Marcelo Gorges
Olímpio Rudinin Vissoto Leite

MATEMÁTICA ELEMENTAR II:
situações de matemática do ensino médio no dia a dia

2009

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

L55m

Leite, Olímpio Rudinin Vissoto.
Matemática elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia. / Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Marcelo Gorges. – Curitiba, PR: IESDE, 2009.
444 p.

Sequência de: Matemática elementar I
ISBN 978-85-387-0414-0

1. Matemática (Ensino médio). I. Gorges, Marcelo. II. Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino. III. Título.

09-3612. CDD: 510
CDU: 51

Capa: IESDE Brasil S.A.
Imagem da capa: Júpiter Images/DPI Images

Ad Maiora Semper!

IESDE Brasil S.A.
Al. Dr. Carlos de Carvalho, 1.482. CEP: 80730-200
Batel – Curitiba – PR
0800 708 88 88 – www.iesde.com.br

Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Mestre em Gestão de Negócios pela Universidade Católica de Santos. Graduado em Licenciatura em Matemática pela USP.

Marcelo Gorges

Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Sumário

Tópicos complementares de funções

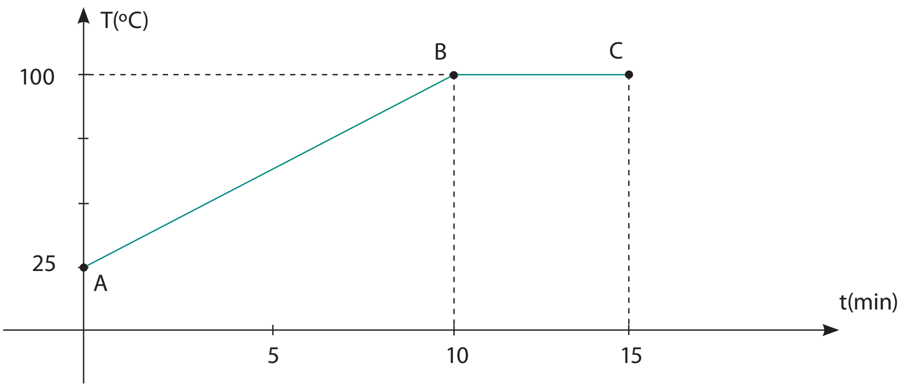
Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Função definida por várias sentenças

Até aqui, as funções que você estudou são definidas por uma única sentença matemática. Agora, você vai estudar funções que são definidas por várias sentenças. Essas funções são frequentes na Física, na Biologia, na Química, na Economia, na Estatística etc.

Exemplo:

Um físico aquece uma certa quantidade de água até ela começar a ferver. Seu objetivo é estudar a variação de temperatura desse líquido em função do tempo de aquecimento. Para tanto, a cada minuto, ele mergulha um termômetro na água e lê a temperatura. Procedendo assim, construiu o gráfico a seguir, que relaciona a temperatura *T* (em graus Celsius) com o tempo *t* (em minutos).



Vamos determinar a equação do segmento de reta $\overline{AB}$. A função afim é $T = at + b$.

O coeficiente angular da reta é $\frac{100 - 25}{10 - 0} = 7{,}5$.

Portanto, $T = 7{,}5t + b$.

Como a reta passa pelo A (0, 25), podemos escrever: $25 = 7{,}5 \cdot 0 + b$. Daí, $b = 25$. Então, $T = 7{,}5t + 25$, com $0 \leq t \leq 10$.

A equação do segmento de reta $\overline{BC}$ é $T = 100$, com $10 < t \leq 15$.

Portanto, a função procurada é definida por duas sentenças:

$$T(t) = 7{,}5t + 2{,}5,\ se\ 0 \leq t \leq 10 \quad \text{e} \quad T(t) = 100,\ se\ 10 < t \leq 15.$$

Observações

1. É costume expressar uma função definida por várias sentenças da seguinte maneira:

$$T(t) = \begin{cases} 7{,}5t + 25,\ se\ 0 \leq t \leq 10 \\ 100,\ se\ 10 < t \leq 15 \end{cases}$$

2. No exemplo anterior, para $t = 10$ temos $T = 100$, em qualquer uma das duas sentenças. Embora isso ocorra, esse valor costuma ser indicado em apenas um trecho do domínio, nesse caso, está indicado na primeira sentença (atente para os intervalos). Essa escolha é particular.

Exemplo:

3. Esboçar o gráfico e determinar o conjunto imagem da função:

$$f(\text{x}) = \begin{cases} 2,\ se\ \text{x} < 3 \\ \text{x} - 1,\ se\ 3 \leq \text{x} < 5 \\ 4,\ se\ \text{x} \geq 5 \end{cases}$$

Solução:

A função *f(x)* é definida por três sentenças matemáticas no seu domínio. A construção de uma tabela tem que levar esse fato em consideração, vejamos:

Para construirmos o gráfico da função, vamos atribuir alguns valores adequados para a variável x, vejamos:

$x < 3$

x	y	(x, y)
–2	2	(–2, 2)
–1	2	(–1, 2)
0	2	(0, 2)
1	2	(1, 2)
2	2	(2, 2)

