

2021

ÁLGEBRA II (LSI – PI)

UNIDAD N° 2

GEOMETRÍA ANALÍTICA



UNIDAD N° 2

GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.- LA RECTA

Definición 1

Sean un punto $P \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2 \vee n = 3$) y un vector $A \in \mathbb{R}^n - \{0_v\}$ ($n = 2 \vee n = 3$). Se denomina “recta que contiene al punto P y tiene la misma dirección que el vector A ” al conjunto \mathcal{R} , formado por todos los puntos $X \in \mathbb{R}^n$ tales que cada vector $X - P$ es paralelo al vector A . Es decir,

$$\mathcal{R} = \{X \in \mathbb{R}^n / X - P \parallel A\}.$$

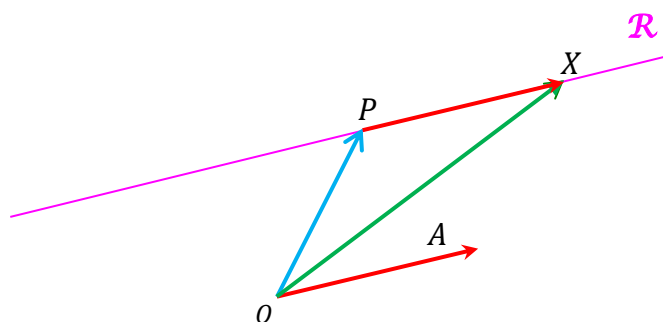


Figura 1

1.1 Ecuación vectorial de una recta

Es claro que a partir de la condición $X - P \parallel A$ y el concepto de paralelismo de vectores (ver Observación 1), podemos afirmar que

- para cada $X \in \mathbb{R}^n$ existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X - P = tA$, y recíprocamente
- para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $X - P = tA$. Nótese que t puede asumir el valor $0 \in \mathbb{R}$ (ver Observación 1).

Por lo tanto, podemos escribir a la recta \mathcal{R} del siguiente modo,

$$\mathcal{R} = \{X \in \mathbb{R}^n / X - P = tA, \quad t \in \mathbb{R}\} \text{ con } n = 2 \text{ o } n = 3,$$

en donde,

- * a la condición $X - P = tA$, con $t \in \mathbb{R}$ se le denomina **ecuación vectorial de la recta** \mathcal{R} .
- * a t se le llama **parámetro** de la recta \mathcal{R} .
- * al vector no nulo A se le llama **vector de dirección** de la recta \mathcal{R} .

Observaciones

1.- Recordemos la definición de paralelismo de vectores

Cualesquiera sean u y v vectores no nulos de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , $u \parallel v \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0: u = cv$.

Si bien esta definición exige que el escalar real c debe ser no nulo, en el caso de la ecuación vectorial de la recta \mathcal{R}

$$X - P = tA, \quad t \in \mathbb{R}$$

Estamos admitiendo que t también asuma el valor real 0.

Esto es así, ya que para el real $t = 0$, resulta $X = P$. Si quitáramos la posibilidad que t asuma el valor 0, la recta \mathcal{R} no contendría al punto P , lo que contradice la Definición 1 ya que la recta \mathcal{R} debe contener al punto P .

2.- Mientras el parámetro t varía en el conjunto de los números reales, X “recorre” todos los puntos de la recta \mathcal{R} y recíprocamente.

1.2 Ecuaciones paramétricas y cartesiana(s) de una recta

A partir de la ecuación vectorial de una recta, es posible determinar otro tipo de ecuaciones que también la representan. Para ello haremos un estudio separado de rectas en el plano real y de rectas en el espacio real.

Rectas en \mathbb{R}^2

Sea un punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y un vector $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Como la ecuación vectorial de una recta \mathcal{R} que contiene a un punto P y tiene la misma dirección del vector no nulo A viene dada por la ecuación

$$X - P = tA, \quad t \in \mathbb{R}$$

si designamos con $X = (x, y)$ un punto genérico de la recta \mathcal{R} y sustituyendo en la ecuación vectorial junto con los datos, obtenemos

$$(x, y) - (x_0, y_0) = t(a_1, a_2), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

Esta es la *ecuación vectorial en el plano real* de la recta \mathcal{R} que contiene al punto $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y tiene la misma dirección del vector $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

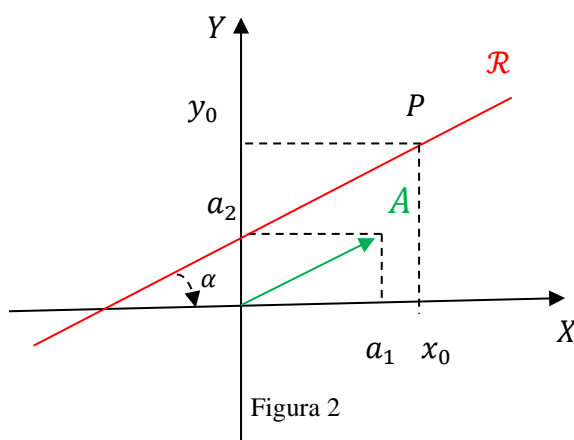
Realizamos las operaciones indicadas en ambos miembros de (1) y por igualdad de vectores, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en las variable x e y , con $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Estas *dos* ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta \mathcal{R} que contiene al punto $P = (x_0, y_0)$ y tiene la misma dirección del vector no nulo $A = (a_1, a_2)$.

Ahora trataremos, mientras sea posible, de “eliminar” el parámetro t . Para ello, es importante tener en cuenta las componentes del vector no nulo $A = (a_1, a_2)$, situaciones que analizaremos a continuación.

a) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$



Teniendo en cuenta que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, las dos ecuaciones paramétricas (2) podemos expresarlas del siguiente modo,

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = t \\ \frac{y - y_0}{a_2} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

y dado que para cada $t \in \mathbb{R}$ existe un único x y un único y tal que el punto $X = (x, y)$ pertenece a la recta, debe ocurrir que

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

ésta ecuación es la llamada *ecuación cartesiana* de la recta que contiene al punto $P = (x_0, y_0)$ y tiene la misma dirección del vector no nulo $A = (a_1, a_2)$.

Es claro que realizando unos pocos procedimientos algebraicos también podemos escribir a la ecuación cartesiana del siguiente modo,

$$y - y_0 = \frac{a_2}{a_1} (x - x_0)$$

donde $\frac{a_2}{a_1}$ es la pendiente de la recta \mathcal{R} , es decir es la tangente trigonométrica del ángulo α formado por la recta \mathcal{R} y el eje \overrightarrow{OX} en la dirección positiva (ver Fig. 2).

A la pendiente de la recta \mathcal{R} la simbolizaremos con la letra m , de modo que

$$m = \frac{a_2}{a_1} = \tan \alpha$$

En consecuencia otra forma de escribir la ecuación cartesiana de la recta \mathcal{R} , es

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

o bien,

$$y - y_0 = \tan \alpha (x - x_0)$$

b) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 = 0$

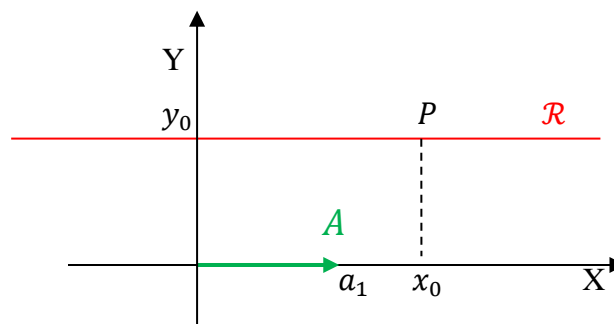


Figura 3

Teniendo en cuenta que $a_1 \neq 0$ y $a_2 = 0$, las dos ecuaciones paramétricas (2) podemos expresarlas del siguiente modo,

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1 \\ y - y_0 = t 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

es decir

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1 \\ y = y_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Analizando estas ecuaciones, concluimos que

- * para cada número real que asignemos al parámetro t , x asume un número real, es decir, que cuando t varía en \mathbb{R} también x varía en \mathbb{R} ,
- * y permanece constantemente igual a y_0 .

En consecuencia, la ecuación que caracteriza a esta recta es

$$y = y_0$$

Observemos que la pendiente de la recta \mathcal{R} es nula, pues

$$m = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0}{a_1} = 0$$

y como

$$m = \frac{a_2}{a_1} = \tan \alpha$$

resulta entonces que $\tan \alpha = 0$ con lo que $\alpha = 0$, es decir el ángulo que forma la recta con el eje \overrightarrow{OX} en la dirección positiva es nulo.

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = y_0$ es paralela al eje \overrightarrow{OX} como ya habíamos advertido en la Fig. 3.

c) $a_1 = 0 \wedge a_2 \neq 0$

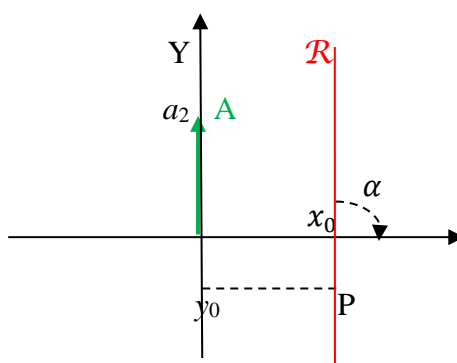


Figura 4

Teniendo en cuenta que $a_1 = 0$ y $a_2 \neq 0$, a las dos ecuaciones paramétricas (2) podemos expresarlas del siguiente modo,

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot 0 \\ y - y_0 = t a_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esto es,

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y - y_0 = t a_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Analizando del modo análogo que en b) se tiene que la ecuación de la recta \mathcal{R} es

$$x = x_0$$

Notemos que en este caso no es posible hablar de pendiente m ya que no podemos calcular $\frac{a_2}{a_1}$ puesto que no está definida la división por cero.

Observemos en la Fig. 4 que el ángulo formado por la recta \mathcal{R} y el eje \overrightarrow{OX} en su dirección positiva es $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y la tangente trigonométrica de $\frac{\pi}{2}$ no está definida, este es otro modo de modo de advertir la no existencia de la pendiente de la recta \mathcal{R} .

Recta en \mathbb{R}^3

Sea un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un vector $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Como la ecuación vectorial de una recta que contiene a un punto P y tiene la misma dirección del vector no nulo A es

$$X - P = tA, \quad t \in \mathbb{R}$$

si designamos con $X = (x, y, z)$ un punto genérico de la recta \mathcal{R} y sustituyendo en la ecuación vectorial junto con los datos, obtenemos

$$(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a_1, a_2, a_3), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Esta es la *ecuación vectorial en el espacio real* de la recta \mathcal{R} que contiene al punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y tiene la misma dirección del vector $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Realizamos las operaciones indicadas en ambos miembros de (1) y por igualdad de vectores, obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales en las variable x, y, z con $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1 \\ y - y_0 = t a_2 \\ z - z_0 = t a_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Estas *tres* ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas* de la recta \mathcal{R} que contiene al punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la misma dirección del vector no nulo $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Procederemos de similar modo y mientras sea posible, a “eliminar” el parámetro t . Para ello, es importante tener en cuenta las componentes del vector no nulo $A = (a_1, a_2, a_3)$. Algunas de estas situaciones analizaremos a continuación.

a) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0$

Teniendo en cuenta que $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ y $a_3 \neq 0$, podemos despejar el parámetro t de las tres ecuaciones paramétricas (2) obteniendo las siguientes tres ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = t \\ \frac{y - y_0}{a_2} = t \\ \frac{z - z_0}{a_3} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

y dado que para cada $t \in \mathbb{R}$ existen y son únicos x, y, z que son precisamente las componentes del punto $X = (x, y, z)$ perteneciente a la recta \mathcal{R} , se verifica que



$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Es claro que también podemos escribir,

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \\ \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \quad (s) \quad \text{ o } \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3} \\ \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \quad (r)$$

Éstas *dos* ecuaciones dadas en (s) son las llamadas *ecuaciones cartesianas* de la recta \mathcal{R} que contiene al punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la misma dirección del vector no nulo $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Lo mismo ocurre con las ecuaciones dadas en (r).

Observación

Las componentes (a_1, a_2, a_3) del vector A suelen denominarse *números directores* de la recta.

b) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 = 0$

Como $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ y $a_3 = 0$, podemos escribir las tres ecuaciones paramétricas (2) del siguiente modo

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1 \\ y - y_0 = t a_2 \\ z - z_0 = t 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

es decir,

$$\begin{cases} x - x_0 = t a_1 \\ y - y_0 = t a_2 \\ z = z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

En esta situación, para cada $t \in \mathbb{R}$ existen y son únicos x, y que son precisamente las dos primeras componentes del punto $X = (x, y, z)$ perteneciente a la recta \mathcal{R} , mientras que z asume constantemente el valor z_0 , por lo tanto las dos ecuaciones cartesianas de la recta son

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Es fácil comprobar geoméricamente, que es una recta paralela al plano XY .

c) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 \neq 0$

Procediendo de manera análoga a las situaciones precedentes se obtienen las dos ecuaciones cartesianas siguientes,

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3} \\ y = y_0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones cartesianas representan una recta paralela al plano XZ .



d) $a_1 = 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0$

Procediendo de manera análoga a las situaciones precedentes se obtienen las dos ecuaciones cartesianas siguientes,

$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \\ x = x_0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones cartesianas representan una recta paralela al plano YZ .

e) $a_1 \neq 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0$

Las tres ecuaciones paramétricas (2) las escribimos del siguiente modo

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_1 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dado que para cada $t \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$, resulta que x varía en el conjunto de los números reales, por lo tanto las dos ecuaciones cartesianas que definen a la recta en este caso son,

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones cartesianas representan una recta paralela al eje \overrightarrow{OX} .

f) $a_1 = 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 = 0$, se tiene

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t a_2 \\ z = z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dado que y toma todos los valores reales cuando t varía en \mathbb{R} , las dos ecuaciones cartesianas que definen a la recta en este caso son

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones cartesianas representan una recta paralela al eje \overrightarrow{OY} .

g) $a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 \neq 0$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t a_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dado que z toma todos los valores reales cuando t recorre \mathbb{R} , las dos ecuaciones cartesianas que definen a la recta en este caso son,

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Estas dos ecuaciones cartesianas representan una recta paralela al eje \overrightarrow{OZ} .



EJERCICIOS

1. Obtenga las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana de las siguientes rectas en \mathbb{R}^2

a) La recta que contiene al punto $P = (-1, -3)$ y es paralela al vector $A = (-2, 0)$.

b) La recta que contiene al punto $P = (3, -1, 1)$ y es paralela al vector $A = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

Para cada una de las rectas de los apartados anteriores, determine un punto distinto de P perteneciente a ella.

2. Halle la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto $P = (3, -2)$ con pendiente:

a) $m = -\frac{1}{2}$ b) $m = \frac{3}{2}$.

Grafique dichas rectas.

3. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta cuyas ecuaciones cartesianas se dan a continuación:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 5 \end{cases}$$

1.3 Recta determinada por dos puntos distintos

Sean P y Q dos puntos distintos del plano o del espacio. Queremos determinar la ecuación vectorial de la recta \mathcal{R} determinada por los dos puntos dados.

