Apostila de Matemática Básica

Assunto:

MATEMÁTICA BÁSICA

Coleção Fundamental - volume 7/8

Autor:

Prof. Paulo Cesar Pfaltzgraff Ferreira

Unidade 2

Somatórios, Produtórios e uma Introdução às Medidas de Posição:

2.1. Introdução aos Somatórios

Muitas vezes precisamos escrever expressões que envolvem somas com um grande número de parcelas e, para facilitar, vamos intoduzir o conceito de somatório ou, como preferem alguns autores, a notação sigma. Tal notação envolve o uso do símbolo **Σ** , que é a letra sigma maiúscula do alfabeto grego, e corresponde ao nosso **S**, que é a primeira letra da palavra “Soma”,é claro!

Tal notação é bastante útil para o Cálculo Integral, Estatística, Telecomunicações, Informática[4], etc.

Por exemplo, a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

<u>com n termos (parcelas)</u>, pode ser sintetizada por meio do conceito de <u>somatório</u>. Simbolizaremos por $\boldsymbol{a_i}$ o ***i***-ésimo termo da soma, pois, a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo, a_3, o terceiro, e daí por diante até chegarmos a a_n. Temos então:

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i$$

e convém ressaltar as seguintes partes:

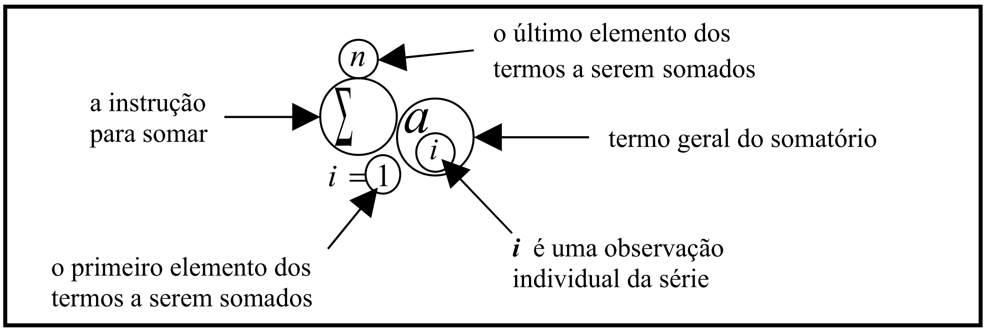


Fig. 2.1

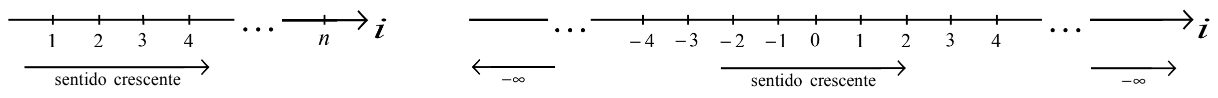
Temos também que $i = 1$ é o <u>limite inferior</u>, $i = n$ é o <u>limite superior</u>, sendo “i” o índice do somatório, e lê-se: “Somatório de a_i, para ***i*** variando de 1 a ***n***”.

Não é absolutamente necessário, conforme veremos nos exemplos subsequentes, que ***i*** se restrinja sempre ao intervalo $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$ (ilustração 1-a). Na realidade podemos ter $-\infty < \boldsymbol{i} < +$

[4] Vide seção 2.1 (Base Teórica da Comunicação de Dados), equação 2.1 do livro Redes de Computadores, de Andrew S. Tanenbaun, publicado pela Editora Campus.

∞ (ilustração 1-b), mas ***i*** deve assumir sempre valores inteiros e variar de um em um no sentido crescente.

- **ILUSTRAÇÃO 2.1**



(a) (b)

Convém também ressaltar que ***i*** é um "símbolo mudo", pois qualquer outra letra pode ser usada para este propósito. Alguns exemplos da notação sigma são dados na ilustração a seguir:

- **ILUSTRAÇÃO 2.2**

(a)	$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$
(b)	$\sum_{i=-2}^{3} (3i+2) = [3(-2)+2] + [3(-1)+2] + [3(0)+2] +$ $+ [3(1)+2] + [3(2)+2] + [3(3)+2] = (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8 + 11$
(c)	$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
(d)	$\sum_{k=2}^{8} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

2.2. Definição Formal de Somatório

Expandindo as considerações iniciais temos então :

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n-1) + F(n) \quad (1)$$

onde ***F(i)*** , que é a função geradora do somatório, é uma função da variável ***i*** (ou de outra que seja escolhida), ***m*** e ***n*** são números inteiros, sendo $m \le n$, e ***i*** varia de um em um, desde o valor ***m*** até o valor ***n***.

O lado direito de (1) consiste na soma de $n - m + 1$ termos , o primeiro dos mesmos sendo obtido substituindo-se ***i*** por ***m*** em ***F(i)*** , o segundo substituindo-se ***i*** por $m+1$ em ***F(i)***, e assim sucessivamente, até que o último termo seja obtido substituindo-se ***i*** por ***n*** em ***F(i)***. É fácil de se concluir que o número ***m*** é o limite inferior da soma, ***n*** é o limite superior, e a função ***F(i)*** é o termo geral, sendo ***i*** sua variável. Embora já tenha sido dito, e a ilustração (2) seja bem

clara, nunca é demais relembrar que i é um "símbolo mudo", pois qualquer outra letra pode ser empregada para este fim.
Por exemplo,

$$\sum_{i=2}^{6} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

é equivalente a

$$\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

A ilustração seguinte evidencia mais algumas aplicações do conceito de somatório :

- **Ilustração 2.3**

(a) $\sum_{i=1}^{50} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{50}$

(b) $\sum_{k=2}^{6} x_k y_k = x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5 + x_6 y_6$

(c) $\sum_{j=1}^{500} (x_j - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{500} - \bar{x})^2$,sendo $\bar{x} = constante$

(d) $\sum_{i=-5}^{20} i = (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 20$

(e) $\sum_{k=0}^{2} \frac{2k+1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3}$

(f) $\sum_{i=3}^{6} \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1} = \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \frac{36}{7}$

e de modo inverso,

(g) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2002 = \sum_{i=1}^{1001} (2i)$ ou $\sum_{i=0}^{1000} (2i+2)$ ou $\sum_{i=2}^{1002} (2i-2)$

(h) $1 + 3 + 5 + \cdots + 101 = \sum_{i=0}^{50} (2i+1)$ ou $\sum_{i=1}^{51} (2i-1)$ ou $\sum_{i=2}^{52} (2i-3)$

Também já vimos que os termos da soma podem envolver subíndices, porém a **ilustração 4** a seguir ajudará a sedimentar tal fato, até porque podemos ter também expoentes.

- **Ilustração 2.4**

(a) $\sum_{k=4}^{10} kb_k = 4b_4 + 5b_5 + \cdots + 10b_{10}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n$

e também de modo inverso,

(c) $a_1 b^2 + a_2 b^3 + \cdots + a_n b^{n+1} = \sum_{j=1}^{n} a_j b^{j+1}$

2.3. Propriedades dos Somatórios

Propriedade (a): distributiva com relação à adição

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i)+G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i) \qquad (2)$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i)+G(i)] = F(1)+G(1)+F(2)+G(2)+\cdots+$$
$$+F(n)+G(n) = [F(1)+F(2)+\cdots+F(n)]+$$
$$+[G(1)+G(2)+\cdots+G(n)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i)$$

Esta propriedade pode ser estendida à soma de um número qualquer de funções.

Propriedade (b): distributiva com relação à subtração

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i)-G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) - \sum_{i=1}^{n} G(i) \qquad (3)$$

A demonstração é análoga à anterior.