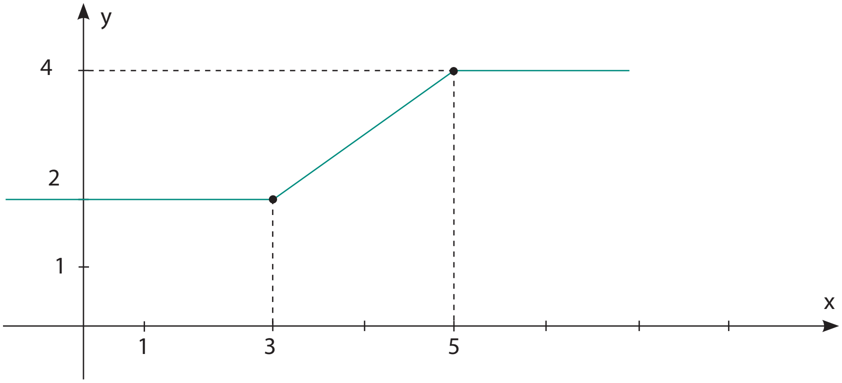
$3 \leq x < 5$

x	y	(x, y)
3	2	(3, 2)
4	3	(4, 3)

$x \geq 5$

x	y	(x, y)
5	4	(5, 4)
6	4	(6, 4)
7	4	(7, 4)

A partir dos pontos obtidos, podemos esboçar o gráfico dessa função.



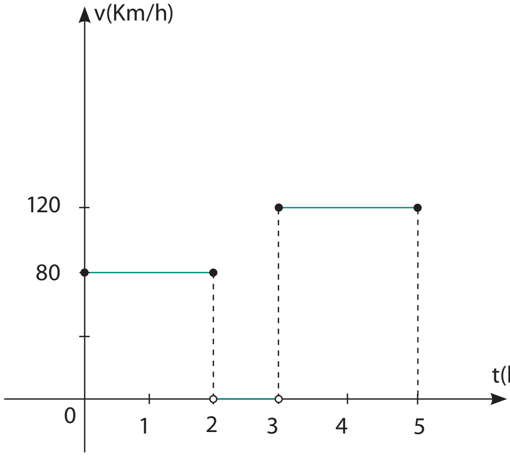
Exercícios

1. Construa a tabela e o gráfico para cada uma das funções a seguir:

a) $f(x) = \begin{cases} -4, \textit{ se } x < 0 \\ 4, \textit{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $k(x) = \begin{cases} x^2, \textit{ se } -2 \leq x < 2 \\ -x + 6, \textit{ se } x \geq 2 \end{cases}$

2. Durante uma viagem de cinco horas de duração, a velocidade escalar média de um motoqueiro variou, em função do tempo, como o gráfico a seguir. Descubra a lei dessa função e calcule quantos quilômetros o motoqueiro percorreu durante essa viagem:



3. Em cada item, construa a tabela e desenhe o gráfico da função definida por:

a) $f(x) = \begin{cases} -x, \textit{ se } x -2 \leq x < 0 \\ x, \textit{ se } 0 \leq x < 2 \\ 2, \textit{ se } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4, \textit{ se } x < -2 \\ x^2, \textit{ se } -2 \leq x \leq 2 \\ 4, \textit{ se } x > 2 \end{cases}$

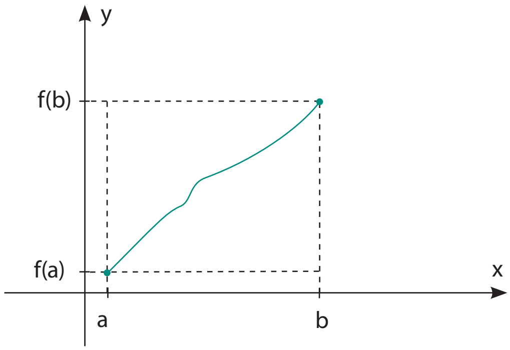
4. Em um voo, cada passageiro está autorizado a transportar uma bagagem de até 20kg. A partir desse limite de peso, o passageiro paga um dólar por quilograma excedente. Dê a lei que expressa a quantia paga por uma pessoa pela sua bagagem. Esboce o gráfico dessa função.

Estudo da variação das funções

Podemos analisar os intervalos onde uma função é crescente, decrescente ou constante, de acordo com os exemplos que seguem.

Função crescente

O gráfico a seguir representa uma função *f(x)*:

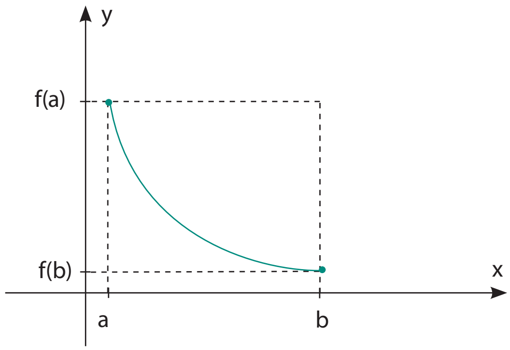


A função é *crescente* no intervalo [a, b].

Uma função $y = f(x)$ é crescente em um intervalo de eixo x se, nesse intervalo, $x_1 < x_2$ implica em $f(x_1) < f(x_2)$. Em linguagem geométrica, isso significa que uma função é crescente se o gráfico for ascendente, ou seja, quando o ponto que o traça se move da esquerda para a direita, de baixo para cima.

