Índice

Olá Amigos!

Esta é uma de, se Deus quiser, uma séria de apostilas que estou desenvolvendo para uma melhor adaptação do calouro nesse novo mundo que é o ensino superior.
Como veterano e no último ano do curso de Ciência da Computação, sei que o mundo do ensino superior é bem diferente do ensino médio... vocês nem imaginam.

O que percebi desde que entrei na universidade é que ela perdeu, se um dia já teve, o princípio fundamental do ensino e destinou seus esforços para a pesquisa.
Certamente, a pesquisa é um ramo importante de todas as instituições públicas de ensino superior, mas o que é mais importante que o aluno?!
O que é mais importante do que os novos profissionais que devem ter a melhor formação possível, para serem inseridos no mercado de trabalho brasileiro e desenvolver da melhor maneira a economia, a política, a saúde pública, a ciência e tecnologia e a educação do nosso país?

É por esse motivo que essa série de apostilas foram pensadas e trabalhadas. Para ajudar o ingressante na universidade a se adaptar mais facilmente a esse novo padrão de pensamento e obter parte da necessária abstração para essa fase. Estas apostilas não foram criadas com o intuito de esgotar todo o assunto de qualquer disciplina, mas sim, iniciá-lo na matéria dando a base necessária para um entendimento mais completo.

Assim, temos uma explicação dinâmica e com a linguagem do jovem sobre uma das principais disciplinas do início de um curso da área de exatas, o Cálculo 1, também conhecido como: Cálculo Diferencial e Integral, de funções reais de uma variável.

Capítulo 1 – O que é o Cálculo?

Quando você entra na faculdade, em um curso de exatas, provavelmente uma das disciplinas do primeiro semestre, ou período, será Cálculo 1. Nos períodos seguintes seriam Calculo 2, 3 e assim por diante, de acordo com o curso escolhido e a necessidade de mais matemática na sua formação.

Bom, já deu para perceber que se trata de uma disciplina intimamente ligada à matemática, como o próprio nome já indica, mas que tipo de estudos ela lida?
“Cálculo” parece muito vago, afinal você faz cálculos desde que esteve no ensino fundamental. Então, será que todo aquele cálculo e matemática não eram suficientes? Sinto dizer, mas não eram.

E esse é um dos primeiros impactos para o calouro. O que você aprendeu desde o seu ingresso no ensino fundamental não será de grande ajuda!
É claro que se você teve uma bela carreira acadêmica até o ensino médio, você se esforçará para também ter esse sucesso na faculdade e é esse esforço, extra, que diferenciará a aprovação da recuperação.
Mas o que você traz de bagagem para o curso dificilmente fará diferença na sua aprendizagem e desempenho nessas novas disciplinas e paradigmas.

Então, entremos no assunto, Cálculo 1 é a disciplina que estuda as funções mais a fundo.
Esse estudo é do tipo:

1) Para onde vai a imagem da função ($y = f(x)$) quando x se aproxima de certo valor?
2) Qual é a “inclinação” da reta tangente ao gráfico da função f(x) para x igual a algum valor c?
3) Qual é a valor da “área” delimitada pelo gráfico da função f(x) e o eixo das abscissas para um intervalo $x \in \{a, b\}$?

Calma! Talvez tenha ficado complicado, e se você acha isso, vamos mais devagar.
Primeiramente, vamos fazer uma breve revisão sobre funções:

<u>Conceito</u>
“O conceito de uma função é uma generalização da noção comum de ‘fórmula matemática’. Funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois objetos, x e y=f(x). O objeto x é chamado o argumento ou domínio da função f e o objeto y que depende de x é chamado imagem de x pela f.

Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x um único valor da função f(x). Isto pode ser feito especificando através de uma fórmula, um relacionamento gráfico entre diagramas representando os dois conjuntos, e/ou uma regra de associação ou mesmo uma tabela de correspondência pode ser construída[...]

Este conceito é determinístico, sempre produz o mesmo resultado a partir de uma dada entrada (a generalização aos valores aleatórios é chamada de função estocástica). Uma função *pode ser vista como uma 'máquina' ou 'caixa preta' que converte entradas válidas em saídas de forma unívoca, por isso alguns autores chamam as funções de relações unívocas.*

