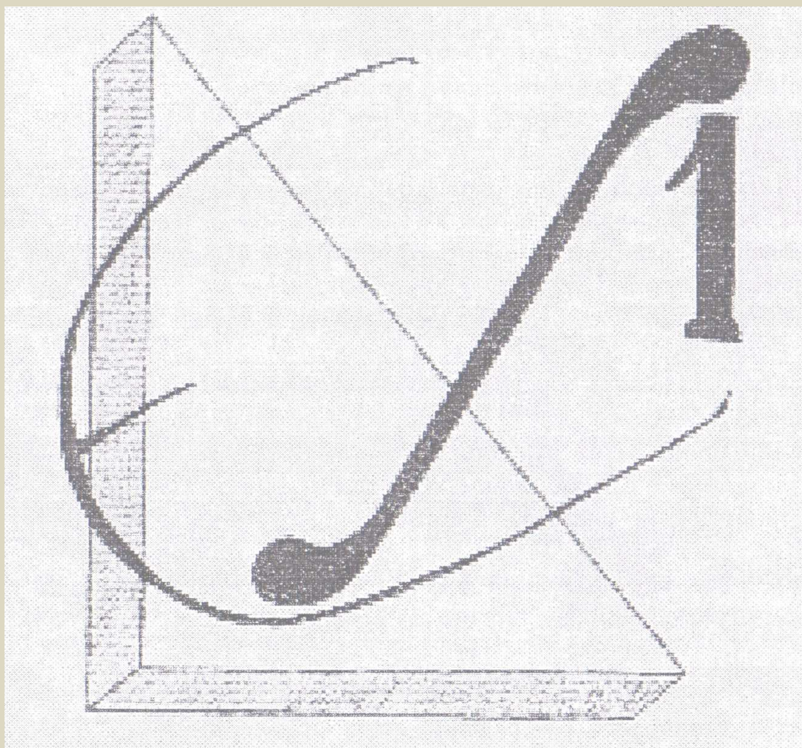
GOVERNO DO ESTADO DO PARÁ

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ-UEPA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA-CCSE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA ESTATISTICA E INFORMÁTICA

Apostila de Cálculo



Diferencial e Integral I

Uma breve história do estudo da Derivada

A derivada tem dois aspectos básicos, o geométrico e o computacional. Além disso, as aplicações das derivadas são muitas a derivada tem muitos papéis importantes na matemática propriamente dita, tem aplicações em física, química, engenharia, tecnologia, ciências, economia e muito mais, e novas aplicações aparecem todos os dias. A origem da derivada está nos problemas geométricos clássicos de tangência, por exemplo, para determinar uma reta que intersecta uma dada curva em apenas um ponto dado. Euclides (cerca de 300 a.C.) provou o familiar teorema que diz que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto P é perpendicular ao raio em P. Arquimedes (287--212 a.C.) tinha um procedimento para encontrar a tangente à sua espiral e Apolônio (cerca de 262--190 a.C.) descreveu métodos, todos um tanto diferente, para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Mas estes eram apenas problemas geométricos que foram estudados apenas por seus interesses particulares limitados; os gregos não perceberam que nenhuma linha em comum ou qualquer valor nestes teoremas. Problemas de movimento e velocidade, também básicos para nosso entendimento de derivadas hoje em dia, também surgiram com os gregos antigos, embora estas questões tenham sido originalmente tratadas mais filosoficamente que matematicamente. Os quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.) se apóiam sobre dificuldades para entender velocidade instantânea sem ter uma noção de derivada. Na Física de Aristóteles (384--322 a.C.), os problemas de movimento estão associados intimamente com noções de continuidade e do infinito (isto é, quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes). Na época medieval, Thomas Bradwardine (1295--1349) e seus colegas em Merton College, Oxford, fizeram os primeiros esforços para transformar algumas das idéias de Aristóteles sobre movimento em afirmações quantitativas. Em particular, a noção de velocidade instantânea tornou-se mensurável, pelo menos em teoria, hoje, é a derivada (ou a taxa de variação) da distância em relação ao tempo.

Foi Galileu Galilei (1564--1642) quem estabeleceu o princípio que matemática era a ferramenta indispensável para estudar o movimento e, em geral, ciência: “Filosofia (ciência e natureza) está escrita naquele grande livro o qual está diante de nossos olhos quero dizer o universo, mas não podemos entendê-lo se não aprendermos primeiro a linguagem. O livro está escrito em linguagem matemática.” Galileu estudou o movimento geometricamente; usou as proporções clássicas de Euclides e propriedades das cônicas de Apolônio para estabelecer relações entre distância, velocidade e aceleração. Hoje, estas quantidades variáveis são aplicações básicas das derivadas. O interesse em tangentes a curvas reapareceu no século 17 como uma parte do desenvolvimento da geometria analítica. Uma vez que equações eram então usadas para descreverem curvas, o número e variedade de curvas aumentou tremendamente naqueles estudos em épocas clássicas. Por exemplo, Pierre Fermat (1601--1665) foi o primeiro a considerar a idéia de uma família inteira de curvas de uma só vez. Ele as chamou de parábolas superiores, curvas da forma $y = k^n$, onde k é constante e n = 2, 3, 4, … A introdução de símbolos algébricos para estudar a geometria de curvas contribuiu significativamente para o desenvolvimento da derivada, da integral e do cálculo. Por outro lado, como conclusões e resultados geométricos poderiam ser obtidos mais facilmente usando raciocínio algébrico que geométrico, os padrões de rigor lógico que tinham sido iniciados pelos gregos antigos foram relaxados em muitos problemas de cálculo, e isto (entre outros fatores) levou a controvérsias espirituosas e até amarguradas. Fermat desenvolveu um procedimento algébrico para determinar os pontos mais altos (máximos) e mais baixos (mínimos) sobre uma curva; geometricamente, ele estava encontrando os pontos onde a tangente à curva tem inclinação zero.

René Descartes (1596--1650) teve o discernimento de prever a importância da tangente quando, em sua Geometria, escreveu “E eu ouso dizer isto (encontrar a normal, ou perpendicular a uma curva, a partir da qual podemos facilmente identificar a tangente) não é apenas o problema mais útil e geral da geometria que conheço, mas até aquele que sempre desejei conhecer” Descartes inventou um procedimento de dupla raiz para encontrar a normal e então a tangente a uma curva. Como resultado da tradução da Geometria de Descartes para o latim por Frans Van Schooten (1615--1661) e as explicações abrangentes por Schooten, Florimonde de Beaune (1601--1652) e Johan Hudde (1628-1704), os princípios e benefícios da geometria analítica tornaram-se mais amplamente conhecidos. Em particular, Hudde simplificou a técnica da dupla raiz de Descartes para determinar pontos máximos e mínimos sobre uma curva; o procedimento da dupla raiz foi redescoberto por Christiaan Huygens (1629-1695). Então, modificando o processo da tangente de Fermat, Huygens inventou uma seqüência de etapas algébricas que produziu os pontos de inflexão de uma curva; veremos que isto requer a derivada segunda. René François de Sluse (1622--1685) desenvolveu uma técnica algébrica que levou à inclinação da tangente a uma curva. No final da década de 1650, havia grande correspondência entre Huygens, Hudde, Van Schooten, Sluse e outros sobre tangentes de várias curvas algébricas; Hudde e Sluse especialmente procuraram métodos algébricos mais simples e padronizados que poderiam ser aplicados a uma variedade maior de curvas. Para Gilles Personne de Roberval (1602--1675), uma curva era o caminho de um ponto se movendo, e ele desenvolveu um método mecânico para encontrar a tangente para muitas curvas, incluindo a ciclóide. Mas o método de Roberval não podia ser generalizado para incluir mais curvas. Isaac Newton (1642--1727) começou a desenvolver o seu “cálculo de flúxions” entre os seus primeiro esforços científicos em 1663. Para Newton, movimento era a “base fundamental” para curvas, tangentes e fenômenos relacionados de cálculo e ele desenvolveu seus flúxions a partir da versão de Hudde do procedimento da dupla raiz. Newton estendeu esta técnica como um método para encontrar a curvatura de uma curva, uma característica que agora sabemos ser uma aplicação da derivada segunda. Em 1666, 1669 e 1671, Newton resumiu e revisou seu trabalho de cálculo e estes manuscritos circularam entre um grande número de seus colegas e amigos. Ainda assim, embora tenha continuado a retornar a problemas de cálculo em épocas diferentes de sua vida científica, os trabalhos de Newton sobre cálculo não foram publicados até 1736 e 1745. Com algum tutoramento e conselho de Huygens e outros, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646--1716) desenvolveu seu cálculo diferencial e integral durante o período entre 1673 e 1676 enquanto vivia como um diplomata em Paris. Em uma pequena viagem a Londres, onde participou de um encontro da Sociedade Real em 1673, Leibniz aprendeu o método de Sluse para encontrar tangente a curvas algébricas. Leibniz tinha pouca inclinação para desenvolver estas técnicas e interesse ainda menor em fundamentações matemáticas (isto é, limites) necessárias, mas ele aperfeiçoou as fórmulas modernas e a notação para derivada no seu famoso artigo "New methods for maximums and minimums, as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantities, and a remarkable calculus for them" (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles) de 1684. Aqui está o primeiro trabalho publicado em cálculo e de fato a primeira vez que a palavra "cálculo" foi usada em termos modernos. Agora, qualquer um poderia resolver problemas de tangentes sem ser especialista em geometria, alguém poderia simplesmente usar as fórmulas de "cálculo" de Leibniz.

Algumas vezes se diz que Newton e Leibniz "inventaram" o cálculo. Como podemos ver, isto é simplificação exagerada. Em vez disso, como Richard Courant (1888--1972) observou, cálculo tem sido "uma luta intelectual dramática que durou 2500 anos". Depois de 1700, circunstâncias levaram a um dos episódios mais tristes e deselegantes em toda a história da ciência: a disputa entre Leibniz e Newton, e mais ainda entre seus seguidores, sobre quem deveria receber os créditos do cálculo. Cada um fez contribuições importantes para derivada, integral, séries infinitas e, acima de tudo, para o Teorema Fundamental do Cálculo. As acusações de plágio e outros ataques eram irrelevantes frente à matemática feita por eles, mas as acusações e contra-ataques escalaram para cisões entre matemáticos e cientistas na Inglaterra (leais a Newton) e no continente europeu (seguidores de Leibniz) os quais levaram à xenofobia nacionalista por mais de um século. O primeiro livro sobre cálculo diferencial foi Analysis of Infinitely Small Quantities for the Understanding of Curved Lines (Análise de quantidades infinitamente pequenas para o entendimento de curvas, 1696) pelo Marquês de l'Hospital (1661--1704). Muito de seu trabalho foi realmente devido à Johann Bernoulli (1667--1748) e seguiu o tratamento de Leibniz para derivadas, máximos, mínimos e outras análises de curvas. Mas o método de L'Hospital para determinar o raio de curvatura era muito parecido com aquele de Newton. Jakob Bernoulli (1654-1705) e seu irmão mais novo Johann lideraram o caminho para espalhar o conhecimento do poder das fórmulas de cálculo de Leibniz propondo e resolvendo problemas desafiadores (o problema da catenária e da braquistócrona são dois exemplos) para os quais o cálculo era necessário. Leibniz, Newton e Huygens também resolveram estes problemas. Estes problemas e outros levaram ao desenvolvimento das equações diferenciais e do cálculo das variações, novos campos da matemática dependentes de cálculo.

Na Inglaterra, o novo Treatise of Fluxions (Tratado de Flúxions, 1737) de Thomas Simpson (1710--1761) forneceu a primeira derivada da função seno. Em 1734, o Bispo George Berkeley (1685--1753) publicou The Analyst (O Analista), um ataque à falta de fundamentos rigorosos para seus flúxions. Berkeley reconheceu a precisão das fórmulas de Newton e a exatidão das suas aplicações abrangentes em física e astronomia, mas criticou as "quantidades infinitamente pequenas" e os "incrementos imperceptíveis" dos fundamentos das derivadas. Colin Maclaurin (1698--1746) tentou defender Newton no seu Treatise of Fluxions (Tratado de Flúxions) (1742) e desenvolveu derivadas para funções logarítmicas e exponenciais e expandiu as fórmulas de Simpson para incluir as derivadas das funções tangente e secante.

No continente, Maria Agnesi (1718--1799) seguiu Leibniz e L' Hospital no seu livro de cálculo Analytical Institutions (Instituições Analíticas, 1748). Leonhard Euler (1707--1783) deu um passo importante na direção de estabelecer uma fundamentação sólida para o cálculo no seu Introduction to the Analysis of the Infinite (Introdução à Análise do Infinito, 1748) quando introduziu funções (no lugar de curvas) como os objetos para os quais as derivadas e outras técnicas de cálculo seriam aplicadas. Por função, Euler queria dizer algum tipo de "expressão analítica"; sua concepção não era tão abrangente como a nossa definição moderna. Na sua publicação, também introduziu o termo análise como um nome moderno para cálculo e a matemática avançada relacionada. No seu Methods of Differential Calculus (Métodos de Cálculo Diferencial, 1755), Euler definiu a derivada como "o método para determinar as razões entre os incrementos imperceptíveis, as quais as funções recebem, e os incrementos imperceptíveis das quantidades variáveis, das quais elas são funções", que soa não muito científico hoje em dia. Mesmo assim, Euler trabalhou com vários casos especiais da regra da cadeia, introduziu equações diferenciais e tratou máximos e mínimos sem usar quaisquer diagramas ou gráficos. Em 1754, na famosa Encyclopédie francesa, Jean le Rond d'Alembert (1717--1783) afirmou que a "definição mais precisa e elegante possível do cálculo diferencial" é que a derivada é o limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero, e que este limite produz certas expressões algébricas que chamamos de derivada. No final do século 18, Joseph Louis Lagrange (1736--1813) tentou reformar o cálculo e torná-lo mais rigoroso no seu Theory of Analytic Functions (Teoria das Funções Analíticas, 1797). Lagrange pretendia dar uma forma puramente algébrica para a derivada, sem recorrer à intuição geométrica, a gráficos ou a diagramas e sem qualquer ajuda dos limites de d'Alembert. Lagrange desenvolveu a principal notação que usamos agora para derivadas e o desenvolvimento lógico de seu cálculo era admirável em outros aspectos, mas seu esforço em prover uma base sólida para o cálculo falhou porque sua concepção da derivada era baseada em certas propriedades de séries infinitas as quais, sabemos agora, não são verdadeiras.

Finalmente, no início do século 19, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789--1857) em suas aulas para seus alunos de engenharia. Em seu Résumé of Lessons given at l'Ecole Polytechnique in the Infinitesimal Calculus (Resumo das Lições Dadas na Escola Politécnica Sobre o Cálculo Infinitesimal, 1823), Cauchy afirmou que a derivada é:

O limite de $[f(x + i) - f(x)] / i$ quando i se aproxima de 0. A forma da função que serve como o limite da razão $[f(x + i) - f(x)] / i$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada. Cauchy prosseguiu para encontrar derivadas de todas as funções elementares e dar a regra da cadeia. De igual importância, Cauchy mostrou que o Teorema do Valor Médio para derivadas, que tinha aparecido no trabalho de Lagrange, era realmente a pedra fundamental para provar vários teoremas básicos do cálculo que foram assumidos como verdadeiros, isto é, descrições de funções crescentes e decrescentes.

Derivadas e o cálculo diferencial estão agora estabelecidos como uma parte rigorosa e moderna do cálculo.

AULA O6

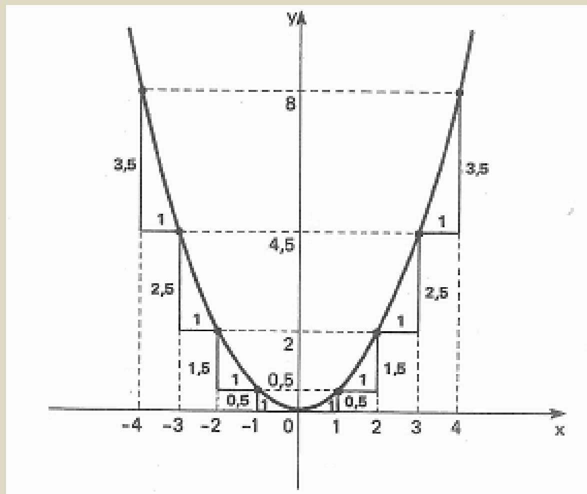
Após estudarmos limite de uma função suas propriedades e aplicações, passaremos nessa aula estudar agora a derivada, a partir da idéia de taxa de variação média.

Como exemplo vamos considerar a função $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

1ª) Vamos construir uma tabela a partir da função dada:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

2ª) Vamos construir agora o gráfico da função:



Podemos observar que se consideramos x variando de 1 a 2, por exemplo, o valor de y também varia, e varia de 0,5 a 2. Assim, enquanto x varia de 1 unidade, y varia 1,5 unidades. Observamos também que mantendo a variação de x constante e igual a 1 unidade (no caso), as variações de y são 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; K K . Essas variações estão marcadas no gráfico acima: Observe que elas não são constantes.

Vamos então considerar, para y, dois valore y_1 e y_2, e também para x, dois valores x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$, para podermos calcular a razão $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1) • $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 0,5 \\ x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 2 \end{cases}$ $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2 - 0,5}{2 - 1} = \dfrac{1,5}{1} = 1,5$.

Podemos dizer que entre 1 e 2, y cresce em média 1,5 unidades por unidade de x.

2) • $\begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 4,5 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$ $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - 4,5}{4 - 3} = \dfrac{3,5}{1} = 3,5$.

Podemos dizer que entre 3 e 4, y cresce em média 3,5 unidades por unidade de x.

3) • $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 0,5 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$ $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - 0,5}{4 - 1} = \dfrac{7,5}{3} = 2,5$.

Podemos dizer que entre 1 e 4, y cresce em média 2,5 unidades por unidade de x.

4) • $\begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 0,5 \end{cases}$ $\quad \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0,5 - 2}{-1 - (-2)} = \dfrac{-1,5}{-1 + 2} = \dfrac{-1,5}{1} = 1,5$.

Podemos dizer que entre -2 e -1, y decresce em média 1,5 unidades por unidade de x.

5) • $\begin{cases} x_1 = -3 \to y_1 = 4,5 \\ x_2 = -2 \to y_2 = 2 \end{cases}$ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2 - 4,5}{-2-(-3)} = \dfrac{-2,5}{-2+3} = \dfrac{-2,5}{1} = -2,5$.

Podemos dizer que entre -3 e -2, y decresce em média 2,5 unidades por unidade de x.

6) • $\begin{cases} x_1 = -3 \to y_1 = 4,5 \\ x_2 = -1 \to y_2 = 2 \end{cases}$ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0,5 - 4,5}{-1-(-3)} = \dfrac{-4,0}{-1+3} = \dfrac{-4,0}{2} = -2$.

Podemos dizer que entre -3 e -1, y decresce em média 2 unidades por unidade de x.

De um modo geral, sendo *f* uma função definida num intervalo aberto do domínio, x_1 e x_2 dois valores do domínio, com $x_1 \neq x_2$, a razão $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, representa a variação no valor da função em média por unidade que se acrescenta no valor de x entre x_1 e x_2.Assim, vale definir.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$ que é a taxa de variação média da função entre x_1 e x_2.

Vale observar que a taxa de variação média pode não ser constante, podendo ser positiva ou negativa dependendo dos pontos considerados.

Questões Resolvidas

01) Sendo $f(x) = 1 - 2x$, definida em ¡ , calcule a taxa de variação média da função entre $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

Solução:

$$f(x_1) = f(3) = 1 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5$$
$$f(x_2) = f(5) = 1 - 2 \cdot 5 = 1 - 10 = -9$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-9-(-5)}{5-3} = \frac{-9+5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

02) Sendo $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, definida em ¡ , calcule a taxa de variação média da função entre $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.

Solução:

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 2 - 3 - 2 = -3$$
$$f(x_2) = f(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 2 = 32 - 12 - 2 = 32 - 14 = 18$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18-(-3)}{4-1} = \frac{18+3}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Questões Propostas

01) O gráfico de uma função *f* passa pelos pontos P(1, -5) e Q(3, -2). Calcule a taxa de variação média dessa função entre $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. R: $\dfrac{3}{2}$.

02) Calcule a taxa de variação média da função *f* entre $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$. Sabendo que o seu o gráfico de uma função *f* passa pelos pontos P(-3, 0) e Q(1, -5).

R: $-\frac{5}{4}$.

03) Dada a função $f(x) = 3x - 1$, definida em $\mathbb{R}$, calcule a taxa de variação média da função entre os pontos.

a) $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ R: 3.

b) $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$ R: 3.

04) Dada a função $f(x) = -3x^2 + x$, definida em $\mathbb{R}$, calcule a taxa de variação média da função entre os pontos.

a) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ R: -8.

b) $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$ R: -18.

05) Dada a função: $\begin{cases} 1 - 3x, \text{ se } x \le -1. \\ \frac{x^2}{2} - 4, \text{se } x > 1. \end{cases}$. Calcule a taxa de varaiação média da função entre:

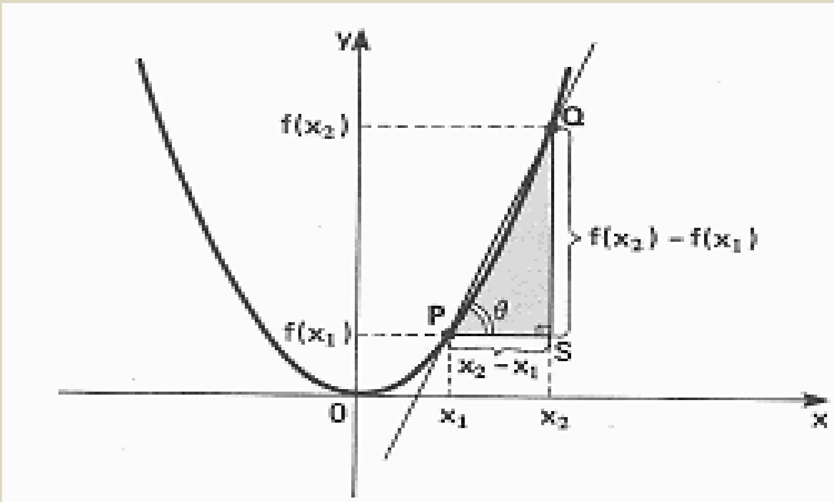
a) $x_1 = -4$ e $x_2 = -1$ R: -3.

b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ R: $\frac{3}{2}$.

AULA O7

Após estudar a taxa de variação média, faremos agora um breve estudo da interpretação geométrica da taxa de variação média, usando o resultado para calcular os coeficientes angulares das retas secantes e tangentes.

Faremos agora a interpretação geométrica da taxa de variação média, para isso usaremos a mesma função $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e o seu gráfico.

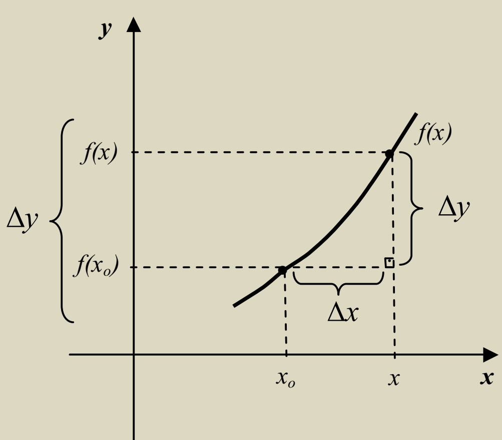


Observando a figura, temos:

Δ PSQ, retângulo $\Rightarrow \text{tg}\ \theta = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}, \text{tg}\ \theta = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ e sendo $m_{\overline{PQ}} = \text{tg}\ \theta$, temos:

$m_{\overline{PQ}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, Isto é, geometricamente, a taxa de variação média da função entre x_1 e $x_2, (x_1 \neq x_2)$ é igual ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função nos pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$.

Neste exemplo estamos usando também o conceito de razão incremental ou razão do acréscimo, para calcular o coeficiente angular da reta secante e tangente ao gráfico da função dada, como vemos abaixo:



$x_0 + \Delta x = x$

$\Delta x = x - x_o$

$\Delta x \rightarrow$ Acréscimo ou incremento de x

$f(x_o) + \Delta y = f(x)$

$\Delta y = f(x) - f(x_o)$

$\Delta y \rightarrow$ Acréscimo ou incremento de f (x)

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, Razão incremental ou razão dos acréscimos.

Questões Resolvidas

01) Determine o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $f(x) = -x^2 + 3x$, nos pontos (2, *f*(2)) e (5, *f*(5)).

Solução:

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

$$f(2) = -(2)^2 + 3 \cdot 2 = -4 + 6 = 2 \Rightarrow f(5) = -(5)^2 + 3 \cdot 5 = -25 + 15 = -10$$

E o coeficiente angular da reta secante nos pontos (2, 2) e (5, -10) é

$$\mathrm{m} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-10 - 2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

02) Sendo $f(x) = \frac{x^2}{3}$, calcule o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de *f* nos pontos P(-2, *f*(-2)) e Q(0, *f*(0).

Solução:

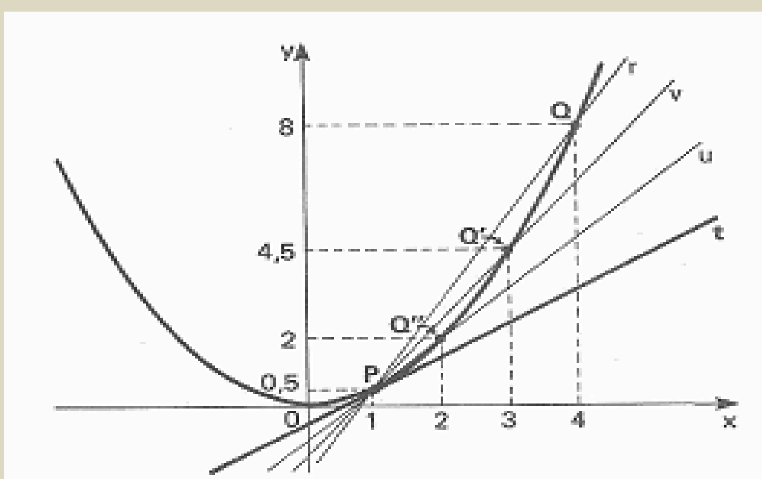
$$f(x) = \frac{x^2}{3}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2}{3} = 0$$

E o coeficiente angular da reta secante nos pontos P(-2, *f*(-2)) e Q(0, *f*(0) é:

$$\mathrm{m} = \frac{f(-2) - f(0)}{-2 - 0} = \frac{\frac{4}{3} - 0}{-2} = \frac{-4}{3} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{2}{3}$$

Após calcular o coeficiente angular de uma reta secante, veremos agora como calcular o coeficiente angular de uma reta tangente. Para isso usaremos a mesma função $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e o seu gráfico. Observe as retas que passam pelo ponto P(1; 0,5).



1) • Reta r: é secante ao gráfico de f e o seu coeficiente angular é dado por:

$m_r = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{8-0,5}{3} = \dfrac{7,5}{3} = 2,5$.

2) • Reta v: é secante ao gráfico de f e o seu coeficiente angular é dado por:

$m_v = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{4,5-0,5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

3) • Reta u: é secante ao gráfico de f e o seu coeficiente angular é dado por:

$m_u = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{2-0,5}{1} = \dfrac{1,5}{1} = 1,5$.

E para uma reta secante s, qualquer, que passa pelo ponto P temos: $m_s = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, com $x \neq 1$.

Como a função $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ é contínua em ¡ , ela é também continua num intervalo aberto do domínio que contem x = 1. E quando x tende a 1 pela direita o ponto Q percorre o gráfico da função e se aproxima do ponto P. Conseqüentemente as retas r, v, uK se aproxima da reta t tangente ao gráfico de f no ponto P(1; 0,5). O mesmo acontece quando x tende a 1 pela esquerda. Podemos dizer que o coeficiente angular m_t da reta t, tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, no ponto P(1; 0,5).

Se você bem perceber estamos aplicando a definição de limite na equação da reta secante m_t. Logo:

$$m_t = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2-1}{2}}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{2(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{2}$$

$$m_t = \frac{1+1}{2} \Rightarrow m_t = \frac{2}{2} \Rightarrow m_t = 1.$$

De um modo geral, sendo *f* uma função continua num intervalo aberto do domínio, e sendo x_0 um ponto do domínio, podemos dizer que:

O coeficiente angular da reta t, tangente ao gráfico da função no ponto $P(x_0, f(x_0))$, é dado por $m_t = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\beta$, se ele existir e for finito, onde passa ser o próprio conceito de deriva.

A derivada da função $f\,(x_0)$, no ponto x_o é igual ao coeficiente angular $(\operatorname{tg}\beta)$ da reta **t**, tangente ao gráfico da função f (x), no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

Da geometria Analítica no ¡ ^{2} a equação de uma reta sendo dados dois pontos e o coeficiente angular e dado pela seguinte fórmula $(y-y_o) = m(x-x_o)$, aplicando o conceito de derivada na mesma equação obtemos $\big(f(x)-f(x_o)\big) = f'(x_o).(x-x_o)$ e como f (x) = y.

$$(y - f(x_o)) = f'(x_o).(x - x_o) \rightarrow \text{ Equação da reta tangente.}$$

$$(y - f(x_o)) = -\frac{1}{f'(x_o)} \cdot (x - x_o) \rightarrow \text{ Equação da reta normal.}$$

Vejamos mais alguns exemplos para podemos assimilar melhor essas equações.

<u>Questões Resolvidas</u>

01) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -3x^2 + 2x$, no ponto P(2, *f*(2)).

Solução:

$f(x) = -3x^2 + 2x$

$f'(x) = -6x + 2 \Rightarrow f'(2) = -6 \cdot 2 + 2 \Rightarrow f'(2) = -12 + 2 \Rightarrow f'(2) = -10$

$f'(2) = -10$

Logo o coeficiente angular da reta tangente no ponto P(2, *f*(2)) é:-10.

02) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3$, no ponto P(-1, *f*(-1)).

Solução:

$f(x) = x^3$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{x^3 - (-1)}{x + 1} = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$m_t = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - (-1)}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) \Rightarrow$$

$m_t = (-1)^2 - (-1) + 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 3$

$m_t = 3$

Logo o coeficiente angular da reta tangente no ponto P(-1, *f*(-1)). é 3.

03) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto P(1, 1).

Solução:

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{1}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{1})}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{1})} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{1})^2}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{1})} \Rightarrow$$

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{1})} \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{1})} \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{1})} \Rightarrow \frac{1}{1 + 1} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$m_t = \frac{1}{2}$

Logo a reta tangente no ponto P(1, 1).

$(y - f(x_o)) = f'(x_o).(x - x_o)$

$y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow 2(y - 1) = 1(x - 1) \Rightarrow 2y - 2 = x - 1 \Rightarrow x - 2y - 1 + 2 = 0$

$x - 2y + 1 = 0$

04) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto P(2, 4).

Solução:

$$m_t = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - (2)^2}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)} \Rightarrow \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$m_t = 2+2 \Rightarrow 4 \Rightarrow m_t = 4$$

Logo a reta tangente no ponto P(2, 4).

$$(y - f(x_o)) = f'(x_o).(x - x_o)$$

$$y - 4 = 4\cdot(x-2) \Rightarrow y - 4 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - y - 8 + 4 \Rightarrow 4x - y - 4 = 0$$

$$4x - y - 4 = 0$$

Questões Propostas

01) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -4x^2$, no ponto P(1, *f*(1)). R: -8

02) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 1$, no ponto P(-2, *f*(-2)). R: 6

03) Determine a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 1$, no ponto P(2, *f*(2)).
R: $12x - y - 11 = 0$

04) Determine a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 2\sqrt{x}$, no ponto P(4, 4). R: $x - 2y + 4 = 0$

05) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2$ no ponto x = -1. R: $y = -4x - 6$

06) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ no ponto P(2, 3).
R: $y = 7x - 11$

07) Determine todos os pontos nos quais o gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ tem inclinação 8.
R: P(2, - 1)

08) Determine o ponto do gráfico da função $f(x) = 2x - x^2$, em que a reta tangente t é paralela a reta $(r) y = 3x - 1$. R: $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

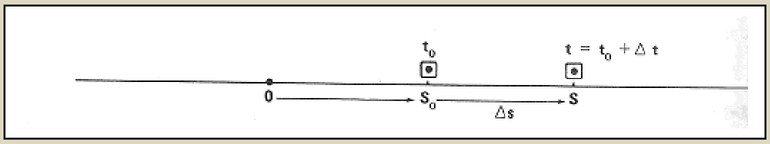
09) Determine o ponto do gráfico da função $f(x) = x^3 + x$, em que a reta tangente t é paralela a reta $(r) 7x - 4y = 2$. R: $P = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{8}\right)$.

AULA 08

Após fazemos a interpretação geométrica da taxa de variação média, e calcularmos os coeficiente angular da reta tangente, usaremos a taxa de variação média, para fazer o estudo do movimento retilíneo uniformemente acelerado em Cinemática.

Uma outra aplicação do estudo da taxa de variação média serve para explicar um importante tópico da Física no capitulo de Cinemática, onde sabemos que a posição de um ponto material em movimento sobre uma curva (trajetória) conhecida pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva.

Assim, **S** é uma função de t e indicamos por **S = S(t),** chamada **função horária** do ponto.



Observando o gráfico acima, e supondo conhecida a definição de velocidade, teremos:

$$\boxed{\text{Velocidade média } (V_m) = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

Então, para calcular a velocidade escalar do móvel ponto t_o, temos:

$$\boxed{V(t_o) = \lim_{t \to t_o} \Rightarrow \lim_{t \to t_o} \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_o)}$$

Considerando a definição de derivada, podemos afirmar que a velocidade de um ponto móvel num instante t_o é igual à derivada da função horária S(t) no instante em que $t = t_o$, isto é:

$$\boxed{V(t_o) = S'(t_o)}$$

Sabemos que, para um ponto em movimento, a velocidade v pode variar em função do tempo t, assim, teremos a expressão v = f(t), chamada função da velocidade do ponto.

Do estudo da cinemática, sabemos que:

$$\boxed{\text{Aceleração Média } (a_m) = \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

A aceleração escalar do ponto t_o é o limite:

$$\boxed{a_m = \lim_{t \to t_o} a_m = \lim_{t \to t_o} \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_o)}$$

Considerando a definição de derivada, podemos afirmar que a aceleração de um ponto móvel num instante t_o é igual à derivada da função velocidade v(t) no instante em que $t = t_o$, isto é:

$$\boxed{a(t_o) = v'(t_o)}$$

Questões Resolvidas

01) A equação horária de uma partícula em movimento é S = $4t^2$ (Unidade SI: t em segundos e s em metros). Determine:

a) A velocidade média da partícula entre os instantes t_1 = 2s e t_2 = 5s.

Solução:

$$S(2) = 4 \cdot t^2 \Rightarrow 4 \cdot (2)^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$S(5) = 4 \cdot t^2 \Rightarrow 4 \cdot (5)^2 = 4 \cdot 25 = 100$$

$$V_m = \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o} \Rightarrow V_m = \frac{S(5) - S(2)}{5 - 2} \Rightarrow V_m = \frac{100 - 16}{5 - 2} \Rightarrow V_m = \frac{84}{3}$$

$$V_m = 24 \text{ m/s}$$

b) A velocidade da partícula no instante t = 10s é dada pela derivada de s no instante t = 10s.

Solução:

$$S(t) = 4 \cdot t^2 \Rightarrow S(10) = 4 \cdot (10)^2 = 4 \cdot 100 = 400$$

$$v(10) = S'(10) = \lim_{t \to 10} \frac{S(t) - S(10)}{t - 10} \Rightarrow v(10) = \lim_{t \to 10} \frac{4 \cdot t^2 - 400}{t - 10} \Rightarrow v(10) = \lim_{t \to 10} \frac{4 \cdot (t^2 - 100)}{t - 10} =$$

$$v(10) = \lim_{t \to 10} \frac{4 \cdot (t - 10) \cdot (t + 10)}{t - 10} \Rightarrow \lim_{t \to 10} 4 \cdot (t + 10) \Rightarrow 4 \cdot (10 + 10) = 4 \cdot 20 = 80 \text{ m/s}$$

$$v(10) = 80 \text{ m/s}$$

02) A equação da velocidade de uma partícula em movimento é v = t^2 - 2t (Unidade SI: t em segundos e v em metros por segundo). Determine:

a) A aceleração média da partícula entre os instantes t_1 = 1s e t_2 = 6s.

Solução:

$$v(1) = (1)^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow 1 - 2 = -1$$

$$v(6) = (6)^2 - 2 \cdot 6 \Rightarrow 36 - 12 = 24$$

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_o)}{t - t_o} \Rightarrow a_m = \frac{v(6) - v(1)}{6 - 1} \Rightarrow a_m = \frac{24 - (-1)}{6 - 1} \Rightarrow a_m = \frac{24 + 1}{5} \Rightarrow a_m = \frac{25}{5}$$

$$a_m = 5 \text{ m/s}^2$$

b) A aceleração da partícula no instante t = 3s é dada pela derivada de v no ponto t = 3s

Solução:

$$v(3) = (3)^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$$

$$a(3) = \lim_{t \to 3} \frac{v(t) - v(3)}{t - 3} \Rightarrow a(3) = \lim_{t \to 3} \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3} \Rightarrow a(3) = \lim_{t \to 3} \frac{(t - 3) \cdot (t + 1)}{t - 3}$$

$$a(3) = \lim_{t \to 3}(t + 1) \Rightarrow (3 + 1) \Rightarrow a(3) = 4 \text{ m/s}^2$$

03) Um ponto em movimento obedece à equação horária $S = t^2 + 3t$ (nas unidades: S em metros e t em segundos). Determinar a velocidade do móvel no instante t = 4s.

Solução:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$
$$S(t_0) = t^2 + 3t \Rightarrow S'(t_0) = 2t + 3 \Rightarrow S'(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11 \text{ m/s}$$
$$v(t_0) = S'(t_0) = 11 \text{ m/s}$$

04) Um ponto em movimento obedece à equação horária $S = t^2 - 5t + 1$ (nas unidades: S em metros e t em segundos). Determinar a velocidade do móvel no instante t = 10 s.

Solução:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$
$$S(t_0) = t^2 - 5t + 1 \Rightarrow S'(t_0) = 2t - 5 \Rightarrow S'(10) = 2 \cdot 10 - 5 = 20 - 5 = 15 \text{ m/s}$$
$$v(t_0) = S'(t_0) = 15 \text{ m/s}$$

05) Um móvel se desloca segundo a função horária $S = t^3 - 5t + 3$ (nas unidades: S em metros e t em segundos). Determinar a aceleração do móvel no instante t = 3s.

Solução:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$
$$a(t_0) = v'(t_0)$$
$$S(t_0) = t^3 - 5t + 3 \Rightarrow S'(t_0) = 3t^2 - 5$$
$$v'(t_0) = 6t \Rightarrow a(t_0) = v'(3) \Rightarrow 6 \cdot 3 = 18 \text{ m/s}^2$$
$$a(t_0) = 18 \text{ m/s}^2$$

06) Um móvel se desloca segundo a função horária $S = t^3 + t^2 + t$ (nas unidades: S em metros e t em segundos). Determinar a aceleração do móvel no instante t = 1s.

Solução:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$
$$a(t_0) = v'(t_0)$$
$$S(t_0) = t^3 + t^2 + t \Rightarrow S'(t_0) = 3t^2 + 2t + 1$$
$$v'(t_0) = 6t + 2 \Rightarrow a(t_0) = v'(3) \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2 = 8 \text{ m/s}^2$$
$$a(t_0) = 8 \text{ m/s}^2$$

<u>Questões Propostas</u>

01) Um ponto em movimento obedece á equação horária $S = 2t^2 - 3t$ (Unidade: SI). Determine:

a) A velocidade média da partícula entre os instantes $t_1 = 1s$ e $t_2 = 3s$. R: 5 m/s.

b) A velocidade da partícula no instante t = 6s. R: 21 m/s.

02) A equação horária de uma partícula é dada $S = t^3$ (Unidade: SI). Determine:

a) A velocidade média da partícula entre os instantes $t_1 = 3s$ e $t_2 = 7s$. R: 79 m/s.

b) A velocidade da partícula no instante t = 4s. R: 48 m/s.

03) Determine a velocidade da partícula cuja equação horária é dada por (Unidade: SI).

a) $S = 4t^2 + 18t$, no instante t = 0s. R: 18 m/s.

b) $S = t^2 - 3t + 2$, no instante t = 40s. R: 77 m/s.

c) $S = -2t^2 + 50$, no instante t = 3s. R: -12 m/s.

04) A velocidade de um ponto em movimento varia segundo a equação $v = 4t^2$ (Unidade: SI). Determine:

a) A aceleração média da partícula entre os instantes $t_1 = 2s$ e $t_2 = 9s$. R: 44 m/s^2.

b) A aceleração da partícula no instante t = 5s. R: 40 m/s^2.

05) Uma partícula se move sobre uma curva com uma velocidade dada pela equação $v = t^3$ (Unidade: SI). Determine:

a) A aceleração média da partícula entre os instantes $t_1 = 1s$ e $t_2 = 5s$. R: 31 m/s^2.

b) A aceleração da partícula no instante t = 10s. R: 300 m/s^2.

06) Determine a aceleração da partícula cuja velocidade é dada pela equação (Unidade: SI). Determine:

a) $v = \frac{2}{3} \cdot t^2 - 1$, no instante t = 3s. R: 4 m/s^2.

b) $v = 4t^3$, no instante t = 1s. R: 12 m/s^2.

07) Determine a velocidade de uma partícula no instante t = 10s, sabendo que a sua equação horária é dada por $S = 3t^2 - 4t + 8$ (Unidade: SI). R: 56 m/s.

08) Uma partícula se move sobre uma curva com uma velocidade $v = \frac{2}{3} \cdot t^3$. Determine a aceleração da partícula no instante t = 8s. R: 128 m/s^2.

09) Um corpo móvel percorre uma curva obedecendo à equação horária $S(t) = \sqrt{t} + t^2$. Determinar a sua velocidade no instante t = 4s. R: $\frac{33}{4}$ m/s.

10) A função posição de uma partícula é dada por $S(t) = t^3 - 4,5t^2 - 7t$ com $t \geq 0$. Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s? R: t = 4s.

11) Uma partícula move-se de acordo com uma lei do movimento $S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ com $t \geq 0$. Onde t e medido em segundos e s, em metros.

a) Encontre a aceleração no instante t e depois de t = 3s. R: $6t - 24$ e $-6\ m/s^2$.

Em fim as taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida através da condutividade térmica com o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou para fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura.

Em psicologia, aqueles interessados na teoria do aprendizado estudam a chamada curva do aprendizado, que é o gráfico do desempenho P(t) de alguém aprender alguma coisa como função do tempo de treinamento t. È de particular interesse a taxa segundo a qual o desempenho melhora à medida que o tempo passa, isto é, dP/dt.

Em sociologia, o cálculo diferencial é usado na análise do espalhamento do boato (ou inovações, ou modismo, ou padrões). Se p(t) denota a proporção de uma população que fica sabendo de um boato no instante t, então a derivada dp/dt, representa a taxa de espalhamento do boato.

Da mesma forma a velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física, a taxa de reação e a compressibilidade na química, a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia, o custo e o lucro marginal na economia, a taxa do fluxo do calor na geologia, a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a **derivada**.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) dentre outros, pode ter interpretaçóes diferentes em cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados para todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais separadas para cada ciência. O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) colocou isso sucintamente: “Os matemáticos comparam os mais diversos fenômenos e descobrem as anlogias secretas que os unem”.

Nas próximas aulas vamos verificar essas afirmaçóes bom estudo!!!

AULA 09

Quando estudamos a taxa de variação média, nas aulas, 06, 07 e 08, vimos que a mesma serve para calcular coeficiente angular da reta secante e tangente, velocidade e aceleração no estudo da cinemática, usando o mesmo conceito de taxa de variação média. Nessa aula estudaremos regras derivação ou as propriedades operatórias, derivadas das funções elementares, derivada sucessivas, aplicações em economia e resolução de equações polinomiais.

Todavia o conceito de derivada também pode ser interpretado como taxa de variação, pois dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}$, a correspondente variação de y a $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. O quociente é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, que representa a taxa de variação de y em ralação a x é chamado de razão incremental ou razão dos acréscimos.