Função decrescente

O gráfico a seguir representa uma função *f(x):*

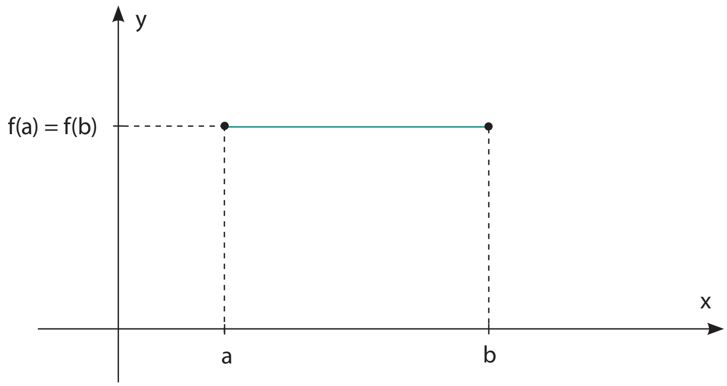


A função é *decrescente* no intervalo [a, b].

Uma função $y = f(x)$ é decrescente em um intervalo do eixo x se, nesse intervalo, $x_1 < x_2$ implica em $f(x_1) > f(x_2)$. Geometricamente, isso significa que uma função é decrescente se o gráfico for descendente, ou seja, quando o ponto que o traça se move da esquerda para a direita, de cima para baixo.

Função constante

O gráfico a seguir representa uma função *f(x):*



A função é *constante* no intervalo [a, b].

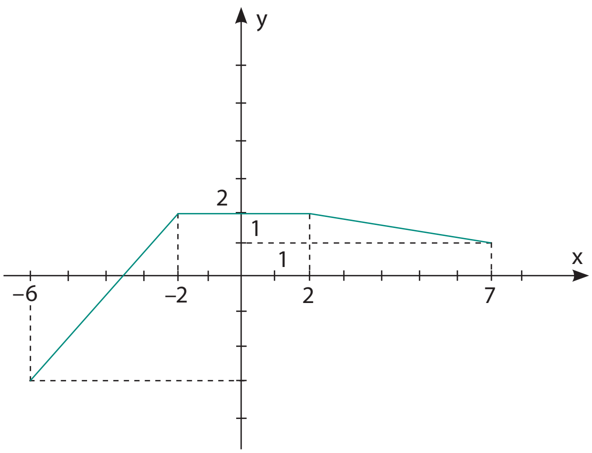
Uma função $y = f(x)$ é constante em um intervalo do eixo x se qualquer aumento de x não provocar variação alguma no valor de y.

Observação

Uma mesma função pode ser crescente em um certo intervalo do seu domínio, decrescente em outro e constante em um terceiro intervalo.

Exemplo:

A seguir, está representado o gráfico de uma função no intervalo [–6, 7]. Determinar em quais intervalos de $\mathbb{R}$ a função é crescente, decrescente ou constante.



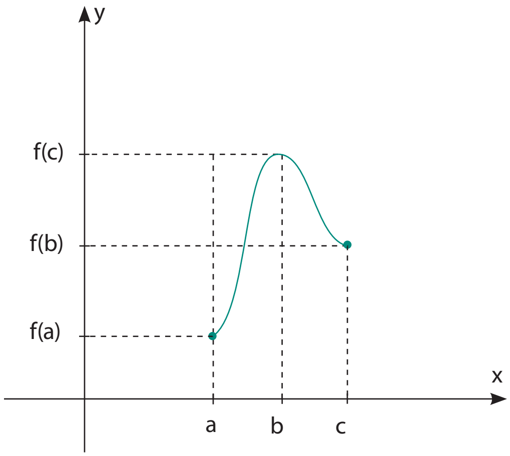
Solução:

A função é crescente no intervalo [–6, 2], constante no intervalo [–2, 2] e decrescente no intervalo [2, 7].

Valores extremos de uma função

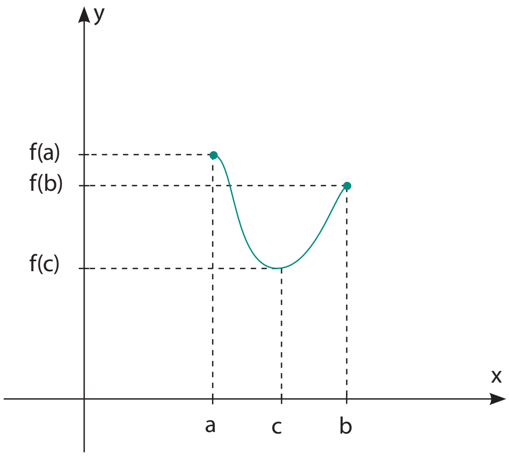
Num dado intervalo, uma função pode assumir um valor máximo ou um valor mínimo.

O gráfico a seguir representa uma função *f(x):*



No intervalo [a, b] a função *f(x)* admite um ponto de máximo em $x = c$. Portanto, o valor máximo é *f(c)*.

O gráfico a seguir representa uma função *f(x)*:



No intervalo [a, b] a função *f(x)* admite um ponto de mínimo em $x = c$. Portanto, o valor mínimo é *f(c)*.