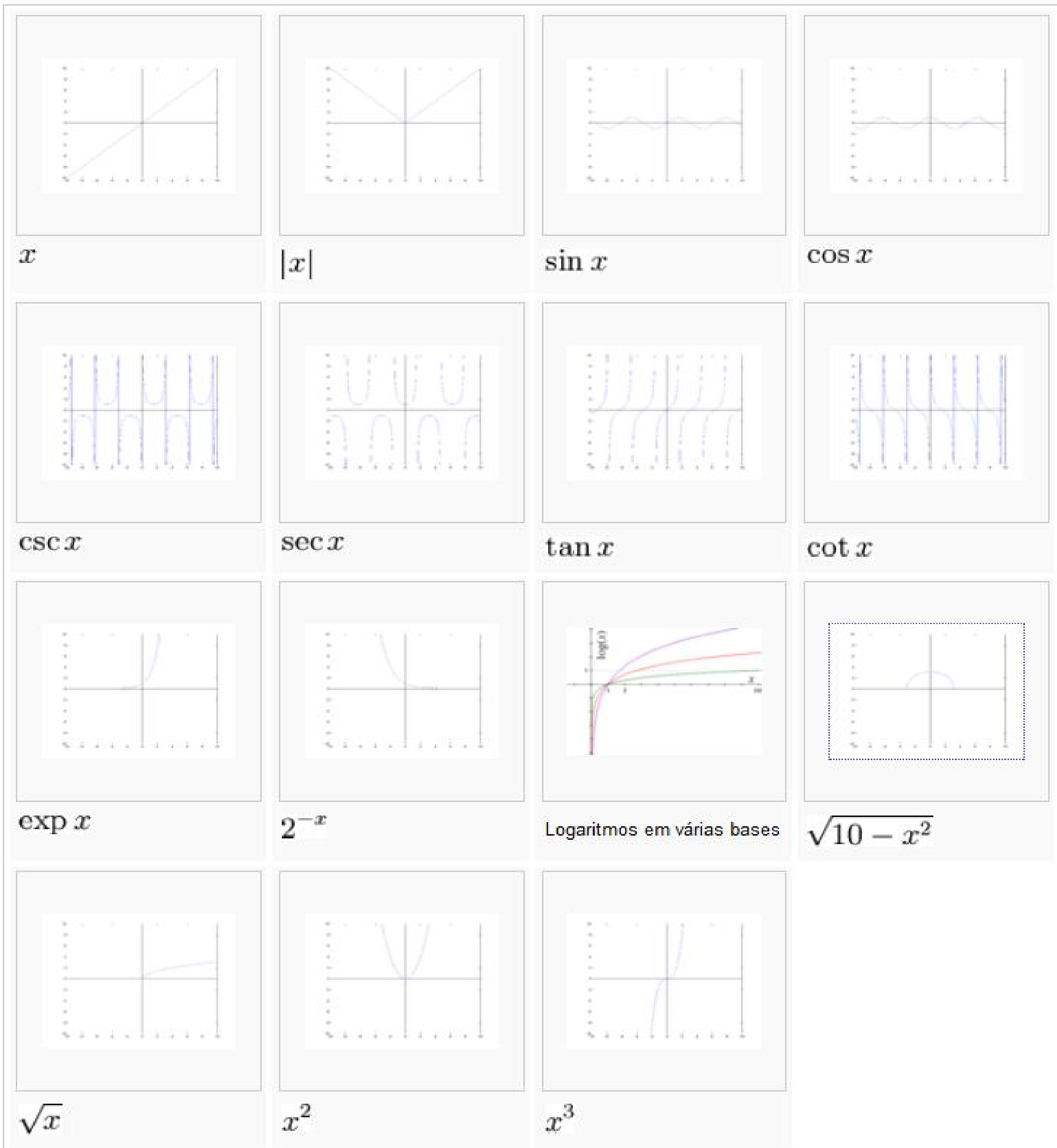
O tipo de função mais comum é aquele onde o argumento e o valor da função são ambos numéricos, o relacionamento entre os dois é expresso por uma fórmula e o valor da função é obtido através da substituição direta dos argumentos."

Fonte: www.wikipedia.org

"Função é uma relação entre dois conjuntos estabelecida por uma regra.
A relação será uma função se cada elemento do conjunto de partida estiver relacionado com um elemento do conjunto de chegada."

Fonte: www.mundoeducacao.com.br

Esta relação é do tipo f:A → B (lê-se f de A em B).
Assim, exemplifiquemos algumas funções e seus gráficos:
y = f(x);



Acho que já deu para relembrar. Afinal, você passou no vestibular. E parabéns por isso!!!

O que se tem de saber é que, em Cálculo 1, você estuda, praticamente, três coisas e são elas:

1) Limites de uma função.
2) Derivada de uma função.
3) Integral de uma função.

Exatamente, só isso!

Provavelmente, se você está ingressando agora na universidade não faz idéia do que se trata esses assuntos ou termos, mas seus conceitos são simples e serão explicados nos próximos capítulos.
E qual é a motivação para se fazer tais estudos?

Deve-se ter um bom motivo.
Iremos exemplificar alguns destes motivos:

Todos já sabemos como determinar a velocidade de um corpo. Nos estudos de física e matemática do ensino médio, aprendemos que a velocidade v, de um corpo, é uma função que relaciona o deslocamento com o tempo para este deslocamento. A função é dada pela fórmula:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Tal que Δd é a variação do deslocamento e Δt é a variação do tempo.
Mas esta é a velocidade média do corpo no percurso, assim é possível que a velocidade tenha variado por todo o percurso.
Como exemplo, podemos usar o corredor jamaicano Usain Bolt, que em 2008 e 2009 quebrou diversos recordes mundiais e olímpicos nos 100 e 200 metros rasos, sendo colocado por muitos como um fenômeno. Ele percorreu os 100 metros rasos em 9s58 no Mundial de Atletismo de Berlin em 2009. Tendo como velocidade média:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{100}{9{,}58} \cong 10{,}44\ m/s$$

Mas certamente ele não manteve esta velocidade por todo o percurso, já que ele saiu do repouso. Ele conseguiu atingir uma velocidade instantânea ainda maior em algum momento.