Propriedade (c):

$$\sum_{i=1}^{n} KF(i) = K\sum_{i=1}^{n} F(i)\text{, sendo } K = constante \qquad (4)$$

Demonstração :

$$\sum_{i=1}^{n} KF(i) = KF(1) + KF(2) + \cdots + KF(n) =$$
$$= K\left[F(1) + F(2) + \cdots + F(n)\right] = K\sum_{i=1}^{n} F(i)$$

Propriedade (d):

$$\sum_{i=1}^{n} K = nK \text{ , sendo } K = constante \qquad (5)$$

Demonstração:

Temos que :

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \underbrace{F(1) + F(2) + \cdots + F(n)}_{n\ termos}$$

Fazendo ***F(i)*** = ***K*** obtemos:

$$F(1) = F(2) = \cdots = F(n) = K$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{i=1}^{n} K = \underbrace{K + K + \cdots + K}_{\text{n termos}} = nK$$

A propriedade (d) pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser necessariamente 1, ou seja:

Propriedade (e):

$$\sum_{i=m}^{n} K = (n - m + 1)K \text{ , sendo } K = constante \qquad (6)$$

Demonstração:

Fazendo ***F(i)*** = **K** em **(1)** obtemos:

$$F(m) = F(m+1) = \cdots = F(n) = K$$

e

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{i=m}^{n} K = \underbrace{K + K + \cdots + K}_{\text{n-m+1 termos}} = (n - m + 1)K$$

A seguir continuaremos a apresentar uma série de propriedades cujas demonstrações ficarão a cargo do estudante como forma de exercitação.

Propriedade (f):

$$\left[\sum_{i=1}^{n} F(i)\right]^2 \neq \sum_{i=1}^{n} [F(i)]^2 \qquad (7)$$

Propriedade (g):

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) \sum_{i=1}^{n} G(i) \neq \sum_{i=1}^{n} F(i)G(i) \qquad (8)$$

Propriedade (h):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F(i)}{G(i)} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} F(i)}{\sum_{i=1}^{n} G(i)} \qquad (9)$$

Propriedade (i): se n é um inteiro positivo então

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} \qquad (13)$$

EXEMPLO 2.1

Escreva os termos de $\sum_{i=1}^{5}(2i+3)$ e ache a soma.

Solução:

Temos que:

$$\sum_{i=1}^{5}(2i+3) = \underbrace{5+7+9+11+13}_{\substack{\text{progressão aritmética} \\ \text{de razão 2 e 5 termos}}} = 45$$

Aliás, o valor acima poderia ter sido obtido sem que fosse necessário somar todas as parcelas; bastando observar que as mesmas constituem uma progressão aritmética, e que para tal tipo de sucessão a soma dos termos é dada pela fórmula: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Logo,

$$S_5 = \frac{(5+13)\times 5}{2} = 45$$

Uma alternativa de solução é utilizando, primeiramente, a propriedade (a):

$$\sum_{i=1}^{5}(2i+3) = 2\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} 3 =$$

A primeira parcela é trivial, e a segunda pode ser determinada por meio propriedade (d), ou seja :

$$= 2\ \underbrace{(1+2+3+4+5)}_{=\frac{(1+5)\times 5}{2}\ \text{(P.A. de razão 1)}} + 5\times 3 = 30 + 15 = 45$$

EXEMPLO 2.2

Sendo $x = \{\ 7, 3, 9, 5, 6\ \}$ calcular $\sum_{i=1}^{5} x_i$.

Solução:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7+3+9+5+6 = 30$$

EXEMPLO 2.3

Calcule os somatórios a seguir escrevendo as parcelas e determinando a soma. Verificar os resultados por meio das equações de (10) a (13).

(a) $\sum_{i=1}^{4} i$; (b) $\sum_{i=1}^{4} i^2$; (c) $\sum_{i=1}^{4} i^3$; (d) $\sum_{i=1}^{4} i^4$

Solução:

(a) $\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$

Da fórmula (10), com $n = 4$,

$$\sum_{i=1}^{4} i = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{(4\times 5)}{2} = 10$$

(b) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

Da fórmula (11) , com $n = 4$,

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \frac{4(4+1)(8+1)}{6} = \frac{4\times 5\times 9}{6} = 30$$

(c) $\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$

Da fórmula (12) , com $n = 4$,

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = \frac{4^2(4+1)^2}{4} = \frac{16\times 25}{4} = 100$$

(d) $\sum_{i=1}^{4} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$

Da fórmula (13), com $n = 4$

$$\sum_{i=1}^{4} i^4 = \frac{4(4+1)(6\times 4^3 + 9\times 4^2 - 4 + 1)}{30} = \frac{4\times 5\times 531}{30} = 354$$

EXEMPLO 2.4

Calcule $\sum_{i=1}^{n} (12i^2 - 2i + 5)$

Solução:

Pela propriedade (a) temos:

$$\sum_{i=1}^{n} (12i^2 - 2i + 5) = \sum_{i=1}^{n} 12i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 5 =$$

Pela propriedade (c),

$$= 12\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 5 =$$

Utilizando as equações (11) e (10) e a propriedade (d),

$$=\frac{12\,n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{2n(n+1)}{2}+5n=$$
$$=4n^3+6n^2+2n-n^2-n+5n=$$
$$=4n^3+5n^2+6n$$

EXEMPLO 2.5

Simplifique o seguinte somatório:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[50+300\left(1+\frac{i-1}{n}\right)^2\right]$$

Solução:

Aplicando as propriedades (a) e (c) e rearranjando o que está dentro do parênteses, obtemos :

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}50+\frac{300}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+i-1)^2}{n^2}=$$

Aplicando a propriedade (d) as primeiro somatório, a propriedade (c) ao segundo somatório e desenvolvendo no mesmo o quadrado, temos :

$$=\frac{1}{n}(50n)+\frac{300}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(n^2+i^2+1+2ni-2n-2i)=$$

Aplicando mais uma vez a propriedade (a) segue-se que :

$$=50+\frac{300}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}(2n-2)i+\sum_{i=1}^{n}(n^2-2n+1)\right]=$$

Aplicando a propriedade (c) ao segundo somatório e a propriedade (d) ao terceiro, vem que:

$$=50+\frac{300}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n}i^2+(2n-2)\sum_{i=1}^{n}i+(n^2-2n+1)n\right]=$$

Aplicando a fórmula (11) ao primeiro somatório, a fórmula (10) ao segundo, temos:

$$= 50 + \frac{300}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2(n-1)n(n+1)}{2} + (n^2 - 2n + 1)n\right] =$$

$$= 50 + \frac{300}{n^3}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + n^3 - n + n^3 - 2n^2 + n\right] =$$

$$= 50 + \frac{300}{n^3}\left[\frac{7}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right] = 50 + 700 - \frac{450}{n} + \frac{50}{n^2} =$$

$$= 750 - \frac{450}{n} + \frac{50}{n^2}$$

EXEMPLO 2.6

Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{70} x_i = 700$ e que $\sum_{i=2}^{69} x_i = 680$, calcular 10 % de $(x_1 + x_{70})$.

Solução:

Temos que :

$$\sum_{i=1}^{70} x_i = x_1 + \underbrace{x_2 + \cdots + x_{69}}_{\sum_{i=2}^{69} x_i = 680} + x_{70} = 700$$

e então,

$$x_1 + 680 + x_{70} = 700$$

donde,

$$x_1 + x_{70} = 700 - 680 = 20$$

Assim sendo, 10% de $(x_1 + x_{70})$ = 10% de 20 = 2

EXEMPLO 2.7

Determine o valor do "n" inteiro para que $\sum_{i=1}^{n}(3i+1) = 3150$.

