UNIVERSIDAD NACIONAL DE SANTIAGO DEL ESTERO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS

Carreras: –Profesorado en Informática
–Programador Universitario en Informática

Asignatura: LÓGICA **AÑO: 2022**

UNIDAD 1 – LÓGICA PROPOSICIONAL

1 – PROPOSICIÓN

El **lenguaje** constituye un **sistema de signos** muy complejo. Los **signos** o combinaciones de signos lingüísticos forman **expresiones lingüísticas**, como lo son, por ejemplo, las **palabras**, las **frases** y las **oraciones**. Las **oraciones** cumplen diversas **funciones**.
Las **oraciones** denominadas **proposiciones,** son aquéllas que tienen una **función informativa,** que se caracterizan porque **afirman** o **niegan** algo, y de ellas tiene sentido decir que son **verdaderas o falsas.**

Ejemplos: **–Los días lunes tenemos clase de Lógica.**
–Seis es un número primo.

Del primer ejemplo podemos decir que: es **verdadero**; del último, en cambio, que es **falso**.

> La **Lógica** denomina **proposiciones** a las **expresiones lingüísticas** que tienen una **función informativa**.
> De ellas tiene sentido decir si son **verdaderas (V)** o **falsas (F)**.
> Las expresiones **verdadero** o **falso** se denominan **valores de verdad** de las **proposiciones**.
> Los **simbolizaremos:** $\mathcal{V}(p) = V$ o $\mathcal{V}(p) = F$, respectivamente.

Ejemplos: **–¿Comprenden el concepto?** **–No dialoguen.**
–¡Qué lindo día! **–Quizá mañana llueva.**
–Ojalá puedas venir. **–Estamos en clase de Lógica.**

En estos ejemplos tenemos distintos **tipos de oraciones**: **interrogativa**, **exclamativa, desiderativa, imperativa, dubitativa** y **declarativa** o **enunciativa.**

Una **pregunta** puede **responderse** o no; una **exclamación** sólo expresa **sentimientos** o **emociones**, una **orden** puede ser **cumplida** o no, una **duda** expresa **probabilidad** o **suposición**. En cambio, de las **declarativas** tiene sentido decir si son **Verdaderas** o **Falsas.**

Luego, de estas **oraciones**, sólo la **última** es una **proposición.** Sin embargo, **NO** es lícito identificar las **oraciones declarativas** con las **proposiciones.** Las **oraciones declarativas,** son expresiones de una estructura determinada, formuladas en un cierto lenguaje.

Las **proposiciones**, en cambio, corresponden al **significado** de esas oraciones. Así, si dos o más oraciones **distintas** tienen el **mismo significado,** corresponderán a la **misma proposición**.

Ejemplo: **Juan es un excelente alumno.**
John is an excellent student.
Juan es un alumno excelente.

Estas oraciones tienen **estructuras diferentes,** pero poseen el **mismo significado** y, por lo tanto, **representan** a la **misma proposición**.
Se las **simboliza** de la siguiente manera: **p, q, r, etc.**

2 – CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Clasificaremos las **proposiciones** en:
- **simples** o **atómicas (PA)**
- **compuestas** o **moleculares (PM)**

> Una **proposición** es **simple o atómica (PA)** cuando **no** contiene dentro de sí **ninguna** otra **proposición.**

Ejemplos: **–Tres es un número primo.**
–Suena el timbre.

> Una **proposición** es **compuesta** o **molecular (PM)** cuando contiene dentro de sí otras **proposiciones** (**por lo menos una**) llamadas **componentes**.
> Estas **proposiciones moleculares** se construyen con **una** o **dos proposiciones atómicas** y **términos de enlace** o **conectivas extensionales**.

Ejemplos: –Hoy **no** llueve. (contiene la **proposición**: "hoy llueve")
–Hoy llueve **y** hace frío.
–Hoy llueve **o** hace frío.
–**Si** hoy llueve **entonces** hace frío.

–Hoy llueve **si y sólo si** hace frío.

Los **términos de enlace** tienen la función de **relacionar** las proposiciones **simples** que forman un enunciado **compuesto**. Es decir, se añaden a las **proposiciones atómicas** para construir **proposiciones moleculares**.
Las más empleadas son: **"no", "y", "o", "si ... entonces ..."** y **"si y sólo si"**, y se representan con $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, respectivamente.
El **"no"** es un conectivo que afecta a una **única** proposición, y por ello se lo denomina **conectivo monádico**.
Los demás conectivos relacionan **dos** proposiciones **atómicas,** y por ello, se los denominan **conectivos diádicos** o **binarios**.