Mas, então, como determinar a velocidade instantânea num certo momento?

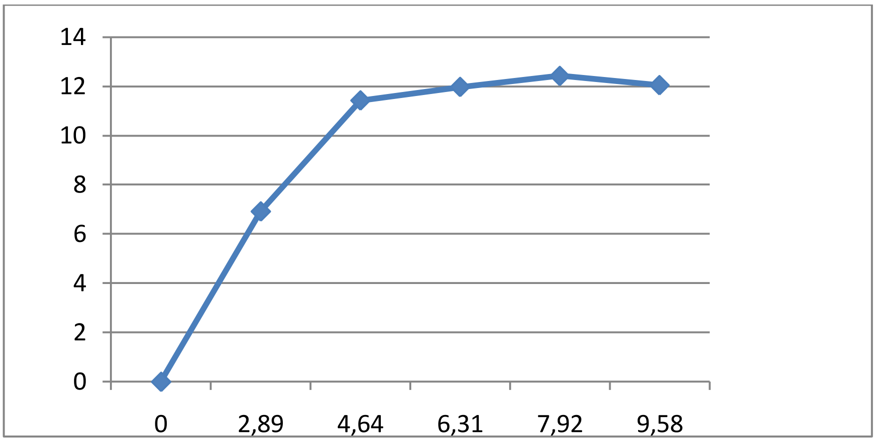


Gráfico da velocidade (Ordenadas, m/s) pelo tempo (Abscissas, seg).

Seria necessário o estudo de um intervalo de tempo muito pequeno, tão pequeno quanto possível. É aí que entra o uso de limites.

Além disso, poderia ser interessante saber em qual momento ele atingiu a maior velocidade e qual a maior aceleração e/ou desaceleração.

Tudo isso é possível através dos estudos de Cálculo 1, para qualquer tipo de função.

Capítulo 2 – Limite e continuidade de funções

Sabemos que todos os elementos da imagem de uma função, tem seu correspondente no domínio desta, podendo ser um, dois ou vários. Assim, para a função f(x) = x² - 1, temos que se f(x) = 3, então x = 2 ou x = -2.

Mas não podemos dizer que para todo x ∈ R, existe uma imagem correspondente, pois existem funções que possuem condições de existência.
Exemplos de funções que não tem valor definido para qualquer x são:

a) $f(x) = \frac{sen\,(x)}{x}$;
b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$;

Como já sabemos, as funções acima não têm valor definido para qualquer x, já que nenhuma fração pode ter denominador igual a ZERO. Então o domínio destas funções são, respectivamente:

a) {x ϵ R | x ≠ 0} (lê-se x pertence aos reais, tal que x diferente de zero)
b) {x ϵ R | x ≠ 1}

Além disso, não é comum, ou não era até o ensino médio, o estudo de uma função quando x tende a ∞ (infinito). Exemplo:

c) $h(x) = \frac{1}{x}$, com x ϵ R*;

Você sabe dizer qual é o valor de h(x) para x tendendo a infinito?

É disso que se trata o estudo de limites de funções. Determinar para onde tende a imagem da função quando a variável tende a algum valor c, ou seja, qual é o limite da função f(x) quando x tende a c. Representamos como:

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

Agora já podemos analisar melhor as funções acima, f(x), g(x) e h(x) e determinar seus valores para x = 0, x = 1 e x → ∞ (lê-se x tendendo a infinito), respectivamente.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x)}{x}$;
b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$;
c) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)$;

Existem duas formas de determinar isso:

i) Estimativa do valor da função
ii) Transformação da função em uma forma que adimita x = c, sem que se perda a essência dela.

A estimativa consiste em tomar um x próximo de c e ir aproximando x de c até que x esteja a uma “distância” mínima dele (dizemos que a diferença x-c é infinitesimal, tão pequena quanto possível). Tentemos fazer isso para g(x) e criemos duas tabelas, para x se aproximando de 1 pela esquerda (ou seja, x < 1) e x se aproximando de 1 pela direita (x > 1).

Atribuindo valores a x próximos de 1, porém maiores que 1: (Tabela A)

x	*2*	*1,5*	*1,25*	*1,1*	*1,01*	*1,001*	*1,0001*
g(x)	*3*	*2,5*	*2,25*	*2,1*	*2,01*	*2,001*	*2,0001*

Atribuindo valores a x próximos de 1, porém menores que 1: (Tabela B)

x	*0*	*0,5*	*0,75*	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*0,9999*
g(x)	*1*	*1,5*	*1,75*	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*1,9999*

Observe que podemos tornar g(x) tão próximo de 2 quanto desejarmos, bastando para isso tomar x ainda mais próximo de 1.
Assim, dizemos que o limite de g(x) quando x tende a 1 é igual a 2. Formalmente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2;$$

Entretanto, você pode estar pensando “mas eu vou ter que fazer essas duas tabelas a cada vez que quiser determinar o limite de uma função? Tomar x a valores mais próximos de c e ir calculando f(x)? ”.
É, eu sei, muito chato! Apesar de que em algumas vezes seja possível fazer isso “de cabeça”. Contudo, ainda existe outra forma de fazer isso, uma forma bem mais elegante, algumas vezes bem difícil, mas certamente elegante.
Transformar g(x) de modo que possamos tomar x = 1, veja:

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x\ +\ 1)(x-1)}{(x-1)} = \frac{(x\ +\ 1)(x-1)}{(x-1)} = x+1;$$

Contando (x-1) acima e abaixo da fração, fica fácil: $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Observação: Isto não significa que g(x) é definida para x = 1, mas sim que existe um valor para o qual g(x) tende quando x se aproxima de 1.