Solução:

Temos que :

$$\sum_{i=1}^{n}(3i+1) = \underbrace{4 + 7 + 10 + \cdots + (3n+1)}_{\substack{\text{progressão aritmética de} \\ \text{razão 3 e n termos}}} = 3150$$

Lembrando, mais uma vez, que para tal progressão $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, segue-se:

$$\frac{(4+3n+1)n}{2} = 3150$$

Desenvolvendo obtemos:

$$3n^2 + 5n - 6300 = 0$$

Lembrando que para a equação

$$an^2 + bn + c = 0\,,\ n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{, obtemos:}$$

$$n' = 45 \ \text{ e } \ n'' = -\frac{140}{3}$$

Uma vez que o número de termos deve ser inteiro e positivo temos: $n = 45$

2.4. Somatório Duplo

Acontece com freqüência, na apresentação de dados estatísticos , o emprego de tabelas de dupla entrada, nas quais os valores são expressos em função de duas variáveis: uma variável linha e uma variável coluna.

Desta maneira podemos representar: <u>estado civil</u> (solteiro, casado, outros) x <u>sexo</u> (masculino e feminino), <u>faixas etárias</u> $\times$ <u>rendas</u> , <u>componentes</u> $\times$ <u>modelos</u> , etc.

Assim, a indicação da soma dos elementos das tabelas de dupla entrada pode ser feita mediante o emprego do somatório duplo.

Seja então a_{ij} um elemento genérico pertinente à ***i***-ésima linha e à ***j***-ésima coluna da tabela a seguir :

$i \backslash j$	1	2	3	...	n
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	a_{3n}
⋮					
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}

1

2

3

- **Ilustração 2.5**

(a)	$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{3n}+$ $+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$ (soma de todos os termos interiores ao retângulo **1**)
(b)	$a_{33}^2+a_{34}^2+\cdots+a_{3n}^2+\cdots+a_{m3}^2+\cdots+a_{mn}^2=\sum_{i=3}^{m}\sum_{j=3}^{n}a_{ij}^2$ (soma dos quadrados dos termos interiores ao retângulo **2**)
(c)	$a_{13}+a_{23}+a_{33}+\cdots+a_{m3}=\sum_{i=1}^{m}a_{i3}$ (soma dos termos interiores ao retângulo **3**)

EXEMPLO 2.8

Temos que a_{ij} representa o elemento sujeito à i-ésima linha e à j-ésima coluna da tabela:

i \ j	1	2	3	4
1	6	-3	0	-1
2	2	1	5	3
3	1	4	2	5

Calcular:

(a) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=$$
$$=6+(-3)+0+(-1)+2+1+5+3+1+4+2+5=25$$

(b) $$\sum_{j=1}^{4}a_{3j}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}=1+4+2+5=12$$

(c) $$\sum_{i=1}^{3}a_{i4}=a_{14}+a_{24}+a_{34}=(-1)+3+5=7$$

(d) $$\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=3}^{4}a_{ij}^3=a_{23}^3+a_{24}^3+a_{33}^3+a_{34}^3=5^3+3^3+2^3+5^3=285$$

(e) $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}-1)^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}^2-2a_{ij}+1)=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}^2-2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}1=$$

$$=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+a_{31}^2+$$

$$+a_{32}^2+a_{33}^2+a_{34}^2-2(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{21}+a_{22}+$$

$$+a_{23}+a_{24}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34})+(3)(4)(1)=$$

$$=6^2+(-3)^2+0^2+(-1)^2+2^2+1^2+5^2+3^2+1^2+4^2+2^2$$

$$+5^2-2[6+(-3)+0+(-1)+2+1+5+3+1+4+2+5]+12=$$

$$=131-2(25)+12=93$$

2.5. Propriedade dos Somatórios Duplos

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}F(i)G(j)=\sum_{i=1}^{m}F(i)\sum_{j=1}^{n}G(j)} \qquad (14)$$

Demonstração:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}F(i)G(j)=\sum_{i=1}^{m}[F(i)G(1)+F(i)G(2)+\cdots+F(i)G(n)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}F(i)[G(1)+G(2)+\cdots+G(n)]=$$

$$=[F(1)+F(2)+\cdots+F(m)][G(1)+G(2)+\cdots+G(n)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}F(i)\sum_{j=1}^{n}G(j)$$

EXEMPLO 2.9

Calcular o somatório $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(2i)(3+j)$.

Solução:

i \ j	1	2	3
1	$a_{11}=2\times4=8$	$a_{12}=2\times5=10$	$a_{13}=2\times6=12$
2	$a_{21}=4\times4=16$	$a_{22}=4\times5=20$	$a_{23}=4\times6=24$

Assim sendo,

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(2i)(3+j)=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}=8+10+12+16+20+24=90$$

Alternativamente, aplicando-se a propriedade dos somatórios duplos obtemos:

$$\sum_{i=1}^{2}(2i)\sum_{j=1}^{3}(3+j)=(2+4)(4+5+6)=6\times 15=90$$

o que é bem mais fácil, é claro!

2.6. Exercícios Propostos sobre Somatórios

(1) Escreva as somas abaixo utilizando a notação de somatório:

(a) $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

(b) $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_k-\bar{x})$, sendo $\bar{x}$ = *constante*.

(c) $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_{30}}$

(d) $\frac{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$

(e) $6+9+12+\cdots+300$

(f) $a_0b^2+a_1b^3+a_2b^4+\cdots+a_nb^{n+2}$

(g) $(x_1+2)^2+(x_2+2)^2+(x_3+2)^2+(x_4+2)^2$

(h) $m_1(y_1-b)^2+m_2(y_2-b)^2+\cdots+m_{10}(y_{10}-b)^2$

(i) $\left(\frac{x_1}{y_1}-4\right)^3+\left(\frac{x_2}{y_2}-4\right)^3+\cdots+\left(\frac{x_{15}}{y_{15}}-4\right)^3$

(j) $(4x_1-2y_1)+(4x_2-2y_2)+\cdots+(4x_n-2y_n)$

(2) Desenvolva os somatórios e efetue as simplificações:

(a) $\sum_{i=2}^{6}(3i-1)$

(b) $\sum_{i=1}^{6}(3i-2)$

(c) $\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1+i}{2}\right)$

(d) $\sum_{i=1}^{7}(i+1)^2$

(e) $\sum_{i=2}^{5}\left(\frac{i}{i-1}\right)$

(f) $\sum_{j=3}^{6}\left(\frac{2}{j(j-2)}\right)$

(g) $\sum_{i=-2}^{3}2^i$

(h) $\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{1}{1+i^2}\right)$

(i) $\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

(j) $\sum_{k=-2}^{3}\left(\frac{k}{k+3}\right)$

(l) $\sum_{j=2}^{11}K$, sendo K = constante

(m) $\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})$

(n) $\sum_{i=3}^{100}i-\sum_{i=5}^{100}i$

(3) Sendo x = {7, 3, 9, 5, 6} e y = {3, 2, 8, 1, 1} calcular:

(a) $\sum_{i=1}^{5} y_i$

(b) $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$

(c) $\sum_{i=1}^{5} y_i^2$

(d) $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i$

(e) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 2)$

(f) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i)$

(g) $\sum_{i=1}^{5} (x_i - 2)$

(h) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 1)(y_i - 3)$

(i) $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 2)^2$

(j) $\dfrac{\sum_{i=1}^{5} (x_i + 4)}{\sum_{i=1}^{5} (y_i + 4)}$

(l) $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{(x_i + 4)}{(y_i + 4)}$

(m) $\sum_{i=1}^{5} (x_i - y_i)$

(n) $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{x_i}{y_i}$

(o) $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{y_i}{x_i}$

(4) Sendo $x = \{10, 12, 15, 9, 7\}$ e $y = \{2, 1, 3, 7, 4\}$ verifique a expressão (2).

(5) Sendo $x = \{13, 10, 9, 3\}$ e $y = \{15, 8, 10, 4\}$ verifique a expressão (3).

(6) Sendo $x = \{4, 5, 2, 3, 7\}$ e $K = 3$ verifique a expressão (4).