E a taxa instantânea de variação ou simples taxa de variação de y em relação a x, que é a definição formal de derivada $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

9.1 - Definição de derivada:

Dizemos que a função f (x) é derivável no ponto x_o, se o limite da razão incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$, existir e for único $f'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$.

Notações: $f'(\mathrm{x}) = \dfrac{dy}{dx}$ ou $f'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ou $f'(\mathrm{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Questões Resolvidas

01) Usando a definição de derivada, calcule:

1) $f(x) = \sqrt{x}$

1ª Maneira

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2ª Maneira

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}) - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{(\sqrt{x+\Delta x}) + (\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x}) + (\sqrt{x})} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) $f(x) = x^2 + 2x$

1ª Maneira

$$f'(x) = 3.x^{3-1} + 2.x = 3x^2\,2.1 = 3x^2 + 2$$

2ª Maneira

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^3+2(x+\Delta x)-(x^3+2x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^3}+3.x^2.\Delta x+3x.\Delta x^2+\Delta x^3 \cancel{+2x}+2\Delta x \cancel{-x^3} \cancel{-2x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(3x^2+3x.\Delta x+\Delta x^2+2)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 3x^2+3x.\Delta x+\Delta x^2+2x = 3x^2+3x.0+0^2+2x = 3x^2+2x = 3x^2+2.1 = \underline{3x^2+2}|$$

3) $f(x) = -4x^2$

1ª Maneira

$$f'(x) = -4\cdot 2x^{2-1} = -8x$$

2ª Maneira

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4(x+\Delta x)^2-(-4x^2)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x^2-8x\cdot\Delta x-4(\Delta x)^2-(-4x^2)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x^2-8x\cdot\Delta x-4(\Delta x)^2+4x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-8x\cdot\Delta x-4(\Delta x)^2}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\cdot(-8x-4\cdot\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\cdot(-8x-4\cdot\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} -8x-4\cdot\Delta x = -8x-4\cdot 0 = \underline{-8x}|$$

9.2 - Função derivada:

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada x_o, pertencente a I, existe, e é único o limite:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

Portanto, podemos definir uma função f: I $\rightarrow$ R, que associa cada $x_o \in$ I a derivada de f no ponto x_o. Esta função é chamada derivada de f ou simplesmente derivada de f.

Habitualmente a derivada de f é representada por $f'(\text{x})$, $\frac{\text{df}}{\text{dx}}$, y' ou Df.

A lei f '(x) pode ser determinada a partir da lei f (x), aplicando-se a definição de derivada de uma função num ponto genérico x $\in$ I. $f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Teorema: Seja a função $f: \text{A} \rightarrow \text{B}$ e x_o.$\in$ A. Se f é derivável em x_o, então f é contínua em x_o $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$. Já demonstrado na aula de 03, no estudo de Limite.

9.3 - Regras de Derivação: As derivadas são muito usadas em engenharia, ciências, economia, medicina e ciências da computação para calcular a velocidade e a aceleração, para explicar o funcionamento de máquinas, para estimar a diminuição do nível da água quando ela é bombeada para fora de um tanque e para prever as conseguencias de erros cometidos durante medições. Obter derivadas calculando limites tal como vimos nas aulas 06, 07 e 08 pode ser demorado e difícil. Desenvolveremos técnicas e fórmulas para calcular derivadas mais facilmente.

9.3.1 - Derivada da soma: É a soma das derivadas.

Sejam u = u (x) e v = v (x), duas funções deriváveis em I =]a, b[. Temos que a função f (x) = u (x) + v (x), também é derivável em I e sua derivada é dada por: $\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$.

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) + v(x_o + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) + v(x_o + \Delta x)] - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) - u(x)] + [v(x_o + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_o + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ e aplicando a definição de $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, obtemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

9.3.2 - Derivada da diferença: É a diferença das derivadas.

Sejam u = u (x) e v = v (x), duas funções deriváveis em I =]a, b[. Temos que a função f (x) = u (x) - v (x), também é derivável em I e sua derivada é dada por: $\boxed{f'(x) = u'(x) - v'(x)}$.

Demonstração:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$f(x) = u(x) + [-v(x)]$$

$$f(x) = u(x) + [-v(x)] \Rightarrow \boxed{f'(x) = u'(x) - v'(x)}$$

9.3.3 – Derivada do produto: É o produto da deriva da 1ª função pela 2ª função, somado com o produto da 1ª função pela derivada da 2ª função.

Sejam u = u (x) e v = v (x), funções deriváveis em I =]a, b[. Temos que a função f (x) = u (x)· v (x), também é derivável em I e sua derivada é dada por:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x_o + \Delta x) \cdot v(x_o + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

Somando e subtraindo o fator $-u(x) \cdot v(x_o + \Delta x) + u(x) \cdot v(x_o + \Delta x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x_o + \Delta x) \cdot v(x_o + \Delta x) - u(x) \cdot v(x_o + \Delta x) + u(x) \cdot v(x_o + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x_o + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x_o + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x_o + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \cdot v(x_o + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{[v(x_o + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$ usando a definição $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ obtemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_o + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x_o + \Delta x) + u(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x_o + \Delta x) - v(x)]}{\Delta x}$$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

Por extensão: a derivada de $f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot t(x)$ é dada por:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot t(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot t(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot t'(x)}$$

9.3.4 - Derivada do quociente: É o produto da deriva da 1ª função pela 2ª função, subtraindo o produto da 1ª função pela derivada da 2ª função e o resultado dividimos pela o quadrado da 2ª função.

Sejam u = u (x) e v = v (x), duas funções deriváveis em I =]a, b[e v (x) $\neq$ 0. Temos que a função $f(x) = \frac{\mathrm{u(x)}}{\mathrm{v(x)}}$, também é derivável em I e sua derivada é dada por:

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Demonstração:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$ Obtendo o m.m.c, temos:

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$ somando e subtraindo o fator $-u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x)$, obtemos:

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x).v(x)}$$

$$\Delta y = \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x) - u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

$$\Delta y = [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]$$ ➢ Dividimos por Δx, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}\cdot\frac{v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}-\frac{u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\cdot\frac{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}$$

➢ Aplicando a Δx diferença de derivada quando $\Delta x\to 0$, obtemos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)}{\underbrace{v(x+\cancelto{0}{\Delta x})\cdot v(x)}_{v(x)\cdot v(x)}}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)}{\underbrace{v(x+\cancelto{0}{\Delta x})\cdot v(x)}_{v(x)\cdot v(x)}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}$$

$$f'(x)=u'(x)\cdot\frac{v(x)}{v(x)\cdot v(x)}-\frac{u(x)}{v(x)\cdot v(x)}\cdot v'(x)\Rightarrow u'(x)\cdot\frac{v(x)}{v^2(x)}-\frac{u(x)}{v^2(x)}\cdot v'(x)$$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)}{v^2(x)}-\dfrac{u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$, somando as frações com os mesmos denominadores obtemos

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

9.3.5 – Derivada da potência:

$$f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=n\cdot(x)^{n-1}$$

Demonstração usando a razão incremental:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$, Efetuando a divisão de $\left(\dfrac{A^2-B^2}{A-B}\right)$, obtemos o resultado:

$\left(A^{n-1}+A^{n-2}\cdot B+\ldots+A\cdot B^{n-2}+B^{n-1}\right)$, substituindo $A=(x+\Delta x)$ e $B=(x)$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+\ldots+\left(x+\Delta x\right)^{n-2}\cdot x+x^{n-1}$, usando a definição de derivada $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(x+\cancelto{0}{\Delta x})^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}(x+\cancelto{0}{\Delta x})^{n-2}\cdot x+\ldots+\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\cancelto{0}{\Delta x}\right)^{n-2}\cdot x+\lim_{\Delta x\to 0}x^{n-1}$$

$$f'(x)=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x+\ldots x^{n-2}\cdot x+n^{n-1}\Rightarrow x^{n-1}+x^{n-2+1}+\ldots x^{n-2+1}+x^{n-1}\Rightarrow\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}}_{n\text{ vezes}}$$

$$\boxed{f'(x)=n\cdot(x)^{n-1}}$$

9.3.6 – Derivada da raiz:

$$f(x)=\sqrt[n]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{n\cdot(\sqrt[n]{x})^{n-1}}\quad x\neq 0.$$

Demonstração: usando a razão incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{(x+\Delta x)-x}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\left(\sqrt[n]{x+\Delta x}\right)^n-\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}\text{ ou ainda}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\left(\sqrt[n]{x+\Delta x}\right)^n-\left(\sqrt[n]{x}\right)^n}{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x+\Delta x}\right)^{n-1}+\sqrt[n]{x}\cdot\left(\sqrt[n]{x+\Delta x}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

➢ Adicionamos a definição de $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$, onde obtemos:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x+\cancelto{0}{\Delta x}}\right)^{n-1}}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{x}\cdot\left(\sqrt[n]{x+\cancelto{0}{\Delta x}}\right)^{n-2}}+\ldots+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{x}.\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-2}}+K+\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}+\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}+\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}}_{\text{n vezes, logo:}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}}$$

<u>Conseqüências das fórmulas de derivadas (10.1.5) e (10.1.6)</u>

Demonstração:

$$f(x)=x^{\frac{m}{n}}\Rightarrow(\sqrt[n]{x})^{m}$$

$$y=x^{\frac{m}{n}}\Rightarrow y'=\frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}\quad\text{ou}\quad y=\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m}\Rightarrow y'=\frac{m}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-n}$$

De acordo com a regra estabelecida no item anterior temos:

$$y=m\cdot(\sqrt[n]{x})^{m-1}\cdot(\sqrt[n]{x})'\ \text{logo}\ \left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

Conforme já provamos anteriormente temos:

$$y'=m\cdot(\sqrt[n]{x})^{m-1}\cdot\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}\Rightarrow\frac{m}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-n}\ \text{logo temos}\ \boxed{y'=\left(\frac{m}{n}\right)\cdot x^{\left(\frac{m-n}{n}\right)}\Rightarrow y'=\left(\frac{m}{n}\right)\cdot x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}}$$

<u>9.4 - Derivada das Funções Elementares:</u> Apresentaremos as derivadas das funções elementares.

<u>9.4.1 Função Identidade:</u> A derivada da função identidade é igual a um.

Dada a função $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, temos: $f'(x)=1$.

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)+\Delta x-f(x)}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}1\Rightarrow\boxed{f'(x)=1}$$

<u>9.4.2 Função constante:</u> A derivada da constante é igual a zero.

Dada a função $f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$, temos: $f'(x)=0$.

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k-k}{\Delta x}\Rightarrow\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}0\Rightarrow\boxed{f'(x)=0}$$

<u>9.4.3 - Derivada da função seno:</u> A derivada da função seno é igual a função cosseno.

Dada a função $f(x)=\text{sen}\,x$, temos: $f'(x)=\cos x$.

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen}(x+\Delta x)-\text{sen }x}{\Delta x}\Rightarrow\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)}{\Delta x}$$

- Transformando o numerador em produto e dividindo por 2 a expressão obtemos.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\boxed{\div 2}\Rightarrow\frac{\frac{2\cdot\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\text{ usando }\lim_{\Delta x\to 0}\text{ obtemos}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\text{L.T.F}=1}.\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\cancel{\Delta x}^{0}}{\cancel{2}}\right)$$

$$f'(x)=1\cdot\cos x\Rightarrow\boxed{f'(x)=\cos x}$$

9.4.4 - Derivada da função cosseno: A derivada da função cosseno é igual a menos função seno.

Dada a função f (x) = cos x, temos: f ' (x) = -sen x

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\Rightarrow\frac{-2\cdot\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\cdot\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)}{\Delta x}\boxed{\div 2}\Rightarrow\frac{\frac{\cancel{-2}\cdot\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cancel{2}}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\text{L.T.F}=1}$$

$$f'(x)=-\text{sen}(x+0)\cdot 1\Rightarrow\boxed{f'(x)=-\text{sen }x}$$

9.4.5 - Derivada da função tangente: A derivada da função tangente é igual a função secante elevado ao quadrado. Dada a função f (x) = tg x, temos: f ' (x) = $\sec^2 x$.

Demonstração:

$$f(x)=\text{tg}(x)\Rightarrow f(x)=\frac{\text{sen }x}{\cos x}$$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u(x)=\text{sen }x\Rightarrow u'(x)=\cos x$$

$$v(x)=\cos x\Rightarrow v'(x)=-\text{sen }x$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)^2\right]}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\text{sen }x\cdot-\text{sen }x}{\left[\cos x\right]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}^{\text{T.F.T}=1}}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=\sec^2 x}$$

9.4.6 - Derivada da função cotangente: A derivada da função cotangente é igual a menos função cossecante elevado ao quadrado. Dada a função f (x) = cotg x, temos: f ' (x) = $-\text{cossec}^2 x$

Demonstração:

$$f(x) = \text{cotg}\,x$$
$$f(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)^2\right]} \Rightarrow \frac{-\text{sen}\,x\cdot \text{sen}\,x - \cos x\cdot \cos x}{[\text{sen}\,x]^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow \frac{-\left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right)}{\text{sen}^2 x} \Rightarrow -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$$
$$\boxed{f'(x) = -\text{cossec}^2 x}$$

9.4.7 - Derivada da função secante: A derivada da função secante é igual ao produto das funções tangente pela secante. Dada a função f (x) = sec x, temos: f ' (x) = tg x$\cdot$ sec x.

Demonstração:

$$f(x) = \sec x$$
$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)^2\right]} \Rightarrow \frac{\cancel{0\cdot \cos x}^{\,0} - 1\cdot -\text{sen}\,x}{[\cos x]^2} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}$$
$$f'(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$\boxed{f'(x) = \text{tg}\,x\cdot \sec x}$$

9.4.8 - Derivada da função cossecante: A derivada da função cossecante é igual a menos o produto das funções cotangente pela cossecante.

Dada a função f (x) = cossec x, temos: f ' (x) = – cotg x$\cdot$ cossec x

Demonstração:

$$f(x) = \text{cossec}\,x$$
$$f(x) = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)^2\right]} \Rightarrow \frac{\cancel{0\cdot \text{sen}\,x}^{\,0} - 1\cdot \cos x}{[\text{sen}\,x]^2} \Rightarrow -\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$$
$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\cdot\frac{1}{\text{sen}\,x}$$
$$\boxed{f'(x) = -\text{cotg}\,x\cdot \text{cossec}\,x}$$

9.4.9 - Derivada da função exponencial:

Dada a função f (x) = a^x, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, temos f ' (x) = $a^x \cdot \ln(a)$

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(a^{x+\Delta x}\right) - a^x}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x.\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \end{array}\right.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\cdot\frac{\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x.\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}}_{\ln(a)}$$

➢ Usando o $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$, obtemos:

$$\boxed{f'(x)=a^x\cdot\ln a}$$

Observação: quando $a^x=e^x$ temos:

$$f'(x)=e^x\cdot\underbrace{\ln e}_{1}$$

$$f'(x)=e^x\cdot 1$$

$$\boxed{f'(x)=e^x}$$

9.4.10 - Derivada exponencial geral:

$$y=(u)^v\Rightarrow(u,v)\Rightarrow f(x)\quad y'=(u)^v\cdot\left[v'\cdot\ln(u)+\frac{v\cdot u'}{u}\right]$$

Demonstração:

$$y=(u)^v\Rightarrow\ln(y)=\ln(u)^v\Rightarrow\ln(y)=v\cdot\ln(u)$$

$$\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln(u)+v\cdot\frac{u'}{u}$$

$$\boxed{y'=(u)^v\cdot\left[v'\cdot\ln(u)+\frac{v\cdot u'}{u}\right]}$$

9.4.11 - Derivada da função logarítmica:

Dada a função f (x) = ln (x), temos: f '(x) = $\dfrac{1}{x}$.

Demonstração:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot[\ln(x+\Delta x)-\ln(x)]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left[\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\Delta x}}\Rightarrow\left[\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left[\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\Delta x}}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\Delta x}}\Rightarrow y=\frac{\Delta x}{x}\qquad\Delta x\to 0$$

$$\Delta x=y\cdot x\qquad y\to 0$$

$$\ln\left[\lim_{y\to 0}(1+y)\right]^{\frac{1}{y\cdot x}}\Rightarrow\ln\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\ln(e)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln e}{1}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{1}{x}}$$

Observação: $f(x)=\log_a^x$, mudança de base e.

$$f(x)=\frac{\log_a^x}{\log_e^a}=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

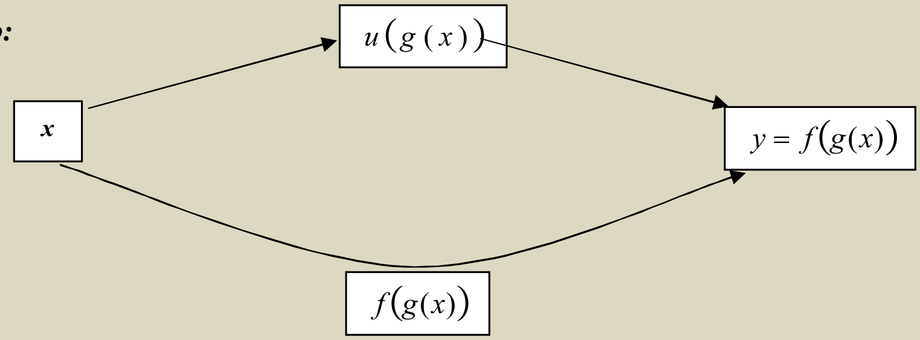
$$f(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(a)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln(a)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$$

9.5 - Derivada de uma função composta ou (Regra da Cadeia)

Função Composta: Imagine que uma industria consiga vender tudo que produz (p) ou seja L é uma função de p logo podemos escrever L(p). Mas a produção por sua vez, pode depender do tempo (t) durante o qual determinada máquina funciona, isto é, p depende de t escrevemos p(t), e, portanto o lucro também depende de t escrevemos L(p(t)). Neste caso o que temos e a composição das funções L e p. O tipo de função que modela situações como estas chama-se de função composta.

Demonstração:



Seja $f: A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g: B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $f{:}A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x, e calculemos sua derivada.

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \text{(I)}$$

e, daí, vem:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y = y + \Delta y \qquad \text{(II)}$$

Também temos;

$\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x) = g(f(x + \Delta x)) - g(f(x)) = g(y + \Delta y) - g(y)$ pela igauldade de (II) $(f(x + \Delta x) = y + \Delta y$
portanto temos $\Delta z = g(y + \Delta y) - g(y)$

Desta forma obtemos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(III)}$$

Observando a igualdade (I), notamos que, quando $\Delta x \to 0$, o mesmo ocorre com $\Delta y \to 0$; então, fazendo $\Delta x \to 0$ na igualdade (III), encontramos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \right] \cdot \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} \right] \cdot \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = g'(y) \cdot f'(x)$$

Desta forma Obtemos: $\boxed{F(x) = g(f(x)) \Rightarrow F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$

<u>9.6 - Derivada Sucessiva</u>

Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I. Se a função também for derivável em I, então sua derivada é a derivada segunda ou derivada de ordem 2 da função, indicada por f ".

Se a função f " também for derivável em I, então sua derivada é a derivada terceira ou derivada de ordem 3 da função f " indicada por f "'.

E assim por diante, se a derivada de ordem *n* for derivável em I, pode-se obter a derivada de ordem n + 1, da função *f*.

Notações: $f^{(1)}(x) = y^{(1)} = \frac{dy}{dx} = y'$ $\quad f^{(2)}(x) = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$ $\quad f^{(n)} = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^n$.

9.7 - Aplicação de derivada na Economia: Análise Marginal

Em negócios e economia é comum economista estarem interessados em como mudanças em variáveis tais como produção, oferta ou preço afetam outras variáveis tais como: custo, receita ou lucro os mesmos usam os termos custo marginal, lucro marginal e receita marginal para as taxas de variação do custo, do lucro, da receita em relação ao número de unidades produzidas ou vendidas.

Supondo que C(x) é o custo total que uma companhia incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função C é chamada função custo. Se o número de itens produzido estiver crescendo x_1 para x_2 o custo adicional será $\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_2)}{\Delta x}$. O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, isto é, a taxa de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, que é denominado pelos Economistas por custo marginal logo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$.

Como o valor de x pode geralmente assumir somente os valores inteiros, pode não fazer sentido tomar Δx, mas podemos sempre substituir C(x) por uma função aproximativa suave. Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (tal que Δx é pequeno comparado com n), temos $C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$. Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo da produç ão de mais uma unidade [(n + 1)ésima unidade].

Em geral é apropriado representar uma função custo por um polinômio $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão-de-obra e asssim por diante (O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x, mas o custo da mão-de-obra poderia depender parcialmente de potências mais altas de x, em decorrências dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala).

Considerações semelhantes se aplicam às funções receitas e lucro, R(x) e L(x). Assim, chegamos às seguintes definições:

1) $CM(x) = C'(x) = \frac{dC}{dx} =$ Custo marginal = O custo extra na produção de uma unidade adicional.

2) $RM(x) = R'(x) = \frac{dR}{dx} =$ Receita marginal = a receita extra pela venda de uma unidade adicional.

3) $LM(x) = L'(x) = \dfrac{dl}{dx} =$ Lucro marginal = O lucro extra de uma unidade adicional.

Como $L(x) = R(x) - C(x)$, temos também a relação $LM(x) = RM(x) - CM(x)$ ou $L'(x) = R'(x) - C'(x)$. Muitas decisões econômicas são baseadas na análise do custo e receita marginal. Uma regra básica é a seguinte.

Se o lucro marginal é positivo, vale a pena aumentar a produção, se o lucro marginal é negativo, vale a pena diminuir a produção.

Para compreender a razão destas afirmações, suponha que o nível de produção seja x = a. Supondo que a função L(x) seja derivável no ponto a, temos, de acordo coma definição de derivada:

$$L'(a) = \lim_{x \to a} \frac{L(x) - L(a)}{x - a}$$

Assim, para valores de x próximos de a, a derivada é o quociente têm o mesmo sinal. Suponha que estejamos interessados em escolher um valor de x tal que o lucro aumente, ou seja, tal que L(x) > L(a). Nesse caso, o sinal de $L'(x)$ é o mesmo de $x - a$. Assim, para x próximo de a.

$L'(a) > 0$, significa $L(x) > L(a)$ quando $x > a$ e portanto o lucro aumenta com o aumento da produção, enquanto.

$L'(a) < 0$, significa $L(x) > L(a)$ quando $x < a$ e portanto o lucro aumenta com o diminuição da produção.

Queremos indicar aqui dois outras aplicações das funções marginais em economia onde a primeira tem a ver com a maximização do lucro e a segunda, com a minimização do custo médio.

Vamos considerar agora o mercado. Seja p(x) o preço por unidade que uma companhia pode cobrar se ela vende x unidades. Então p é chamada função demanda (ou função preço), e esperamos que ela seja uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for p(x), então o rendimento total será $R(x) = x \cdot p(x)$ e R é denominada função rendimento (ou função venda). A derivada $R'(x)$ da função rendimento é conhecida como função rendimento marginal, e é a taxa de variação do rendimento em relação ao número de unidades vendidas. Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será $P(x) = R(x) - C(x)$, e P é dita função lucro. A função lucro marginal é $P'(x)$, a derivada da função lucro. Para maximizar o lucro procuramos por números críticos de P, isto é, os números onde o lucro marginal é zero. Mas se $P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$, então $R'(x) = C'(x)$ e portanto. **Se o lucro for máximo, então o rendimento marginal = custo marginal**.

A função custo médio $c(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, representa o custo por unidade, quando x unidades são produzidas. Notando que $\dfrac{C(x)}{x}$ é a inclinação da reta que liga a origem ao ponto $(x, C(x))$.

È aparente que deve existir um mínimo absoluto. Para encontrá-lo localizamos o ponto crítico de c usando a regra do quociente para diferenciar a equação do custo médio $c'(x) = \dfrac{x \cdot C'(x) - C(x)}{x^2}$, como $c'(x) = 0$, então $x \cdot C'(x) - C(x) = 0$, e temos $C'(x) = \dfrac{C(x)}{x} = c(x)$, portanto. **Se o custo médio for mínimo, então custo marginal = custo médio.**

Esse princípio é plausível, pois se o nosso custo marginal for menor que o nosso custo médio, então deveremos produzir mais e abaixando assim o nosso custo médio. Da mesma forma, se nosso custo marginal for maior que nosso custo médio, então deveremos produzir menos, a fim de abaixar o nosso custo médio.

9.8 - Aplicação das Derivadas Sucessivas na Resolução de Equações Polinomiais

Definição:

Dada a função polinomial $f : £ \to £$ definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + K\ K + a_1 x + a_0 x$ onde $a_0 \neq 0$ e $n > 0$, chama-se função polinomial derivada de $f(x)$ a função $f' : £ \to £$, definida por $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + K\ K + a_1 + 0$.

Neste sentido $f'(x)$ ou $f^1(x)$ também é uma função polinomial é possível determinar a sua função polinomial derivada $(f'(x))'$, obtendo a chamada função derivada - segunda de $f(x)$, que será denotada por $f''(x)$ ou $f^2(x)$. Notemos que:

$$f^{(2)}(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-1} + K\ K + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + a_2$$

A derivada da função polinomial $f^{(2)}(x)$ é chamada função polinomial derivada - terceira $f(x)$ e será denotada por $f'''(x)$ ou $f^{(3)}(x)$. Notemos que:

$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-2} + K\ K + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3$$

E, assim por diante, a derivada da função polinomial $f^{(n-1)}(x)$ é chamada função derivada enésima de $f(x)$ e será denotada por $f^{(n)}(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'}$$

Vamos ver agora os teoremas que facilitam a pesquisa das raízes múltiplas de uma equação polinomial. Da teoria de equação polinomial onde $f(x) = 0$, com multiplicidade m, temos:

$$\boxed{f(x) \equiv (x-r)^m \cdot q(x) \text{ e } q(r) \neq 0}$$

Teorema:

Se r é uma a raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$, então r é raiz de multiplicidade m - 1 da equação $f'(x) = 0$, onde $f'(x)$ é a derivada - primeira de $f(x)$.

***Demonstração*:**

$$f(x) \equiv (x-r)^m \cdot q(x) \Rightarrow f'(x) \equiv m \cdot (x-r)^{m-1} \cdot q(x) + (x-r)^m \cdot q'(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) \equiv m \cdot (x-r)^{m-1} \cdot q(x) + (x-r)^m \cdot q'(x)$$

Portanto, temos: $f'(x) \equiv (x-r)^{m-1} \cdot \left[m \cdot q(x) + (x-r)^m \cdot q'(x) \right]$ e, como

$m \cdot q(r) + (x-r)^m \cdot q'(r) = m \cdot q(r) \neq 0$, temos que r é raiz de multiplicidade m–1 de $f'(x) = 0$.

Corolário 1:

Se r é raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$, então r é raiz de:

$$f^{(1)}(x) = 0,\ f^{(2)}(x) = 0,\ f^{(3)}(x) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x) = 0$$

com multiplicidade m–1, m–2, m–3, … ,1, respectivamente, e r não é raiz de $f^{(m)}(x) = 0$.

Corolário 2:

Se r é raiz das equações $f(x) = 0, f^{(1)}(x) = 0,\ f^{(2)}(x) = 0,\ f^{(3)}(x) = 0, \ldots, f^{(m-1)}(x) = 0$

e r não é raiz da equação $f^{(m)}(x) = 0$, então a multiplicidade de r em $f(x) = 0$ é m.

Resumindo:

"A condição necessária e suficiente para que um número r seja raiz com multiplicidade m de uma polinomial $f(x) = 0$ é que r seja raiz das funções $f(x), f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x), \ldots, f^{(m-1)}(x)$ e não seja raiz $f^{(m)}(x)$".

Questões Resolvidas

01) Determinar a derivada das seguintes funções:

1) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x^3}$

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1+x^3} + x^2 \cdot \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{1+x^3}}$$

$$\boxed{f'(x) = 2x \cdot \sqrt{1+x^3} + \frac{3x^4}{2 \cdot \sqrt{1+x^3}}}$$

$$v(x) = \sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x^3)^{\frac{1}{2}-1}.3x^2 \Rightarrow$$

$$v'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}.(0+3x^2) \Leftarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot 3x^2 \Rightarrow$$

$$v'(x) = \frac{3x^2}{2.\sqrt{1+x^3}}$$

2) $f(x) = \dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}$

$$u(x) = 1 + senx \Rightarrow u'(x) = \cos x$$
$$v(x) = 1 - senx \Rightarrow v'(x) = -\cos x$$

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x.(1-sen\,x) - [(1+sen\,x)].(-\cos x)}{[(1-sen\,x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \cancel{\cos x.sen\,x} + \cos x + \cancel{\cos x.sen\,x}}{[(1-sen\,x)]^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2.\cos x}{[(1-sen\,x)]^2}}$$

3) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

$$f'(x)=\frac{(\cos x-sen\,x)\cdot(sen\,x-\cos x)-[(sen\,x+\cos x)\cdot(\cos x+sen\,x)]}{[sen\,x-\cos x]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x.sen\,x-\cos^2 x-sen^2x+sen\,x.\cos x-\left[sen\,x.\cos x+sen^2x+\cos x^2+\cos x.sen\,x\right]}{[sen\,x-\cos x]^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{\cos x.sen\,x}-\cos^2 x-sen^2x\cancel{+sen\,x.\cos x}\cancel{-sen\,x.\cos x}-sen^2x-\cos x^2\cancel{-\cos x.sen\,x}}{[sen\,x-\cos x]^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos^2 x-sen^2x-sen^2x-\cos x^2}{[sen\,x-\cos x]^2}\Rightarrow\frac{-2.\cos^2 x-2.sen^2x}{[sen\,x-\cos x]^2}\Rightarrow\frac{-2.(\cos^2 x+sen^2x)}{[sen\,x-\cos x]^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2.1}{[sen\,x-\cos x]^2}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{-2}{[sen\,x-\cos x]^2}}$$

4) $f(x)=\dfrac{\text{tg x}}{\text{sen x}+\text{cos x}}$

$u(x)=tg\,x\Rightarrow u'(x)=\sec^2 x$

$v(x)=sen\,x+\cos x\Rightarrow v'(x)=\cos x-sen\,x$

$$f'(x)=\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{[v'(x)]^2}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{sen^2x.(\cos x+sen\,x)-tg\,x.(\cos x-sen\,x)}{[sen\,x-\cos x]^2}}$$

5) $f(x)=\text{sec x}\cdot\text{ln x}$

$u(x)=\sec x\Rightarrow u'(x)=tg\,x.\sec x$

$v(x)=\ln x\Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$$

$$f'(x)=tg\,x\cdot\sec x\cdot\ln x+\sec x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\sec x\cdot\left(tg\,x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\right)}$$

6) $f(x)=4\cdot\text{sec x}+3\cdot\text{cossec x}$

$u(x)=\sec x\Rightarrow u'(x)=tg\,x\cdot\sec x$

$v(x)=\text{cossec}\,x\Rightarrow v'(x)=-\text{cotg}\,x\cdot\text{cossec}\,x$

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v(x)$$

$$f'(x)=4\cdot tg\,x\cdot\sec x+3\cdot(-\text{cotg}\,x\cdot\text{cossec}\,x)$$

$$\boxed{f'(x)=4\cdot tg\,x\cdot\sec x-3\cdot\text{cotg}\,x\cdot\text{cossec}\,x}$$

7) $f(x)=\text{e}^{-\text{cossec}^3\text{x}}$

$$f'(x)=\text{e}^{-\text{cossec x}^3}.-(-\text{cossec x}^3\cdot\text{cotg x}^3\cdot3\text{x}^2)$$

$$\boxed{f'(x)=3\text{x}^2.\text{e}^{-\text{cossec x}^3}.(\text{cossec x}^3\cdot\text{cotg x}^3)}$$

8) $f(x)=\text{cos x}\cdot\text{cotg x}$

$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$f'(x)=-sen\,x\cdot\text{cotg}\,x+\cos x\cdot(-\text{cossec}^2 x)\Rightarrow-\cancel{sen\,x}\cdot\frac{\cos x}{\cancel{sen x}}+\cos x\cdot\left(\frac{1}{sen^2x}\right)\Rightarrow-\cos x+\cos x\cdot\left(\frac{1}{sen^2x}\right)$$

$$f'(x)=-\cos x-\frac{\cos x}{sen\,x}\cdot\frac{1}{sen\,x}\Rightarrow\boxed{f'(x)=-\cos x-\text{cotg}\,x.\text{cossec}\,x}$$

9) $f(x)=(\text{x}+\text{cossec x})\cdot\text{ln x}$

$u(x)=x\Rightarrow u'(x)=\left[1+\left(-\text{cotg}\,x.\text{cossec}\,x\right)\right]$

$v(x)=\ln x\Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

$f'(x) = (1 - \text{cotg}\, x.\text{cossec}\, x) \cdot \ln x + (x + \text{cossec}\, x) \cdot \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = (1 - \text{cotg}\, x.\text{cossec}\, x) \cdot \ln x + \left(\dfrac{x}{x} + \text{cossec}\, x \cdot \dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{f'(x) = (1 - \text{cotg}\, x.\text{cossec}\, x) \cdot \ln x + 1 + \dfrac{1}{x} \cdot \text{cossec}\, x}$

10) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \text{sen}\, x}{e^x}$

$u(x) = x^2.sen\,x \Rightarrow u'(x) = 2x.sen\,x + x^2.\cos x$

$v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$

$f'(x) = \dfrac{\left(2x \cdot sen\,x + x^2 \cdot \cos x\right) e^x - x^2 \cdot sen\,x \cdot e^x}{\left[e^x\right]^2} = \dfrac{\cancel{e^x} \cdot x \cdot [2 \cdot sen\,x + x \cdot \cos x - x \cdot sen\,x]}{\left[e^x\right]^{\cancel{2}}}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{x \cdot [2 \cdot sen\,x + x \cdot \cos x - x \cdot sen\,x]}{e^x}}$

11) $f(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{\cos x}$

$u(x) = e^{x^2+1} \Rightarrow u'(x) = e^{x^2+1}.2x$

$v(x) = \cos x \Rightarrow v'(x) = -sen x$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \Rightarrow \dfrac{\left(2x \cdot e^{x^2+1}\right)\cos x + e^{x^2+1} \cdot sen\,x}{[\cos x]^2} \Rightarrow \dfrac{\left(2x.e^{x^2+1}\right)\cos x + e^{x^2+1} \cdot sen\,x}{\cos^2 x}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{e^{x^2+1}\left(2x \cdot \cos x + sen\,x\right)}{\cos^2 x}}$

12) $f(x) = \log_3^{\,\text{sen}\,x}$

$f(x) = \log_a^{\,x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{sen\,x \cdot \ln 3}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{\text{cotg}\, x}{\ln 3}}$

* A derivada de $sen\,x$ é $\cos x$.

* $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

* $f(x) = \log_a^{\,x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

13) $f(x) = e^{\text{sen}\left(x^2+5x+1\right)}$

$f'(x) = e^{sen\left(x^2+5x+1\right)}.\cos\left(\boxed{x^2+5x+1}\right).(2x+5)$

$\boxed{f'(x) = (2x+5).e^{sen\left(x^2+5x+1\right)}.\cos\left(x^2+5x+1\right)}$

Derivada da parte interna

$= x^2 + 5x + 1$

$= 2x + 5.1 + 0$

$= 2x + 5$

14) $f(x) = \log_2^{\left[\sec\left(x^2-1\right)\right]}$

$y' = \dfrac{tg(x^2-1).\cancel{\sec(x^2-1)}.2x}{\cancel{\sec(x^2-1)} \cdot \ln 2} \Rightarrow \boxed{y' = \dfrac{2x.tg(x^2-1)}{\ln 2}}$

15) $f(x) = \sec\left(\sqrt[3]{x}\right)$

$$f'(x) = 3.\left(\boxed{\sec\sqrt{x}}\right)^{3-1}$$

Deriva a parte interna e multiplica por $3.\left(\sec\sqrt{x}\right)^2$

$$f'(x) = 3.\left(\sec\sqrt{x}\right)^2.\boxed{\sec\sqrt{x}.\ tgx\sqrt{x}}\cdot\boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Deriva a parte interna

$$f'(x) = 3.\sec^2\sqrt{x}.\sec\sqrt{x}.\ tgx\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Deriva do arco

- A derivada de $\left(\sec\sqrt{x}\right) \Rightarrow \sec\sqrt{x}\cdot tg\sqrt{x}$
- A derivada de $\sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 3.\sec^3\sqrt{x}.\ tgx\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot\sec^3\sqrt{x}\cdot\ tgx\sqrt{x}$$

16) $f(x) = \sqrt{\text{cossec } 2\theta}$

$$f'(x) = (\text{cossec } 2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(\text{cossec } 2\theta)^{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(\text{cossec } 2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot -\text{cotg } 2\theta\cdot\text{cossec } 2\theta$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(\text{cossec } 2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot -\text{cotg } 2\theta\cdot\text{cossec } 2\theta\cdot 2.(1) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cdot(\text{cossec } 2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot -\text{cotg } 2\theta\cdot\text{cossec } 2\theta\cdot\cancel{2}$$

$$f'(x) = (\text{cossec } 2\theta)^{-\frac{1}{2}}\cdot -\text{cotg } 2\theta\cdot(\text{cossec } 2\theta)^1$$

$$f'(x) = (\text{cossec } 2\theta)^{-\frac{1}{2}+1}\cdot -\text{cotg } 2\theta \Rightarrow (\text{cossec } 2\theta)^{\frac{1}{2}}\cdot -\text{cotg } 2\theta \Rightarrow f'(x) = \sqrt{\text{cossec } 2\theta}\cdot -\text{cotg } 2\theta$$

$$f'(x) = -\text{cotg } 2\theta\cdot\sqrt{\text{cossec } 2\theta}$$

17) $f(x) = \left[2^x\right]^{\cos x}$

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\cdot 1n[u(x)] + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right] \Rightarrow \left[2^x\right]^{\cos x}\cdot\left[-sen\,x\cdot 1n\left[2^x\right] + \cos x\cdot\frac{\cancel{\left[2^x\right]}\cdot 1n(2)}{\cancel{\left[2^x\right]}}\right]$$

$$f'(x) = \left[2^x\right]^{\cos x}\cdot\left[-x\cdot sen\,x\cdot 1n2 + \cos x\cdot 1n(2)\right]$$

18) $\text{f(x)} = \text{cotg}^5\left(e^{x^2+1}\right) \Rightarrow \left[cotg\left(e^{x^2+1}\right)\right]^5$

$$f'(x) = 5\cdot\left[cotg\left(e^{x^2+1}\right)\right]^{5-1}\cdot -\text{cossec}^2\left(e^{x^2+1}\right)\left(e^{x^2+1}\right)2x+0$$

$$f'(x) = 5\cdot\left[cotg\left(e^{x^2+1}\right)\right]^4\cdot -\text{cossec}^2\left(e^{x^2+1}\right)\left(e^{x^2+1}\right)2x \Rightarrow 5\cdot 2x\cdot\left(e^{x^2+1}\right)\left[cotg\left(e^{x^2+1}\right)\right]^4\cdot -\text{cossec}^2\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$f'(x) = -10x\cdot\left(e^{x^2+1}\right)cotg^4\left(e^{x^2+1}\right)\text{cossec}^2\left(e^{x^2+1}\right)$$

19) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{\text{x}+1}{\text{x}-1}\right)$

$$f'(x) = \cos.\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\cos.\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

- 1º deriva a função $\left[sen\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]$.
- 2º deriva o arco $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.
- $\dfrac{1.(x-1)-(x+1).1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

20) $f(x) = \left[x \cdot \text{sen}\, 2x + tg^4(x^7) \right]^5$

$$f'(x) = 5 \cdot \left[x \cdot sen\, 2x + tg^4(x^7) \right]^4 \cdot \left[sen\, 2x + x \cdot \cos 2x \cdot 2 + 4tg^3 x^7 \cdot \sec x^7 \cdot 7x^6 \right]$$

$$f'(x) = 5 \cdot \left[x \cdot sen\, 2x + tg^4(x^7) \right]^4 \cdot \left[sen\, 2x + 2x \cdot \cos 2x + 28x^6 \cdot tg^3 x^7 \cdot \sec x^7 \right]$$

02) Seja $y = e^{2x}$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.2 \Rightarrow 2.e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2.e^{2x}.2 \Rightarrow 4.e^{2x} \Rightarrow 4.e^{2x} - 4y = 0 \Rightarrow \cancel{4.e^{2x}} - \cancel{4.e^{2x}} = 0$$

03) Seja $y = \cos(w \cdot t)$, w constante. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} + w^2 \cdot y = 0$.

Solução:

$z = w.\, t$

$$z' = w.1 \Rightarrow w \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -sen(w.\, t).w \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos(w.\, t).w.w + \left[\cancel{sen(w.\, t)}\right].0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -w^2.\cos(w.\, t) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + w^2 y = 0 \Rightarrow -w^2.\cos(w.\, t) + w^2.y = 0 \Rightarrow \cancel{-w^2.\cos(w.\, t)} + \cancel{w^2.[\cos(w.\, t)]} = 0$$

$0 = 0|$

04) Encontre as funções custo médio e custo marginal. Para as funções abaixo:

Solução:

a) $C(x) = 3700 + 5x - 0{,}04x^2 + 0{,}0003x^3$.

$$C(M) = \frac{c(x)}{x} \Rightarrow \frac{3700}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{0{,}04x^2}{x} + \frac{0{,}0003x^3}{x} \Rightarrow C(M) = \frac{3700}{x} + 5 - 0{,}04x + 0{,}0003x^2$$

$$C(x) = 3700 + 5x - 0{,}04x^2 + 0{,}0003x^3 \Rightarrow C'(x) = 5 - 0{,}08x + 0{,}0009x^2$$

b) $C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$.

$$C(M) = \frac{c(x)}{x} \Rightarrow \frac{339}{x} + \frac{25x}{x} - \frac{0{,}09x^2}{x} + \frac{0{,}0004x^3}{x}$$

$$C(M) = \frac{339}{x} + 25 - 0{,}09x + 0{,}0004x^2$$

$$C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$$

$$C'(x) = 25 - 0{,}18x + 0{,}0012x^2$$

05) Um fabricante de pequenos motores estima que o custo da produção de x motores por dia é dado por $C(x) = 100 + 50x + \dfrac{100}{x}$, compare o custo marginal da produção de 5 motores. Com o custo para produção do sexto motor.

Solução:

$$C(x) = 100 + 50x + \frac{100}{x} \Rightarrow C'(x) = 50 - \frac{100}{x}$$

a) $C'(5) = 50 - \dfrac{100}{5^2} \Rightarrow 50 - \dfrac{100}{25} \Rightarrow 50 - 4{,}00 \Rightarrow C'(5) =$ R\$ 46,00

b) $C'(6) = 50 - \dfrac{100}{6^2} \Rightarrow 50 - \dfrac{100}{36} \Rightarrow 50 - 2{,}77 \Rightarrow C'(6) =$ R\$ 47,23

06) Uma agência de viagens estima que, para vender x pacotes de viagem, deve cobrar um preço, por pacote de $1800-2x$(unidades monetárias) para $1 \leq x \leq 100$. Se o custo da agência para x pacotes é $1000+x+0{,}01x^2$ (unidades monetárias). Determine:

a) função receita: para vender x pacotes, R\$ = $1800-2x \rightarrow$ preço por pacote, custo para vender pacotes $1000+x+0{,}01x^2$.

Solução:

$$\frac{1\text{ pacote}}{x}=\frac{1800-2x}{y}$$

$$y=1800x-2x^2$$

b) função lucro:

$$L(x)=R(x)-C(x)$$

$$L(x)=1800x-2x^2-(1000+x+0{,}01x^2) \Rightarrow L(x)=1800x-2x^2-1000-x-0{,}01x^2$$

$$L(x)=-2{,}01x^2+1799x-1000$$

c) O numero de pacotes que maximiza o lucro como $1\leq x\leq 100$.

