Marcelo Gorges
Olímpio Rudinin Vissoto Leite

MATEMÁTICA ELEMENTAR II:
situações de matemática do ensino médio no dia a dia

2009

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

L55m

Leite, Olímpio Rudinin Vissoto.
Matemática elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia. / Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Marcelo Gorges. – Curitiba, PR: IESDE, 2009.
444 p.

Sequência de: Matemática elementar I
ISBN 978-85-387-0414-0

1. Matemática (Ensino médio). I. Gorges, Marcelo. II. Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino. III. Título.

09-3612. CDD: 510
CDU: 51

Capa: IESDE Brasil S.A.
Imagem da capa: Júpiter Images/DPI Images

Ad Maiora Semper!

IESDE Brasil S.A.
Al. Dr. Carlos de Carvalho, 1.482. CEP: 80730-200
Batel – Curitiba – PR
0800 708 88 88 – www.iesde.com.br

Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Mestre em Gestão de Negócios pela Universidade Católica de Santos. Graduado em Licenciatura em Matemática pela USP.

Marcelo Gorges

Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Sumário

Geometria e medidas

Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Comprimento e massa

Comprimento

O comprimento, estudado há tempos pelo homem, pode hoje, ser medido através de várias escalas: a régua, a fita métrica, o metro e aparelhos de alta precisão.

Podemos definir a distância entre dois pontos distintos *A* e *B* como sendo o comprimento do segmento de reta de extremidades *A* e *B*.

A unidade-padrão de medida do comprimento é o *metro (m)*. Os múltiplos e submúltiplos do metro mais utilizados são: o quilômetro *(km),* o decímetro *(dm)*, o centímetro *(cm)* e o milímetro *(mm)*.

Assim, temos:

$1\text{km} = 1\ 000\text{m} = 10^3\text{m}$

$1\text{dm} = 0{,}1\text{m} = 10^{-1}\ \text{m}$

$1\text{cm} = 0{,}01\text{m} = 10^{-2}\text{m}$

$1\text{mm} = 0{,}001\text{m} = 10^{-3}\text{m}$

Ou ainda:

$1\text{m} = 10\text{dm}$

$1\text{m} = 100\text{cm}$

$1\text{m} = 1\ 000\text{mm}$

Exemplo:

- Em média, o passo de Mário Augusto mede 50cm. Achar, em metros, quilômetros, decímetros e milímetros, a distância percorrida por Mário Augusto ao dar mil passos.

Solução:

Mil passos de Mário Augusto correspondem à distância: 1 000 . 50cm = 50 000cm.

Então:

- Em metros: $50\,000\text{cm} = \frac{50\,000}{100}\text{m} = 500\text{m}$;
- Em quilômetros: $500\text{m} = \frac{500}{1\,000}\text{km} = 0{,}5\text{km}$;
- Em decímetros: $500\text{m} = 500 \cdot 10\text{dm} = 5\,000\text{dm} = 5 \cdot 10^3\text{dm}$;
- Em milímetros: $500\text{m} = 500 \cdot 1\,000\text{mm} = 500\,000\text{mm} = 5 \cdot 10^5\text{mm}$.

Massa

A massa de um corpo é um número determinado pela comparação com a massa de outro corpo, tomado como padrão.

A unidade-padrão de medida de massa no SI é o quilograma (*kg*). Os múltiplos e submúltiplos do quilograma mais utilizados são: o grama (*g*), o miligrama (*mg*) e a tonelada (*t*).

Assim, temos:

$1\text{t} = 1\,000\text{kg} = 10^3\text{kg}$

$1\text{kg} = 1\,000\text{g} = 10^3\text{g}$

$1\text{g} = 0{,}001\text{kg} = 10^{-3}\text{kg}$

$1\text{mg} = 0{,}001\text{g} = 10^{-3}\text{g}$

Exemplo:

- Dona Margarida precisava descobrir a massa de um único feijão. Usando uma balança, descobriu que a massa de mil feijões era de 0,47kg. Desse modo, Dona Margarida determinou valores aproximados para a massa de um feijão em quilogramas, em gramas e em miligramas. Que valores ela obteve?

Solução:

A massa de um feijão é $\frac{0,47}{1\,000}$kg = 0,00047kg. Então,

- Em gramas: 0,00047kg = 0,00047 . 1 000g = 0,47g.
- Em miligramas: 0,47g = 0,47 . 1 000mg = 470mg.

Exercícios

1. Uma montanha tem 937,8m de altitude. Dê essa medida em:

a) km

b) dm

c) cm

d) mm

2. Alberto deve cortar uma ripa de 1,65m em dois pedaços, de modo que um tenha 35cm a mais que o outro. Quanto deve medir cada pedaço?

3. Um analgésico deve ser ingerido na quantidade de 3mg por quilograma de massa corporal. Não pode, contudo, exceder 200mg por dose ministrada. Cada gota contém 5mg do remédio. Quantas gotas desse analgésico devem ser prescritas a um paciente de 80kg?

4. Um avião tem capacidade para 400 passageiros. Cada pessoa tem, em média, massa de 70kg e pode levar até 20kg de bagagem. Quantas toneladas, aproximadamente, esse avião tem capacidade para carregar?

5. O corpo humano possui cerca de trinta bilhões de células. Em média, o comprimento de cada célula é de 0,2mm. Se essas células pudessem ser colocadas uma ao lado da outra, que comprimento teria a fila? Dê a resposta em metros e em notação científica.

6. Um livro possui mil folhas, que totalizam 8cm de espessura. A massa de cada folha é de 1,5g e a de cada capa é de 20g. Determine:

a) a massa do livro;

b) a espessura de cada folha.

Área, volume e capacidade

Área

A área de uma superfície é um número obtido pela comparação com outra superfície, tomada como padrão.

O conceito de área está ligado a inúmeras situações cotidianas: pintura de um cômodo, substituição do carpete de um quarto, colocação de papel de parede, troca de piso, compra de um terreno etc.

As unidades de área mais usadas são: o metro quadrado (m^2), o quilômetro quadrado (km^2) e o centímetro quadrado (cm^2).

Observe que

$1km^2 = (1\,000m)^2 = 1\,000\,000m^2 = 10^6m^2$

$1m^2 = (100cm)^2 = 10\,000cm^2 = 10^4cm^2$

Exemplo:

- Prova-se que a área de um quadrado, cujos lados medem b em qualquer unidade de comprimento, é dada por $A = b^2$. Assim, calcule a área do quadrado cujos lados medem 0,5m. Dê a resposta em metros quadrados e em centímetros quadrados.

Solução:

$A = (0,5)^2m^2 = 0,25m^2$. Mas, $0,5m = 50cm$. Logo, $A = 50cm^2 = 2\,500cm^2$.

O conceito de área também é utilizado no cálculo da densidade demográfica. Então: Densidade demográfica (D) de uma região é a razão entre o número de habitantes e a área dessa região.

