CÁTEDRA: Elementos de Algebra
GUIA DE TRABAJO PRÁCTICO NRO. 4
Combinatoria

1) Sabiendo que $P(n) = n!\,;\ V_{(n,k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\,;\ C_{(n,k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Hallar, si existe, x que verifique las siguientes expresiones:

a) $xV_{(4,2)} = P_{(4)}C_{(6,2)}$ b) $V_{(x,3)} = 20V_{(x,2)}$

c) $7V_{(x,3)} = 6V_{(x+1,3)}$ d) $C_{(x,3)} = C_{(x,4)}$

a) $x \ V_{(4,\,2)} = P_{(4)} \ C_{(6,\,2)}$

$x \dfrac{4!}{(4-2)!} = 4! \dfrac{6!}{(6-2)!\ 2!}$ Se aplicó definiciones de: Permutación, Variación y Combinación

$x \dfrac{4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4! \dfrac{6\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,2!}$ Se aplicó definición de factorial desarrollando hasta donde convenga, para luego aplicar propiedad cancelativa.

$x\,.\ 12 = 4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}\,\dfrac{30}{\cancel{2!}}$ Se aplicó definición de factorial, se resolvió operaciones y canceló

$x = \frac{360}{12} \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = 30}}$ Se resolvió, aplicando operaciones en ambos miembros según corresponda a fin de despejar x

Se explica este ejercicio a modo de ejemplo, para entender cómo es el proceso de resolución de los demás.

b) $\mathbf{V_{(x,\,3)} = 20\ V_{(x,\,2)}}$

$$\frac{x!}{(x-3)!} = 20\ \frac{x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{x\ .\ (x-1)(x-\cancel{2)\ (x}-3)!}{\cancel{(x-3)!}} = 20\ \frac{x\ .\ (x-\cancel{1)(x-}2)!}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$\frac{\cancel{x\ .\ (x-1)}(x-2)}{\cancel{x.\ (x-1)}} = 20$$

x - 2 = 20 $\Rightarrow$ $\boxed{x = 22}$

c) **7 $V_{(x,\,3)}$ = 6 $V_{(x+1\ ,\ 3)}$**

$$7\ \frac{x!}{(x-3)!} = 6\ \frac{(x+1)!}{(x+1-3)!}$$

$$7\ \frac{x\ .\ (x-1)(x-2)\cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}} = 6\ \frac{(x+1).\ x\ .\ (x-1)\ \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$7\ \frac{\cancel{x\ (x-1)}\ (x-2)}{\cancel{x\ (x-1)}} = 6\ \ (x+1)$$

7 x - 1 4 = 6 x + 6 Se aplicó propiedad distributiva en ambos miembros

7 x – 6 x = 6 + 14 $\Rightarrow$ $\boxed{x = 20}$

d) $C_{(x,3)} = C_{(x,\,4)}$ $\Rightarrow$ $\frac{x!}{(x-3)!\ 3!} = \frac{x!}{(x-4)!\ 4!}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x\ (x-1)(x-2)\ \cancel{(x-3)!}}{\cancel{(x-3)!}\ \ 3!} = \frac{x\ (x-1)(x-2)\ (x-3)\cancel{(x-4)!}}{\cancel{(x-4)!}\ 4!} \Rightarrow \frac{\cancel{x\ (x-1)(x-2)}}{\cancel{x\ (x-1)(x-2)}(x-3)} = \frac{3!}{4!}$$

$\Rightarrow \frac{1}{x-3} = \frac{\cancel{3!}}{4\,.\,\cancel{3!}} \Rightarrow \frac{1}{x-3} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 = x - 3 \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = 7}}$

2) ¿De cuantas maneras diferentes se pueden colocar 10 libros en un estante?

P(10) = 10!

3) ¿Cuántas palabras con y sin sentido pueden formarse con las letras de la palabra “camino”?

P(6) = 6! = 654321 =720

4) Debe elegirse una delegación de 5 estudiantes. ¿De cuantas maneras puede formarse la delegación, si hay 12 candidatos?

$C_{(12,5)} = \frac{12!}{(12-5)!.5!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!.5!} = \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1}$ =11.9.8 = 792

5) En un concurso literario se .presentaron 10 escritores con sus novelas. El cuadro de honor es: el ganador, el 2° finalista y el 3° finalista. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?