(7) Utilizando a expressão (5), calcule $\sum_{i=1}^{5} K$ sendo $K = 10$

(8) Utilizando a expressão (6), calcule $\sum_{i=5}^{11} K$ sendo $K = 2$.

(9) Sendo $x = \{7, 6, 2\}$ verifique a expressão (7).

(10) Sendo $x = \{3, 5, 7, 9\}$ e $y = \{2, 1, 8, 10\}$ verifique a expressão (8).

(11) Sendo $x = \{6, 8, 10, 14\}$ e $y = \{3, 4, 5, 7\}$ verifique a expressão (9).

(12) Calcule os seguintes somatórios:

(a) $\sum_{i=1}^{30} (i^2 + 3i + 1)$

(e) $\sum_{i=1}^{n} (i^3 + i + 5)$

(b) $\sum_{i=1}^{40}(2i^2-4i+1)$

(c) $\sum_{i=1}^{25}[2i(i-1)]$

(d) $\sum_{i=1}^{20}[3i(i^2+2)]$

(f) $\sum_{i=1}^{n}(4i^2-3i-5)$

(g) $\sum_{i=1}^{n}[4i^2(i-2)]$

(h) $\sum_{i=1}^{n}[2i(1+i^2)]$

(13) Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{80} x_i = 800$ e que $\sum_{i=2}^{79} x_i = 780$, calcular 20% de $x_1 + x_{80}$.

(14) Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{20} 2F(i) = 30$, determinar $\sum_{i=1}^{20}[3F(i)+2]$.

(15) Determinar o valor do inteiro "n" para que $\sum_{i=1}^{n}(3i+1) = 5550$.

(16) Seja a_{ij} um elemento genérico sujeito à i-ésima linha à j-ésima coluna da tabela a seguir:

i \ j	1	2	3
1	4	1	-1
2	3	2	-2
3	-1	4	0
4	0	3	4

(A) Quais são os elementos a_{22}, a_{32}, a_{13}, a_{31}, a_{43}^2 ?

(B) Calcular:

(a) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$

(b) $\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{3} a_{ij}$

(c) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$

(d) $\sum_{i=1}^{4} a_{i3}$

(e) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2$

(f) $\sum_{i=1}^{4}(a_{i2}+1)^2$

(g) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}+2)^2$

(h) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} 3a_{ij}$

(i) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}+4)$

(17) O elemento a_{ij} representa o número de pessoas que estão sujeitas à i-ésima faixa etária e à j-ésima faixa de renda.

Idade (anos) / Rendas (R$ mil)	1 $18 \vdash 24$	2 $24 \vdash 30$	3 $30 \vdash 36$	4 $36 \vdash 42$	5 $42 \vdash 48$

1	8 ├─ 18	18	10	5	4	1
2	18 ├─ 28	12	8	4	3	5
3	28 ├─ 38	10	9	8	7	8
4	38 ├─ 48	7	7	10	15	10
5	48 ├─ 58	5	8	13	12	15
6	58 ├─ 128	3	10	15	18	20

(A) Calcular:

(a) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ (b) $\sum_{i=1}^{6} a_{i3}$ (c) $\sum_{j=1}^{5} a_{2j}$

(d) $\sum_{i=3}^{6}\sum_{j=2}^{5} a_{ij}$ (e) $\sum_{i=1}^{6}(a_{i4}-1)$ (f) $\sum_{j=1}^{5} 2a_{3j}$

(g) $\left[\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\right]^2$ (h) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{5}(a_{ij}+2)$ (i) $\sum_{i=1}^{4}\left[\frac{\left(\sum_{j=1}^{5} a_{ij}\right)^2}{5}\right]$

(B) (a) Escreva simbolicamente a soma dos elementos com renda maior ou igual a R$28000,00 e que tenham idade maior ou igual a 30 anos.

(b) Escreva simbolicamente a soma dos elementos com renda na faixa 48 ├─ 58.

(c) Escreva simbolicamente a soma dos elementos que estão na faixa etária 36 ├─ 42.

(18) Calcular

(a) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} i^2 2^j$ (b) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$

(19) Sendo $x = \{2, 3\}$ e $j = \{4, 7, 9\}$ verifique a expressão (14).

2.7. Respostas dos Exercícios Propostos sobre Somatórios

(1) (a) $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ (b) $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})$ (c) $\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{y_i}$ (d) $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

(e) $\sum_{i=2}^{100} 3i$ ou (f) $\sum_{i=0}^{n} a_i b^{i+2}$ (g) $\sum_{i=1}^{4}(x_i+2)^2$ (h) $\sum_{i=1}^{10} m_i (y_i - b)^2$

$\sum_{i=1}^{99}(3i+3)$

(i) $\sum_{i=1}^{15}\left(\frac{x_i}{y_i}-4\right)^3$ (j) $\sum_{i=1}^{n}(4x_i-2y_i)$

(2) (a) 55 (b) 51 (c) 7 (d) 203
(e) $\frac{73}{12}\cong 6{,}08$ (f) $\frac{17}{15}\cong 1{,}13$ (g) $\frac{63}{4}=15{,}75$ (h) $\frac{9}{5}=1{,}8$
(i) $\frac{7}{12}\cong 0{,}58$ (j) $-\frac{81}{60}=-1{,}35$ (l) $10K$ (m) a_n-a_0
(n) 7

(3) (a) 15 (b) 200 (c) 79 (d) 110
(e) 40 (f) 45 (g) 20 (h) 20
(i) 340 (j) $\frac{10}{7}\cong 1{,}43$ (l) $\frac{3201}{420}\cong 7{,}62$ (m) 15
(n) $\frac{383}{24}\cong 15{,}96$ (o) $\frac{1481}{630}\cong 2{,}35$

(4) $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{5}x_i+\sum_{i=1}^{5}y_i=70$

(5) $\sum_{i=1}^{4}(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{4}x_i-\sum_{i=1}^{4}y_i=-2$

(6) $\sum_{i=1}^{5}Kx_i=K\sum_{i=1}^{5}x_i=63$

(7) 50

(8) 14

(9) $\left[\sum_{i=1}^{3}x_i\right]^2=225\neq\sum_{i=1}^{3}x_i^2=89$

(10) $\sum_{i=1}^{4}x_i\sum_{i=1}^{4}y_i=504\neq\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=157$

(11) $\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{y_i}=8\neq\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i}{\sum_{i=1}^{4}y_i}=2$

(12) (a) 10.880 (b) 41.040 (c) 10.400

(d) 133.560 (e) $\dfrac{n^4+2n^3+3n^2+22n}{4}$; (f) $\dfrac{8n^3+3n^2-35n}{6}$;

(g) $\dfrac{3n^4-2n^3-9n^2-4n}{3}$; (h) $\dfrac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{2}$

(13) 4

(14) 85

(15) 60

(16) (A) 2; 4; -1; -1; 16
(B) (a) 17; (b) 11; (c) 3; (d) 1; (e) 77; (f) 54; (g) 193; (h) 51; (i) 65

(17) (A) (a) 280; (b) 55; (c) 32; (d) 185; (e) 53;
(f) 84; (g) 78.400; (h) 340; (i) $\dfrac{13.798}{5}$

(B) (a) $\sum_{i=3}^{6}\sum_{j=3}^{5} a_{ij}$; (b) $\sum_{j=1}^{5} a_{5j}$; (c) $\sum_{j=1}^{6} a_{i4}$

(18) (a) 330; (b) $\left[\dfrac{(1+n)n}{2}\right]^2$

(19) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_i = \sum_{i=1}^{2} x_i \sum_{j=1}^{3} y_i = 100$

2.8. Introdução aos Produtórios

Analogamente ao que foi visto no somatório, o qual representa a soma de termos, pode se fazer necessária a representação do produto de termos de uma sucessão.