Exemplo:

- O estado de Pernambuco tem área de 100 000km² e 8,4 milhões de habitantes. Qual é a densidade demográfica de Pernambuco? (valores aproximados)

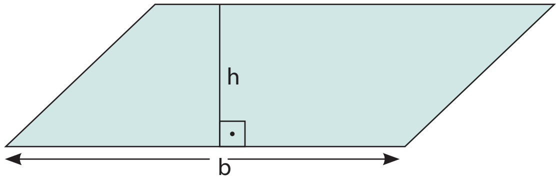
Solução:

$$D = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área}} = \frac{8\,400\,000\text{hab}}{100\,000\text{km}^2} = 84\text{hab/km}^2$$

Fórmulas para o cálculo de áreas

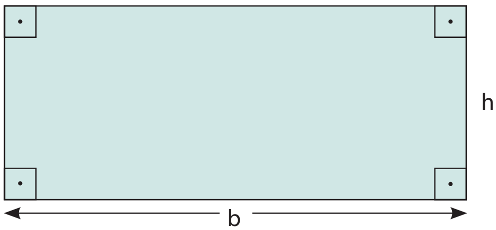
Paralelogramo

$$\boxed{A = b\,.\,h}$$



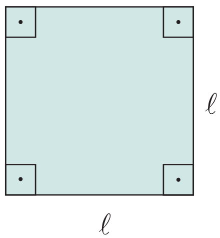
Retângulo

$$\boxed{A = b\,.\,h}$$



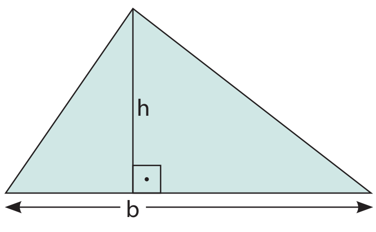
Quadrado

$$\boxed{A = \ell^2}$$



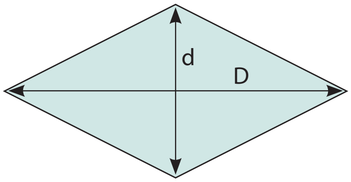
Triângulo

$$\boxed{A = \frac{b\,.\,h}{2}}$$



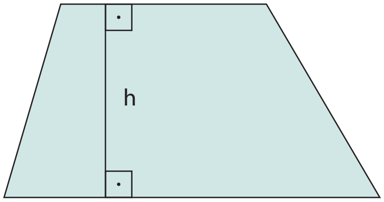
Losango

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



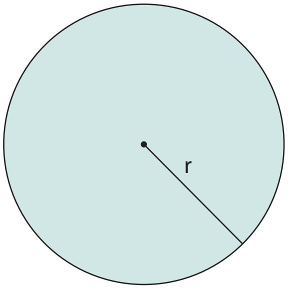
Trapézio

$$A = (b + B)\,\frac{h}{2}$$



Círculo

$$A = \pi \cdot r^2$$



Exercícios

7. Um campo de futebol de forma retangular mede 45m de largura e 90m de comprimento. Quantas placas quadradas de grama serão necessárias para cobrir todo o campo, se cada placa tem 1,5m de lado?

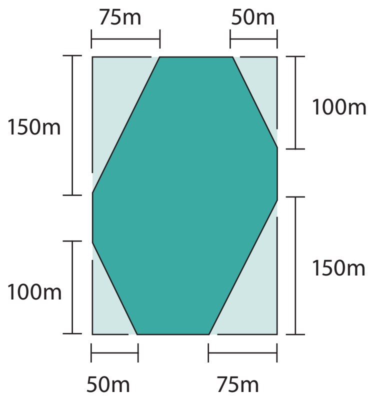
8. A base de um triângulo mede 1,2m e a altura 70cm. Dê a área desse triângulo em metros quadrados.

9. Qual é, em centímetros quadrados, a área de um paralelogramo de 1,20m de base e 80cm de altura?

10. Um trapézio tem 10cm e 8cm de bases e 12cm de altura. Qual é a sua área?

11. Uma praça tem a forma de uma circunferência. Se o raio da circunferência é de 100m, qual é a área da praça, em quilômetros quadrados?

12. Um terreno está inscrito em um retângulo cujos lados medem 200m e 300m. Calcule a área desse terreno. (Sugestão: calcule a área do retângulo e as áreas dos triângulos).



13. A densidade demográfica do Rio Grande do Sul é de aproximadamente 37,5hab/km^2. Se a área ocupada por esse estado é próxima de 280 000km^2, determine o número de habitantes.

14. A população do Ceará é de aproximadamente 8,1 milhões de habitantes. Esse importante estado brasileiro ocupa uma área próxima de 150 000km^2. Qual é, em hab/km^2, a densidade demográfica do Ceará?

Volume e capacidade

Volume

O volume de um sólido é um número obtido pela comparação com outro sólido, tomado como padrão.

As unidades de volume mais usuais são o centímetro cúbico *(cm^3),* o decímetro cúbico *(dm^3)* e o metro cúbico *(m^3).*

Observe que:

- $1m^3 = (10dm)^3 = 1\,000dm^3$
- $1m^3 = (100cm)^3 = 1\,000\,000cm^3$
- $1dm^3 = (10cm)^3 = 1\,000cm^3$

Exemplo:

- Prova-se que o volume de um cubo cujas arestas medem b em qualquer unidade de comprimento é dado por $V = b^3$. Assim, calcule o volume de um cubo cujas arestas medem 0,5m. Dê a resposta em metros cúbicos e em decímetros cúbicos.

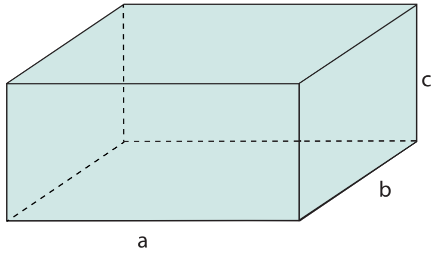
Solução:

$V = (0{,}5m)^3 = 0{,}125m^3$. Mas, $0{,}5m = 5dm$. Logo, $V = (5dm)^3 = 125dm^3$.

Fórmulas para o cálculo de volumes

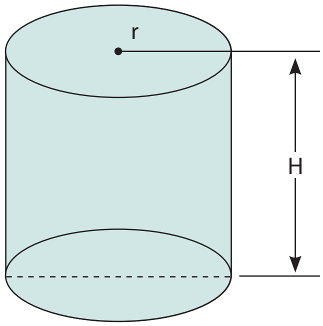
Bloco retangular (paralelepípedo retangular)

$$\boxed{V = a \,.\, b \,.\, c}$$



Cilindro reto

$$\boxed{V = \pi \,.\, r^2 \,.\, H}$$



Outro conceito associado ao de volume é o de densidade. Densidade *(D)* de um corpo é a razão entre a massa e o volume desse corpo.

Exemplo:

- Qual é a densidade de uma bola maciça de ferro de 76g de massa e $10cm^3$ de volume?