Exemplo:

Desenhar o gráfico da função $y = -x^2 + 6x$, para *x* no intervalo [1, 4]. Analisar a variação da função (crescente, decrescente ou constante; valor máximo ou mínimo).

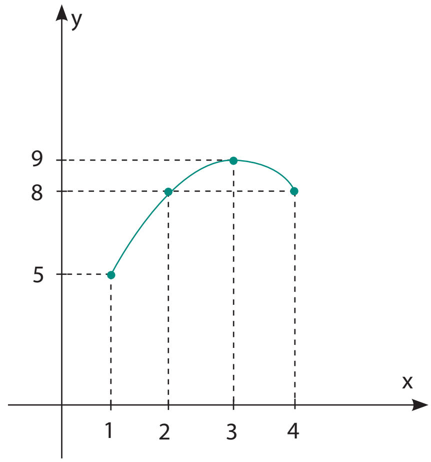
Solução:

A função $y = -x^2 + 6x$ é representada graficamente através de uma parábola. Como o domínio é [1, 4], teremos um arco de parábola.

Lembrando que, $x_V = -\frac{b}{2a}$, temos $x_V = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$.

Então:

x	y
1	5
2	8
3	9
4	8

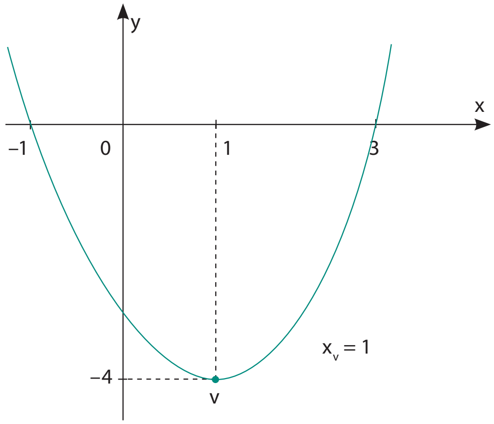


A partir do gráfico, concluímos que:

- *f* é crescente em [1, 3];
- *f* é decrescente em [3, 4];
- o valor máximo de *f* ocorre para x = 3 (*x* do vértice) e é *f*(3) = 9;
- o valor mínimo de *f* ocorre para x = 1 (extremo do domínio) e é *f*(1) = 5.

Exemplo:

A seguir está representado o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Analisar a variação da função (crescente, decrescente ou constante) e determinar o valor máximo ou mínimo da função.



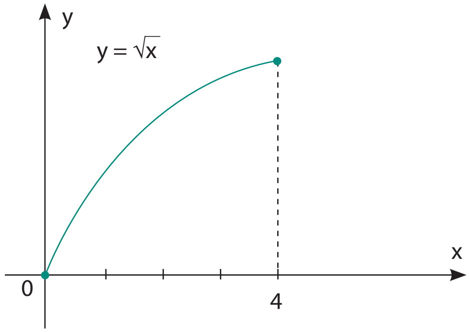
Solução:

- f é decrescente em $]-\infty, 1]$;
- f é crescente em $[1, +\infty[$;
- o valor mínimo de f ocorre para $x = 1$ e é $f(1) = -4$

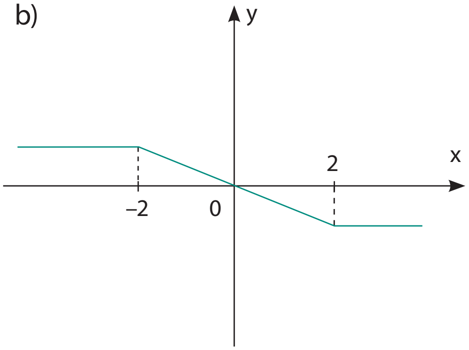
Exercícios

5. Os gráficos cartesianos a seguir representam gráficos de funções. Dê os intervalos nos quais as funções são crescentes, decrescentes ou constantes:

a)



b)



6. Construa o gráfico da função, $y = 2x + 2$ e a partir dele estude a variação da função (crescente, decrescente ou constante) nos intervalos a seguir:

a) $[-2, 0]$

b) $[0, 4]$

7. A partir da função $y = x^2 - 1$:

a) faça o esboço do gráfico da função;

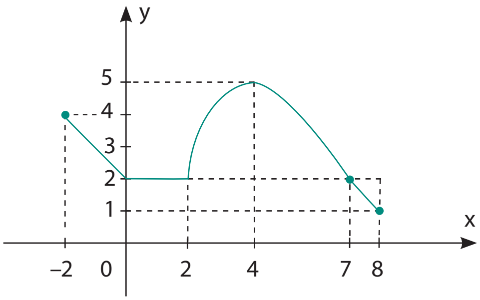
b) analise a variação da função (crescente, decrescente ou constante) nos intervalos $[-2, 0]$, $[0, 2]$ e $[2, 4]$;

c) verifique no domínio dessa função se ela possui valor de máximo ou mínimo. Se possuir, indique qual é esse valor.

8. Construa o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 4, \textit{se } x \leq 0 \\ -x + 4, \textit{se } x \geq 0 \end{cases}$

e a partir dele, estude a variação da função.