Substituindo o valor na função lucro o valor responsável é x = 100.

d) O lucro máximo.

$$L(x)=-2{,}01x^2+1799x-1000$$

$$L(100)=-2{,}01\cdot(100)^2+1799\cdot(100)-1000$$

$$L(100)=-20.100-1000+179.900$$

$$L(100)=-21.100+179.900$$

$$L(100)=R\$158.800$$

07) Uma industria verifica que o lucro proveniente da venda de um determinado produto por $P=0{,}0002x^3+10x$. **Solução:**

a) Encontre o lucro marginal para um nível de produção de 50 unidades.

$$P=0{,}0002x^3+10x$$

$$\frac{dp}{dx}=0{,}0006x^2+10 \Rightarrow 0{,}0006(50)^2+10$$

$$\frac{dp}{dx}=\text{R\$ }11{,}50\text{ lucro marginal}$$

b) Para x 50 e 51, o lucro é, de fato:

$$P=0{,}0002x^3+10x$$

$$P=0{,}0002(50)^3+10(50) \Rightarrow 25+500 \Rightarrow \text{R\$ }525{,}00$$

$$P=0{,}0002(51)^3+10(51) \Rightarrow 26{,}53+500 \Rightarrow \text{R\$ }536{,}53$$

Portanto, o lucro obtido pelo aumento da produção de 50 para 51 unidades é $536{,}53-525{,}00=$ R\$ 11,53

08) Um negócio vende 2000 itens por mês a cada R$ 10,00 cada. Foi previsto que as vendas mensais aumentariam de 250 itens para cada R$ 0,25 de redução no preço. Encontre a função demanda correspondente a essa produção.

Solução: Para a previsão feita x aumenta 250 unidades cada vez que p diminui R$ 0,25 do custo original de R$ 10,00 isso descrito pela equação.

$$x = 2000 + 250\left(\frac{10-p}{0,25}\right) \Rightarrow 12.000 - 1.000p$$

$$p = 12 - \frac{x}{1.000} \text{ Função demanda}$$

09) Um a lanchonete verificou que a demanda mensal para seus hambúrgueres é dado por $p = \frac{60.000 - x}{20.000}$. Encontre o aumento na receita por hambúrgueres para uma venda mensal de 20.000 hambúrgueres. Em outras palavras, encontre a receita marginal quando x = 20.000.

Solução: como receita total é dado é dado por $R = x \cdot p$, temos:

$$R = x \cdot p \Rightarrow x\left(\frac{60.000 - x}{20.000}\right) \Rightarrow \frac{1}{20.000}(60.000x - x^2)$$, é a receita marginal e dada por:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000} \cdot (60.000 - 2x)$$ Substituindo x = 20.000 obtemos.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000}(60.000 - 2(20.000)) \Rightarrow \frac{1}{20.000}(60.000 - 40.000)$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{20.000} \cdot 20.000 \Rightarrow \frac{20.000}{20.000} = 1$$

$$\frac{dR}{dx} = R\$1/\text{unidade}$$

10) Uma companhia estima que o custo (em dólares) na produção de x itens é dado pela equação abaixo $C(x) = 2.600 + 2x + 0,001x^2$.

a) Encontre o custo, o custo médio e o custo marginal da produção de 1000, 2000 e 3000 itens.

Solução:

A função custo médio é:

$$C(x) = 2600 + 2x + 0,001x^2 \Rightarrow c(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow c(x) = \frac{2600 + 2x + 0,001x^2}{x} \Rightarrow c(x) = \frac{2600}{x} + 2 + 0,001x$$

A função custo marginal é: $C'(x) = 2 + 0,002x$

Usamos essas expressões para fazer a tabela a seguir, dando o custo, o custo médio e o custo marginal (em dólares ou dolares por item, arredondados até o centavo mais proximo).

x	C(x)	c(x)	C'(x)
1.000	5.600,00	5,60	4,00
2.000	10.600,00	5,30	6,00
3.000	17.600,00	5,87	8,00

b) A que nível de produção será mais baixo o custo médio? Qual o custo médio mínimo?

Solução:
Para minimizar o custo médio devemos ter custo marginal = custo médio.

$C'(x) = 2 + 0{,}002x$ e $c(x) = \dfrac{2600}{x} + 2 + 0{,}001x$, logo:

$C'(x) = c(x) \Rightarrow 2 + 0{,}002x = \dfrac{2600}{x} + 2 + 0{,}001x$, Essa equação simplificada:

$\cancel{2} + 0{,}002x = \cancel{2} + 0{,}001x + \dfrac{2600}{x}$, obtemos: $0{,}002x = 0{,}001x + \dfrac{2600}{x} \Rightarrow 0{,}002x - 0{,}001x = \dfrac{2600}{x}$

$$0{,}001x = \frac{2600}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{2600}{0{,}001} \Rightarrow x^2 = 2.600.000 \Rightarrow x = \sqrt{2.600.000} \Rightarrow x \cong 1.612$$

Para ver que esse nível de produção realmente dá o mínimo, notamos que $c''(x) = \dfrac{5.200}{x^2} > 0$, portanto c é côncava para cima em todo seu domínio. O custo médio mínimo é:

$c(x) = \dfrac{2600}{x} + 2 + 0{,}001x$, como $x = 1.612$, obtemos:

$$c(1.612) = \frac{2600}{1.612} + 2 + 0{,}001 \cdot 1.612 \Rightarrow c(1.612) \cong \$5,22 / \text{item}$$

11) Determine o nível de produção que maximizará o lucro para uma companhia com funções custo e demanda dada pelas equações $C(x) = 84 + 1{,}26x - 0{,}01x^2 + 0{,}00007x^3$ e $p(x) = 3{,}5 - 0{,}01x$.

Solução:

A função rendimento é $R(x) = x \cdot p(x) \Rightarrow x \cdot (3{,}5 - 0{,}01x) \Rightarrow R(x) = 3{,}5x - 0{,}01x^2$, a função rendimento marginal $R'(x) = 3{,}5 - 0{,}02x$

A função custo marginal é: $C'(x) = 1{,}26 - 0{,}02x + 0{,}00021x^2$, dessa forma, o rendimento marginal é igual ao custo marginal quando $R'(x) = 3{,}5 - 0{,}02x$ e $C'(x) = 1{,}26 - 0{,}02x + 0{,}00021x^2$.

$$R'(x) = C'(x) \Rightarrow 3{,}5 - \cancel{0{,}02x} = 1{,}26 - \cancel{0{,}02x} + 0{,}00021x^2$$

$$3{,}5 = 1{,}26 + 0{,}00021x^2 \Rightarrow 0{,}00021x^2 = 3{,}5 - 1{,}26 \Rightarrow 0{,}00021x^2 = 2{,}24$$

$$x^2 = \frac{2{,}24}{0{,}00021} \Rightarrow x^2 = 10.666{,}66667 \Rightarrow x = \sqrt{10.666{,}66667} \Rightarrow x \cong 103{,}279$$

$x \cong 103$

Para verificar que isso fornece um máximo, computamos as derivadas segundas: $R''(x) = -0{,}02$ e $C''(x) = -0{,}02 + 0{,}00042x$. Assim, $R''(x) < C''(x)$, para todo x > 0. Portanto o nível de produção de 103 unidades maximizará o lucro.

12) Uma loja vende 200 aparelhos de DVD por semana, a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada abatimento de\$ 10 oferecidos aos compradores, o número de aparelhos vendidos aumenta em 20 por semana. Encontre as funções de demanda e de rendimento oferecido pela loja maximizar seu rendimento?

Solução:

Seja x o número de aparelhos de DVD vendidos por semana. Então o crescimento semanal em vendas $x-200$. Para cada aumento de 20 aparelhos vendidos, o preço decresce em \$ 10. Logo, para cada aparelho adicional vendido o decréscimo no preço será de $\frac{1}{20}\times 10=\frac{10}{20}$ e a função demanda é:

$$p(x)=350-\frac{10}{20}\cdot\left(x-200\right)\Rightarrow p(x)=450-\frac{x}{2}$$

A função rendimento é: $R(x)=x\cdot p(x)=x\left(450-\frac{x}{2}\right)\Rightarrow R(x)=450x-\frac{x^2}{2}$

Uma vez que $R'(x)=450-x$, vemos que $R'(x)=0$, quando x = 450. Esse valor de x dá o máximo absoluto pelo teste da derivada primeira (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que é côncava para baixo). O preço correspondente é $p(x)=450-\frac{x}{2}$, quando $x=450$, obtemos: $p(450)=450-\frac{450}{2}\Rightarrow p(450)=450-225\Rightarrow p(450)=225$ e o abatimento é 350 – 335 = 125. Portanto, para maximizar o rendimento, a loja deve oferecer um abatimento \$ 125,00.

13) Verificar se 1 é raiz tripla da equação $x^4-6x^2+8x-3=0$.

Solução:

$P(1)=0$ $P'(1)=0$ $P''(1)=0$ $P'''(1)\neq 0$

$$P(x)=x^4-6x^2+8x-3\Rightarrow P(1)=(1)^4-6(1)^2+8(1)-3=0$$
$$P'(x)=4x^3-12x+8\Rightarrow P'(1)=4(1)^3-12(1)+8=0$$
$$P''(x)=12x^2-12\Rightarrow P''(1)=12(1)^2-12=0$$
$$P'''(x)=24x\Rightarrow P'''(1)=24(1)\neq 0$$

Logo, 1 é raiz tripla da equação.

14) Verificar se 2 é raiz dupla da equação $x^3+x^2-16x+20=0$.

Solução:

$$P(x)=x^3+x^2-16x+20\Rightarrow P(2)=(2)^3+(2)^2-16(2)+20=0$$
$$P'(x)=3x^2+2x-16\Rightarrow P'(2)=3(2)^2-2(2)-16=0$$
$$P''(x)=6x+2\Rightarrow P''(2)=6(2)+2=14\neq 0$$

Logo, 2 é raiz dupla da equação.

15) Resolver a equação $x^3-5x^2+3x+9=0$, sabendo-se que a mesma admite raiz dupla.

Solução: $P(x)=0$ $P'(x)=0$ $P''(x)\neq 0$, sendo raiz dupla.

1) $P(x)=x^3-5x^2+3x+9\Rightarrow P'(x)=3x^2-10x+3$

2) Como $P'(x) = 0$, vamos calcular x:

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$\Delta = 64$ $\qquad x = \dfrac{10 \pm 8}{6} \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

3) Para sabermos qual dos valores é raiz dupla, devemos ter P(x) = 0.

$P(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) + 9 = 0$

$P\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\dfrac{1}{3}\right) + 9 = \dfrac{226}{27} \neq 0$

Então, 3 é a raiz dupla da equação dada:

4) Para determinar a outra raiz, vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

3	1	−5	3	9
3	1	−2	−3	0
	1	1	0	

Recaímos, então, na equação $x + 1 = 0$.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

logo, $S = \{-1, 3\}$

16) Resolver a equação $x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4 = 0$, sabendo-se que a mesma admite raiz tripla.

Solução: $P(x) = 0$ $\quad P'(x) = 0$ $\quad P''(x) = 0$ $\quad P'''(x) \neq 0$, sendo raiz tripla.

1) Para sabermos qual dos valores é raiz dupla, devemos ter P(x) = 0.

$P\left(\dfrac{5}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 - 7\left(\dfrac{5}{2}\right)^3 + 15\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 13\left(\dfrac{5}{2}\right) + 4 \neq 0$

$P(1) = (1)^4 - 7(1)^3 + 15(1)^2 - 13(1) + 4 = 0$

Então, 1 é a raiz tripla da equação dada:

2) Para determinar a outra raiz, vamos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1	1	−7	15	−13	4
1	1	-6	9	-4	0
1	1	-5	4	0	
	1	-4	0		

Recaímos, então, na equação $x - 4 = 0$.

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

logo, $S = \{1, 4\}$.

17) Determinar o valor de a na equação $x^3 - 5x^2 + 8x + a = 0$, admita uma raiz dupla.

Solução: $P(x) = 0$ $\quad P'(x) = 0$ $\quad P''(x) \neq 0$, sendo raiz dupla.

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + a \Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 10x + 8 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 \Rightarrow P'(x) = 0$

1) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

$$\Delta = 4 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 2}{6} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

2) Para que 2 seja raiz dupla, devemos ter P(2) = 0.

$P(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 8(2) + a \Rightarrow (2)^3 - 5(2)^2 + 8(2) + a = 0 \Rightarrow a = -4$

$$P\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{4}{3}\right) + a \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{4}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{112}{27}$$

logo, $a = -4$ e $a = -\dfrac{112}{27}$.

18) Verificar se a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 = 0$ tem alguma raiz dupla.

Solução: toda eventual raiz dupla da equação dada f(x) = 0, também é raiz da derivada - primeira.

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 \Rightarrow P'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$P'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow P'(x) = 0$

$6x^2 - 18x + 12 = 0 \div 6$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

2) Os candidatos a raiz dupla são 1 e o 2, façamos a verificação.

$P(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) + 6 \neq 0$

$P(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) + 6 \neq 0$

Logo concluímos que não há raiz dupla.

19) Determinar a e b de modo que a equação $x^4 - 6x^2 + ax + b = 0$, admita uma raiz tripla.

Solução: Utilizando as derivadas sucessivas na equação $x^4 - 6x^2 + ax + b = 0$, obtemos:

1) $P(x) = x^4 - 6x^2 + ax + b \Rightarrow P'(x) = 4x^3 - 12x + a \Rightarrow P''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow P'''(x) = 24x$

2) a condição do problema estará satisfeita se existir um número x tal que:

$P(x) = P'(x) = P''(x) = 0$ e $P'''(x) \neq 0$, temos:

$P''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

1ª) Possibilidade: x = 1.

$P(1) = 0 \Rightarrow (1)^4 - 6(1)^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow a + b = 5$

$P'(1) = 0 \Rightarrow 4(1)^3 - 12(1) + a = 0 \Rightarrow a = 8$

Portanto a = 8 e b = -3.

2ª) Possibilidade: x = -1.

$P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 - 6(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 5$

$P'(-1) = 0 \Rightarrow 4(-1)^3 - 12(-1) + a = 0 \Rightarrow a = -8$

Portanto a = -8 e b = -3.

Logo (a = 8 e b = -3) ou (a = -8 e b = -3)

20) Determinar a, b, c de modo que 1 seja raiz dupla da equação $x^3 - 3ax^2 + bx + c = 0$.

Solução: 1) A condição do problema estará satisfeita se $P(1) = P'(1) = 0 \Rightarrow P''(1) \neq 0$. Fazendo $x^3 - 3ax^2 + bx + c$, temos: $P'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ e $P''(x) = 6x - 6a$

Impondo a condição, obtemos: $\begin{array}{l} P(1) = 0 \Rightarrow (1)^3 - 3a(1)^2 + c = 0 \Rightarrow -3a + b + c = -1 \\ P'(1) = 0 \Rightarrow 3(1)^2 - 6a(1) + b = 0 \Rightarrow b - 6a = -3 \end{array}$

Donde vem $b = 6a - 3$ e $c = 2 - 3a$, como $P''(1) \neq 0$, devemos ter $a \neq 1$.

Logo: $b = 6a - 3$ e $c = 2 - 3a$ e $a \neq 1$.

21) Calcule o polinômio *f(x)* de quarto grau conhecendo a sua derivada segunda $f''(x) = x^2 - 4$ e sabendo que *f(x)* é divisível por $f''(x)$.

Solução: Escrevemos que o polinômio *f(x)* do quarto grau é divisível pela derivada segunda:

$$\begin{cases} f''(x) = (x^2 - 4)\cdot(ax^2 + bx + c) \\ f''(x) \equiv ax^4 + bx^3 + (c - 4a)\cdot x^2 - 4bx - 4c \qquad \text{I} \end{cases}$$

Determinando a derivada segunda da equação I, obtemos: $f''(x) \equiv 12ax^3 + 6bx + (c - 4a)\cdot 2$.

Pelo enunciado igualando: $12ax^3 + 6bx + (c - 4a)\cdot 2 \equiv x^2 - 4$

Onde igualando os coeficientes temos: $a = \dfrac{1}{12}$, $b = 0$ e $c = -\dfrac{5}{3}$.

Formando o polinômio: $f(x) = (x^2 - 4)\cdot\left(\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{5}{3}\right)$.

22) Prove que as equações binômias $ax^n + b = 0$, com a e $b \neq 0$, não tem raízes múltiplas:

Solução: Vamos supor que a equação admita uma raiz dupla r. Temos f (x) = 0 e $f'(x) = 0$

I) $f'(x) = 0 \Rightarrow nax^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0,$ pois $a \neq 0$.

II) $f(0) = 0 \Rightarrow a0^n + b = 0 \Rightarrow b = 0,$ o que é absurdo, pois $b \neq 0$. Portanto, a equação não tem raízes múltiplas.

23) Determine p e q de modo que a equação $x^3 + x^2 + qx + p = 0$, admita uma raiz com multiplicidade 3.

Solução: Fazendo $f(x) = x^3 + x^2 + qx + p$, obtemos.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + q \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6 \neq 0$

A condição do problema estará satisfeita se existir um número r tal que f(r) = 0, f '(r) = 0 e f " (r) = 0, temos:

$$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f''(x) = 0. \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + q = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{27}$$

logo: $q = 1/3$ e $p = 1/27$

Questões Propostas

01) Usando as propriedades operatórias e as regras de derivação, calcule as derivadas das funções abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$ R: $f'(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}\cdot\left(a - \sqrt{x}\right)^2}$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + r}{1 - r}}$ R: $f'(x) = \dfrac{1}{(1 - r)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1 + r}{1 - r}}}$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{a - x} + \sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{a + x}}$ R: $f'(x) = \dfrac{a}{\left[a\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2)\right]}$

4) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ R: $f'(x) = \dfrac{-2\text{sen } x}{(1 - \cos x)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{2 - \text{sen } x}{2 + \cos x}$ R: $f'(x) = \dfrac{2\text{sen } x - 2\cos x - 1}{(2 + \cos x)^2}$

6) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$ R: $f'(x) = \dfrac{-2}{(\text{sen } x - \cos x)^2}$

7) $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$ R: $f'(x) = \dfrac{x\cdot e^x \cdot \ln x - e^x}{x\cdot(\ln x)^2}$

8) $f(x) = \log_e\left(\dfrac{a + x}{a - x}\right)$ R: $f'(x) = \dfrac{2a}{a^2 - x^2}$

9) $f(x) = \left(x^3 - 2x\right)^{\ln x}$ R: $f'(x) = \left(x^3 - 2x\right)^{\ln x}\cdot\left[\left(\dfrac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x}\right)\cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\cdot\ln(x^3 - 2x)\right]$

10) $f(x) = \left(\ln x\right)^{\text{tg}\, x}$ R: $f'(x) = \left(\ln x\right)^{\text{tg}\, x}\cdot\left[\dfrac{\text{tg}\, x}{x\cdot \ln x} + (\sec^2 x)\cdot\ln(\ln x)\right]$

11) $f(x) = \left(\text{sen } x\right)^{\cos x}$ R: $f'(x) = \left(\text{sen } x\right)^{\cos x}\cdot\left[-\text{sen } x\cdot\ln(\text{sen } x) + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right]$

12) $f(x) = x^{(e^x)}$ R: $f'(x) = x^{(e^x)}\cdot e^x\left[\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

13) $f(x) = (e^x)^{\text{tg}\, 3x}$ R: $f'(x) = (e^x)^{\text{tg}\, 3x}\cdot\left[3x\cdot\sec^2 3x + \text{tg}\, 3x\right]$

14) $f(x) = e^{\text{sen}^3(x^2)}$ R:

$f'(x) = 6x\cdot e^{\text{sen}^3(x^2)}\cdot \text{sen}^2(x^2)\cdot\cos(x^2)$

15) $f(x) = e^{3x^2} \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x}$ R: $f'(x) = e^{3x} \cdot \left(\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + 3 \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x} \right)$

16) $f(x) = e^{x^x}$ R: $f'(x) = e^{x^x} \cdot x^x(1 + \ln x)$

17) $f(x) = \sqrt{4 + \mathrm{cossec}^2 3x}$ R: $f'(x) = \dfrac{-3\mathrm{cossec}^2 3x \cdot \mathrm{cotg}\, 3x}{\sqrt{4 + \mathrm{cossec}^2 3x}}$

18) $f(x) = \mathrm{tg}^4(\sqrt[4]{\theta})$ R: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{tg}^4(\sqrt[4]{\theta}) \cdot \sec^2(\sqrt[4]{\theta})}{(\sqrt[4]{\theta^3})}$

19) $f(x) = \mathrm{sen}\left(\mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{sen}\ x}\right)$ R: $f'(x) = \cos\left(\mathrm{tg}\sqrt{\mathrm{sen}\ x}\right)\left(\sec^2\sqrt{\mathrm{sen}\ x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\mathrm{sen}\ x}\right)\right](\cos x)$

20) $f(x) = x \cdot \mathrm{sen}\, x\left(\mathrm{Ln}\ x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ R: $f'(x) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{sen}\ (\ln x)$

21) $f(x) = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$ R: $f'(x) = -\dfrac{y}{2} \cdot \mathrm{tg}\ x \cdot (1 + \sqrt{\cos x} \cdot \ln a)$

22) $f(\theta) = \sec\sqrt{\theta} \cdot \mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$ R: $f'(\theta) = \sec\sqrt{\theta} \cdot \left[\dfrac{\mathrm{tg}\sqrt{\theta} \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{\theta}\right)}{2\sqrt{\theta}} - \dfrac{\sec^2\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\theta^2} \right]$

23) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{sen}\ x}{1 - \mathrm{sen}\ x}}$ R: $f'(x) = \sec x$

24) $f(x) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{\cos\sqrt{x}}{1 + \mathrm{sen}\sqrt{x}}\right)$ R: $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}}$

25) $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{cotg}^2 5x + \mathrm{Ln}\,\mathrm{sen}\ 5x$ R: $f'(x) = -5 \cdot \mathrm{cotg}^3 5x$

02) Achar as derivadas de segunda ordem das seguintes funções:

1) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ R: $y'' = \dfrac{-x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$

2) $y = \ln\sqrt[3]{1 + x^2}$ R: $y'' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

3) $y = e^{x^2}$ R: $y'' = e^{x^2} \cdot (4x^2 + 2)$

4) $y = (1 + x^2)\mathrm{arc.tg}\ x$ R: $y'' = 2 \cdot \mathrm{arc.tg}\ x + \dfrac{2x}{1 + x^2}$

5) $y = (\mathrm{arc.sen}\ x)^2$ R: $y'' = \dfrac{2}{1 - x^2} + \dfrac{2x \cdot \mathrm{arc.sen}\ x}{(1 - x^2)^{3/2}}$

03) A função $y = A \cdot \mathrm{sen}\ kx$, com A > 0, e sua derivada segunda y'' satisfazem identicamente a igualdade $y'' + 4y = 0$. O valor da derivada primeira y', para x = 0, é 12. Calcule as constantes de A e K. R: A: 6 e K: 2.

04) Demonstrar que a função $y = \dfrac{1}{2}x^2e^x$, satisfaz a equação diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$.

05) Demonstrar que a função $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$, para qualquer valor das constantes C_1 e C_2 satisfaz a equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

06) Demonstrar que a função $y = e^{2x} \cdot \text{sen}\,5x$, satisfaz a equação diferencial $y'' - 4y' + 29y = 0$.

07) Demonstrar que a função $y = e^{-x} \cdot \cos x$, satisfaz a equação diferencial $y^{IV} + 4y = 0$.

08) A equação $y'' + y' - 2y = \text{sen}\,x$ é chamada equação diferencial, pois envolve a função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A e B tal que sua função $y = A \cdot \text{sen}\,x + B \cdot \cos x$, satisfaça essa equação. R: $A = -\dfrac{3}{10}$ e $B = -\dfrac{1}{10}$.

09) Para que valores de r a função $y = e^{r \cdot x}$, satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$? R: $r = 1, -6$.

10) Encontre os valores de λ para os quais $y = e^{\lambda \cdot x}$ satisfaz a equação diferencial $y + y' = y''$.

11) Um fabricante estima que quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o custo total é $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ reais e que todas as x unidades são vendidas quando o preço é $p(x) = 25 - x/3$ reais por unidade.

(a) Use a função de custo marginal para estimar o custo para produzir a nona unidade. Qual é o custo exato para produzir a nona unidade?

(b) Determine a função de receita do produto. Em seguida, use a função de receita marginal para estimar a receita obtida com a venda da nona unidade. Qual é a receita exata obtida com a venda da nona unidade?

(c) Determine a função de lucro associada à produção de x unidades. Plote a função de lucro e determine o nível de produção para o qual o lucro é máximo. Qual é o lucro marginal associado ao nível ótimo de produção?

R: a) R$ 5,13.

b) função da receita: $R(x) = 25x - \dfrac{1}{3}x^2$ e receita da nona unidade: R$ 19,33.

c) função de lucro: $P(x) = \dfrac{-11}{24}x^2 + 22x - 98$ lucro máximo: x = 24 e p(x) = R$ 17,00, lucro marginal: $LM(x) = -11x/12 + 22$

12) Seja $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ a função de custo total do produto do problema 01.

(a) Determine o custo médio e o custo médio marginal do produto.

(b) Para que nível de produção o custo médio marginal é nulo?

(c) Para que nível de produção o custo marginal é igual ao custo médio?

R:(a) custo médio: $CM(x) = \dfrac{1}{8} \cdot x + 3 + \dfrac{98}{x}$, custo médio marginal: $CM(M) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{98}{x^2}$.

(b) x = 28 e (c) x = 28.

13) O custo total de uma fábrica é $C(q) = 0,1q^3 - 0,5q^2 + 500q + 200$ reais, onde q é o número de unidades produzidas.

(a) Use os métodos de análise marginal para estimar o custo de fabricação da quarta unidade.

(b) Calcule o custo real de fabricação da quarta unidade.

R: $\begin{cases} C'(3) = R\$\ 499{,}70 \\ C(4) - C(3) = R\$\ 500{,}20 \end{cases}$

14) Nos Problemas 1 até 3, C(x) é o custo total para produzir x unidades de um produto e p(x) é o preço pelo qual as x unidades serão vendidas.

(a) Determine o custo marginal e a receita marginal.

(b) Use o custo marginal para estimar o custo para produzir uma quarta unidade.

(c) Determine o custo real para produzir uma quarta unidade.

(d) Use a receita marginal para estimar a receita conseguida com a venda da quarta unidade.

(e) Determine a receita real conseguida com a venda da quarta unidade.

1) $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 57$; $p(x) = \frac{1}{4}(36 - x)$.

R: $\begin{cases} \text{a) } C'(x) = \frac{2x}{5} + 4; R'(x) = 9 - \frac{x}{2} \\ \text{b) } C'(3) = R\$\ 5{,}20 \\ \text{c) } C(4) - C(3) = R\$\ 5{,}40 \\ \text{d) } R'(3) = R\$\ 7{,}50 \\ \text{e) } R(4) - R(3) = R\$\ 7{,}25 \end{cases}$

2) $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 39$; $p(x) = -x^2 + 4x + 10$.

R: $\begin{cases} \text{a) } C'(x) = \frac{2x}{3} + 2; R'(x) = -3x^2 + 8x + 10 \\ \text{b) } C'(3) = R\$\ 4{,}00 \\ \text{c) } C(4) - C(3) = R\$\ 4{,}33 \\ \text{d) } R'(3) = R\$\ 7{,}00 \\ \text{e) } R(4) - R(3) = R\$\ 1{,}00 \end{cases}$

3) $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 43$; $p(x) = \frac{3 + 2x}{1 + x}$.

R: $\begin{cases} \text{a) } C'(x) = \frac{x}{2}; R'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(1 + x)^2} \\ \text{b) } C'(3) = R\$\ 1{,}50 \\ \text{c) } C(4) - C(3) = R\$\ 1{,}75 \\ \text{d) } R'(3) = R\$\ 2{,}06 \\ \text{e) } R(4) - R(3) = R\$\ 2{,}05 \end{cases}$

15) O custo total de certa fábrica, é $C(q) = 0,1q^3 - 0,5q^2 + 500q + 200$ reais quando o nível de produção é q unidades. O nível atual de produção é 4 unidades, mas o fabricante pretende aumentá-lo para 4,1 unidades. Estime a variação do custo total em conseqüência desse aumento de produção.

R: R$ 50,08

16) O custo total em reais para fabricar q unidades de certo produto é $C(q) = 3q^2 + q + 500$.

(a) Use os métodos de análise marginal para estimar o custo de fabricação da 41ª unidade.

(b) Calcule o custo real de fabricação da 41ª unidade.

R: $\begin{cases} \text{a) R\$ 241,00} \\ \text{b) R\$ 244,00} \end{cases}$.

17) Para cada função custo (dada em dólares) dada abaixo, Determine:

1) $C(x) = 40.000 + 300x + x^2$ 2) $C(x) = 25.000 + 120x + 0,1x^2$

3) $C(x) = 16.000 + 200x + 4x^{\frac{3}{2}}$ 4) $C(x) = 10.000 + 340x - 0,3x^2 + 0,0001x^3$

a) O custo, o custo médio e o custo marginal a um nível de produção de 1000 unidades.

b) O nível de produção que vai minimizar o custo médio.

c) O custo médio mínimo.

R:1). $\begin{cases} \text{a) \$ 1.340.000; 1340/unidade e \$ 2.300/unidade} \\ \text{b) 200} \\ \text{c) \$ 700/unidade} \end{cases}$. R:2). $\begin{cases} \text{a)} \\ \text{b)} \\ \text{c)} \end{cases}$

R:3). $\begin{cases} \text{a) \$ 342.941; 342/unidade e \$ 390/unidade} \\ \text{b) 400} \\ \text{c) \$ 320/unidade} \end{cases}$. R:4). $\begin{cases} \text{a)} \\ \text{b)} \\ \text{c)} \end{cases}$

18) Para as funções custo e demanda dadas, encontre o nível de produção que maximizará o lucro.

1) $C(x) = 680 + 4x + 0,01x^2$ e $p(x) = 12$. R: 400.

2) $C(x) = 680 + 4x + 0,01x^2$ e $p(x) = 12 - \dfrac{x}{500}$ R:

3) $C(x) = 1.450 + 36x - x^2 + 0,001x^3$ e $p(x) = 60 - 0,01x$ R: 672.

4) $C(x) = 16.000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ e $p(x) = 1.700 - 7x$ R:

19) No estudo de ecossistema, o modelo predador-presa é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por W(t), e caribu, dada por C(t), no norte do Canadá. A interação tem sido modelada pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \dfrac{dW}{dt} = -cW + dCW \end{cases}$$

a) Que valores de $\dfrac{dC}{dt}$ e $\dfrac{dW}{dt}$, correspondem a população estáveis? R: (0,0).

b) Como representar matematicamente a afirmativa "o caribu está se extinguindo"? R: C = 0.

c) Suponha qua a = 0,05, b = 0,001, c = 0,05 e d = 0,0001. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em harmonia, ou uma ou as duas espécies acabam por se extinguir?

R: (0,0) e (500,50) é possível para as espécies coexistirem.

20) A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em Kelvins), pressão P (em atmosfera) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, onde n é o número de mols de gás e R = 0,0821 é uma constante do gás. Suponha que, em um certo instante, P = 8,0 atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e V = 10L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15L / min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante se n 10 mols. R: $-0,2436\ \text{k/min}$.

21) Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e colhido regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) \cdot \left(P(t) - \beta P(t)\right)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes; P_c, a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua capacidade de suporte) e β, é a porcentagem da população que é colhida.

a) Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ que corresponde à população estável? R:

b) Se o pequeno lago pode manter 10.000 peixes, a taxa de nascimento é de 5% e a taxa de colheita é de 4%, encontre o nível estável da população. R:

c) O que acontece se β está elevando para 5%? R:

22) Se um gás (real) for mantido em um cilindro a uma temperatura constante T, a pressão P estará relacionada com o volume V de acordo com uma fórmula na forma $P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$, em que a, b, n e R são constantes. Determine $\frac{dP}{dV}$. R: $\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$.

23) Uma das fórmulas para o gerenciamento de estoque diz que o custo médio semanal de pedidos, pagamentos e armazenamento de mercadorias é $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$, onde q é a quantidade (de sapatos, rádio, vassouras ou qualquer outro item) pedida quando as vendas estão em baixa, k é o custo para se fazer um pedido (sempre o mesmo, independentemente da freqüência com que se faz o pedido), c é o custo de cada item (constante), m é a quantidade de itens vendidos por semana

(constante) e h é o custo semanal para manter cada item armazenado (constante que incorpora aspectos como espaço, utilidade, seguro e segurança). Determine $\frac{dA}{dq}$ e $\frac{d^2A}{dq^2}$. R:

24) Para oscilações de pequena amplitude (balanços curtos), é seguro modelar a relação entre o período T e o comprimento L de um pêndulo simples com a equação $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, onde g é a aceleração constante da gravidade no local onde está o pêndulo. Se medirmos g em cm/s^2, devemos usar L em cm T em s. Se o pêndulo for de metal, seu comprimento variará com a temperatura, aumentando ou diminuindo a uma taxa aproximadamente proporcional a L. Usando os símbolos u para temperatura e K para a constante de proporcionalidade, temos $\frac{dL}{du} = kL$. Considerando que este seja o caso, mostre que a taxa de variação do período, em relação à temperatura, é $\frac{kT}{2}$.

25) O custo em cents por milha para manter um automóvel nos Estados Unidos entre 1989 e 1997 pode ser modelado pela função $C(t) = \frac{41,5 + 14,4t - 1,3t^2}{1 + 0,29t - 0,03t^2}$, onde t é o ano, com t = 0 correspondendo a 1990. Determine $\frac{dC}{dt}$ e calcule o valor dessa derivada para t = 0, 3, 5 e 7. O que significam esses valores? (*Fonte: American Automobile Manufacturers Association*).

R:. $\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{550(t^2 - 2t + 43)}{(3t^2 - 29t - 100)^2} \\ \text{Em1990, o custo de manutenção de um automóvel estava aumentando a uma taxa de 2,37;} \\ \text{Em1993, o custo de manutenção de um automóvel estava aumentando a uma taxa de 0,99;} \\ \text{Em 1995, o custo de manutenção de um automóvel estava aumentando a uma taxa de 1,10;} \\ \text{Em 1990, o custo de manutenção de um automóvel estava aumentando a uma taxa de 1,76;} \end{cases}$

26) O custo de processamento e transporte (em milhares de reais) dos componentes usados para fabricar um produto é dado por $C = 100\left(\frac{200}{x^2} + \frac{x}{x+30}\right)$, $1 \le x$, onde x é o tamanho da encomenda (em centenas de componentes). Determine a taxa de variação de C em relação a x para os valores indicados de x.

a) x = 10. R: $-38,125$. b) x = 15. R: $-10,37$. c) x = 20. R: $-3,80$.

27) A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e o volume permanecem constantes $PV = C$.

a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão. R: $\frac{dV}{dP} = -\frac{C}{P^2}$.

b) Uma mostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida á temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique. R: No início.

c) Prove que a compressibilidade isotérmica e dada por $\beta = \frac{1}{P}$.

28) Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a grandeza da força é representada pela equação $F = \frac{\mu \cdot W}{\mu \cdot \text{sen}\,\theta + \cos\theta}$, onde μ é uma constante chamada coeficiente e atrito.

a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ. R:

b) Quando essa taxa de variação é igual a 0? R:

c) Se W = 50 lb e μ = 0,6, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $\frac{dF}{d\theta} = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b).

R:

29) A lei de Gravitação de Newton diz que a grandeza F da Força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de Massa M é dada pela equação $F = \frac{GmM}{r^2}$, em que G é a constante gravitacional e r, é a distância entre os corpos.

a) Se os corpos estão se movendo, encontre $\frac{dF}{dr}$ e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?

R:

b) Suponha que se tenha conhecimento de que a terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando r = 20.000 km. Quão rápido essa forca varia quando r = 20.000 km?

R:

30) Para estudar de que forma o corpo metaboliza o cálcio, um pesquisador pode injetar no sangue uma amostra de cálcio quimicamente “rotula” para medir a rapidez com que o produto é removido do sangue. Suponha que a expressão $A(t) = 2 - 0,06t + 0,03t^2 - 0,01t^3$ forneça a quantidade de cálcio (em miligramas) que permanece na corrente sangüínea após t horas. Qual a taxa com que cálcio está sendo eliminado da corrente sangüínea 2 horas após a injeção?

R: $A'(2) = -0,06\,\text{mg/h}$.

31) Se um Objeto de massa m tem velocidade v, então sua energia cinética EC, é definida por. $EC = \frac{1}{2}mv^2$. Suponha que v é uma função do tempo. Qual é a taxa de variação de EC em relação ao tempo t?

R: $\frac{d(EC)}{dt} = mv\left(\frac{dv}{dt}\right)$

32) A °C, a perda de calor H (em quilocalorias por metro quadrado-hora) de um ser humano pode ser expresso pela função $H = 33\left(10\sqrt{v} - v + 10,45\right)$, onde v é a velocidade do vento (em metros por segundo).

a) Determine $\frac{dH}{dt}$ e explique o seu significado neste contexto. R:

b) Calcule a taxa de variação de H para v = 2 e v = 5. R:

33) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível pelo seu polinômio derivado $P'(x)$ e este é divisível por $x - 1$. Então, $a + b + c$, é igual a:

R: -1.

34) Determinar os valores de a e b na equação $x^4 - 4x^3 + ax + b = 0$ de modo que a mesma admita uma raiz tripla positiva.

R: a = 16 e b = -16

35) O número 2 é raiz da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$ Determine a e b.

R: a = 1 e b = -12.

36) Verificar se a equação $x^3 - 3x + 8 = 0$ tem alguma raiz iguais. R: não

37) Pesquisar raízes múltiplas na equação $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$.

R: 1 é raiz tripla.

38) Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, sabendo que existem raízes múltiplas.

R: $S = \{1, 2\}$.

39) É dada a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$.

a) Quais os valores de λ para os quais a equação admite uma raiz dupla? R: $\lambda = -5$ ou $\lambda = 27$.

b) Quais os valores de λ a equação tem três raízes reais distintas duas a duas? R: $-5 < \lambda < 27$.

40) Determinar a condição para que a equação $x^3 + px + q = 0$, tenha raízes múltiplas?

R: Uma raiz dupla: $4p^3 + 27q^2 = 0$ e Uma raiz tripla: $p = 0$ e $q = 0$.

41) Determinar k de modo que a equação $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + k = 0$, admita uma raiz dupla negativa e, em seguida, resolver a equação.

R: $k = 19$ e $S = \left\{-1; \frac{7+2i\sqrt{2}}{3}; \frac{7-2i\sqrt{2}}{3}\right\}$.

42) Para que valores de α a equação $2x^3 - 3\text{sen}\,\alpha x^2 + \cos^3\alpha = 0$, tem raízes múltiplas, e também mostra que equação $2x^3 - 3\text{sen}\,\alpha x^2 + \cos^3\alpha = 0$, possui uma raiz simples qualquer que seja α?

R: $\begin{cases} \text{a) } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in ¢ . \\ \text{b) } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in ¢ \text{, a equação terá raízes simples} \end{cases}$.

43) Prove que a equação $x^4 + px^2 + q = 0, p \neq 0$ e $q \neq 0$, não pode ter três raízes iguais.

44) Determine m de modo que a equação $x^3 - 2x^2 + x + m - 1 = 0$, tenha uma raiz dupla.
R: $m = 1$ ou $m = {}^{23}\!/\!_{27}$.

45) Se a equação $x^3 + ax^2 + 3x + 1 = 0$, tem raiz tripla, qual o valor de a? R: a = 3.

46) Determine a condição para que a equação $x^4 - px - q = 0$, tenha uma raiz dupla. Calcule essa raiz.

R: $27p^4 + 256q^3 = 0$ e $x = \sqrt[3]{\frac{p}{4}}$.

47) Determine m de modo que a equação $x^4 + mx^2 + 8x - 3 = 0$, admita uma raiz tripla e, em seguida, resolva a equação.

R: m = -6; S = $\{1, -3\}$

48) Demonstre que, se a equação $x^3 - ax + b = 0$, com $(ab \neq 0$, reais$)$, tiver uma raiz dupla, então a será sempre positivo.

49) Um polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é divisível pelo polinômio derivado $p'(x)$ e esse é divisível por x – 1. Determine os coeficientes a, b e c.
R: a = -3, b = 3 e c = -1.

50) Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

R: $P(x) = x^2 - x + 3$

Retornaremos agora as aulas 06, 07 e 08 com mais questões resolvidas e propostas.

Questões Resolvidas

01) Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função dada, no ponto dado:

- $f(x)=\sqrt[3]{x}$, no ponto de abscissa 8.

- *A imagem de* $x=8$

$f(8)=\sqrt[3]{8}$

$f(8)=2$

- *A derivada de f(x) quando x = 8*

$f(x)=\sqrt[3]{x}$

$f'(x)=\dfrac{1}{3.\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

$f'(8)=\dfrac{1}{3.\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}$

$f'(8)=\dfrac{1}{3.(2)^2}$

$f'(8)=\dfrac{1}{3.4}$

$\boxed{f'(8)=\dfrac{1}{12}}$

- *Equação da Reta Tangente*

$[y-f(x)]=f'(x).(x-x_o)$

$y-2=\dfrac{1}{12}\cdot(x-8)$

$y-2=\dfrac{x}{12}-\dfrac{8}{12}\ (\div 4)$

$y-2=\dfrac{x}{12}-\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{x}{12}-y-\dfrac{2}{3}+2=0$

$\boxed{\dfrac{x}{12}-y+\dfrac{4}{3}=0}$

- *Equação da Reta Norma*

$[y-f(x)]=-\dfrac{1}{f'(x)}.(x-x_o)$

$y-2=-\dfrac{1}{\frac{1}{12}}\cdot(x-8)$

$y-2=-12.(x-8)$

$y-2=-12x+96$

$12x+y-2-96=0$

$\boxed{12x+y-98=0}$

02) Encontre as equações das retas tangente e normal para as curvas abaixo, no ponto especificado.

1) $f(x)=\ln x$, no ponto $x_o=2$, $P(2,\ln 2)$.

(*Coeficiente Angular*)

$f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x_o)=\dfrac{1}{2}$

(*Imagem quando* $x=2$**)**

$f(x)=\ln x$

$f(x)=\ln 2$

Equação da reta tangente

$[y-f(x_o)]=f'(x_o).(x-x_o)\Rightarrow[y-f(x_o)]=\dfrac{1}{2}\cdot(x-2)$

$y-\ln 2=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{2}\Rightarrow y-\ln 2=\dfrac{x}{2}-1\Rightarrow \boxed{y-\dfrac{x}{2}-\ln 2+1=0}$

Equação da reta normal

$[y-f(x_o)]=-\dfrac{1}{f'(x_o)}\cdot(x-x_o)$

$[y-\ln 2]=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\cdot(x-2)\Rightarrow y-\ln 2=-2.(x-2)\Rightarrow y-\ln 2=-2x+4\Rightarrow y+2x-\ln 2-4=0$

$\boxed{y+2x-(\ln 2+4)=0}$

2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, no ponto $x_o=-2$.

$u(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$u'(x)=e^x+e^{-x}.(-1)\Rightarrow e^x-e^{-x}$

$v(x)=2$

$v'(x)=0$

(*Coeficiente Angular*)

$$f'(x)=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right).\cancel{2}}{(2)^{\cancel{2}}}\Rightarrow\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow\frac{e^2-e^{-2}}{2}$$

(*Imagem*)

$$f(-2)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Rightarrow\frac{e^{-2}+e^{-(-2)}}{2}\Rightarrow\frac{e^{-2}+e^2}{2}$$

Equação da tangente

$$[y-f(x_o)]=f'(x_o).(x-x_o)\Rightarrow\left[y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)\right]=\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)\cdot(x+2)\Rightarrow$$

$$y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)=x.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)+2.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)\Rightarrow y-x.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)-2.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow y-x.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)-\frac{2.e^{-2}+2.e^2-e^{-2}-e^2}{2}=0\Rightarrow y-x.\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)-\frac{3.e^{-2}+e^2}{2}=0$$

Equação da reta normal

$$[y-f(x_o)]=-\frac{1}{f(x'_o)}\cdot(x-x_o)\Rightarrow\left[y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)\right]=-\frac{1}{\left[\dfrac{e^{-2}-e^2}{2}\right]}\cdot(x+2)$$

$$y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)=-1\cdot\left[\frac{2}{e^{-2}-e^2}\right]\cdot(x+2)\Rightarrow y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)=\left[-x\left(\frac{2}{e^{-2}-e^2}\right)-2\cdot\left(\frac{2}{e^{-2}-e^2}\right)\right]$$

$$y-\left(\frac{e^{-2}-e^2}{2}\right)=-\left(\frac{2x}{e^{-2}-e^2}\right)-\left(\frac{4}{e^{-2}-e^2}\right)$$

03) Um ponto móvel sobre uma reta tem abscissa S dada em cada instante t dada pela lei $S=a.\cos(w.t+\xi)$ em que a, w e ξ são números reais dados. Determine.