Solução:

$$D = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{76g}{10cm^3} = 7{,}6\,\frac{g}{cm^3} = 7{,}6g/cm^3$$

Capacidade

Para medir o volume interno de um recipiente, ou seja, a sua capacidade, a unidade usada é o litro, que na prática é igual a $1dm^3$.

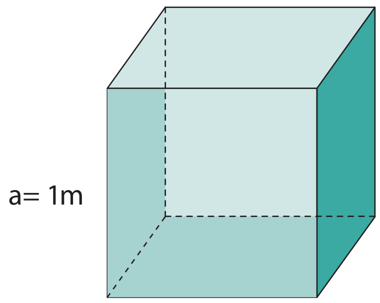
O principal submúltiplo do litro (ℓ) é o mililitro ($m\ell$).

Observe que:

- $1dm^3 = 1\ell = 1\,000m\ell$
- $1dm^3 = (10cm)^3 = 1\,000cm^3$. Logo, $1cm^3 = 1m\ell$
- $1m^3 = (10dm)^3 = 1\,000dm^3 = 1\,000\ell$

Exemplo:

- Uma caixa d´água tem forma cúbica e suas arestas medem 1m. Qual é, em litros, a capacidade dessa caixa?



Solução:

$$V = a^3 = (1m)^3 = 1m^3 = 1\,000\ell$$

Exercícios

15. Uma caixa d'água em forma de bloco retangular tem arestas medindo 1m, 1,20m e 80cm. Calcule, em metros cúbicos, o volume dessa caixa e, em litros, a sua capacidade.

16. Um poste tem a forma de um cilindro reto. O diâmetro da sua base mede 40cm e a altura, 4m. Qual é, em metros cúbicos, o volume de concreto necessário para a construção de mil postes?

17. Quantas toneladas de água há em uma piscina em forma de bloco retangular de 1,5m de profundidade, se as arestas da base medem 25m e 12m? *(Densidade da água = 1g/cm^3)*

18. Qual é a massa de mercúrio necessária para encher completamente um vaso cilíndrico com 10cm de raio e 20cm de altura, se a densidade do mercúrio é de 13,6g/cm^3?

19. Os lados da base horizontal de uma caixa d'água em forma de bloco retangular mede 1,2m e 1,5m. Sabendo que a caixa d'água tem 1m de altura, responda:

a) Qual é a capacidade, em litros, dessa caixa?

b) Supondo que a caixa d'água esteja vazia e aberta ao relento, e que a água da chuva encha a caixa a uma razão de 10ℓ/h, em quanto tempo essa caixa estará completamente cheia?

20. Medindo o volume de uma pessoa: os lados da base de um tanque em forma de bloco retangular medem 0,8m e 1,2m. Ao mergulhar completamente no tanque uma pessoa faz o nível da água subir 0,075m. Qual é o volume dessa pessoa, em metros cúbicos?

21. A massa por área do papel ou papelão chama-se gramatura. Assim, por exemplo, há um papel chamado sulfite que tem gramatura 75g/m^2.

a) Qual é a massa de uma folha retangular de papel sulfite, cujos lados medem 20cm e 30cm?

b) Qual é a área de uma folha de papel sulfite cuja massa é de 60g?

Estimativas e arredondamentos

Estimativas

É comum jornais e emissoras de televisão informarem o número de pessoas que estavam em uma praia ou em um comício. Esse número, porém, não é exato: baseia-se em uma *estimativa* e não em uma contagem. Estimar significa dar um palpite sobre um valor, com base em algum elemento objetivo.

Exemplos:

1. Certo comício foi realizado em uma praça quadrangular de 100m de lado. A praça estava lotada. Admitindo-se que, em média, havia 4 pessoas/m^2, estimar o número de pessoas presentes a esse comício.

Solução:

A área da praça é de 10 000m^2 (100 . 100 = 10 000). Logo, o número de pessoas presentes ao comício pode ser estimado em 10 000 . 4 = 40 000 pessoas.

Em nosso dia a dia é comum trabalharmos com valores estimados.

2. Um reservatório de combustível tem a forma interna de uma esfera de 3m de raio. Sabendo que o volume de uma esfera é dado por $\frac{4}{3} . \pi . r^3$, obter, em litros, o volume desse reservatório, usando as seguintes aproximações para π: 3; 3,1; 3,14; 3,1416 e 3,142.

Solução:

O volume exato ou teórico do reservatório é:

$V = \frac{4}{3} . \pi . 3^3 m^3 = 36\pi m^3 = 36\,000\pi\ell$

Usando $\pi \cong 3$, temos:

$V_1 \cong 36\,000 . 3$ ou $V_1 \cong 108\,000\ell$

Usando $\pi \cong 3{,}1$, temos:

$V_2 \cong 36\,000 . 3{,}1$ ou $V_2 \cong 111\,600\ell$

Usando $\pi \cong 3{,}14$, temos:

$V_3 \cong 36\,000 . 3{,}14$ ou $V_3 \cong 113\,040\ell$

Usando $\pi \cong 3{,}1416$, temos:

$V_4 \cong 36\,000 . 3{,}1416$ ou $V_4 \cong 113\,097{,}6\ell$

Usando $\pi \cong 3{,}142$, temos:

$V_5 \cong 36\,000 . 3{,}142$ ou $V_5 \cong 113\,112\ell$

Observação:

Quanto mais algarismos depois da vírgula usarmos para π, melhor a aproximação obtida. Assim, de V_1 para V_2, o erro cometido foi de 3600ℓ; de V_4 para V_5, foi de 14,4ℓ.

Arredondamento

Para efetuar o arredondamento de um número, podemos usar uma das seguintes regras:

- Se o algarismo que vai ser eliminado for maior ou igual a 5, acrescentamos 1 ao primeiro algarismo que está à sua esquerda.
- Se o algarismo que vai ser eliminado for menor que 5, nenhuma alteração deve ser feita.

Exemplo:

- Arredondar os números a seguir, escrevendo-os com uma, duas e três casas depois da vírgula.

a) 7,5817

b) 4,9475

Solução:

a) Com três casas depois da vírgula:
$7{,}5817 \cong 7{,}582$ (Eliminado é maior que 5);

Com duas casas depois da vírgula:
$7{,}5817 \cong 7{,}58$ (Eliminado é menor que 5);

Com uma casa depois da vírgula:
$7{,}5817 \cong 7{,}6$ (Eliminado é maior que 5).

b) Com três casas depois da vírgula:
$4{,}9475 \cong 4{,}948$ (Eliminado é igual a 5);

Com duas casas depois da vírgula:
$4{,}9475 \cong 4{,}95$ (Eliminado é maior que 5);

Com uma casa depois da vírgula:
$4{,}9475 \cong 4{,}9$ (Eliminado é menor 5).

Exercícios

22. Em um banco, 100 pessoas aguardam atendimento. Se cinco pessoas são atendidas a cada 3 min, faça uma estimativa do tempo que vai levar para a centésima pessoa ser atendida.