O produto

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$$

com n termos (fatores) pode ser sintetizado por meio do conceito de produtório. Temos então:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

e é interessante ressaltar as partes principais:

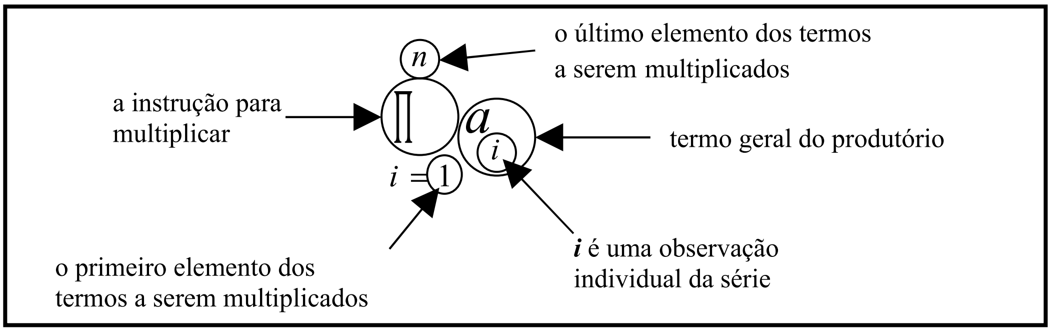


Fig. 2.2

O símbolo **Π** é a letra grega pi maiúscula, e corresponde ao nosso **P**, sendo esta a primeira letra da palavra PRODUTO.

- **ILUSTRAÇÃO 2.6**

(a)	$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times \cdots \times 42 = \prod_{i=1}^{21} (2i)$ ou $\prod_{i=0}^{20} (2i+2)$ ou $\prod_{i=2}^{22} (2i-2)$
(b)	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 50 = \prod_{k=1}^{50} k$ ou $\prod_{k=2}^{51} (k-1)$ ou $\prod_{k=0}^{49} (k+1)$
(c)	$(-10) \times (-9) \times (-8) \times \cdots \times 70 \times 71 = \prod_{j=-10}^{71} j$ ou $\prod_{j=-9}^{72} (j-1)$ ou $\prod_{j=-11}^{70} (j+1)$

e devemos reparar que, do mesmo modo que no somatório, não é necessário que o índice inferior seja 1.

2.9. Definição Formal de Produtório

Dando seqüência aos conceitos podemos escrever:

$$\prod_{i=m}^{n} F(i) = F(m) \times F(m+1) \times F(m+2) \times \cdots \times F(n-1) \times F(n) \qquad (15)$$

onde ***F(i)*** é uma função da variável ***i*** (ou de outra que seja escolhida), ***m*** e ***n*** são números inteiros, sendo $m \leq n$, e ***i*** varia de um em um, desde o valor ***m*** até o valor ***n***.

O lado direito de (15) consiste no produto de $n-m+1$ termos, o primeiro dos mesmos sendo obtido substituindo-se ***i*** por ***m*** em ***F(i)***, o segundo substituindo-se ***i*** por $m+1$ em ***F(i)***, e assim por diante, até obter-se o último termo substituindo-se ***i*** por ***n*** em ***F(i)***. Logicamente ***F(i)*** é o termo geral, sendo ***i*** a variável escolhida, que pode ser também qualquer outra conforme aparece na ilustração 6.

2.10. Propriedades dos Produtórios

Propriedade (a):

$$\prod_{i=1}^{n} KF(i) = K^n \prod_{i=1}^{n} F(i), \text{ sendo } K = \textit{constante} \qquad (16)$$

Demonstração:

$$\prod_{i=1}^{n} KF(i) = \underbrace{KF(1) \times KF(2) \times \cdots \times KF(n)}_{n\ termos} =$$

$$= K^n \left[F(1) \times F(2) \times \cdots \times F(n) \right] = K^n \prod_{i=1}^{n} F(i)$$

Esta propriedade pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser necessariamente 1, ou seja:

Propriedade (b):

$$\prod_{i=m}^{n} KF(i) = K^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} F(i), \text{ sendo } K = \textit{constante} \qquad (17)$$

Demonstração:

$$\prod_{i=m}^{n} KF(i) = \underbrace{KF(m) \times KF(m+1) \times \cdots \times KF(n)}_{\text{n-m+1 termos}} =$$

$$= K^{n-m+1} \left[F(m) \times F(m+1) \times \cdots \times F(n) \right] =$$

$$= K^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} F(i)$$

Propriedade (c):

$$\prod_{i=1}^{n} K = K^{n} \text{, sendo } K = constante \qquad (18)$$

Demonstração:

Temos que:

$$\prod_{i=1}^{n} F(i) = \underbrace{F(1) \times F(2) \times \cdots \times F(n)}_{n-m+1 \text{ termos}}$$

Fazendo $F(i) = K$ obtemos:

$F(1) = F(2) = \cdots = F(n) = K$

e

$$\prod_{i=1}^{n} F(i) = \prod_{i=1}^{n} K = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{\text{n termos}} = K^{n}$$

Esta propriedade também pode ser estendida para o caso do limite inferior não ser 1.

Propriedade (d):

$$\prod_{i=m}^{n} K = K^{n-m+1} \text{, sendo } K = \text{constante} \qquad (19)$$

Demonstração:

Fazendo $F(i) = K$ em (15) obtemos:

$F(m) = F(m+1) = \cdots = F(n) = K$

e

$$\prod_{i=m}^{n} F(i) = \prod_{i=m}^{n} K = \underbrace{K \times K \times \cdots \times K}_{n-m+1 \text{ termos}} = K^{n-m+1}$$

Propriedade (e):

$$\prod_{i=1}^{n} [F(i) \times G(i)] = \left[\prod_{i=1}^{n} F(i)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{n} G(i)\right] \qquad (20)$$

Demonstração:

$$\prod_{i=1}^{n}[F(i)\times G(i)] = F(1)\times G(1)\times F(2)\times G(2)\times\cdots\times F(n)\times G(n) =$$
$$= [F(1)\times F(2)\times\cdots\times F(n)]\times[G(1)\times G(2)\times\cdots\times G(n)] =$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{n}F(i)\right]\times\left[\prod_{i=1}^{n}G(i)\right]$$

EXEMPLO 2.10

Desenvolver os seguintes produtórios:

(a) $\prod_{\boldsymbol{i}=0}^{10}(\boldsymbol{i}+1)$

(b) $\prod_{\boldsymbol{j}=2}^{6}(\boldsymbol{j}^{j-2})$

Solução:

(a) $\prod_{\boldsymbol{i}=0}^{10}(\boldsymbol{i}+1) = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11$

(b) $\prod_{j=2}^{6}(\boldsymbol{j}^{j-2}) = 2^0\times 3^1\times 4^2\times 5^3\times 6^4$

Exemplo 2.11

Calcular o produtório $\prod_{\boldsymbol{k}=1}^{5}(\boldsymbol{k}^2+\boldsymbol{k}+1)$.