1) A lei que dá a velocidade do ponto em cada instante.

$S=a.\cos(w.\,t+\xi)$

$V=S'=a.-sen(w.\,t+\xi).w.1$

$u'.v+u.v'$

$v=-a.w.sen(w.\,t+\xi)$

2) A velocidade no instante $t=0$.

$v(t)=-a.w.sen(w.\,t+\xi)$

$v(t)=-a.w.sen(\cancel{w.\,0}^{\,0}+\xi)$

$v(t)=-a.w.sen\ \xi$

3) A lei que dá a aceleração do ponto em cada instante.

$$a = v' = -a.0.sen(w.\ t + \xi) + [-a.w.\cos(w.\ t + \xi)].w$$

$$\boxed{a = -a.w^2.\cos(w.\ t + \xi)}$$

4) A aceleração no instante no instante $t = 1/s$.

$$a = -a.w^2.\cos(w.\ t + \xi)$$

$$a = -a.w^2.\cos(w.\ 1 + \xi)$$

$$\boxed{a = -a.w^2.\cos(w + \xi)}$$

04) Obtenha a velocidade e a aceleração de um ponto material que percorre um seguimento de reta obedecendo a equação horária $S = a \cdot e^{-t} \cdot \cos t$, com $a \in \mathbf{R}$.

$$S = a.e^{-t}.\cos t$$

$$v = S' = a.e^{-t}.-1.\cos t + a.e^{-t}.-sen\,t \Rightarrow -a.e^{-t}.\cos t - a.e^{-t}\,sen\,t \Rightarrow -a\,e^{-t}.(\cos t + sent)$$

$$a = v' = -a.e^{-t}.(-1).[\cos t + sent] + -a.e^{-t}.[-sent + \cos t]$$

$$a = \cancel{a.e^{-t}.\cos t} + a.e^{-t}.sent + a.e^{-t}.sent \cancel{- a.e^{-t}.\cos t}$$

$$\boxed{a = 2ae^{-t} \cdot \text{sen t}}$$

05) Durante várias semanas, o departamento de trânsito vem registrando a velocidade dos veículos que passam em um certo quarteirão. Os resultados mostram que entre 13h e 18h de um dia de semana, a velocidade nesse quarteirão é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$, quilômetros por hora, onde *t* é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante entre 13h e 18h em que o trânsito é mais rápido? Qual o instante em que o trânsito é mais lento?

$$v'(t) = 3t^2 - 21t + 30 \quad \div 3$$

$$v'(t) = t^2 - 3t + 10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.1.10$$

$$\Delta = 49 - 40$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$$

$$x'' = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$v(t) = t^3 - 10,5.t^2 + 30t + 20$$

$$v(1) = 1^3 - 10,5.1^2 + 30.1 + 20 = 1 - 10,5 + 30 + 20 = 1 - 10,5 + 30 + 20 = 51 - 10,5 = 40,5$$

$$v(2) = 2^3 - 10,5.2^2 + 30.2 + 20 = 8 - 10,5.4 + 60 + 20 = 8 - 42 + 60 + 20 = 88 - 42 = 46$$

$$v(5) = 5^3 - 10,5.5^2 + 30.5 + 20 = 125 - 10,5.25 + 150 + 20 = 125 - 262,5 + 150 + 20 = 295 - 262,5 = 32,5$$

$$v(6) = 6^3 - 10,5.6^2 + 30.6 + 20 = 216 - 10,5.36 + 180 + 20 = 216 - 378 + 180 + 20 = 416 - 378 = 38$$

O trânsito é mais rápido às 14h, quando os carros passam no quarteirão com uma velocidade média de 46 km/h, e mais lento às 17h, quando a velocidade média é 32,5 km/h.

06) Um corpo se move em linhas retas de tal forma que, em t segundos, percorre uma distância $D(t) = t^3 - 12t^2 + 12$ em metros. Calcule a aceleração do corpo após 3 segundos.

$V = D'(t) = 3t^2 - 2 \cdot 12t + 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t$

$a = V'(t) = 2 \cdot 3t - 24 \Rightarrow 6 \cdot 3 - 24$

$a = V'(3) = 18 - 24 \Rightarrow \boxed{a = V'(3) = -6 \text{ m/s}}$

Questões Propostas

01) Dada a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, obter as equações das retas tangentes nos pontos de abscissa 3. R: $y - \frac{12}{5} = -\frac{9}{20}(x-3)$ e $y + \frac{12}{5} = \frac{9}{20}(x-3)$.

02) Considere a hipérbole de equação $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$, obter as equações das retas tangentes nos pontos de abscissa 3. R: $y - 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(x-3)$ e $y + 8\sqrt{2} = -3\sqrt{2}(x-3)$.

03) Considere a parábola de equação $y^2 - 6y = 2x - 17$, obter as equações das retas tangentes nos pontos de abscissa 12. R: $x - 4y - 8 = 0$ e $x - 4y + 16 = 0$.

04) Escrever a equação da tangente e da normal à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto (-2;5).
R: $y - 5 = 0$ e $x + 2 = 0$.

05) Achar a equação da tangente e da normal à curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto (1;0).
R: $x - 1 = 0$ e $y = 0$.

06) Escrever a equação da tangente e da normal à curva: $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ no ponto com ordenada $y = 3$. R: $5x + 6y - 13 = 0$ e $6x - 5y + 21 = 0$.

07) Escrever a equação da tangente à curva: $x^5 + y^5 + 2xy = 0$ no ponto (1;1). R: $x + y - 2 = 0$

08) Escrever a equação da tangente e da normal à curva: $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ nos pontos de sua intersecção com o eixo das abscissas.

R: no ponto (1;0): $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = \frac{1-x}{2} \end{cases}$; no ponto (2;0): $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$ e no ponto (3;0): $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = \frac{3-x}{2} \end{cases}$

09) Escrever a equação da tangente e da normal à curva: $y^4 = 4x^4 + 6xy$ no ponto (1;2).
R: $14x - 13y + 12 = 0$ e $13x + 14y - 41 = 0$.

10) Escrever as equações da tangente e da normal às curvas nos pontos dados:

a) $y = \text{tg}\, 2x$, na origem das coordenadas: R: $\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$

b) $y = \text{arc.sen}\left(\frac{x-1}{2}\right)$, no ponto de interseção com o eixo $\overline{OX}$. R; $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

c) $y = \text{arc.cos}\, 3x$, no ponto de interseção com o eixo $\overline{OY}$. R; $\begin{cases} 6x + 2y - \pi = 0 \\ 2x - 6y + 3\pi = 0 \end{cases}$

d) $y = \ln x$, no ponto de interseção com o eixo $\overline{\mathrm{OX}}$: R; $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$

e) $y = e^{1-x^2}$, nos pontos de interseção com a reta $y = 1$.

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ para o ponto (1;1) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ para o ponto (-1;1)

11) A reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{sen } x$, no ponto de abscissa π e a reta tangente ao gráfico de $g(x) = \text{Ln } x$, no ponto de abscissa 1 se interceptam no ponto P (m, n). Calcular m e n.

R: $\mathrm{m} = \left(\dfrac{\pi + 1}{2}\right)$ e $\mathrm{n} = \left(\dfrac{\pi - 1}{2}\right)$.

12) Se a posição de um corpo que está se movendo em linha reta é dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$ no instante t, calcule a velocidade e a aceleração do corpo. R: $3t^2 - 6t + 4$ e $6t - 6$.

13) Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (metros) em relação ao solo, é dada por $h = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$, onde t indica o número de segundos decorridos após o lançamento. Em que instante a pedra atingirá sua altura máxima? R: t = 1s e t = 2s.

14) Um móvel desloca-se sobre um eixo de modo que sua abscissa s no instante t é dada pela equação S = a. cos (kt + 1), sendo a, k, 1 constantes dadas. Determinar:

a) instantes e posições em que é máxima a velocidade do móvel; R: $t = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi - 1\right)$ e s = 0.

b) instantes e posições em que é mínima a aceleração do móvel. R: $t = \dfrac{1}{k}(2n\pi - 1)$ e s = a.

15) Os experimentos mostram que a altura (em metros) do pulo de uma pulga após t segundos é dada pela função $H(t) = (4{,}4)t - (4{,}9)t^2$ Usando os métodos do cálculo, determine o instante em que a pulga atinge a altura máxima. Qual é a altura máxima atingida pela pulga?

R: t ; 0,449s e h ; 0,988m

16) Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

(a) Determine a velocidade e aceleração do corpo no instante t.

R: (a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ e $a(t) = 6t - 12$.

(b) Em que instante o corpo está estacionário? R: (b) t = 1 e t = 3.

17) Do alto de um edifício de 34 metros de altura, uma pessoa lança uma bola verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 29m/s:

(a) Determine a altura e velocidade da bola no instante t. R $h(t) = -4{,}9t^2 + 29t + 34$, $v(t) = -9{,}8t + 29$.

(b) Em que instante a bola chega ao chão e qual a velocidade no momento do impacto?

R v(7) = -39,6 m/s.

(c) Em que momento a velocidade é nula? O que acontece nesse momento?

R: (c) A velocidade é nula quando v(t) = 0, o que acontece no instante t = 3. Para t < 3, a velocidade é positiva e a bola está subindo; para t > 3, a velocidade é negativa e a bola está descendo. Assim, a bola atinge o ponto mais alto da trajetória no instante t = 3.

(d) Qual é a distância total percorrida pela bola? R: (d) 119,8m.

18) Um móvel se desloca segundo a equação horária $S = \ln(3t^2 + 2t - 2)$ S em metros e t em segundos. A velocidade do móvel no instante t = 2s. R: 1 m/s.

19) A posição s(t) de um corpo que está em movimento em linha reta é dada. Em cada caso:

- Calcule a velocidade v(t) e a aceleração a(t) do corpo
- Determine o instante t no qual a aceleração é nula.

(a) $s(t) = 3t^5 - 5t^3 - 7$ R: $\begin{cases} \text{a) } v(t) = 15t^4 - 15t^2, a(t) = 60t^3 - 30t \\ \text{b) } a(t) = 0 \text{ para } t = 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(b) $s(t) = (1 - t)^3 + (2t + 1)^2$ R: $\begin{cases} \text{a) } v(t) = -3(1-t)^2 + 4(2t+1), a(t) = 6(1-t) + 8 \\ \text{b) } a(t) = 0 \text{ para } t = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

20) A distância percorrida por um carro em t horas de viagem é $D(t) = 64t + 10t^2/3 - 2t^3/9$ quilômetros.

(a) Escreva uma expressão para aceleração do carro em função ao tempo.

(b) Qual é a taxa de variação da velocidade com o tempo após seis horas de viagem? A velocidade está aumentando ou diminuindo nesse instante?

(c) Qual é a variação de velocidade do carro durante a sétima hora de viagem?

R: $\begin{cases} \text{a) } a(t) = \dfrac{20}{3} - \dfrac{4t}{3} \\ \text{b) A velocidade está diminuindo à razão de } 1{,}33\,\text{km/h}^2 \\ \text{c) a velocidade diminui 2 km/h} \end{cases}$

21) Um projétil é lançado verticalmente a partir do solo com uma velocidade inicial de 48 m/s:

(a) Quanto tempo o projétil leva para se chocar com o solo?

(b) Qual é a velocidade no momento do impacto?

(c) Quanto tempo o projétil leva para atingir a altura máxima? Qual é essa altura?

R: $\begin{cases} \text{a) } t = 9{,}8\text{ s} \\ \text{b) } v(9{,}8) = -48\text{ m/s} \\ \text{c) } t = 4{,}9\text{ s}; S(4{,}9) = 117{,}6\text{ m} \end{cases}$

22) Nos Problemas a seguir, s(t) representa a posição de um corpo que está se movendo em linha reta:

- Determine a velocidade e a aceleração do corpo e descreva seu movimento durante o intervalo de tempo indicado
- Calcule a distância total percorrida pelo corpo durante o intervalo de tempo indicado.

a) $s(t) = \dfrac{2t+1}{t^2+12}$; $0 \le t \le 3$ R: $\begin{cases} \text{a) } v(t) = \dfrac{-2(t+4)(t-3)}{(t^2+12)^2}; a(t) = \dfrac{-2(2t^3+3t^2-72t-12)}{(t^2+12)^3}, \\ \text{o corpo está avançando e freando em todoo intervalo} \\ \text{b) } 0{,}25 \end{cases}$

b) $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t - 25$; $1 \le t \le 6$.

$\begin{cases} \text{a) } v(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 6(t-5)(t-2); a(t) = 12t - 42 = 6(2t-7), \\ \text{o corpo está avançando e freando no intervalo } 1 < t < 2 \text{ e no intervalo } 5 < t < 6. \text{ O corpo está recuando} \\ \text{no intervalo } 2 < t < 5. \text{ O corpo está freando para } t < 3{,}5 \text{ e acelerando para } t > 3{,}5. \\ \text{b) } 49 \end{cases}$

23) Um carro está viajando a uma velocidade de 26 m/s quando o motorista pisa no freio para não atropelar uma criança. Após t segundos, o carro está $s = 26t - 2{,}4t^2$ metros do local onde o motorista pisou no freio. Quanto tempo o carro leva para parar e que distância percorre antes de parar?

R: 5,4 s e 127 m

24) O falcão-peregrino (Falco peregrinus) é uma ave de rapina rápida e precisa que caça outros pássaros, como patos, por exemplo. Quando está sobrevoando um lago e avista um pato na água, o falcão-peregrino dobra as asas e mergulha em direção à presa, espalhando as penas no último momento para frear e estender suas garras mortíferas. De acordo com um certo modelo, a altura de um falcão-peregrino acima da superfície do lago é dada por $H(t) = -t^4 - 1{,}36t^3 - 1{,}2t + 138$, onde t é o tempo em segundos e H é a altura em pés.

a) Qual é a velocidade instantânea do falcão-peregrino no instante t = 1 segundo? Qual é a velocidade instantânea no instante t = 3 segundos?

R: $H'(1) = -9{,}28$ pés/segundo, $H'(3) = -145{,}92$ pés/segundo

b) O falcão-peregrino é capaz de atingir velocidades da ordem de 200 milhas por hora durante um mergulho. O modelo apresentado é suficiente preciso para estimar a velocidade do falcão? (Sugestão: Converta a velocidade de pés por segundo para milhas por hora. Uma milha tem 5.280 pés).

R: 99,49 milhas/hora, Sim.

AULA 10

Nesta aula vamos estudar derivada de função inversa, derivada das funções trigonométricas inversas e derivadas das funções implícitas e estudo das aproximações por diferencias.

10.1 - Função Inversa

Demonstração:

Considerando a função inversível y = f(x), derivável no ponto x, onde $f'(x) \neq 0$, podemos demonstrar que a função inversa x = f^{-1}(y), também é derivável no ponto y, onde y = f (x). Inicialmente escrevemos a identidade abaixo decorre $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta y \neq 0$ logo:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Devemos observar que $y = f(x)$ é derivável e contínua no ponto x. Logo, se $\Delta x \to 0$ temos $\Delta y \to 0$, então:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow x' = \frac{1}{[f(x)]'} \Rightarrow x' = \frac{1}{y'} \text{ ou } y' = \frac{1}{x'}.$$

10.2 - Derivadas das funções trigonométricas inversas: Faremos agora as demonstrações das formulas derivadas das funções trigonométricas inversas.

10.2.1 - Derivada da função y = arc. sen x:

y = arc sen x $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Demonstração:

$x = \text{sen } y$

$x' = \cos y$

$\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1, \text{temos então}$

$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x)^2}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

10.2.2 - Derivada da função y = arc. cos x:

y = arc cos x $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Demonstração:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x)^2}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

$x = \cos y$

$x' = -\text{sen}\, y$

$\text{sen}\, y = \sqrt{1-\cos^2 y}$

10.2.3 - Derivada da função y = arc. tg x:

y = arc tg x $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Demonstração:

$x = \text{tg}\, y$

$x' = \sec^2 y$

$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

10.2.4 - Derivada da função y = arc. cotg x:

y = arc cotg x $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Demonstração:

$x = \text{cotg}\, y$

$x' = -\text{cossec}^2 y$

$\text{cossec}^2 y = 1 + \text{cotg}^2 y$

$$y' = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\text{cossec}^2 y} = -\frac{1}{\text{cossec}^2 y} = -\frac{1}{1+\text{cotg}^2 y}$$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{1+x^2}}$$

10.2.5 - Derivada da função y = arc. sec x:

y = arc sec x $\qquad y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demonstração:

$x = \sec y$

$x' = \text{tg}\, y \cdot \sec y$

$\text{tg}\, y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\text{tg}\, y \cdot \sec y} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 y - 1} \cdot \sec y}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

10.2.6 - Derivada da função y = arc. cossec x:

y = arc cossec x $\qquad y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Demonstração:

$x' = -\text{cotg}\, y \cdot \text{cossec}\, y$

$\text{cotg}^2 y = \text{cossec}^2 y - 1$

$\text{cotg}\, y = \sqrt{\text{cossec}^2 y - 1}$

$$y' = \frac{1}{-\text{cotg}\, y \cdot \text{cossec} y} = -\frac{1}{\text{cotg}\, y \cdot \text{cossec}\, y} =$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{\text{cossec}^2 y - 1} \cdot \text{cossec}\, y}$$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

10.3 - Derivada de funções implícitas

Até agora nossas funções envolvendo uma variável foram expressas, de maneira geral na forma explícita y = f (x). Em outras palavras uma das variáveis é dada explicitamente em função da outra.

Por exemplo: $y = 3x - 5$ $u = 3w - w^2$ $s = -16t^2 + 20t$ $y = \frac{1}{x}$

Onde dizemos que y, s e u são funções de x, t e w respectivamente.

A equação F (x, y) = 0, define y como uma função implícita de x, como por exemplo $x.y = 1$.

Forma explícita	**Forma implícita**	**Derivada**
$y = \frac{1}{x}$ ou $y = x^{-1}$	$x \cdot y = 1$	

$$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot x^{-2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2}$$

Exemplo:

$$\text{(I)} \quad y = \frac{3}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{0.(x^2+1) - 3(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow -\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{(II)} \quad y = (x^2 + 1) = 3$$

$$y = x^2 + y - 3 = 0 \Rightarrow y' \cdot x + y \cdot 2x + y' - 0 = 0$$

$$y'(x^2 + 1) = -y \cdot 2x$$

$$y' = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2+1)} \Rightarrow \frac{\frac{-3}{(x^2+1)} \cdot 2x}{(x^2+1)}$$

$$y' = \frac{-6x}{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

A grande vantagem da derivada implícita está no fato de que, quando uma função derivável, nos é dada na forma implícita sendo difícil ou até impossível colocá-la na forma explícita, mesmo assim é possível determinar sua derivada.

10.4 – Diferenciais

Às vezes a notação dy/dx para representar a derivada y' de y em relação a x. Ao contrario do que aparenta, não é uma razão. Agora introduziremos duas novas varáveis dx e dy coma propriedade de que, caso a razão e igual à exista, esta será igual a derivada.

O significado de dx e dy, na maioria dos contextos, a diferencial dx da variável independente é a sua variação Δx, mas não impomos essa restrição à sua definição.

Ao contrário da variável independente dx, a variável dy é sempre dependente. Ela dependente tanto de x como de dx.

Definição:

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A diferencial dx é uma variável independente. A diferencial dy é. $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)dx}{dx} \Rightarrow f'(x)$, ás vezes escrevemos $df = f'(x)dx$.

Toda formula de diferenciação do tipo:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \text{ ou } \frac{d(\text{sen } u)}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

Tem uma forma diferencial do tipo:

$$d(u+v) = du + dv \text{ ou } d(\text{sen } u) = \cos u \cdot du$$

<u>11.4.1 – Estimando Variações com Diferenciais</u>

Suponha que saibamos o valor de uma função derivável f(x) em um ponto a e que desejamos prever a variação que esse valor soferá se formos para um ponto $a + dx$ próximo. Se dx for pequeno, f e sua linearização L em a irão variar praticamente na mesma quantidade ver figura. Como os valores de L são mais simples de calcular, o cálculo da variação de L nos oferece um modo prático de estimar a variação em f.

Conforme o gráfico anterior aproximando a variação na função f pela variação na linearização de f. Na notação do gráfico, a variação em f é, é $\Delta f = f(a+dx) - f(a)$, a variação correspondente em L.

$$\Delta L = L(a+dx) - L(a) \Rightarrow \underbrace{f(a) + f'(a)\cdot[(a+dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)} \Rightarrow f'(a)\cdot dx$$

Assim, a diferencial $df = f'(x)\,dx$, possui uma interpretação geométrica o valor de df quando $x = a$ é ΔL, a variação da linearização de f correspondente à variação dx.

Estimativa de Variação com Diferenciais: Seja f(x) derivável quando x = a. A variação aproximada do valor de f quando x varia de a para $a + dx$ é $df = f'(a)dx$.

<u>10.4.2 – Variações absoluta, relativa e percentual:</u>

conforme nos deslocamos de a para um ponto $a + dx$ próximo, podemos descrever a variação de f de três maneiras:

	REAL	**ESTIMADA**
Variação absoluta	$\Delta f = f(a+dx) - f(a)$	$df = f'(a)\cdot dx$
Variação relativa	$\frac{\Delta f}{f(a)}$	$\frac{df}{f(a)}$
Variação percentual	$\frac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\frac{df}{f(a)} \times 100$

<u>FÓRMULAS DAS DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES</u>

Propriedades Operatórias:

1) $f(x) = u(x) + v(x)$ $\quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

2) $f(x) = u(x) - v(x)$ $\quad f'(x) = u'(x) - v'(x)$

3) $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

5) $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 0$

6) $f(x) = x$ $\quad f'(x) = 1$

7) $f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

8) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

9) $f(x) = \text{sen x}$ $\quad f'(x) = \cos \text{x}$

10) $f(x) = \cos \text{x}$ $\quad f'(x) = -\text{sen x}$

11) $f(x) = \text{tg x}$ $\quad f'(x) = \sec^2 \text{x}$

12) $f(x) = \text{cotg x}$ $\quad f'(x) = -\text{cossec}^2 \text{x}$

13) $f(x) = \sec \text{x}$ $\quad f'(x) = \text{tg x} \cdot \sec \text{x}$

14) $f(x) = \text{cossec x}$ $\quad f'(x) = -\text{cossec x} \cdot \text{cotg x}$

15) $f(x) = \text{a}^\text{x}$ $\quad f'(x) = \text{a}^\text{x} \cdot \text{Ln a}$

16) $f(x) = \text{e}^\text{x}$ $\quad f'(x) = \text{e}^\text{x}$

17) $f(x) = \text{Log}_\text{a}^{\text{x}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\text{x} \cdot \text{Ln a}}$

18) $f(x) = \text{Ln x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\text{x}}$

19) $f(x) = \text{arc.sen}\, x$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{x}^2}}$

20) $f(x) = \text{arc.cos}\, x$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{x}^2}}$

21) $f(x) = \text{arc.tg x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1 + \text{x}^2}$

22) $f(x) = \text{arc.cotg x}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1 + \text{x}^2}$

23) $f(x) = \text{arc.sec x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\text{x} \cdot \sqrt{\text{x}^2 - 1}}$

24) $f(x) = \text{arc.cossec x}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{\text{x} \cdot \sqrt{\text{x}^2 - 1}}$

Fórmulas de Derivadas de Funções Compostas

Propriedades Operatórias: Sendo as funções u = u (x) e v = v(x)

1 - $f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

2 - $f(x) = u(x) - v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$

3 - $f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4 - $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

5 - $f(x) = [u(x)]^n \rightarrow f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$

6 - $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$

7 - $f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

8 - $f(x) = a^{u(x)} \rightarrow f'(x) = a^{u(x)} \cdot Ln(a) \cdot u'(x)$

9 - $f(x) = Ln[u(x)] \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

10 - $f(x) = Log_a[u(x)] \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x) \cdot Ln\ a}$

11 - $f(x) = sen[u(x)] \rightarrow f'(x) = cos[u(x)] \cdot u'(x)$

12 - $f(x) = cos[u(x)] \rightarrow f'(x) = -sen[u(x)] \cdot u'(x)$

13 - $f(x) = tg[u(x)] \rightarrow f'(x) = sec^2[u(x)] \cdot u'(x)$

14 - $f(x) = cotg[u(x)] \rightarrow f'(x) = -cossec^2[u(x)] \cdot u'(x)$

15 - $f(x) = sec[u(x)] \rightarrow f'(x) = sec[u(x)] \cdot tg[u(x)] \cdot u'(x)$

16 - $f(x) = cossec[u(x)] \rightarrow f'(x) = -cossec[u(x)] \cdot cotg[u(x)] \cdot u'(x)$

17 - $f(x) = [u(x)]^{v(x)} \rightarrow f'(x) = [u(x)]^{[v(x)]} \cdot \left[Ln\,[u(x)] \cdot v'(x) + \left(\dfrac{u'(x) \cdot v(x)}{u(x)} \right) \right]$

18 - $f(x) = arc.sen[u(x)] \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$

19 - $f(x) = arc.cos[u(x)] \rightarrow f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$

20 - $f(x) = arc.tg[u(x)] \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

21 - $f(x) = arc.cotg[u(x)] \rightarrow f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

22 - $f(x) = arc.sec[u(x)] \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x) \cdot \sqrt{[u(x)]^2 - 1}}$

23 - $f(x) = arc.cossec[u(x)] \rightarrow f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x) \cdot \sqrt{[u(x)]^2 - 1}}$

Questões Resolvidas

01) calcular a derivada das funções inversas abaixo:

1) $f(x) = \text{arc.cos } x^2 \Rightarrow -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$; como $u(x) = x^2$, obtemos

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$$

2) $f(x) = \text{arc.sen } 4x^2 \Rightarrow \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$; como $u(x) = 4x^2$, obtemos

$$f'(x) = \frac{2\cdot 4x}{\sqrt{1-\left(4x^2\right)^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{8x}{\sqrt{1-16x^4}}}$$

3) $f(x) = \text{arc.tg}\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}$; como $u(x) = \dfrac{1}{x}$, obtemos $\Rightarrow u'(x) = \dfrac{0.1-1.1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = -\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} = \boxed{-\frac{1}{x^2+1}}$$

4) $f(x) = \text{arc.cotg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow -\dfrac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}$; como $\Rightarrow u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, obtemos

$$u'(x) = \frac{1.(1-x)-(1+x).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1\cancel{-x}+1\cancel{+x}}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{1+\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^2} = -\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} = -\frac{\frac{2}{\cancel{(1-x)^2}}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{\cancel{(1-x)^2}}} = -\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{1^2-2.1.x+x^2+1^2+2.1.x+x^2} = -\frac{2}{1\cancel{-2x}+x^2+1\cancel{+2x}+x^2} = -\frac{2}{2+2x^2} = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}.(1+x^2)^2} = \boxed{-\frac{1}{(1+x^2)^2}}$$

5) $f(x) = \text{arc.sec } e^{2x} \Rightarrow \dfrac{u'(x)}{u(x).\sqrt{[u(x)]^2-1}}$ como $u(x) = e^{2x}$, obtemos

$u(x) = e^{2x}$

$u'(x) = e^{2x}.2.1 \Rightarrow e^{2x}.2 \Rightarrow 2.e^{2x} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{2.\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}\sqrt{\left[e^{2x}\right]^2-1}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\left[e^{2x}\right]^2-1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}}}$$

6)

$$f(x) = x\cdot \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow -\frac{u'(x)}{u(x).\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

$$u(x) = x \cdot \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$u'(x) = 1.\text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + x. -\left[\frac{\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{x}\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}\right] = \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + x.\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}\right]$$

$$u'(x) = \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x}.\left[\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}}\right] = \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot -2x \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot -2x \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot -2x$$

$$v'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f'(x) = \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \left[-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \Rightarrow \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{f'(x) = \text{arc.cossec}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\text{arc.sen } x}$

$$u(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}$$

$$u'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$$

$$v(x) = \text{arc.sen } x$$

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \text{arc.sen } x - \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(\text{arc.sen } x\right)^2} \Rightarrow \frac{\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.sen } x - \left(3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)}{3\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}}{\left(\text{arc.sen } x\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.senx} - 3\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}}}{3\sqrt[6]{x^4.(1-x^2)^3}}}{\left(\text{arc.senx}\right)^2} \Rightarrow \frac{\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.sen } x - 3x}{3\sqrt[6]{x^4.(1-x^2)^3}}}{\left(\text{arc.sen } x\right)^2} \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.senx} - 3x}{3\sqrt[6]{x^4.(1-x^2)^3}} \cdot \frac{1}{\left(\text{arc.sen } x\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.sen } x - 3x}{3\sqrt[6]{x^4.(1-x^2)^3} \cdot \text{arc.sen}^2 x}}$$

02) Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y, onde y = y(x),é uma função derivável, dada implicitamente pela equação dada:

1) $e^y + \ln y = x$

$$e^y \cdot y' + \frac{y'}{y} = x \Rightarrow y' \cdot \left(e^y + \frac{1}{y}\right) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y + \frac{1}{y}} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + \frac{1}{y}}}$$

2) $x \cdot y + x - 2y = 1$

$$1.y + x.y' + 1 - (\cancel{0.y}^{0} - 2.y') = 0 \Rightarrow y + x.y' + 1 - 2y' = 0 \Rightarrow x.y' - 2y' = -y - 1$$

$$y'.(x-2) = -(y+1)$$

$$y' = \frac{-(y+1)}{(x-2)} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{(y+1)}{(x-2)}}$$

3) $2y + \text{sen } y = x$

$$0.y + 2.y' + \cos y.y' = 1$$

$$2y' + \cos y.y' = 1$$

$$y'.(2 + \cos y) = 1$$

$$y' = \frac{1}{(2 + \cos y)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2 + \cos y)}}$$

4) $5y + \cos y = x \cdot y$

$$0.y + 5.y' + (-\text{sen } y).y' = 1.y + x.y'$$

$$5.y' - \text{sen } y.y' = y + x.y'$$

$$5.y' - \text{sen } y.y' - x.y' = y$$

$$y'.(5 - \text{sen } y - x) = y$$

$$y' = \frac{y}{5 - \text{sen } y - x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{5 - \text{sen } y - x}}$$

5) $x^2 + \sqrt{\text{sen } y} - y^2 = 1$

$$2x + \frac{\cos y.y'}{2\sqrt{\text{sen } y}} - 2.y.y' = 0$$

$$4x\sqrt{\text{sen } y} + \cos y.y' - 4.y.y' \cdot \sqrt{\text{sen } y} = 0$$

$$\cos y.y' - 4.y.y'\sqrt{\text{sen } y} = -4x\sqrt{\text{sen } y}$$

$$y'(\cos y - 4y\sqrt{\text{sen } y}) = -4x\sqrt{\text{sen } y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x\sqrt{\text{sen } y}}{\cos y - 4y\sqrt{\text{sen } y}}$$

03) O custo total em reais para fabricar q unidades de um certo produto é $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Se o nível atual de produção é 40 unidades, estime a variação do custo total se 40,5 unidades forem produzidas.

Solução: Nesse problema, a produção atual é q = 40 e a variação é $\Delta q = 0,5$. De acordo com a aproximação por incrementos, a variação correspondente do custo.

$\Delta C = C(40,5) - C(40)$; $C'(40)\Delta q = C'(40)(0,5)$, como.

$C'(q) = 6q + 5$ e $C'(40) = 6(40) + 5 = 245$, temos:

ΔC ; $C'(40)(0,5) = 245(0,5) = R\$\ 122,50$

04) Um estudante mede a aresta de um cubo, encontra o valor de 12 cm e conclui que o volume do cubo é de 12^3 = 1.728 cm^3. Se a precisão da medida foi de 2%, com que precisão foi calculado o volume?

Solução:

O volume do cubo é $V(x) = x^3$, onde x é a aresta do cubo. O erro cometido no cálculo do volume ao supor que a aresta do cubo é 12 quando na realidade é $12 + \Delta x$ é dado por.

$\Delta V = V(12 + \Delta x) - V(12) \cong V'(12)\Delta x$,

A diferença entre o comprimento real da aresta e o comprimento medido é no máximo de 2%, ou seja, 0,02(12) = 0,24 cm para mais ou para menos. Assim, o erro máximo na medição da aresta é $\Delta x = \pm 0,24$ e o erro máximo correspondente no cálculo do volume é o erro máximo do volume ΔV ; $V'(12)(\pm 0,24)$

$V'(x) = 3x^2$ e $V'(12) = 3(12)^2 = 432$ o erro máximo do volume ; $432(\pm 0,24) = \pm 103,68$

05) A produção diária de uma certa fábrica é $Q(L) = 900L^{1/3}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada, medida em homens-horas. No momento, a fábrica utiliza 1.000 homens-horas. Use os métodos do cálculo para estimar o número de homens-horas adicionais necessários para aumentar de 15 unidades a produção diária.

Solução:

Calcule o valor de ΔL usando a aproximação por incrementos, ΔQ ; $Q'(L)\Delta L$ com:

$\Delta Q = 15$ $L = 1.000$ e $Q'(L) = 300L^{-2/3}$, para obter 15 ; $300(1.000)^{-2/3}\Delta L$ ou

ΔL ; $\dfrac{15}{300}(1.000)^{2/3} = \dfrac{15}{300}(10)^2 = 5$ homens-horas.

06) O PIB de um certo país foi $N(t) = t^2 + 5t + 200$ bilhões de dólares t anos após 1994. Use os métodos do cálculo para estimar a variação percentual do PIB durante o primeiro trimestre de 2002.

Use a expressão da variação percentual de N ; $100\dfrac{N'(t)\Delta t}{N(t)}$, com $t = 8$, $\Delta t = 0,25$ e $N'(t) = 2t + 5$.

Solução:

Para obter a variação percentual $N \,;\, 100\dfrac{N'(8)0{,}25}{N(8)} \Rightarrow 100\dfrac{[2(8)+5]0{,}25}{(8)^2+5(8)+200}$ logo: $N \,;\, 1{,}73\%$.

07) Em certa fábrica, a produção diária é $Q(k) = 4.000K^{1/2}$ unidades, onde k é o capital disponibilizado da firma. Use os métodos do cálculo para estimar o aumento percentual da produção em conseqüência de um aumento de 1% no capital disponibilizado. A derivada da função de produção é $Q'(k) = 2.000K^{-1/2}$. O fato de que K aumenta 1% significa que $\Delta k = 0{,}01k$. Assim.

Solução:

Variação percentual $Q \,;\, 100\cdot\dfrac{Q'(k)\Delta k}{Q(k)}$

$$Q \,;\, 100\cdot\frac{2.000k^{-1/2}\cdot(0{,}01k)}{4.000k^{1/2}} \Rightarrow \frac{2.000k^{1/2}}{4.000k^{1/2}},\text{ já que } k^{-1/2}\cdot k = k^{1/2}$$

$$Q \,;\, \frac{2.000}{4.000} = 0{,}25\%.$$

08) Um tangue de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada dentro do tangue a uma taxa de 2 m^3/min, encontre a taxa na qual o nível estará elevado quando estiver a 3 m de profundidade.

Solução:

Dado que $dV/dt = 2\,m^3/\text{min}$, precisamos achar dh/dt, quando h = 3m. A grandeza V e h estão relacionada pela equação do volume do cone $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, mais é muito proveitoso expressar V como uma função de h. Em ordem, para eliminar r, usamos a relação $\dfrac{r}{h} = \dfrac{2}{4} \to r = \dfrac{h}{2}$ a expressão do volume torna-se $V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 h \to V = \dfrac{\pi}{12}\cdot h^3$. Agora podemos diferenciar o volume em relação em relação a t. $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{4}\cdot h^2\cdot\dfrac{dh}{dt} \to \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{\pi h^2}\cdot\dfrac{dV}{dt}$, substituindo h = 3m e $dV/dt = 2\,m^3/\text{min}$, obtemos: $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 \to \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi}$ ou $\approx 0{,}28$ m/min.

09) Um balão esférico está se expandindo. Se o raio está aumentando a uma taxa de 5 centimetros por minuto, em que taxa o volume estará aumentando quando o raio for de 12 centimetros.

Solução:

Dado o volume da esfera $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, então devemos encontrar dV/dt, quando o r = 12 cm, dado que $dr/dt = 5$.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right) \to \frac{dV}{dt} = 4\pi(12)^2(5) \to \frac{dV}{dt} = 2880\pi\,cm^3/\text{min}$$

Questões Propostas

01) calcular a derivada das funções inversas abaixo:

1) $f(x) = \text{arc. cos}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ R: $f'(x) = -\dfrac{1-2x}{2\sqrt{xe^{2x} - x^2}}$

2) $f(x) = \text{arc. cos x} - \sqrt{x}$ R: $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = x \cdot \text{arc.sen } x^2 - e^{x^3}$ R: $f'(x) = \text{arc.sen } x^2 + \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} - 3x^2 e^{x^3}$

4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\text{arc.sen x}}{\text{arc.cos x}}\right)$ R: $f'(x) = \dfrac{\text{arc.sen x} + \text{arc.cos x}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arc.sen x} \cdot \text{arc.cos x}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{\text{arc.tg } x^2}$ R: $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (\text{arc.tg } x^2)^{-\frac{2}{3}}}{3 \cdot (1+x^4)}$

6) $f(x) = \text{arc.tg}\left(\dfrac{x \cdot \text{sen } \alpha}{1 - x \cdot \cos\alpha}\right)$ R: $f'(x) = \dfrac{\text{sen } \alpha}{1 - 2x \cdot \cos\alpha + x^2}$

7) $f(x) = x \cdot \text{arc.cotg x} + \ln\sqrt{1 + x^2}$ R: $f'(x) = \text{arc cotg x}$

8) $f(t) = (1+t^2) \cdot \text{arc.cotg } 2t$ R: $f'(t) = 2t \cdot \text{arc. cotg } (2t) + (1+t^2)\left(\dfrac{-2}{1+4t^2}\right)$

9) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{arc.sec}\sqrt{x}$ R: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \text{arc sec}\sqrt{x}\right)$

10) $f(x) = \text{arc.tg}\sqrt{x^2 - 1} + \text{arc.cos sec x}$ R: $f'(x) = 0$

11) $f(x) = \text{arc.cos sec } (x^2 + 1)$ R: $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^4 + 2x^2}}$

12) $f(x) = \text{arc.cos sec } (\sec\theta)\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ R: $f'(x) = -1$

02) Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y, onde y = y(x),é uma função derivável, dada implicitamente pela equação dada:

1) $x \cdot y^2 = \text{sen}(x + 2y)$ R: $y' = \dfrac{\cos(x+2y) - y^2}{2xy - 2\cos(x+2y)}$

2) $x \cdot \text{sen } y + x^3 = \text{arc.tg } y$ R: $y' = \dfrac{-\text{sen } y - 3x^2(1+y^2)}{(1+y^2)x \cdot \cos y - 1}$

3) $\text{sen}(x^2 \cdot y^2) = x$ R: $y' = \dfrac{1 - 2xy^2 \cdot \cos(x^2 \cdot y^2)}{2x^2 y \cdot \cos(x^2 \cdot y^2)}$

4) $\text{tg}^3(x \cdot y^2 + y) = x$ R: $y' = \dfrac{1 - 3y^2 \cdot \text{tg}^2(x \cdot y^2 + y) \cdot \sec^2(x \cdot y^2 + y)}{3(2xy+1) \cdot \text{tg}^2(x \cdot y^2 + y) \cdot \sec^2(x \cdot y^2 + y)}$

5) $\sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot \text{arc.tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ R: $y' = \dfrac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{cx - y\sqrt{x^2 + y^2}}$

6) $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 16$ R: $y' = \dfrac{2y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{2x\sqrt{y} - x\sqrt{x}}$

7) $y + \text{Ln}(x^2 + y^2) = 4$ R: $y' = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 2y}$

8) $y \cdot e^{\text{arc.tg } x} = 2$ R: $y' = -\dfrac{2e^{-\text{arc.tg } x}}{1 + x^2}$

03) Um avião esta viajando a uma altitude de 10 km em uma trajetória que levará a passar diretamente acima de uma estação de radar seja s a distância (em quilômetros) entre a estação de radar e o avião. Se s está decrescendo a uma taxa de 650 km/h, quando s é de 16 km, qual é a velocidade do avião.

R: 832 km/h.

04) O cascalho esta sendo empilhado em uma pilha cônica a uma taxa de $3\text{m}^3/\text{minuto}$. Encontre a taxa de v da altura da pilha quando é 3m (Suponha que o tamanho do cascalho é tal que o raio da base do cone é igual a sua altura).

R ; $0{,}106\,\text{m}/\text{minuto}$.

05) Suponha que o sol nascente passa diretamente sobre um prédio e tem uma altura de 30 m e seja θ o ãngulo de elevação. Ache a taxa segundo o qual o comprimento da sombra do prédio que está variando em relação ao ângulo θ, quando $\theta = 45^0$. Expressar do respeito em m/grau.

R: $-1{,}05\,\text{m}/\text{grau}$.

06) A produção diária de certa fábrica é Q(L) = $300\,L^{\frac{2}{3}}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada, medida em homens-horas. No momento, a fábrica utiliza 512 homens-horas. Estime o número de homens-horas adicionais que seriam necessários para aumentar de 12,5 unidades a produção diária.

R: 0,5.

07) Os registros mostram que x anos após 1997, o imposto predial para um apartamento de três quartos em certa cidade era T(x) = $60\,x^{\frac{3}{2}}$ + 40x + 1200 reais. Estime o aumento percentual do imposto predial durante o primeiro semestre de 2001.

R: 6%.

08) A produção de certa fábrica é Q = $600\,K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$ unidades, onde K é o capital imobilizado e L a mão-de-obra. Estime o aumento percentual de produção resultante de um aumento de 2% na mão-de-obra se o capital imobilizado permanecer constante. R: $100\Delta Q/Q$; $0{,}67\%$.

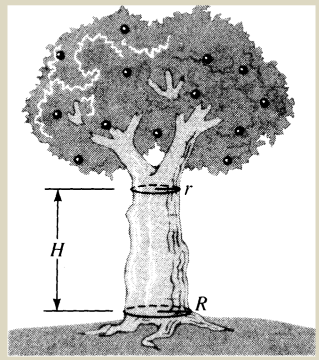
09) De acordo com a lei de Boyle, quando um gás é comprimido a uma temperatura constante, a pressão e o volume V do gás satisfazem à equação PV = C, onde C é uma constante. Suponha que em certo instante o volume seja $0{,}1\text{m}^3$, a pressão seja 10 atmosferas e o volume esteja aumentando à

razão de 0,005m³/s. Qual é a taxa de variação da pressão nesse instante? A pressão está aumentando ou diminuindo?

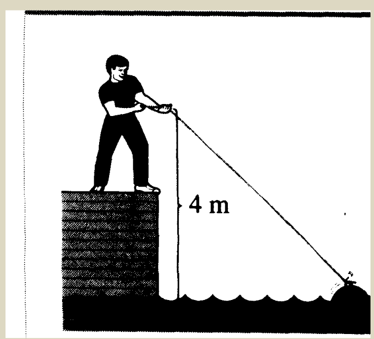
R: -0,5 atm/s.

10) Para estimar a quantidade de madeira que existe no tronco de uma árvore, é razoável supor que a árvore é um cone truncado. Se o raio superior do tronco é r, o raio inferior é R e a altura é H, o volume de madeira é dado por $V = \frac{\pi}{3}H(R^2 + rR + r^2)$. As taxas de aumento de r, R e H são respectivamente 10cm/ano, 12,5cm/ano e 22,5cm/ano. Qual é a taxa de aumento de V no instante em que r = 60 cm, R = 90 cm e H = 4,5 m?

R: $\frac{dV}{dt} = 2.806.227,638\ cm^3\ /\ ano$



11) Uma pessoa está de pé à beira de um cais, 4m acima da água, e puxa uma corda presa a uma bóia. Se a corda é puxada à razão de 0,6m/min, com que velocidade a bóia está se movendo quando se encontra a 3 m do cais?



R: -1 m/mim.

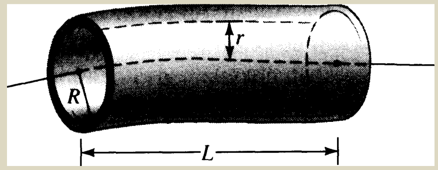
12) A velocidade do sangue no eixo central de uma certa artéria é $S(R) = 1,8 \times 10^5 R^2$ cm/s, onde R é o raio da artéria. Um estudante de medicina mede o raio da artéria e obtém o valor de $1,2 \times 10^{-2}$ cm, cometendo um erro de 5×10^{-4} cm. Estime a diferença entre o valor calculado da velocidade do sangue e o valor real.

R: $\pm 2,16\,cm/s$.

13) Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de 0,002 π mm³/min. Qual é a taxa aumento do raio do balão quando o raio é R = 0,005 mm?

R: $\frac{dr}{dt} = 20mm/min$.

14) De acordo com uma das leis de Poiseuille, a velocidade do sangue a r centímetros do eixo central de uma artéria é dada por $v = \frac{K}{L} \cdot (R^2 - r^2)$, onde k onde K é uma constante positiva, R é o raio da artéria e L é o comprimento da artéria. Suponha que L se mantenha constante e R esteja diminuindo à razão de 0,0012 mm/min. Qual é a aceleração do sangue a meio caminho entre o eixo central e a parede interna da artéria no momento em que R = 0,007 mm (isto é, qual é o valor de dv/dt no momento em que r = 0,0035 mm)?



R: $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{L} \cdot \left(-1,68 \times 10^{-5}\right) mm/min$.

15) Uma pilha de lixo no formato de um cubo está sendo compactada na forma de um cubo menor. Dado que o volume diminui à razão de 2 metros cúbicos por minuto, encontre a taxa de variação em um lado do cubo quando o volume é de 27 metros cúbicos. Qual a taxa de variação da área superficial do cubo neste instante? R: $-\frac{2}{27}$ m/min; $-\frac{8}{3}$ m^2/min

16) O perimetro de um retângulo é fixado em 24 centimetros. Se o comprimento L do retângulo está aumentando à razão de 1 centimetros por segundo, para que valor de L a àrea do retângulo começa diminuir? R: 6 cm.

17) Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 4 pés/s. Um holofote localizado no chão a 20 pés do caminho focaliza o homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 15 pés do ponto do caminho mais próximo da luz? R: 0,128 rad/s.

18) Dois carros iniciam o movimento de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 60 mi/h, e o outro para o leste a 25 mi/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

R: 65 mi/h

19) A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 1 cm/min, enguanto a área do triângulo crece a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa está variando a base do triângulo quando a altura é 10 cm e a área, 100 cm^2? R: $-1,6$ cm/min.

20) Está vazando água de um tangue cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm^3/min. Ao mesmo tempo está sendo bombeada a água para dentro do tangue a uma taxa constante. O tangue tem 6 m de altura, e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nivel da água estiver subindo a uma taxa de 20cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tangue. R: 2,89 x 10^5 cm^3/min.

AULA 11

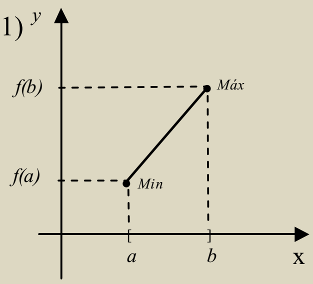
Nesta aula vamos usar as derivadas primeira e segunda para analisar as propriedades geométricas de uma função e traçar um gráfico que reflita suas características principais. Em seguida, discutiremos os métodos usados para determinar os máximos e mínimos das funções os problemas de otimização em todas as esferas da atividade humana e por ultimo ultilizaremos a regra de L' Hospital para calcular limites.

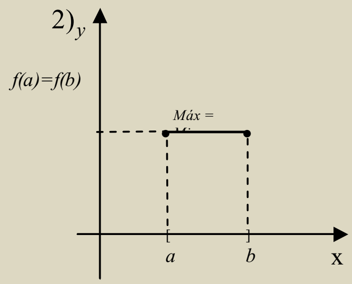
11.1 - Estudo da variação das funções

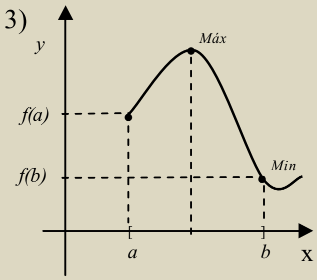
1ª Parte Teoremas

11.1.1 - Teorema de Weiertrass:

Seja f (x) é uma função contínua num intervalo fechado, então existe um ponto de máximo e mínimo relativo.

1)


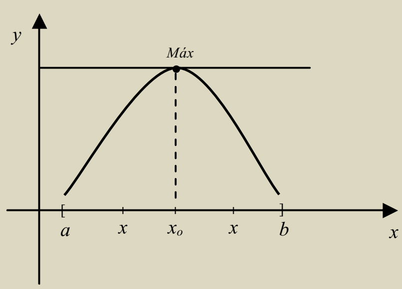
2)


3)


11.1.2 - Teorema de Fermat:

Seja f (x) uma função contínua num intervalo fechado [a,b] e derivável em (a,b). Se $x_o \in (a,b)$ é abscissa de um ponto de máximo ou mínimo, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração:

1)


$$\begin{cases} x_o \in (a,b) \rightarrow \text{Máximo Relativo} \\ f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \\ \forall x \in (a,b) \rightarrow f(x) \leq f(x_o) \\ \qquad\qquad f(x) - f(x_o) \leq 0 \end{cases}$$

i) $\rightarrow \begin{cases} x < x_o \\ x - x_o < 0 \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0$$

$$f'(x_o) \leq 0$$

ii) $\rightarrow \begin{cases} x > x_o \\ x - x_o > 0 \end{cases}$

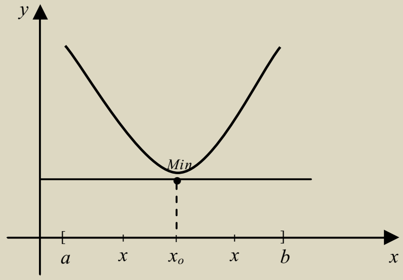
$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

$$f'(x_o) \geq 0$$

$f'(x_o) = 0$, pelo teorema da conservação do sinal para limites

2)



$$\begin{cases} x_o \in (a,b) \rightarrow \text{Minimo Relativo} \\ f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \\ \forall x \in (a,b) \rightarrow f(x) \geq f(x_o) \\ \qquad\qquad f(x) - f(x_o) \geq 0 \end{cases}$$

i) $\rightarrow \begin{cases} x < x_o \\ x - x_o < 0 \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leq 0$$

ii) $\rightarrow \begin{cases} x > x_o \\ x - x_o > 0 \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

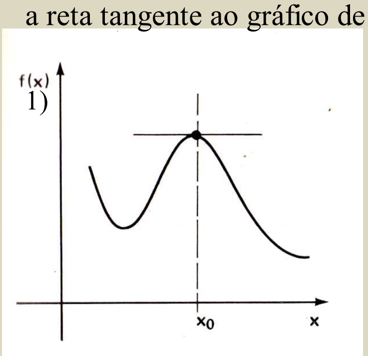
$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geq 0$$

$$\underbrace{f'(x_o) \leq 0 \qquad\qquad f'(x_o) \geq 0}$$

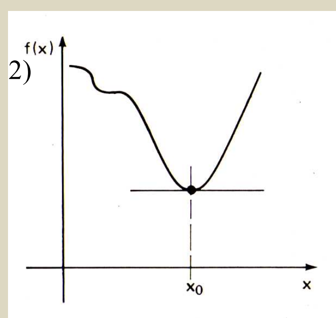
$f'(x_o) = 0$, pelo teorema da conservação do sinal para limites

11.1.2.1 - Interpretação Geométrica do teorema de Fermat:

O teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f (x), a reta tangente ao gráfico de f (x) é paralela aos eixos do x.



*$f(x_o)$*é o máximo local interior

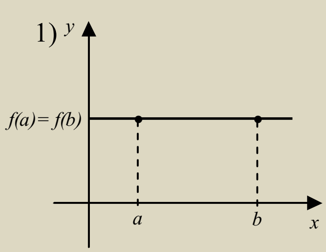


*$f(x_o)$*é o mínimo local interior

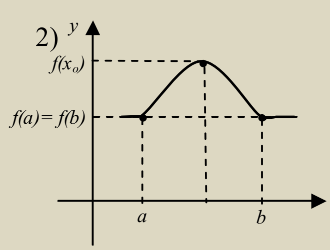
11.1.3 - Teorema de Rolle:

Se f (x) è uma função contínua em [a,b], e derivável em (a,b), se f (a) = f (b), então existe pelo menos um ponto $x_o \in$ (a,b), tal que $f'(x_0) = 0$.

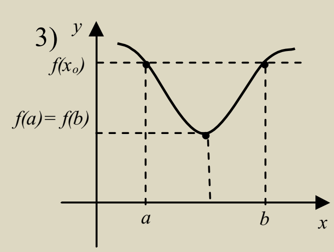
1)



2)



3)



x

Demonstração:

(I) Se $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, temos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

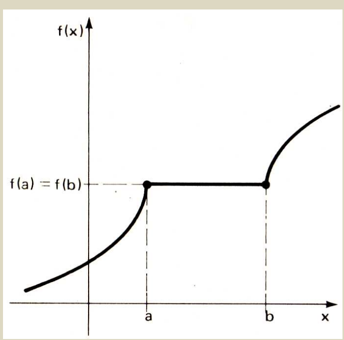
(II) Tem-se que $f(x) < f(x_o)$, se $a < x < x_o$ ou $x_o < x < b$, então x_0 é abscissa de um ponto de máximo pelo T. Fermat $f'(x_o) = 0$.

(III) Temos que $\forall x \in (a,b), f(x) > f(x_o), x \neq x_o$, logo o ponto $\left(x_o, f(x_o)\right)$ é ponto de mínimo, assim, pelo teorema de Fermat $f'(x_o) = 0$.

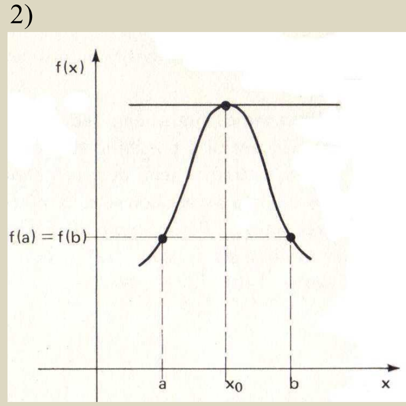
11.1.3.1 - Interpretação geométrica do Teorema de Rolle:

O teorema de Rolle, afirma que se uma função é derivável em (a,b), contínua em [a,b] e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em qualquer ponto de (a,b) a tangente ao gráfico de f (x) é paralela ao eixo do x.

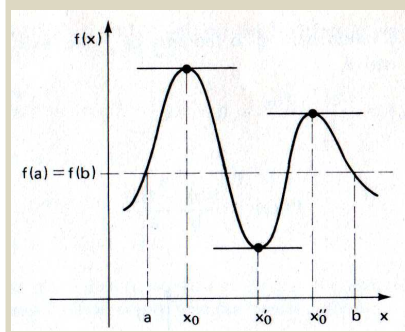
1)



2)



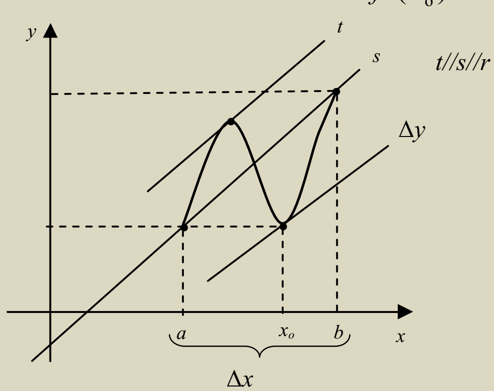
3)



11.1.4 - Teorema do Valor Médio ou Teorema de Lagrange

Se a função f (x) é contínua em [a,b] e derivável em (a,b) existe pelo menos um $x_o \in (a,b)$, tal que.

$$f'(x_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ (y - y_o) = f'(x_o).(x - x_o) \\ m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{cases}$$

***Demonstração*:**

A equação da reta que passa pelos pontos (*a, f(a)*) e (*b, f(b)*) é: $(y - y_o) = m.(x - x_o)$

$$(y - f(a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$$

<u>1º Caso</u>: $f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{b})$.

Neste caso $\dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = 0$ e pelo teorema de Rolle, existe $\mathrm{x_o} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, tal que $f'(\mathrm{x_o}) = 0 = \dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$.

<u>2º Caso</u>: $f(a) \neq f(b)$.

Consideremos a função $g(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{a}) - \dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}.(\mathrm{x}-\mathrm{a})$.

(I) *g(x)* é constante em [*a, b*] por ser a diferença entre $f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{a})$ e $\dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}.(\mathrm{x}-\mathrm{a})$, que são contínuas [*a, b*].

(II) *g(x)* é derivável em (*a, b*) e sua derivada é $g'(\mathrm{x}) = f'(\mathrm{x}) - \dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$.

(III) Nos extremos do intervalo [*a, b*], temos:

$$g(\mathrm{a}) = f(\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) - \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \cdot (\mathrm{a}-\mathrm{a}) = 0$$

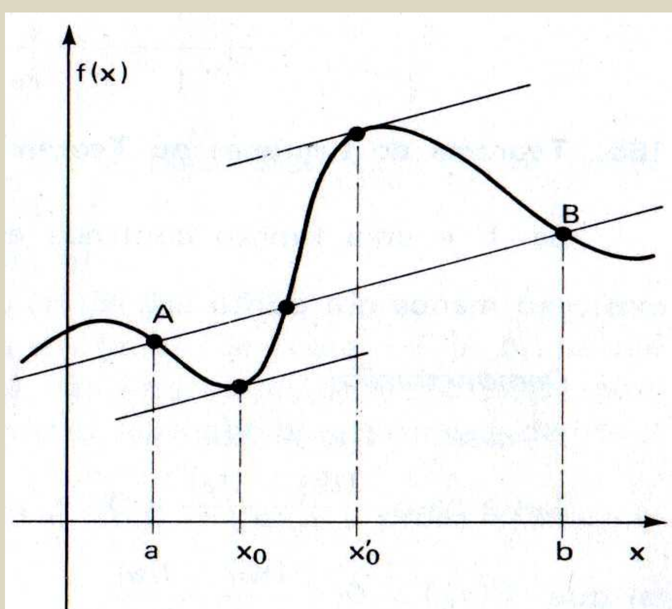
$$g(\mathrm{b}) = f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{b}) - \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \cdot (\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 0$$

Portanto, $g(\mathrm{a}) = g(\mathrm{b}) = 0$

Sendo assim, é válido para *g(x)*, o teorema de Rolle: existe $\mathrm{x_o} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, tal que $g'(\mathrm{x_o}) = 0$, isto é: $g'(\mathrm{x_o}) = f'(\mathrm{x_o}) - \dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = 0$, ou ainda $f'(\mathrm{x_o}) = \dfrac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$

<u>11.1.4.1 - Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange ou T.V.M</u>

Segundo o Teorema de Lagrange, se f(x) é função contínua em [a,b] e derivável em (a,b), então existe um ponto $x_o \in$ (a,b), tal que a reta tangente ao gráfico de f (x) no ponto P (x_o, f (x_o)) é paralela a reta determinada pelos pontos A (a, f (a)) e B (b, f (b)), por terem coeficientes angulares iguais.



2ª Parte Análise de funções:

11.2.1 - Crescimento ou decrescimento: O termos crescente, decrescente e constante são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo.

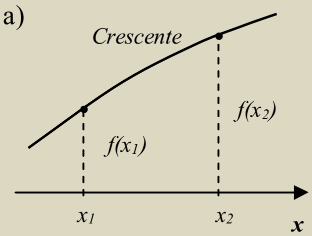
Definição $\rightarrow$ Seja f definida em um intervalo e sejam x_1 e x_2 pontos do intervalo.

(a) f é crescente no intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

(b) f é decrescente no intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

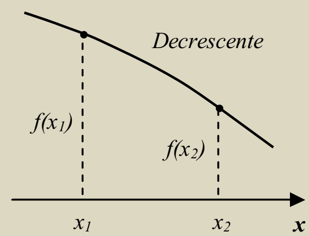
(c) f é constante no intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.

a)



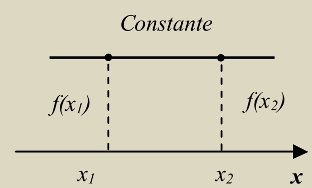
$f(x_1) < f(x_2)$ se $x_1 < x_2$

b)



$f(x_1) > f(x_2)$ se $x_1 > x_2$

c)



$f(x_1) = f(x_2)$

Teorema (1) $\rightarrow$ Seja f uma função contínua em um intervalo fechado [a,b] e diferenciável no intervalo aberto (a,b).

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é crescente em [a,b].

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é decrescente em [a,b].

(c) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em (a,b), então f é constante em [a,b].

11.2,2 - Concavidade:

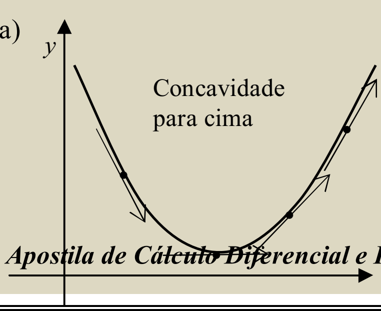
Definição $\rightarrow$ Se f for diferenciável em um intervalo aberto I, então f é classificada como sendo côncava para cima se f for crescente em I e côncava para baixo se f for decrescente em I.

Teorema (2) $\rightarrow$ Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I.

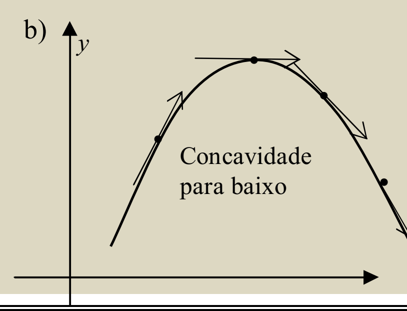
(a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f tem concavidade para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ em I, então f tem a concavidade para baixo em I.

a)



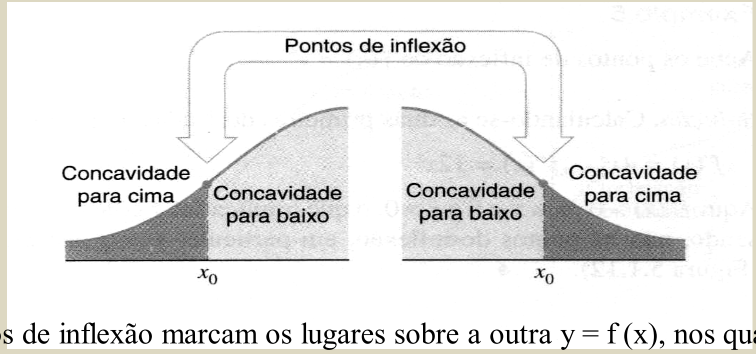
b)



x x

11.2.3 - Pontos de inflexão:

Definição $\rightarrow$ Se f for contínua em um intervalo aberto contendo o ponto x_o e se f muda a direção da concavidade naquele ponto dizemos, então que f tem um ponto de inflexão em x_o e chamamos o ponto de inflexão em x_o e chamamos o ponto $(x_o, f(x_o))$ do gráfico de f um ponto de inflexão de f.



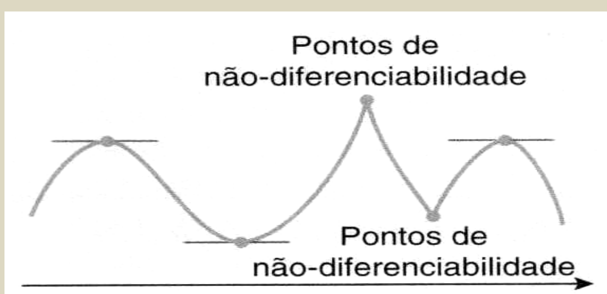
Os pontos de inflexão marcam os lugares sobre a outra y = f (x), nos quais a taxa de variação de y em relação a x. Tem um máximo ou mínimo relativo, isto é, eles são lugares onde y cresce ou decresce mais rapidamente e sua vizinhança máxima.

Teorema (3) $\rightarrow$ Seja $(x_o, f(x_o))$ um ponto de inflexão. Então $f''(x_o) = 0$, ou f'' não está definida em $x = x_o$.

11.2.4 - Extremos relativos: Máximos e mínimos.

Definição $\rightarrow$ Uma função f se diz ter um máximo relativo em x_o, se houver um intervalo aberto contendo x_o, na qual f (x_o) é o maior valor, isto é, $f(x_o) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Analogamente, se diz que f tem um número relativo em x_o, no qual f (x_o) é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$, para todo x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_o, se diz que f tem um extremo relativo em x_o.

Teorema (4) $\rightarrow$ Se uma função f tiver extremos relativos então eles ocorrem ou em pontos onde $f'(x) = 0$ ou em pontos de não-diferenciabilidade, também chamamos pontos críticos ou pontos de não-diferenciabilidade.

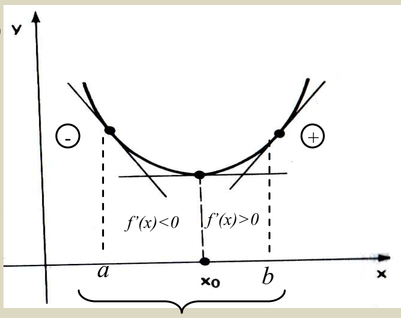


Teorema (5) $\rightarrow$ (Teste da 1ª Derivada).
Suponha f contínua em um ponto crítico x_o.

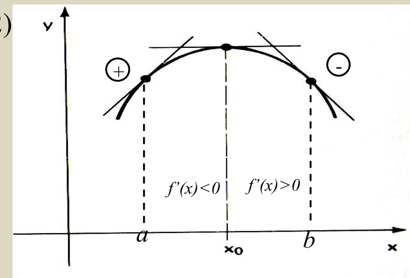
1) Se o sinal de $f'(x)$ muda no ponto x, passando de negativo a positivo, então f, tem o mínimo relativo em x_o.

2) Se o sinal de $f'(x)$, muda no ponto x, passando de positivo a negativo, então f, tem um máximo relativo em x_o.

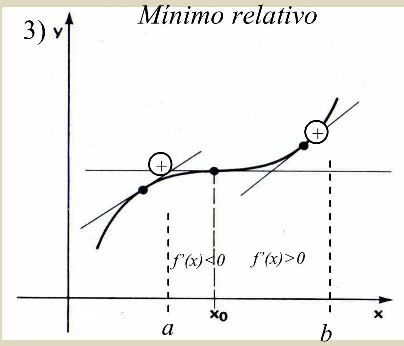
3) Se $f'(x)$ não muda de sinal no ponto x, então f não é máximo e nem mínimo relativo em x_o.

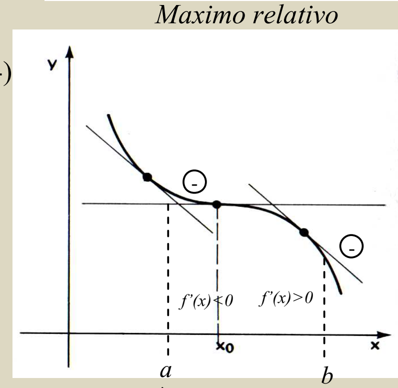
1)


Mínimo relativo

2)


Maximo relativo

3)


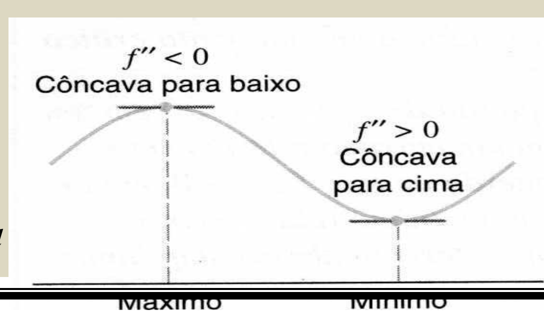
4)


Não é máximo nem mínimo relativo

Teorema (6) $\rightarrow$(Teste da 2ª Derivada)

Suponha que f é uma função contínua e derivável até a segunda ordem no intervalo I =]a,b[, com derivadas f ' e f " também contínuas em I. Seja $x_o \in$ I, tal que nestas condições, temos:

1) Se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) > 0$, então f tem x_o um mínimo relativo.
2) Se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) < 0$, então f tem x_o um máximo relativo.
3) Se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo ou nenhum dos dois em x_o.



Obs: Devemos observar, nas condições do último teorema que se $f'(x_o) = 0$ e $f''(x_o) = 0$, nada pode ser concluído sobre x_o. Neste sentido mostramos no teorema abaixo um critério geral para pesquisar extremantes.

Teorema (7)

Seja f uma função derivável com derivadas sucessivas também deriváveis em I =]a, b[. Seja $x_o \in I$, tal que :

$f'(x_o) = f''(x_o) = ... = f^{n-1}(x_o) = 0$ e $f^n \neq 0$. Nestas condições temos:

1) Se n é par e $f^n(x_o) < 0$, então xo é ponto de máximo local de f;
2) Se n é par e $f^n(x_o) > 0$, então xo é ponto de mínimo local de f;
3) Se n é ímpar, então x_o não é ponto de máximo e nem de mínimo local de f.

11.2.5 - Extremos absolutos: Máximos e mínimos.

Definição $\rightarrow$ Dizemos que uma função f tem um máximo absoluto em um intervalo I num ponto x_o se $f(x_o)$, for o maior valor de f em I, isto é, $f(x_o) \geq f(x)$ para todo x em I.

Analogamente, dizemos que f tem um mínimo absoluto em um intervalo I num ponto x_o se f (x_o), for o menor valor de f em I, isto é, $f(x_o) \leq f(x)$ para todo x em I.

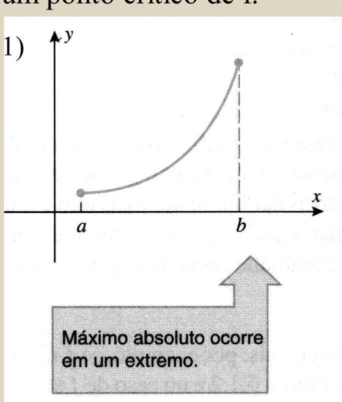
Se f tiver em x_o qualquer um dos dois máximos ou mínimos absolutos em I, dizemos que f tem em x_o um extremo absoluto em I.

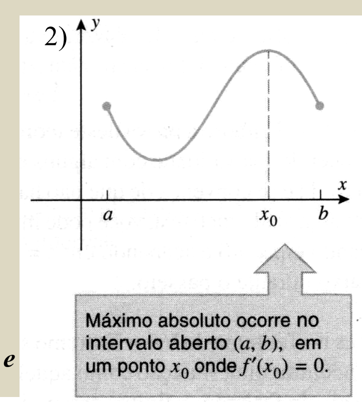
Teorema (8) $\rightarrow$ (Teorema do Valor Extremo).

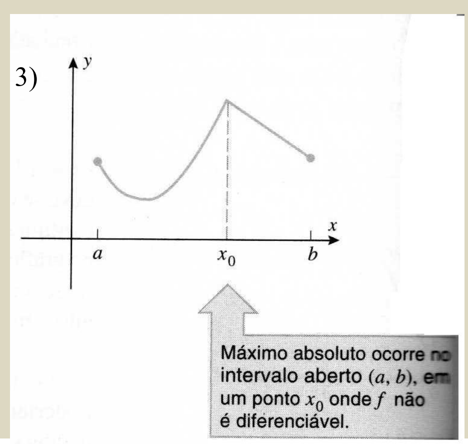
Se uma função f for contínua num intervalo fechado finito [a, b], então tem ambos um máximo e um mínimo absolutos em [a,b].

Teorema (9):

Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele precisa ocorrer em um ponto crítico de f.







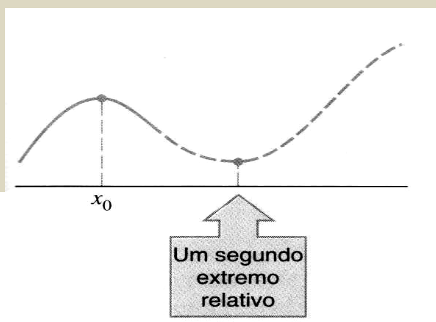
Procedimentos para encontrar os extremos absolutos, de uma função contínua f em um intervalo finito fechado [a, b].

1) Ache os pontos críticos de f em (a, b).
2) Ache o valor de f em todos pontos críticos e nos extremos (a, b).
3) O maior entre os valores do item 2) é o valor máximo absoluto de f em [a, b] enquanto que o menor valor é o mínimo absoluto.

Teorema (10):

Suponha que f é contínua e tem exatamente um extremo relativo em um intervalo I. Digamos em x_o.

1) Se f tiver um mínimo relativo em x_o, então $f(x_o)$ é o mínimo absoluto de f em I.
2) Se f tiver um máximo relativo em x_o, então $f(x_o)$ é o máximo absoluto de f em I.



11.3 - Teorema de Cauchy (11) $\rightarrow$ Sejam f (x) e g(x) definidas em um intervalo fechado [a, b] e derivável em (a,b). Se g ' (x) for diferente de zero, para todo x $\in$ (a, b) então existe pelo menos um número real, $x_o \in$ (a,b).

$$\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

***Demonstração*:**

Podemos supor que $g(x) \neq g(b)$ já que, caso contrário, teríamos $g'(x) = 0$ para algum *x* em (*a, b*) pelo teorema de Rolle. Vamos definir $h(x)$ por:

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right).g(x)$$

Então:

$$h(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) \cdot g(a) = \frac{f(a) \cdot f(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$h(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right) \cdot g(b) = \frac{f(a) \cdot f(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)}$$

e pelo Teorema de Rolle, existe um ponto x_o em (a, b) tal que:

$$h'(x) = f'(x_o) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x_o) = 0$$

$$f'(x_o) = g'(x_o) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\boxed{\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \quad \textit{c.q.d}$$

11.3.1 - Teorema ou Regra de L' Hôspital (12):

Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto (a, b), contendo x_o, com a possível exceção de x_o. Se o limite $\frac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende para a x_o produz uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ com } g'(x) \neq 0 .$$

***Demonstração*:**

Primeiramente estabelecemos a equação anterior para o caso $x \to x_0^+$. O método quase não precisa de mudanças para aplicar-se $x \to x_0^-$ e a combinação desses dois casos estabelece o resultado. Suponha que x esteja à direita de x_0. Então $g'(x) \neq 0$, e podemos aplicar o Teorema do Valor Médio de Cauchy ao intervalo fechado de x_0 a x Esse ponto produz um número c entre x_0 e x tal que:

$$\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}, \text{ Mas } f(x_0) = g(x_0) = 0, \text{ então } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Conforme x tende a x_0 c tende a x_0 porque está entre x e x_0. Conseqüentemente,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

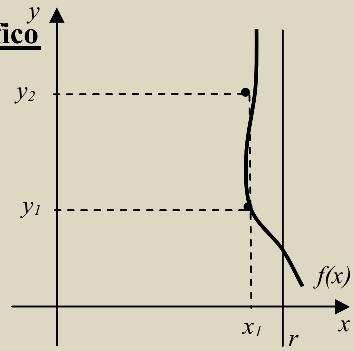
que estabelece a Regra de L' hôspital para o caso onde x tende a x_0 pela direita. O caso no qual x tende a x_0 pela esquerda é provado com aplicação do teorema do valor Médio de Cauchy ao intervalo $[x; x_0], x < x_0$.

Procedimentos para usar a regra de L' hôspital:

1) Verifique que o $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma foram indeterminada, e se não for, então a regra de L' hôspital não pode ser usada.
2) Diferencie separadamente f e g.

3) Ache $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite for finito $+\infty$ ou $-\infty$, então é igual a $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

11.4 - Reta assíntotas de um gráfico



Intuitivamente uma reta r é assíntota do gráfico de uma função f se, ao percorrermos esse gráfico, nos afastamos indefinidamente da origem do sistema, as distâncias entre os pontos do gráfico e a reta r tendem a zero.

A intersecção do gráfico de uma função f com uma assíntota vertical r é sempre o conjunto vazio. Caso contrário teríamos para algum x do domínio de f, mais do que uma imagem e, portanto, f não seria função como mostra a figura acima.

Definição (1) $\rightarrow$ A reta vertical r, de equação x = a é assíntota do gráfico de uma função y = f (x) se, e somente se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Definição (2) $\rightarrow$ A reta não-vertical r, de equação g(x) = mx + q, (m,q} $\subset \Re$, é assíntota do gráfico de uma função y = f(x) se, e somente se:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Determinação de assíntotas não-verticais:

As assíntotas verticais do gráfico de uma função f, se existirem, são fáceis de determinar, pois suas equações são do tipo x = a, em que a $\notin$ D (f) e um dos limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. As assíntotas não-verticais não são tão simples, e por isso mostraremos um teorema para facilitar esse estudo.

Teorema:

Se a reta r de equação g(x) = m· x + q, $\{m,q\} \subset \mathbb{R}$, é assíntota do gráfico de uma função f (x), então:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q \quad \text{(I)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m \text{ e } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=q \quad \text{(II)}$$

***Demonstração*:**

- A reta r é assíntota do gráfico de f, logo teremos: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ou $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$
- Ocorre $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, podemos escrever: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-q]=0$, ou ainda

$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right]\right\}=0$, com $\{m, q\}\subset \mathbb{R}$. Como $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$, concluímos que $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right]=0$.

- Observando os limites $\lim_{x\to+\infty} m=m$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{x}=0$, pois m e q são constantes, temos:

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m-\frac{q}{x}\right]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ Conhecendo o valor de m, obtemos q do seguinte modo $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-q]=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=q$.

11.5 - Problemas de Otimização: (Máximos e Mínimos).

A otimização é uma consideração importante em todas as esferas da atividade humana. Todo mundo quer obter o máximo com o mínimo de esforço. As empresas querem maximizar o lucro, os investidores querem maximar os dividendos e minimizar os riscos e os viajantes querem minimizar o tempo gasto para ir de um lugar a outro. A natureza também favorece processos que otimizam o tempo e a energia, O principio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo.

Na solução desses problemas práticos, o maior desafio está freguentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, estabelecendo a função que deve ser maximizada ou minimizada.

A otimização tem como objetivo encontrar o mínimo absoluto e o máximo absoluto de uma função dentro de um certo intervalo de interesse. O máximo absoluto de uma função dentro de um intervalo é o maior valor da função nesse intervalo e o mínimo absoluto é o menor valor da função nesse intervalo. Os problemas aplicados de otimização, os quais iremos considerar nesta seção, incidem nas seguintes categorias:

1 - Problemas que se reduzem a maximizar ou a minimizar uma função contínua, em um intervalo finito fechado.

2 - Problemas que se reduzem a maximizar ou a minimizar uma função contínua, em um intervalo infinito, mas não fechado.

Quanto aos problemas do primeiro tipo, o teorema (8), garante que o problema tem solução e sabemos que esta solução pode ser obtida examinando os valores da função nos pontos críticos e nos extremos do intervalo.

Quanto aos problemas do segundo tipo, podem ou não, ter solução. Assim sendo, parte do trabalho em tais problemas é determinar se, realmente, tem uma solução.

Se a função for contínua e tiver exatamente um extremo relativo no intervalo, então o teorema (10), garante a existência de uma solução e fornece um método para calculá-la. Nos casos em que o teorema não se aplica, e necessária certa engenhosidade para resolver o problema.

Estratégias para Resolver Problemas de Máximo e Mínimo

1) ***Compreendendo o problema:*** Leia o problema atentamente. Identifique as informações necessárias para resolvê-lo. O que é desconhecido? O que e dado? O que é pedido?

2) ***Desenvolva um Modelo Matemático para o problema:*** Desenhe figuras e identifique as partes que são importantes para o problema. Introduza uma variável para representar a quantidade a ser maximizada ou minimizada. Utilizando essa variável, escreva uma função cujo valor extremo fornece a informação pedida.

3) ***Determine o Domínio da Função:*** Determine quais valores da variável têm sentido no problema. Se possível, esboce o gráfico da função.

4) ***Identifique os Pontos Críticos e as Extremidades:*** Determine onde a derivada é zero ou não existe. Utilize aquilo que você sabe sobre a forma do gráfico de uma função e sobre a física do problema. Use a primeira e a segunda derivada para identificar e classificar pontos críticos (onde $f'=0$ ou não existe).

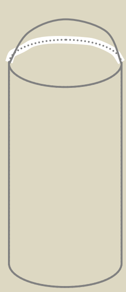
5) ***Resolva o Modelo Matemático:*** Se não estiver seguro sobre o resultado, utilize outro método para embasar ou confirmar sua solução.

6) ***Interprete a Solução:*** Traduza seu resultado matemático de volta para a linguagem original do problema e decida se tem sentido ou não.

Questões Resolvidas de Otimização em Geometria

01) Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto de altura *h* e raio *r*, uma semi-esfera de raio *r*. Deseja-se que a área da superfície do sólido formado seja 5π. Determine *r* e *h* para que o volume do sólido seja máximo.

Solução:



$$A_T = A_L + A_C + \frac{A_E}{2}$$

$$5\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}rh + \cancel{\pi}r^2 + \frac{4\cancel{\pi}r^2}{2}$$

$$5 = 2\cdot r\cdot h + r^2 + 2\cdot r^2$$

$$5 = 2\cdot r\cdot h + 3\cdot r^2$$

$$5 - 3\cdot r^2 = 2\cdot r\cdot h$$

$$\left. h = \frac{5-3r^2}{2r} \right|$$

$$V_T = V_C + \frac{V_E}{2}$$

$$V_T = \pi\cdot r^2\cdot h + \frac{\frac{4}{3}\pi\cdot r^2}{2}$$

$$V_T = \frac{3\left[5\cdot\pi\cdot r - 3\cdot\pi\cdot r^3\right] + 2\cdot 2\cdot\pi\cdot r^3}{6}$$

$$V_T = \frac{15\cdot\pi\cdot r - 9\cdot\pi\cdot r^3 + 4\cdot\pi\cdot r^3}{6}$$

$$V_T = \frac{15\cdot\pi\cdot r - 5\cdot\pi\cdot r^3}{6}$$

$$V_T' = \frac{15\cdot\pi - 3\cdot 5\cdot\pi\cdot r^2}{6} \Rightarrow V_T' = 0.$$

$$0 = \frac{15\cdot\pi - 15\cdot\pi\cdot r^2}{6}$$

$$0 = 15\cdot\pi - 15\cdot\pi\cdot r^2$$

$$15\cdot\pi = 15\cdot\pi\cdot r^2$$

$$h = \frac{5-3.(1)^2}{2.(1)}$$

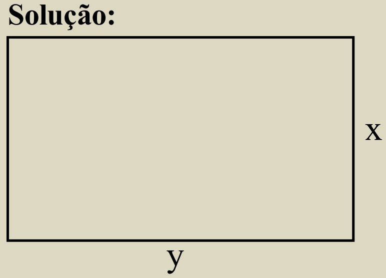
$$h = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$V_{Máx} \Rightarrow \boxed{r = 1}$$

$$\boxed{h = 1}$$

02) Um retângulo de dimensões x e y tem perímetros 2a (a é constante dada). Determinar x e y para que sua área seja máxima.

Solução:



$$S = x \cdot y$$

$$S = x \cdot (a - x) \Rightarrow x \cdot a - x^2$$

$$S' = -2x + a \Rightarrow S' = 0$$

$$-2x + a = 0 \Rightarrow a = 2x \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$\cancel{2}.(x + y) = \cancel{2}.a$$

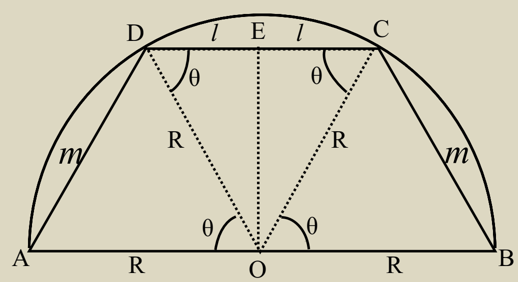
$$x + y = a \Rightarrow y = a - x$$

$$y = a - \frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{2a - a}{2} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$$

R: $x = y = \frac{a}{2}$.

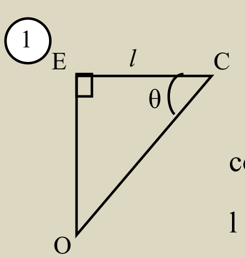
03) Calcular o perímetro máximo de um trapézio que está inscrito numa semicircunferência de raio R.

Solução:



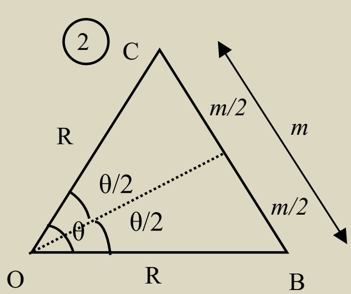
$$P = 2R + 2l + 2m$$

$$P = 2R + 2R \cdot \cos\theta + 2 \cdot 2R \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2}$$



$$\cos\theta = \frac{l}{R}$$

$$l = R \cdot \cos\theta$$



$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{m}{2}}{R}$$

$$\frac{m}{2} = R \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2} \Rightarrow m = 2R \cdot \text{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$P = 2R + 2R\cdot\cos\theta + 4R\cdot \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \Rightarrow P' = -2R\cdot\operatorname{sen}\theta + \cancel{4}R\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow P' = -2R\cdot\operatorname{sen}\theta + 2R\cdot\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow P' = 0$$

$$0 = -2R\cdot\operatorname{sen}\theta + 2R\cdot\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \cancel{2R}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = \cancel{2R}\cdot\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta\ (1)$$

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{2\theta}{2} = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\cancel{2}\theta}{\cancel{2}} = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\ (2)$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow 1 = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\cancel{2}.\pi}{\cancel{6}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$P_{MÁX} = P\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

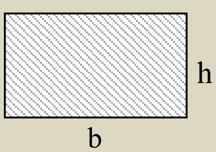
$$P_{MÁX} = 2R + 2R\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 4R\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow P_{MÁX} = 2R + \cancel{2}R\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{4}.R\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow P_{MÁX} = 2R + R + 2R \Rightarrow P_{MÁX} = 5R$$

Substituindo (1) em (2) obtemos:

R: 5R

04) A prefeitura de um município pretende construir um parque retangular, com uma área de $3600\ m^2$ e pretende protegê-lo com uma cerca. Que dimensões devem ter o parque para que o comprimento da cerca seja mínimo?

Solução:



$$c = 2b + 2h \Rightarrow 2b + 2\cdot\frac{3600}{b}$$

$$2b + \frac{7200}{b} \Rightarrow c' = 2 + \frac{(-7200).1}{b^2} \Rightarrow c = 2 - \frac{7200}{b^2}$$

$$a = b\cdot h$$

$$3600 = b\cdot h$$

$$h = \frac{3600}{b} \Rightarrow h = \frac{3600}{60} \Rightarrow \boxed{h = 60m}$$

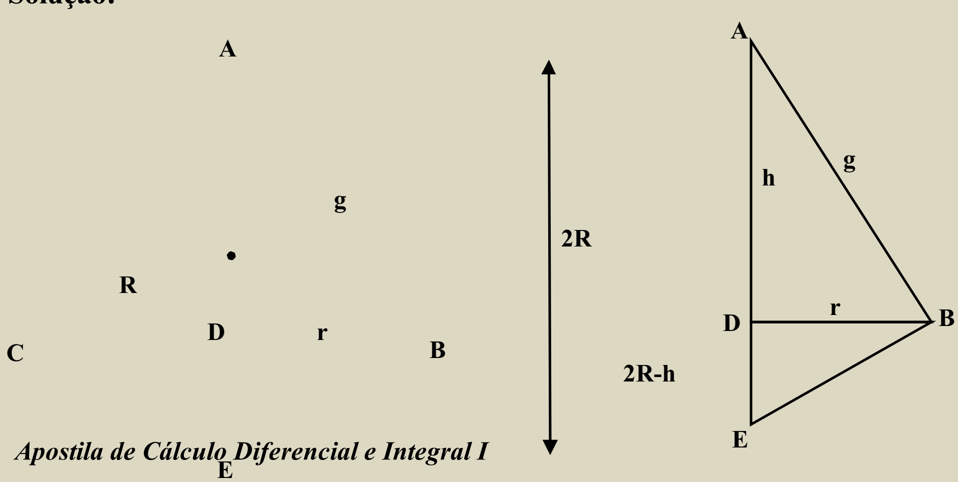
$$c' = 0$$

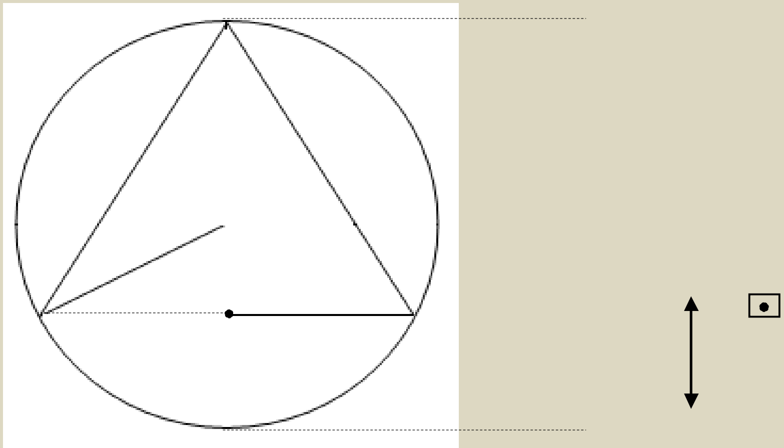
$$2 - \frac{7200}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{7200}{b^2} = 2 \Rightarrow 2b^2 = 7200$$

$$b^2 = \frac{7200}{2} \Rightarrow b^2 = 3600 \Rightarrow b = \sqrt{3600} \Rightarrow \boxed{b = 60}$$

05) Calcular o raio da base e a altura do cone de área lateral máxima que é inscritível numa esfera de raio R

Solução:





No Δ ABE, temos:

$g^2 = 2Rh$, Pelo teorema da relações metricas da projeção sobre a hipotenusa temos

$g = \sqrt{2Rh}$ e

$r^2 = h.(2R - h)$, Pelo teorema da relações metricas da projeção sobre a hipotenusa temos

$r = \sqrt{h.(2R\text{-}h)}$

$A_l = \pi \cdot r \cdot g$, A área lateral do cône

$$A_l = \pi \cdot \sqrt{2Rh - h^2} \cdot \sqrt{2Rh} \Rightarrow A_l = \pi \cdot \sqrt{2Rh \cdot (2Rh - h^2)} \Rightarrow A_l = \pi \cdot \sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3}$$

$$\frac{d(A_l)}{dh} = \pi \cdot \frac{4R^2h^2 - 2R3h^2}{2.\sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3}} \Rightarrow \frac{d(A_l)}{dh} = \pi \cdot \frac{8R^2h - 6Rh^2}{2.\sqrt{4R^2h^2 - 2Rh^3}} \Rightarrow \frac{d(A_l)}{dh} = \pi \cdot \frac{2Rh(4R - 3h)}{2.\sqrt{2Rh^2 \cdot (2R - h)}}$$

$$\frac{d(A_l)}{dh} = \pi \cdot \frac{\cancel{2}R\cancel{h}.(4R - 3h)}{\cancel{2}\cancel{h}.\sqrt{2R.(2R - h)}} \Rightarrow \frac{d(A_1)}{dh} = \pi \cdot \frac{R(4R - 3h)}{\sqrt{2R \cdot (2R - h)}} \Rightarrow \frac{d(A_l)}{dh} = 0$$

$$0 = \pi \cdot \frac{R(4R - 3h)}{\sqrt{2R.(2R - h)}} \Rightarrow 0 = \pi R(4R - 3h) \Rightarrow \frac{0}{\pi R} = (4R - 3h) \Rightarrow 0 = (4R - 3h) \Rightarrow 3h = 4R \Rightarrow h = \frac{4R}{3}$$

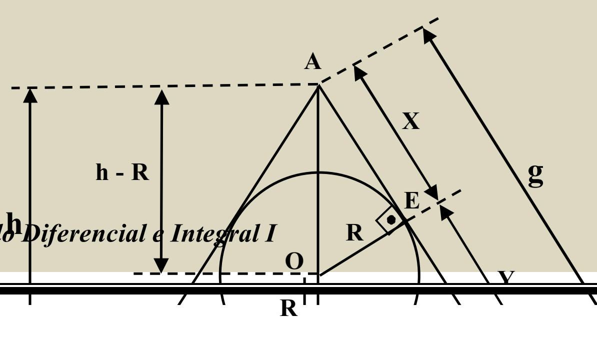
$$r = \sqrt{h.(2R - h)} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4}{3}R.\left(2R - \frac{4}{3}R\right)} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{8R^2}{3} - \frac{16R^2}{9}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{24R^2 - 16R^2}{9}}$$

$$r = \sqrt{\frac{8R^2}{9}} \Rightarrow r = \frac{R}{3} \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

R: $h = \dfrac{4R}{3}$ e $r = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$.

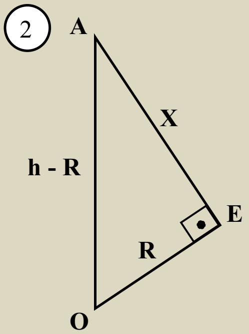
06) Calcular o raio da base e altura do cone de volume mínimo que pode circunscrever uma esfera de raio R.

Solução:



1 $\overline{AD}=h \Rightarrow \overline{AO}=\overline{AD}-\overline{OD} \Rightarrow \boxed{\overline{AO}=h-R}$

Do triângulo obtemos:

2


3

$$\left(\overline{AO}\right)^2=\left(\overline{AE}\right)^2+\left(\overline{OE}\right)^2$$

$$(h-R)^2=x^2+R^2$$

$$x^2=-R^2+(h-R)^2$$

$$x^2=-\cancel{R^2}+h^2-2hR+\cancel{R^2}$$

$$\boxed{x^2=h^2-2hR}$$

4

$$\Delta AEO \sim \Delta ADC$$

$$\frac{R}{r}=\frac{x}{h}$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2=\left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{R^2}{r^2}=\frac{x^2}{h^2}$$

$$\frac{R^2}{r^2}=\frac{h^2-2hR}{h^2} \Rightarrow \boxed{r^2=\frac{R^2\cdot h^2}{h^2-2hR}}$$

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{R^2h^2}{h^2-2hR}\right]\cdot h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{R^2h^2}{\cancel{h}.(h-2R)}\right]\cdot \cancel{h} \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2h^2}{(h-2R)}$$

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{2hR^2(h-2R)-R^2h^2.1}{(h-2R)^2}\right] \Rightarrow \frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{2.R^2.h^2-4hR^3-R^2.h^2}{(h-2R)^2}\right] \Rightarrow \frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{R^2.h^2-4hR^3}{(h-2R)^2}\right]$$

$$\frac{dV}{dh}=0 \Rightarrow 0=\frac{\pi}{3}\cdot\left[\frac{R^2.h^2-4hR^3}{(h-2R)^2}\right] \Rightarrow 0=\frac{R^2.h^2-4hR^3}{(h-2R)^2} \Rightarrow 0=R^2.h^2-4hR^3 \Rightarrow 0=h.R^2.(h-4R)$$

$$0=h-4R \Rightarrow \boxed{h=4R}$$

Substituindo (4) em (3) temos:

$$r^2=\frac{R^2.(4R)^2}{(4R)^2-2\cdot 4\cdot R\cdot R} \Rightarrow r^2=\frac{R^2.(4R)^2}{16R^2-8R^2} \Rightarrow r^2=\frac{16R^4}{8R^2} \Rightarrow r^2=2R^2 \Rightarrow r=\sqrt{2R^2} \Rightarrow \boxed{r=R\sqrt{2}}$$

R: $r=R\sqrt{2}$ e $h=4R$

07) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a parti de folhas de cartão quadrado de 576 cm^2, cortando quadrados iguais nas quatros pontas e dobrando os lados. Calcular a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

Solução:

Volume $\Rightarrow V = a \cdot b \cdot c$

$$V = (24-2x).(24-2x).x \Rightarrow V = (24-2x)^2.x \Rightarrow V = \left[(24)^2 - 2.24.2x + (2x)^2\right] \Rightarrow V = \left[576 - 96x + 4x^2\right].x$$

$$V = 576x - 96x^2 + 4x^3 \Rightarrow V' = 12x^2 - 192x + 576 \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow 0 = 12x^2 - 192x + 576 \quad \div 12$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4.1.8 \Rightarrow \Delta = 256 - 192 \Rightarrow \Delta = 64$$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{64}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{16 \pm 8}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{24}{2} = 12 \\ x'' = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Usando o Teste da 1º derivada obtemos:

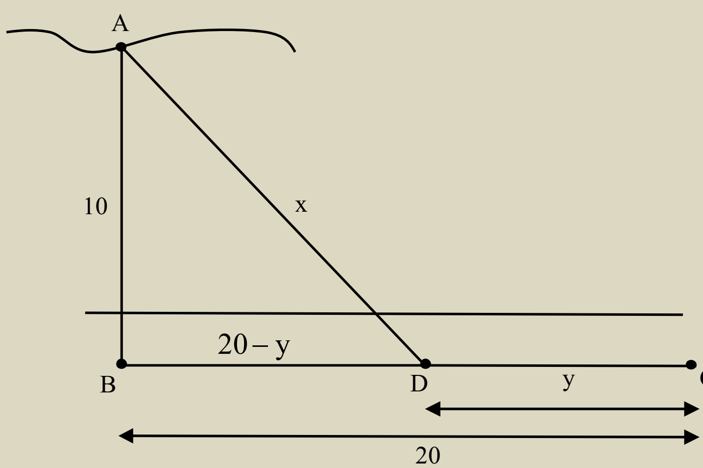
$x = 4$ é ponto de Máximo

$x = 12$ é ponto de Mínimo $\Rightarrow \boxed{x = 4}$

R: 4 cm

08) Uma ilha esta no ponto A, a 10 Km do ponto B mais próximo sobre uma praia reta. Um armazém esta no ponto C, a 20 Km do ponto B sobre a praia. Se um homem pode remar a razão de 4 Km/h e andar a 5Km/h , aonde deveria desembarcar para ir da ilha a ao armazém no menor tempo possível.

Solução:



S = v.t

$$t_1 = \frac{x}{v_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{(10)^2 + (20\text{-}y)^2}}{4}$$

$$t_2 = \frac{y}{v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{y}{5}$$

Tempo total $\Rightarrow T = t_1 + t_2$

$$T = \frac{\sqrt{100+400-40.y+y^2}}{4} + \frac{y}{5} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{500-40.y+y^2}}{4} + \frac{y}{5} \Rightarrow T = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{500-40.y+y^2} + \frac{y}{5} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{4}\cdot\left(500-40.y+y^2\right)^{1/2} + \frac{y}{5} \Rightarrow T' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(500-40.y+y^2\right)^{-1/2}\cdot(2y-40) + \frac{1.\cancel{5}}{(5)^{\cancel{2}}} \Rightarrow T' = \frac{(2y-40)}{8.\sqrt{500-40y+y^2}} + \frac{1}{5}$$

$$T' = \frac{\cancel{2}.(y-20)}{\cancel{8}.\sqrt{500-40y+y^2}} + \frac{1}{5} \Rightarrow T' = \frac{(y-20)}{4.\sqrt{500-40y+y^2}} + \frac{1}{5} \Rightarrow T' = \frac{5.(y-20)+4.\sqrt{500-40y+y^2}}{20.\sqrt{500-40y+y^2}} \Rightarrow$$

$$T' = \frac{5.y-100+4.\sqrt{500-40y+y^2}}{20.\sqrt{500-40y+y^2}} \Rightarrow T' = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5.y-100+4.\sqrt{500-40y+y^2}}{20.\sqrt{500-40y+y^2}} \Rightarrow$$

$$0 = 5.y-100+4.\sqrt{500-40y+y^2} \Rightarrow \left(4.\sqrt[\cancel{2}]{y^2-40y+500}\right)^{\cancel{2}} = (-5y+100)^2 \Rightarrow$$

$$16.(y^2-40y+500) = (5y)^2 + 2.(-5y).100 + (100)^2 \Rightarrow 16y^2 - 640y + 800 = 25.y^2 - 1000y + 10000$$

$$25.y^2 - 16.y^2 - 1000.y + 640.y + 10000 - 8000 = 0 \Rightarrow 9.y^2 - 360y + 2000 = 0$$

$$\Delta = (-360)^2 - 4.9.2000 \Rightarrow \Delta = 129600 - 72000 \Rightarrow \Delta = 57600$$

$$y = \frac{360 \pm 240}{2.9} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{600}{18} = 33,33 \\ \\ y'' = \dfrac{120}{18} = 6,67 \end{cases}$$

R: 13,333 km de B e 6,666 Km de C

09) Um fio de comprimento L é cortado em 2 pedaços, um dos quais formaram um circulo e o outro um quadrado. Como deve ser cortado o fio para que a soma das áreas do circulo e do quadrado seja máxima?

Solução:

$$\overbrace{\underbrace{x = C}\;\underbrace{Q = L - X}}^{L}$$

$$C = 2\pi R \Rightarrow x = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$$

$$Q = L - x \Rightarrow 4 \cdot t = L - x \Rightarrow t = \frac{L - x}{4}$$

$$A_d = \pi R^2 \Rightarrow A_d = \pi . \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow A_d = \cancel{\pi} \cdot \frac{x^2}{4\pi^{\cancel{2}}} \Rightarrow A_d = \frac{x^2}{4\pi}$$

$$A_W = t^2 \Rightarrow A_W = \left(\frac{L - x}{4}\right)^2 \Rightarrow A_W = \frac{L^2 - 2Lx + x^2}{16}$$

$$A_T = A_d + A_W$$

$$A_T = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2 - 2Lx + x^2}{16} \Rightarrow A_T = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2}{16} - \frac{\cancel{2}Lx}{1\cancel{6}} + \frac{x^2}{16}$$

$$A_T = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2}{16} - \frac{Lx}{8} + \frac{x^2}{16}$$

$$A'_T = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{4}\pi} - \frac{L}{8} + \frac{\cancel{2}x}{1\cancel{6}} \Rightarrow A'_T = \frac{x}{2\pi} - \frac{L}{8} + \frac{x}{8}, \text{ como } A'_T = 0$$

$$\frac{x}{2\pi} - \frac{L}{8} + \frac{x}{8} = 0 \Rightarrow \frac{4x - L\pi + x\pi}{8\pi} = 0 \Rightarrow 4x - L\pi + x\pi = 0$$

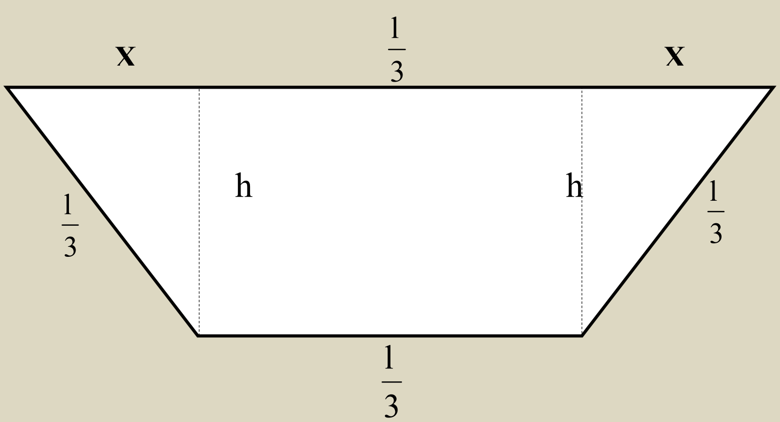
$$\Rightarrow 4x + x\pi = L\pi \Rightarrow x(4 + \pi) = L\pi \Rightarrow x = \frac{L\pi}{4 + \pi}$$

$$Q = L - x \Rightarrow Q = L - \frac{L \cdot \pi}{4 + \pi} \Rightarrow Q = \frac{(4 + \pi) \cdot L - L\pi}{4 + \pi} \Rightarrow Q = \frac{4L + L\pi - L\pi}{4 + \pi} \Rightarrow Q = \frac{4 \cdot L}{4 + \pi}$$

R: $l_1 = \dfrac{\pi L}{\pi + 4}$ e $l_2 = \dfrac{4L}{\pi + 4}$

10) Uma calha de fundo plano e lado igualmente inclinados vai ser construída dobrando-se uma folha de metal de largura l. se os lados e o fundo têm largura $l/3$ calcular o ângulo θ de forma que a calha tenha a máxima secção reta

Solução:



$$\begin{cases} B = 2x + \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$(1)\ \theta = \alpha + 90°$

$(2)\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{l/3} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3x}{l}$

$$(3)\ S = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{\left(2x + \frac{l}{3} + \frac{l}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}}{2} \Rightarrow \frac{\left(2x + \frac{2l}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}}{2} \Rightarrow \frac{2\cdot\left(x + \frac{l}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}}{2}$$

$$(4)\left(\frac{l}{3}\right)^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow \frac{l^2}{9} = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = \frac{l^2}{9} - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}$$

$$\frac{dS}{dx} = 1\cdot\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2} + \left(x + \frac{l}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l^2}{9} - x^2\right)^{-1/2}\cdot -2x \Rightarrow \sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2} - \frac{\left(x + \frac{l}{3}\right)\cdot x}{\left(\frac{l^2}{9} - x^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2} - \frac{x\cdot\left(x + \frac{l}{3}\right)}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}\cdot\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2} - \left(x^2 + \frac{l.x}{3}\right)}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{\left(\frac{l^2}{9} - x^2\right)^2} - \left(x^2 + \frac{l.x}{3}\right)}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\frac{l^2}{9} - x^2 - x^2 - \frac{l.x}{3}}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} \Rightarrow \frac{-2x^2 - \frac{l.x}{3} + \frac{l^2}{9}}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} \Rightarrow \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - \frac{l.x}{3} + \frac{l^2}{9}}{\sqrt{\frac{l^2}{9} - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

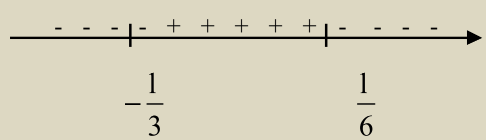
$$\Rightarrow -2x^2 - \frac{l.x}{3} + \frac{l^2}{9} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\left(-2x^2 - \frac{l.x}{3} + \frac{l^2}{9}\right) = 0\cdot -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{l}{6}\cdot x - \frac{l^2}{18} = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{6}\cdot x + \frac{1^2}{18} = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos as raízes:

$x' = -\dfrac{1}{3}$ e $x'' = \dfrac{1}{6}$,



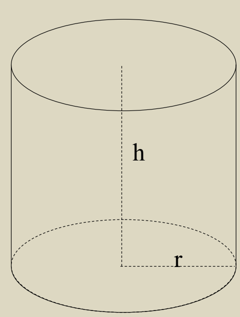
Como a medida e comprimento $x = \dfrac{1}{6}$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3x}{1} \Rightarrow \frac{\cancel{3}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{6}}\right)}{1} = \frac{\frac{\cancel{1}}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{o} \Rightarrow \theta = \alpha + 90^{o} \Rightarrow \theta = 30^{o} + 90^{o} \Rightarrow \theta = 120^{o} \text{ ou } \frac{2\pi}{3}\text{rad.}$$

11) Quais devem ser as dimensões de uma lata cúbica de volume V fixo, de forma que a quantidade de material a ser utilizado para sua fabricação seja menor possível:

Devemos minimizar a área total:

Solução:



$$A_{Total} = A_{Base} + A_{Lateral}$$

$$A_{Total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \textbf{(1)}$$

$$V_C = \pi\cdot r^2\cdot h \rightarrow h = \frac{V}{\pi\cdot r^2}$$

$$A_T = 2.\pi.r^2 + 2\pi r.\left(\frac{V}{\pi.r^2}\right)$$

$$A_T = 2.\pi.r^2 + \frac{2V}{r} \Rightarrow A'_{(r)} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}\text{, tirando o MMC, } A'_{(r)} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}\text{, } A'_{(r)} = 0\text{, obtemos}$$

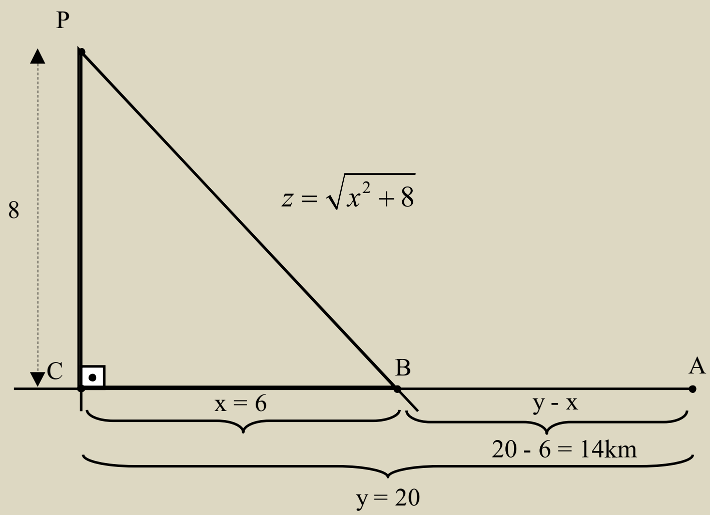
$$0 = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} \rightarrow 2V = 4\pi r^3 \rightarrow \frac{V}{2\pi} = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \rightarrow h = \frac{V}{\pi\left[\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}\right]^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}}\cdot\frac{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}} = \frac{\cancel{V}\cdot r}{\cancel{\pi}\left(\frac{\cancel{V}}{2\cancel{\pi}}\right)} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r \text{ Que acarreta em } h = 2r$$

12) Um homem está em um barco sobre um lago, em um ponto P, situado a 8 km da margem do lago, que é reta. O homem vai de barco até um ponto B da margem e de lá prossegue até o ponto A. Sabendo que a velocidade do barco é 3 km/h e que a velocidade do homem é 5 km/h, determine a posição do ponto B, de modo que o trajeto total seja feito no menor tempo possível.

Solução:



$$S = v\cdot t \Rightarrow t = \frac{S}{v}$$

$$T = t_{(P,B)} + t_{(B,A)} \Rightarrow T = \frac{\sqrt{x^2+64}}{3} + \frac{20-x}{5} \Rightarrow T = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{x^2+64} + \frac{20-x}{5} \Rightarrow T = \frac{1}{3}\cdot\left(x^2+64\right)^{1/2} + 4 - \frac{x}{5}$$

$$T' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+64\right)^{-1/2}\cdot 2x - \frac{1}{5} \Rightarrow T' = \frac{x}{3\cdot\sqrt{x^2+64}} - \frac{1}{5} \Rightarrow T' = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{3\cdot\sqrt{x^2+64}} - \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{3\cdot\sqrt{x^2+64}}\right) \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{x^2}{9\cdot\left(x^2+64\right)} \Rightarrow 25x^2 = 9x^2 + 64\cdot 9 \Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 64\cdot 9 \Rightarrow 16x^2 = 64\cdot 9$$

$$x^2 = \frac{64}{16}\cdot 9 \Rightarrow x^2 = 4\cdot 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6\text{, como é distância} \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

Questões Resolvidas de Otimização em Economia

01) Uma indústria química vende ácido sulfúrico a granel a U$ 100,00 por unidade. Se o custo de produção total diário em dólares para x unidades for: $C(x) = 100.000 + 50x + 0,0025x^2$ e se a capacidade de produção diária for de, no máximo, 7.000 unidades, quantas unidades de ácido sulfúrico devem ser fabricadas e vendidas diariamente para maximizar o lucro?

$L = R - C$

$L = 100x - \left[0,0025x^2 + 50x + 100.000\right] \Rightarrow 100x - 0,0025x^2 - 50x - 100000$

$-0,0025x^2 + 50x - 100.000 \Rightarrow L' = -0,0050x + 50 \Rightarrow L' = 0$

$-0,0050x + 50 = 0 \Rightarrow 0,0050x = 50 \Rightarrow x = \dfrac{0,0050}{50}$

$\boxed{x = 10.000}$

02) É dado o preço *p(q)* pelo qual *q* unidade de certa mercadoria podem ser vendidos e o custo total *C(q)* pata produzir as q unidades as equações $p(q) = 49 - q$ e $C(q) = \dfrac{1}{8}q^2 + 4q + 200$:

a) Determine a função do lucro *P(q)*, e o nível de produção q para o qual *P(q)* é máxima.

Solução:

$P(q) = R(q) - C(q)$

$R(q) = q.P(q)$

$R(q) = q.(49 - q)$

$R(q) = 49q - q^2$

$C(q) = \dfrac{1}{8}q^2 + \mathbf{4q} + 200$

$P(q) = R(q) - C(q)$

$P(q) = 49q - q^2 - \left(\dfrac{1}{8}q^2 + 4q + 200\right)$

$P(q) = 49q - q^2 - \dfrac{1}{8}q^2 - 4q - 200$

$P(q) = -\dfrac{9}{8}q^2 + 45q - 200$

$P(q) = -\dfrac{9}{8}q^2 + 45q - 200$

$P'(q) = 2 \cdot -\dfrac{9}{8}q + 45$

$P'(q) = -\dfrac{18}{8}q + 45$

$P'(q) = -\dfrac{9}{4}q + 45 \Rightarrow P'(q) = 0$

$-\dfrac{9}{4}q + 45 = 0 \Rightarrow \dfrac{9}{4}q = 45 \Rightarrow 9q = 180$

$q = \dfrac{180}{9} \Rightarrow \boxed{q = 20}$

b) Determine a função custo médio e o nível de produção para o qual ela passa a ser mínimo.

$C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ Função do Custo Médio

$C_m(q) = \dfrac{1}{8}q^2 + 4q + 200 \div q$

$C_m(q) = \dfrac{\frac{1}{8}q^{\cancel{2}}}{\cancel{q}} + \dfrac{4\cancel{q}}{\cancel{q}} + \dfrac{200}{q}$

$C_m(q) = \dfrac{1}{8}q + 4 + \dfrac{200}{q}$

$C_m'(q) = \dfrac{1}{8} + 0 + \left(-\dfrac{200}{q^2}\right) \Rightarrow C_m'(q) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{200}{q^2}$

$C_m'(q) = 0$

$\dfrac{1}{8} - \dfrac{200}{q^2} = 0$

$\dfrac{200}{q^2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow q^2 = 1600$

$q = \sqrt{1600} \Rightarrow \boxed{q = 40}$ Produção para o custo mínimo

03) O custo total de fabricação de x unidades de um produto é dada por $C_{(x)} = (3x^2 + 5x + 192)$ reais. Quantas unidades deverão ser fabricadas para que o custo médio seja menor possível.

Solução: Custo médio = $\dfrac{\text{custo total}}{\text{número de unidades fabricadas}}$.

$$Cm_{(x)} = \frac{3x^2 + 5x + 192}{x} \Rightarrow \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{192}{x} = 3x + 5 + \frac{192}{x}$$

$$Cm'_{(x)} = 3 - \frac{192}{x^2} \Rightarrow Cm'_{(x)} = 0 \Rightarrow 0 = 3 - \frac{192}{x^2} \Rightarrow \frac{192}{x^2} = 3$$

$$3x^2 = 192 \Rightarrow x^2 = \frac{192}{3} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$$

+ + + + + + + | - - - - - - - - | + + + + + + +

-8 +8

$x > 0$ então $x = 8$

$$Cm'_{(x)} = 3 - \frac{192}{x^2}$$

$$Cm''_{(x)} = \frac{-(-192)2.x}{(x^2)^2} \Rightarrow \frac{384\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} = \frac{384}{x^3}$$

$$Cm_{(8)} = \frac{384}{(8)^3} = \frac{384}{512} > 0$$

$x = 8$ é um ponto de mínimo.

$$Cm_{(8)} = \frac{3.(8)^2 + 5.(8) + 192}{8} \Rightarrow \frac{192 + 40 + 192}{8} = \frac{424}{8} = 53{,}00$$

$Cm = \text{R\$}\,53{,}00$ e $CT = \text{R\$}\,424{,}00$

04) Um fazendeiro tem 80 porcos, pesando 150 Kg cada um. Cada porco aumenta de peso na proporção de 2,5 Kg por dia. Gastam-se R$ 2,00 por dia para manter um porco. Se o preço de venda está R$ 3,00 por kg e cai R$ 0,03 por dia. Quantos dias devem o fazendeiro aguardar para que seu lucro seja máximo?

Solução:

$R_{(x)} = (150 + 2{,}5x)\cdot(3 - 0{,}03x)$ e $C_{(x)} = 2x$

$L_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$

$L_{(x)} = (150 + 2{,}5x)\cdot(3 - 0{,}03x) - 2x$

$L'_{(x)} = 2{,}5x\cdot(3 - 0{,}03x) - 0{,}03\cdot(150 + 2{,}5x) - 2$

$L'_{(x)} = 7{,}5 - 0{,}075x - 4{,}5 - 0{,}075x - 2$

$L'_{(x)} = -0{,}15x + 7{,}5 - 6{,}5 \Rightarrow -0{,}15x + 1 \Rightarrow L'_{(x)} = 0$

$0 = -0{,}15x + 1 \Rightarrow 0{,}15x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{0{,}15} \Rightarrow x = 6{,}67$ como o valor de x referese a dia temos.

x = 7 dias

05) Uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a granel a um preço de R$ 200,00 por unidade. Se o custo total d e produção (em reais) para x unidades for C(x) = 500.000 + 80.x + 0,003.x^2 e se a capacidade de produção da firma for de, no máximo de 30.000 unidades em um tempo especificado, quantas unidades de penicilina devem ser fabricas e vendidas naquele tempo para maximizar o lucro.

Solução:

$C_{(x)} = 500.000 + 80\cdot x + 0,003x^2$ e $R_{(x)} = 200\cdot x$

$L_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$

$L_{(x)} = 200\cdot x - (500.000 + 80\cdot x + 0,003\cdot x^2) \Rightarrow L_{(x)} = 200.x - 500.000 - 80\cdot x - 0,003\cdot x^2$

$L_{(x)} = -0,003\cdot x^2 + 120\cdot x - 500.000$

$L'_{(x)} = -0,006x + 120 \Rightarrow L'_{(x)} = 0 \Rightarrow 0 = -0,006x + 120 \Rightarrow 0,006x = 120 \Rightarrow$

$x = \frac{120}{0,006} \Rightarrow 20.000$

$x = 20.000 \Rightarrow$ ponto crítico. Qual maximizar

$L_{(20.000)} = 200\cdot 20.000 - (500.000 + 80\cdot 20.000 + 0,003\cdot(20.000)^2 \Rightarrow L_{(20.000)} = 700.000$ valor máximo

$L_{(0)} = -500.000$

$L_{(30.000)} = 200\cdot 30.000 - (500.000 + 80\cdot 30.000 + 0,003\cdot(30.000)^2 \Rightarrow L_{(30.000)} = 400.000$

06) O custo de produção de x unidades de uma certa mercadoria é a + bx e o preço de venda é c - dx, por unidade, sendo a, b, c, d constantes positivas. Quantas unidades devem ser produzidas e vendidas para que seja máximo o lucro da operação?

Solução:

$C_{(x)} = a + bx$ e $R_{(x)} = c - dx$

$L_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$

$L_{(x)} = (c - dx)x - (a + bx)$

$L_{(x)} = cx - dx^2 - a - bx$

$L_{(x)} = -dx^2 + cx - bx - a \Rightarrow = -dx^2 + cx - bx - a \Rightarrow -dx^2 + (c - b)x - a$

$\frac{dl}{dx} = -2dx + (c - b) \Rightarrow \frac{dl}{dx} = 0 \Rightarrow 0 = -2dx + (c - b) \Rightarrow (c - b) = 2dx$, isolando o va lor de x obtemos

$x = \frac{(c - b)}{2d}$

07) A Cia. α Ltda. Produz determinado produto e vende-o a um preço de R$ 13,00. Estima-se que o custo total c para produzir e vender q unidades é dado por $C(q) = q^3 - 3q^2 + 4q + 2$. Suponha que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida para ser obter o lucro máximo?

Solução:

$R = 13q$ e $C = q^3 - 3q^2 + 4q + 2$

$L = R - C$

$L = 13q - (q^3 - 3q^2 + 4q + 2)$

$L = 13q - q^3 + 3q^2 - 4q - 2$

$\frac{dl}{dx} = 13 - 3q^2 + 6q - 4 \Rightarrow \frac{dl}{dx} = -3q^2 + 6q + 9 \Rightarrow \frac{dl}{dx} = 0$

$-3q^2 + 6q + 9 = 0$

$\Delta = (6)^2 - 4.(-3).9 \Rightarrow \Delta = 36 + 108 \Rightarrow \Delta = 144$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{144}}{2.(-3)} \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 12}{-6} \begin{cases} x' = \frac{6}{-6} = 1 \\ x'' = \frac{-18}{-6} = 3 \end{cases}$$

08) Um fabricante estima que quando q unidades de uma certa mercadoria são produzidas por mês, o custo total é C(q) = 0,4q² + 3q + 40 reais e que as q unidades podem ser vendidas por um preço p(q) = 0,2(45 - 0,5q) reais a unidade.

(a) Determine o nível de produção para o qual o lucro é máximo. Qual é o lucro máximo?

(b) Para que nível de produção o custo médio unitário A(q) = C(q)/q é mínimo? Qual é este custo?

(c) Para que nível de produção o custo médio é igual ao custo marginal C'(q)?

Solução:

$C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$ e $p(q) = 0{,}2(45 - 0{,}5q)$

a) $R(q) = q \cdot p(q)$

$R(q) = q \cdot [0{,}2(45 - 0{,}5q)] \Rightarrow R(q) = 9q - 0{,}1q^2$

$P(q) = R(q) - C(q)$

$P(q) = (9q - 0{,}1q^2) - (0{,}4q^2 + 3q + 40) \Rightarrow P(q) = 9q - 0{,}1q^2 - 0{,}4q^2 - 3q - 40$

$P(q) = -0{,}5q^2 + 6q - 40 \Rightarrow P'(q) = -0{,}5 \cdot 2q + 6 \Rightarrow P'(q) = -q + 6$, como $P'(q) = 0$, temos.

$-q + 6 = 0$ onde $q = 6$

$C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$

b) $A(q) = \frac{C(q)}{q} \Rightarrow \frac{0{,}4q^2 + 3q + 40}{q}$ separando em frações de mesmo denominador obtemos

$A(q) = 0{,}4q + 3 + \frac{40}{q}$ derivando temos $A'(q) = 0{,}4 - \frac{40}{q^2} \Rightarrow A'(q) = 0 \Rightarrow 0 = 0{,}4 - \frac{40}{q^2}$

$\frac{40}{0{,}4} = q^2 \Rightarrow q^2 = 100 \Rightarrow q = \sqrt{100} \Rightarrow q = 10$

$A(q) = 0{,}4 \cdot 10 + 3 + \frac{40}{10} \Rightarrow A(q) = 4 + 3 + 4 \Rightarrow A(q) =$ R\$: 11,00 por unidade

$C(q) = 0,4q^2 + 3q + 40$ derivando obtemos $C'(q) = 0,8q + 3$ e $CM(q) = 0,4q + 3 + \frac{40}{q}$

c) $C'(q) = CM(q)$

$$0,8q + 3 = 0,4q + 3 + \frac{40}{q}$$

$$0,8q = 0,4q + \frac{40}{q} \Rightarrow 0,8q - 0,4q = \frac{40}{q} \Rightarrow 0,4 \cdot q = \frac{40}{q} \Rightarrow 0,4q^2 = 40 \Rightarrow q^2 = \frac{40}{0,4}$$

$$q = \sqrt{100} \Rightarrow q = 10 \text{ unidades}$$

09) Um fabricante produz uma fita de vídeo virgem a um custo de R$ 2,00 a unidade. As fitas vêm sendo vendidas a R$ 5,00 a unidade; por esse preço, são vendidas 4.000 fitas por mês. O fabricante pretende aumentar o preço da fita e calcula que para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 fitas serão vendidas por mês. Qual deve ser o preço de venda das fitas para que o lucro do fabricante seja máximo?

Solução:

Lucro = (número de fitas vendidas)$\cdot$ (Lucro por fita)

$*$Número de fitas vendidas = $4000 - 400(x - 5)$

$$400 \cdot [10 - (x - 5)]$$

$$400 \cdot [10 - x + 5]$$

$$400 \cdot [15 - x]$$

$*$Lucro por fita = $(x - 2)$

Lucro $= 400 \cdot (15 - x) \cdot (x - 2)$ derivando a função lucro obtemos

$$\frac{dL}{dx} = 400 \cdot -1 \cdot (x - 2) + 400 \cdot 1 \cdot (15 - x) \Rightarrow \frac{dL}{dx} = 400 \cdot [- \cdot (x - 2) + (15 - x)]$$

$$\frac{dL}{dx} = 400 \cdot [-x + 2 + 15 - x] \Rightarrow \frac{dL}{dx} = 400 \cdot [-2x + 17] \text{ como } \frac{dL}{dx} = 0, \text{ temos:}$$

$$0 = 400 \cdot [-2x + 17] \Rightarrow \frac{0}{400} = -2x + 17 \Rightarrow 0 = -2x + 17 \Rightarrow 2x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{2}$$

$$x = 8,5$$

R: R$ 8,50 a unidade

10) Uma empresa de turismo aluga onibus com capacidade para 50 pessoas a grupos de 35 pessoas ou mais. Quando um grupo contem exatamente 35 pessoas pessoas, cada pessoa paga R$ 60,00. Nos grupos maiores, o preço por pessoa é reduzido de R$ 1,00 para cada pessoa que exceder 35. Determine o tamanho do grupo para o qual a receita da empresa é máxima.

Solução:

Receita da empresa = (número de pessoas no grupo) $\cdot$ (preço por pessoa)

Número de pessoas no grupo $= 35 + x$ e o Preço por pessoa é $= 60 - x$

$$R_{(x)} = (35 + x) \cdot (60 - x)$$

$R_{(x)} = (35+x)\cdot(60-x)$ derivando obtemos

$R'_{(x)} = 1\cdot(60-x)+(35+x)\cdot -1$

$R'_{(x)} = 60-x-35-x \Rightarrow R'_{(x)} = -2x+25$, como $R'_{(x)} = 0$, então: $0 = -2x+25 \Rightarrow$

$2x = 25 \Rightarrow x = \dfrac{25}{2} \Rightarrow x = 12{,}5$, como estamos trabalhan do com número de pessoas podemos ter

$x = 12$ ou $x = 13$ para formar os grupos.

com $x = 12$ temos um total de $12+35 = 47$

com $x = 13$ temos um total de $13+35 = 48$

Usando a função receita para verificar qual número de pessoas vão servir para montar os grupos;

$R_{(x)} = (35+x)\cdot(60-x)$

$x = 12$	$x = 13$
$R_{(12)} = (35+12)\cdot(60-12)$	$R_{(13)} = (35+13)\cdot(60-13)$
$R_{(12)} = 47\cdot 48$	$R_{(13)} = 48\cdot 47$
$R_{(12)} = 2256$	$R_{(13)} = 2256$

Desta forma concluimos que os valores 47 e 48 satisfazem as condições do problema.

R: 47 ou 48 pessoas (R$ 2256,00)

11) Um fabricante de bicicletas compra 6000 pneus por ano de um distribuidor. A taxa de transporte é R$ 20,00 por encomenda, o custo de armazenamento é 96 centavos por pneu por ano e cada pneu custa R$ 5,75. Suponha que a demanda de pneus se mantenha constante durante todo o ano e cada remessa seja entregue no momento em que o estoque se esgotou. Quantos pneus o fabricante de bicicletas deve encomendar de cada vez pra minimizar o custo?

Solução:

$CT_{(x)}$ = Custo de transporte, CAr = Custo de Armazenamento, CTr = Custo de transporte da remessa e CM_A = Custo de médio de armazenamento

$CTr = (\text{custo por remessa})\cdot(\text{número de remesas}) \Rightarrow CTr = 20\cdot\left(\dfrac{6000}{x}\right) \Rightarrow \dfrac{120.000}{x}$

$CAr = (\text{número médio de pneus armazenados})\cdot(\text{custo de armazenamento por pneu}) \Rightarrow CAr = \dfrac{x}{2}\cdot 0{,}96 \Rightarrow 0{,}48\cdot x$

$CM_A = (\text{número total de pneus})\cdot(\text{preço de um pneu}) \Rightarrow CM_A = 6000\cdot 5{,}75 \Rightarrow 34.500$

$CT_{(x)} = CAr + CTr + CM_A$

$CT_{(x)} = 0{,}48\cdot x + \dfrac{120.000}{x} + 34.500$

$CT'_{(x)} = 0{,}48 - \dfrac{120.000}{x^2}$, como $CT'_{(x)} = 0$ obtemos: $0 = 0{,}48 - \dfrac{120.000}{x^2} \Rightarrow \dfrac{120.000}{x^2} = 0{,}48 \Rightarrow \dfrac{120.000}{0{,}48} = x^2 \Rightarrow$

$x^2 = 250.000 \Rightarrow x = \pm\sqrt{250.000} \Rightarrow x = \pm 500$, como queremos mini mizar o custo pelo teste da 1ª derivada o valor é 500

R: deve encomendar lotes de 500.

12) Após x semanas, o número de pessoas que usam uma nova linha de metrô é dada pela equação $N(x) = 6x^3 + 500x + 8.000$:

(a) Qual era a taxa de variação do número de passageiros após 8 semanas?

(b) Qual foi a variação do número de passageiros durante a oitava semana?

Solução:

a) $N(x) = 6x^3 + 500x + 8.000$

$N'(x) = 18x^2 + 500$

$N'(8) = 18(8)^2 + 500 \Rightarrow 18 \cdot 64 + 500 \Rightarrow 1152 + 500 \Rightarrow 1652$

$N'(8) = 1652$

b) $N(x) = 6x^3 + 500x + 8.000$

$N(7) = 6(7)^3 + 500 \cdot 7 + 8.000$ $\quad$ $N(8) = 6(8)^3 + 500 \cdot 5 + 8.000$

$N(7) = 13.558$ $\quad$ $N(8) = 15.072$

$N(8) - N(7) = 15.072 - 13.558 \Rightarrow N(8) - N(7) = 1514$

R: $\begin{cases} \text{a) o número de passageiros estava diminuindo à razão de 1.652 passageiros por semana.} \\ \text{b) o número de passageiros estava aumentando à razão de 1.514 passageiros por semana.} \end{cases}$

13) Um fazendeiro consegue vender um quilo de batata por R$ 2,00 no primeiro dia do ano, mas, depois disso, o preço cai à razão de dois centavos por quilo ao dia. No dia 1º de janeiro, um fazendeiro tem 80 kg de batata no campo e calcula que a produção será aumentada à razão de 1 kg ao dia. Em que dia o fazendeiro deve colher as batatas para maximizar a receito?

Solução:

Seja x o número de dias que se seguem a 1º de janeiro. Nesse caso, o preço das batatas é dado por $2 - 0,02x$ e o número de quilos de batata dado por $80 + x$. A receita obtida com a venda de batatas no dia x é: $R = (80 + x)(2 - 0,02x) \Rightarrow R = 160 - 1,6x + 2x - 0,02x^2 \Rightarrow R = 160 + 0,4x - 0,02x^2$

O objetivo é determinar o máximo de lucro para R. Calculando a derivada temos:

$R = 160 + 0,4x - 0,02x^2 \Rightarrow R' = 0,4 - 0,04x$, que se anula para:

$0,4 - 0,04x = 0 \Rightarrow 0,04x = 0,4 \Rightarrow x = \dfrac{0,4}{0,04} = 10$. Agora, vamos calcular a segunda derivada para verificar se esse é o valor máximo de R. $R'' = -0,04$ e como $R''(10) < 0$, $x = 10$ corresponde realmente a um máximo de R, o fazendeiro deve colher as batatas dez dias após 1º de janeiro, ou seja, no dia 11 de janeiro.