$V_{(10,3)} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!}$ = 10.9.8=720

6) Un chef dispone de 8 ingredientes para armar ensaladas, ¿Cuántas ensaladas distintas de 4 ingredientes (sin que se repitan los mismos), podrá preparar?

$C_{(8,4)} = \frac{8!}{(8-4)!.4!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}$ = 7.3.5=105

7) Diez corredores participan en una competencia de atletismo. Si se dan premios para los tres primeros puestos, ¿de cuantas maneras distintas puede ocuparse el podio?

Idem a 5)

8) Con los dígitos 1, 4, 6 y 8 se ha creado una clave de seguridad de 4 cifras. ¿Cuántas claves de números distintos pueden formarse?

$n = 4 \quad P(4) = 4! = 4.3.2.1 = 24$

9) Cuantas palabras con o sin sentido terminadas **MAN** se pueden formar con las letras de la palabra **SUBMARINO**?

La palabra SUBMARINO tiene **9 letras**, de las cuales 3 (M, A, N) tiene que ir al final. Por lo tanto, nos quedan **6 letras para intercambiar** y poder formar las distintas palabras. Es decir:

_6 5 4 3 2 1 M A N_

posibilidades

Tenemos 2 opciones para resolver este problema:

1. Utilizando la **Regla del Producto**, donde:

   Proceso: formar palabras con la palabra SUBMARINO (con o sin sentido), que terminen en MAN.

   En etapa 1: tenemos **6** letras para elegir.

   En etapa 2: tenemos **5** letras para elegir.

   En etapa 3: tenemos **4** letras para elegir.

   En etapa 4: tenemos **3** letras para elegir.

   En etapa 5: tenemos **2** letras para elegir.

   En etapa 6: nos queda **1** letra.

   N° de palabras = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = **720**

2. **OTRA FORMA** Luego de analizar, vemos que **importa el orden** de los elementos que tenemos para intercambiar, es decir las 6 letras, entonces podemos concluir que se trata de un problema de **Permutación**. Luego, aplicamos la fórmula:

$\mathbf{P_{(6)}} = 6! = 6 \ . \ 5 \ . \ 4 \ . \ 3 \ . \ 2 \ . \ 1 = \mathbf{720}$

10) a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen sus cifras impares?
b)¿Cuántos números de tres cifras distintas y todas pares, es posible formar? (excluyendo al 0)

Como tenemos que formar números de **3 cifras distintas e impares**, tenemos para elegir entre **n = 5** dígitos: 1, 3, 5, 7 y 9

Tenemos 2 opciones para resolver este problema:

1. Utilizando la **Regla del Producto**, donde:

Proceso: formar números de tres cifras **distintas** e **impares**

En etapa 1: tenemos **5** dígitos para elegir.

En etapa 2: tenemos **4** dígitos para elegir

En etapa 3: tenemos **3** dígitos para elegir

5 4 3

posibilidades

Cantidad de números de 3 cifras distintas e impares = 5 . 4 . 3 = **60**

2. Luego de analizar el problema, vemos que **importa el orden** de los elementos que elijamos porque cuando cambiamos el orden, cambia el número; además, disponemos de **5 dígitos** para formar un número de **3 cifras**. Por lo tanto, podemos concluir que se trata de un problema de **Variación**. Luego, aplicamos la fórmula:

$$\mathbf{V_{(5,3)}} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3\ .\ \cancel{2}!}{\cancel{2}!} = \mathbf{60}$$

b) ¿Cuántos números de tres cifras distintas y todas pares, es posible formar? (excluyendo al 0)

En este caso, tenemos que formar números de **3 cifras distintas y pares**, tenemos para elegir entre **n = 4** dígitos: 2, 4, 6 y 8 (se excluye al 0, porque si ocupa la 1° cifra, el número deja de ser de 3 cifras).

Tenemos 2 opciones para resolver este problema:

1. Utilizando la **Regla del Producto**, donde:

   Proceso: formar números de tres cifras **distintas** y **pares**

   En etapa 1: tenemos **4** dígitos para elegir.