3 – SINTAXIS DE LAS FÓRMULAS PROPOSICIONALES

Las **proposiciones** se expresan en **lenguaje coloquial.**
La **Lógica** tiene su propio lenguaje para simbolizar **proposiciones** y **conectivos o términos de enlace**: es el **lenguaje simbólico.**
En este curso, **representaremos** a las **proposiciones** con las letras: **p, q, r, . .., etc.** que se denominan **variables proposicionales**, y a los **conectivos o términos de enlace,** con los **signos:** $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. (Hay otras convenciones adoptadas por cada autor).
La **sintaxis** enseña cómo escribir proposiciones en **lenguaje simbólico.** Para ello, se definen **reglas de escritura correcta** de estas "**fórmulas**".

Una **fórmula sintácticamente correcta** o **fórmula bien formada (fbf)** se define de acuerdo con las siguientes **reglas:**

a) Las **variables proposicionales p, q, r, s, ...** son **fórmulas bien formadas.**

b) Si **A** y **B** son **fórmulas bien formadas,** también son **fórmulas bien formadas:** $\sim A$, $\sim B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$.

c) Sólo son **fórmulas bien formadas** las que cumplen con las **reglas a)** y **b).**

Para interpretar la relación entre **conectivos** y **variables proposicionales,** cuando **hay más de un** conectivo, se definen las siguientes **reglas**:

1) Un **conectivo** afecta a las variables proposicional **inmediatas** o a algún conjunto de letras y símbolos inmediatos a ellos **entre paréntesis.**

2) Para evitar el exceso de paréntesis se define la siguiente **jerarquía** entre conectivos (desde el **más débil**):

NIVEL 1: $\sim$	**NIVEL 3:** $\Rightarrow$
NIVEL 2: $\wedge$, $\vee$	**NIVEL 4:** $\Leftrightarrow$

4 – DEFINICIÓN SEMÁNTICA DE CONECTIVOS

Intuitivamente podemos afirmar que la **semántica** nos informa sobre el **significado** de las proposiciones en el mundo real.

Los conectivos generan un **significado** de las proposiciones **compuestas**, a partir de las proposiciones **simples** que conectan.
Para ello, se utilizan tablas de relación entre los **significados** de las proposiciones componentes y de las compuestas por cada conectivo. Estas tablas se denominan **tablas de verdad.**
Llamaremos **interpretación de una fórmula** a una **asignación de significados** a sus fórmulas componentes básicas.
Luego, una **interpretación** es una **línea** de la **tabla de verdad** de la fórmula.

5 – TABLAS DE VERDAD DE LAS OPERACIONES LÓGICAS: DEFINICIONES

5.1. NEGACIÓN

La **negación** es una **operación unitaria** o **monádica,** porque a partir de **una** proposición **simple,** se obtiene otra, que es su **negación.**
La **negación** de una proposición representada por la variable **p,** es la **proposición compuesta "no p"**, que se simboliza **"~p".**

La **tabla de valores de verdad** de la **negación** es:

p	~p
V	F
F	V

La **negación** de una proposición **verdadera** es **falsa,** y la de una **falsa,** es **verdadera.**
Además del conectivo **"no"**, su usan también: **"no es cierto que"**, **"no ocurre que"**, **"no se da el caso de que"**, etc.

Ejemplos: La negación de la proposición **"Hoy es martes",** se puede escribir:
–Hoy **no** es martes.
–**No es cierto que** hoy es martes.
–**No ocurre que** hoy sea martes.

5.2. CONJUNCIÓN

La **conjunción** de las proposiciones **p** y **q,** es la proposición **"p y q",** y se representa por **"p ∧ q".**
Es una operación **binaria** o **diádica** porque a partir de **dos** proposiciones **simples** obtenemos una **molecular.**

Las **proposiciones atómicas** que la forman se denominan **conjuntivos.**

p	∧	q
V	V	V

V	F	F
F	F	V
F	F	F

La **tabla de valores de verdad** de la **conjunción** es:

La **conjunción** de dos proposiciones es **verdadera** cuando **ambos conjuntivos** son **verdaderos;** en todo otro caso, es **falsa**.
Además del conectivo **"y"**, se usan también: la **coma** o el **punto y coma** gramatical, y las expresiones: **"a la vez . . . y . . ."**, **"pero"**, **"aunque"**, **"sin embargo"**, **"no obstante"**, **"además"**, **"sino"**, **"no sólo, sino también"**, etc.