14) O número de membros de uma associação de consumidores, x anos após sua fundação, em 1978, é $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$.

a) Em que ano, entre 1978 e 1992, a associação teve o maior número de membros? Qual foi esse número?

b) Em que ano, entre 1972 e 1992, a associação teve o menor número de membros? Qual foi esse número?

Solução:

Definindo o intervalo como sendo $x = 0$ para o ano de 1978 e $x = 14$ para o ano de 1992. Assim, calculemos a derivada da função $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$.

$f'(x) = 100(6x^2 - 90x + 264)$ e tirando 6 em evidência temos
$f'(x) = 600(x^2 - 15x + 44)$. Agora, encontrando os seus pontos críticos, podemos reescrever $f'(x)$ da seguinte forma: $f'(x) = 600(x-4)(x-11)$.

Podemos notar que $x = 4$ e $x = 11$ são os pontos críticos de $f'(x)$ sendo ambos os valores pertencem ao intervalo. O primeiro valor corresponde a um mínimo absoluto e o segundo valor corresponde ao máximo relativo.

Calculando os pontos de $f(x)$ temos:

$$f(0) = 100(2(0)^3 - 45(0)^2 + 264(0)) = 0$$
$$f(4) = 100(2(4)^3 - 45(4)^2 + 264(4)) = 100(128 - 720 + 1.056) = 1\,00 \times 464 = 46.400$$
$$f(11) = 100(2(11)^3 - 45(11)^2 + 265(11)) = 100(2.662 - 5.44\,5 + 2.904) = 100 \times 132 = 12.100$$
$$f(14) = 100(2(14)^3 - 45(14)^2 + 264(14)) = 1\,00(5.488 - 8.820 + 3.710) = 100 \times 378 = 37.800$$

Agora podemos concluir que:

a) Em 1982 $(x = 4)$. 46.4000 membros.

b) Em 1998 $(x = 11)$. 12.100 membros.

Questões Resolvidas de Otimização em Ciências Naturais

01) Os experimentos mostram que a biomassa Q(t) de uma espécie de peixe em uma certa região do oceano varia de acordo com a equação $\frac{dQ}{dt} = rQ \cdot \left(1 - \frac{Q}{a}\right)$ Onde r é a taxa natural de expansão da espécie e a é uma constante. Determine a taxa de expansão percentual da espécie. O que acontece quando Q (t) > a?

Solução:

$$\frac{dQ}{dt} = rQ \cdot \left(1 - \frac{Q}{a}\right) \Rightarrow \frac{100Q'(t)}{Q(t)} = \frac{100 \cdot r \cdot \cancel{Q} \cdot \left(1 - \frac{Q}{a}\right)}{\cancel{Q}} \Rightarrow \frac{100Q'(t)}{Q(t)} = 100r \cdot \left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

a taxa se torna negativa, o que significa que a biomassa começa a diminuir.

02) Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada em uma parede. O alto da escada está escorregando para baixo ao longo da parede com uma velocidade de 3 m/s. Com que velocidade a base da escada está se afastando da parede quando o alto se encontra a 3 m do chão?

Solução:

$x^2 + y^2 = (5)^2$, derivando a equação e $\frac{dy}{dt} = -3$ $\quad 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$

$x^2 + (3)^2 = (5)^2$ $\quad 2(4) \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot 3 \cdot (-3) = 0$

$x^2 = 25 - 9$ $\quad 8 \cdot \frac{dx}{dt} = 18$

$x^2 = 16$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{18}{8}$

$x = \sqrt{16}$ $\quad \frac{dx}{dt} = 2{,}25\,\text{m/s}$

$x = 4$

R: 2,25 m/s.

03) Quando uma pessoa tosse, o raio da traquéia diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Se r_0 é o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traquéia é dada por uma função da forma $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o raio r para o qual a velocidade do ar é máxima.

Solução:

$$V(r) = a \cdot r^2 \cdot (r_0 - r) \Rightarrow V'(r) = a \cdot 2r \cdot (r_0 - r) + a \cdot r^2 \cdot (-1) \Rightarrow V'(r) = a \cdot 2r \cdot (r_0 - r) - a \cdot r^2$$

$$V'(r) = 2arr_0 - 2ar^2 - ar^2 \Rightarrow V'(r) = 2arr_0 - 3ar^2 \Rightarrow V'(r) = ar \cdot (2r_0 - 3r), \text{ como } V'(r) = 0, \text{ obtemos}$$

$$0 = ar \cdot (2r_0 - 3r) \Rightarrow \frac{0}{ar} = 2r_0 - 3r \Rightarrow 3r = 2r_0 \Rightarrow r = \frac{2r_0}{3}$$

R: $r = \frac{2r_0}{3}$.

04) Um estudo ambiental realizado em um certo município revela que a concentração média de monóxido de carbono no ar é dado pela equação $C(p) = \sqrt{0{,}5p^2 + 17}$ partes por milhão, onde p é população em milhares de habitantes. Calcula-se que daqui a t anos a população do município será $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$ milhares de habitantes. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono daqui a 3 anos?

Solução:

$$C(p)=\sqrt{0{,}5p^2+17}\Rightarrow\frac{dc}{dp}=\frac{\cancel{2}\cdot 0{,}5p}{\cancel{2}\cdot\sqrt{0{,}5p^2+17}}\Rightarrow\frac{dc}{dp}=\frac{0{,}5p}{\sqrt{0{,}5p^2+17}}$$

$$p(t)=3{,}1+0{,}1\cdot t^2\Rightarrow\frac{dp}{dt}=2\cdot 0{,}1\cdot t\Rightarrow\frac{dp}{dt}=0{,}2\cdot t$$

e como t = 3 anos substituindo em p(t).

$$p(t)=3{,}1+0{,}1\cdot t^2$$

$$p(3)=3{,}1+0{,}1\cdot(3)^2\Rightarrow p(3)=3{,}1+0{,}1\cdot(3)^2\Rightarrow p(3)=3{,}1+0{,}1\cdot(9)$$

$$p(3)=3{,}1+0{,}9\Rightarrow p(3)=4{,}0$$

Usando a regra da cadeia para derivar a função composta $\frac{dc}{dt}=\frac{dc}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$, obtemos:

$$\frac{dc}{dt}=\frac{dc}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt}=\frac{0{,}5p}{\sqrt{0{,}5p^2+17}}\cdot 0{,}2t\Rightarrow\frac{0{,}1\cdot p(t)}{\sqrt{0{,}5p^2+17}}\Rightarrow\frac{0{,}1\cdot p\cdot t}{\sqrt{0{,}5p^2+17}}\Rightarrow\frac{0{,}1\cdot 4\cdot 3}{\sqrt{0{,}5\cdot(4)^2+17}}$$

$$\frac{dc}{dt}=\frac{1{,}2}{\sqrt{0{,}5\cdot 16+17}}\Rightarrow\frac{1{,}2}{\sqrt{8+17}}\Rightarrow\frac{1{,}2}{\sqrt{25}}\Rightarrow\frac{1{,}2}{5}=0{,}24\Rightarrow\frac{dc}{dt}=0{,}24\text{ milhão por ano.}$$

05) Um certo modelo biológico sugere que a reação do corpo humano a uma dose de medicamento pode ser representada por uma função da forma $F=\frac{1}{3}(KM^2-M^3)$ onde K é uma constante positiva e M a quantidade do medicamento presente no sangue. A derivada S = dF/dM pode ser considerada como uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.

(a) Calcule a sensibilidade S.

(b) Calcule $dS/dM = d^2F/dM^2$ e apresente uma interpretação para a derivada segunda.

Solução:

$F=\frac{1}{3}(KM^2-M^3)$ derivando a equação.

a) $\frac{dF}{dM}=\frac{1}{3}\cdot(2KM-3M^2)$ derivando pela segunda vez a equação.

b) $\frac{dF}{dM}=\frac{1}{3}\cdot(2K-6M)$é a taxa de variação de senbilidade coma quantidade de medicamento

06) Um dos modelos do sistema cardiovascular relaciona V(t), o volume de sangue na aorta no instante t durante a sístole (fase de contração), a P(t), a pressão na aorta durante a sístole, através da equação: $V(t) = [C_1 + C_2 P(t)]\cdot\left(\frac{3t^2}{T^2}-\frac{2t^3}{T^3}\right)$ onde C_1 e C_2 são constantes positivas e T é a duração (constante) da sístole. Encontre uma relação entre as taxas dV/dt e dP/dt.

Solução:

$$V(t) = [C_1 + C_2 \cdot P(t)] \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right) \text{efetuando a multiplicação temos:}$$

$$*V(t) = C_1 \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right) + C_2 \cdot P(t) \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right) \text{derivando a equação.}$$

$$\frac{dv}{dt} = C_1 \cdot \left(\frac{6t \cdot T^2}{(T^2)^2} - \frac{6t^2 \cdot T^3}{(T^3)^2}\right) + C_2 \cdot P(t) \cdot \left(\frac{6t \cdot T^2}{(T^2)^2} - \frac{6t^2 \cdot T^3}{(T^3)^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = C_1 \cdot \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3}\right) + C_2 \cdot P(t) \cdot \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = [C_1 + C_2 \cdot P(t)] \cdot \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3}\right)$$

$$** V(t) = [C_1 + C_2 \cdot P(t)] \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right) \text{derivando a equação.}$$

$$\frac{dp}{dt} = C_2 \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right) \text{somando} * \text{com} **, \text{obtemos.}$$

$$\frac{dv}{dt} = [C_1 + C_2 \cdot P(t)] \cdot \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3}\right) + C_2 \cdot \frac{dp}{dt} \cdot \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)$$

07) A reação do organismo à administração de um medicamento é frequentemente representada por uma equação da forma $R(D) = D^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$ onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R(D) com D é chamada de sensibilidade. Determine o valor de D para o qual a sensibilidade é máxima.

Solução:

$$R(D) = D^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right) \text{derivando a equação.}$$

$$R'(D) = 2D \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right) + D^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow R'(D) = \frac{2DC}{2} - \frac{2D^2}{3} - \frac{D^2}{3} \Rightarrow R'(D) = 0$$

$$0 = \frac{2DC}{2} - \frac{3D^2}{3} \Rightarrow 0 = DC - D^2 \Rightarrow D^2 = DC \Rightarrow D = C$$

R: A sensibilidade é máxima para D = C.

08) Em um artigo científico, V. A. Tucker e K. Schmidt-Koenig mostraram que o consumo de energia de uma espécie de periquito australiano (o Budgerigar) é dado pela expressão $E = \frac{1}{v}[0{,}074(v - 35)^2 + 32]$ onde v é a velocidade do pássaro em km/h. Escreva uma expressão para a taxa de variação da energia com a velocidade do periquito.

Solução:

$E = \frac{1}{v} \cdot [0{,}074(v-35)^2 + 32]$ derivando a equação.

$E' = -\frac{1}{v^2} \cdot [0{,}074 \cdot (v-35)^2 + 32] + \frac{1}{v} \cdot [0{,}074 \cdot 2 \cdot (v-35)]$

$E' = -\frac{[0{,}074 \cdot (v^2 - 70v + 1225) + 32]}{v^2} + \frac{[0{,}148 \cdot (v-35)]}{v}$, fazendo a multiplicação temos.

$E' = \frac{-0{,}074 \cdot v^2 + 70v - 90{,}65 - 32}{v^2} + \frac{0{,}148 \cdot v - 5{,}18}{v}$, tirando mmc obtemos.

$E' = \frac{-0{,}074 \cdot v^2 + 5{,}18 \cdot v - 90{,}65 - 32 + 0{,}148 \cdot v^2 - 5{,}18 \cdot v}{v^2}$, simplificando e reduzindo a fatores comuns.

$E' = \frac{0{,}074 \cdot v^2 - 122{,}65}{v^2}$

09) De acordo com os resultados de Tucker e Schmidt-Koenig, o consumo de energia de uma espécie de periquito é dado pela expressão $E(v) = \frac{1}{v}[0{,}074(v - 35)^2 + 32]$ onde v é a velocidade do pássaro em km/h. Qual é a velocidade para a qual o consumo de energia é mínimo?

Solução: Como já efetuamos a derivada da equação na questão anterior passamos a usar a mesma.

$E' = \frac{0{,}074 \cdot v^2 - 122{,}65}{v^2}$, como $E' = 0$.

$0 = \frac{0{,}074 \cdot v^2 - 122{,}65}{v^2} \Rightarrow 0 = 0{,}074 \cdot v^2 - 122{,}65 \Rightarrow 122{,}65 = 0{,}074 \cdot v^2$

$\frac{122{,}65}{0{,}074} = v^2 \Rightarrow 1657{,}43 = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{1657{,}43}$

$v = 40{,}71$ km/h

10) Em um artigo publicado em 1969, C. J. Pennycuick apresentou provas experimentais de que a potência P necessária para que um pássaro se mantenha voando é dada pela expressão $\rho = \frac{w^2}{2pSv} + \frac{1}{2}pAv^3$ onde v é a velocidade do pássaro em relação ao ar, w é o peso do pássaro, p é a densidade do ar e S e A são constantes positivas associadas à forma e ao tamanho do pássaro. Qual é a velocidade v para a qual a potência é mínima?

Solução:

$\rho = \dfrac{w^2}{2pSv} + \dfrac{1}{2}pAv^3$, derivando a equação obtemos.

$\dfrac{d\rho}{dv} = \dfrac{-w^2 \cdot 2\rho S}{(2\rho Sv)^2} + \dfrac{1}{2}\rho A3v^2 \Rightarrow \dfrac{d\rho}{dv} = \dfrac{-w^2 \cdot 2\rho S}{4\rho^2S^2v^2} + \dfrac{1}{2}\rho A3v^2$ fazendo o mmc temos.

$\dfrac{d\rho}{dv} = \dfrac{-w^2 \cdot 2\rho S + 2(\rho^2S^2v^2)\cdot(\rho A3v^2)}{4\rho^2S^2v^2} \Rightarrow \dfrac{d\rho}{dv} = 0$, logo

$$0 = \frac{-w^2 \cdot 2\rho S + 2(\rho^2S^2v^2)\cdot(\rho A3v^2)}{4\rho^2S^2v^2}$$

$$0 = -w^2 \cdot 2\rho S + 2\rho^3S^2A3v^4$$

$$w^2 \cdot 2\rho S = 2\rho^3S^2A3v^4$$

$$3\rho^2SAv^4 = w^2 \Rightarrow v^4 = \frac{w^2}{3\rho^2AS} \Rightarrow v = \sqrt[4]{\frac{w^2}{3\rho^2AS}}$$

11) Um parâmetro importante para o projeto de aeronaves é o chamado "fator de arraste", ou seja, a força de frenagem exercida pelo ar sobre a aeronave. De acordo com um modelo, a força de arraste é dada por uma expressão da forma $F(v) = Av^2 + \dfrac{B}{v^2}$ onde A e B são constantes positivas. Observa-se experimentalmente que o arraste é mínimo para v = 256km/h. Use essa informação para calcular a razão B/A.

Solução:

$f(v) = A \cdot v^2 + \dfrac{B}{v^2}$ derivando a equação.

$$f'(v) = 2Av - \frac{2Bv}{(v^2)^2} \Rightarrow f'(v) = 2Av - \frac{2Bv}{v^4} \Rightarrow f'(v) = 2Av - \frac{2B}{v^3} \Rightarrow f'(v) = 0$$

$$0 = 2Av - \frac{2B}{v^3} \Rightarrow \frac{2B}{v^3} = 2Av \Rightarrow \frac{B}{v^3} = Av \Rightarrow \frac{B}{A} = v^4 \Rightarrow \frac{B}{A} = (256)^4 \Rightarrow 4.294.967.296$$

R: $\dfrac{B}{A} = 4.294.967,296$

12) A percentagem de bichos da maçã que sobrevivem ao estado de pupa (Estado intermediário entre a larva e a imago, nos insetos holometabólicos) é dada pela expressão $P(T) = -1,42T^2 + 68T - 746$ para $20 \le T \le 30$ onde T é a temperatura em graus Celsius. Determine a temperatura em que o número de bichos da maçã sobreviventes é máxima e a temperatura em que o número de bichos da maçã sobrevivente será mínimo.

Solução:

Sendo a função $P(T) = -1,42T^2 + 68T - 746$ para $20 \le T \le 30$, vamos calcular a derivada

$P'(T) = 2,84T + 68$, Em seguida, igualamos a derivada a zero para obter os números críticos de primeira ordem:

$P'(T) = -2,84T + 68$

$-2,84T + 68 = 0 \Rightarrow -2,84T = -68$

$T = \frac{-68}{-2,84} = 23,94$ e esse valor está no intervalo $20 \le T \le 30$

Calculando agora $P(T)$ para os pontos encontrados temos

$P(20) = -1,42(20)^2 + 68(20) - 746$

$P(20) = -568 + 1360 - 746 = 46$

$P(23{,}94) = -1,42(23,94)^2 + 68(23,94) - 746$

$P(23{,}94) = -813,835512 + 1627,92 - 746 \Rightarrow 68,084488 \Rightarrow 68$

$P(30) = -1,42(30)^2 + 68(30) - 746$

$P(30) = -1278 + 2040 - 746 \Rightarrow 16$

Logo podemos concluir que o número de sobreviventes é máximo para 23,94ºC e mínimo para 30ºC.

13) Uma pesquisa de opinião revela que x meses após anunciar sua candidatura, certo político terá o apoio de $S(x) = \frac{1}{29}(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1080)$ para $0 \le x \le 12$ eleitores. Se a eleição estiver marcada para novembro, qual o melhor mês para anunciar a candidatura? Se o político necessita de pelo menos 50% dos votos para vencer, quais são as chances de ser eleito?

Solução:

Sendo a função $S(x) = \frac{1}{29}(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1080)$ para $0 \le x \le 12$ calculemos a derivada

$S'(x) = \frac{1}{29}(-3x^2 + 12x + 63)$ e tirando -3 em evidência temos

$S'(x) = \frac{-3}{29}(x^2 + 4x + 21)$

$S'(x) = \frac{-3}{29}(x - 7)(x + 3) = 0$ logo, $x = 7$ e $x = -3$

Como $x = -3$ não está no intervalo, o único ponto crítico é $x = 7$. Como a popularidade do candidato será máxima 7 meses após a candidatura ser anunciada, ele deverá anunciar a candidatura em abril para ter o máximo possível de popularidade no dia da eleição. Agora, calculando $S(7)$ para vermos se ele será eleito e nessas condições o candidato provavelmente será eleito.

$$S(7) = \frac{1}{29}(-(7)^3 + 6(7)^2 + 63(7) + 1080) \Rightarrow S(7) = \frac{1}{29}(-343 + 294 + 441 + 1080) \Rightarrow \frac{1}{29}(1472) \Rightarrow 50,76\%$$

14) Uma estação de rádio faz o levantamento dos hábitos dos ouvintes entre 17 h e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as 17 h é $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$.

a) Em que instante, entre 17 h e meia-noite, existem mais ouvintes sintonizados na estação? Qual é a percentagem de ouvintes nesse momento?

b) Em que instante, entre 17 h e meia-noite, existem menos ouvintes sintonizados na estação? Qual é a percentagem de ouvintes nesse momento?

Solução:

O problema trata diretamente de máximo e mínimo respectivamente, e a função possui como intervalo $x = 0$ às 17 h e $x = 7$ à meia-noite, sendo assim, calculemos a derivada da função $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$.

$f'(x) = \frac{1}{8}(-6x^2 + 54x - 108)$ e tirando -6 em evidência, temos

$f'(x) = -\frac{6}{8}(x^2 - 9x + 18)$ agora simplificando 6 e 8 por 2, segue-se

$f'(x) = -\frac{3}{4}(x^2 - 9x + 18)$ e encontrando os seus pontos críticos, concluimos

$f'(x) = \frac{3}{4}(x-3)(x-6) \Rightarrow f'(x) = 0,$ onde concluimos

Podemos notar que $x = 3$ e $x = 6$ são os pontos críticos de $f'(x)$ sendo ambos os valores pertencem ao intervalo. O primeiro valor corresponde a um mínimo absoluto e o segundo valor corresponde ao máximo relativo, como nos mostra a tabela abaixo.

x	0	3	6	7
$f(x)$	30	13,125	16,5	15,125

a) 0 h após as 17 h, ou seja, às 17 h. A porcentagem de ouvintes nesse momento é de 30%.

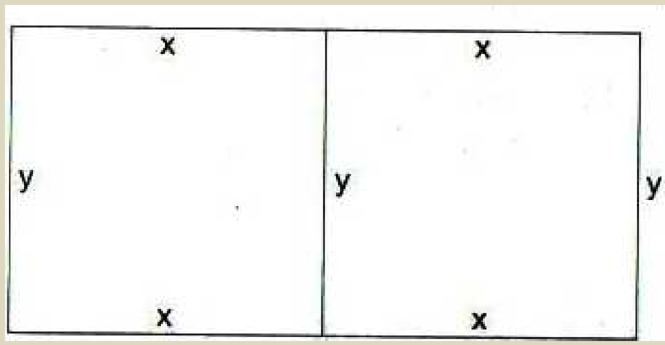
b) 3 h após as 17h, ou seja, às 20 h. A percentagem de ouvintes nesse momento é de 13,125%.

Questões Propostas de Otimização em Geometria

01) Um funil cônico tem raio r e altura h. se o volume do funil e V (constante), calcular a razão r/h de modo que sua área lateral seja mínima?

R: $\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

02) Um fazendeiro precisa construir dois currais lado a lado, com uma cerca comum, conforme mostra a figura. Se cada curral deve ter uma certa área A, qual o comprimento mínimo que a cerca deve ter.



R: $4\sqrt{3A}$

03) Um fabricante precisa produzir caixas de papelão, com tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de papelão para produzir caixas de volume V (dado)?

R: $\frac{\sqrt[3]{6V}}{3}, \sqrt[3]{6V}, \frac{\sqrt[3]{6V}}{2}$

04) Um fazendeiro tem 500 metros de uma cerca para envolver um terreno retangular. Um celeiro será usado como parte de um lado do campo. Prove que a área do terreno cercado será máxima quando o terreno for um quadrado.

R: x = 125 m

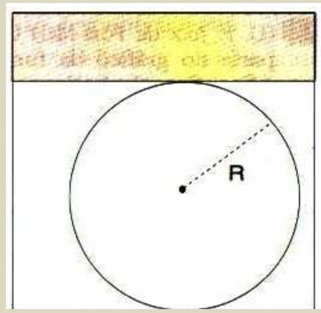
05) Um canal de drengem deve ser feito de tal forma que a secção transversal é um trapézio com os lados igualmente inclínados. Se os lados e a base, todos tiverem um comprimento de 5m, como escolher o ângulo $\theta\ (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, de forma que a área da secção transversal seja máxima?.

R: $\theta = \frac{\pi}{3}$

06) Uma pagina para impressão deve conter 300 cm^2 de área impressa, uma margem de 2 cm nas partes superiores e inferiores e uma margem de 1,5 cm nas laterais. Quais são as dimensões da pagina de menor área que preenche essas condições?

R: 18 cm e 24 cm

07) Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca -se um circulo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme figura ao abaixo.



a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do circulo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R? R: $A(R) = \pi R^2 + 16 - 8R$

b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possivel?

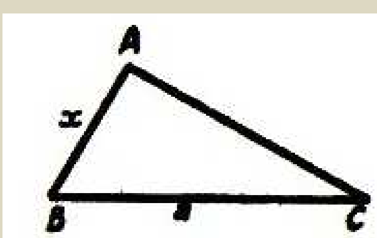
R: $\frac{4}{\pi}$.

08) Mostre que, entre todos os triângulos isósceles de igual perimetro, o de área máxima é o triângulo equilatero.

09) Determine as dimensões do cilindro reto de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

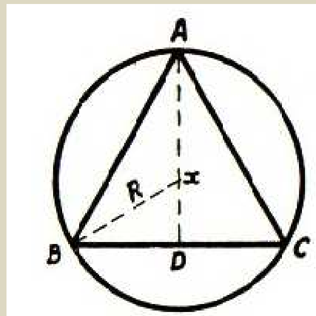
R: $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ e $h = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

10) Entre todos os triângulos retângulos de mesma hipotenusa, determinar o de área máxima. conforme figura ao ao lado.



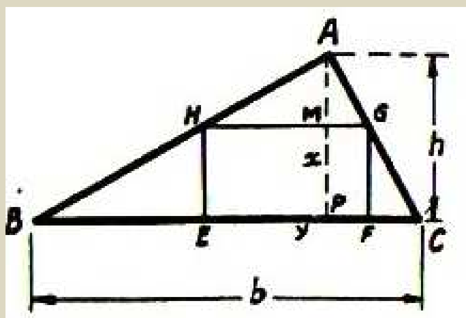
R: o triângulo é o retângulo isósceles de área $S = \frac{a^2}{4}$.

11) Entre todos os triângulos isósceles, inscritos em um círculo de raio dado, determinar o de área máxima. conforme figura ao lado.



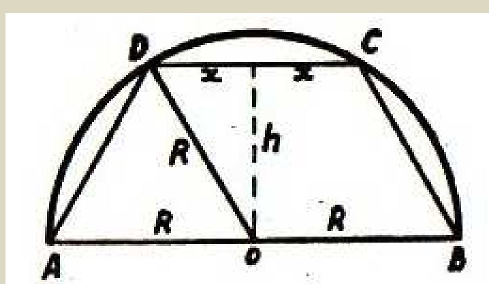
R: $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

12) Calcular o retângulo de área máxima, inscrito em um dado triangulo ABC conforme figura ao abaixo.



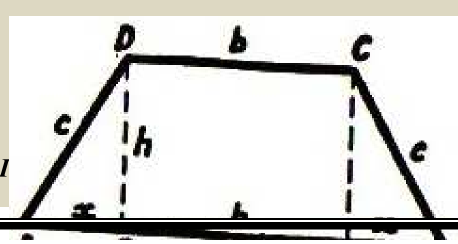
R: o retângulo de área $S = \frac{b \cdot h}{4}$.

13) Achar o trapézio isósceles, de área máxima, inscrito em um semicirculo dado, e tendo o diâmetro como base maior conforme figura ao abaixo.



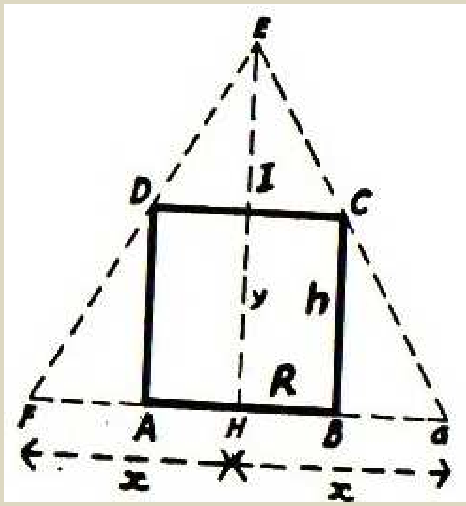
R: $x = \frac{R}{2}$ ou $x = R$.

14) Em um trapézio isósceles, são dados os lados não paralelos c e a base menor b. Determine o de área máxima conforme figura ao abaixo.



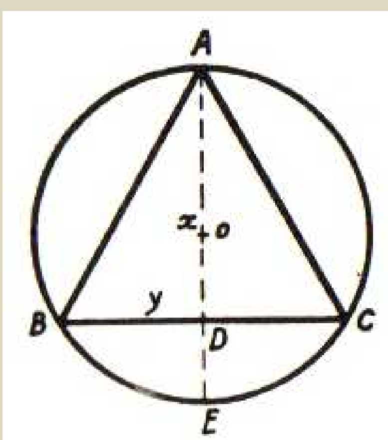
R: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8c^2}}{4}$.

15) Dado um cilindro circular reto, determinar o cone circunscrito de volume mínimo, conforme figura ao abaixo.



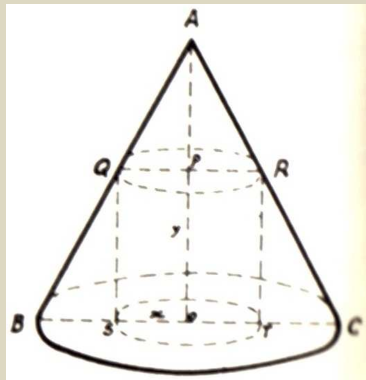
R: $V = \dfrac{9\pi R^2 h}{4}$.

16) Achar o cone de revolução de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio R, conforme figura ao abaixo.



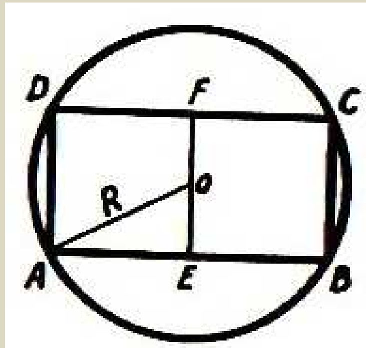
R: $x = \dfrac{4R}{3}$ e $y = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$.

17) Determinar o cilindro de área lateral máxima, inscrito em um cone dado, conforme figura ao abaixo.



R: $x = \dfrac{R}{2}$ e $y = \dfrac{h}{2}$.

18) Entre todos os cilindros inscritos em uma esfera de raio R, determinar o de volume máximo, conforme figura ao abaixo.



R: $V = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

19) Determine o ponto da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, mais proximo do ponto (0,1). R: $P_0(\pm\sqrt{5}, 1/2)$

20) Determine o ponto da curva $y^2 = 4x$, mais proximo do ponto (2,1). R: $P_0(1,2)$.

21) Ache o ponto P_0 situado sobre a hipérbole de equação $x \cdot y = 1$, que está mais proximo doa origem do sistema cartesiano. R: $P_0(1,1)$ ou $(-1,-1)$

22) Mostre que (2, 2) é o ponto da curva $y = x^3 - 3x$, que esta mais proximo do ponto (11, 1).

23) Em uma pirâmide dada, quadrangular regular, traça-se uma seção paralela à base e constrói-se, um prisma reto. Determinar a distância da seção à base de modo que o prisma inscrito tenha volume máximo, conforme figura ao abaixo.

Com elementos abaixo:

a = Lado da base do prisma.

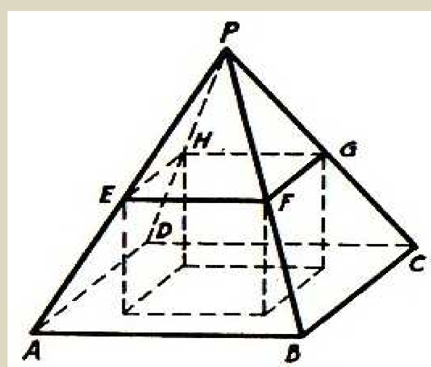
l = lado da base do pirâmide.

h = Altura da pirâmide.

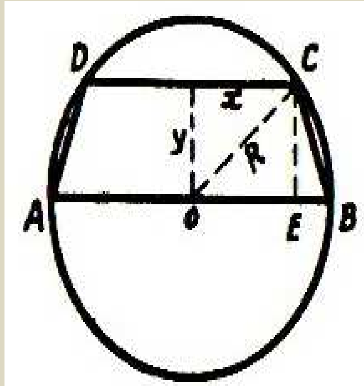
x = Distãnciada secção ao vértice.

V = Volume do prisma.

R: $x = \dfrac{2R}{3}$.

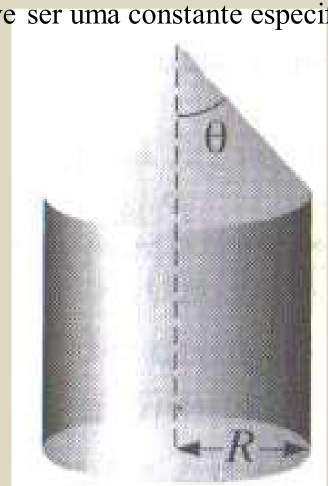


24) Inscrever em uma esfera de raio R um tronco de cone tendo a base sôbre um círculo máximo e cuja área lateral seja a maior posível, conforme figura ao ao lado.



R: $x = \frac{R}{3}$ ou $y = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

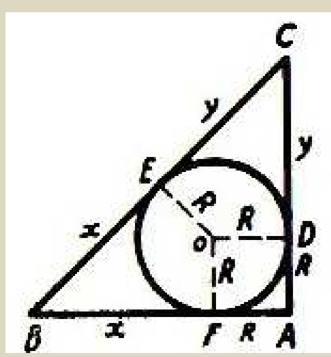
25) Um cilíndro circular de raio R é encimado por um cone. As extremidades do cilíndro são abertas e o volume total do sólido deve ser uma constante especifiva V, conforme figura ao abaixo.



a) Mostre que a área total S da superfície é dada por: R: $S = \frac{2V}{R} + \pi R^2 \cdot \left(\text{cossec}\ \theta - \frac{2}{3} \text{cotg}\ \theta \right)$.

b) Mostre que S é mínimizada quando θ é: R: $\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \cong 48{,}2^0$

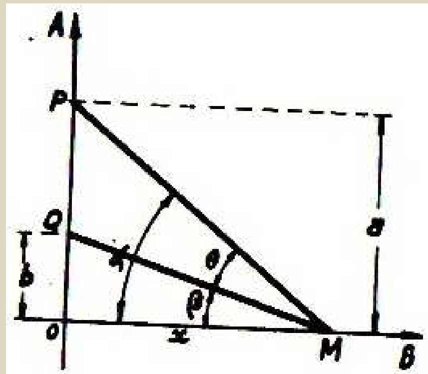
26) Dado um círculo de raio R, consideram-se todos os triângulos retângulos circunscritos ao mesmo. Determinar o que tem menor perímetro, conforme figura ao abaixo.



R: $x = R(1+\sqrt{2})$ ou $y = R(1+\sqrt{2})$.

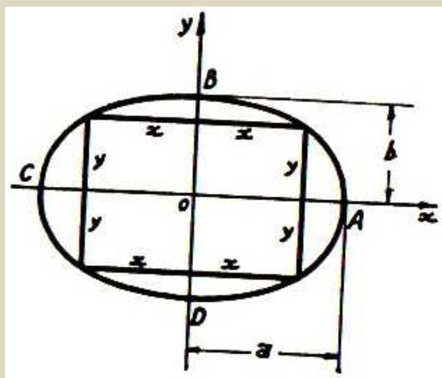
27) Dado um ângulo $A\hat{O}B$ sobre um dos lados, $\overline{OA}$, são fixados dois pontos P e Q. Achar sobre o outro lado $\overline{OB}$, um ponto M, tal que o segmento $\overline{PQ}$ seja visto sob o ângulo máximo, conforme figura ao abaixo.

R: $x = \sqrt{a \cdot b}$



28) Inscrever em uma elipse, de semi-eixos a e b, o retângulo de área máxima, conforme figura ao abaixo.

R: $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ e $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$



29) Mostre que o retângulo de área máxima inscrito núma circunferência de raio r é um quadrado.

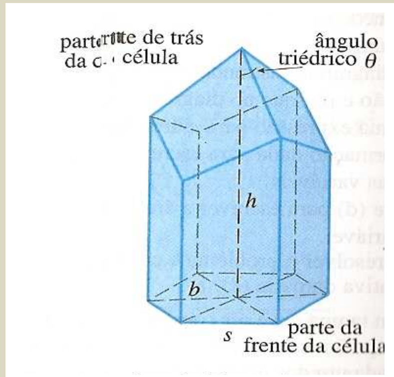
R: $x = y = r\sqrt{2}$

30) Um pedaço de barbante de comprimento L é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrado na forma de um triângulo equilatero e a outra na forma de uma circunferência. Como deve ser cortado o barbante para que a soma das áreas das figuras seja maior possivel.

R: $l_1 = \dfrac{\pi L\sqrt{3}}{(\pi\sqrt{3} + 9)}$ e $l_2 = \dfrac{9L}{(\pi\sqrt{3} + 9)}$

31) Em uma colméia, cada célula é um prisma hexagonal regular, aberto no extremo com um ângulo triédrico no outro extremo. Acredita-se que as abelhas de forma a minimizar a área superficial para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame dessas células mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria da célula, pode ser mostrado que a área superficial S é dado pela equação

$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \text{cotg}\,\theta + \left(3s^2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cossec}\,\theta$, onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura são constantes, conforme figura abaixo.



a) Calcule $\frac{dS}{d\theta}$. R:

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{3}{2}s^2 \cdot \text{cossec}\,\theta\left(\text{cossec}\,\theta - \sqrt{3}\cdot \text{cotg}\,\theta\right)$$

b) Que ângulo deveriam preferir as abelhas? R: $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

c) Determine a área superficial mínima da célula (em ternos de s e h). R: $6s\left[h + s/\left(2/\sqrt{2}\right)\right]$

Obs: Medidas reais do ângulo θ em colméias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais do que 2°.

32) Em um painel retangular de comprimento (60 + x) cm e de largura 80 cm, deseja-se reservar no canto seperior esquerdo um quadrado de lado x. Qual o valor de x para que a diferença entre a área do painel e a do quadado seja maior possivel? R: 40 cm

33) Um depósito aberto, de folha de lata, com fundo quadrado, deve ter capacidade para v litros. Em que dimensões deve ser feito o depósito para que em sua fabricação se gaste a menor quantidade possivel de lata? R: A altura deve ser duas vezes menor que o lado da base.

34) Qual dos cilindros de volume dado tem menor superfície total?

R: Aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base.

35) Inscrever numa esfera dada um cilindro de volume máximo.

R: A altura do cilindro e $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, o raio da base $R\sqrt{\frac{2}{3}}$, onde R é o raio da esfera dada.

36) Inscrever numa esfera dada um cilindro que tenha a maior superficie lateral possivel.

R: A altura do cilindro é $R\sqrt{2}$, onde R é o raio da esfera dada.

37) Inscrever numa esfera dada um cone de volume máximo.

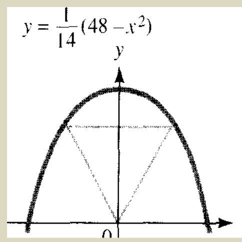
R: A altura do cone é $\frac{4}{3}R$, onde R é o raio da esfera dada.

38) Qual dos cones circunscritos em torno de uma esfera tem o menor volume?

R: Aquele cuja altura é duas vezes maior que o diâmetro da esfera.

39) Vários triângulos isósceles diferentes podem ser desenhados com o vértice na origem, a base paralela ao eixo x e acima desse eixo e os vértices da base sobre a curva $14y = 48 - x^2$. Determine a área do maior destes triângulos

R: $\frac{64}{7}$ unidades quadradas.



Questões Propostas de Otimização em Economia

01) Um estudo de eficiência realizado em uma fábrica durante o turno da manhã mostra que um operário que começa a trabalhar às 8h terá produzido, em média, $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades t horas mais tarde. Em que hora da manhã os operários são mais produtivos? R: às 11h.

02) Um fabricante estima que quando q unidades de uma certa mercadoria produzidas, o custo total é $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ reais. Para que nível de produção o custo médio $M(q) = C(q)/q$ é mínimo?
R: 5 unidades produzidas.

03) Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio com 900 metros de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3000 metros rio abaixo. O custo de estender um cabo no rio é R$ 5,00 o metro e o custo de estender um cabo em terra é R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais económico para o cabo? R: R$ 14.700 a 1200 m da usina da força.

04) Um empresário calcula que quando x unidades de um certo produto são fabricadas, a receita bruta associada ao produto é dada por $R(x) = 0{,}5x^2 + 3x - 2$ milhares de reais. Qual é a taxa de variação da receita com o nível de produção x quando 3 unidades estão sendo fabricadas? Para esse nível de produção, a receita aumenta ou diminui com o aumento da produção?
R: a receita aumenta com o aumento da produção.

05) Estima-se que daqui a x meses a população de um certo município será: $P(x) = x^2 + 20x + 8000$.
(a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 15 meses?
(b) Qual será a variação da população durante o 16° mês?

R: $\begin{cases} \text{a) 50 habitantes por mês} \\ \text{b) 51 habitantes} \end{cases}$

06) O produto interno bruto (PIB) de um certo país é dado por $N(t) = t^2 + 5t + 106$ bilhões de dólares, onde t é o número de anos após 1990.
(a) Qual foi a taxa de variação do PIB em 1998?
(b) Qual foi a taxa de variação percentual do PIB em 1998?

R: $\begin{cases} \text{a) 21 bilhões de dólares por ano} \\ \text{b) 10\% ao ano} \end{cases}$

07) Numa industria, custo de montagem é diretamente proporcional ao número de máquinas ultilizadas e o custo de operação é inversamente proporcional ao número de máquinas ultilizadas. Quando é que o custo total é mínimo?

(Sugestão: O custo total c(x) é dado pela soma do custo de montagem (k_1, x), com o custo de operação $\left(\frac{k_2}{x}\right)$.

R: Custo total mínimo se o número de máquinas for $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$, ou seja, quando o custo de montagem for igual ao custo de operação.

08) Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que um operário que chega ao trabalho às 8 h terá produzido $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$ unidades t horas mais tarde.

(a) Calcule a taxa de produção dos operários às 11 h.

(b) Qual é a taxa de variação da taxa de produção dos operários às 11 h?

(c) Use os métodos do cálculo para estimar a variação da taxa de produção dos operários entre 11h e 11h10min.

(d) Calcule a variação real da taxa de produção dos operários entre 11h e 11h10min.

R: (a) 33 unidades por hora (c) -1 unidade por hora

(b) -6 unidades por hora ao quadrado (d) -1,08 unidade por hora

09) A produção de certa fábrica é $Q = 2x^3 + x^2y + y^3$ unidades, onde x é o número de homens-horas de trabalho especializado e y número de homens-horas de trabalho não-especializado. No momento, a mão-de-obra disponível é constituída por 30 homens-horas de trabalho especializado e 20 homens-horas de trabalho não-especializado. Use os métodos do cálculo para estimar a variação de mão-de-obra não-especializada y necessária para compensar um aumento de 1 homem-hora da mão-de-obra especializada x, de modo que a produção não seja alterada.

R: diminuir 3,14 homens-horas a mão-de-obra não-especializada.

10) Uma fábrica produz x milhares de unidades mensais de um determinado artigo. Se o custo de produção é dado por $C(x) = 2x^3 + 6x^2 + 18x + 60$ e o valor obtído na venda é dado por $V(x) = 60x - 12x^2$, determinar o número ótimo de unidades mensais que maximiza o lucro?

R: 1000 unidades

11) A receita obtida com a produção de x unidades de certa mercadoria é dada por $R(x) = \dfrac{63x - x^2}{x^2 + 63}$ milhões de reais. Qual é a produção que proporciona a máxima receita? Qual é esta receita?

R: Produção máxima 7 unidades; Receita máxima 3,5 (milhões de reais).

12) O custo total em reais para fabricar q unidades de um certo produto é $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Se o nível atual de produção é 40 unidades, estime a variação do custo total se 40,5 unidades forem produzidas .R: ΔC = R$ 122,50

13) Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R$ 380.000,00 para criar os dois bois e continuará gastando R$ 2,00por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R$ 18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deverão o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?
R: 67 dias

14) A produção diária de uma certa fábrica é $Q(L) = 900L^{\frac{1}{3}}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada, medida em homens-horas. No momento, a fábrica utiliza 1000 homens-horas. Use os métodos do cálculo para estimar o número de homens-horas adicionais necessários para aumentar de 15 unidades a produção diária. R: 5 homens-horas.

15) O custo para produzir x unidades de um certo produto é $C(x) = x^2/3 + 4x + 53$ reais e o número de unidades produzidas em t horas de trabalho é $x(t) = 0{,}2t^2 + 0{,}03t$ unidades. Qual é a taxa de variação do custo com o tempo após 4 horas de trabalho? R: R$ 10,13

16) Um empresário calcula que quando x unidades de um certo produto são fabricadas, a receita bruta associada ao produto é dada por $R(x) = 0{,}5x^2 + 3x - 2$ milhares de reais. Qual é a taxa de variação da receita com o nível de produção x quando 3 unidades estão sendo fabricadas? Para esse nível de produção, a receita aumenta ou diminui com o aumento da produção?
R: R$ 6.000,00 a receita aumenta com o aumento da produção.

17) A demanda de um certo produto é $D(p) = -200p + 12.000$ unidades por mês quando o preço é p reais a unidade.
(a) Expresse o gasto total dos consumidores com o produto em função de p e desenhe o gráfico associado.
(b) Use os métodos do cálculo para determinar o preço para o qual o gasto total dos consumidores é máximo.