Para ello es necesario conocer un vector no nulo A de \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^3) tal que la recta \mathcal{R} tenga la misma dirección que ese vector A , es decir debemos determinar un vector de dirección de la recta \mathcal{R} .

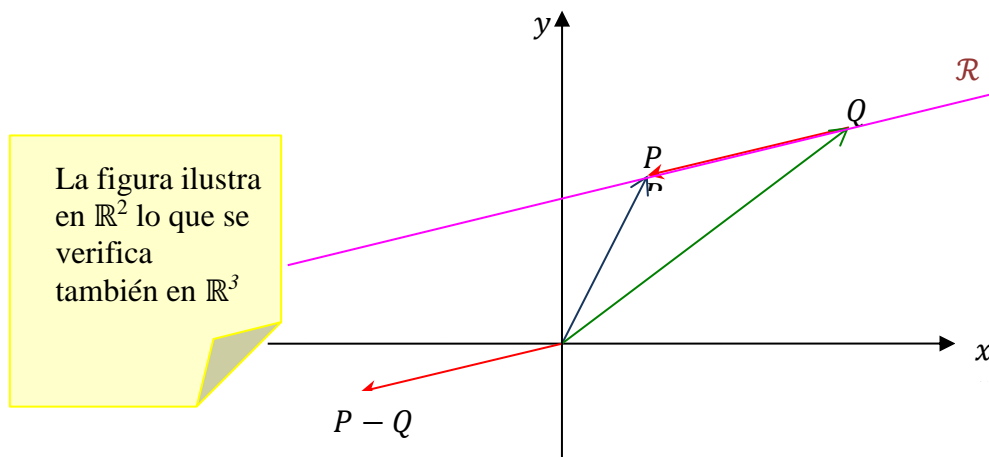


Figura 5

Como sólo conocemos dos puntos de la recta \mathcal{R} , a partir de estos datos trataremos de determinar un vector de dirección de la recta que contiene a tales puntos.

Para ello consideremos un vector con origen del sistema y extremo en el punto P y otro vector con origen en el sistema y extremo en el punto Q , como se muestra en la Fig. 5.

Es evidente que tomando

$$A = P - Q,$$

tenemos un vector de dirección de la recta \mathcal{R} . Por lo tanto el conjunto de todos los puntos X de \mathbb{R}^2 (o \mathbb{R}^3) tales que $X - P \parallel P - Q$, es precisamente la recta buscada, esto es

$$\mathcal{R} = \{ X \in \mathbb{R}^n / X - P \parallel P - Q \}, \quad n = 2 \text{ o } n = 3$$

luego, la ecuación vectorial de la recta \mathcal{R} , determinada por los puntos P y Q viene dada por,

$$X - P = t(P - Q), \quad t \in \mathbb{R}$$

Observación

Dado que tenemos dos puntos de la recta \mathcal{R} , podemos usarlos indistintamente como así también podemos elegir al vector $Q - P$ como vector de dirección de la recta. Por lo tanto, la recta determinada por dos puntos distintos P y Q también viene dada por

$$X - P = t(Q - P), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{o}$$

$$X - Q = t(P - Q), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{o}$$

$$X - Q = t(Q - P), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sean los puntos $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ y $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, tales que $P \neq Q$, la recta que contiene a P y a Q podemos expresarla mediante la siguiente ecuación vectorial

$$X - P = t(P - Q), \quad t \in \mathbb{R}$$

si designamos con $X = (x, y)$ un punto genérico de la recta \mathcal{R} y sustituyendo en la ecuación vectorial junto con los datos, obtenemos

$$(x, y) - (p_1, p_2) = t[(p_1, p_2) - (q_1, q_2)], \quad t \in \mathbb{R}$$

y realizando las operaciones en ambos miembros obtenemos

$$(x - p_1, y - p_2) = (t(p_1 - q_1), t(p_2 - q_2)), \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, las dos ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x - p_1 = t(p_1 - q_1) \\ y - p_2 = t(p_2 - q_2) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Para determinar la ecuación cartesiana debemos tener en cuenta las componentes del vector $(P - Q)$.

a) Supongamos que $p_1 \neq q_1 \wedge p_2 \neq q_2$, entonces podemos escribir

$$\begin{cases} \frac{x - p_1}{p_1 - q_1} = t \\ \frac{y - p_2}{p_2 - q_2} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, la ecuación cartesiana de la recta que contiene a los puntos P y Q viene dada por

$$\frac{x - p_1}{p_1 - q_1} = \frac{y - p_2}{p_2 - q_2}$$

O bien, la ya conocida ecuación

$$y - p_2 = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1}(x - p_1)$$

Observemos que la pendiente viene dada por

$$m = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1}$$

b) Cuando $p_1 = q_1 \wedge p_2 \neq q_2$, no existe la pendiente de la recta y las ecuaciones paramétricas son



$$\begin{cases} x - p_1 = t(q_1 - q_1) \\ y - p_2 = t(p_2 - q_2) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir,

$$\begin{cases} x = p_1 \\ y = p_2 + t(p_2 - q_2) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Por tal motivo, la ecuación cartesiana de la recta es

$$x = p_1$$

Esta ecuación cartesiana representa a una recta paralela al eje \overrightarrow{OY} .

c) En el caso en que $p_1 \neq q_1 \wedge p_2 = q_2$, las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x - p_1 = t(p_1 - q_1) \\ y - p_2 = t(q_2 - q_2) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} x = p_1 + t(p_1 - q_1) \\ y = p_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, la ecuación cartesiana de la recta es

$$y = p_2$$

Y es evidente que la pendiente de la recta es cero y la representación gráfica de la recta es paralela al eje \overrightarrow{OX} .

EJERCICIOS

4. Determine las ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesianas de la recta que contiene a los puntos P y Q .

- a) $P = (2, 0)$ y $Q = (1, -1)$
- b) $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (0, 1, 1)$

1.4 Paralelismo de rectas

Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 dos rectas en el plano o en el espacio dadas por $X - P = tA$, $t \in \mathbb{R}$ y $X - Q = sB$, $s \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Definición 2

$$\mathcal{R}_1 \text{ es paralela a } \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} - \{0\}: A = cB$$

De acuerdo con esta definición podemos decir que “ \mathcal{R}_1 es paralela a \mathcal{R}_2 si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos”. Esto es,

$$\mathcal{R}_1 \text{ es paralela a } \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow A \parallel B$$

Como el paralelismo entre vectores es una relación simétrica, si la recta \mathcal{R}_1 es paralela a la recta \mathcal{R}_2 diremos simplemente que las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son paralelas.

Ejemplo

Sean las rectas



$$\mathcal{R}_1: (x, y, z) - (1, 2, 3) = t(1, -3, 0), \quad t \in \mathbb{R} \text{ y } \mathcal{R}_2: (x, y, z) - (0, 1, -2) = s(2, -6, 0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Es evidente que \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son rectas paralelas, puesto que $(2, -6, 0) = 2(1, -3, 0)$.

Relación de las pendientes de dos rectas paralelas

Analizaremos ahora las ecuaciones vectoriales de dos rectas paralelas en \mathbb{R}^2 a fin de obtener una relación entre sus pendientes cuando estas existen.

Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 dos rectas paralelas cuyas ecuaciones vectoriales son $(x, y) - (p_1, p_2) = t(a_1, a_2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) - (q_1, q_2) = s(b_1, b_2)$, $s \in \mathbb{R}$, respectivamente.

Por definición de paralelismo de rectas, se tiene $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$(a_1, a_2) = c(b_1, b_2)$$

Por igualdad de vectores podemos escribir,

$$\begin{cases} a_1 = cb_1 & (1) \\ a_2 = cb_2 & (2) \end{cases}$$

Analizaremos dos situaciones teniendo en cuenta las componentes de los vectores de dirección de ambas rectas.

a) $a_1 \neq 0$

Es claro que si $a_1 \neq 0$ y como $c \neq 0$, entonces de la igualdad (1) se sigue que $b_1 \neq 0$ y además si multiplicamos en ambos miembros de la igualdad (2) por el recíproco de a_1 y sustituyendo (1) en el denominador del segundo miembro tenemos,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

Es decir,

$$m_1 = m_2.$$

Esta igualdad de las pendientes, es otra forma de expresar que las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son paralelas

b) $a_1 = 0$

Como $a_1 = 0$ y $c \neq 0$, entonces de la igualdad (1) se sigue que $b_1 = 0$. Y por lo tanto

las rectas paralelas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 no tienen pendiente, ya que no podemos multiplicar en (2) por el recíproco de $a_1 = 0$, pues no existe la división por cero.

También podemos observar gráficamente en esta situación que la medida del ángulo que forma cada una de las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 con el eje \overrightarrow{OX} en la dirección positiva es $\frac{\pi}{2}$, y la tangente trigonométrica de $\frac{\pi}{2}$ no existe, esta es otra manera de determinar la no existencia de la pendiente de ambas rectas.

1.5 Ortogonalidad de rectas

Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 dos rectas en el plano o en el espacio dadas por $X - P = tA$, $t \in \mathbb{R}$ y $X - Q = sB$, $s \in \mathbb{R}$, respectivamente, y consideremos el producto escalar definido en la Unidad 1 tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 .



Definición 4

$$\mathcal{R}_1 \text{ es ortogonal a } \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0.$$

De acuerdo con esta definición podemos decir, \mathcal{R}_1 es ortogonal a \mathcal{R}_2 si y sólo si sus vectores de dirección son ortogonales. Esto es,

$$\mathcal{R}_1 \text{ es ortogonal a } \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow A \perp B$$

Notemos que la ortogonalidad de vectores es una relación simétrica, debido a que el producto escalar es conmutativo, entonces se verifica que

$$\text{si } \mathcal{R}_1 \text{ es ortogonal a } \mathcal{R}_2 \text{ entonces } \mathcal{R}_2 \text{ es ortogonal a } \mathcal{R}_1$$

por lo tanto diremos en adelante que las rectas \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son ortogonales.

Ejemplo

Sean las rectas

$$\mathcal{R}_1: (x, y, z) - (3, 0, 4) = t(1, 0, -2), \quad t \in \mathbb{R} \text{ y } \mathcal{R}_2: (x, y, z) = s(2, 3, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Es claro que \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son rectas ortogonales, puesto que sus vectores de dirección lo son, esto es

$$(1, 0, -2) \cdot (2, 3, 1) = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Relación de las pendientes de dos rectas ortogonales

Estudiaremos las ecuaciones vectoriales dos rectas ortogonales en \mathbb{R}^2 a fin de obtener una relación entre sus pendientes cuando estas existen.

Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 dos rectas ortogonales cuyas ecuaciones vectoriales son $(x, y) - (p_1, p_2) = t(a_1, a_2)$, $t \in \mathbb{R}$ y $(x, y) - (q_1, q_2) = s(b_1, b_2)$, $s \in \mathbb{R}$ respectivamente.

Por definición de ortogonalidad de rectas, se tiene

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = 0$$

Efectuando el producto escalar tenemos,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \quad (1)$$

Consideraremos dos situaciones teniendo en cuenta las componentes de los vectores de dirección de ambas rectas.

$$\text{a) } a_1 \neq 0 \wedge b_1 \neq 0 \quad (2)$$

De la igualdad (1) y de las condiciones (2) se tiene que

$$1 + \frac{a_2}{a_1} \frac{b_2}{b_1} = 0$$

o bien

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{b_2}{b_1} = -1 \quad (3)$$



Como $\frac{a_2}{a_1}$ es la pendiente de la recta \mathcal{R}_1 y $\frac{b_2}{b_1}$ es la pendiente de la recta \mathcal{R}_2 , la igualdad (3) es la conocida relación entre pendientes de dos rectas ortogonales

$$m_1 m_2 = -1$$

b) $a_1 = 0$

Como $a_1 = 0$ podemos afirmar que la recta \mathcal{R}_1 no tiene pendiente. Además, teniendo en cuenta la igualdad (1), es obvio que $b_2 = 0$, lo cual indica que la pendiente de la recta \mathcal{R}_2 es $m_2 = 0$. Por lo tanto no se puede establecer relación alguna de pendientes.

EJERCICIOS

5. Determine si los siguientes pares de rectas corresponden a rectas paralelas:

a) $R_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$ $R_2: (x, y) - (-6, 4) = t(9, -3)$

b) $R_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = -z$ $R_2: \begin{cases} 9x - 4y = -12 \\ y + 9z = 21 \end{cases}$

6. Determine si los siguientes pares de rectas corresponden a rectas perpendiculares:

a) $R_1: \begin{cases} x+1=t \\ y-4=3t \end{cases}$ $R_2: \frac{x-4}{6} = \frac{y+1}{-2}$

b) $R_1: y+4x-2=0$ $R_2: 2y-3x+4=0$

2. EL PLANO

2.1. Ecuaciones vectorial y cartesiana de planos en \mathbb{R}^3

Definición 5

Sean un punto $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ y un vector $N = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Se llama *plano* que contiene al punto P y es ortogonal al vector N , al conjunto \mathcal{P} formado por todos los puntos $X \in \mathbb{R}^3$ tales que cada vector $X - P$ es ortogonal al vector N . En símbolos

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^3 / X - P \perp N\}.$$

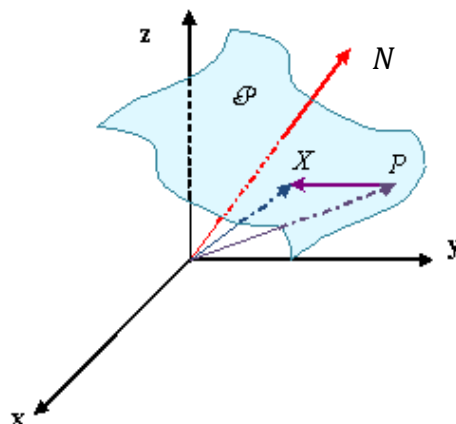


Figura 6

La exigencia $X - P \perp N$ equivale, por definición de ortogonalidad entre vectores, a expresar al plano \mathcal{P} del siguiente modo:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^3 / (X - P) \cdot N = 0\}.$$

A la condición

$$(X - P) \cdot N = 0 \quad (\gamma)$$

se la denomina **ecuación vectorial** del plano \mathcal{P} que contiene al punto P y es ortogonal al vector N .

A partir de la ecuación vectorial y por la distributividad del producto escalar respecto a la resta de vectores, se tiene

$$X \cdot N - (P \cdot N) = 0$$

Como P y N son dados, llamando $d = -(P \cdot N) \in \mathbb{R}$ se tiene otra forma de expresar la ecuación vectorial del plano \mathcal{P}

$$X \cdot N + d = 0$$

o bien

$$N \cdot X + d = 0$$

Ahora bien, si el vector genérico X viene dado por $X = (x, y, z)$, la ecuación (γ) se escribe

$$((x, y, z) - (p_1, p_2, p_3)) \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$$

y realizando el producto escalar indicado se obtiene la **ecuación cartesiana** del plano \mathcal{P} que contiene al punto P y es ortogonal al vector no nulo N .