Infelizmente, nem todas as funções podem ser simplificadas ou transformadas para que se admita x = c. Esse é o caso de f(x) e h(x), definidas anteriormente, portanto a estimativa é a única forma de determinar o limite. Essa estimativa pode ser através de teoremas e técnicas que facilitam os cálculos.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,(x)}{x}$; (iremos determinar esse limite mais a frente através do teorema do confronto)

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$; intuitivamente, vemos que quando x aumenta indefinidamente $\left(\frac{1}{x}\right)$ diminui seu valor e que $\forall x > 0;\ 0 < \left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Consequentemente, para x positivo $(x \to +\infty)$, o limite é ZERO. Vejamos a tabela:

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$h(x) = \frac{1}{x}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

Analogamente temos que $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (x tentendo a menos infinito);

Temos também, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$; (analise o por quê)

Observação: Assim como em números, quando omitimos o sinal de ∞, considere ele positivo $(+\infty)$.

<u>Definição intuitiva de limite</u>

Seja f uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo c, exceto possivelmente no próprio c. Dizemos que o limite de f(x) quando x se aproxima de c é $L \in \mathbb{R}$, e escrevemos $\lim_{x\to c} f(x) = L$, se, e somente se, os limites laterais à esquerda e à direita de c são iguais à L, isto é, $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$. Caso contrário, dizemos que o limite não existe, em símbolo: $\nexists\ \lim_{x\to c} f(x)$.

<u>Teorema do Confronto (regra do sanduiche)</u>

Se valem as desigualdades $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto talvez em x = a, e se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$$

Então:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

É fácil ver que esse teorema é válido, já que se existem duas funções que delimitam g(x), pela "direita" e pela "esquerda", e o limite dessas funções quando x tende a <u>*a*</u> é o mesmo e igual a L, então, por "estrangulamento", o limite de g(x) só pode ser L.

Vamos determinar o limite que deixamos em aberto:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,(x)}{x}$;

Este é um dos problemas relacionado a limites dos mais difíceis, a indefinição do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Aliás, a maioria dos limites de funções estudados são deste tipo, observe que o limite $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$, já determinado anteriormente, também é deste tipo.

Tratando separadamente temos:

$$\lim_{x\to 0} sen(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

E não é possível determinar algo do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Pelo teorema de confronto iremos resolver este problema.
Devemos achar duas funções que se encaixem no escopo do teorema, essa não é uma tarefa simples, você precisa de alguma imaginação e abstração suficiente para escolher essas funções.

Uma característica importante das funções seno e co-seno de x é a seguinte:
Para x próximo de 0, vale a relação de desigualdades

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1;$$

e

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1;$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Tudo bem, talvez tenha ficado difícil, mas no começo é assim mesmo, com o tempo se acostuma.

Qualquer dúvida ou sugestão, por favor, envie um email para
tonipimentel@gmail.com com o assunto “Apostila de Cálculo 1” ou acesse meu blog
http://tonipimentel.blogspot.com/.
Ficarei feliz em ajudar e ter ajuda.

Propriedades importantes de limites

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, e k é um número real qualquer, então:

a) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.
b) $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$.
c) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$; para $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
e) $\lim_{x\to a} k = k$.

Exercícios

1. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule:
   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
   b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x}$
   c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
   d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2}$
   e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$
   f) $\lim_{x\to 0} \sin x$

2. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sendo f dada por:
   a) $f(x) = x^2$
   b) $f(x) = 2x^2 + x$
   c) $f(x) = 5$
   d) $f(x) = -x^3 + 2x$
   e) $f(x) = \frac{1}{x}$
   f) $f(x) = 3x + 1$

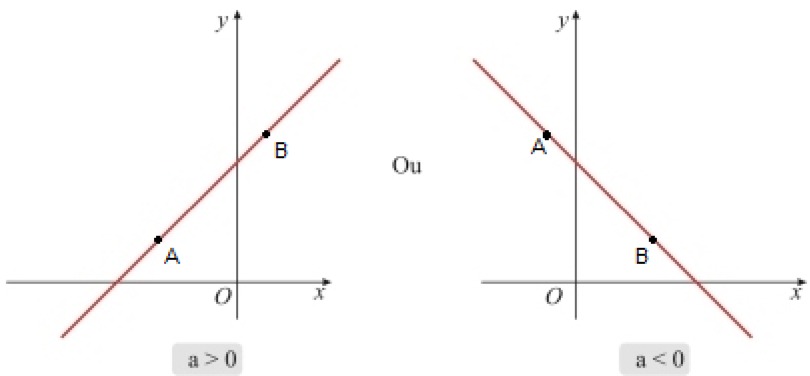
3. Calcule:
   a) $\lim_{x\to p} \frac{x^2 - p^3}{x-p}$
   b) $\lim_{x\to p} \frac{x^4 - p^4}{x-p}$
   c) $\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x-p}$
   d) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

