}718281 \ldots$

e^x con $x \in \mathbb{R}$, es la función exponencial

Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ se define la **exponencial compleja:**

$e^z \stackrel{\text{def}}{=} (e^a / b)$

Caso particular:

$z = \alpha i = 0 + \alpha i$

$e^{\alpha i} = (e^0 / \alpha) = (1/\alpha) \Rightarrow e^{\alpha i} = (1/\alpha)$ (1)

Recordemos que,

$(\rho/\alpha) = \rho(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)$ (2)

De donde

$(1/\alpha) = 1(\cos \alpha + i\ sen\ \alpha)$ (3)

Luego

$z = (\rho/\alpha) \underbrace{=}_{(2)} \rho(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha) \underbrace{=}_{(3)} \rho(1/\alpha) \underbrace{=}_{(1)} \rho e^{\alpha i} \Rightarrow \boxed{z = \rho e^{\alpha i} \text{ Forma exponencial de } z}$

Ejemplo: Dado el complejo $z = (2/\pi)$

En forma exponencial es $z = 2e^{\pi i}$

Operaciones en forma exponencial

Dados los complejos $z_1 = \rho_1 e^{\alpha_1 i}$ y $z_2 = \rho_2 e^{\alpha_2 i}$

$z_1 . z_2 = \rho_1 e^{\alpha_1 i} . \rho_2 e^{\alpha_2 i} = \rho_1 . \rho_2 \; e^{(\alpha_1 + \alpha_2) i}$

$z_1 \div z_2 = \frac{\rho_1 e^{\alpha_1 i}}{\rho_2 e^{\alpha_2 i}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \; e^{(\alpha_1 - \alpha_2) i}$ siempre que $\rho_2 \neq 0$

Potenciación

Sea $z = \rho e^{\alpha i}$

$z^n = \left(\rho e^{\alpha i}\right)^n = \rho^n \left(e^{\alpha i}\right)^n = \rho^n e^{n\alpha i} \Rightarrow z^n = \rho^n e^{n\alpha i}$

Logaritmo natural de un número complejo

Sea $z = (\rho/\alpha)$

$\boxed{\ln z = w \quad \text{si y sólo si} \quad e^w = z}$

Se conoce que $z = (\rho/\alpha)$ y se debe determinar el valor de $w = a + bi$

$$e^w = z \Leftrightarrow e^{a+bi} = (\rho/\alpha) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(1)} (e^a/b) = (\rho/\alpha) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)} \begin{cases} e^a = \rho \\ \wedge \\ b = \alpha + 2k\pi \quad , k\epsilon\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln \rho \\ \wedge \\ b = \alpha + 2k\pi \quad , k\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$

Referencias:
(1) Definición de exponencial compleja
(2) igualdad de complejos en forma polar

Luego, el conjunto solución está dado por:

$\{w/w = \ln \rho + (\alpha + 2k\pi) i \;\; con \; k\epsilon\mathbb{Z}\}$

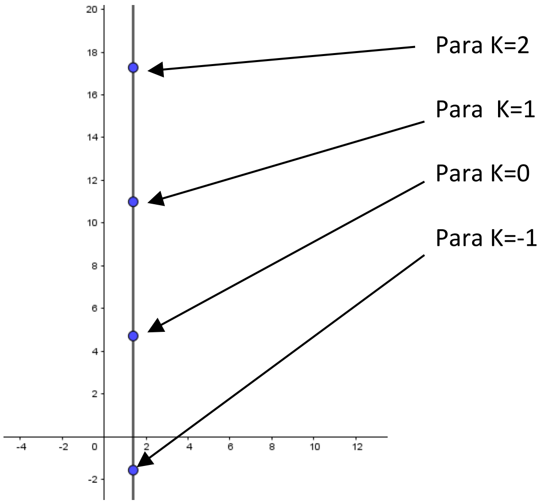
Observación: Con la variación de k en los enteros se obtienen infinitas soluciones. La componente real "a" es la misma, mientras que la componente imaginaria $b = \alpha + 2k\pi$ varía con $k\epsilon\mathbb{Z}$.

Ejemplo:

Sea $z = (4/\frac{3\pi}{2})$

$$\ln z = \ln(4/\frac{3\pi}{2}) = \left\{w/w = \ln 4 + (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) i \;\; con \; k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$

Representación gráfica de algunos de los infinitos valores de w:



Logaritmo principal

Sea $z = (\rho / \alpha)$ y $k = 0$

$$\boxed{\ln \mathrm{z} = \ln \rho + \alpha i}$$

Ejemplo:

Dado $z = (6/\frac{3}{4}\pi)$

$\ln z = \left\{\ln 6 + (\frac{3}{4}\pi + 2k\pi)i \ \ con\ k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

Si $k = 0$, $\ln z = \ln 6 + \frac{3}{4}\pi i$ es el logaritmo principal