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + d = 0 \quad (*)$$

donde

$$d = -(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3)$$

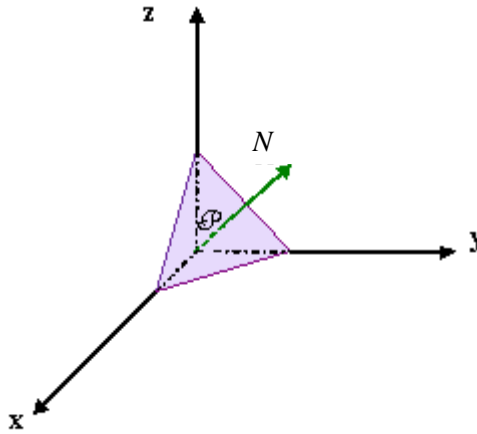
Notas

- Obsérvese que $d = -(P \cdot N) = -(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3)$.
- El número real d indica si el plano contiene o no al origen del sistema de coordenadas pues:
 - a) si $d = 0$, el vector nulo satisface la ecuación cartesiana $(*)$ del plano \mathcal{P} , por lo tanto el vector nulo pertenece al plano \mathcal{P} .
 - b) si $d \neq 0$, el vector nulo no satisface la ecuación cartesiana $(*)$ del plano \mathcal{P} y en consecuencia el vector nulo no pertenece al plano \mathcal{P} .

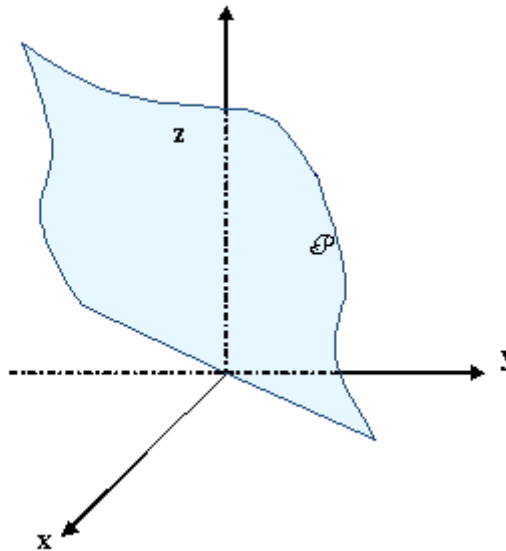
A continuación se analizan algunas de las situaciones particulares que pueden presentarse:

- a) Supóngase que $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0 \wedge d \neq 0$. En este caso es claro que la ecuación $a_1 x + a_2 y + a_3 z + d = 0$ representa un plano que no contiene al origen de coordenadas pues el vector $(0, 0, 0)$ no satisface la ecuación de dicho plano.



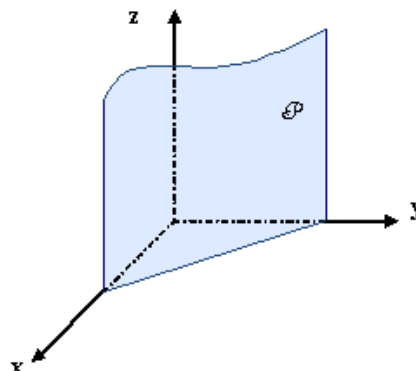


- b) Si $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0 \wedge d = 0$, la ecuación $a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$ es la de un plano que contiene al origen del sistema de coordenadas pues el vector $(0, 0, 0)$ verifica la ecuación.



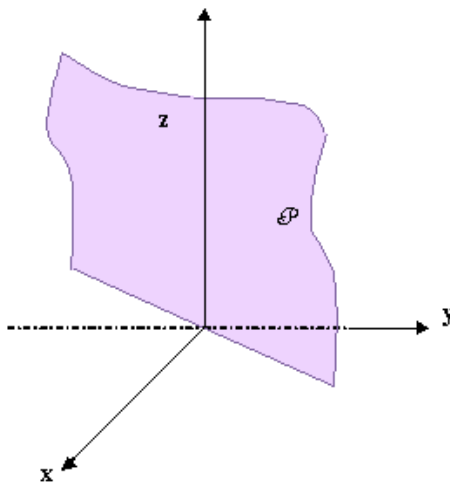
Observemos que al ser $d = 0$ los vectores P y N resultan ortogonales.

- c) Si $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 = 0 \wedge d \neq 0$, la ecuación $a_1 x + a_2 y + d = 0$ representa un plano paralelo al eje z , puesto que si el punto (x_1, y_1, z_1) satisface la ecuación del plano, también lo harán los puntos del conjunto $\{(x_1, y_1, z) / z \in \mathbb{R}\}$ que es una recta paralela al eje z , de modo que el plano de ecuación $a_1 x + a_2 y + d = 0$ contiene a esa recta, entonces resulta ser paralelo al eje z .



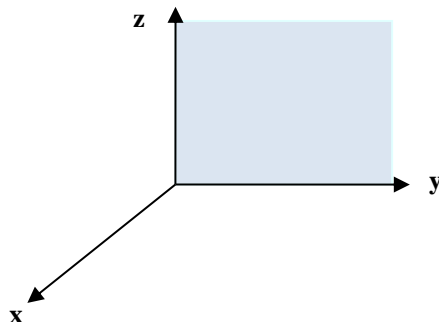
En tanto un plano paralelo al eje y es de ecuación $a_1 x + a_3 z + d = 0$; y uno paralelo al eje x es de la forma $a_2 y + a_3 z + d = 0$.

- d) Si $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0 \wedge a_3 = 0 \wedge d = 0$, el plano es de ecuación $a_1 x + a_2 y = 0$, los puntos de la forma $(0,0,z)$ con $z \in \mathbb{R}$ satisfacen esta ecuación son de la forma, esto indica que el plano contiene al eje z .



Análogamente el plano de ecuación $a_1 x + a_3 z = 0$ contiene al eje y , y el plano $a_2 y + a_3 z = 0$ contiene al eje x .

- e) Si $a_1 \neq 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge d = 0$ se obtiene un plano de ecuación $x = 0$, que es el plano coordenado YZ puesto que los puntos que satisfacen esa ecuación son de la forma $(0,y,z)$ con $y \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}$.



Así, la ecuación del plano coordenado XZ es $y = 0$ y la ecuación del plano coordenado XY es $z = 0$.

EJERCICIOS

7. Determine la ecuación cartesiana del plano que contiene a P y es ortogonal a N e indique aproximadamente la posición del plano.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $P = (-2, 2, 6)$ $N = (-1, 1, 0)$ | b) $P = (-2, 0, 1)$ $N = (0, 2, 0)$ |
| c) $P = (0, 0, 0)$ $N = (2, -5, 3)$ | d) $P = (4, -1, 0)$ $N = (0, 1, -1)$ |

8. Caracterice los siguientes planos y escriba la ecuación vectorial de cada uno de ellos:

- a) $3(x - 5) - 2(y - 4) + 4(z - 2) = 0$
 b) $3x - 4z = -2$

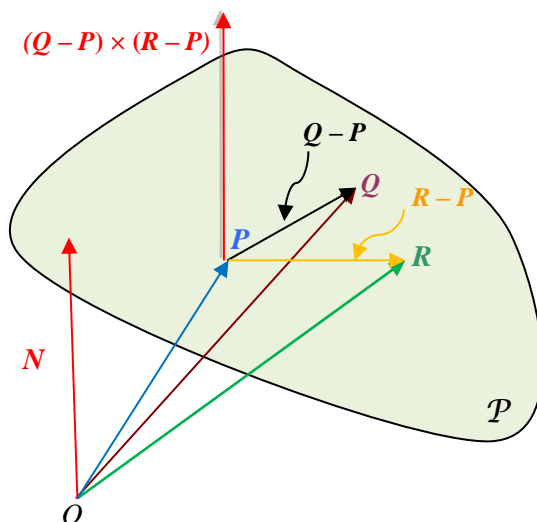
PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS DISTINTOS Y NO ALINEADOS EN \mathbb{R}^3

Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$ tres puntos distintos y no alineados en \mathbb{R}^3 .

Para determinar la ecuación vectorial del plano \mathcal{P} que contiene a los puntos P, Q y R , es necesario encontrar un vector ortogonal al plano \mathcal{P} .

Para ello se consideran los vectores

$$Q - P \text{ y } R - P$$



Es claro que estos vectores son paralelos al plano \mathcal{P} que contiene a los tres puntos P, Q y R , por lo tanto el vector

$$N = (Q - P) \times (R - P)$$

es ortogonal a los vectores $Q - P$ y $R - P$ y también es ortogonal al plano \mathcal{P} .

Teniendo en cuenta que la ecuación vectorial de un plano que contiene a un punto P y es ortogonal a un vector no nulo N es

$$(X - P) \cdot N = 0 \quad (1)$$

resulta que la ecuación vectorial del plano que contiene a P, Q y R está dada por:

$$(X - P) \cdot ((Q - P) \times (R - P)) = 0$$

Preguntas

¿Por qué P, Q y R deben ser distintos?

Si P, Q y R son distintos ¿Por qué P, Q y R no pueden estar alineados?

EJERCICIOS

9. Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos $P = (1, 0, 3)$, $Q = (-2, -4, 5)$ y $R = (2, -1, 13)$.

2.2 Paralelismo y ortogonalidad entre planos.

Dados los planos:

$$\mathcal{P}_1: (X - P) \cdot N = 0$$

$$\mathcal{P}_2: (X - Q) \cdot M = 0$$

Definición 6

Diremos que

$$\mathcal{P}_1 \text{ es paralelo a } \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} - \{0\}: N = cM.$$

Definición 7

Diremos que

$$\mathcal{P}_1 \text{ es ortogonal a } \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow N \cdot M = 0.$$

2.3 Paralelismo y ortogonalidad entre una recta y un plano.

Dados un plano y una recta

$$\mathcal{P}: (X - P) \cdot N = 0$$

$$\mathcal{R}: X - Q = t A$$

Definición 9

Diremos que

$$\mathcal{P} \text{ es paralelo a } \mathcal{R} \Leftrightarrow N \cdot A = 0.$$

Definición 10

Diremos que

$$\mathcal{P} \text{ es ortogonal a } \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} - \{0\}: N = cA.$$

EJERCICIOS

10. Determine cuáles de los siguientes pares de planos son ortogonales o paralelos.

a) $\mathcal{P}_1: 2x - y + z = 0$ $\mathcal{P}_2: 2x + 2z + 2 = 0$

b) $\mathcal{P}_1: x - y + 3z = 0$ $\mathcal{P}_2: 2x - 2y + 6z - 1 = 0$

11. Determine en cada caso, si el plano y la recta son ortogonales o paralelos.

a) $\mathcal{P}: 4x + 2y + 2z + 9 = 0$ $\mathcal{R}: \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z}{3}$

b) $\mathcal{P}: [(x, y, z) - (1, 0, -1)] \cdot (-1, 3, -1) = 0$ $\mathcal{R}: (x, y, z) - (0, -2, 5) = t(-2, 6, -2)$



3. CÓNICAS.

3.1 Circunferencia.

Definición 11

Sean $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo y $r \in \mathbb{R}$.

Se llama *circunferencia con centro en C y de radio r* , al conjunto \mathcal{C} formado por todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tales que la distancia de P a C es *siempre igual a r* .

En símbolos

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, C) = r\}.$$

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

Teorema 1

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r , tiene por ecuación,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Demostración

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C = (h, k)$ y de radio r (Figura 7) Entonces, por definición de circunferencia, el punto P debe satisfacer la condición

$$d(P, C) = r, \tag{1}$$

la cual, esta expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r,$$

de donde,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{2}$$

Recíprocamente, sea $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas componentes satisfacen la ecuación (2), de manera que se verifica la igualdad

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2.$$

De lo que se deduce,

$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1 . Por lo tanto, demostrados los teoremas directo y reciproco, resulta que (2) es la ecuación buscada.



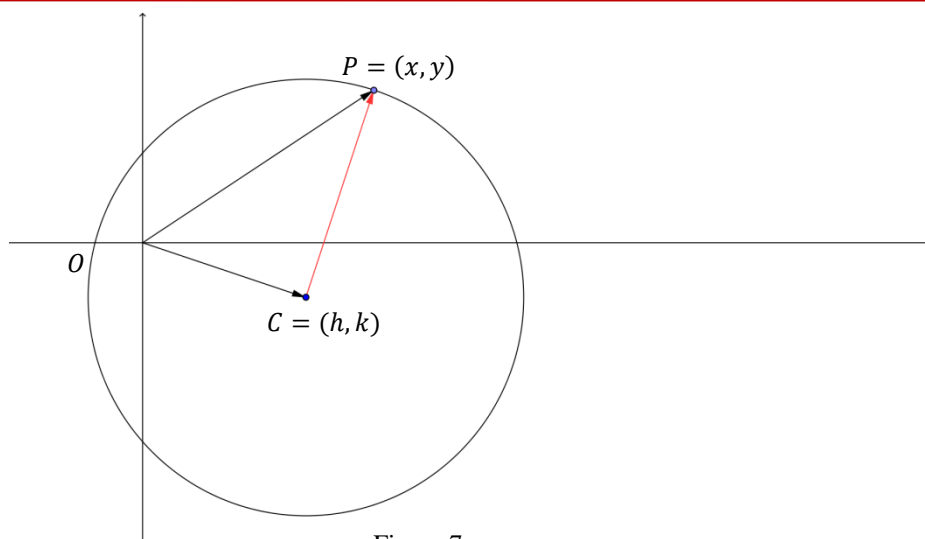


Figura 7

Para el caso particular en que el centro C está en el origen, $h = k = 0$, se tiene:

Corolario

La circunferencia de centro en el origen y radio r tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

Notas

- La ecuación (2) se conoce como la *ecuación ordinaria o forma canónica* de la ecuación de la circunferencia. En general, designaremos como forma ordinaria aquella ecuación de una curva que nos permita obtener más rápida y fácilmente sus características importantes. Así, por ejemplo, en el caso de la ecuación (2) podemos obtener, inmediatamente, las componentes del centro y el radio.
- Por el Teorema 1 observamos que, si se conocen las componentes del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Esto sugiere un método para obtener la ecuación de una circunferencia en cualquier problema dado; todo lo que se necesita es obtener las componentes del centro y la longitud del radio a partir de las condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en Geometría elemental, implica la determinación del centro y el radio; el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener en Geometría analítica la ecuación de una circunferencia.

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad (1)$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0,$$

lo cual puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2)$$

En donde

$$D = -2h, E = -2k \text{ y } F = h^2 + k^2 - r^2.$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma (2), llamada *forma general* de la ecuación de la circunferencia. El problema que se presenta ahora es averiguar si, recíprocamente, toda ecuación de la forma general (2) representa una circunferencia.

Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma (2) a la forma (1) empleando el método de completar cuadrados. Ordenando los términos de (2), resulta

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F,$$

y sumando $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$ a ambos miembros, obtenemos

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

de donde,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}, \quad (3)$$

comparando las ecuaciones (1) y (3), vemos que depende del valor del segundo miembro de (3) el que (3) represente o no una circunferencia. Hay tres casos posibles por considerar:

- Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación (3) representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación (3) se dice, con frecuencia, que representa una circunferencia de radio cero; se dice también que es un círculo punto o círculo nulo. Desde nuestro punto de vista, sin embargo, la ecuación (3) representa un solo punto de componentes $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación (3) se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra Geometría real, sin embargo, la ecuación (3) *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Aunque el caso (b) puede considerarse como un caso límite del caso (a), en adelante consideraremos que una ecuación representa una circunferencia solamente en el caso (a). Por tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2

La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio diferente de cero, solamente si

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Las componentes del centro son, entonces, $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio es $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

Nota

Si la ecuación de una circunferencia se da en la forma general, se aconseja al estudiante que no proceda mecánicamente, usando las formulas dadas en el Teorema 2, para obtener el centro y el radio. En vez de esto, es conveniente que reduzca la ecuación a la forma ordinaria por el método de completar cuadrados, tal como se hizo en la deducción del teorema mismo.