23. Rosa Maria pretende comprar 10 pacotes de 105g de farinha, e 20 potes de 295g de margarina. Faça uma estimativa da massa total dessa compra em quilogramas.

24. Numa aula prática sobre medidas de comprimento, um aluno obtém 100,5m como medida da frente do terreno de sua escola. Na planta, essa medida consta como sendo de 100m. Supondo que a medida dada pela prefeitura seja a exata, calcule:

a) o erro cometido pelo aluno, em metros;

b) quantos por cento representa esse erro, em relação à medida exata.

25. Efetue as divisões e dê o quociente com a precisão de centésimos, isto é, com duas casas depois da vírgula:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{20}{6}$

26. O volume de um cilindro reto é dado por V = área da base . altura. Um tanque de petróleo tem a forma de um cilindro reto. O raio da base e a altura medem, cada um, 10m.

a) Dê o volume exato desse cilindro e calcule também os volumes aproximados usando $\pi \cong 3{,}1$ e $\pi \cong 3{,}14$.

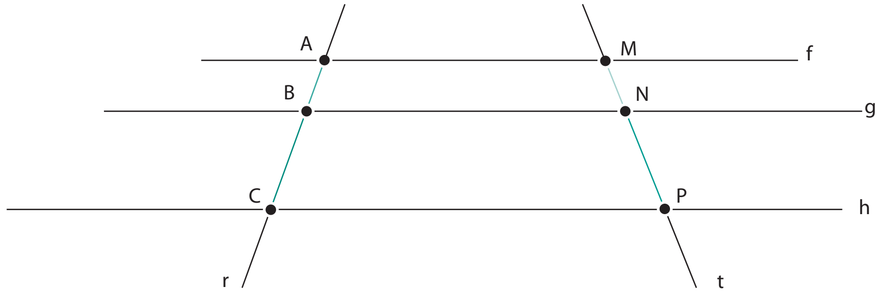
b) Qual a diferença, em litros, entre os resultados aproximados?

27. Pretende-se fazer uma estimativa do número de árvores existentes em um terreno, que mede 100m por 200m. Há, em média, 2 árvores/m^2. Estime o número de árvores nesse terreno.

28. Num show de rock, uma verdadeira multidão ocupa uma praça circular de 100m de raio. Faça uma estimativa do número de pessoas presentes a esse show se, em média, há 4 pessoas/m^2. (Use $\pi \cong 3{,}1$).

Teorema de Tales

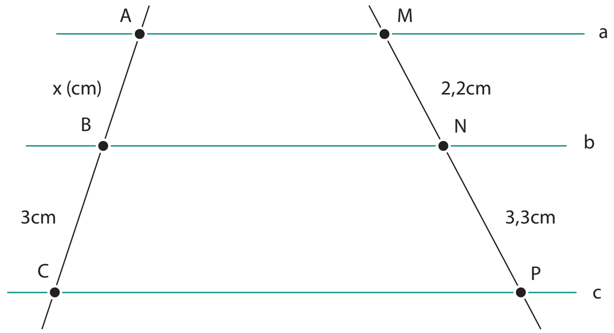
A figura a seguir mostra a ideia particularizada da propriedade geométrica, que é chamada *teorema de Tales*.



Se f, g e *h* são retas duas a duas paralelas, cortadas pelas transversais *r* e *t,* então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$, onde AB, BC, MN e NP são as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$, respectivamente.

Exemplo:

- As retas *a, b* e *c* são duas a duas paralelas. Usando o teorema de Tales, descobrir a medida *x* do segmento $\overline{AB}$.



Solução:

$$\frac{x}{3} = \frac{2,2}{3,3}$$

$$3,3 \, . \, x = 3 \, . \, 2,2$$

$$3,3 \, . \, x = 6,6$$

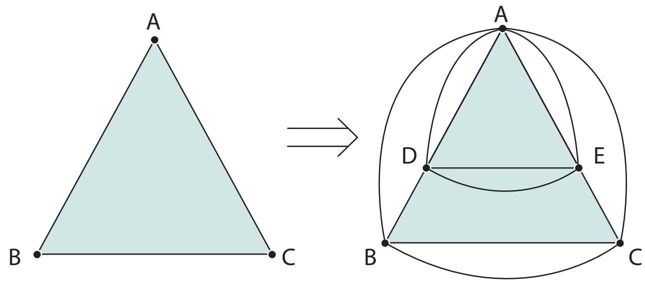
$$x = \frac{6,6}{3,3}$$

$$x = 2$$

Uma consequência importante do teorema de Tales

Uma propriedade geométrica importante é observada como consequência do teorema de Tales.

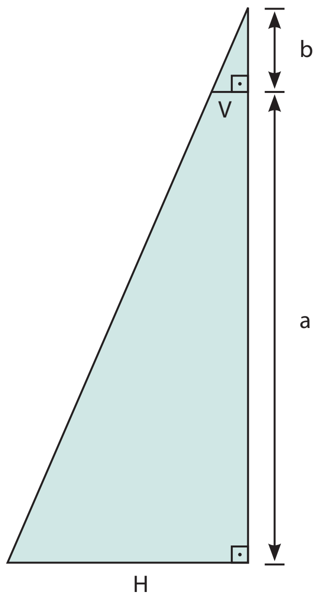
Considere um triângulo qualquer. A partir de um ponto situado num lado do triângulo, trace uma paralela a um outro lado, como na figura a seguir.



Podemos afirmar que: *Se* $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$*, então* $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

Exemplo:

- No triângulo a seguir estão representadas: a altura *H* de uma pirâmide, a altura *v* de uma vara e as distâncias *a* e *b*. Os segmentos que representam essas alturas são paralelos. Se *v = 1m*, a = *69,50m e* b = *0,50m*, calcular *H.*



Solução:

Em consequência do teorema de Tales, podemos escrever:

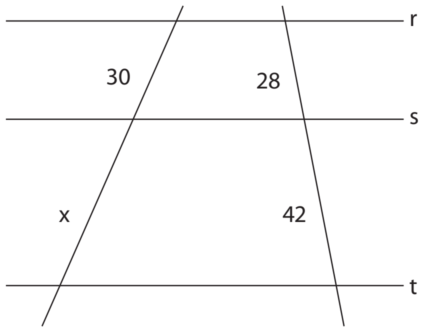
$$\frac{b}{a+b} = \frac{v}{H}$$

$$\frac{0{,}50}{70} = \frac{1}{H}$$

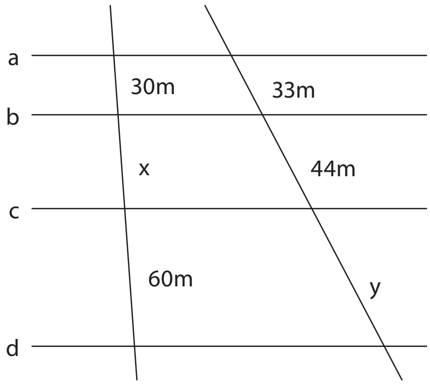
$$H = \frac{70\ .\ 1}{0{,}50} = 140\text{m}$$

Exercícios

29. Sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são duas a duas paralelas, calcule *x*:

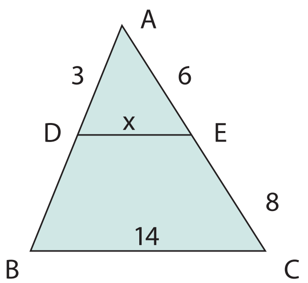


30. Sabendo que as retas a, b ,c e d são duas a duas paralelas, calcule *x*:

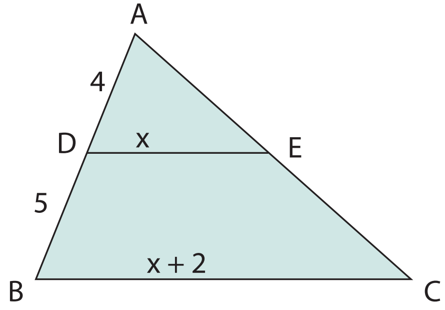


31. Supondo $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, calcule o valor de *x* em cada um dos itens a seguir:

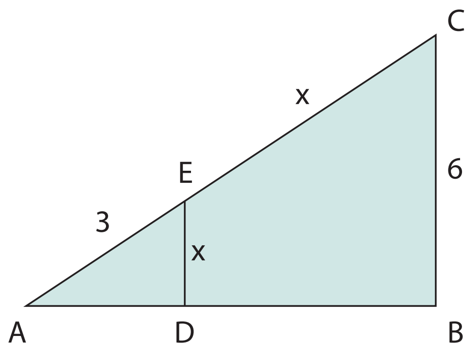
a)



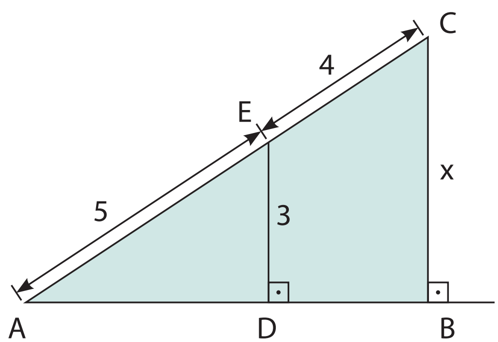
b)



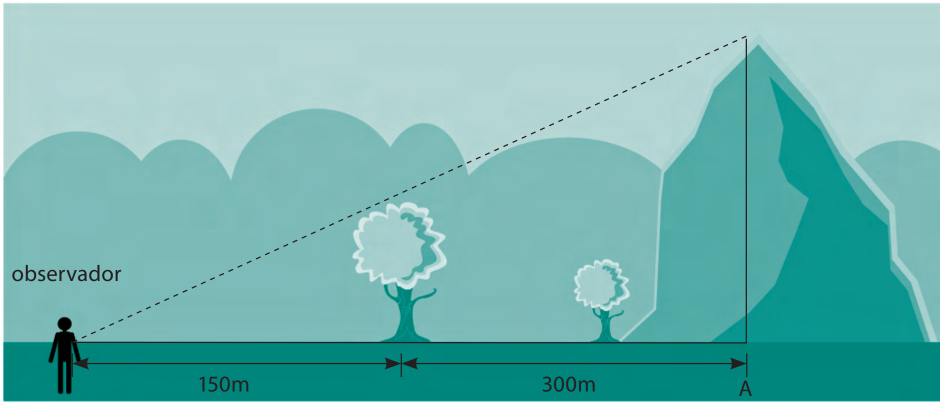
c)



d)

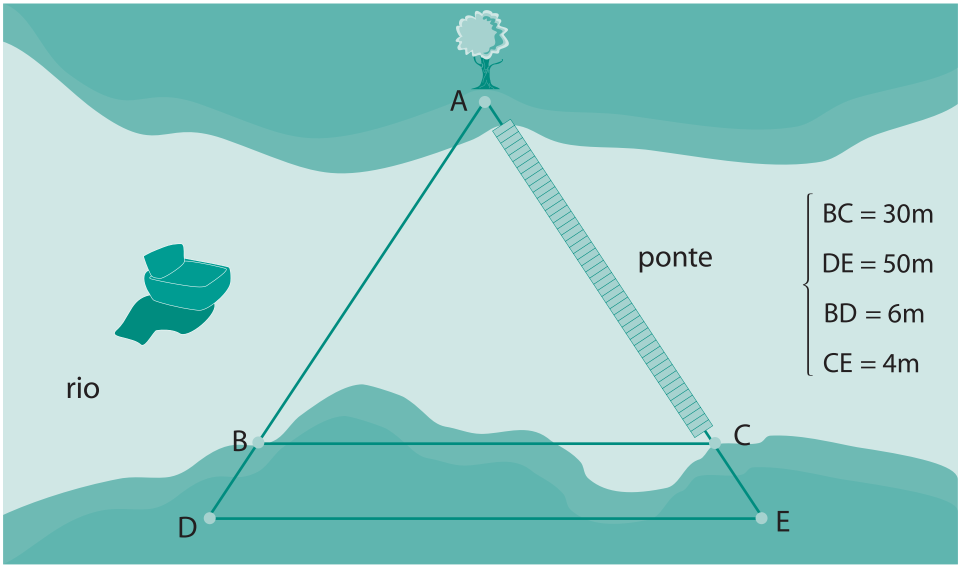


32. Na figura a seguir estão representados um morro, uma árvore e um observador. A árvore com 25m de altura dista 150m do observador. O observador situa-se a 450m do ponto *A*. Considerando que o olho do observador, o topo da árvore e o topo do morro estão alinhados, determine a altura do morro:



(BONGIOVANNI; VISSOTO; LAUREANO. Matemática e Vida, 2.º grau, volume 1.)

33. Uma ponte deve ser construída, como mostra o desenho a seguir. Considerando as medidas assinaladas na figura, determine a largura do rio, sabendo que $\overline{BC} \,//\, \overline{CE}$:

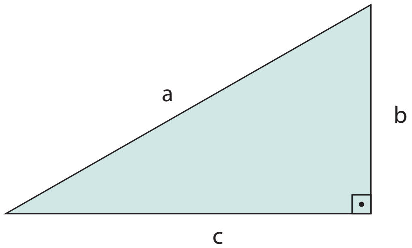


(BONGIOVANNI; VISSOTO; LAUREANO. Matemática e Vida, 2.º grau, volume 1.)

Teorema de Pitágoras

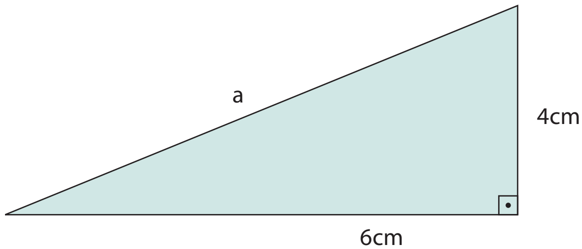
Na Matemática, o grande feito dos pitagóricos foi demonstrar que em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esse teorema é chamado, até hoje, teorema de Pitágoras, embora, muito antes, já fosse conhecimento pelos babilônios.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$



Exemplo:

- O triângulo *ABC* é retângulo. Calcular a medida da hipotenusa.