   En etapa 2: tenemos **3** dígitos para elegir

   En etapa 3: tenemos **2** dígitos para elegir

   $\underline{\mathbf{4}}\ \underline{\mathbf{3}}\ \underline{\mathbf{2}}$

   posibilidades

   Cantidad de números de 3 cifras distintas y pares = 4 . 3 . 2 = **24**

2. Luego de analizar el problema, vemos que **importa el orden** de los elementos que elijamos porque cuando cambiamos el orden, cambia el número; además, disponemos de **4 dígitos** para formar un número de **3 cifras**. Por lo tanto, podemos concluir que se trata de un problema de **Variación**. Luego, aplicamos la fórmula:

$$\mathbf{V_{(4,3)}} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\ .\ 3\ .\ 2\ .\ \cancel{1!}}{\cancel{1!}} = \mathbf{24}$$

11) Determinar los conjuntos de verdad de las siguientes expresiones

a) $\binom{7}{m^2-m} = \binom{7}{2m+1}$ b) $\binom{20}{m^2-10m} = \binom{20}{2m+1}$

c) $\binom{m+2}{4} + \binom{m+2}{5} = \binom{m+3}{5}$ d) $\binom{12}{x+2} + \binom{12}{x+1} = \binom{13}{x+2}$

e) $m.\binom{6}{5} + m.\binom{6}{4} = 280 - m.\binom{7}{6}$

1) Determinar los conjuntos de verdad de las siguientes expresiones

a) $\binom{7}{m^2-m} = \binom{7}{2m+1} \Leftrightarrow m^2 - m + 2m + 1 = 7 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow$ a= 1 ; b = 1 c = -6

$$x_{1,2} = \frac{-b \ \pm \sqrt{b^2 - 4\ .\ a\ .c}}{2.a}$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{-1 \ \pm \sqrt{1^2 - 4\ .\ 1\ .(-6)}}{2.1} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-1 \ \pm\sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-1 \ \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = -3 \notin \mathbb{N} \ \wedge \ m_2 = 2 \in \mathbb{N} \qquad \therefore \ \boldsymbol{m = 2}$$

O bien cuando los números combinatorios son iguales
m^2-m = 2m +1 resolvemos m^2 - 3 m -1 = 0 a = 1 b= -3 c= -1

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{+3 \ \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\ .\ 1\ .(-1)}}{2.1} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{3 \ \pm\sqrt{9+4}}{2} \Rightarrow \ \notin \mathbb{N}$$

b) $\binom{20}{m^2-10m} = \binom{20}{2m+1}$ $\Leftrightarrow$ por complementarios $m^2 - 10m + 2m + 1 = 20 \Rightarrow m^2 - 8m - 19 = 0$

$\Rightarrow$ a = 1 b = - 8 c= -19

$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\,.\,1.(-19)}}{2.1} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{8 \pm\sqrt{140}}{2} \Rightarrow \quad \notin \mathbb{N}$

O bien cuando los números combinatorios son iguales

$m^2 - 10m = 2m + 1$ resolvemos $m^2 - 12m - 1 = 0$ a = 1 b= -12 c= -1

$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{+12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\,.\,1.(-1)}}{2.1} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{3 \pm\sqrt{144+4}}{2} \Rightarrow \notin \mathbb{N}$ no tiene solución

c) $\binom{m+2}{4} + \binom{m+2}{5} = \binom{m+3}{5}$

Como $m, k \in \mathbb{N}_0$ y $k \leq m$

$m + 2 \geq 4 \;\wedge\; m + 2 \geq 5 \;\wedge\; m + 3 \geq 5$ despejando m, se obtiene:

$m \geq 2 \;\wedge\; m \geq 3 \;\wedge\; m \geq 2$ realizando la intersección, resulta

$m \geq 3$ es decir

El conjunto de verdad puede expresarse como: **$\{m \in \mathbb{N}_0 / m \geq 3\}$**

d) $\binom{12}{x+2} + \binom{12}{x+1} = \binom{13}{x+2}$

Como $m, k \in \mathbb{N}_0$ y $k \leq m$

Entonces:

$x + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 2 \leq 12$

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad \wedge \quad x + 2 \leq 12 \Rightarrow x \leq 10$

$x \geq -2 \quad \wedge \quad x \leq 10$

$x + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 1 \leq 12$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad \wedge \quad x + 1 \leq 12 \Rightarrow x \leq 11$

$x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 11$

$\therefore$ El conjunto de verdad puede expresarse como:

$$\{x \in \mathbb{N}_0 / -1 \leq x \leq 11\} \cap \{x \in \mathbb{N}_0 / -2 \leq x \leq 10\} = \{x \in \mathbb{N}_0 / -1 \leq x \leq 10\}$$

e) $m.\binom{6}{5} + m.\binom{6}{4} = 280 - m.\binom{7}{6}$

$6\underline{m} + 15m = 280 - 7m$

$21m = 280 - 7m$

$21m + 7m = 280$

$28\,m = 280$

$m = \frac{280}{28}$

$\therefore$ **$m = 10$**

C.A.

