

# MATEMÁTICA ELEMENTAR II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia



© 2009 – IESDE Brasil S.A. É proibida a reprodução, mesmo parcial, por qualquer processo, sem autorização por escrito dos autores e do detentor dos direitos autorais.

#### CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

L55m

Leite, Olímpio Rudinin Vissoto.

Matemática elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia. / Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Marcelo Gorges. - Curitiba, PR: IESDE, 2009.

444 p.

Sequência de: Matemática elementar I

ISBN 978-85-387-0414-0

1. Matemática (Ensino médio). I. Gorges, Marcelo. II. Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino. III. Título.

09-3612. CDD: 510

CDU: 51

Capa: IESDE Brasil S.A. Imagem da capa: Júpiter Images/DPI Images

Todos os direitos reservados.



#### **IESDE Brasil S.A.**

Al. Dr. Carlos de Carvalho, 1.482. CEP: 80730-200 Batel - Curitiba - PR Ad Maiora Seugar! 0800 708 88 88 - www.iesde.com.br

Esse material é parte integrante do Aulas Particulares on-line do IESDE BRASIL S/A, mais informações www.aulasparticularesiesde.com.br

## Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Mestre em Gestão de Negócios pela Universidade Católica de Santos. Graduado em Licenciatura em Matemática pela USP.

### **Marcelo Gorges**

Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

# Sumário

#### Números e operações | 11

- Números naturais | 11
- Números inteiros | 14
- Números racionais | 17
  - Números reais | 20
  - Porcentagem | 24
- Fator de aumento | 26
- Fator de redução | 27

#### Geometria e medidas | 33

- Comprimento e massa | 33
- Área, volume e capacidade | 37
  - Volume e capacidade | 42
- Estimativas e arredondamentos | 46
  - Teorema de Tales | 51
  - Teorema de Pitágoras | 58

#### Gráficos | 65

Tipos de gráficos | 65

#### Introdução às funções | 83

- Conceito intuitivo de função | 83
  - Gráfico cartesiano | 85
- Domínio e imagem de uma função | 88
  - Uma nova notação para função | 89

#### Função afim | 97

Gráfico da função afim | 97
Função linear | 98
Função identidade | 98
Função constante | 99
Coeficientes da função afim | 100
Interseção da reta com eixo x (raiz da função afim) | 101
Equações da reta | 108

#### Função quadrática | 115

Gráfico de uma função quadrática | 115 Domínio e imagem da função quadrática | 126 Máximo ou mínimo de uma função quadrática | 127

#### Tópicos complementares de funções | 135

Função definida por várias sentenças | 135 Estudo da variação das funções | 139 Valores extremos de uma função | 141 Estudo do sinal de uma função | 147 Inequação | 149

#### Funções exponenciais | 155

Potenciação | 155 Propriedades das potências | 156 Notação científica | 157 Função exponencial | 163 Equações exponenciais | 169

#### Função logarítmica | 175

O que é logaritmo? | 175

Propriedades dos logaritmos | 178

Função logarítmica | 186

Equação logarítmica | 190

A função exponencial de base 'e' e de base  $\frac{1}{e}$  | 192

Logaritmo natural | 193

#### Introdução à trigonometria | 197

As razões trigonométricas | 197

Como calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo? | 199

Seno, cosseno e tangente de um ângulo obtuso | 211

Lei dos senos | 219

Lei dos cossenos | 219

#### Progressão Aritmética (P.A.) | 225

Sequência numérica | 225

Progressão Aritmética (P.A.) | 228

#### Progressão Geométrica (P.G.) | 241

Progressão Geométrica | 241

Classificação de P.G. | 242

#### Sistemas lineares | 259

Matrizes | 259

Determinantes | 265

Sistemas lineares | 269

#### Princípio fundamental da contagem | 279

Princípio fundamental da contagem | 279 Tipos de agrupamentos | 281

#### Análise combinatória | 287

Fatorial | 287
Permutação simples | 288
Permutação com repetição | 289
Arranjo simples | 292
Combinação simples | 295

#### Noções de probabilidade | 299

Experimentos aleatórios | 299 Probabilidade | 300 Probabilidade condicional | 306