Ejemplos: Sean **p: llueve, q: sale el sol**
$p \wedge q$: Llueve **y** sale el sol.
$p \wedge q$: **A la vez** llueve **y** sale el sol.
$p \wedge q$: Llueve **pero** sale el sol.

NOTA: La conjunción gramatical **"y"** no siempre representa una **conjunción lógica.** La expresión: **"Juan y Pedro son hermanos"** no es una **conjunción** porque es **imposible** separar los **conjuntivos,** ya que: **"Juan es hermano"** o **"Pedro es hermano"**, no son **proposiciones.**

5.3. DISYUNCIÓN INCLUSIVA

Una **disyunción** es una proposición **molecular** que se obtiene uniendo **dos** proposiciones **atómicas** con el término de enlace **"o"**.
Es una operación **binaria** o **diádica,** porque a partir de dos proposiciones **simples** se obtiene una **compuesta.**
Las proposiciones **simples** que la forman se denominan **disyuntivos.**

La **tabla de valores de verdad** de la **disyunción inclusiva** es:

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

La disyunción es **falsa** sólo cuando los dos **disyuntivos** son **falsos.**
Además del conectivo **"o"**, su usan también: **"o ... o ..."**, **"o bien ... o bien ..."**, **"a menos que"**, etc.

Ejemplos: Sean **p: la lógica es difícil, q: la profesora explica mal**

p ∨ q : La lógica es difícil **o** la profesora explica mal.
p ∨ q : La lógica es difícil **a menos que** la profesora explique mal.
p ∨ q : O bien, la lógica es difícil **o bien,** la profesora explica mal.

NOTA: Consideraremos la disyunción en sentido **incluyente**. Esto significa que, **por lo menos una** de las **dos** proposiciones es **verdadera.**

5.4. CONDICIONAL MATERIAL

Llamaremos **condicional material** a la proposición **compuesta** que emplea la conectiva **"si ... entonces ..."** para **relacionar dos** propo- posiciones **simples** y que se representa: **"p ⇒ q".**
Luego, es una **operación diádica** o **binaria.**
La **proposición** que **sigue** a la palabra **"si"** recibe el nombre de **antecedente (p)**, y la que **sigue** a la palabra **"entonces"** es el **consecuente (q).**

La **tabla** de **valores de verdad** del **condicional material**

p	⇒	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

El condicional es **falso** cuando su **antecedente** es **verdadero** y su **consecuente** es **falso;** en todo otro caso es **verdadero**.
Usualmente se lee el condicional **"si p entonces q",** pero se usan también: **"si p, q", "p sólo si q", "q, si p", "para q es suficiente p", "es suficiente p para q", "para p es necesario q", "es necesario q para p", "cuando p, q"**, etc.

Ejemplos: Sean **p : "Curso el Profesorado en Informática"**
q : " Estoy entusiasmado"

p ⇒ q: Si curso el Profesorado en Informática **entonces** estoy entusiasmado
p ⇒ q: Si curso el Profesorado en Informática, estoy entusiasmado.
p ⇒ q: Curso el Profesorado en Informática **sólo si** estoy entusiasmado.
p ⇒ q: Estoy entusiasmado, **si** curso el Profesorado en Informática.
p ⇒ q: Cuando curso el Profesorado en Informática, estoy entusiasmado.

5.4.1. CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

Cabe destacar que en la definición del condicional sólo se considera la **forma** de la proposición, el **valor de verdad** del **antecedente** y del **consecuente,** pero nada se dice de la vinculación entre el **significado** de uno y de otro.

Consideraremos ahora el caso en el que:

- el **condicional** es **verdadero,**
- el **antecedente** es **verdadero** y
- los **significados de ambos** están **relacionados.**

Bajo estas condiciones:

a) El **significado del consecuente** será **necesariamente verdadero.**

b) La **verdad** del **consecuente** está expresada en la **verdad** del **antecedente**.

c) **No puede ocurrir que**: el **antecedente** se verifique sin que se verifique el **consecuente**.

Ejemplo: consideremos la proposición: **"Si la luz se enciende entonces el foco funciona".** Si el foco **no** funcionara o estuviese quemado, el **antecedente**: **"la luz se enciende" no** podría ser **verdadero**. Es decir, que el **consecuente obligatoriamente** debe ser **verdadero**.