Solução:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 4^2 + 6^2$

$a^2 = 16 + 36$

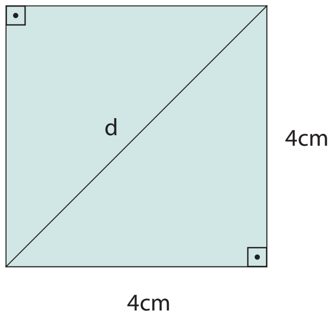
$a^2 = 52$

$a = \sqrt{52}\text{cm}$ ou $a \cong 7{,}2\text{cm}$

Aplicações do teorema de Pitágoras na geometria plana

Exemplo:

- Calcular a medida da diagonal do quadrado de 4cm de lado.



Solução:

Cada um dos dois triângulos é retângulo. Aplicando, em um deles, o teorema de Pitágoras, temos: $d^2 = 4^2 + 4^2$. Logo, $d = \sqrt{32}$cm e, portanto, $d = 4\sqrt{2}$ cm (valor exato).

Fazendo $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, temos: $d \cong 5{,}6$cm (valor aproximado).

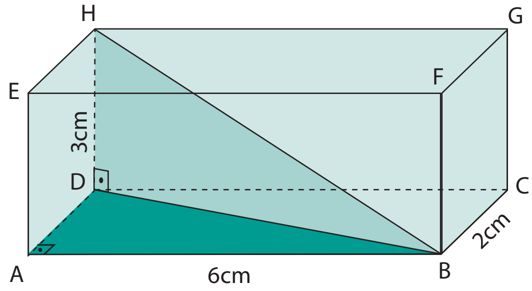
Aplicações do teorema de Pitágoras na geometria espacial

Exemplo:

- Considere o bloco retangular, representado a seguir. Calcular a medida da diagonal:

  a) $\overline{DB}$, da face ABCD.

  b) $\overline{HB}$, no bloco retangular.



Solução:

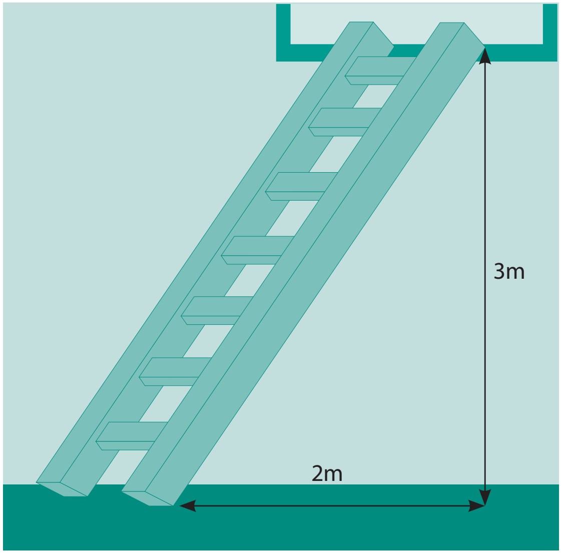
a) Aplicando Pitágoras no triângulo *ABD* (Â reto), temos $DB^2 = 2^2 + 6^2$. Logo, $DB = \sqrt{40}$cm.

b) Aplicando Pitágoras no triângulo *HDB* ($\hat{D}$ reto), temos $HB^2 = 3^2 + (\sqrt{40})^2$. Logo, $HB^2 = 49$. Portanto, $HB = 7$cm.

Aplicações do teorema de Pitágoras no dia a dia

Exemplo:

- Um carpinteiro quer construir uma escada, de modo que, afastada, 2m de uma parede, alcance uma janela a 3m do chão. Qual deve ser o comprimento dessa escada?



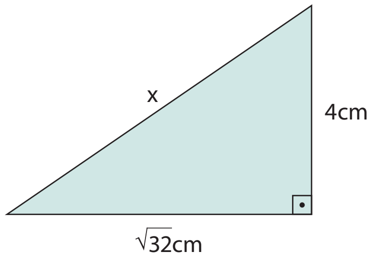
(BONGIOVANNI; VISSOTO; LAUREANO. Matemática e Vida, 2.º grau, volume 1.)

Solução:

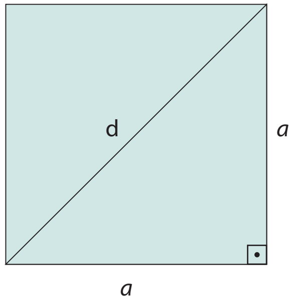
Como o triângulo é retângulo, aplicamos Pitágoras. Então: $a^2 = 2^2 + 3^2$. Logo, $a = \sqrt{13}$m (valor exato) ou $a \cong 3{,}6$m (valor aproximado).

Exercícios

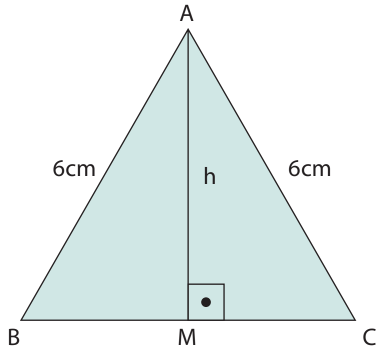
34. Usando $\sqrt{3} \cong 1{,}7$ dê o valor exato e um valor aproximado da medida da hipotenusa do triângulo a seguir.



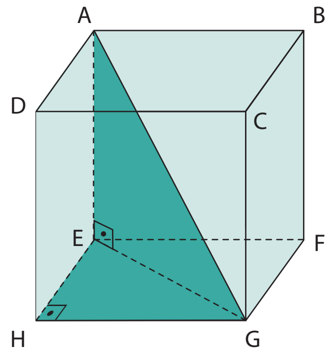
35. Os lados de um quadrado medem *a* (em qualquer unidade de comprimento). Quanto mede a diagonal desse quadrado, calculada em função de *a*?



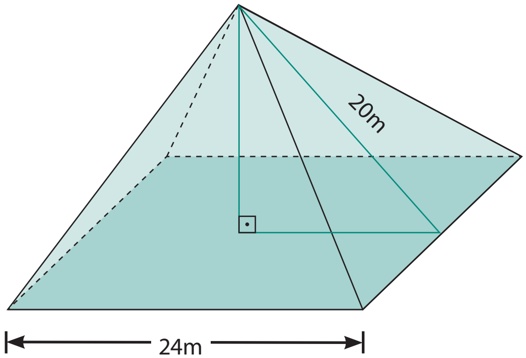
36. Usando o teorema de Pitágoras, calcule a medida da altura do triângulo equilátero da figura. Lembre que *M* é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.