#### Matemática Financeira | 313

Porcentagem | 313
Porcentagem de uma quantia | 314
Porcentagem de um número em relação a outro | 314
Aumento | 315
Desconto | 317
Juros | 320

#### Geometria espacial | 327

Prismas | 327

Paralelepípedo reto-retângulo | 329

Cubo | 330

Pirâmides | 334

Cilindro | 339

Cone | 341

Esfera | 342

#### Estatística | 345

Notações | 345

Tipos de variáveis | 345

Medidas de tendência central | 346

Medidas de dispersão | 350

Apresentação de dados estatísticos | 353

Frequências | 354

#### Circunferência trigonométrica | 359

Circunferência trigonométrica | 359

Relações trigonométricas | 363

# **Gráficos**

#### Olímpio Rudinin Vissoto Leite

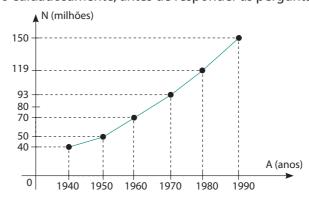
### ■ Tipos de gráficos

Veja os principais tipos de gráficos.

#### Gráfico de linha

O gráfico de linha é usado para informar a variação de uma grandeza em função de outra. O gráfico abaixo relaciona *população* com o *tempo*, mostrando a evolução da população brasileira.

Examine-o cuidadosamente, antes de responder as perguntas a seguir:



- a) Quantos habitantes havia no Brasil em 1970?
- b) Em que década a população brasileira ultrapassou os 100 milhões de habitantes?
- c) Quanto cresceu a população brasileira de 1940 a 1990?

#### Resolução:

- a) 93 milhões.
- b) na década de 1970
- c) 110 milhões.

#### Gráficos de barras

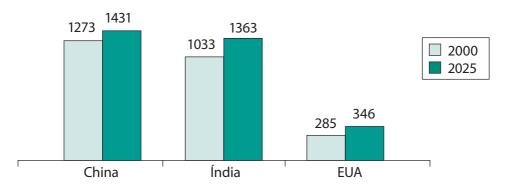
Os gráficos de barras contêm, geralmente, informações relativas a diversas grandezas.

Nesse tipo de gráfico, as barras podem ser horizontais ou verticais.

#### Gráfico de barras verticais

O gráfico a seguir, de barras verticais, mostra os países com maior população do mundo em 2000 e a previsão da população para o ano 2025:

Países com maior população (milhões de habitantes)



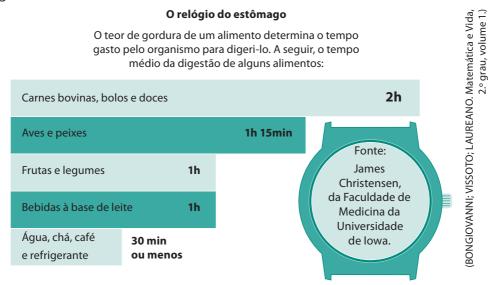
- a) Qual o país com a maior população do mundo, hoje e, provavelmente, em 2025?
- b) Qual dos países deverá ter maior crescimento populacional, em milhões de habitantes?

#### Resolução:

- a) China.
- b) Índia, pois deverá ter um crescimento de 330 milhões de habitantes.

#### Gráfico de barras horizontais

O gráfico de barras horizontais a seguir mostra o tempo de digestão de alguns alimentos.



Analisando esse gráfico, responda:

- a) Quantos minutos o organismo humano gasta para digerir um pedaço de frango?
- b) O que é mais digestível: um filé de peixe ou um filé bovino?
- c) Uma hora antes das refeições, é preferível ingerir um doce ou uma fruta? Por quê?

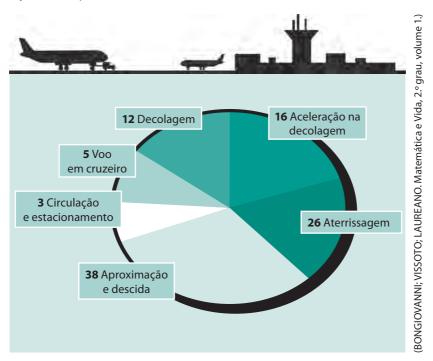
#### Resolução:

- a) 1h15min.
- b) Filé de peixe.
- c) Fruta, pois é digerida mais rapidamente.