Ejemplo:

Reducir las tres ecuaciones siguientes a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hállese su centro y su radio.

$$a) \quad 2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0.$$



b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$.

Solución.

- a) Consideremos la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$. En primer lugar multiplicamos en ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{2}$, recíproco del coeficiente de x^2 . Luego de ordenar los términos, se tiene

$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos miembros. Esto nos da

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$$

Que puede escribirse en la forma

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$

Por lo tanto, la ecuación dada representa una circunferencia cuyo centro es $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y cuyo radio es 4.

- b) Dada la ecuación $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$, multiplicamos en ambos miembros de la misma por el recíproco del coeficiente de x^2 . Luego de ordenar los términos, se obtiene

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + (y^2 - 3y) = -\frac{97}{36}$$

Completando los cuadrados, resulta

$$\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -\frac{97}{36} + \frac{4}{9} + \frac{9}{4}$$

De donde,

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (b) es el punto único $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

- c) Ordenando los términos y completando los cuadrados, obtenemos

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = -29 + 16 + 9.$$

De donde,

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = -4$$

Por lo tanto, la ecuación (c) no representa un lugar geométrico real.



DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA SUJETA A TRES CONDICIONES DADAS

En la ecuación ordinaria de la circunferencia,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad (1)$$

hay tres condiciones arbitrarias independientes, h, k y r . De manera semejante, en la ecuación general;

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2)$$

hay tres constantes arbitrarias independientes, D, E y F . Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas (1) o (2), la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por lo tanto, *analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes*. Geométricamente, una circunferencia queda, también, perfectamente determinada por tres condiciones independientes; así, por ejemplo; queda determinada por tres cualesquiera de sus puntos.

Ejemplo

Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los siguientes puntos $A = (-1, 1)$, $B = (3, 5)$ y $C = (5, -3)$.

Solución

Supongamos que la ecuación buscada es, en la forma general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (\gamma)$$

en donde las constantes D, E y F deben ser determinadas.

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus componentes deben satisfacer la ecuación (γ) . De acuerdo con esto, se tiene las ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados, respectivamente

$$\begin{cases} 1 + 1 - D + E + F = 0 & (\text{corresponde al punto } A = (-1, 1)) \\ 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0 & (\text{corresponde al punto } B = (3, 5)) \\ 25 + 9 + 5D - 3E + F = 0 & (\text{corresponde al punto } C = (5, -3)) \end{cases}$$

que pueden escribirse de la siguiente manera

$$\begin{cases} D - E - F = 2 \\ 3D + 5E + F = -34 \\ 5D - 3E + F = -34 \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D = -\frac{32}{5}, E = -\frac{8}{5}, F = -\frac{34}{5},$$

de manera que sustituyendo estos valores en la ecuación (γ) , obtenemos



$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0$$

o bien $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0,$

que es la ecuación de la circunferencia buscada.

El centro y el radio se obtienen reduciendo la última ecuación de la forma ordinaria.

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$$

De donde el centro es $\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio es $\frac{1}{5}\sqrt{442}$

EJERCICIOS

12.- Halle la ecuación de la circunferencia cuyos datos son:

a) $C = (0, 0)$ y $r = 2$ b) $C = (2, 3)$ y $r = \sqrt{3}$

c) $C = (3, 0)$ y $r = \frac{2}{3}$ d) $C = (0, -3)$ y $r = 5$

13.- Indique si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias y en dicho caso, obtenga la forma canónica de las misma y grafique.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 30 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

c) $9x^2 + 9y^2 - 24x + 12y + 11 = 0$ d) $4x^2 + 4y^2 - 4x + y + 9 = 0$

14.- Encuentre la ecuación de la circunferencia en forma canónica y general:

- a) Con centro en $(4, 3)$ que pasa por el $(-4, 5)$.
- b) Con centro en $(-3, 4)$ que pasa por el $(0, 0)$.
- c) Pasa por $(3, 4)$ y $(-4, -3)$ sabiendo que ellos determinan el diámetro de la misma.
- d) Cuyo diámetro es $d(A, B)$, con $A = (-2, -6)$ y $B = (2, 6)$.

15.- Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre le eje y , y pasa por $(3, 5)$ y $(-3, 7)$.

16.- Halle el valor de m para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$, represente una circunferencia de radio igual a 7.

17.- Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-1, 4)$ y es concéntrica con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - x + 10y + 18 = 0$

3.2 Elipse

Definición 12

Sean dos puntos fijos $F, F' \in \mathbb{R}^2$.

Se llama *elipse*, al conjunto \mathcal{E} formado por todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F y F' se mantiene constante, mayor que la distancia entre dichos puntos.

En símbolos:

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, F) + d(P, F') = \text{cte} > d(F, F')\}.$$

Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

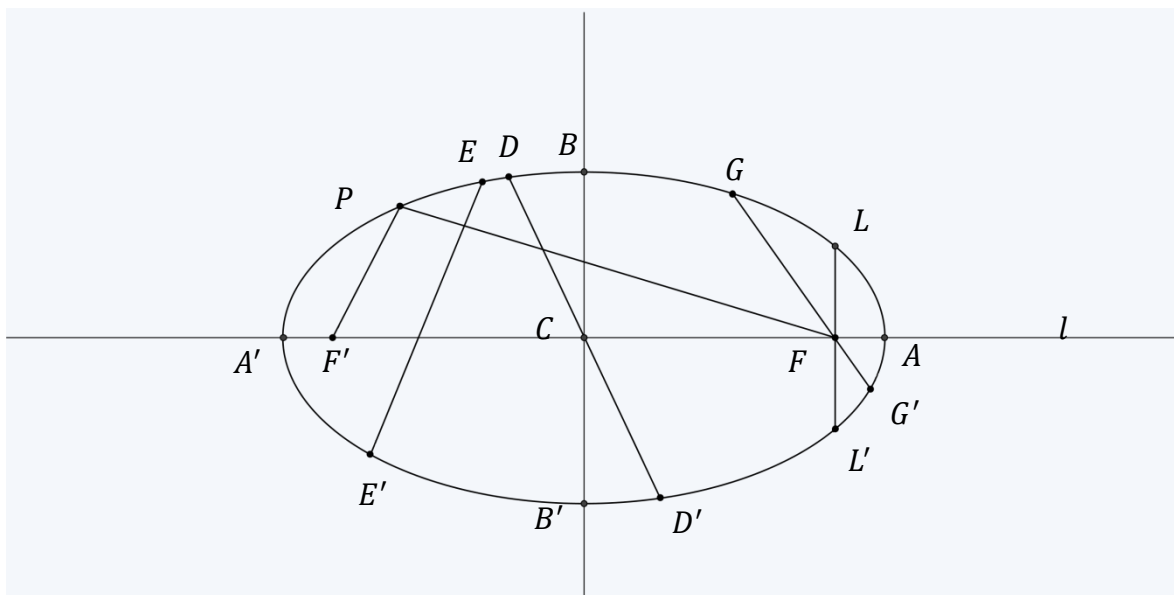


Figura 8

En la Fig. 8,

- Designemos por F y F' a los focos de la elipse.
- La recta l recibe el nombre de *eje focal*.
- El eje focal corta a la elipse en dos puntos, A y A' , llamados *vértices*.
- La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento AA' , se llama *eje mayor*.
- El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama *centro*.
- La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l se denomina *eje normal*.
- El eje normal l' corta a la elipse en dos puntos, B y B' , y el segmento BB' se llama *eje menor*.
- Un segmento tal como EE' , que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama *cuerda*. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como GG' , se llama *cuerda focal*.
- Una cuerda focal, tal como LL' , perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos.
- Una cuerda que pasa por C , tal como DD' , se llama *diámetro*.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO EN EL ORIGEN Y EJES EN LOS EJES COORDENADOS.

Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje x .

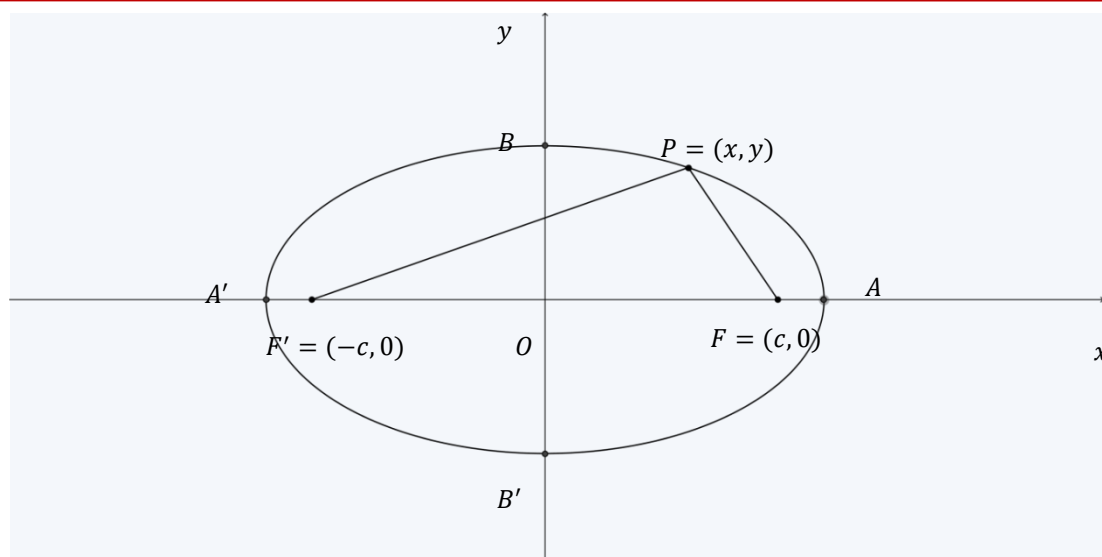


Figura 9

Los focos F y F' están sobre el eje x . Como el centro O es el punto medio del segmento FF' , las componentes de F y F' serán, por ejemplo, $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Por la definición 12, el punto P debe satisfacer la condición

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a, \quad (1)$$

en donde a es una constante positiva *mayor* que c .

Tenemos

$$d(P, F) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad d(P, F') = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

De manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, obtenemos

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

de donde,

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \quad (3)$$

Como $2a > 2c$ entonces $a^2 > c^2$ y por lo tanto $a^2 - c^2 > 0$ que puede ser reemplazado por el número positivo b^2 , es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (4)$$

Si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2 , obtenemos

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

y multiplicando por el recíproco de $a^2 b^2$, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

Recíprocamente, sea $P = (x_1, x_2)$ un punto cualquiera cuyas componentes satisfacen la ecuación (5), de manera que

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

Invirtiendo el orden de las operaciones efectuadas para pasar de la ecuación (2) a la (5), y dando la debida interpretación a los signos de los radicales, podemos demostrar que la ecuación (6) conduce a la relación

$$\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = 2a$$

Que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1 . Por tanto, P_1 está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Ahora discutiremos la ecuación (5). Al sustituir en la ecuación (5) por $y = 0$ se obtiene $x = \pm a$, luego las intersecciones de la elipse con el eje x son los puntos $A = (a, 0)$ y $A' = (-a, 0)$ llamados vértices y la longitud del eje mayor es igual a $2a$, que es la constante que se menciona en la definición de elipse.

Al sustituir en la ecuación (5) por $x = 0$ se obtiene $y = \pm b$, luego las intersecciones de la elipse con el eje y son los puntos $B = (0, b)$ y $B' = (0, -b)$ que son los extremos del eje menor, siendo su longitud igual a $2b$.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos y , obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (7)$$

Luego, se obtienen valores reales de y solamente para valores de x del intervalo

$$-a \leq x \leq a \quad (8)$$

Si de la ecuación (5) despejamos x , obtenemos

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

de manera que se obtienen valores reales de x , solamente para valores de y dentro el intervalo



$$-b \leq y \leq b. \quad (9)$$

De (8) y (9) se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

Evidentemente, la elipse no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

La abscisa del foco F es c . Si en (7) sustituimos x por este valor se obtienen las ordenadas correspondientes:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2},$$

y por la relación (4), se tiene

$$y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$. Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $\frac{2b^2}{a}$.

Un elemento importante de una elipse es su *excentricidad* que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa por la letra e . De (4) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (10)$$

Como $c < a$, la *excentricidad de una elipse es menor que la unidad*.

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje y . Las componentes de los focos son entonces $(0, c)$ y $(0, -c)$. En este caso, por el mismo procedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (11)$$

en donde a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$. La discusión completa de la ecuación (11) se deja al estudiante como ejercicio.

Las ecuaciones (5) y (11) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria de la elipse*. Son las ecuaciones más simples de la elipse y, por tanto, nos referiremos a ellas como las **formas canónicas**.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema.

Teorema 1

La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal sobre el eje x , distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante igual a $2a$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje y , de manera que las componentes de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor y a , b y c están ligados por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y la excentricidad e esta dada por la fórmula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Nota

Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma canónica, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos x^2 e y^2 . El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Ejemplo

Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje y . Si uno de los focos es el punto $(0, 3)$ y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$, hallar las componentes del otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse y la longitud de cada uno de sus lados rectos.

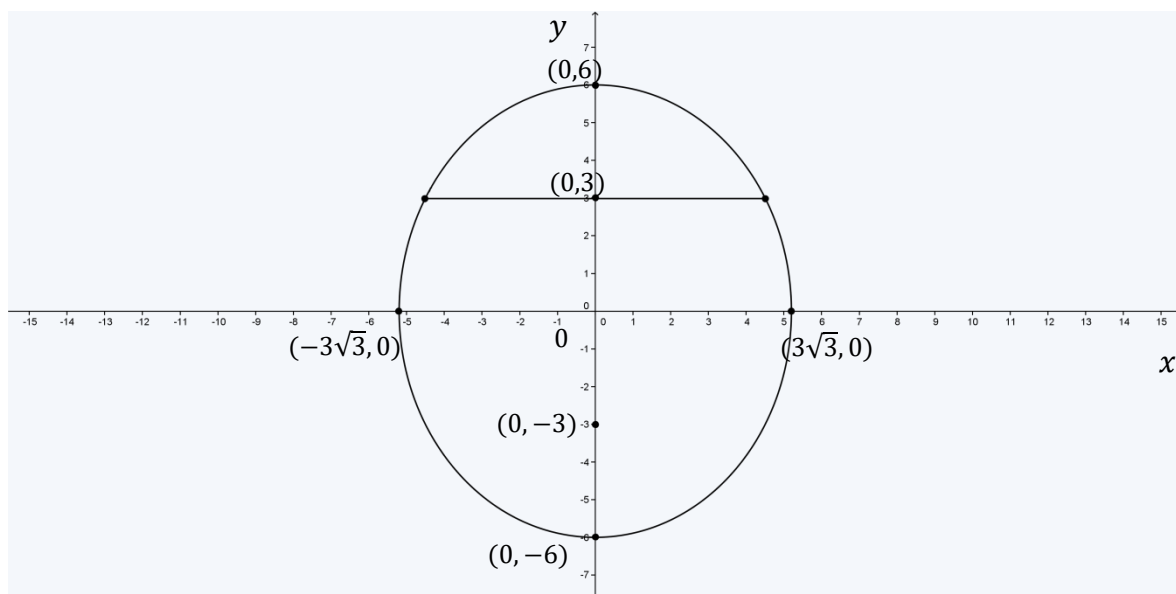


Figura 10

Solución. Como uno de los focos es el punto $(0, 3)$, tenemos $c = 3$, y las componentes del otro foco son $(0, -3)$. Como la excentricidad es $\frac{1}{2}$, tenemos

$$e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 6$$

Además,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

La longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 27}{6} = \frac{54}{6} = 9$.