Capítulo 3 – Derivadas de funções

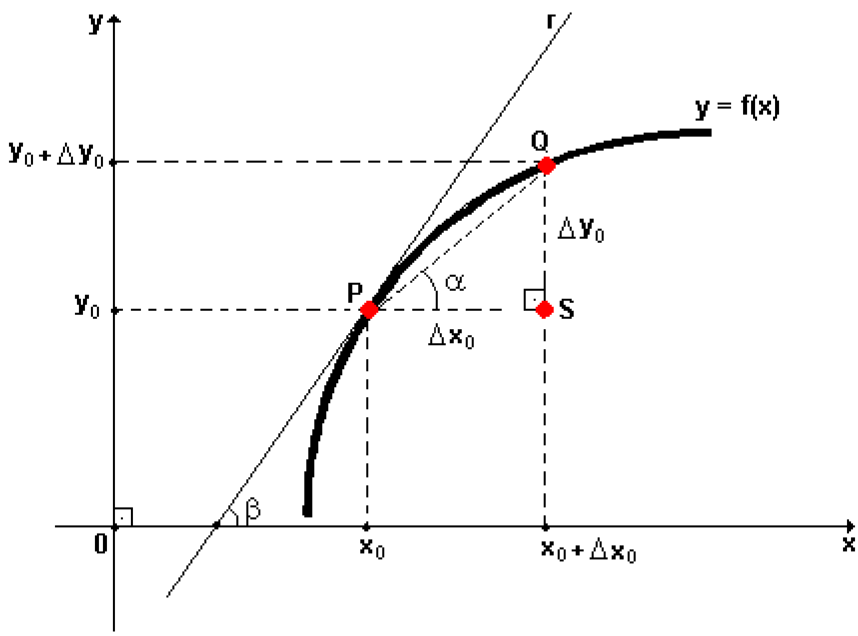
O estudo de derivadas de funções baseia-se na determinação da inclinação da reta tangente a uma função *f(x)* para *x = c*, sendo *c* um valor constante qualquer.

Comecemos pelo mais fácil, você certamente deve saber o que é coeficiente angular de uma função de primeiro grau, $f(x) = a.x + b$. Sabe que chamamos *a* de coeficiente angular e que o determinamos a partir do calculo $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$.
Sendo A (x1, f(x1)) e B (x2, f(x2)), dois pontos quaisquer pertencentes ao gráfico da função f(x).

Para uma reta, ou função linear, todos os pontos do seguimento de reta $\overline{AB}$ pertencem ao gráfico da função, observe:



Mas isso dificilmente acontece com outros tipos de funções. Vejamos o gráfico de uma função não linear:



Temos os pontos $P\ (x_0, y_0)$ e $Q\ (x_0 + \Delta x_0,\ y_0 + \Delta y_0)$. Perceba o seguinte:

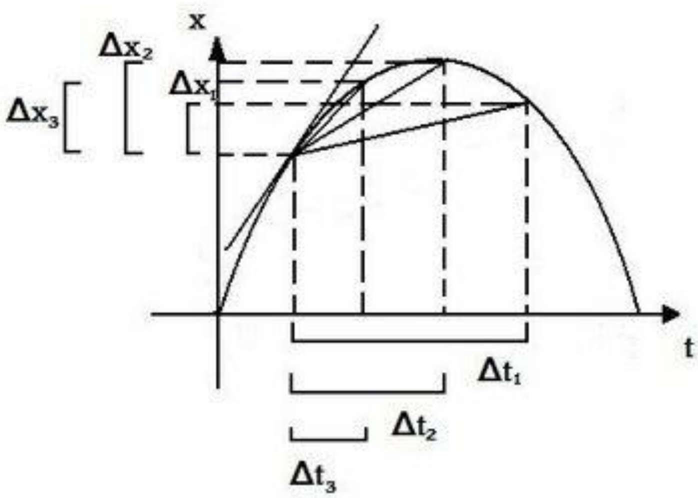
- α é o angulo da inclinação do seguimento de reta $\overline{PQ}$ com o segmento de reta $\overline{PS}$, que é paralelo ao eixo das abcissas.
- α pode ser determinada atraves de $a = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$.
- Apenas dois pontos do segmento de reta $\overline{PQ}$ pertencem ao gráfico e se traçarmos uma reta, chamamos de secante ao gráfico, que passa por esses dois pontos, α seria seu coeficiente angular.
- Se aproximarms o ponto Q do ponto P, de forma a diminuirmos Δx_0 infinitesimalmente (reveja o capítulo 1), ou seja, fazendo $\Delta x_0 \rightarrow 0$ (delta x zero tendendo a zero), obteremos uma outra reta, chamamos esta de reta tangente ao gráfico, com coeficiente angular β.