9. O gráfico cartesiano a seguir é o de uma função *f (x)*.



a) Dê os intervalos de *x* para os quais a função é crescente, decrescente ou constante.

b) Qual é o domínio dessa função?

c) Qual é o conjunto imagem?

d) Qual é o valor máximo dessa função? E o mínimo?

e) Qual é a variação de *y*, quando *x* varia de 2 a 4?

f) Quais os valores de *x* para os quais $y = 2$?

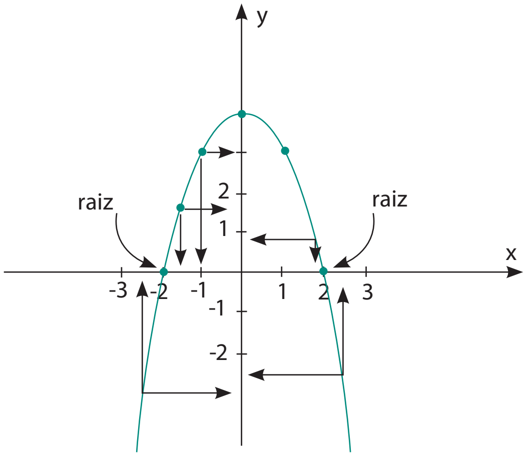
Estudo do sinal de uma função

Estudar o sinal de uma função $y = f(x)$ é descobrir os valores reais de x para os quais a função $f(x)$ é positiva $(f(x) > 0)$, os valores reais de x para os quais a função $f(x)$ é negativa $(f(x) < 0)$ ou nula, ou seja, $f(x) = 0$.

Exemplos:

1. Observe a tabela e o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4$:

x	y
–3	–5
–2	0
–1	3
0	4
1	3
2	0
3	–5



Faça o estudo do sinal dessa função.

Solução:

A partir da análise da tabela e do gráfico da função, concluímos:

- Os valores reais de x para os quais a função é positiva estão entre –2 e 2, isto é, $f(x) > 0$ quando $-2 < x < 2$.
- A função é negativa para os valores reais de x menores que –2 ou os maiores que 2, isto é, $f(x) < 0$ quando $x < -2$ ou $x > 2$.
- a função é nula, ou seja, $f(x) = 0$ quando $x = -2$ ou $x = +2$.

2. Determinar os valores reais de x para os quais a função $y = -2x + 6$ é positiva, negativa ou nula.

Solução:

Para estudar o sinal de uma função, é importante a construção do esboço do gráfico dessa função. Nesse esboço, deve estar presente a raiz da função, que é o valor de x para o qual a função é nula.

Determinação da raiz da função:

$y = -2x + 6$

$0 = -2x + 6$

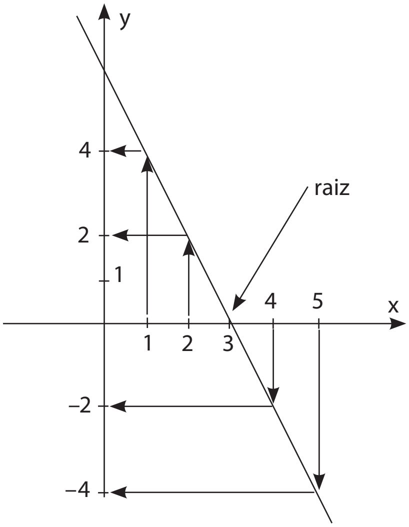
$2x = 6$

$x = 3$

Usando x = 3 (raiz) e um outro valor qualquer para x, construímos a tabela a seguir.

Com os pares ordenados obtidos, podemos construir o gráfico da função:

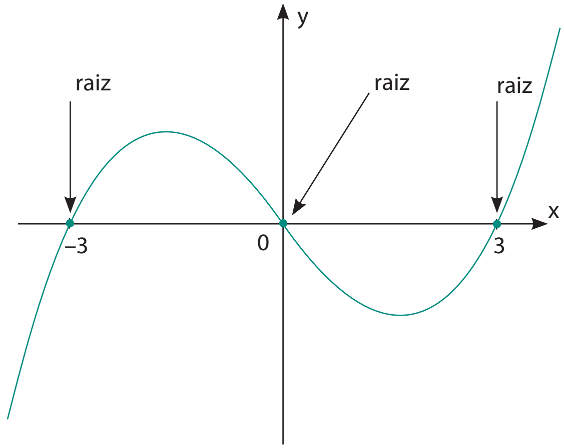
x	y	(x,y)
3	0	(3, 0)
4	–2	(4,–2)



A partir do gráfico, temos: $\begin{cases} y > 0 \textit{ quando } x < 3 \\ y = 0 \textit{ quando } x = 3 \\ y < 0 \textit{ quando } x > 3 \end{cases}$

A partir da tabela e do esboço do gráfico da função $y = x^3 - 9x$, descobrir os valores reais de x, tais que y > 0 , y < 0 ou y = 0.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–80	–28	0	10	8	0	–8	–10	0	28	80



Solução:

$$\begin{cases} y > 0 \text{ } para \text{ } -3 < x < 0 \text{ ou } x > 3 \\ y = 0 \text{ } para \text{ } x = -3, x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ y < 0 \text{ } para \text{ } x < -3 \text{ ou } 0 < x < 3 \end{cases}$$

Inequação

Considerar a função real $y = f(x)$ na variável real x. Inequação é uma das seguintes desigualdades:

- $f(x) > 0$
- $f(x) \geq 0$
- $f(x) < 0$
- $f(x) \leq 0$

Resolver uma inequação é determinar os valores reais da variável x para os quais ocorre uma das desigualdades anteriores. Esses valores podem ser obtidos pela análise do gráfico, esboçado a partir das raízes (se existirem) da função dada.