$\binom{6}{5} = \frac{6!}{(6-5)!\,5!} = \frac{6\ .\ 5!}{1!\ 5!} = 6$

(también por propiedad se puede resolver directamente)

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\,4!} = \frac{6\,.5\,.4!}{2!\ 4!} = 15$

$\binom{7}{6} = \frac{7!}{(7-6)!\,6!} = \frac{7\ .\ 6!}{1!\ 6!} = 7$

(también por propiedad se puede resolver directamente)

12) Desarrollar las potencias de los siguientes binomios

a) $(a^2x-3b)^5$ b) $\left(-2x+\frac{1}{2}x^2\right)^4$ c) $(2z+t^2)^6$

Desarrollar las siguientes potencias.

a.- $(a^2x-3b)^5 = \sum_{i=0}^{i=5}\binom{5}{i}(a^2x)^{5-i}(-3b)^i = \binom{5}{0}(a^2x)^5 + \binom{5}{1}(a^2x)^4.(-3b)^1 + \binom{5}{2}(a^2x)^3.(-3b)^2 + \binom{5}{3}(a^2x)^2.(-3b)^2 + \binom{5}{4}(a^2x)^1.(-3b)^4 + \binom{5}{5}.(-3b)^5 = 1\ (a^2x)^5 + 5\ (a^2x)^4(-3b)^1 + 10\ (a^2x)^3(-3b)^2 + 10\ (a^2x)^2(-3b)^3 + 5\ (a^2x)^1(-3b)^4 + 1\ (-3b)^5 = a^{10}x^5 - 5\ a^8x^4.\ 3b + 10\ a^6x^3.\ 3^2b^2 - 10\ a^4x^2.\ 3^3b^3 + 5\ a^2x^1.\ 3^4b^4 - 1\ .\ 3^5b^5 = a^{10}x^5 - 15\ a^8x^4.\ b + 90\ a^6x^3.\ b^2 - 270\ a^4x^2.b^3 + 405\ a^2x^1.\ b^4 - 243\ b^5$

b.- $\left(-2x+\frac{1}{2}x^2\right)^4 = \sum_{i=0}^{i=4}\binom{4}{i}(-2\ x)^{4-i}(\frac{1}{2}x^2)^i = \binom{4}{0}(-2\ x)^4 + \binom{4}{1}(-2\ x)^3.(\frac{1}{2}x^2)^1 + \binom{4}{2}(-2\ x)^2..(\frac{1}{2}x^2)^2 + \binom{4}{3}(-2\ x)^1..(\frac{1}{2}x^2)^3 + \binom{4}{4}(-2\ x)^0..(\frac{1}{2}x^2)^4$ $= 1\ (-2)^4.x^4 + 4\ (-2)^3.x^3.\left(\frac{1}{2}\right)^1(x^2)^1 + 6\ (-2)^2.x^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2(x^2)^2 + 4\ (-2)^1.x^1..\left(\frac{1}{2}\right)^3(x^2)^3 + 1\ (-2)^0.x^0\ .\left(\frac{1}{2}\right)^4(x^2)^4 = 1.16.x^4 - 4\ 8.x^3.\frac{1}{2}.x^2 + 6\ 4.x^2.\frac{1}{4}.x^4 - 4\ 2.x^1.\frac{1}{8}.x^6 + 1\ 1.1.\frac{1}{16}.x^8 = 16.x^4 - 16.x^5. + 6\ .x^6 - x^7. + \frac{1}{16}.x^8$

c.- $(2z+t^2)^6 = \sum_{i=0}^{i=6}\binom{6}{i}(2z)^{6-i}(t^2)^i = \binom{6}{0}(2z)^6 + \binom{6}{1}(2z)^5.(t^2)^1 + \binom{6}{2}(2z)^4.(t^2)^2 + \binom{6}{3}(2z)^3.(t^2)^3 + \binom{6}{4}(2z)^2.(t^2)^4 + \binom{6}{5}(2z)^1.(t^2)^5 + \binom{6}{6}.(t^2)^6 = 1\ 2^6.z^6 + 6\ 2^5.z^5.(t^2)^1 + 15\ 2^4.z^4(t^2)^2 + 20\ 2^3.z^3.(t^2)^3 + 15\ 2^2.z^2.(t^2)^4 + 6\ 2^1.z^1.(t^2)^5 + 1\ (t^2)^6 = 1\ 64.z^6 + 192.z^5.t^2 + 240.z^4.t^4 + 160.z^3.t^6 + 60.z^2.t^8 + 12.z^1.t^{10} + 1\ t^{12}$

.