Colocando a última observação em termos de limites, temos:

$$a = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

E esta é a definição de derivada, a determinação do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.
Existem algumas pequenas variações nessa definição de derivadas, mas a essência é a mesma.

Observe outro gráfico, agora de $x = f(t)$.



Vamos usar o exemplo de uma função de segundo grau $f(x) = 3x^2$.
Queremos descobrir a derivada da função $f(x)$ no ponto $(c, f(c))$, podemos denotar de $a, f^{'}(x)\ ou\ \frac{dy}{dx}$.

Pela definição:

$$a = f^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} =$$

Fazendo $h = \Delta x_0$, temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + h^2 - 3x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{6xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 6x + h = 6x.$$

Assim,

$$a = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 6x$$

$f'(x) = 6x$ é a primeira derivada da função $f(x) = 3x^2$. Deste modo, para qualquer x = c, $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta tangente a função $f(x)$ no ponto $(c, f(c))$.

Vejamos a tabela de atribuição de valores a x e seus respectivos resultados para $f(x)$ e $f'(x)$:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0	0
1	3	6
2	12	12
3	27	18

Mas, afinal, por que determinar a derivada de uma função? Para que ela serve?

Simplesmente para determinar com que taxa de variação uma função evolui. Pode não parecer, mas isso é muito útil para inúmeros estudos sobre funções.

Muitas vezes, não é de grande dificuldade encontrar a derivada de uma função através da definição, mas existem funções bem complexas para conseguir determiná-la.
Por isso, também existem teoremas e métodos simples para resolver essa tarefa. A seguir algumas fórmulas de derivadas já definidas.

<u>Derivadas definidas</u>

i) Função constante, $f(x) = c$:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

ii) Função potência, $f(x) = x^n$:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot (x^{n-1})$$

iii) Soma de funções, sendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$:

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

iv) Função vezes constante, sendo $u = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}(c \cdot u) = c \cdot \frac{du}{dx}$$

v) Produto entre funções, $u = f(x)$ e $v = g(x)$:

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx})$$

vi) Razão entre funções, $u = f(x)$ e $v = g(x)$, com $v \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}(u/v) = (v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx})/v^2$$

vii) Potência de função, $u = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

viii) Funções seno e co-seno:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

ix) Função logarítmica:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

x) Função exponencial, $f(x) = e^{c \cdot x}$, com $c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx}(e^{c \cdot x}) = c \cdot e^{c \cdot x}$$

Observação: a função acima $f(x) = e^x$ ainda aparecerá bastante no seu curso, então é bom ter uma noção de que se trata:

“A função exponencial é uma das mais importantes funções da matemática. Descrita, normalmente, como exp(x) ou ex (onde e é a constante matemática neperiana, base do logarítmo neperiano), pode ser definida de duas maneiras equivalentes: a primeira, como uma série infinita; a segunda, como limite de uma seqüência:”

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Regra da Cadeia

Muita gente tem medo quando ouve falar na "temida regra da cadeia", mas este é mais um método simples para nos ajudar a determinar a derivada de uma função, no caso uma função composta.

A regra da cadeia é muito utilizada para determinar a derivada de funções compostas, ou seja, do tipo $f(g(x))$ ou $f \circ g$. Assim definimos a regra da cadeia como:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Eu sei que ficou difícil para entender, então vejamos um exemplo comum de utilização da regra da cadeia:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Chamemos $g(x) = x^2$, ou apenas $g = x^2$, assim temos:

$$f = \sin g$$

Como vimos anteriormente, em Derivadas Definidas, sabemos que a derivada da função anterior seria

$$\frac{df}{dg} = \cos g$$

Sabemos também que

$$\frac{dg}{dx} = 2x$$

Desta forma, colocando na formula, temos:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = (\cos g) \cdot 2x$$

Mas $g = x^2$, então:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = 2x \cdot \cos x^2$$

Qualquer dúvida ou sugestão, por favor, envie um email para tonipimentel@gmail.com com o assunto "Apostila de Cálculo 1" ou acesse meu blog http://tonipimentel.blogspot.com/.
Ficarei feliz em ajudar e ter ajuda.

Exercícios

1. Seja $f(x) = x^2 + 1$, calcule pela definição:
    a) $f'(1)$
    b) $f'(0)$
    c) $f'(x)$

2. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados:
    a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$
    b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 4$
    c) $f(x) = 5x - 3$ e $p = -3$
    d) $f(x) = 1/x$ e $p = 1$

3. Calcule $f'(x)$ onde $f(x)$ é igual a:
    a) $\frac{x}{x^2+1}$
    b) $\frac{x^2-1}{x+1}$
    c) $\frac{3x^2+3}{5x-3}$
    d) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$
    e) $5x + \frac{x}{x-1}$
    f) $\sqrt{x} + \frac{3}{x^3+2}$

Capítulo 4 – Integrais de funções

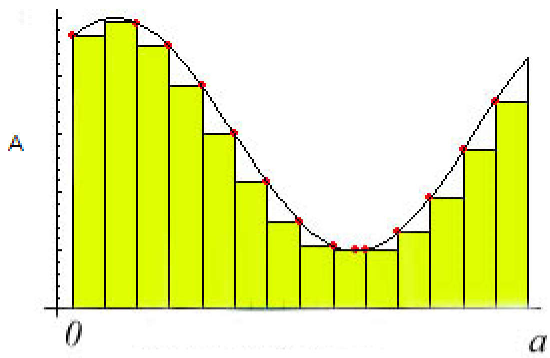
Por fim – é claro que não é o fim do conteúdo dessa disciplina, mas sim da apostila – as integrais de funções.