#### Gráfico de setores circulares

O gráfico de setores circulares, também chamado atualmente de gráfico de "pizza", é usado principalmente para informar o que acontece com as partes de um todo.

#### Veja o exemplo:



Esse gráfico mostra os momentos do voo em que são mais frequentes os acidentes de avião, considerando um total de 100 ocorrências. Analisando as informações, responda:

- a) Em que momento do voo é mais comum a ocorrência de acidentes?
- b) Em cada 100 acidentes aéreos, quantos ocorrem no momento da aterrissagem?
- c) Ocorrem mais acidentes na decolagem ou na aterrissagem de um avião?

#### Resolução:

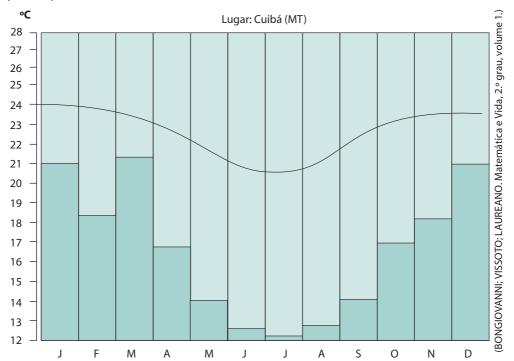
- a) Na aproximação do aeroporto e na descida.
- b) 26
- c) Aterrissagem.

#### **Gráficos sobrepostos**

A construção de dois ou mais gráficos sobrepostos permite uma comparação mais eficaz das grandezas envolvidas.

#### **Exemplo:**

Os gráficos referem-se a dados coletados durante um ano em Cuiabá (MT). A curva mostra a variação de temperatura; as barras, as precipitações atmosféricas (chuvas) em milímetros:



Analisando esses gráficos, responda:

- a) Em que meses ocorreram as temperaturas mais elevadas?
- b) Em que mês choveu menos?
- c) Que relação pode ser estabelecida entre a temperatura e as precipitações atmosféricas (chuvas)?

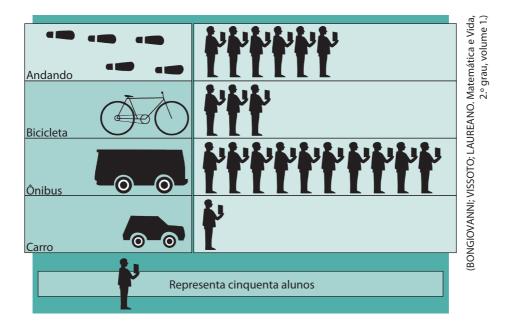
#### Resolução:

- a) Janeiro, março e dezembro.
- b) Julho.
- c) Quanto maior a temperatura, maior a precipitação de chuvas.

#### **Pictogramas**

Os gráficos que usam desenhos para representar os dados da informação são chamados de pictogramas. Nesses gráficos, as figuras variam de tamanho ou quantidade.

Uma pesquisa feita entre mil alunos mostrou o meio de transporte que eles utilizam para se dirigirem à escola. Os resultados estão apresentados a seguir:



Observando o gráfico, responda:

- a) Qual o meio de transporte mais usado?
- b) Quantos alunos vão à escola de bicicleta?
- c) Quantos alunos não vão andando?

#### Resolução:

- a) Ônibus.
- b) 150
- c) 700

#### Construção e análise de um gráfico cartesiano

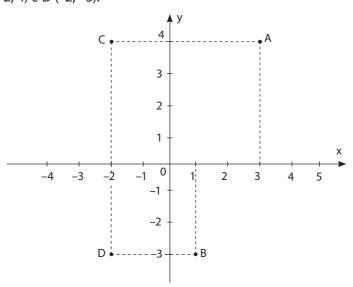
Para fixar um referencial cartesiano em um plano, desenhar duas retas reais perpendiculares e de mesma origem (eixos). A reta real horizontal é chamada de eixo x (das abscissas) e a reta real vertical, de eixo y (das ordenadas).

Fixado um referencial cartesiano em um plano, todo ponto desse plano é representado por um par ordenado (a, b) de números reais e todo par ordenado (a, b) de números reais está associado a um ponto do plano.