Exemplo:

1. Resolver a inequação $-3x + 6 < 0$.

Solução:

Resolver a inequação $-3x + 6 < 0$, é determinar os valores de x para o quais a função $f(x) = -3x + 6$ é menor do que zero, ou seja, negativa. Sendo assim, devemos estudar o sinal da função.

Como a função envolvida nessa situação é uma função afim, basta que tenhamos a raiz da função e as informações obtidas a partir do coeficiente angular.

Determinação da raiz da função:

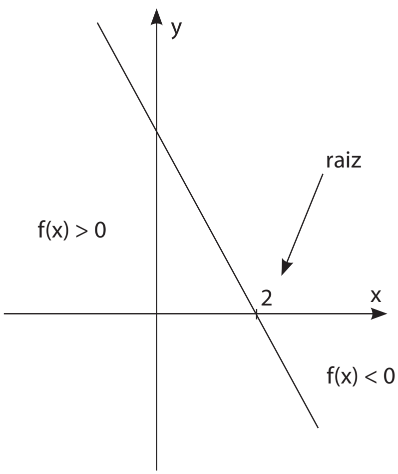
$-3x + 6 = 0$

$-3x = -6$

$x = 2$

Para a função $f(x) = -3x + 6$, o coeficiente angular é -3. A partir disso, podemos concluir que a função é decrescente e que a reta representativa da função forma com o eixo x, no sentido anti-horário, um ângulo obtuso.

A partir dessas informações podemos construir um esboço do gráfico da função. Vejamos:



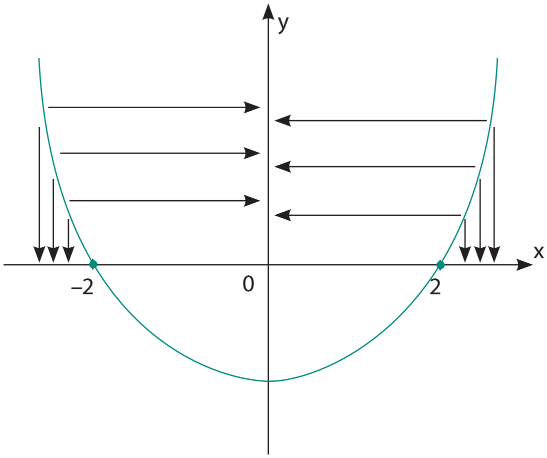
Assim, temos que $f(x) < 0$, ou seja, $-3x + 6 < 0$ quando $x > 2$.

2. Resolver a inequação $x^2 > 4$.

Solução:

$$x^2 > 4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} > 0$$

Encontrando as raízes, vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$. As raízes correspondem aos valores de x para os quais $f(x) = 0$. Resolvendo a equação $x^2 - 4 = 0$, obtemos as raízes -2 e $+2$. Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a = 1$), a concavidade da parábola está voltada para cima. Veja:



Assim, $f(x) > 0$ quando $x < -2$ ou $x > 2$.

Observação:

Para resolver uma inequação a partir do gráfico da função, é fundamental que o esboço do gráfico contenha as raízes da função.

As inequações envolvendo uma função afim também podem ser resolvidas sem auxílio do gráfico.

3. Resolver a inequação $2x - 10 > 0$.

Solução:

Se $2x - 10 > 0$, então $2x > 10$.

Se $2x > 10$, então $x > \frac{10}{2}$, isto é, $x > 5$.

Assim, $2x - 10 > 0$ quando $x > 5$.

Exercícios

10. Em cada item, faça o esboço do gráfico da função *f(x)*, destacando as raízes (se existirem). A seguir, faça o estudo do sinal da função, isto é, descubra os valores reais de *x* para os quais a função é positiva, negativa ou nula:

a) $f(x) = x^2 - 6x$

b) $f(x) = -x^2 - 2$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

11. Determine os valores reais de *x* para os quais as funções são negativas:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $g(x) = -x$

c) $h(x) = -x^2 + 9$

12. Determine os valores reais de *x* para os quais as funções são positivas:

a) $f(x) = x + 2$

b) $g(x) = -2x + 6$

c) $h(x) = 3x - 12$

13. Estude o sinal da função $f(x) = x^2 - 16$. A partir desse estudo, resolva a inequação $x^2 - 16 < 0$.

14. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 - 9 > 0$

b) $-x^2 - 6x - 5 < 0$

c) $x^2 + x + 1 \leq 0$

d) $-x^2 + 8x - 16 < 0$

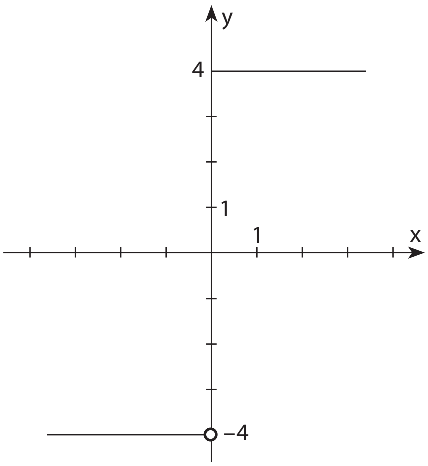
Gabarito

Tópicos complementares de funções

1.