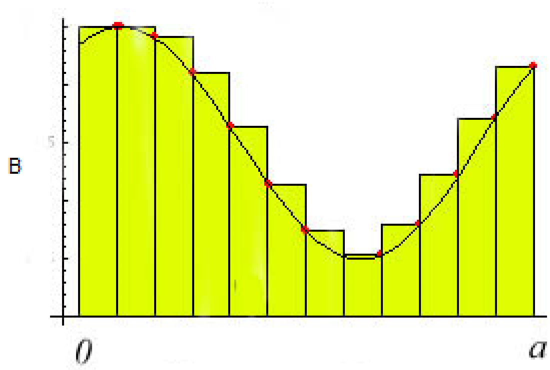
No começo do Capítulo 1 perguntamos:

"Qual é a valor da 'área' delimitada pelo gráfico da função f(x) e o eixo das abscissas para um intervalo x ϵ {a, b} ?"

É exatamente isso que determinamos com o cálculo das integrais de funções.
As integrais surgem naturalmente na física, geometria, computação gráfica, entre outros ramos das ciências e engenharias.

Observe o gráfico da função abaixo:





Uma **partição P de intervalo fechado [a, b]** é um conjunto finito de pontos $P = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ tal que:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

Chamemos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; para $i = 2, 3, \ldots, n, n+1$

Temos uma mesma função sendo mostrada duas vezes, cada uma com retângulos que ligam o gráfico ao eixo das abscissas, a "de cima", A, com retângulos que não ultrapassam o gráfico e a "de baixo", B, que ultrapassam.

Veja que cada retângulo tem como base uma pequena variação Δx_i e uma altura $f(x_i)$, então a área do retângulo i é dada por:

$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Se somarmos a área de cada retângulo em A, obteremos um valor aproximado da área total delimitada pelo gráfico e o eixo das abscissas, no intervalo $x \in [0, a]$, porém de valor menor que a área real. Se fizermos o mesmo em B obteremos um resultado parecido, mas de valor maior que a área real.

Em ambos os casos temos a expressão:

$$\acute{A}rea\ Total = \sum_{0}^{a} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Para quem não conhece este ($\sum$) símbolo, ele significa: somatório dos termos $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ para i indo de 0 até a.

Mas se tomarmos Δx_i tão pequeno quanto possível, uma variação infinitesimal (dx), para todas as bases dos retângulos, então a expressão acima muda para:

$$\int_0^a f(x)dx$$

Também conhecida como, integral (somatório infinitesimal) de $f(x)$ em relação a dx dentro do intervalo $[0, a]$.

Bom, o conceito de integral, pode ter sido entendida, mas como determiná-la?

<u>Definição Formal</u>

Há muitas maneiras de definir formalmente uma integral, nem todas são equivalentes. As diferenças existem principalmente para lidar com diferentes casos especiais que não podem ser integráveis com outras definições, mas também, ocasionalmente, por razões pedagógicas. As definições mais comumente usadas de integrais são as integrais de Riemann e integrais de Lebesgue.

“Integrais e derivados tornaram-se as ferramentas básicas de cálculo, com numerosas aplicações em ciências e engenharia. A definição matemática rigorosa da integral foi dada por Bernhard Riemann. É baseado em um processo de limitação que se aproxima da área de uma região curvilínea quebrando a região em finas placas verticais. A partir do século XIX, as noções mais sofisticadas de integrais começaram a aparecer, onde o tipo da função, bem como o domínio sobre o qual se realiza a integração tem sido generalizada. A integral de linha é definida para funções de duas ou três variáveis, e o intervalo de integração [a, b] é substituído por uma certa curva conectando dois pontos no plano ou no espaço. Em uma integral de superfície, a curva é substituído pelo pedaço de uma superfície no espaço tridimensional. Integrais de formas diferenciais desempenham um papel fundamental na geometria diferencial moderna. Essas generalizações de integrais surgiu primeiramente a partir das necessidades da

física, e que desempenham um papel importante na formulação de várias leis físicas, notadamente os da eletrodinâmica. Há muitos conceitos modernos de integração, entre estes, o mais comum é baseado na teoria matemática abstrata conhecida como integração de Lebesgue, desenvolvido por Henri Lebesgue.”

Traduzida de http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_integral

“O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração.

Diferentemente da noção associada de derivação, existem várias definições para a integração, todas elas visando a resolver alguns problemas conceituais relacionados a limites, continuidade e existência de certos processos utilizados na definição. No entanto todas estas definições dão a mesma resposta para o resultado final de uma integração.