Indicamos, por exemplo, P (a, b), onde P é o ponto do plano associado aos números reais a e b. Esses números são chamados de *coordenadas do ponto*.

#### **Exemplos:**

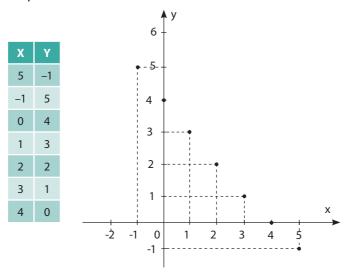
**1.** No referencial cartesiano abaixo, localizamos os pontos A (3, 4), B (1, -3), C (-2, 4) e D (-2, -3):



2. Representar graficamente, num referencial cartesiano, a equação x + y = 4.

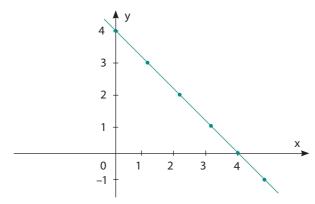
#### Solução:

A tabela a seguir mostra algumas duplas de números que satisfazem a equação, associadas a pontos da "curva":



Observe, no exemplo acima, que os pontos estão alinhados, sugerindo serem de uma reta.

Assim, a curva associada à equação x + y = 4, num referencial cartesiano, é uma reta:

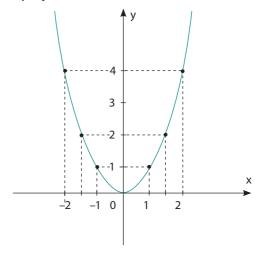


3. Construir o gráfico da equação  $y = x^2$ , num referencial cartesiano.

#### Solução:

A tabela abaixo mostra alguns pares ordenados que satisfazem a equação, associadas a pontos importantes da curva. Nesse caso, os valores atribuídos a x não foram escolhidos por acaso. Aprendemos a escolher valores adequados para x, estudando os gráficos de diversas equações.

Х	Υ
0	0
-0,5	0,25
-1	1
0,5	0,25
1	1
-2	4
2	4
-1,5	2,25
1,5	2,25



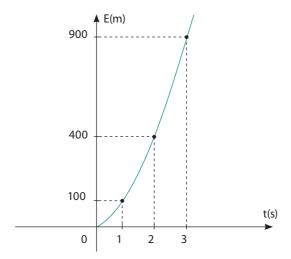
#### Como analisar um gráfico?

Inicialmente, identificamos o tipo de curva associada à equação dada; em seguida, estudamos as propriedades dessa curva.

Nas questões geométricas, as unidades dos eixos do referencial cartesiano devem ser representadas por segmentos de mesma medida.

#### **Exemplos:**

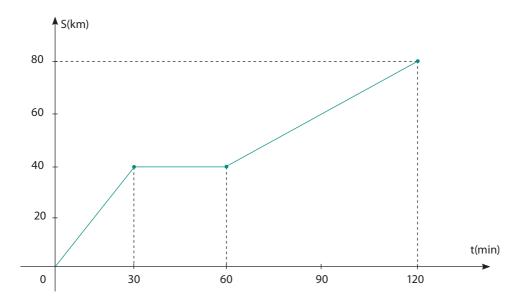
1. O gráfico a seguir mostra o espaço percorrido por um foguete, em função do tempo.



Observe a diferença entre as medidas dos segmentos utilizados como unidade para x e para y.

A análise de um gráfico também pode ser feita a partir da definição de referencial cartesiano.

2. O gráfico cartesiano abaixo mostra o espaço S (em quilômetros) percorrido por um automóvel, em função do tempo t (em minutos):



Observar o gráfico e responder:

- a) Entre que instantes o carro esteve parado?
- b) Qual a velocidade escalar média desenvolvida pelo carro entre o início e o fim da viagem?