El lugar geométrico es el representado en la figura 10.

EJERCICIOS

18. Cada una de las siguientes elipses tiene su centro en el origen de coordenadas. Indique cuál es su ecuación, si satisface las condiciones adicionales dadas:

- a) un vértice en $(4, 0)$, un extremo del eje menor en $(0, -2)$.
- b) Un vértice en $(6, 0)$, un foco en $(-1, 0)$.
- c) Excentricidad $\frac{3}{4}$, un vértice en $(-2, 0)$.
- d) Un vértice en $(-5, 0)$, longitud del lado recto 4.
- e) Un vértice en $(0, 4)$, pasa por $(1, 2)$.

19. Halle la ecuación de la elipse cuyos datos se dan, y encuentre los elementos restantes:

- a) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$ y semieje mayor $a = 5$.
- b) $A_1 = (0, 8)$, $A_2 = (0, -8)$ y $LR = \frac{7}{2}$.
- c) $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$ y $e = \frac{5}{6}$.
- d) $A_1 = (6, 0)$, $A_2 = (-6, 0)$ y $e = \frac{2}{3}$.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO (h, k) Y EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS.

Consideraremos la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Para esto, sea la elipse cuyo centro está en el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje x tal como se indica en la figura 11.



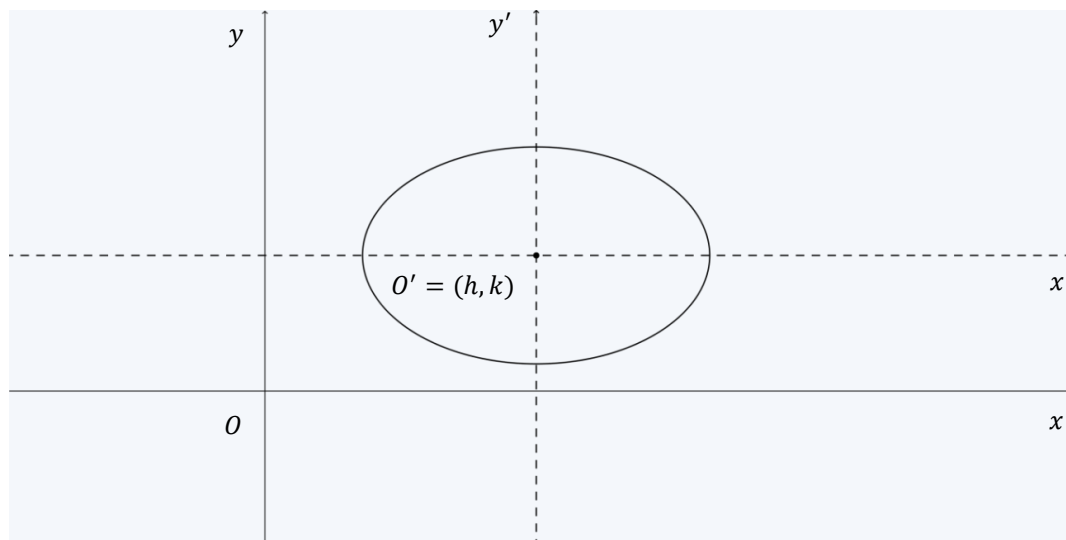


Figura 11

Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k) de la elipse, se sigue, por el teorema 1, que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes x' y y' está dada por

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

De la ecuación (1) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales x y y usando las ecuaciones de transformación, a saber:

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k,$$

de donde

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k.$$

Si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales x e y .

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje y tiene por ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, la *segunda ecuación ordinaria de la elipse*. Los resultados precedentes, juntos con el teorema 1, nos dan el siguiente teorema.

Teorema 2

La ecuación de la elipse con centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje x , está dada por la segunda forma ordinaria,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje y , su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco. a , b y c están ligadas por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Ejemplo

Los vértices de una elipse son $(-3,7)$ y $(-3,-1)$, y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las componentes de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3 , se sigue (Fig. 12) que el eje focal es paralelo al eje y .

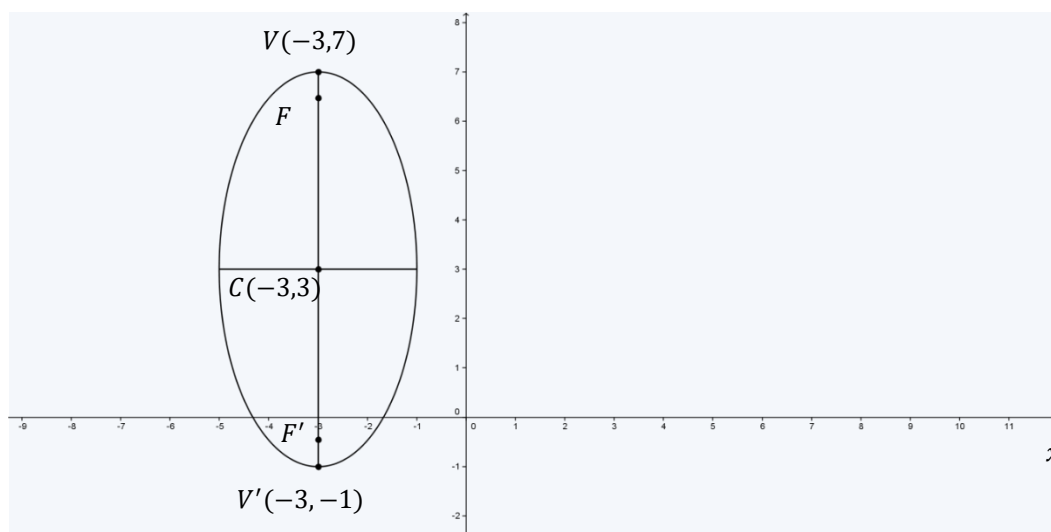


Figura 12

Por lo tanto, por el Teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

El centro C es el punto medio del eje mayor VV' y sus componentes son, por lo tanto, $(-3,3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente.

Por tanto, $2a = 8$ y $a = 4$. La longitud del lado recto es $\frac{2b^2}{a} = 2$. Como $a = 4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b = 2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto las componentes de los focos son $F(-3, 3 + 2\sqrt{3})$ y $F'(-3, 3 - 2\sqrt{3})$, y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Consideremos ahora la ecuación (2) de la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0. \quad (4)$$

La cual puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (5)$$

en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$. Evidentemente, los coeficientes A y C deben ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (5) y reduzcámosla a la forma ordinaria (2) complementando cuadrados. Así, obtenemos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} \quad (6)$$

Sea $M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$. Si $M \neq 0$, la ecuación (6) puede escribirse de la forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{MC} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{MA} = 1, \quad (7)$$

que es la ecuación ordinaria de la elipse.

Como A y C deben concordar en signo, podemos suponer, sin perder generalidad, que son ambos positivos. Por lo tanto, si (5) debe representar una elipse, la ecuación (7) demuestra que M debe ser positivo. El denominador $4A^2C^2$ de M es positivo; por tanto, el signo de M depende del signo de su numerador $CD^2 + AE^2 - 4ACF$, al que designaremos por N . De acuerdo con esto, comparando las ecuaciones (6) y (7), vemos que, si $N > 0$, (5) representa una elipse; de (6), si $N = 0$, (5) representa el punto único

$$\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right),$$



llamando usualmente una elipse punto, y si $N < 0$, la ecuación (6) muestra que (5) no representa lugar geométrico real.

Una discusión semejante se aplica a la forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3

Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa lugar geométrico.

Ejemplo

La ecuación de una elipse es $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las componentes del centro, de los vértices y de los focos. Calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto y la excentricidad.

Solución. Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando cuadrados. Resulta, entonces

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

$$y \quad (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 9,$$

de donde

$$(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4,$$

de manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1.$$

Las componentes del centro C son: $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ y el eje focal es paralelo al eje x .

Como $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ y las componentes de los vértices V y V' son $\left(-1 + 2, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-1 - 2, \frac{3}{2}\right)$, es decir, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 \Rightarrow c = \sqrt{3}$ y las componentes de los focos F y F' son $\left(-1 + \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-1 - \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a = 4$, la del eje menor es $2b = 2$, y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. El lugar geométrico está representado en la figura 10.



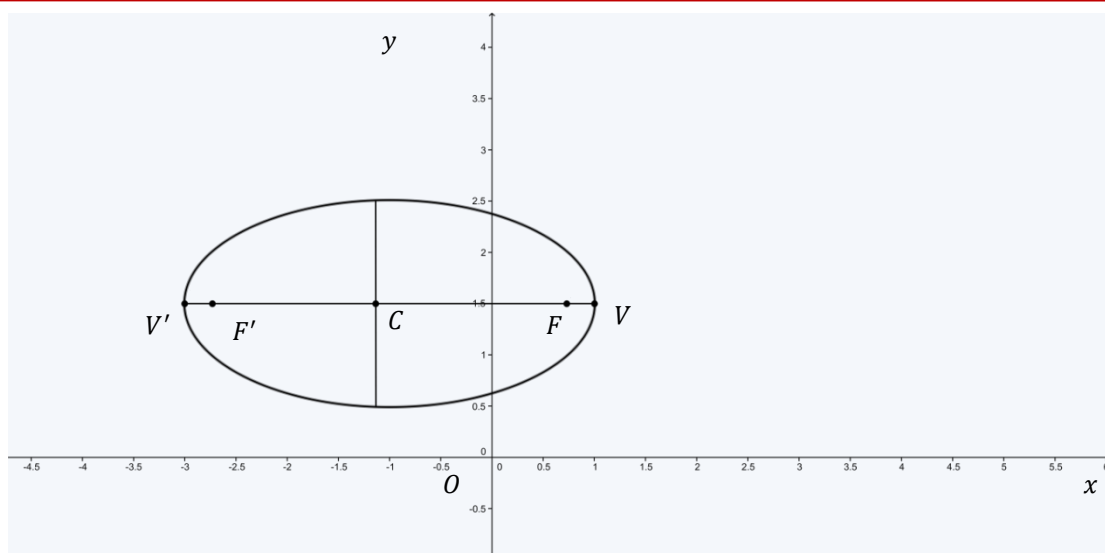


Figura 13

EJERCICIOS

20. En cada caso, encuentre la ecuación de la elipse sabiendo que:

- a) su centro está en $(-3, 1)$, un extremo del eje menor en $(-1, 1)$ y pasa por $(-2, -2)$.
- b) Sus vértices están en $(7, -2)$ y $(-5, -2)$ y pasa por $(3, 2)$.
- c) Pasa por $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje x y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

21. a) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$, tales que la suma de sus distancias a los puntos $F_1 = (5, -4)$ y $F_2 = (5, -14)$ es igual a 20.

b) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$, tales que la suma de sus distancias a los puntos $A_1 = (-2, 1)$ y $A_2 = (-2, -3)$ es igual a 6.

22. Determine las componentes de los vértices y focos, la longitud de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de lado recto de las siguientes elipses. Grafique.

- | | | |
|--|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ | b) $9x^2 + 4y^2 = 36$ | c) $3x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 17 = 0$ |
| d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ | e) $4x^2 + 5y^2 = 20$ | f) $4x^2 + y^2 - 40x + 96 = 0$ |
| g) $9x^2 + 16y^2 + 72x - 224y + 784 = 0$ | g) $x^2 + 9 - 10x + 36y - 20 = 0$ | |

3.3 Hipérbola**Definición 13**

Se llama *hipérbola*, al conjunto \mathcal{H} formado por todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos del plano F y F' , llamados *focos*, es una constante positiva y menor que la distancia entre los focos.

En símbolos:

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 / |d(P, F) - d(P, F')| = \text{cte} < d(F, F')\}.$$

Se debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrara frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En una hipérbola se consideran los siguientes elementos, representados en la Fig. 14:

- La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la Fig. 14 se ha dibujado una porción de cada una de estas ramas.
- Los focos están designados por F y F' .
- La recta l que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término de *eje focal* para designar a esta recta.
- El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, A y A' , llamados *vértices*. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento AA' , se llama *eje transverso*.
- El punto medio C del eje transverso se llama *centro*.
- La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l tiene varios nombres; nosotros, como hicimos para la elipse, consideramos conveniente introducir el termino *eje normal* para esta recta. El eje normal l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, al segmento BB' en la Fig. 14, que tiene C por punto medio, se llama *eje conjugado*.
- El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama *cuerda*; estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como la cuerda GG , o uno de una rama y el otro de la otra, como por ejemplo el eje transverso AA' .
- En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama *cuerda focal*. Una cuerda focal, tal como LL' , perpendicular al eje focal l se llama *lado recto*; evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos.
- Una cuerda que pasa por C , tal como DD' , se llama *diámetro*.

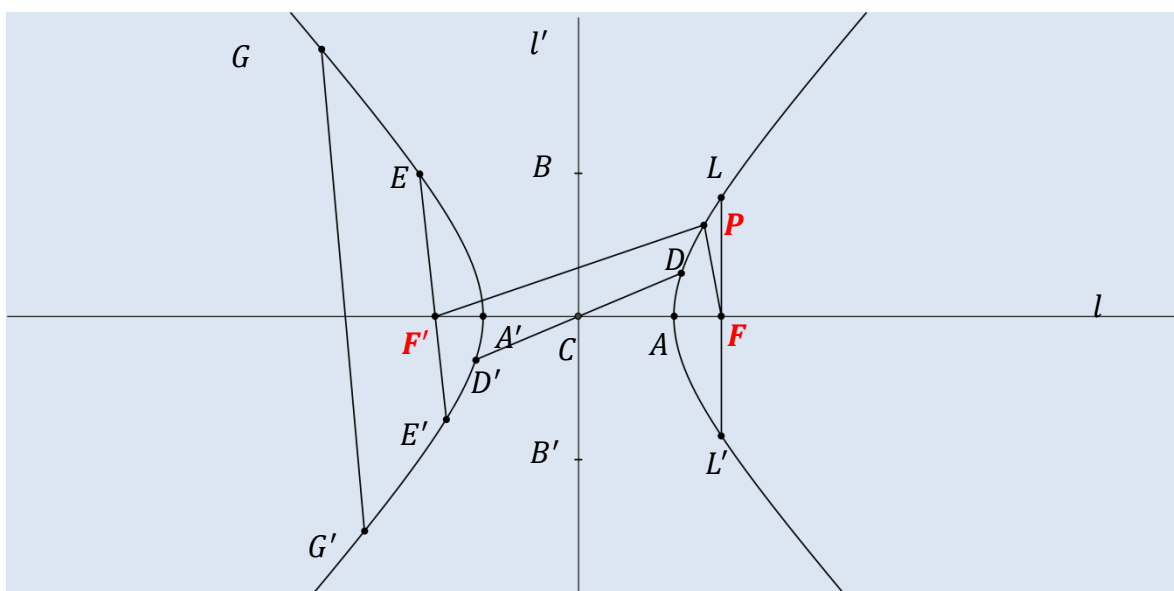


Figura 14

PRIMERA ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Consideremos la hipérbola de la Fig. 15, de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje x .