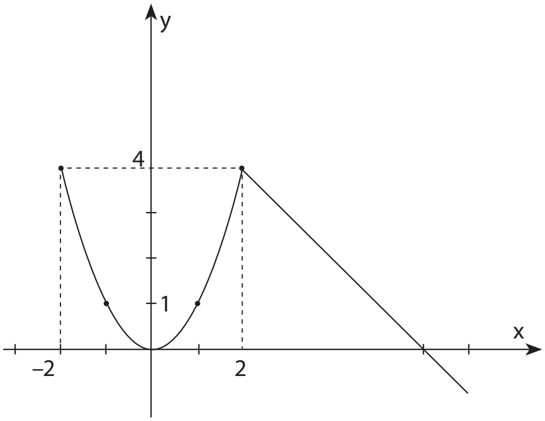
a)

x	y	(x, y)
–3	–4	(–3, –4)
–2	–4	(–2, –4)
–1	–4	(–1, –4)
0	4	(0, 4)
1	4	(1, 4)
2	4	(2, 4)
3	4	(3, 4)



b)

x	y	(x, y)
–2	4	(–2, 4)
–1	1	(–1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	3	(3, 3)



2. Lei da Função:

$$v(t) = \begin{cases} 80, \, se \; 0 \leq t \leq 2 \\ 0, \, se \; 2 < t < 3 \\ 120, \, se \; 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

Durante duas horas o motoqueiro permaneceu com velocidade constante de 80km/h, então, nessas duas horas ele percorreu a distância de:

2 . 80 = 160km

Na terceira hora, ele permaneceu parado (velocidade igual a zero).

Entre os instantes t = 3 e t = 5, a velocidade do motoqueiro foi constante de 120km/h, então, entre 3s e 5s percorreu a distância de:

2 . 120 = 240km

Distância percorrida total:

160km + 240km = 400km

Resposta:

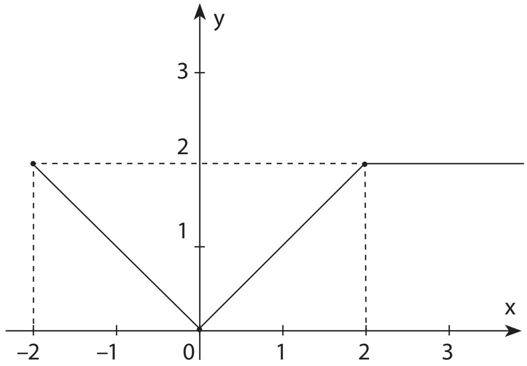
$$v(t) = \begin{cases} 80, \, se \; 0 \leq t \leq 2 \\ 0, \, se \; 2 < t < 3 \\ 120, \, se \; 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

e 400km.

3.

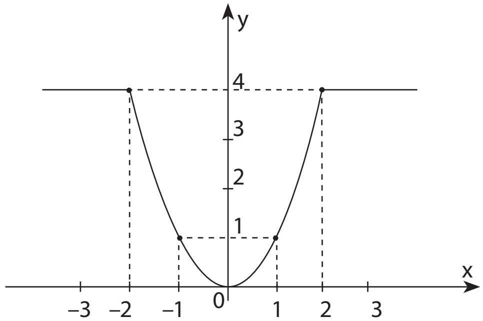
a)

x	y	(x, y)
–2	2	(–2, 2)
–1	1	(–1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)
4	3	(4, 3)

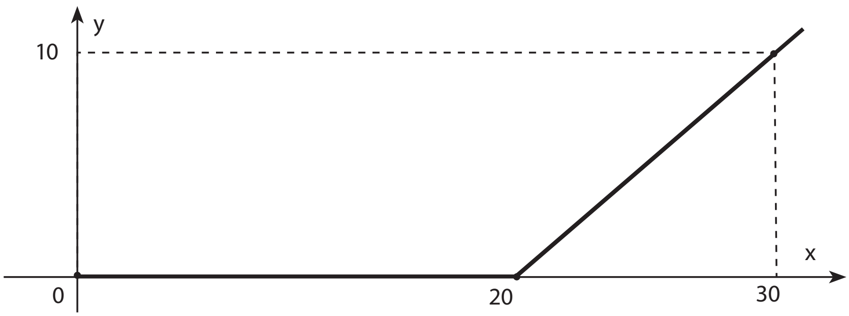


b)

x	y	(x, y)
–4	4	(–4, 4)
–3	4	(–3, 4)
–2	4	(–2, 4)
–1	1	(–1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	4	(3, 4)
4	4	(4, 4)



4. $$f(x) = \begin{cases} 0, \textit{ se } 0 \leq x \leq 20 \\ x - 20, \textit{ se } x > 20 \end{cases}$$



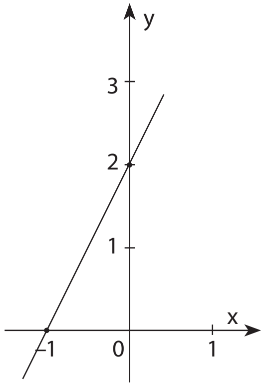
5.

a) Crescente em [0, 4]

b) Constante em]–∞, –2] e em [2, +∞[

decrescente em [–2, 2]

6.