37. Usando o teorema de Pitágoras, calcule a medida da diagonal $\overline{AG}$ de um cubo com 4cm de aresta. Dê o valor exato e um valor aproximado, fazendo $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.



38. Qual é a medida da altura da pirâmide representada a seguir, sabendo que a base é um quadrado com 24m de lado e que a altura da face lateral é de 20m?



Gabarito

Geometria e medidas

1.

a) 0,9378km

b) 9 378dm

c) 93 780cm

d) 937 800mm

2. Pedaço 1: x

Pedaço 2: x + 35

x + x + 35 = 165

2x = 130

x = 65

Pedaço 1: 65cm

Pedaço 2: 65 + 35 = 100cm = 1m

Resposta: Um pedaço deve medir 65cm e outro 1m.

3. Baseando-se na massa, um paciente de 80kg deveria receber 240mg (80 . 3mg), o que corresponderia a 48 gotas. No entanto, essa dose ultrapassaria a dosagem máxima de 200mg. Sendo assim, um paciente de 80kg deverá receber a dosagem de 200mg, que corresponde a 40 gotas (200 : 5).

Resposta: 40 gotas.

4. Por passageiro, o avião levará 90kg (70kg + 20kg), que corresponde à soma da massa corporal do passageiro com a bagagem dele.

Então, como o avião tem capacidade para 400 passageiros, teremos:

400 . 90 = 36 000kg = 36 toneladas

Resposta: 36 toneladas.

5. 30 000 000 000 . 0,2mm = 6 000 000 000mm = 6 000 000m = $6 . 10^6$m

Resposta: $6 . 10^6$m.

6.

a) 1 000 . 1,5g + 2 . 20g = 1 540g ou 1,54kg

Resposta: 1 540g ou 1,54kg

b) 8cm : 1 000 = 0,008cm = 0,08mm = $8 . 10^{-2}$mm

Resposta: 0,008cm = 0,08mm = $8 . 10^{-2}$mm

7. Área do campo: 45 . 90 = 4 050m²

Área da placa de grama: 1,5 . 1,5 = 2,25m²

4 050 : 2,25 = 1 800 placas

Resposta: 1 800 placas de grama.

8. Base (b): 1,2m

Altura (h); 70cm = 0,7m

$$A = \frac{b . h}{2}$$

$$A = \frac{1,2 . 0,7}{2}$$

A = 0,42m²

Resposta: 0,42m²

9. Base (b): 1,20m = 120cm

Altura (h): 80cm

$A = b \cdot h$

$A = 120 \cdot 80$

$A = 9\,600m^2$

Resposta: $9\,600m^2$

10. Base (B): 10cm

Base (b): 8cm

Altura (h): 12

$A = (B + b) \cdot \frac{h}{2}$

$A = (10 + 8) \cdot \frac{12}{2}$

$A = 9\,600m^2$

11. Raio (r): 100m

$A = \pi \cdot r^2$

$A = \pi \cdot (100)^2$

$A = 10\,000\pi m^2$

Utilizando $\pi \cong 3{,}14$, tem–se que:

$A = 10\,000\pi m^2 = 10\,000 \cdot 3{,}14m^2 = 31\,400m^2 = 0{,}0314km^2$

Resposta: $0{,}0314km^2$

12. Para calcular a área do terreno (A_T), devemos calcular a área do retângulo e subtrair a soma das áreas dos quatro triângulos (A_{T1}, A_{T2}, A_{T3} e A_{T4})

Área do retângulo (A_r)

$A_r = 200 \cdot 300$

$A_r = 60\,000m^2$

Cálculos das áreas dos triângulos:

$A_{T1} = A_{T3} = \frac{75 \cdot 150}{2} = 5\,625m^2$

$A_{T2} = A_{T4} = \frac{50 \cdot 100}{2} = 2\,500m^2$

$A_T = 60\,000 - 2 \cdot 5\,625 - 2 \cdot 2\,500$

$A_T = 43\,750m^2$

13. $280\,000 \cdot 37{,}5 = 10\,500\,000$

Resposta: 10 500 000 habitantes

14. $8\,100\,000 : 150\,000 = 54$

Resposta: $54hab/km^2$

15. $V = a \cdot b \cdot c$

$a = 1m$; $b = 1{,}20m$; $c = 80cm = 0{,}80m$

$V = 1 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}80$

$V = 0{,}96m^3$

Resposta: $0{,}96m^3$ ou 960ℓ

16. Volume de 1 poste:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$h = 4m$

$r = \frac{D}{2}$

$r = \frac{40}{2}$

$r = 20cm = 0{,}20m$

$V = \pi \cdot (0{,}20)^2 \cdot 4$

$V = \pi \cdot 0{,}04 \cdot 4$

$V = 0{,}16\pi m^3$

Fazendo $\pi \cong 3{,}14$; $V = 0{,}16 \cdot 3{,}14 = 0{,}5024m^3$

$1\,000 \times 0{,}5024m^3 = 502{,}4m^3$

Resposta: $502{,}4m^3$

17. Como a densidade da água é igual a $1g/cm^3$, cada $1cm^3$ tem 1g de massa, logo precisamos calcular o volume da piscina.

$V = a \cdot b \cdot c$

$a = 25m = 250cm$

$b = 12cm = 120cm$

$c = 1{,}5m = 150cm$

$V = 250 \,.\, 120 \,.\, 150$

$V = 4\,500\,000 \text{ cm}^3$

Como cada 1cm^3 tem 1g de massa, teremos 4 500 000g de água ou 4,5 toneladas.

Resposta: 4,5 toneladas.

18. Como a densidade do mercúrio é igual a $13{,}6\text{g/cm}^3$, cada 1cm^3 tem 13,6g de massa, logo precisamos calcular o volume do vaso:

$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$

$r = 10\text{cm}$

$h = 20\text{cm}$

$V = \pi \,.\, (10)^2 \,.\, 20$

$V = \pi \,.\, 100 \,.\, 20$

$V = 2\,000\pi\text{cm}^3$

Fazendo $\pi \cong 3{,}14$; teremos
$V = 2\,000 \,.\, 3{,}14 = 6\,280\text{cm}^3$

Como cada 1cm^3 tem 13,6g de massa, teremos:

$6280 \,.\, 13{,}6 = 85\,408\text{g} = 85{,}408\text{kg}$

Resposta: 85,408kg.

19.

a) $V = a \,.\, b \,.\, c$

$a = 1{,}2\text{m}$

$b = 1{,}5\text{m}$

$c = 1{,}0\text{m}$

$V = 1{,}2 \,.\, 1{,}5 \,.1$

$V = 1{,}8\text{m}^3 = 1\,800\ell$

Resposta: $1\,800\ell$.

b) $1\,800 : 10 = 180$ horas

Resposta: 180 horas.

20. O volume da pessoa será igual ao volume da água deslocada.

$V = a \,.\, b \,.\, c$

$a = 0{,}8\text{m}$

$b = 1{,}2\text{m}$

$c = 0{,}075\text{m}$

$V = 0{,}8 \,.\, 1{,}2 \,.\, 0{,}075$

$V = 0{,}0720\text{m}^3 = 72\ell$

Resposta: 72 litros.