Solução:

$$\prod_{k=1}^{5}(k^2+k+1) = 3\times 7\times 13\times 21\times 31 = 177.723$$

2.11. Exercícios Propostos sobre Produtórios

(1) Escreva os seguintes produtos sob a forma de produtório:

(a) $2\times 4\times 8\times 16\times\cdots\times 512$

(b) $3\times 6\times 9\times 12\times\cdots\times 63$

(c) $1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times 33$

(d) $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y}\times\cdots\times\boldsymbol{y}$ (produto de $\boldsymbol{n}$ fatores iguais)

(e) $1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \cdots \times n^n$

(f) $z_1 \times z_2 \times z_3 \times \cdots \times z_8$

(g) $a_1 x_1 \times a_2 x_2 \times a_3 x_3 \times \cdots \times a_n x_n$

(h) $x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times x_3^{f_3} \times \cdots \times x_p^{f_p}$

(i) $\dfrac{a_1}{b_1} \times \dfrac{a_2}{b_2} \times \dfrac{a_3}{b_3} \times \cdots \times \dfrac{a_{20}}{b_{20}}$

(j) $a_1 b_1^{-1} \times a_2 b_2^{-1} \times a_3 b_3^{-1} \times \cdots \times a_{20} b_{20}^{-1}$

(l) $a_1^3 \times a_2^3 \times a_3^3 \times \cdots \times a_{n-1}^3$

(2) Desenvolver os seguintes produtórios:

(a) $\prod_{y=1}^{6} (2y-1)$

(b) $\prod_{t=1}^{10} (5t)$

(c) $\prod_{k=1}^{5} (5k+3)$

(d) $\prod_{i=1}^{5} (3i^i)$

(e) $\prod_{i=1}^{p} x_{ij}$

(3) Calcular os seguintes produtórios:

(a) $\prod_{i=1}^{4} (3i^2+2)$

(b) $\prod_{j=0}^{6} (3j+1)$

(c) $\prod_{k=1}^{5} 3$

2.12. Respostas dos Exercícios Propostos sobre Produtórios

(1) (a) $\prod_{i=1}^{9}(2^i)$; (b) $\prod_{i=1}^{21}(3i)$; (c) $\prod_{i=1}^{17}(2i-1)$; (d) $\prod_{i=1}^{n} y$;

(e) $\prod_{i=1}^{n}(i^i)$; (f) $\prod_{i=1}^{8} z_i$; (g) $\prod_{i=1}^{n}(a_i x_i)$; (h) $\prod_{i=1}^{p}(x_i^{f_i})$;

(i) $\prod_{i=1}^{20}(\frac{a_i}{b_i})$; (j) $\prod_{i=1}^{20}(a_i b_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{20}(\frac{a_i}{b_i})$; (l) $\prod_{i=1}^{n-1}(a_i^3)$ ou $\prod_{i=2}^{n}(a_{i-1}^3)$

(2) (a) $1\times3\times5\times7\times9\times11$; (b) $5\times10\times15\times\cdots\times50$;

(c) $8\times13\times18\times23\times28$; (d) $(3\times1^1)\times(3\times2^2)\times(3\times3^3)\times(3\times4^4)\times(3\times5^5)$

(e) $x_{1j}\times x_{2j}\times x_{3j}\times\cdots\times x_{pj}$

(3) (a) 101 500; (b) 1 106 560; (c) 243

2.13. Introdução às Medidas de Posição

Nesta seção vamos aprender o cálculo de medidas que viabilizem a representação de um conjunto de dados relativos à observação de determinando fenômeno de maneira resumida. Trata-se das medidas de posição ou medidas de tendência central, uma vez que representam os fenômenos pelos seus valores médios, em torno dos quais tendem a se concentrar os dados.

2.14. Média Aritmética – Dados Não-agrupados

Sejam x_1, x_2, x_3, $\cdots$, e x_n valores da variável x. A média aritmética simples de x, representada por $\bar{x}$, é definida por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (21)$$

onde n é o número de elementos da amostra de dados.

EXEMPLO 2.12

Determinar a média aritmética dos seguintes valores:

(a) 3; 4; 1; 8; 2; 5; 7.

(b) 3; 7; 8; 10; 11

Solução:

(a) $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7} = \dfrac{3+4+1+8+2+5+7}{7} \cong 4{,}3$

(b) $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \dfrac{3+7+8+10+11}{5} = 7{,}8$

EXEMPLO 2.13

Dados $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 2$, calcular $\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})$.

Solução:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{1+3+4+2}{4} = 2{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x}) + (x_4 - \bar{x}) =$$
$$= (1-2{,}5) + (3-2{,}5) + (4-2{,}5) + (2-2{,}5) = 0$$

Com isto podemos observar que o somatório dos desvios com relação à média aritmética é zero. Para uma generalização do presente exemplo vide exercício proposto n.º 3.

2.15. Média Aritmética – Dados Agrupados (Média Aritmética Ponderada)

Quando os dados se agruparem numa distribuição de freqüência (dados diversos repetidos ou dados genéricos não repetidos mas com "pesos" diferentes), calcularemos a média aritmética dos valores x_1, x_2, x_3, $\cdots$, e x_n "ponderados" pelas respectivas freqüências, ou pesos, F_1, F_2, $\cdots$, e F_n. As freqüências, ou os pesos, são os "fatores de ponderação", é claro. Temos então:

$$\bar{x} = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + x_3f_3 + \cdots + x_nF_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iF_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad (22)$$

onde $\sum_{i=1}^{n} F_i = N$

EXEMPLO 2.14

Dada a seguinte distribuição amostral:

x_i	2	3	5	4
F_i	1	4	6	2

determinar a média aritmética.

Solução:

No exemplo em questão o dado $x_1 = 2$ aparece uma vez, $x_2 = 3$ quatro vezes, $x_3 = 5$ seis vezes e $x_4 = 4$ duas vezes. A fim de facilitar a solução vamos compor a tabela a seguir:

x_i	F_i	$x_i F_i$
2	1	2
3	4	12
5	6	30
4	2	8
Σ	13	52

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{4} F_i} = \frac{52}{13} = 4$$

EXEMPLO 2.15

Em uma determinada escola a média de cada disciplina ao longo de um período é calculada a partir dos graus obtidos em 3 provas: P_1, P_2 e P_3. As duas primeiras notas têm peso 1, e a terceira peso 2, por ser a prova parcial e incluir toda a matéria do período. Sabendo-se que um aluno obteve em Matemática, respectivamente, graus: 7,0 ; 7,5 e 6,5 ; pede-se calcular sua média no período.

Solução:

Temos então:

x_i	F_i	$x_i F_i$
7,0	1	7,0
7,5	1	7,5
6,5	2	13,0
Σ	4	27,5

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{3} F_i} = \frac{27,5}{4} \cong 6,9$$

EXEMPLO 2.16

Dadas as alturas de 200 alunos, formou-se a distribuição de freqüência a seguir:

Alturas (m)	1,40 ⊢ 1,45	1,45 ⊢ 1,50	1,50 ⊢ 1,55	1,55 ⊢ 1,60	1,60 ⊢ 1,65	1,65 ⊢ 1,70	1,70 ⊢ 1,75	1,75 ⊢ 1,80	1,80 ⊢ 1,85
N.º de Alunos	3	12	15	58	40	27	30	9	6

Calcular a altura média.

Solução:

Neste caso as alturas nos diversos intervalos são representadas pelos seus pontos médios.

Alturas (m)	x_i (P.M.) (m)	F_i	$x_i F_i$
1,40 ⊢ 1,45	1,425	3	4,275
1,45 ⊢ 1,50	1,475	12	17,7
1,50 ⊢ 1,55	1,525	15	22,875
1,55 ⊢ 1,60	1,575	58	91,35
1,60 ⊢ 1,65	1,625	40	65
1,65 ⊢	1,675	27	45,225

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{9} F_i} = \frac{325,1}{200} = 1,626 \text{ m}$$

1,70			
1,70 ■ 1,75	1,725	30	51,75
1,75 ■ 1,80	1,775	9	15,975
1,80 ■ 1,85	1,825	6	10,95
Σ		200	325,1

2.16. Média Geral

Sejam $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_p$, as médias aritméticas de "*p*" séries e n_1, $n_2, \cdots, n_p$, os números de termos destas séries, respectivamente. A média aritmética formada pelos termos das séries é dada por:

$$\overline{x_G} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \overline{x_i}}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2} + \cdots + n_p\overline{x_p}}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \qquad (23)$$

EXEMPLO 2.17

Sejam as séries:

1.ª) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 onde $n_1 = 7$ e $\overline{x_1} = 9$

2.ª) 1, 2, 3, 4, 5 onde $n_2 = 5$ e $\overline{x_2} = 3$

3.ª) 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 onde $n_3 = 9$ e $\overline{x_3} = 17$

A média geral é:

$$\overline{x_G} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \overline{x_i}}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2} + n_3\overline{x_3}}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{7\times 9 + 5\times 3 + 9\times 17}{7+5+9} = 11$$

2.17. Média Geométrica – Dados Não-agrupados

Sejam x_1, x_2, $x_3, \cdots,$ e x_n, $\underline{n}$ valores da variável x. A média geométrica simples de x, representada por $\overline{x_g}$, é definida por:

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots \times x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \qquad (24)$$

onde n é o número de elementos da amostra de dados.

EXEMPLO 2.18

Calcular a média geométrica dos seguintes valores: 3, 6, 12, 24, 48, 96 e 192.

Solução:

Temos que:

$$\overline{x_g} = \sqrt[7]{3\times 6\times 12\times 24\times 48\times 96\times 192} = \sqrt[7]{4.586.471.424} = (4.586.471.424)^{1/7} = 24$$

2.18. Média Geométrica – Dados Agrupados (Média Geométrica Ponderada)

Analogamente ao que ocorre com a média aritmética, quando os dados se agruparem em uma distribuição de freqüência, teremos:

$$\overline{x}_g = \sqrt[N]{x_1^{F1}\times x_2^{F2}\times x_3^{F3}\times\cdots\times x_n^{Fn}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{Fi}} \qquad (25)$$

onde $\sum_{i=1}^{n} F_i = N$

EXEMPLO 2.19

Calcular a média geométrica para a seguinte distribuição amostral:

x_i	1,5	2	3	5
F_i	8	6	5	3

Solução:

$$\overline{x_g} = \sqrt[22]{(1,5)^8\times 2^6\times 3^5\times 5^3} = \sqrt[22]{49\ 822\ 593,75} = (49\ 822\ 593,75)^{1/22} = 2,2381$$

Observação: A média geométrica deve ser utilizada quando os dados crescem geometricamente, não necessariamente com uma razão constante como em uma P. G., conforme pode ocorrer com os preços em um período de inflação galopante.

EXEMPLO 2.20

Em um período inflacionário o preço de um certo produto e o seu respectivo consumo estão descritos a seguir. Calcular o preço médio ao longo do trimestre.

Meses	Consumo	Preço

	(caixas)	(R$)
1.º	200	20,00
2.º	100	20,00
3.º	300	150,00

Solução:

Repare que o preço por caixa passa de 0,10 para 0,20 , e depois para 0,50 e, embora os aumentos não sejam constantes, justificam o uso da média geométrica. Assim,

$$\overline{x_g} = \sqrt[600]{20^{200} \times 20^{100} \times 150^{300}} = 20^{\frac{200}{600}} \times 20^{\frac{100}{600}} \times 150^{\frac{300}{600}} = 54{,}77$$

Observação: Optamos diretamente pelos expoentes fracionários pois o número sob o radical é muito grande e extrapola a capacidade de armazenamento das calculadoras.

2.19. Média Harmônica – Dados Não-agrupados

Para ***n*** valores da variável ***x***, a média harmônica é definida como sendo o inverso de média aritmética dos inversos, ou seja:

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad \text{...(26)}$$

EXEMPLO 2.21

Calcular a média harmônica dos seguintes conjuntos de valores:

(a) 3, 6 e 9
(b) 1; 0,5 e 0,333...

Solução:

(a) $\overline{x_h} = \dfrac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}} \cong 4{,}91$

(b) $0{,}5 = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$; $0{,}333\ ... = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

$$\overline{x_h} = \frac{3}{\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}} = 0{,}5$$

2.20. Média Harmônica – Dados Agrupados (Média Harmônica Ponderada):

Temos então,

$$\overline{x_h} = \frac{N}{\frac{F_1}{x_1}+\frac{F_2}{x_2}+\frac{F_3}{x_3}+\cdots+\frac{F_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{x_i}} \qquad (27)$$

onde $\sum_{i=1}^{n} F_i = N$

Observação: A média harmônica é útil quando temos séries de valores inversamente proporcionais, como é o caso do cálculo da velocidade média, do tempo médio de escoamento de estoques, do custo médio de bens adquiridos por uma quantia fixa, etc.

EXEMPLO 2.22

Um carro se desloca de uma cidade A para uma cidade B com uma velocidade média de 60***km/h*** e retorna com uma velocidade média de 80***km/h***. Determinar a velocidade média de toda a viagem.

Solução:

Sendo Δs a distância entre as duas cidades temos que o tempo de ida é:

$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta s_{AB}}{\bar{v}_{AB}} = \frac{\Delta s}{60},$$

e o tempo de volta é:

$$\Delta t_{BA} = \frac{\Delta s_{BA}}{\bar{v}_{BA}} = \frac{\Delta s}{80}$$

Logo o tempo total da viagem é:

$$\Delta t_{total} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = \frac{\Delta s}{60} + \frac{\Delta s}{80}$$

Pela definição de velocidade média temos:

$$\bar{v}_{total} = \frac{\Delta s_{total}}{\Delta t_{total}} = \frac{2\Delta s}{\frac{\Delta s}{60} + \frac{\Delta s}{80}}$$

Repare que cancelando a grandeza Δs obtemos:

$$\bar{v}_{total} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = 68{,}57\, km/h$$

que é obviamente a média harmônica entre os valores 60***km/h*** e 80 ***km/h***.

EXEMPLO 2.23

Calcular a velocidade média para o seguinte trajeto:

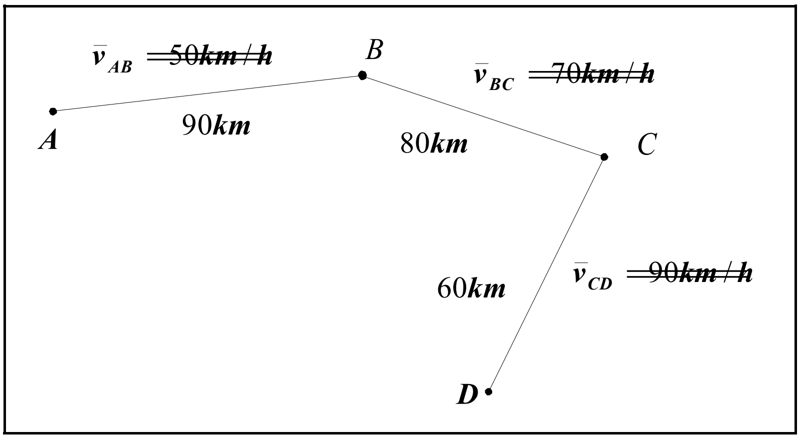


Fig. 2.3

Solução:

O tempo total é dado por:

$$\Delta t_{total} = \frac{90}{50} + \frac{80}{70} + \frac{60}{90}$$

A velocidade média é:

$$\bar{v}_{total} = \frac{\Delta s_{total}}{\Delta t_{total}} = \frac{90 + 80 + 60}{\frac{90}{50} + \frac{80}{70} + \frac{60}{90}} = 63{,}7\, km/h$$

e vemos que se as distâncias percorridas não são iguais, devemos calcular a média harmônica ponderada onde os fatores de ponderação serão as respectivas distâncias.

EXEMPLO 2.24

A Casa & Vídeo possui um estoque de 100 televisores na filial Méier e de 200 televisores na filial Copacabana. O primeiro esgota-se em 2 meses e o segundo em 5 meses. Determinar o tempo médio de escoamento de ambos os estoques.

Solução:

$$\overline{t_h} = \frac{\text{estoque total}}{\text{demanda total}} = \frac{100 + 200}{\frac{100}{2} + \frac{200}{5}} \cong 3{,}33 \text{ meses}$$

EXEMPLO 2.25

Em uma pesquisa sobre a duração de um certo sabonete junto a 55 famílias com o mesmo número de pessoas e a mesma classe social, obtivemos os resultados a seguir. Calcular a duração média do sabonete.