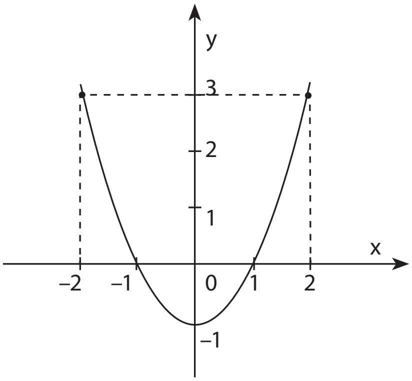


a) crescente.

b) crescente.

7.

a)



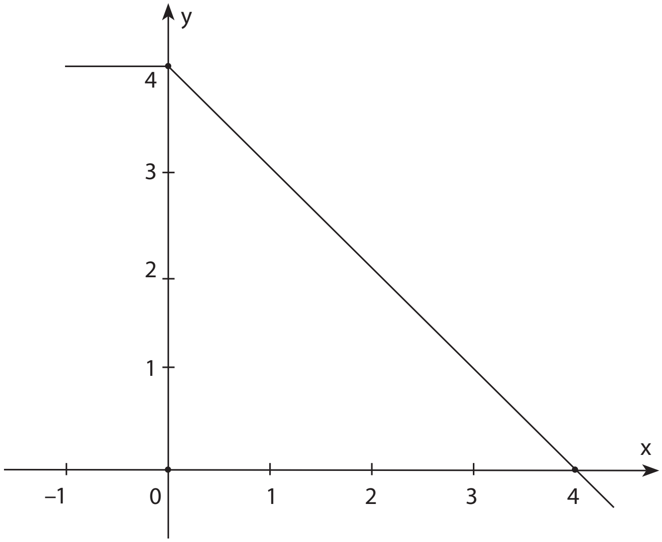
b) decrescente em [–2, 0]

crescente em [0, 2]

crescente em [2, 4]

c) o valor mínimo é -1

8.



Constante em]–∞, 4]

Decrescente em [4, +∞[

9.

a) decrescente em [–2, 0] e em [4, 8];

constante em [0, 2] e

crescente em [2, 4].

b) D = [–2, 8]

c) Im = [1, 5]

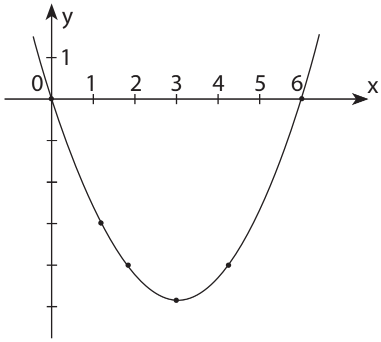
d) Valor máximo é 5 e valor mínimo é 1.

e) y varia de 2 a 5, ou seja, a variação é de 3 unidades.

f) Tem-se y = 2 para qualquer valor de x em [0, 2] ou para x = 7.

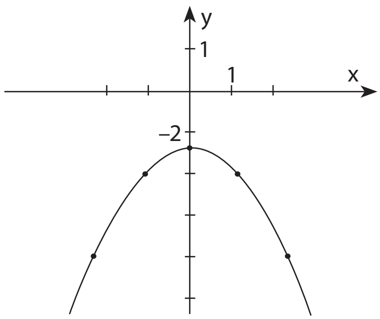
10.

a)



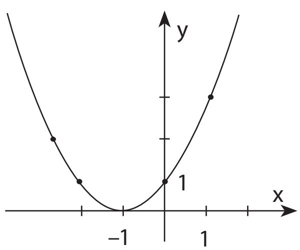
$$\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 6 \\ f(x) < 0, \text{ para } 0 < x < 6 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 6 \end{cases}$$

b)



$f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

c)



$$\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } x \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ f(x) = 0, \text{ para } x = -1 \\ \text{não existe } x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) > 0 \end{cases}$$

11.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

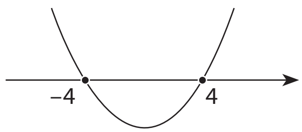
12.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

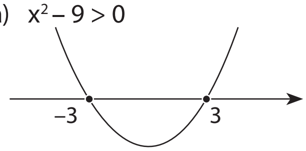
13. $f(x) > x^2 - 16$



$x^2 - 16 < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -4 < x < 4\}$

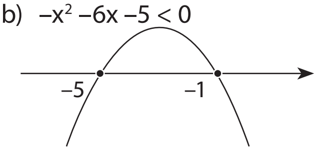
14.

a) $x^2 - 9 > 0$



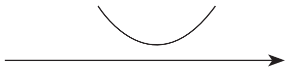
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

b) $-x^2 - 6x - 5 < 0$



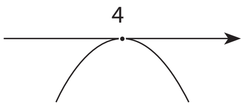
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > -1\}$

c) $x^2 + x + 1 \leq 0$



$S = \{\}$

d) $-x^2 + 8x - 16 < 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$