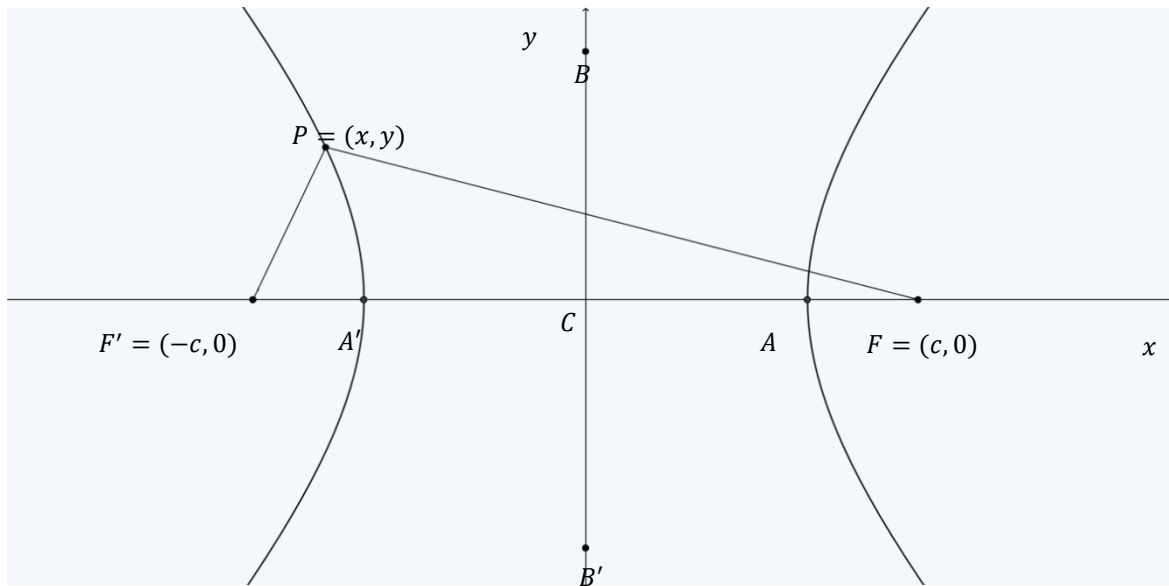


Figura 15

Los focos F y F' están sobre el eje x . Como el centro C es el punto medio del segmento FF' , las componentes de F y F' sean $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la Definición 13 de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a, \quad (1)$$

donde a es una constante positiva y $2a < 2c$. La condición geométrica (1) es equivalente a las siguientes relaciones,

$$d(P, F) - d(P, F') = 2a, \quad (2)$$

$$d(P, F) - d(P, F') = -2a. \quad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola y la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha. Tenemos, entonces que

$$d(P, F) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad \wedge \quad d(P, F') = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a, \quad (4)$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = -2a, \quad (5)$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3) respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a

$$(c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2). \quad (6)$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2 > 0$ que designamos por b^2 . Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (7)$$

obtenemos

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

Podemos demostrar recíprocamente, que si $P_1 = (x_1, y_1)$ es un punto cualquiera cuyas componentes satisfacen la ecuación (8), entonces P_1 satisface la condición geométrica (1) y, por lo tanto, está sobre la hipérbola. Luego la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiaremos ahora la ecuación (8).

- Al sustituir en la ecuación (8), $y = 0$ se obtiene $x = \pm a$, luego las intersecciones de la hipérbola con el eje x son los puntos $A = (a, 0)$ y $A' = (-a, 0)$ llamados vértices y la longitud del eje transversal es igual a $2a$, que es la constante que interviene en la definición.
- Aunque no hay intersecciones con el eje y , dos puntos $B = (0, b)$ y $B' = (0, -b)$, se toman como extremos del eje conjugado. Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a $2b$.
- La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.
- Despejando y de la ecuación (8), resulta;

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (9)$$

Por tanto, para que los valores de y sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico aparece en la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = -a$.

- Despejando x de la ecuación (8) se obtiene

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}. \quad (10)$$

De la cual vemos que x es real para todos los valores reales de y .

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), junto con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada, sino que consta de dos ramas diferentes, una de las



cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje x , y la otra se extiende indefinidamente hacia la izquierda y por arriba y abajo del eje x .

- De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada **lado recto** es $\frac{2b^2}{a}$.
- Como para la elipse, la **excentricidad** e de una hipérbola está definida por la razón $\frac{c}{a}$. Por tanto, de (7) tenemos

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (11)$$

Como $c > a$, la *excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad*.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje y , hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

La discusión completa de la ecuación (12) se deja al estudiante.

A las ecuaciones (8) y (12) las llamaremos *primera ecuación ordinaria de la hipérbola*. Son las más simples de esta curva por lo que nos referiremos a ellas como *formas canónicas*.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1

La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje x , y focos en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje y , de manera que las componentes de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, entonces la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transversal, b la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco, y están ligadas por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$



Nota

La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota del teorema 1 de la elipse. Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ o $a = b$.

La posición de la hipérbola se determina por los *signos* de los coeficientes de las variables en la forma canónica. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Ejemplo:

Los vértices de una hipérbola son los puntos $A = (0,3)$ y $A' = (0,-3)$, y sus focos los puntos $F = (0,5)$ y $F' = (0,-5)$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad y la longitud de cada lado recto.

Solución. Como los vértices y los focos están sobre el eje y , el eje focal coincide con el eje y . Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente, en el origen. Por tanto, por el Teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos es $2c = 10$. Por tanto, $a = 3$ y $c = 5$, de donde $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$, por lo tanto, $b = 4$, y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, y la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$.

El lugar geométrico está representado en la Figura 14, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X .

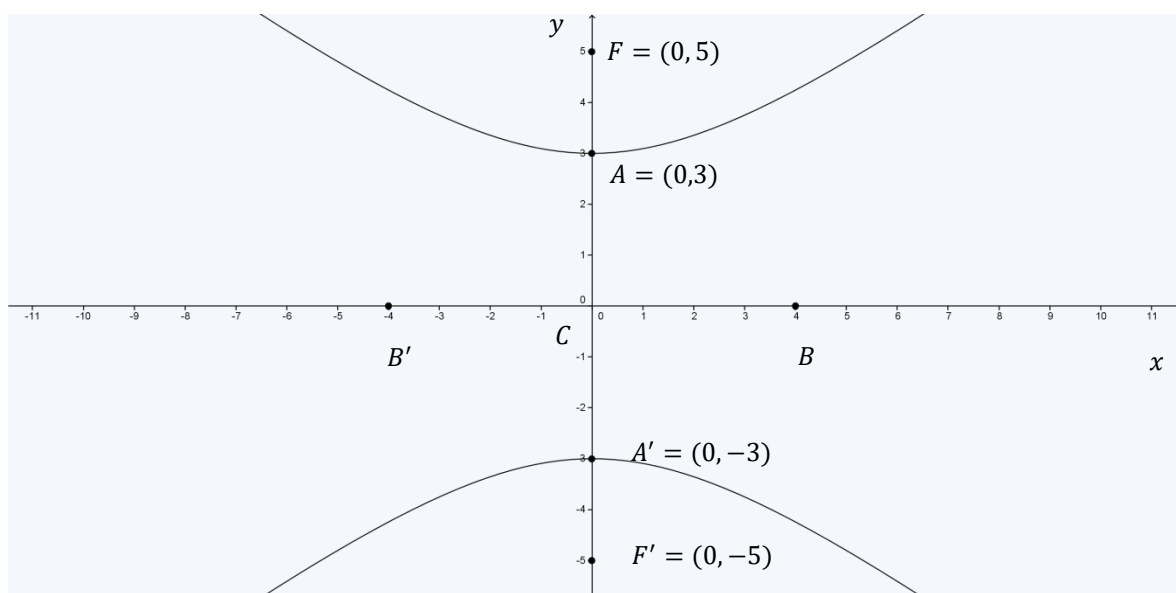


Figura 16

ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA.

Si de la forma canónica de la ecuación de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ o lo que es lo mismo } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad (1)$$

despejamos y , obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

que puede escribirse en la forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}. \quad (2)$$

Si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de manera que su abscisa (x) aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro de (2) se aproxima a uno, y la ecuación tiende a la forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (3)$$

Como la ecuación (3) representa las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas (Fig. 17).

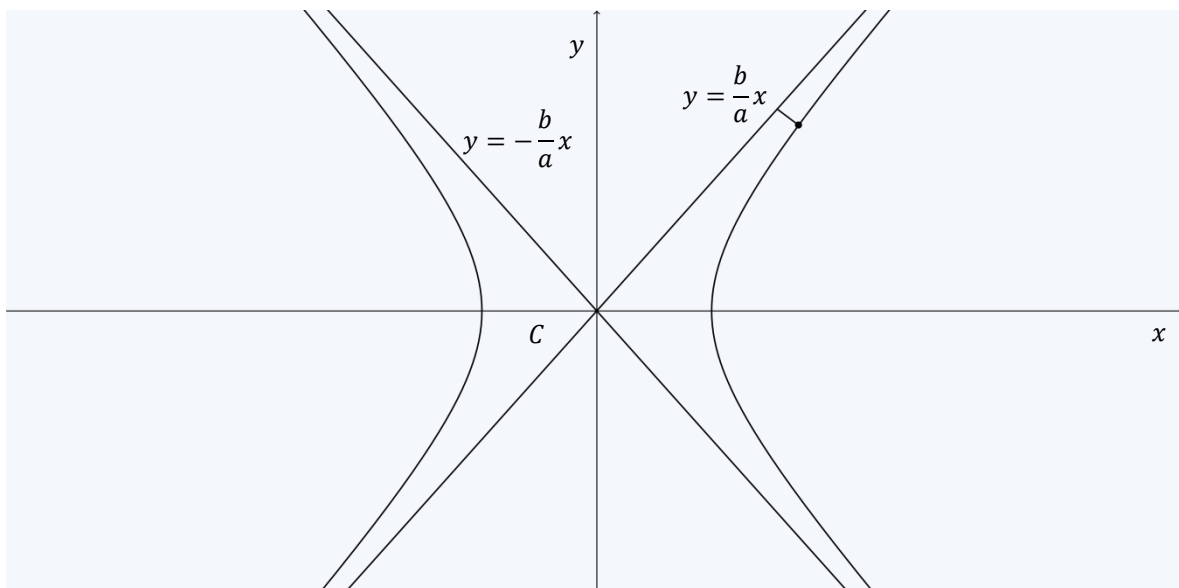


Figura 17

Teorema 2.

La hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tiene por asíntotas las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

Notas

1. Si la ecuación de una hipérbola está en su forma canónica, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$, tenemos $9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde, $(3x + 2y)(3x - 2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son $3x + 2y = 0$ y $3x - 2y = 0$.

2. La gráfica de una hipérbola puede esbozarse muy fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guía*.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6,2) tiene su centro en el origen, su eje transverso esta sobre el eje x , y una de sus asíntotas es la recta $2x - 5y = 0$.

Solución. Por el Teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta $2x + 5y = 0$.

Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación

$$(2x - 5y)(2x + 5y) = k,$$

o sea

$$4x^2 - 25y^2 = k.$$

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto (6,2), las componentes de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola, por tanto, si hacemos $x = 6$ e $y = 2$ en la última ecuación, hallamos $k = 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es

$$4x^2 - 25y^2 = 44,$$

cuya gráfica se esboza en la Fig. 18.

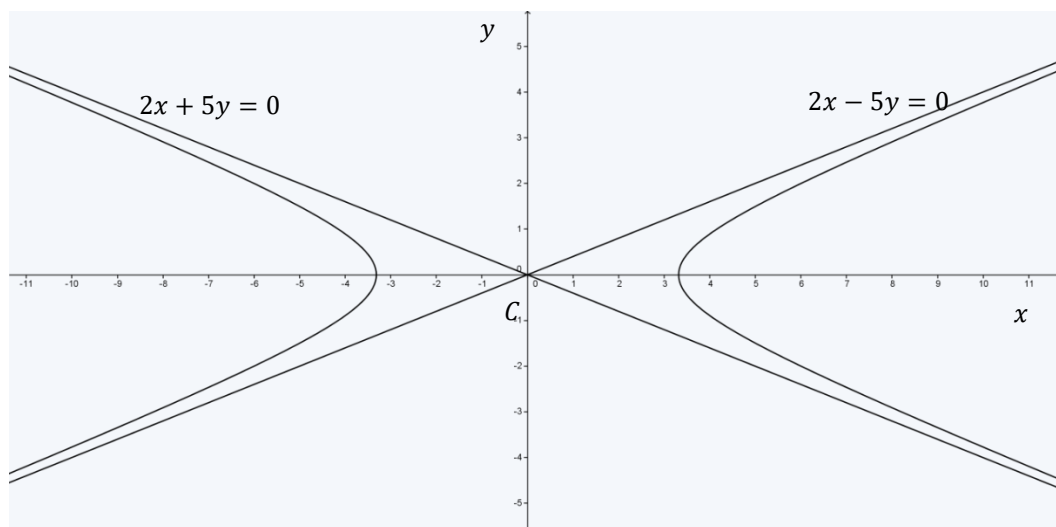


Figura 18

EJERCICIOS

23. Cada una de las siguientes hipérbolas tiene su centro en el origen. Determinar su ecuación sabiendo que satisface las condiciones dadas:

- un vértice en (0, 5), y extremo del eje normal en (3, 0).
- Un vértice en (-2, 0) y un foco en (4, 0).
- Un extremo del eje normal en (0, 2) y un foco en (-7, 0).
- Un vértice en (3, 0) y longitud del lado recto 24.
- Un foco en (10, 0) y pasa por $(10, \frac{9}{2})$.

SEGUNDA ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA.

Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por esto, se deja al estudiante, como ejercicio, demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3

La ecuación de una hipérbola de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje x , es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal es paralelo al eje y , su ecuación es

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1.$$

Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transversal, b la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada uno de los focos, y están ligadas por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$, y la excentricidad e está dada por la relación

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA.

Una discusión de la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola, análoga a la de la elipse, nos da el siguiente teorema:

Teorema 4

Si los coeficientes A y C difieren en el signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados, o un par de rectas que se cortan.