Dias	N.º famílias	Duração Média
12/14	9	13
14/16	13	15
16/18	21	17
18/20	12	19

Solução:

$$\overline{t_h} = \frac{9 + 13 + 21 + 12}{\frac{9}{13} + \frac{13}{15} + \frac{21}{17} + \frac{12}{19}} \cong 16{,}1 \text{ dias}$$

EXEMPLO 2.26

Um consumidor comprou em três meses consecutivos carne aos seguintes preços: R\$4,00; R\$5,00 e R\$7,00 por quilograma respectivamente. Determinar o custo médio por quinzena em todo o trimestre.

Solução:

Para determinarmos o custo médio devemos lembrar que:

$$\text{custo médio por quilograma} = \frac{\text{custo total}}{\text{quantidade total adquirida}}$$

1.ª hipótese: Vamos considerar que o consumidor adquiriu o mesmo número de quilogramas (por exemplo 15kg) a cada mês. Assim sendo:

$$\text{custo médio por quilograma} = \frac{(15\text{kg})\,(\text{R\$ }4{,}00/\text{kg}) + (15\text{kg})\,(\text{R\$ }5{,}00/\text{kg}) + (15\text{kg})\,(\text{R\$ }7{,}00/\text{kg})}{45\text{kg}} \cong \text{R\$ }5{,}33/\text{kg}$$

sendo interessante verificar que este valor corresponde à média aritmética dos preços por quilograma:

$$\bar{x} = \frac{\text{R\$ }4{,}00/\text{kg} + \text{R\$ }5{,}00/\text{kg} + \text{R\$ }7{,}00/\text{kg}}{3} \cong \text{R\$ }5{,}33/\text{kg}$$

2.ª hipótese: Vamos considerar que a pessoa tenha gasto a mesma quantia (por exemplo R$60,00) em cada um dos meses.

$$\text{custo médio por quilograma} = \frac{\text{R\$ }180{,}00}{\dfrac{\text{R\$ }60{,}00}{\text{R\$ }4{,}00/\text{kg}} + \dfrac{\text{R\$ }60{,}00}{\text{R\$ }5{,}00/\text{kg}} + \dfrac{\text{R\$ }60{,}00}{\text{R\$ }7{,}0/\text{kg}}} \cong \text{R\$ }5{,}06/\text{kg}$$

que corresponde à média harmônica dos preços:

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\dfrac{1}{\text{R\$ }4{,}00/\text{kg}} + \dfrac{1}{\text{R\$ }5{,}00/\text{kg}} + \dfrac{1}{\text{R\$ }7{,}00/\text{kg}}} \cong \text{R\$ }5{,}06/\text{kg}$$

É importante notar que ambos os métodos utilizados para o cálculo do custo médio por quilograma estão certos, tendo sido cada um deles referido à uma situação diferente de consumo. Devemos também observar que se o número de quilogramas adquiridos variar de mês para mês, deveremos utilizar a média aritmética ponderada, porém, se a quantia disponível variar de mês para mês, deveremos usar a média harmônica ponderada.

2.21. Exercícios Propostos sobre Medidas de Posição

(1) Determinar a média aritmética dos seguintes valores:

(a) 6; 8; 9; 10; 12

(b) 70; 75; 76; 80; 82; 83; 90

(c) 3,20; 4,00; 0,75; 5,00; 2,13; 4,75

(d) 1; 3; 0,5; 1,5

(2) A média mínima para aprovação em determinada matéria é 5,0. Se um estudante obteve os graus 6,5; 9,0; 4,5; 5,0; 3,5; 1,0; 6,5 e 3,0 nas diversas avaliações de desempenho ao longo do período letivo, perguntamos se ele foi ou não aprovado.

(3) sabendo-se que $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, mostrar que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

(4) Calcular a média aritmética para cada uma das distribuições de freqüência a seguir:

(a)

x_i	3	4	7	8	12
F_i	2	5	8	4	3

(b)

x_i	85	87	88	89	90
F_i	5	1	10	3	5

(c)

x_i	2	3	4	5	6
F_i	3	9	19	25	28

(5) Determinar a renda média da distribuição populacional a seguir:

Renda Familiar (R$)	200 400	400 600	600 ▪ 800	800 ▪ 1000
N.º de famílias	5	10	14	7

(6) A nota média de uma turma de 50 alunos foi 6,1; sendo 6,0 a média dos meninos e 7,0 a das meninas. Qual o número de meninos e meninas na turma?

(7) O salário médio pago aos empregados de uma indústria é R$710,00. Sabendo-se que os salários médios pagos aos empregados especializados e não-especializados são, respectivamente, R$800,00 e R$500,00; pede-se determinar os percentuais de empregados especializados e não-especializados.

(8) Calcular a média geométrica para os seguintes conjuntos de valores:

(a) 9; 15; 10; 16

(b) 3; 4; 6; 7; 8

(c) 3,2; 8,4; 7,5; 15,2; 20,3

(9) Calcular a média harmônica para as séries

(a) 5; 7; 12; 15

(b)

x_i	2	3	4	5	6
F_i	3	4	6	5	2

(10) Tivemos R$200,00 disponíveis, mensalmente, para comprar determinado artigo que custou nos meses de setembro, outubro, e novembro, respectivamente, R$20,00; R$50,00 e R$70,00 por unidade. Qual foi o custo médio unitário do artigo nesses 3 meses?

(11) Gastamos em agosto R$500,00 para comprar um produto que custou R$5,00 a unidade. Em setembro gastamos R$1200,00 para comprar o mesmo produto a um preço unitário de R$6,00. Determinar o custo médio unitário do produto nesses dois meses.

(12) Uma firma de eletrodomésticos tem um mesmo estoque de fogões em quatro lojas diferentes (A, B, C e D). Na loja A o estoque se esgota em 8 meses; na loja B, em 15 meses; na loja C, em 6 meses; e na loja D, em 20 meses. Determinar o tempo médio de escoamento de todos os estoques da firma.

2.22. Exercícios de Revisão sobre Medidas de Posição

(1) Em uma certa empresa a evolução das vendas apresentou, nos últimos três meses, os seguintes resultados: 119,31%; 135,42% e 115,32%. Determinar qual foi o aumento médio percentual ao longo do período.

(2) Durante um surto de gripe em uma certa localidade o número de casos aumentou de 500 para 2000 em três dias. Qual foi a porcentagem média de crescimento por dia?

(3) Em 1960 a população de uma certa cidade era de 5000 habitantes. Em 1970 a população já era de 15000 habitantes. Qual o aumento médio percentual por ano?

(4) Encontrar dois números cuja média aritmética é 9,0 e a média geométrica é 7,2.

(5) Encontrar dois números cuja média aritmética é $\frac{51}{2}$ e a média geométrica é 12.

(6) Encontrar dois números cuja média aritmética é 50 e a média harmônica é 32.

2.23. Respostas dos Exercícios Propostos sobre Medidas de Posição

(1) (a) 9; (b) 79,4; (c) 3,31; (d) 1,5

(2) $\bar{x} = 4{,}9 < 5{,}0$ logo ele não foi aprovado

(4) (a) 6,82; (b) 87,88; (c) 4,79

(5) R$627,80

(6) 45 meninos e 5 meninas

(7) 70% especializados e 30% não-especializados

(8) (a) 12,13; (b) 5,26; (c) 9,09

(9) (a) 8,12; (b) 3,53

(10) R$35,59/unidade

(11) R$5,67/unidade

(12) 9,8 meses

2.24. Respostas dos Exercícios de Revisão sobre Medidas de Posição

(1) 23,35%

(2) 58,74%

(3) 11,61%

(4) 3,6 e 14,4

(5) 3 e 48

(6) 20 e 80