13) Determinar él o los términos de:

a) Grado 14 en el desarrollo de $(2x^3y+3xy)^6$

b) Grado 29 en el desarrollo de $(x^4y^3-3xy^2)^7$

Grado 14 en el desarrollo de $(2x^3y+3xy)^6$

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

1 . Desarrollando el binomio para obtener todos los términos y ver cuál es el de grado 14:
$(2x^3y+3xy)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(2x^3y)^{6-k}.(3xy)^k = \binom{6}{0}(2x^3y)^6 + \binom{6}{1}(2x^3y)^5.(3xy) +$

$\binom{6}{2}(2x^3y)^4.(3xy)^2 + \binom{6}{3}(2x^3y)^3.(3xy)^3 + \binom{6}{4}(2x^3y)^2.(3xy)^4 + \binom{6}{5}(2x^3y).(3xy)^5 +$

$\binom{6}{6}(3xy)^6 = 64\,x^{18}y^6 + 576\,x^{16}y^6 + 2160\,x^{14}y^6 + 4320\,x^{12}y^6 + 4860\,x^{10}y^6 +$

$\underbrace{2916\,x^8y^6}_{\text{Término de grado 14}} + 729\,x^6y^6$

Otra forma de obtener el termino pedido sin tener que desarrollar todo el binomio:
$(2x^3y + 3xy)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(2x^3y)^{6-k}.(3xy)^k$

1°) Trabajamos con el argumento de la sumatoria de la definición del binomio, sin considerar el número combinatorio, y resolvemos:

$(2x^3y)^{6-k}.(3xy)^k = 2^{6-k}\ x^{18-3k}\ y^{6-k}\ 3^k\ x^k\ y^k = 2^{6-k}\ x^{18-3k+k}\ y^{6-k+k}\ 3^k$

2°) Como el grado del término está dado por la suma de los exponentes de las variables, sumamos los exponentes de las variables e igualamos a 14. Luego, despejamos k:

$18 - 3k + 6 - \cancel{k} + k \cancel{+k} = 14 \Rightarrow 24 + 2k = 14 \Rightarrow k = \frac{14-24}{-2} \Rightarrow \mathbf{k = 5}$

Luego, el término de grado 14 es el término con k=5

3°) Para obtener el coeficiente, sólo debo desarrollar ese término y no todo el binomio:

$\binom{6}{5}(2x^3y).(3xy)^5 = 6.\ 2x^3y\ 243\ x^5y^5 = \underbrace{\mathbf{2916\,x^8y^6}}_{\text{Término de grado 14}}$

b) Obtener el Grado 29 en el desarrollo de $(x^4y^3 - 3xy^2)^7$

$$(x^4y^3 - 3xy^2)^7 = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(x^4y^3)^{7-k}.(-3xy^2)^k$$

Utilizaremos la forma directa para resolverlo

1°) $(x^4\ y^3)^{7-k}.(-3xy^2)^k = x^{28-4k}y^{21-3k} - 3^k\ x^k\ y^{2k} = x^{28-4k+k}\ \ y^{21-3k+2k}\ (-3)^k$

2°) 28 – 4k +21 – 3k +k + 2k = 29 ⇒ 28k – 4k +21 – 3k +3k ≠ 29 ⇏ 49 – 4k = 29 ⇒

k = $\frac{29-49}{-4}$ ⇒ **k = 5**

Luego, el término de grado 29 es el término con k=5

3°) $\binom{7}{5}(x^4y^3)^{7-5}.(-3xy^2)^5 = \binom{7}{5}\ (x^4\ y^3)^2.(-3xy^2)^5$ = 21 $x^8\ y^6$ (– 243) x^5y^{10} =

$$\underbrace{\boldsymbol{-5103\ x^{13}y^{16}}}_{\text{Término de grado 29}}$$