Ejemplo

Discutir el lugar geométrico de la ecuación

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0 \quad (1)$$

Solución. Vamos a reducir la ecuación (1) a la forma ordinaria completando cuadrados. Entonces,

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113,$$

completando cuadrados, se tiene



$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4,$$

de donde

$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36.$$

De manera que la forma ordinaria es

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1, \quad (2)$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto $(3,1)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje y (Fig. 18). Como $a^2 = 9$, entonces $a = 3$ y las componentes de los vértices A y A' son

$$A = (3, 1 + 3) = (3, 4), \quad A' = (3, 1 - 3) = (3, -2).$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, y las componentes de los focos F y F' son

$$F = (3, 1 + \sqrt{13}), \quad F' = (3, 1 - \sqrt{13})$$

La longitud del eje transversal es $2a = 6$, la del eje conjugado es $2b = 4$, y la de cada lado recto es

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$$

La excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, factorizamos la ecuación

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 0, \quad (3)$$

de donde

$$\left(\frac{y - 1}{3} + \frac{x - 3}{2}\right)\left(\frac{y - 1}{3} - \frac{x - 3}{2}\right) = 0,$$

de manera que las ecuaciones de las asíntotas son

$$\frac{y - 1}{3} + \frac{x - 3}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y - 1}{3} - \frac{x - 3}{2} = 0,$$

o sea,

$$3x + 2y - 11 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

El estudiante debe observar que la relación (3) puede obtenerse inmediatamente reemplazando el término constante por cero en el segundo miembro de la ecuación ordinaria (2).



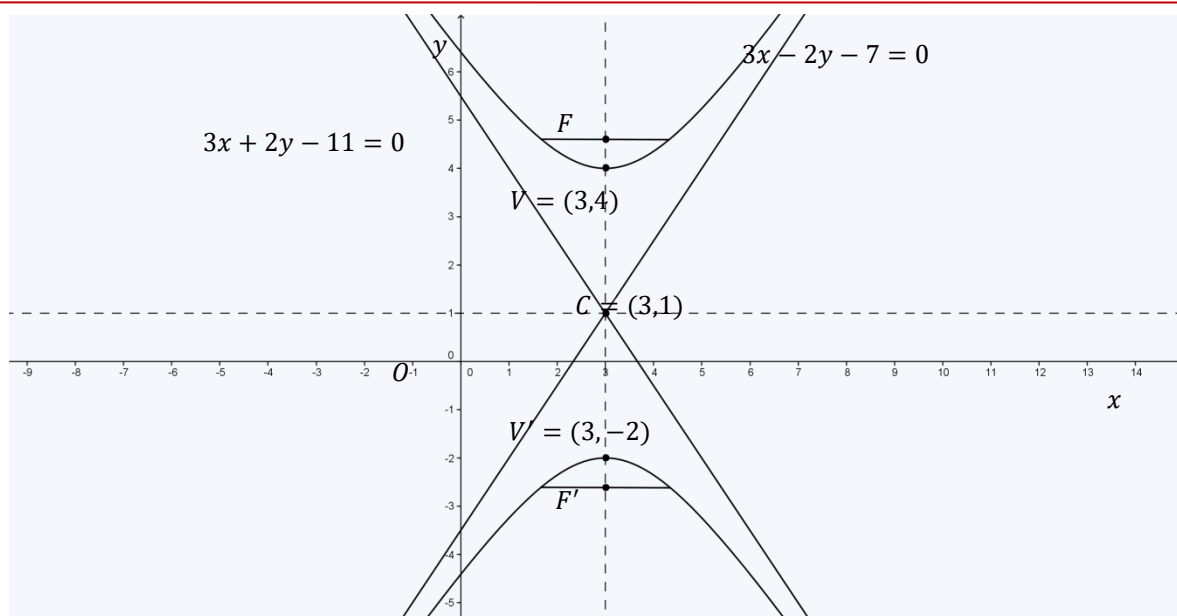


Figura 19

EJERCICIOS

24. Obtenga la ecuación de las siguientes hipérbolas sabiendo que satisfacen las condiciones dadas:

- extremos del eje normal en $(0, 0)$ y $(0, 8)$, excentricidad $\sqrt{3}$.
- Vértices en $(2, 9)$ y $(2, 3)$, pasa por $(0, 0)$.
- Un vértice en $(2, -1)$, un extremo del eje normal en $(-1, -3)$, eje transverso paralelo al eje y .
- Un vértice en $(4, 2)$, focos en $(7, 2)$ y $(-1, 2)$.
- Centro en $(-5, 1)$, excentricidad $\frac{4}{3}$, un vértice en $(-5, -5)$.
- Eje transverso igual al eje x , centro en el origen, lado recto igual a 18 y la distancia entre los focos es 12.

3.4 Parábola**Definición 14**

Se llama *parábola*, al conjunto \mathcal{P} formado por todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tales que su distancia a una recta fija d , situada en el plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo F del plano que no pertenece a la recta.

En símbolos:

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, d) = d(P, F)\}.$$

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola.

La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

En la Fig. 20,

- la recta l que pasa por F y es perpendicular a d se llama *eje* de la parábola.

- El punto de intersección del eje y la directriz lo denominaremos con A ; el punto V , punto medio del segmento AF , es, por definición, un punto de la parábola; este punto se llama *vértice*.
- El segmento de la recta, tal como BB' , que une dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama *cuerda*. En particular, una cuerda que pasa por el foco como CC' , se llama cuerda focal.
- La cuerda focal LL' perpendicular al eje se llama *lado recto*.

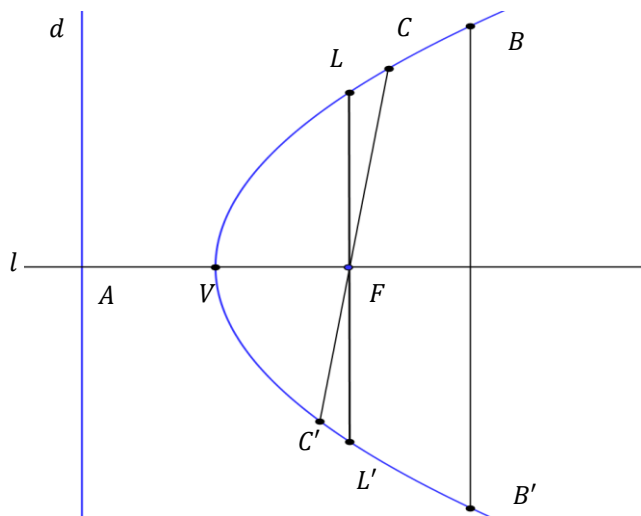


Figura 20

ECUACION DE LA PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE COINCIDENTE CON UN EJE COORDENADO.

Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados.

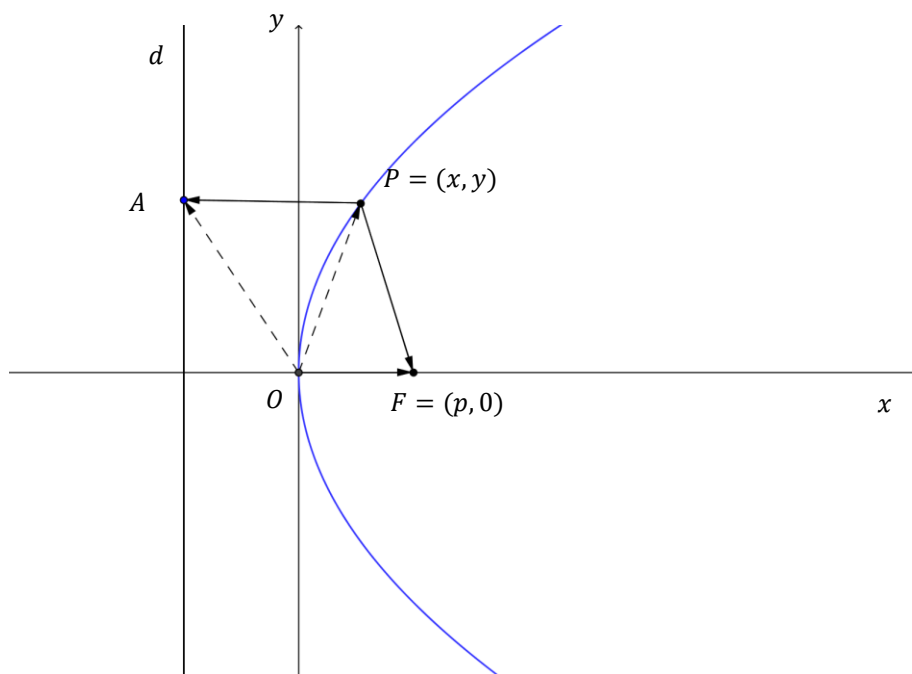


Figura 21

De acuerdo con esto, consideremos la parábola cuyo vértice está en el origen (Fig. 21) y cuyo eje coincide con el eje x . Sean $(p, 0)$ las componentes del foco. Por definición de parábola, la ecuación de la directriz d es $x = -p$.

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a d , es claro que el punto A tiene por componentes $(-p, y)$. Entonces, por la definición de parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$d(P, F) = d(P, A). \quad (1)$$

Por un lado, se tiene

$$d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2};$$

y por otro

$$d(P, A) = \sqrt{(x + p)^2 + 0^2} = |x + p|.$$

La condición geométrica (1) está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|,$$

si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos

$$y^2 = 4px. \quad (2)$$

Recíprocamente, sea $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas componentes satisfagan (2). Tendremos

$$y_1^2 = 4px_1$$

Si sumamos $(x_1 - p)^2$ a ambos miembros de la ecuación, y extraemos la raíz cuadrada, obtenemos, para la raíz positiva,

$$\sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} = |x_1 + p|,$$

que es la expresión analítica de la condición geométrica (1) aplicada al punto P_1 . Por tanto, P_1 está sobre la parábola cuya ecuación está dada por (2).

Ahora discutiremos la ecuación (2). Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee es con respecto al eje x . Despejando y de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2\sqrt{px}. \quad (3)$$

Por tanto, para valores de y reales y diferentes de cero, p y x deben ser del mismo signo, según esto, podemos considerar dos casos: $p > 0$ y $p < 0$.

- Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x , y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje y . Como no se excluye ningún valor positivo de x , y como y puede tomar todos los valores reales, el lugar geométrico de (3) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje y , hacia arriba y abajo del eje x . Esta posición es la indicada en la Fig. 21, y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.
- Análogamente, si $p < 0$, todos los valores positivos de x deben excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométrico aparece a la izquierda del eje y . Esta posición está indicada en la Fig. 22, y, en este caso, se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.



Es evidente que la curva correspondiente a la ecuación (2) no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

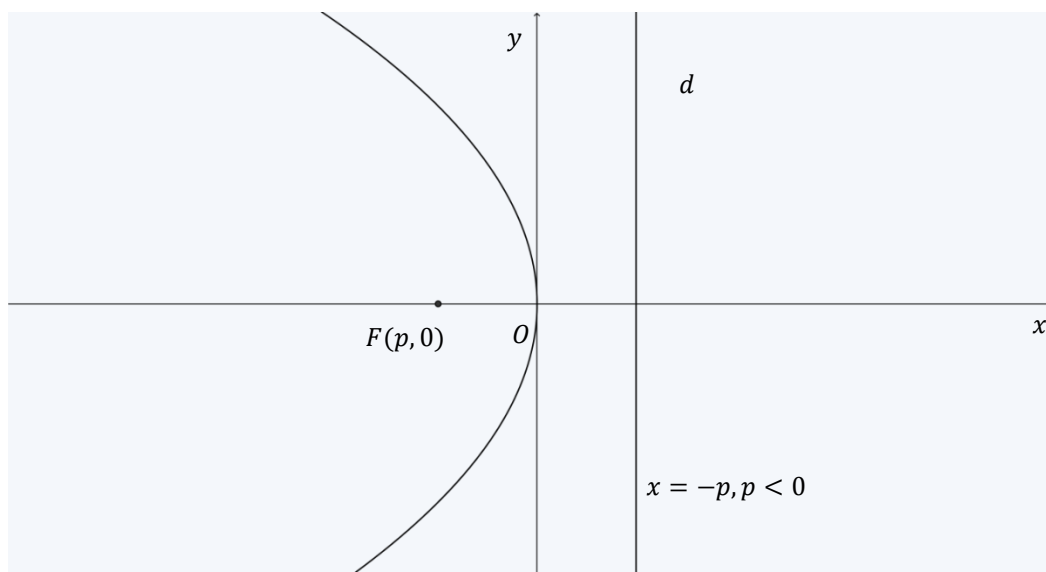


Figura 22

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p ; uno de ellos tiene la ordenada $2p$ y el otro la ordenada $-2p$. Como la abscisa del foco es p , se sigue que la longitud del lado recto es igual al valor absoluto de la cantidad $4p$.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje y , se demuestra, análogamente, que la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py \quad (4)$$

En donde el foco es el punto $(0, p)$. Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba (Fig. 23. a). Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (Fig. 23. b).

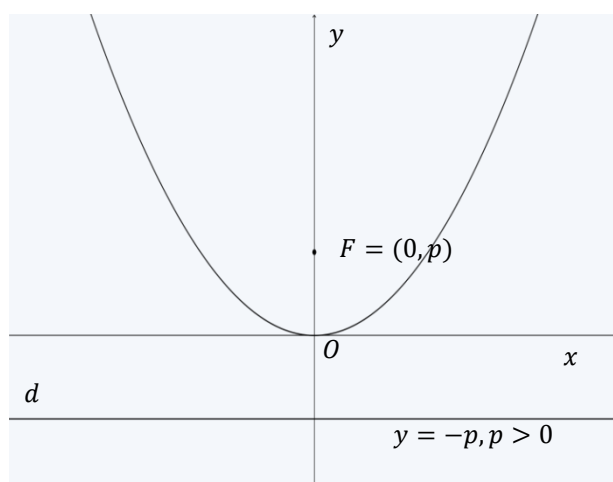


Figura 23. a

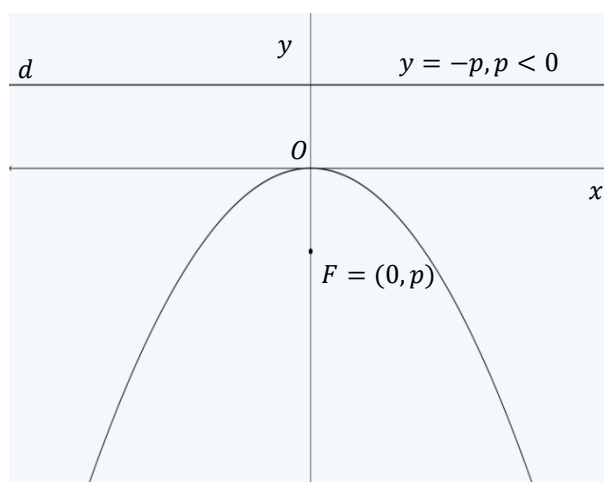


Figura 23. b

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la *primera ecuación ordinaria de la parábola*. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las *formas canónicas*.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1

La ecuación de una parábola con vértice en el origen y eje sobre el eje x , es

$$y^2 = 4px,$$

en donde el foco es el punto $(p, 0)$ y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el eje de una parábola coincide con el eje y , y el vértice está en el origen, su ecuación es

$$x^2 = 4py,$$

en donde el foco es el punto $(0, p)$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$, que es el coeficiente del término de primer grado.

Ejemplo

Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje y y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las componentes de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución. Por el Teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4py. \quad (4)$$

Como la parábola pasa por el punto $(4, -2)$, las componentes de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos

$$16 = 4p(-2),$$

de donde $p = -2$ y la ecuación buscada es

$$x^2 = -8y.$$

También por el Teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$, o sea, $(0, -2)$ y la ecuación de la directriz es

$$y = -p,$$

es decir

$$y = 2.$$

La longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la Fig. 24, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.