21.

a) Como a gramatura do papel é de 75g/m^2, cada 1m^2 tem massa de 75g, então, temos que calcular a área de uma folha de sulfite.

$A = 20 \,.\, 30 = 600\text{cm}^2 = 0{,}06\text{m}^2$

$0{,}06 \,.\, 75 = 4{,}5\text{g}$

Resposta: 4,5 gramas.

b) $75\text{g} \Rightarrow 1\text{m}^2$

$60\text{g} \Rightarrow x$

$x = \dfrac{60}{75}$

$x = 0{,}8\text{m}^2 = 8\,000\text{cm}^2$

Resposta: $0{,}8\text{m}^2$ ou $8\,000\text{cm}^2$

22. 5 pessoas $\Rightarrow$ 3 minutos

100 pessoas $\Rightarrow$ 20 . 3 minutos = 60minutos

Resposta: 60 minutos ou uma hora.

23. Como o exercício solicita uma estimativa, podemos trabalhar com valores aproximados. Sendo assim, consideraremos o saco de farinha como 100g e os potes de margarina como 300g. $10 \,.\, 100 + 20 \,.\, 300 = 1\,000 + 6\,000 = 7\,000\text{g} = 7\text{kg}$

Resposta: 7 000g ou 7kg.

24.

a) $100,5 - 100 = 0,5$ m

Resposta: 0,5m

b) $\frac{0,5}{100} = 0,5\%$

Resposta: 0,5%

25.

a) $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,33$

b) $\frac{20}{6} = 3,333... = 3,33$

26.

a) $V = A_b \,.\, h$

$A_b = \pi \,.\, r^2$

$V = \pi \,.\, r^2 \,.\, h$

$r = 10m$

$h = 10m$

$V = \pi \,.\, (10)^2 \,.\, 10$

$V = 1\,000\pi m^3$

Utilizando $\pi \cong 3,1$; temos
$V = 1\,000 \,.\, 3,1 = 3\,100 m^3 = 3\,100\,000\ell$

Utilizando $\pi \cong 3,14$; temos
$V = 1\,000 \,.\, 3,14 = 3\,140 m^3 = 3\,140\,000\ell$

Resposta: $3\,100\,000\ell$ e $3\,100\,000\ell$

b) $3\,140\,000 - 3\,100\,000 = 40\,000\ell$

Resposta: $40\,000\ell$

27. Como em média tem-se 2 árvores/m², é necessário saber a área do terreno.

$A = b \,.\, h$

$b = 100m$

$h = 200m$

$A = 100 \,.\, 200$

$A = 20\,000 m^2$

$20\,000 \,.\, 2 = 40\,000$ árvores

Resposta: 40 000 árvores.

28. Como há, em media, 4 pessoas por m², é necessário saber a área da praça.

$A = \pi \,.\, r^2$

$r = 100m$

$A = \pi \,.\, (100)^2$

$A = 10\,000\pi$

Utilizando $\pi \cong 3,1$, teremos $A = 10\,000 \times 3,1 = 31\,000 m^2$

$31\,000 \,.\, 4 = 124\,000$ pessoas

Resposta: 124 000 pessoas.

29. $\frac{30}{x} = \frac{28}{42}$

$\frac{30}{x} = \frac{4}{6}$

$4x = 180$

$x = 45$

Resposta: x = 45.

30. $\frac{30}{x} = \frac{33}{44}$

$\frac{30}{x} = \frac{3}{4}$

$3x = 120$

$x = 40m$

$\frac{x}{60} = \frac{44}{y}$

$x = 40$

$\frac{40}{60} = \frac{44}{y}$

$2y = 132$

$y = 66m$

Resposta: x = 40m e y = 66m.

31.

a) $\frac{x}{14} = \frac{6}{14}$

$\frac{x}{1} = \frac{6}{1}$

$x = 6$

Resposta: x = 6m

b) $\frac{x}{x+2} = \frac{4}{9}$

$9x = 4 \,.\, (x + 2)$

$9x = 4x + 8$

$5x = 8$

$x = 1{,}6$

Resposta: $x = 1{,}6$.

c) $\frac{x}{6} = \frac{3}{3 + x}$

$x \,.\, (3 + x) = 18$

$3x + x^2 = 18$

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$x = 3$ ou $x = -6$ (não serve)

$x = 3$

Resposta: $x = 3$.

d) $\frac{5}{3} = \frac{9}{x}$

$5x = 27$

$x = 5{,}4$

Resposta: $x = 5{,}4$.

32. h: altura

$\frac{25}{h} = \frac{150}{450}$

$\frac{25}{h} = \frac{1}{3}$

$h = 75$

Resposta: 75 metros.

33. p: comprimento da ponte

$\frac{30}{50} = \frac{p}{p + 4}$

$\frac{3}{5} = \frac{p}{p + 4}$

$5p = 3 \,.\, (p + 4)$

$5p = 3p + 12$

$2p = 12$

$p = 6$

Resposta: 6 metros.

34. $x^2 = (\sqrt{3}\,)^2 + 4^2$

$x^2 = 32 + 16$

$x^2 = 48$

$x = 4\sqrt{3} \cong 4 \,.\, 1{,}7 \cong 6{,}8$

Resposta: Valor exato: $4\sqrt{3}$ e valor aproximado 6,8cm.

35. $d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

$d = a\sqrt{2}$

Resposta: $d = a\sqrt{2}$.

36. $6^2 = h^2 + 3^2$

$36 = h^2 + 9$

$h^2 = 27$

$h = 3\sqrt{3} \cong 3 \,.\, 1{,}7 \cong 5{,}1$

Resposta: Valor exato $3\sqrt{3}$ cm e valor aproximado: 5,1cm.

37. Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo AEG:

$AG^2 = EG^2 + EA^2$

$AG^2 = EG^2 + 4^2$ (equação 1)

$EG = ?$

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo HGE

$EG^2 = HG^2 + HE^2$

$EG^2 = 4^2 + 4^2$

$EG^2 = 16 + 16$

$EG^2 = 32$

$EG = \sqrt{32}$

Retornado à equação 1, temos:

$AG^2 = EG^2 + EA^2$

$AG^2 = EG^2 + 4^2$ (equação 1)

$AG^2 = (\sqrt{32})^2 + 16$

$AG^2 = 32 + 16$

$AG^2 = 48$

$AG = \sqrt{48}$

$AG = 4\sqrt{3}\text{ cm} \cong 4 \,.\, 1{,}3 \cong 5{,}2\text{cm}$

Resposta: Valor exato: $4\sqrt{3}$ cm e valor aproximado: 5,2cm.

38. h: altura da pirâmide

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo:

$20^2 = h^2 + 12^2$

$400 = h^2 + 144$

$h^2 = 400 - 144$

$h^2 = 256$

$h = \sqrt{256}$

$h = 16$

Resposta: 16 metros.