En este caso se establecen **relaciones** denominadas **condición necesaria** y **condición suficiente** para el condicional. En el sentido de:

- El **antecedente** es **condición suficiente** para el **consecuente;** esto dice que, la **ocurrencia** del **antecedente** es información **suficiente** para que se produzca el **consecuente**. Si se produce **"p"**, se producirá **"q".**
- El **consecuente** es **condición necesaria** para el **antecedente;** esto dice que el **antecedente no** puede ocurrir sin que también ocurra el **consecuente**. Sólo si sucede **"q"** puede haber sucedido **"p".**

Ejemplos:

–**Es necesario que** el resultado de la tabla sea todo verdadero **para que** la fórmula sea tautológica.

–**Para** aprobar el examen final, **es necesario** estudiar la teoría.

–**Es suficiente que** las fórmulas lógicas tengan las mismas tablas de valores **para que** sean equivalentes.

5.5. BICONDICIONAL

El **bicondicional** es una proposición **molecular** obtenida al unir **dos** proposiciones **atómicas** con el término de enlace **"si y sólo si".**

La **tabla** de **verdad** del **bicondicional** es:

p	⇔	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

El **bicondicional** es **verdadero** si **ambas** proposiciones atómicas tienen el **mismo valor** de **verdad**.
Además del conectivo **"sí y sólo sí"**, su usan también: **"cuando y sólo cuando"**, **"es condición necesaria y suficiente para"**, etc.

Ejemplos:

–Usted puede votar **sí y sólo sí** figura en los padrones.
–T es un triángulo **equilátero cuando y sólo cuando** T es **equiángulo**.

6 – CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE VERDAD

Cuando una **fórmula proposicional** tiene **dos** o **más conectivas,** las tablas de verdad se construyen mediante sucesivas aplicaciones de las definiciones de esas conectivas.
La cantidad de **filas** que tendrá la tabla se calcula con la fórmula 2^n, donde **"2"** representa el número de **valores de verdad** posibles **(V** o **F)**, y **"n"**, representa la cantidad de **variables proposicionales distintas** que aparecen en la fórmula.
Luego, se construye la **tabla de verdad** de acuerdo con los siguientes pasos:

a) Debajo de cada **variable proposicional** se escriben en forma de **columna** tantos valores de verdad **verdaderos** como **falsos,** de la siguiente manera:

- Para la **primera variable**, la **mitad** de la cantidad de **filas** será **verdadera** y la otra **mitad, falsa.**
- Para la siguiente **variable diferente** escribiremos el valor de verdad **verdadero** en la **cuarta parte** de la cantidad de **filas**, y en la otra **cuarta parte**, **falso,** y así hasta completar todas las **filas**.
- Se continúa así, tomando siempre la **mitad** de la cantidad anterior. Por lo tanto, para la **última variable,** se tendrá **toda** la **columna** con **un** valor de verdad **verdadero** y **uno falso.**
- Si la **variable** figura **más de una vez** en la fórmula, se repite en esos lugares, la misma columna.

b) Si **no** hay **paréntesis**, se resuelven primero las **negaciones;** luego, las **conjunciones** o **disyunciones,** los **condicionales**, y finalmente los **bicondicionales.**

c) Si **hay paréntesis,** se resuelven primero las fórmulas que están entre ellos y luego las restantes, siguiendo siempre el **orden** indicado anteriormente.

Ejemplo: $2^3 = 8$ **filas.**
En la columna de la **primera variable** serán **4 V** y **4 F.**
En la columna de la **segunda variable** serán **2 V** y **2 F.**
En la columna de la **tercera variable** serán **1 V** y **1 F.**

(p	∧	~ q)		∨	~	(p	∧	r)
V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F	F

Observemos que: la fórmula **representa** una **disyunción;** por lo tanto, esa será la **última** conectiva a resolver.
Se resuelve primero **~ q.**
Luego, las **conjunciones.**
Luego, la **negación** de la **segunda conjunción.**
Finalmente la **disyunción principal.**
NOTA: Como **p** figura **dos** veces en la fórmula, la columna de **p** se repite.

7 – TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

Las **tablas de verdad** permiten **clasificar** las **fórmulas proposicionales** en **tres tipos:**

- **Tautologías:** cuando el **resultado** de la tabla de verdad es **todo verdadero.**
- **Contradicciones:** cuando el **resultado** de la tabla de verdad es **todo falso.**
- **Contingencias:** cuando el **resultado** de la tabla de verdad tiene por lo menos, **un valor de verdad verdadero** y **uno falso.**

Ejemplos: **p ∨ ~p** es una **tautología**
p ∧ ~p es una **contradicción**
(p ∧ ~q) ∨ ~(p ∧ r) es una **contingencia**

8 – IMPLICACIÓN Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Dadas **dos** proposiciones **A** y **B,** diremos que **A implica B** si y sólo si es posible formar un **condicional tautológico** que tenga a **A** como **antecedente** y a **B** como **consecuente.**

Luego, si **A implica B**, **no** puede ocurrir que **A** sea **verdadera** y **B, falsa.**

Dos proposiciones son **lógicamente equivalentes** si y sólo puede formarse con ellas un **bicondicional tautológico.** Si las fórmulas **A** y **B** son **equivalentes,** escribiremos **A ≡ B.**

$$A \equiv B \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \Leftrightarrow B) \text{ es tautológico}$$

Luego, si **A** es **equivalente** a **B**, las respectivas **tablas de verdad** son **iguales.**

Ejemplos: **Implicación**

p	$\wedge$	q	$\Rightarrow$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Equivalencia

(p	$\Rightarrow$	q)	$\Leftrightarrow$	~	p	$\vee$	q
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F

9 – LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

> Las **leyes lógicas** son **fórmulas** cuyos **casos de sustitución** son siempre proposiciones **verdaderas**.
> **Las tautologías** son las **leyes** de la **lógica proposicional.**

Ejemplos: Ver anexo de página **18.**

10 – CONDICIONALES ASOCIADOS

A partir del **condicional** **"$p \Rightarrow q$"**, que llamaremos **directo,** se pueden obtener otros **tres,** mediante **permutaciones** o **negaciones** del **antecedente** y del **consecuente.**

Directo:	$p \Rightarrow q$	
Recíproco:	$q \Rightarrow p$	cambia el **orden** de las **proposiciones**
Contrario:	$\sim p \Rightarrow \sim q$	se **niega** el **antecedente** y el **consecuente**
Contrarrecíproco:	$\sim q \Rightarrow \sim p$	se realizan los **dos** procedimientos anteriores

De estos **cuatro condicionales asociados**, son **equivalentes** los **contrarrecíprocos;** es decir: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$; $q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$

Conectiva	Operación Asociada	Definición	Expresiones Usuales
~	Negación	La negación es **verdadera** cuando la proposición es **falsa** y viceversa.	"No", "no es cierto que", "no ocurre que", "no se da el caso de que", etc.

$\wedge$	**Conjunción**	Es **verdadera** cuando ambos **conjuntivos** son **verdaderos.**	"Y", "pero", "aunque", "además", "a la vez... y... ", "sino", "no obstante", "sin embargo", "no sólo, sino también", etc.
$\vee$	**Disyunción Inclusiva**	Es **falsa** cuando ambos **disyuntivos** son **falsos.**	"O", "o .... o ...." , "o bien ... o bien", "... a menos que ....", etc.
$\Rightarrow$	**Condicional Material**	Es **falso** únicamente cuando el **antecedente** es **verdadero** y el **consecuente** es **falso.**	"si ... entonces..."; " .... solo si ..."; "..., si ..."; "cuando ......"; "... es suficiente para ..."; " ... es necesario para ..."; "para ... es suficiente que ...": "para ... es necesario que ..."; etc.
$\Leftrightarrow$	**Bicondicional**	Es **verdadero** cuando ambas componentes tienen el **mismo** valor de verdad.	"... si y solo si ..." , "... cuando y sólo cuando...", " ... es suficiente y necesario para ...", etc.

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL (Equivalencias Lógicas)

1. Involutiva o Doble Negación: $\sim(\sim p) \equiv p$

2. Idem Potencia
   de la conjunción: $p \wedge p \equiv p$
   de la disyunción: $p \vee p \equiv p$

3. Conmutatividad
   de la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   de la disyunción: $p \vee q \equiv q \vee p$

4. Asociatividad
   de la conjunción: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
   de la disyunción: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

5. Distributividad
   de la conjunción respecto de la disyunción: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   de la disyunción respecto de la conjunción: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   del condicional respecto de la conjunción: $p \Rightarrow q \wedge r \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
   del condicional respecto de la disyunción: $p \Rightarrow q \vee r \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

6. Leyes de De Morgan
   Negación de la conjunción: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   Negación de la disyunción: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7. Transposición o Contrarrecíproco: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

8. Exportación: $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

9. Absorción: $p \equiv p \wedge (p \vee q)$; $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

10. Definición de condicional: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

11. Negación del condicional: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

12. Definiciones del bicondicional
    $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
    $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

13. Negación del bicondicional
    $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
    $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$