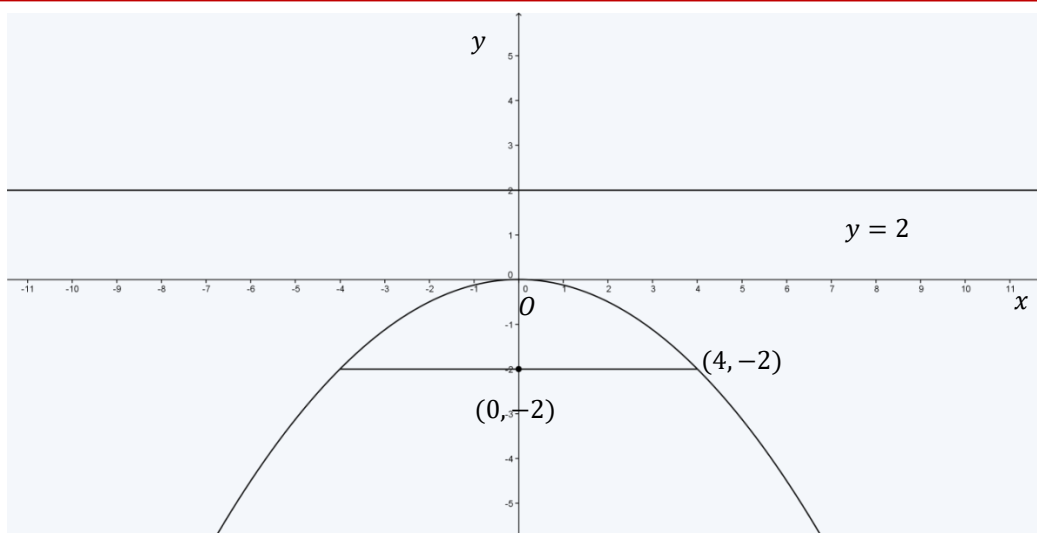


Figura 24

ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA DE VÉRTICE (h, k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO.

Con frecuencia buscaremos la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideremos la parábola de la Fig. 25 cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje x . Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k) , se sigue, por el Teorema 1, que la ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por

$$y'^2 = 4px', \quad (1)$$

en donde las componentes del foco F son $(p, 0)$ referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales x e y , podemos obtener la ecuación (1) usando las ecuaciones de transformación

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k,$$

de donde,

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k,$$

si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (1), obtenemos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \quad (2)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y cuyo eje es paralelo al eje y tiene por ecuación.

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \quad (3)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Las ecuaciones (2) y (3) se llaman, generalmente, *segunda ecuación ordinaria de la parábola*.

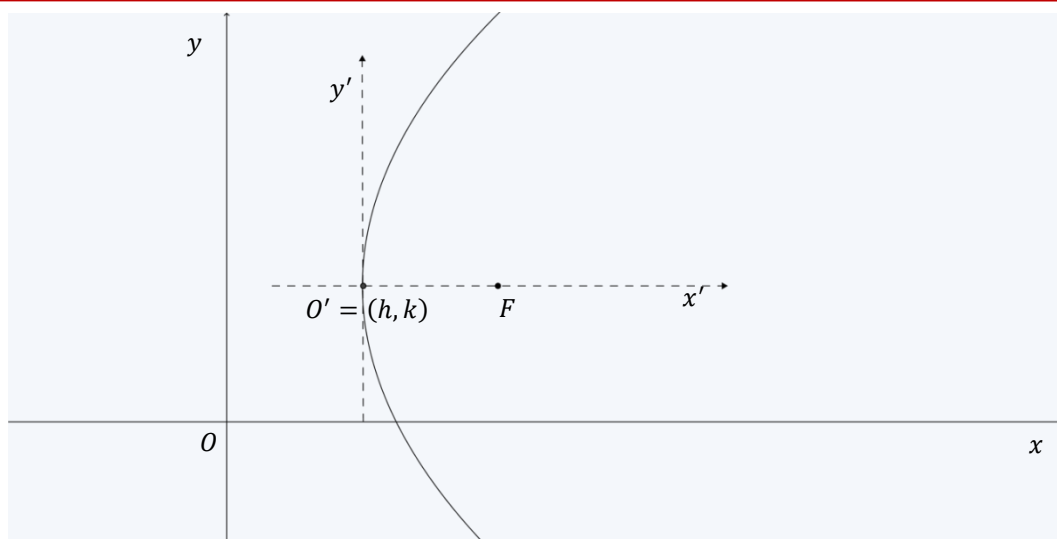


Figura 25

Teorema 2

La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje x , es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábola es paralelo al eje y , su ecuación es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(3, 4)$ y cuyo foco es el punto $(3, 2)$. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como es en este caso cada uno de estos puntos tienen la misma abscisa 3. Se sigue que el eje es paralelo al eje y , como se indica en la Fig. 26. Por tanto, la ecuación de la parábola es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Como el vértice V es el punto $(3, 4)$, la ecuación puede escribirse

$$(x - 3)^2 = 4p(y - 4).$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |d(V, F)| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V , la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p = -2$, y la ecuación de la parábola es

$$(x - 3)^2 = -8(y - 4),$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje α corta a la directriz d . Como $V = (3,4)$ es el punto medio del segmento AF , se sigue que las componentes de A son $(3,6)$. Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

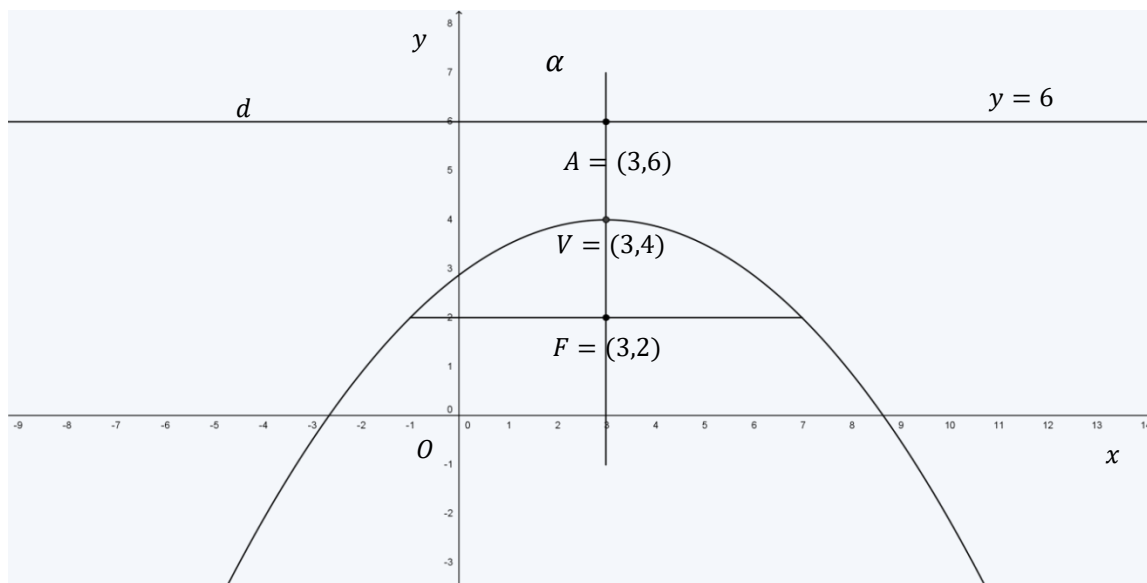


Figura 26

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

obtenemos

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \quad (4)$$

en donde $a_1 = -4p$, $a_2 = -2k$ y $a_3 = k^2 + 4ph$.

Recíprocamente, completando cuadrado en y , podemos demostrar que una ecuación de la forma (4) representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje x .

Al discutir la ecuación de la forma (4) suponemos que $a_1 \neq 0$. Si $a_1 = 0$, la ecuación toma la forma

$$y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \quad (5)$$

que es una ecuación cuadrática en la única variable y . Si las raíces de (5) son reales y distintas, digamos r_1 y r_2 , entonces la ecuación (5) puede escribirse en la forma

$$(y - r_1)(y - r_2) = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente consta de dos rectas diferentes, $y = r_1$ y $y = r_2$, paralelas ambas al eje x . Si las raíces (5) son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geoméricamente por una sola recta paralela al eje x . Finalmente, si las raíces de (5) son complejas, no existe lugar geométrico.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

Los resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3

Una ecuación de segundo grado en las variables x y y que carezca del término en xy puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

-Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo (o coincide con) al eje x . Si en cambio, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje x , dos rectas coincidentes paralelas al eje x , o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.

-Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincide con) al eje y . Si, en cambio, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje y , dos rectas coincidentes paralelas al eje y o ningún lugar geométrico, según que las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las componentes del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Por el Teorema 3, la ecuación

$$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0, \quad (6)$$

representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje y .

Si reducimos la ecuación (6) a la segunda forma ordinaria, completando cuadrado en x , obtenemos

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3). \quad (7)$$

De esta ecuación vemos inmediatamente que las componentes del vértice son $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$. Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$, y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje de la parábola que es paralelo al eje y . Se sigue que las componentes del foco son $\left(\frac{5}{2}, 3 + \frac{3}{2}\right)$, o sea, $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$. La ecuación de la directriz es $y = 3 - \frac{3}{2}$, o sea, $y = \frac{3}{2}$, y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$. Ver Fig. 27.

$$V\left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

$$y = \frac{3}{2}$$

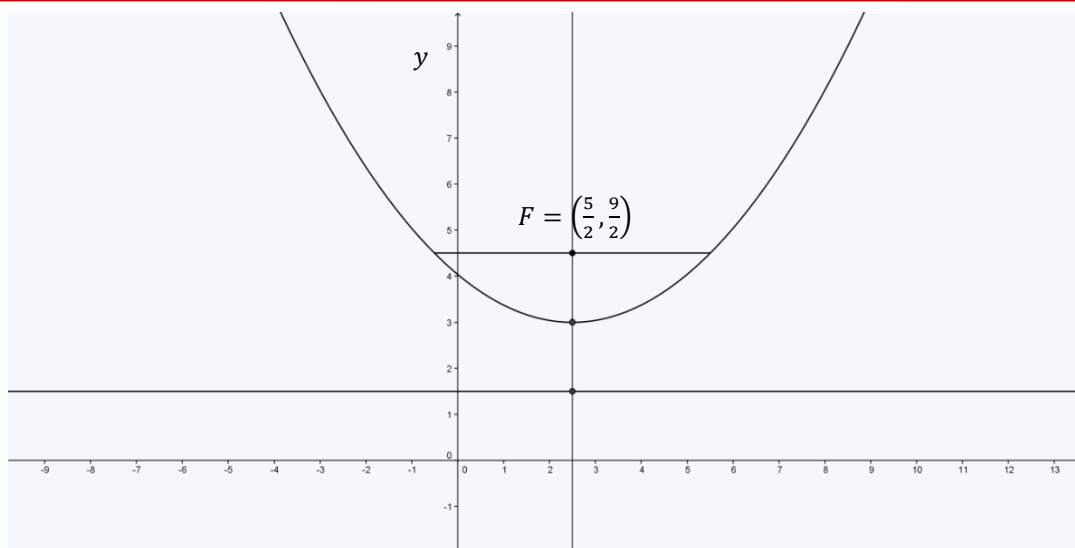


Figura 27

En las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola, dadas por el Teorema 2, hay tres constantes arbitrarias independientes: h , k y p . Por tanto, la ecuación de cualquier parábola cuyo eje sea paralelo a uno de los ejes coordenados puede determinarse a partir de tres condiciones independientes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje x y que pasa por los siguientes puntos $(\frac{3}{2}, -1)$, $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

Solución. Por el Teorema 2, la ecuación buscada es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Podemos, sin embargo, tomar también la ecuación en la forma dada por el Teorema 3, a saber:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Como $C \neq 0$, podemos dividir toda la ecuación por C , obteniendo así

$$y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \quad (8)$$

en donde $D' = \frac{D}{C}$, $E' = \frac{E}{C}$ y $F' = \frac{F}{C}$ son tres constantes a determinarse.

Como los tres puntos dados están sobre la parábola, sus componentes deben satisfacer la ecuación (8). Por lo tanto, expresando este hecho, obtenemos las tres ecuaciones siguientes correspondiendo a los puntos dados.

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}, -1\right), & 1 + \frac{3}{2}D' - E' + F' = 0 \\ (0, 5), & 25 + 5E' + F' = 0 \\ (-6, -7), & 49 - 6D' - 7E' + F' = 0 \end{cases}$$

Que pueden escribirse así:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1 \\ 5E' + F' = -25 \\ 6D' + 7E' - F' = 49 \end{cases}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos da

$$D' = 8, E' = -2, F' = -15,$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (8), obtenemos

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0.$$

Que es la ecuación de la parábola que se buscaba.

EJERCICIOS

25. Halle las componentes del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y del eje de simetría, y la longitud del lado recto de las siguientes parábolas. Grafique.

- | | | |
|---------------------------------|--|--------------------------------|
| a) $y^2 = -20x$ | b) $2x^2 + 5y - 15 = 0$ | c) $(y - 1)^2 = 2(x + 2)$ |
| d) $(x - 1)^2 + 8(y + 2) = 0$ | e) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 2(x - 5) = 0$ | f) $y^2 + 4y = 7$ |
| g) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$ | h) $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ | i) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$ |
| j) $4x^2 + 48y + 12x = 159$ | k) $x = -\frac{1}{6}y^2 - y - 1$ | l) $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$ |

26. Halle la ecuación de la parábola cuyos datos se dan a continuación:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $F = (3, -1)$, directriz: $2x + 1 = 0$ | b) $V = (1, 2)$, $F = (6, 2)$ |
| c) $F = (0, 2)$, directriz: $y - 5 = 0$ | d) $V = (3, 1)$, directriz: $x = 2$ |
| e) $V = (-2, -3)$, pasa por $P = (4, 2)$ y su eje es paralelo al eje y . | |

27. Obtenga la ecuación de la curva que satisface las condiciones indicadas.

- Directriz $x = 0$ y foco $(5, 0)$.
- Parábola de vértice $(-3, 2)$, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje es paralelo al eje y .
- Vértice $(-2, 1)$ y directriz $x = 1$.
- Elipse con vértices $(0, 8)$, $(0, 2)$ y $c = \sqrt{5}$.
- Cónica de eje mayor $-4 \leq x \leq 4$ y eje menor $-3 \leq y \leq 3$.
- Hipérbola de focos $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ y vértice $(1, 0)$.
- Cónica de focos $(0, 6)$, $(0, -6)$ y eje transversal de longitud 4.
- Conjunto de los puntos cuya diferencia de distancia a $(4, -3)$, $(-4, -3)$ es 6.

28. Dadas las cónicas de ecuación:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$ | b) $4y^2 - 3x^2 - 16y + 6x + 25 = 0$ |
| c) $y^2 + 4y - 2x + 6 = 0$ | d) $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ |
| e) $x^2 - y^2 - 6x - 4y = -4$ | f) $5x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$ |

Complete cuadrados, establezca la naturaleza de la cónica y todos sus elementos.