R: $\begin{cases} E(p) = p(-200p + 12.000) \\ b)\ p = 30{,}00\ E(30) = 180.000{,}00 \end{cases}$

18) Estima-se que daqui a t anos, a circulação de um jornal será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$.
(a) Encontre uma expressão para a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a t anos.
(b) Qual será a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a 5 anos? Nessa ocasião a circulação está aumentando ou diminuindo?

(c) Qual será a variação da circulação durante o sexto ano?

R: $\{$a) $C'(t) = 200t + 400$ b) $C'(5) = 1400$; aumentando c) 1.500 exemplares

19) Um estudo realizado em certa fábrica mostra que os operários do turno da manhã, que chegam para trabalhar às 8 h, terão montado em média $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ receptores de rádio *x* horas mais tarde.

(a) Escreva uma expressão para a o número de receptores por hora que os operários estarão montando x horas depois de começarem a trabalhar.

(b) Quantos receptores por hora os operários estarão montando às 9 h?

(c) Quantos receptores os operários estarão montando entre 9 h e 10 h?

R: $\{$a) $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15$ b) $f'(1) = 24$; 24 receptores de rádio/h c) 26 receptores de rádio

20) Os registros mostram que *x* anos depois de 1994, o imposto predial médio que incidia sobre um apartamento de três quartos em um certo município era $T(x) = 20x^2 + 40x + 600$ reais.

(a) Qual era a taxa de aumento do imposto predial no início do ano 2000?

(b) Qual era a taxa de aumento percentual do imposto predial no início do ano 2000?

R: $\{$a) $T'(6) =$ R\$ 280/ano b) 17,95% /ano

21) Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de certa fábrica revela que um operário que chega ao trabalho às oito horas produz, em média, $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades nas t horas seguintes:

(a) Calcule a produtividade dos operários às nove horas, em unidades por hora.

(b) Qual a taxa de variação da produtividade dos operários às nove horas?

(c) Use os métodos do cálculo para estimar a variação da produtividade dos operários entre 9h e 9h 6 min.

(d) Calcule a variação real da produtividade dos operários entre 9h e 9h 6min.

R: $\begin{cases} \text{a) 27 unidades/h.} & \text{c) A produção aumenta de aproximadamente 1,2 unidades/h} \\ \text{b) 12 unidades/h}^2. & \text{d) A produção aumenta de 1,17 unidades/h.} \end{cases}$

22) Em certa fábrica, aproximadamente $q(t) = t^2 + 50t$ unidades são produzidas durante as primeiras t horas de uma jornada de trabalho e o custo total para produzir q unidades é $C(q) = 0{,}1q^2 + 10q + 400$ reais. Determine a taxa com que o custo de produção está aumentando duas horas após iniciada a jornada de trabalho. R: O custo está aumentando a razão de R\$ 1.663,20 por hora.

23) Uma fábrica de produtos de plástico recebeu uma encomenda para fabricar 8.000 pranchas de isopor. A firma possui 10 máquinas, cada uma das quais é capaz de produzir 30 pranchas por hora.

O custo de programar as máquinas para fabricar as pranchas é de R$ 20,00 por máquina. As máquinas são automáticas e necessitam apenas de um supervisor que ganha R$ 15,00 por hora:

(a) Quantas máquinas devem ser usadas para minimizar o custo de produção?

(b) Quanto ganhará o supervisor pelo trabalho se o número ideal de máquinas for usado?

(c) Qual será o custo para programar as máquinas?

R: $\{$a) 10 b) R$ 400,00 c) R$ 200,00

24) Uma loja pretende vender 800 vidros de perfume este ano. Cada vidro de perfume custa R$ 20,00, o custo da encomenda é R$ 10,00 e o custo para manter o perfume em estoque é 40 centavos por vidro por ano. O perfume é consumido com a mesma rapidez durante o ano inteiro e as encomendas são recebidas no instante em que os vidros da encomenda anterior se esgotam.

(a) Quantos vidros a loja deve encomendar de cada vez para que o custo seja mínimo?

(b) Com que frequência a loja deve fazer as encomendas do perfume?

R: $\{$a) 200 garrafas b) a cada três meses

25) Quando o preço unitário de um certo produto é p reais, a demanda é de x centenas de unidades, onde $x^2 + 3px + p^2 = 79$. Qual é a taxa de variação da demanda com o tempo se o preço unitário é R$ 5,00 e está diminuindo à razão de 30 centavos por mês? R: 0,2714 unidades/mês.

26) Um time de futebol joga em um estádio com capacidade para 55.000 espectadores. Quando o preço do ingresso é R$ 10,00, a média de público é 27.000 espectadores. Quando o preço é reduzido para R$ 8,00, a média aumenta para 33.000. Suponha que a função demanda seja linear, qual é o preço que maximiza a receita? R: R$ 9,50.

27) receita anual bruta de certa empresa é $f(t) = \sqrt{10t^2 + t + 236}$ milhares de reais t anos após a fundação da empresa, em janeiro de 1998.

(a) Qual a taxa de aumento da receita anual bruta da empresa em janeiro de 2003?

(b) Qual a taxa de aumento percentual da receita anual bruta da empresa em janeiro de 2003?

R: a) R$ 2.280,00 por ano e b) 10,3% ao ano.

28) Em certa fábrica, o custo total para fabricar q unidades durante uma jornada diária de trabalho é $C(q) = 0{,}2q^2 + q + 900$ reais. Estudos anteriores mostram que aproximadamente $q(t) = t^2 + 100t$ unidades são fabricadas durante as primeiras t horas de uma jornada de trabalho. Calcule a taxa de variação do custo total de fabricação com o tempo 1 hora após o início de uma jornada de trabalho.

R: R$ 4.222,80 por hora.

29) Quando um determinado modelo de liquidificador é vendido a p reais a unidade, são vendidos D(p) = 8000/p liquidificadores por mês. Calcula-se que daqui a t meses o preço dos liquidificadores será $p(t) = 0{,}04\, t^{\frac{3}{2}} + 15$ reais. Calcule a taxa de variação da demanda mensal de liquidificadores com o tempo daqui a 25 meses. A demanda estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

R: A demanda estará de seis liquidificadores por mês.

30) Um importador de café do Brasil estima que os consumidores locais comprarão $D(p) = 4374/p^2$ libras de café por semana quando o preço for p dólares por libra. Calcula-se também que daqui a t semanas, o preço do café brasileiro será $p(t) = 0{,}02t^2 + 0{,}1t + 6$ dólares por libra. Qual será a taxa de variação da demanda semanal de café com o tempo daqui a 10 semanas? A demanda está aumentando ou diminuindo nessa ocasião? R: - 6 libra por semana

31) Quando um certo produto é vendido por p reais a unidade, os consumidores compram D(p) = 40.000/p unidades do produto por mês. Calcula-se que daqui a t meses, o preço do produto será $p(t) = 0{,}4\, t^{\frac{3}{2}} + 6{,}8$ reais por unidade. Qual será a taxa de variação percentual da demanda mensal do produto com o tempo daqui a 4 meses? R: A demanda estará diminuindo de 12 % ao mês.

32) Calcula-se que daqui a t meses o preço médio unitário dos bens de consumo em um certo setor da economia será $P(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300$ reais.

(a) Qual será a taxa de variação com o tempo do preço unitário daqui a 5 meses?

(b) Qual será a taxa de variação da taxa de variação com o tempo do preço unitário daqui a 5 meses?

(c) Use os métodos do cálculo para estimar a variação da taxa de aumento dos preços durante a primeira quinzena do sexto mês.

(d) Calcule a variação real da taxa de aumento dos preços durante a primeira quinzena do sexto mês.

R: a) 195; b) –R$ 16,00 por mês; c) –R$ 8,00 e -8,75.

33) Um modelo para o índice de preço de alimento (o preço de uma cesta básica) entre 1984 3 1994 é dado pela função $I(t) = 0{,}00009045t^5 + 0{,}001438t^4 - 0{,}06561t^3 + 0{,}4598t^2 - 0{,}6270t + 99{,}33$, onde t é medido em anos desde a metade do ano de 1984; asssim $0 \le t \le 10$, e $I(t)$ é medido em dólares em 1987 e reduzido em uma escala tal que $I(3) = 100$. Estime os períodos nos quais a comida foi mais barata e mais cara durante o período de 1984 – 1994.

R: Mais barato, t = 10; mais caro $t \approx 5{,}1309$.

34) Um fabricante vende 1000 aparelhos de televisão por semana, a R$ 450,00 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada abatimento de R$ 10,00, oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta em 100 por semana.

a) Encontre a função demanda. R: $p(x) = 550 - \frac{x}{10}$.

b) Qual deve ser o abatimento oferecido a fim de maximar o rendimento? R: R$ 175,00.

c) Se a função custo semanal for de $C(x) = 68.000 + 150x$, como deve ser estabelecido o montante do abatimento a fim de maximar o lucro? R: R$ 100,00.

35) Gerentes de lojas querem uma política de estoque ótima. Excesso de estoque resulta em armazenagem excessiva e custos de estoque, enquanto que um estoque pegueno significa adicionar custo à reorganização e entrega. Um gerente de um supermercado estima que um total de 800 pacotes de sopa serão vendidos a uma taxa constante durante o próximo ano e o custo de estoque será de R$ 4,00, para armazenar um pacote por ano. Se o gerente fizer vários pedidos por ano, cada um consistindo de x pacotes, então ele terá uma medida de 1/2x pacotes em estoque no ano e assim os custos de armazenagem para o ano são 4(1/2x) = 2x dolares. Ele também estima que o custo de manuseio para cada entrega é de R$ 100,00. Qual é a quantidade ótima a ser feita em cada pedido de tal forma a minimizar o custo total? R: 200.

36) Um time de beisebol joga em um estádio com uma capacidade para 55 mil espectadores. Cobrando R$ 10,00 a entrada, a freguencia média era de 27 mil espectadores. Quando o preço das entradas foi reduzido para R$ 8,00, a freguencia média subiu para 33 mil espectadores.

a) Encontre a função de demanda supondo que ela é linear. R: $p(x) = 19 - \frac{x}{3000}$

b) Qual deve ser o preço da entrada para maximizar o rendimento? R: R$ 9,50.

37) Uma quadra de esportes tem capacidade para 15 mil espectadores sentados. Com o preço do bilhete a R$ 12,00, a freguência média em um jogo é de 11 mil espectadores. Uma pesguisa de mercado indica que, para cada real com redução no preço do bilhete, a média da freguencia aumenta em 1000 espectadores. Como deve ser estabelecido o preço do bilhete para maximar o rendimento da venda de entradas? R: R$ 11,50.

38) Um restaurante cobra R$ 9,00 por uma lasanha e 48 pessoas, em média, pedem o prato por dia. Quando o preço do prato é aumentado para R$ 12,00, o número de fregueses que pedem o prato diminui para 42.

a) Suponha que a demanda q seja uma função linear do preço p, escreva uma expressão para q em função de p.

R: $q = -2p + 66$

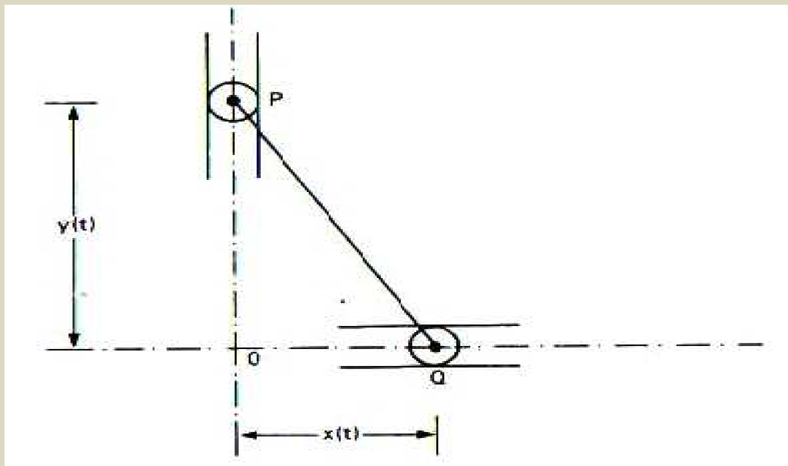
b) Que preço o restaurante deve cobrar para maximizar a receita com o prato de lasanha?

R: R$ 16,50

c) Suponha que o custo do prato de lasanha para o restaurante seja R$ 4,00. Que preço o restaurante deve cobrar para maximizar o lucro? R: R$ 18,50.

Questões Propostas de Otimização em Ciências Naturais

01) Cada extremidade de uma haste $\overline{PQ}$ de comprimento 8 u.c é forçada a mover-se em uma quia, como indica na figura abaixo. Se ao ponto Q se imprime um movimento dado por $x(t) = 4 \cdot \operatorname{sen} 3t$, a velocidade de P em qualquer instante t é:



R: $\dfrac{-6 \cdot \operatorname{sen} 6t}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 3t}}$

02) Dois automóveis deixam um cruzamento ao mesmo tempo. O primeiro viaja para leste com uma velocidade constante de 60 quilômetros por hora, enquanto o segundo viaja para o norte com uma velocidade constante de 80 quilômetros por hora. Encontre uma expressão para a taxa de variação com o tempo da distância entre os automóveis.

R: $D'(t) = 100$ hm/h .

03) Calcula-se que daqui a *x* meses a população de certa cidade será $P(x) = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + 5000$.

(a) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 9 meses?

(b) Qual será a taxa de variação percentual da população com o tempo daqui a 9 meses?

R: $\begin{cases} P'(x) = 2 + 6x^{1/2} \\ \text{a) } P'(9) = 20 \text{ habitantes por mês} \\ \text{b) } 0{,}39\ \% \end{cases}$

04) A posição de determinada partícula, representada por s(t), no instante t que está se movimentando em linha reta. Determine:

- A velocidade e a aceleração da partícula.
- Todos os instantes no intervalo dado em que a partícula está estacionária.

(1) $s(t) = t^2 - 2t + 6$ para $0 \le t \le 2$. R: $\begin{cases} v(t) = 2t - 2 \\ a)\ a(t) = 2 \\ b)\ t = 1 \end{cases}$

(2) $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 25$ para $0 \le t \le 6$. R: $\begin{cases} v(t) = 3t^2 - 18t + 15 \\ a)\ a(t) = 6t - 18 \\ b)\ t = 1 \text{ ou } t = 5 \end{cases}$

(3) $s(t) = 2t^4 + 3t^2 - 36t + 40$ para $0 \le t \le 3$. R: $\begin{cases} v(t) = 8t^3 + 6t - 36 \\ a)\ a(t) = 24t^2 + 6 \\ b)\ t = 1{,}5 \end{cases}$

05) Deixa-se cair uma pedra de uma altura de 43 metros.

(a) Quanto tempo a pedra leva para atingir o solo?

(b) Qual é a velocidade no momento do impacto?

R: $\begin{cases} H(t) = -4{,}9t^2 + 43 \Rightarrow H'(t) = -9{,}8t \\ a)\ H(t) = 0;\ t = 3/s \\ b)\ H(3) = -29 \text{ m/s} \end{cases}$

06) A população de uma colônia de bactérias é dada por $P(t) = \dfrac{24t + 10}{t^2 + 1}$ mil t horas após a introdução de uma toxina. Use os métodos do cálculo para determinar o instante em que a população é máxima e determine qual é a população nesse instante.

R: t = 0,67 h (40 min); 18.000 bactérias.

07) De acordo com a fórmula de Debye de físico-química, a polarização P de um gás satisfaz à equação $P = \dfrac{4}{3}\pi N\left(\dfrac{\mu^2}{3kT}\right)$ onde N, μ e k são constantes positivas e T é a temperatura do gás. Determine a taxa de variação de P com a temperatura.

R: $\dfrac{dP}{dT} = -\dfrac{4\pi\mu^2 N}{9KT^2}$

08) Calcula-se que daqui a t anos, a população de certo município será $P(t) = 20 - 6/(t + 1)$ mil pessoas.

(a) Escreva uma expressão para a taxa com que a população estará variando daqui a t anos.

(b) Qual será a taxa de aumento da população daqui a 1 ano?

(c) Qual será o aumento da população durante o segundo ano?

(d) Qual será a taxa de aumento da população daqui a 9 anos?

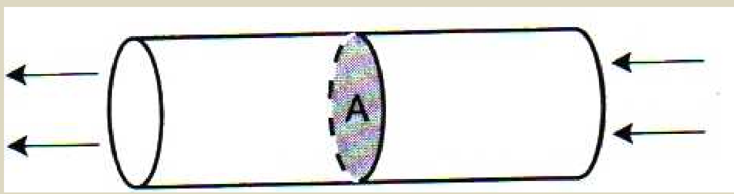
(e) Que acontecerá com a taxa de aumento da população ao longo prazo?

R: $\begin{cases} \text{a) } P'(t) = 6/(t+1)^2 \text{ mil moradores por ano} \quad \text{b) 1.500 moradores por ano} \\ \text{c) 1.000 moradores} \quad \text{d) 60 por ano} \quad \text{e) A taxa de aumento tenderá a zero} \end{cases}$

09) Quando um resistor de R ohms é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, uma corrente de I ampères atravessa o circuito e dissipa uma potência de P watts, com $I = \dfrac{E}{r + R}$ e $P = I^2 \cdot R$. Supondo que r seja constante, qual o valor de R para o qual a potência dissipada é máxima?

R: A potência dissipada é máxima qundo R = r.

10) Os biólogos definem o fluxo F de ar na traquéia através de expressão F = SA, onde S é a velocidade do ar e A é a área da seção reta da traquéia. $A = \pi r^2$.



(a) Suponha que a seção reta da traquéia seja circular. Use a expressão para a velocidade do ar na dada pela equação $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, traquéia durante um acesso de tosse para indicar o fluxo F em função do raio r.

(b) Determine o raio r para o qual o fluxo é máximo.

R: a) $F(r) = a\pi r^4(r_0 - r)$ b) $r = \dfrac{4}{5}r_0$

11) Se desprezarmos a resistência do ar, o jato de água emitido por uma mangueira chega a uma altura $y = -16(1 + m^2)\left(\dfrac{x}{v}\right)^2 - mx$, acima de um ponto situado a 4,8 metros da boca da mangueira, onde m é a inclinação da mangueira e v é a velocidade com a água deixa a mangueira. Suponha que v é constante.

(a) Se m for também constante, determine a distância x para a qual a água atinge a altura máxima.

(b) Se m for variável, determine a inclinação para a qual um bombeiro conseguirá atingir o fogo da maior distância possível.

(c) Suponha que um bombeiro se encontre a uma distância $x = x_0$ metros da base de um edifício. Se m for variável, qual é o ponto mais alto do edifício que o bombeiro consegue atingir com a água lançada pela mangueira?

R:

$$\begin{cases} \text{a) } x = \dfrac{v^2 \cdot m}{32 \cdot (1+m^2)}; \ \text{b) } m = \dfrac{v^2}{32 \cdot x} \ \text{ e c) } m = \dfrac{v^2}{32 \cdot x_0} \end{cases}$$

12) Demonstra-se em físico-química que a pressão P de um gás está relacionada ao volume V e a temperatura T pela equação de van der Waals $\left(P + \dfrac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$ onde a, b, n e R são constantes. A temperatura crítica T_c do gás é a maior temperatura na qual as fases gasosa e líquida podem existir como fases separadas.

(a) Para $T = T_c$, a pressão P é uma função apenas do volume, P(V). Escreva a função P(V).

(b) O volume crítico V_c é o volume para o qual $P'(V_c) = 0$ e $P''(V_c) = 0$. Mostre que $V_c = 3b$.

(c) Determine a pressão crítica $P_c = P(V_c)$ e T_c em termos de a, b, n e R.

R: $\begin{cases} \text{a) } P(V) = \dfrac{nRT_c}{V-b} - \dfrac{a}{V^2} \ \text{ b) demonstração c) } T_c = \dfrac{8a}{27nRb} \end{cases}$

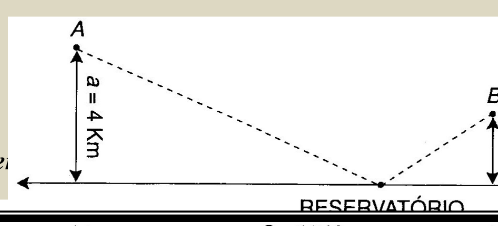
13) Uma doença está se espalhando de tal forma que após t semanas, o número de pessoas infectadas é dado por $N(t) = 5.175 - t^3(t-8)$, $0 \le t \le 8$.

(a) Qual a taxa de disseminação da epidemia após 3 semanas?

(b) Suponha que as autoridades declarem que uma doença atingiu proporções epidêmicas quando a taxa de disseminação percentual é maior ou igual a 25%. Durante que período de tempo esse critério é satisfeito no caso em questão?

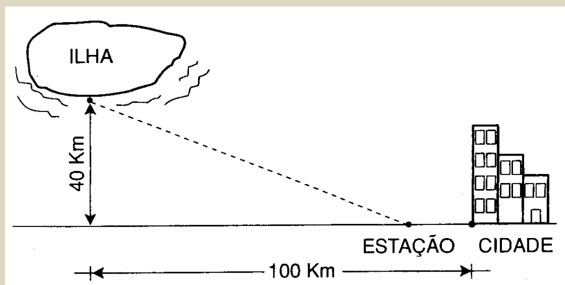
R: $\begin{cases} \text{a) } N'(3) = 108 \text{ pessoas por ano} \\ \text{b) A doença não atinge proporção epidêmica no período de 8 semanas para o qual a equação} \\ \text{é valida.} \end{cases}$

14) Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura abaixo esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encantamento retilinéo 1 , já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservátorio de modo que a metragem de cano a ser ultilizada seja mínima?



R: 8 km do encontro da canalização l com a perpendicular que passa por A.

15) Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura abaixo. Se a barca tem uma velocidade de 18 km/h e os carros tem uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?
R: 84,56 km da cidade



16) Sabe-se que uma quantidade de água que ocupa um volume de 1 litro a 0°C ocupará $V(T) = -6{,}8 \times 10^{-8}T^3 \times 8{,}5 \times 10^{-6}T^2 - 6{,}4 \times 10^{-5}T + 1$ litros quando a temperatura for de T°C, para $0 \leq T \leq 30$. Use uma calculadora gráfica para plotar V(T) para $0 \leq T \leq 10$. A densidade da água é máxima quando V(T) é mínimo. Em que temperatura isso acontece? Qual é o volume mínimo?
R: V(t) é mínimo para T = 3,95; V(3,95) = 0,999876.

17) Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja l o alcance do canhão, dado por $l = \frac{2v^2}{g} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo? R: $\frac{\pi}{4}$.

18) Um estudo ambiental realizado em certo município revela que daqui a t anos a concentração de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por milhão. Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono nos próximos 6 meses? R: 0,05 partes por milhão.

19) Estima-se que daqui a t anos a população de um certo município será $p(t) = 20 - 6/(t - 1)$ habitantes. Um estudo ambiental revela que a concentração média de monóxido de carbono no ar é $c(p) = 0{,}5\sqrt{p^2 + p + 58}$ pares por milhão, onde p é a população em milhares de habitantes. Determine a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono com o tempo daqui a 2 anos.

R: 0,31 partes por milhão por ano.

20) Quando um peixe nada rio acima com velocidade v contra uma correnteza constante v_w, a energia gasta pelo animal para percorrer uma certa distância é dada por uma função do tipo E(v) = $\frac{Cv^k}{v - v_w}$ onde C é uma constante positiva e k > 2 é um número que depende da espécie considerada.

(a) Mostre que E(v) possui um e apenas um ponto crítico. Esse ponto corresponde a um máximo ou a um mínimo?

(b) O número crítico do item (a) depende de k. Seja F(k) este número crítico. Plote a função F(k). O que se pode dizer a respeito de F(k) para valores muito grandes de k?

R: a) E(v) é mínima no ponto $v = \frac{v_w}{k-1}$ e b) F(k) = $\frac{v_w \cdot k}{k-1}$, k > 2.

21) Em um artigo clássico, E. Heinz mostrou que a concentração y(t) de um remédio administrado por injeção intramuscular é dada por y(t) = $\frac{c}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$ $t \geq 0$, onde t é o número de horas após a injeção e a, b e, c são constantes positivas, com b > a:

(a) Em que instante a concentração é máxima? O que acontece com a concentração "ao longo prazo"?

(b) Faça um gráfico de y(t).

R: a) $t = \frac{1}{a-b} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$,a concentração tende a zero ao longo prazo, ou seja, para grandes valores de t.

22) O efeito da temperatura sobre a velocidade de uma reação química é expresso pela equação de Arrhenius $K = A \cdot e^{-E_0/R \cdot T}$ onde k é a velocidade da reação, T é a temperatura absoluta e R é a constante dos gases perfeitos. Os parâmetros A e E_0 dependem da reação considerada, mas não da temperatura. Sejam k_1 e k_2 as velocidades da reação nas temperaturas T_1 e T_2. Escreva uma expressão para In (k_1/k_2) em função de E_0, R, T_1, e T_2.R: $\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \frac{E_0}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$

23) A capacidade aeróbica de um indivíduo de x anos de idade é dada por A(x) = 110 $\frac{(\ln x - 2)}{x}$ para $x \geq 10$. Em que idade a capacidade aeróbica é máxima? R: 20,09 anos

24) A população P(t) de muitas espécies de animais e plantas aumenta (ou diminui) a uma taxa dada por $\frac{dP}{dt} = A\left(1 - \frac{P}{B}\right)P - H$ onde A, B e H são constantes positivas: A é a taxa de crescimento natural,

B é a capacidade de sustento e H é a taxa de coleta. Suponha que a população inicial $P_0 = P(0)$ seja um número positivo.

(a) Mostre que a taxa de aumento da população é máxima para P(t) = 0,5B, independentemente dos valores das outras constantes.

(b) Mostre que se H > AB/4, dP/dt < 0 e portanto a população necessariamente diminui. Isto significa que a população tende a desaparecer?

$$\text{R: } \begin{cases} \text{a) } \dfrac{d^2P}{dt^2} = 0 \text{ para } P = \dfrac{B}{2} \qquad \text{b)} \dfrac{dP}{dt^2} < \dfrac{A}{B}\left[-\left(P - \dfrac{B}{2} \right)^2 \right] < 0 \end{cases}$$

25) Um certo modelo sugere que a produção de um tipo de glóbulos brancos (granulócitos) pode ser descrita por uma função da forma $p(x) = \dfrac{Ax}{B + x^m}$ onde A e B são constantes positivas, o expoente m é positivo e x é o número de células presentes.

(a) Calcule a taxa de produção de granulócitos, p'(x).

(b) Calcule p"(x) e determine todos os valores de x para os quais p"(x) = 0 (a resposta deve ser dada em função de m).

$$\text{R: } \begin{cases} \text{a) } p'(x) = \dfrac{AB + Ax^m(1-m)}{(B + x^m)^2} \\ \text{b) } p''(x) = \dfrac{mAx^{m-1}\left[-B - Bm - (1-m)x^m \right]}{(B + x^m)^3} \Rightarrow \; p''(x) = 0, \text{ para } x = \sqrt[m]{\dfrac{B(m+1)}{m-1}} \end{cases}$$

26) A porcentagem de ovos de bicho da maçã que chocam a uma dada temperatura (em graus Celsius) é dada por $H(T) = -0{,}53T^2 + 25T - 209$ para $15 \le T \le 30$. Faça um gráfico da função H(T). Para que temperatura T ($15 \le T \le 30$) a porcentagem de ovos chocados é máxima? Qual é esta porcentagem máxima?

R: A porcentagem é máxima a 23,58 ºC, temperatura na qual atinge o valor de 85,81%.

27) A concentração de um remédio t horas após ter sido injetado no braço de um paciente é dada por $C(t) = \dfrac{0{,}15t}{t^2 + 0{,}81}$. Trace a função concentração. Para que valor de t a concentração é máxima?

R: A concentração máxima ocorre quando t = 0,9 h.

28) Um atuário calcula a probabilidade de que um indivíduo de certa população morre com x anos de idade usando a expressão $P(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ onde λ é um parâmetro tal que $0 < \lambda < e$:

(a) Determine o valor máximo de P(x) para um dado valor de λ.

(b) Trace P(x).

R: $P\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{e}$

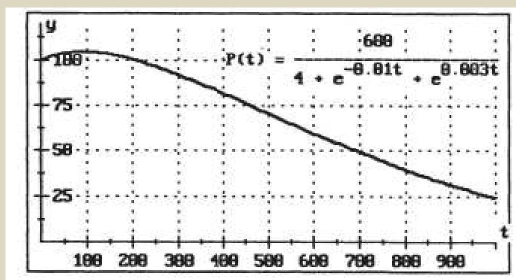
29) Um pesquisador estima que t horas após uma toxina ser introduzida, a população (em milhares de espécimes) de uma colônia de bactérias será $P(t) = \dfrac{600}{4 + e^{-0,01t} + e^{0,003t}}$.

(a) Qual é a população no instante em que a toxina é introduzida (t = 0)? O que acontece com a população (“ao longo prazo")?

(b) Em que instante a população é máxima? Qual é a população máxima da colônia?

(c) Faça um gráfico de P(t).

R: a) t = 0; b) 109,43 e c) o gráfico.



30) Uma doença contagiosa se dissemina em uma comunidade de tal forma que t semanas após o primeiro surto, o número de pessoas infectadas é dado por uma função da forma $f(t) = A/(1 + Ce^{-kt})$, onde A é o número de pessoas suscetíveis. Mostre que a taxa de disseminação da doença é máxima quando metade das pessoas suscetíveis está infectada. R: $\frac{A}{2}$

31) Um objeto com peso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a grandeza da força é representada pela equação $F = \dfrac{\mu \cdot W}{\mu \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$, onde μ é uma constante chamada coeficiente e atrito e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg}\theta = \mu$.

32) Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela formula $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0095043T^2 - 0,0000679T^3$. Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima. R: 3.9665 °C.

33) Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total

requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente $u(u < v)$, então o tempo requerido para nadar a uma distância L é $L/(v-u)$ e a energia total E requerida para nadar a uma distância é dada por $E(v) = av^3 \cdot \left(\frac{L}{v-u}\right)$, onde a é uma constante de proporcionalidade.

a) Determine o valor de v que minimiza E. R:

b) Esboce o gráfico de E.

34) A velocidade de uma onda de comprimento L em água profunda é dada pela formula $v = k\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$, onde K e C são constantes positivas conhecidas. Qual é o comprimento da onda que dá a velocidade mínima?R: L = C.

35) Duas fontes de calor estão posicionadas s metros distantes uma da outra uma fonte de intensidade a em A e uma fonte de intensidade b em B. A intensidade do calor num ponto P sobre um segmento de reta entre A eB é dada pela fórmula $I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$, onde x é a distância entre P e A medida em metros. Em que ponto entre A e B a temperatura será menor? R: $x = \frac{s \cdot a^{1/3}}{a^{1/3} + b^{1/3}}$

36) Nos ônibus espaciais, as condições de temperatura são ideais para a proliferação de bactérias. Por esta razão, os astronautas limpam os utensílios de cozinha com desinfetante antes de guardá-los. Suponha que a limpeza tenha sido malfeita e depois de uma redução inicial o número de bactérias volte a aumentar. Se o número de bactérias (em milhões) no depósito de utensílios de cozinha após t horas é dado por $B(t) = \left[(t+4)^2 \cdot (t-14)\right] + 96t + 260$, determine o número mínimo e máximo de bactérias presentes no depósito durante as primeiras 8 horas.

R: Número mínimo: 4 milhões e Número máximo: 164 milhôes.

37) Uma equipe de médicos está estudando a capacidade do corpo humano de metabolizar um novo medicamento usado para preparar os pacientes para cirurgias cardia cas. Injetando doses conhecidas nos voluntários e colhendo amostras de sangue a cada 30 minutos para análise, a equipe concluiu que a concentração de substância na corrente sanguínea t horas após a injeção é dado pela equação $C(t) = \frac{3t}{t^2 + 4}$. O remédio será mais eficaz se atingir a concentração máxima no momento de comecar a cirrurgia. Quantas horas antes da operação o remédio deve ser adminstrado?R:

38) Se um projétil é atirado de O de modo a atingir um plano inclinado que faz um ãngulo α com a horizontal, seu alcance é dado pela fórmula $R = \dfrac{2v^2 \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{g \cdot \cos^2\alpha}$, onde v e g são constante e θ é o ângulo de elevação. Calcule θ para obter um alcance máximo. R:

39) Quando lixo orgânico é despejado em um lago, a decomposição do lixo consome oxigênio. A concentração de oxigênio Ox após um despejo (tomado 1 como nível normal) pode ser modelada pela função $Ox = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$, $0 \le t$, onde t é o tempo em semanas.

a) Em que semana a concentração de oxigênio é mínima? Qual é esta concentração? R:

b) Em que semana a concentração de oxigênio é máxima? Qual é esta concentração? R:

Questões Propostas de Aplicação da Regra de L' Hospital

01) Usando a regra de L'hospital calcule os limites abaixo:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$	R: 1	16) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \cdot \ln x$	R: 0
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$	R: $+\infty$	17) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\cdot \operatorname{cotg} x$	R: 1
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$	R: $\dfrac{1}{3}$	18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$	R: $-\dfrac{1}{2}$
4) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$	R: 0	19) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{sen} 2x}$	R: 1
5) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$	R: 0	20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$	R: 0
6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cossec} x}$	R: 0	21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\cos x + e^{-x}}{x^2}$	R: $+\infty$
7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg} x)\cdot \sec x$	R: 1	22) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc}\cdot\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{arc}\cdot\operatorname{sen} x}$	R: 2
8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$	R: 0	23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arc}\cdot\operatorname{tg} x}{x\cdot\operatorname{sen} x}$	R: 0
9) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{4\operatorname{tg} x}{1+\sec x}$	R: 4	24) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{arc}\cdot\operatorname{sen} x}$	R: $+\infty$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos 2x}$	R: $\dfrac{1}{2}$	25) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$	R: 1

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\text{cotg } x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$ R: -1

12) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\text{cotg } x$ R: 0

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-\cos x}$ R: 1

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}$ R: ∞

15) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\text{sen } x}$ R: 1

26) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sec^2 x-2\text{tg } x}{1+\cos 4x}\right)$ R: $\dfrac{1}{2}$

27) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ R: 1

28) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\text{tg } x}}$ R: 1

29) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{tg } x)\sec 2x$ R: 1

30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\ln x}{x+\ln x}$ R: ∞

Questões Resolvidas de Construção de Gráficos

01) Determine o domínio, a paridade, os pontos de descontinuidade, as interseções do gráfico com os eixos, o comportamento no infinito (retas assíntotas). O crescimento ou decrescimento, os extremantes, a concavidade, os pontos de inflexão e esboçar o gráfico, das funções abaixo:

1) $f(x)=x^3+x^2-5x$

- *Determinar o domínio*

$D(f)=\mathbf{R}$

- *Determinar a paridade*

$f(x)=x^3+x^2-5x$

$f(-x)=(-x)^3+(-x)^2-5.(-x)$

$f(-x)=-x^3+x^2+5x$

$\begin{cases} f(-x)=f(x)\Rightarrow \textit{Par} \\ f(-x)=-f(x)\Rightarrow \textit{Ímpar}\end{cases}$

$f(x)\neq -f(x)$ *Logo a função não será par e nem ímpar.*

- *Determinar os pontos de descontinuidade*

$D(f)=\mathbf{R}$ *, ela é*

- *Determinar as interseções do gráfico com os eixos (interseção com x e y)*

$f(x)=x^3+x^2-5x \quad\Rightarrow x^3+x^2-5x=0 \quad\Rightarrow x.(x^2+x-5)=0$

$f(x)=0$ $\qquad x=0$

$x^2+x-5=0$

$\Delta=(1)^2-4.1.(-5)$ $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 4,58}{2}\Rightarrow$ $\quad x'=1,79$, $x''=-2,79$

$\Delta=21$

$P_1(0,0)$ $\qquad y=x^3+x^2-5x$, $x=0$

$P_2(1,79,0)$ $\qquad y=0^3+0^2-5.0$

$P_3(-2,79,0)$ $\qquad y=0$

- *Determinar o comportamento no infinito*

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} x^3$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} x^3$

$\lim_{x\to+\infty} (\infty)^3 = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} (-\infty)^3 = -\infty$

> ***Obs.***: *Será utilizada somente a variável com maior expoente:* x^3

Como: $-\infty \longrightarrow +\infty$ $\mathbf{R}$ *, não possui reta assíntota (horizontal, vertical e inclinada)*

- *Determinar o crescimento e decrescimento*

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad \Rightarrow f'(x) = 0$

$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4.3.(-5)$

$\Delta = 4 + 60$

$\Delta = 64$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2.3} = \frac{-2 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{5}{3} \\ x'' = 1 \end{cases}$$

$+++++ \;|\; ----- \;|\; +++++$

Crescente $\;-\frac{5}{3}\;$ *Decrescente* $\;1\;$ *Crescente*

- *Determinar os extremos*

$f'(x) = 0$

$x' = 1$

$x'' = -\dfrac{5}{3}$

$f''(x) = 6x + 2$

$f''(1) = 6.(1) + 2$

$f''(1) = 8 \quad , \; 8 > 0$

$\boxed{x = 1} \Rightarrow$ *Ponto de Mínimo*

$f''(x) = 6x + 2$

$f''\left(-\dfrac{5}{3}\right) = 6.\left(-\dfrac{5}{3}\right) + 2$

$f''\left(-\dfrac{5}{3}\right) = -\dfrac{30}{3} + 2$

$f''\left(-\dfrac{5}{3}\right) = -10 + 2$

$f''\left(-\dfrac{5}{3}\right) = -8 \qquad , \; -8 < 0$

$\boxed{x = -\dfrac{5}{3}} \Rightarrow$ *Ponto de Máximo*

- *Determinar o ponto de Inclinação e Concavidade*

$f''(x) = 6x + 2 \qquad f''(x) = 0$

$6x + 2 = 0$

$6x = -2$

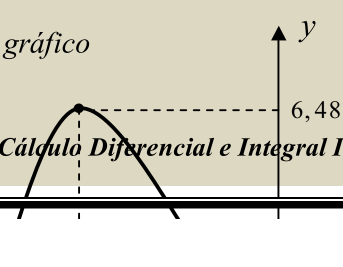
$x = -\dfrac{2}{6}$

$\boxed{x = -\dfrac{1}{3}}$

$------ \;|\; ++++++$

C.P.B $\;-\frac{1}{3}\;$ *C.P.C*

- *traçar o gráfico*



$f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

$f(-1,67) = (-1,67)^3 + (-1,67)^2 - 5.(-1,67) = \boxed{6,48}$

$f(-0,33) = (-0,33)^3 + (-0,33)^2 - 5.(-0,33) = \boxed{1,79}$

2) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-5}$

- *Determinar o domínio*

$D(f)=?$

1º Passo: Obedecer a condição (denominador $\neq 0$)

Logo, $2x-5\neq 0$

$$2x\neq 5$$

$$x\neq\frac{5}{2} \qquad D(f)=\mathbf{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Obs.: $x\neq\dfrac{5}{2}$, significa que o valor não está no domínio da função

- *Determinar a paridade*

$$f(x)=\frac{x-1}{2x-5}$$

$$f(-x)=\frac{-x-1}{2.(-x)-5}=\frac{-x-1}{-2x-5}=\frac{-(x+1)}{-(2x+5)}$$

Como $f(x)\neq f(-x)$, logo a função não é par e nem ímpar.

- *Determinar os pontos de descontinuidade*

$f(x)=x-1 \quad\rightarrow$

$f(x)=2x-5 \quad\rightarrow$ *Contínua, com exceção no ponto onde* $x=\dfrac{5}{2}$

- *Determinar as interseções do gráfico com os eixos (interseção com x e y)*

$f(x)=\dfrac{x-1}{2x-5}$ $\qquad f(x)=0$ $\quad,\quad$ $f(x)=y$

$$0=\frac{x-1}{2x-5}$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

$$y=\frac{0-1}{2.0-5}\quad, x=0$$

$$y=\frac{-1}{-5}$$

$$y=\frac{1}{5}$$

$$P_1\left(0,\frac{1}{5}\right) \qquad P_2\left(1,0\right)$$

- *Determinar o comportamento no infinito*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{2x-5}$

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2-\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\left(1-\cancel{\dfrac{1}{x}}^{\,0}\right)}{\left(2-\cancel{\dfrac{5}{x}}^{\,0}\right)} = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{2x-5}$

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2-\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\left(1-\cancel{\dfrac{1}{x}}^{\,0}\right)}{\left(2-\cancel{\dfrac{5}{x}}^{\,0}\right)} = \frac{1}{2}$$

Logo, $y=\dfrac{1}{2}$*, reta assíntota horizontal.*

- *Determinar o crescimento e decrescimento*

$$f'(x)=\frac{1.(2x-5)-(x-1).2}{(2x-5)^2}=\frac{\cancel{2x}-5-\cancel{2x}+2}{(2x-5)^2}=\frac{-3}{(2x-5)^2}$$

Como $\dfrac{-3}{(2x-5)^2}=0 \Rightarrow -3=0 \Rightarrow \dfrac{-}{+} \Rightarrow -$

O sinal negativo indica que ***a*** *é decrescente*

Obs.: *Qualquer valor atribuído para o "**x**", ao final o resultado sempre será positivo, portanto* $\dfrac{-}{+}=-$ (função decrescente)

- *Determinar os extremos*

$f'(x)=\dfrac{-3}{(2x-5)^2}$*, não possui máximo e nem mínimo.*

- *(Por não ter obtido ponto de x na derivada não existirá ponto de máximo e de mínimo.)*

- *Determinar o ponto de Inclinação e Concavida de*

$$f''(x)=\frac{-[-3.2.(2x-5).2]}{\left[(2x-5)^2\right]^2}=\frac{12.(2x-5)}{[2x-2]^4} \qquad f''(x)=0$$

$$\frac{12.(2x-5)}{[2x-2]^4}=0 \Rightarrow 12.(2x-5)=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$$

- *(Não existe ponto de inflexão, pois é exatamente o ponto de descontinuidade)*

$$\begin{array}{ccc} ------ & | & ++++++ \\ C.P.B & \frac{5}{2} & C.P.C \end{array}$$

- *Traçar o gráfico:*

Questões Propostas de Construção de Gráficos

01) Nos exercicios de numeros de 01 a 50, determine o dominio, a paridade, os pontos de descontinuidade, as interseções do grafico com os eixos, o comportamento no infinito, o crescimento ou decrescimento, os extremantes, a concavidade, os pontos de inflexão e traçe os grafico das funçôes:

1) $f(x) = 2x^3 - 6x$

2) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 1$

3) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

4) $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)^3$

5) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

6) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$

7) $f(x) = 1 + (x-2)^{1/3}$

8) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x}$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

10) $f(x) = \dfrac{9x}{x^2+9}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x-2}$

12) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

13) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

14) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

26) $f(x) = (x-2)^2$

27) $f(x) = (x^2 - 3)^2$

28) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

29) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 24$

30) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 1}$

31) $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$

32) $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^{-x})}$

33) $f(x) = 3 + e^{-x}$

34) $f(t) = 3 - 2e^{-t}$

35) $f(x) = 5 + 2 \cdot 3^{-x}$

36) $f(x) = 3 - 5e^{-x}$

37) $f(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{2t}}$

38) $f(x) = xe^{-x}$

39) $f(x) = e^{-x^2}$

15) $f(x) = (x-2)^3$

16) $f(x) = (x^2-5)^3$

17) $f(s) = 2s(s+4)^3$

18) $f(x) = (x+1)^{1/3}$

19) $f(x) = (x+1)^{4/3}$

20) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

21) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

22) $f(x) = x^3+3x^2+1$

23) $f(x) = x^3-3x^2+3x+1$

24) $f(x) = x^5-5x$

25) $f(x) = \sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

40) $f(x) = e^x + e^{-x}$

41) $f(x) = x - \ln x$ (para $x > 0$)

42) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (para $x > 0$)

43) $f(x) = \ln(x^2+1)$

44) $f(x) = \text{sen}\, x + \dfrac{\text{sen}\, 2x}{2}$

45) $f(x) = \text{sen}^3 x + \cos^2 x$

46) $f(x) = \cos x - \cos^2 x$

47) $f(x) = 2x - \text{tg}\, x$

48) $f(x) = \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x$

49) $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x$

50) $f(x) = x + \text{sen}\, x$