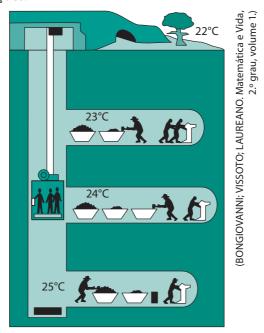
#### Solução:

- a) Entre 30min e 60min, o espaço percorrido permaneceu constante (40km). Logo, o carro esteve parado durante esse intervalo de tempo.
- b) O carro percorreu um total de 80km em 120min ou 2h. Logo, a sua velocidade escalar média foi de:

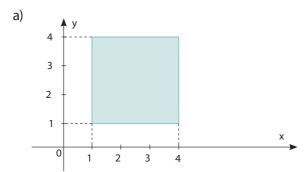
$$v = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{80 \text{km}}{2 \text{h}} = 40 \text{km/h}$$

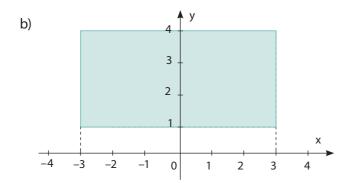
# **Exercícios**

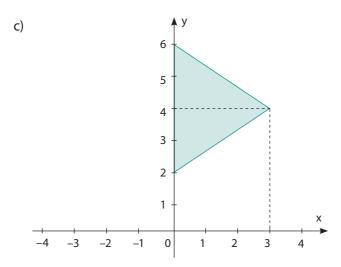
1. Medições realizadas mostram que a temperatura, no interior da Terra, aumenta, aproximadamente, 3°C a cada 100m de profundidade. Num certo local, a 100m da superfície, a temperatura é de 25°C, como mostra a figura a seguir. Nessas condições:

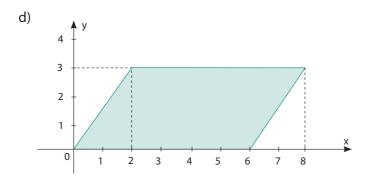


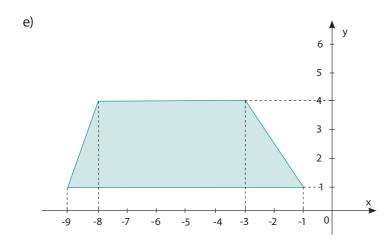
- a) Qual é a temperatura a 1 500m de profundidade?
- b) A que profundidade se encontra uma fonte de água mineral a 46°C?
- 2. Os segmentos tomados como unidade, nos eixos dos Referenciais Cartesianos a seguir, representam a medida de 1cm. Assim, calcule a área de cada figura, em cm<sup>2</sup>.

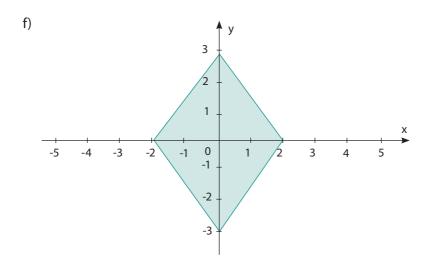


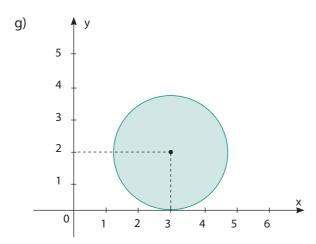












3. Complete as tabelas a seguir, desenhe os eixos do Referencial Cartesiano, localize os pontos associados aos pares ordenados e desenhe o gráfico cartesiano que representa cada equação.

a) 
$$y = x - 2$$

Х	-3	-2	-1	0	1	2	3
у							

b)  $y = x^2 - 4$  (a curva obtida é uma *parábola*)

Х	-3	-2	-1	0	1	2	3
у							

c) 
$$y = \sqrt{x}$$

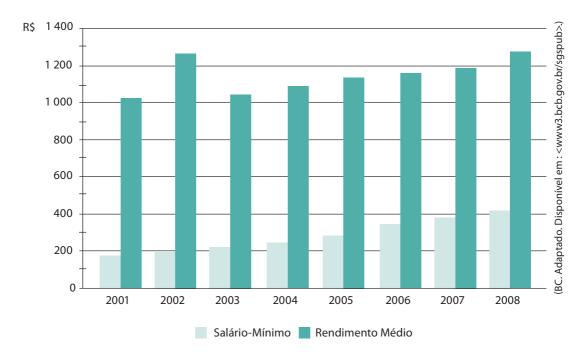
X	0	1	2	3	4	5
у			1,4	1,7		2,2

**4.** As tabelas a seguir mostram alguns dados sobre as exportações das empresas brasileiras para os Estados Unidos, no ano de 2007:

Faixas de valor das exportações	Número de empresas	_	Unidades da Federação	Número de empresas
Até US\$1 milhão	6 211		SP	3 206
Entre US\$1 e 10 milhões	1 253		RS	811
Entre US\$10 e 50 milhões	326		MG	753
Entre US\$50 e 100 milhões	39		SC	538
Acima de US\$100 milhões	34	_	Outras	2 555
Total	7 863	_	Total	7 863

A partir dos dados anteriores, esboce um gráfico de barras verticais e outro de pizza, escolhendo um tipo para cada tabela. Lembre-se que o gráfico de barras é mais bem interpretado quando existe uma comparação de categorias e o gráfico de pizza é mais eficaz para a visualização de cada uma das partes dentro de um todo.

5. Previsto na Constituição Brasileira, o salário-mínimo é um direito do trabalhador e deve ser capaz de atender às necessidades básicas dele e da sua família. Ele é unificado, ou seja, tem o mesmo valor em todo o país, e seu valor sofre reajustes para que o poder aquisitivo do trabalhador não seja diminuído com o passar do tempo. O gráfico a seguir mostra o valor do salário-mínimo e o rendimento médio do trabalhador brasileiro para o mês de setembro, no período compreendido entre 2001 e 2008.



a) Em qual ano o salário-mínimo alcançou seu maior valor? E o rendimento médio?

b) Considerando que o gráfico representa os valores de maneira proporcional, utilize uma régua e descubra qual ano apresentou a maior diferença entre os valores do salário-mínimo e do rendimento médio.

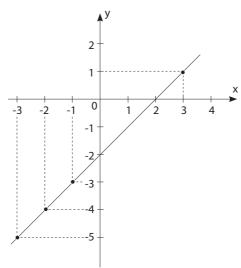
c) Quantas vezes o valor do salário-mínimo, em setembro de 2008, é maior do que o valor do salário-mínimo em setembro de 2002?

# Gabarito

#### **Gráficos**

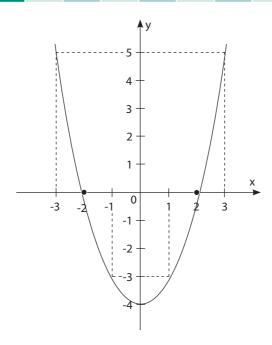
- 1.
- a) A temperatura, a 1 500m de profundidade é cerca de 67°C.
- b) A profundidade é de aproximadamente 800m.
- 2.
- a)  $A = 9cm^2$
- b)  $A = 18cm^2$
- c)  $A = 6cm^2$
- d)  $A = 18cm^2$
- e)  $A = 19.5 \text{cm}^2$
- f)  $A = 12cm^2$
- g)  $A = 12,56 \text{cm}^2$
- 3.
- a) y = x 2

х	-3	-2	-1	0	1	2	3
				-2			



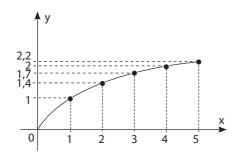
#### b) $y = x^2 - 4$ (a curva obtida é uma *parábola*)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
у	5	0	-3	-4	-3	0	5

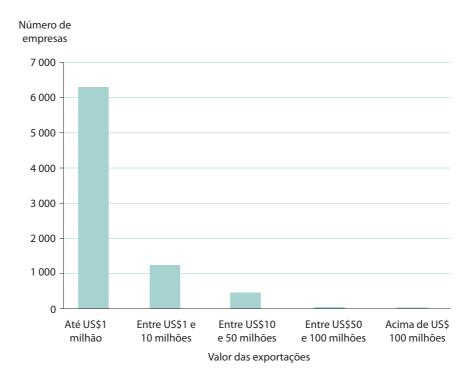


#### c) $y = \sqrt{x}$

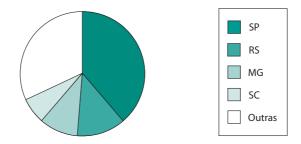
x	0	1	2	3	4	5
у	0	1	1,4	1,7	2	2,2



4.



### Participação das Unidades da Federação nas exportações para os EUA



- 5.
- a) 2008; 2002.
- b) 2002.
- c) Aproximadamente 2,1 vezes maior


Matemática Elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia