Marcelo Gorges
Olímpio Rudinin Vissoto Leite

MATEMÁTICA ELEMENTAR II:
situações de matemática do ensino médio no dia a dia

2009

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

L55m

Leite, Olímpio Rudinin Vissoto.

Matemática elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia. / Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Marcelo Gorges. – Curitiba, PR: IESDE, 2009.

444 p.

Sequência de: Matemática elementar I
ISBN 978-85-387-0414-0

1. Matemática (Ensino médio). I. Gorges, Marcelo. II. Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino. III. Título.

09-3612. CDD: 510
CDU: 51

Capa: IESDE Brasil S.A.
Imagem da capa: Júpiter Images/DPI Images

Ad Maiora Semper!

IESDE Brasil S.A.
Al. Dr. Carlos de Carvalho, 1.482. CEP: 80730-200
Batel – Curitiba – PR
0800 708 88 88 – www.iesde.com.br

Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Mestre em Gestão de Negócios pela Universidade Católica de Santos. Graduado em Licenciatura em Matemática pela USP.

Marcelo Gorges

Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Sumário

Princípio fundamental da contagem

Marcelo Gorges

Analise a seguinte situação:

Uma pessoa quer viajar de Minas Gerais para Porto Alegre passando por Curitiba. Partindo de Minas Gerais sabe-se que existem 4 roteiros diferentes para chegar a Curitiba e de Curitiba para Porto Alegre sabe-se que existem 3 roteiros diferentes, desta forma, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Minas Gerais para Porto Alegre?

Para resolver problemas deste tipo, podemos utilizar o princípio fundamental da contagem.

Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento pode ocorrer por várias etapas sucessivas e independentes, de tal modo que:

p_1 é o número de possibilidades da 1.ª etapa;

p_2 é o número de possibilidades da 2.ª etapa;

.
.
.

p_k é o número de possibilidades da k-ésima etapa.

Então:

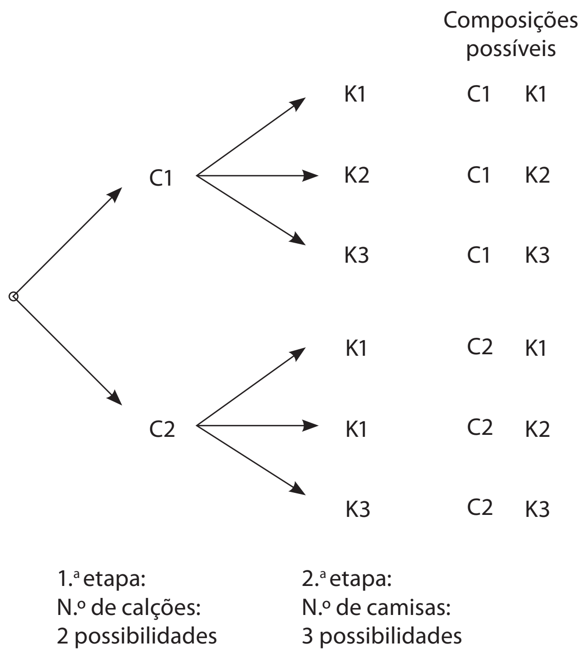
$p_1 . p_2 ... p_k$ é o número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer.

Exemplos:

1. Para um certo campeonato de futebol, o time do Didi dispõe de dois modelos de calção e três de camisa, para se diferenciar dos times adversários. Com esses calções e camisas, de quantas composições de uniformes o time do Didi dispõe para jogar?

Solução:

Podemos representar esta situação através do seguinte esquema:



Este esquema é conhecido como árvore das possibilidades.

Pelo princípio fundamental da contagem:

N.º de calções: 2

N.º de camisas: 3

Portanto: 2 . 3 = 6 composições diferentes de uniformes para jogo.

2. Uma moto é oferecida pelo fabricante em 6 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores de 1100cc e 1300cc. Sabendo que as motos são fabricadas nas versões X, XL e XR, quantas são as alternativas para o comprador?

Solução:

Em algumas situações o número de possibilidades é relativamente grande, o que torna a resolução utilizando a árvore das possibilidades muito trabalhosa. Para estes casos utilizaremos apenas o princípio fundamental das possibilidades. Assim:

Pelo princípio fundamental da contagem, são:

7. 2. 3 = 42 alternativas diferentes.

Tipos de agrupamentos

Arranjo simples

Um arranjo simples de *p* elementos, tirados de um conjunto com *n* elementos (*p* menor ou igual a *n*), é uma sequência desses *p* elementos, de modo que a mudança de ordem desses *p* elementos determina arranjos diferentes.

Notação

$$A_{n,p} \text{ ou } A_n^p \ (p \leq n)$$

Exemplo:

Quantos agrupamentos ordenados de dois elementos distintos podemos formar com os elementos do conjunto A igual a 1, 7 e 9?

(7, 8), (8, 7), (7, 9), (9, 7), (8, 9) e (9, 8)

Perceba que ao trocar a ordem dos números em cada agrupamento, obtemos um agrupamento diferente, ou seja:

$(7, 8) \neq (8, 7)$

Permutação simples

Uma permutação simples dos *n* elementos de um conjunto é uma sequência desses *n* elementos, de modo que a mudança de ordem desses *n* elementos determina permutações diferentes.

Notação:

$$P_n \ (p \leq n)$$

Exemplo:

Jefferson, Rodrigo e Ronaldo são amigos e formam uma fila para comprar lanches na cantina da escola. Não há uma única possibilidade para a formação dessa fila com 3 pessoas, há 6 possibilidades de sequências diferentes.

Solução:

Jefferson, Rodrigo e Ronaldo

Jefferson, Ronaldo e Rodrigo

Rodrigo, Ronaldo e Jefferson

Rodrigo, Jefferson e Ronaldo

Ronaldo, Jefferson e Rodrigo

Ronaldo, Rodrigo e Jefferson

Perceba que ao trocar a ordem dos nomes em cada fila, obtemos uma fila diferente, ou seja:

Jefferson, Rodrigo e Ronaldo $\neq$ Jefferson, Ronaldo e Rodrigo.

Combinação

Uma combinação simples de *p* elementos, tirado de um conjunto de *n* elementos (*p* menor ou igual a *n*), é qualquer subconjunto de *p* elementos desse conjunto, de modo que a mudança de ordem desses elementos determina a mesma combinação.

Notação:

$$C_{n,\,p} \ (p \leq n)$$

Exemplo:

Araci, Louise e Sílvia são amigas e formarão uma dupla para realizar um trabalho. Quais são as possibilidades de duplas? Veja:

Araci e Louise

Louise e Sílvia

Sílvia e Araci

Perceba que ao trocar a ordem dos nomes em cada dupla, a dupla continua a mesma, ou seja:

Araci e Louise = Louise e Araci

Exemplos:

1. Quantos anagramas podemos formar permutando a ordem das letras da palavra MARTELO?

Solução:

Como não existem letras repetidas na palavra MARTELO, temos então :

$7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5\,040$ anagramas diferentes.

2. Considerando a seguinte situação, com 10 pessoas presentes em uma sala, quantas filas diferentes de 3 pessoas podemos formar?

Solução:

Aplicando o princípio multiplicativo, calculamos a quantidade de filas diferentes, tem-se:

- 10 possibilidades de escolha para a pessoa que ocupará o 1.º lugar da fila;
- 9 possibilidades de escolha para a pessoa que ocupará o 2.º lugar da fila;
- 8 possibilidades de escolha para a pessoa que ocupará o 3.º lugar da fila;

Assim, a quantidade de filas diferentes é, nesse caso, igual a:

- $10 . 9 . 8 = 720$ possibilidades.

Exercícios

1. Para a eleição da Associação de Pais e Mestres da escola, há três candidatos a presidente (Ana, Ricardo e Patrícia) e dois a vice-presidente (Tatiana e Bruno). Represente utilizando um diagrama de árvore as possibilidades para os resultados dessa eleição?

2. Marcos tem 2 bermudas (gelo e cinza), 3 camisetas (branca, verde e amarela) e 2 tênis (azul e preto). De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma bermuda, uma camiseta e um tênis? Represente todas estas possibilidades, utilizando o diagrama de árvore.

3. Os números de telefones foram aumentados de 7 dígitos para 8 dígitos, devido a demanda de telefones ter aumentado. Com essa mudança, determine a quantidade máxima de telefones a serem instalados, sabendo que os números não devem começar com zero.

4. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7?

5. Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 2, 4, 6, 8?

6. Em uma lanchonete há 6 tipos de sanduíches, 5 tipos de sucos e 3 opções de sobremesas. De quantas maneiras podemos compor um lanche escolhendo 1 tipo de sanduíche, 1 tipo de suco e 1 sobremesa?

7. De quantas maneiras diferentes se pode vestir uma pessoa que tenha 4 calças, 3 camisas, 2 pares de meias e 3 pares de sapato?

8. Existem 4 linhas de ônibus ligando a cidade A à cidade B, e 2 outras linhas de ônibus ligando a cidade B à cidade C. Seu João deseja viajar da cidade A para a cidade C, passando por B. De quantas maneiras diferentes ele poderá fazer essa viagem?

9. A placa de um automóvel, no Brasil, é constituída por 3 letras e 4 números. Sabendo que podem ser usadas 26 letras e 10 algarismos como possibilidades de formação para cada placa, quantas placas diferentes podem ser feitas de modo que, em cada uma, existam três letras não repetidas seguidas de quatro algarismos repetidos ou não?

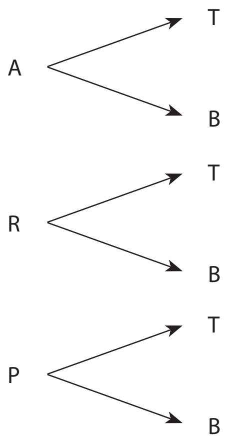
10. Na aula de Educação Física o professor vai sortear 5 jogadores para formar uma equipe de futsal. Você e mais nove colegas estão ansiosos para serem sorteados. Qual é a chance de você fazer parte da equipe?

11. Uma fábrica de embalagens tem em seu portfólio 4 tamanhos diferentes de caixas de papelão. Nessas caixas é possível imprimir logotipos de apenas uma cor, em apenas uma face da caixa. Existem 3 opções de cores e 5 faces distintas para serem escolhidas. Há também a possibilidade de se colocar um forro plástico nas caixas. Quantas caixas distintas podem ser encomendadas nesta fábrica?

Gabarito

Princípio fundamental da contagem

1.

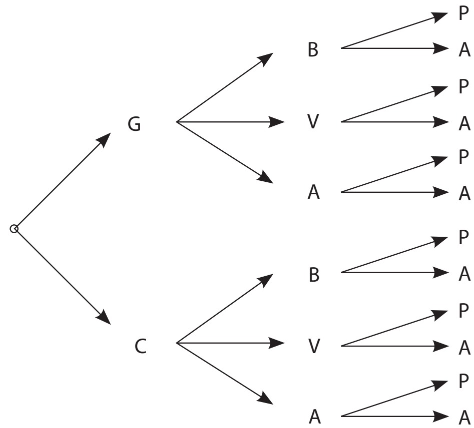


AT
AB
RT
RB
PT
PB

6 resultados possíveis

Presidente:	Vice-presidente:
3 possibilidades	2 possibilidades

2.



1.ª etapa:	2.ª etapa:	3.ª etapa:
N.º de bermudas:	N.º de camisas:	N.º de tênis:
2 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades

3. $9 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 9 . 10^7$
$= 90\,000\,000$.

4. $4 . 3 . 2 = 24$

5. $4 . 4 . 3 = 48$

6. $6 . 5 . 3 = 90$

7. $4 . 3 . 2 . 3 = 72$

8. $4 . 2 = 8$

9. $\underbrace{26 \,.\, 25 \,.\, 24}_{\text{letras diferentes}} \,.\, \underbrace{10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10}_{\text{números}} = 156\,000\,000$ placas diferentes

10. Você: 1 possibilidade;

Não você: 9 possibilidades;

Não você: 8 possibilidades;

Não você: 7 possibilidades;

Não você: 6 possibilidades;

Mas não se pode esquecer de eliminar as repetições. Nesse caso, como temos 4 "não você", vamos dividir por 4 . 3. 2. 1, assim, o número de grupos de equipes que você participa é: $\frac{1 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = \frac{3\,024}{24} = 126$

11. Utilizando o princípio fundamental da contagem temos:

$4 \rightarrow$ tamanhos;

$3 \rightarrow$ opções de cores;

$5 \rightarrow$ possíveis faces;

$2 \rightarrow$ ter ou não forro.

Utilizando o princípio fundamental da contagem temos:

$N=4 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2=120$

Portanto, temos 120 possíveis caixas distintas.