A integral também é conhecida como antiderivada. Uma definição também conhecida para integral indefinida é:”

$$\int f(x)dx = F(x)$$

se, e somente se,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Fonte: www.wikipedia.org

Nós podemos interpretar a expressão acima da seguinte forma:

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções, se a integral de $f(x)$, em relação à x, é igual a $F(x)$, então a derivada de $F(x)$, em relação à x, é igual e $f(x)$ e vice-versa. Ou seja, a integral é processo inverso à derivada.

Assim, usando um exemplo do capítulo anterior, temos:

$F(x) = 3x^2$ e $f(x) = 6x$

$$\int 6x\, dx = 3x^2 + k$$

Bom, mas o que esse k está fazendo na expressão?

k é uma constante qualquer pertencente ao conjunto dos números reais.

Pense bem, $F(x)$ é apenas uma das possíveis integrais da função $f(x)$, já que a derivada de

$$3x^2 + 1$$

$$3x^2 + 2$$

$$3x^2 + 3$$

$$\vdots$$

$$3x^2 + k$$

são todas iguais a $F(x)$, faça o teste.

Assim, uma integral indefinida é a integral de uma função para um intervalo indeterminado.

É preciso ter muita imaginação, e certo grau de abstração, para conseguir determinar F(x) apenas a partir de f(x). Logicamente existem métodos para facilitar esta descoberta, como com as derivadas, mas esta talvez seja a tarefa mais difícil em Cálculo 1.

Integrais Comuns

i) Função constante, $f(x) = c$:

$$\int c\,dx = cx + k$$

ii) Função potência, $f(x) = x^n$:

$$\int (x^n)\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot (x^{n+1}) + k$$

iii) Soma de funções, $f(x)$ e $g(x)$:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$$

iv) Função vezes constante, sendo $u = f(x)$:

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

v) Funções seno e co-seno:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

vi) Função $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + k$$

vii) Função exponencial, $f(x) = e^{c \cdot x}$, com $c \in \mathbb{R}$:

$$\int (e^{c \cdot x})dx = \frac{1}{c} \cdot e^{c \cdot x} + k$$

O símbolo de integra ($\int f(x)dx$) utilizado acima não possui um intervalo definido de integração, mas normalmente você terá este intervalo e para demonstrar como resolver esta integral definida temos um exemplo abaixo:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} x^{-2}\, dx$$

$$\int_{-2}^{-1} x^{-2}\, dx = [\frac{1}{-1} \cdot x^{-1}]_{-2}^{-1}$$

$$[\frac{1}{-1} \cdot x^{-1}]_{-2}^{-1} = \left[\frac{1}{-1} \cdot (-1)^{-1}\right] - \left[\frac{1}{-1} \cdot (-2)^{-1}\right] = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Obs.: Existem diversos teoremas e métodos que nos ajudam a determinar a integral, mas estas não entram no escopo desta apostila de Introdução a Cálculo 1, assim, para maiores e melhores informações e explicações, entrem em contato por email.

Qualquer dúvida ou sugestão, por favor, envie um email para tonipimentel@gmail.com com o assunto “Apostila de Cálculo 1” ou acesse meu blog http://tonipimentel.blogspot.com/.
Ficarei feliz em ajudar e ter ajuda.

Exercícios

1. Calcule:
   a) $\int_0^1 (x+3)\,dx$
   b) $\int_{-1}^1 (2x+1)\,dx$
   c) $\int_0^4 \frac{1}{2}\,dx$
   d) $\int_{-2}^1 (x^2-1)\,dx$
   e) $\int_1^3 dx$
   f) $\int_{-1}^2 4\,dx$

2. Calcule:
   a) $\int_1^2 (\frac{1+x}{x^3})\,dx$
   b) $\int_0^1 (x+1)^2\,dx$
   c) $\int_1^4 (\frac{1+x}{\sqrt{x}})\,dx$
   d) $\int_0^1 (x-3)^2\,dx$

3. Calcule:
   a) $\int_0^1 (\frac{1}{1+x})\,dx$
   b) $\int_{-1}^1 (x^3 \cdot e^{x^4})\,dx$
   c) $\int_0^{\pi/3} (\sin x + \sin 2x)\,dx$
   d) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

RESPOSTAS

CAPÍTULO 2

1. a) 4
   b) 1
   c) $\frac{1}{2}$
   d) 0
   e) -2
   f) 0

2. a) $2x$
   b) $4x + 1$
   c) 0
   d) $-3x^2 + 2$
   e) $-\frac{1}{x^2}$
   f) 3

3. a) $3p^2$
   b) $4p^3$
   c) $\frac{1}{n\sqrt[n]{p^{n-1}}}$
   d) $\sqrt{2}$

CAPÍTULO 3

1. a) 2
   b) 0
   c) 2x

2. a) 3
   b) $1/4$
   c) 5
   d) -1

3. a) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
   b) $\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$
   c) $\frac{15x^2-18x-15}{(5x-3)^2}$
   d) $\frac{1-x}{2\sqrt{x}\cdot(x+1)^2}$
   e) $5 - \frac{1}{(x-1)^2}$
   f) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{9x^2}{(x^3+2)^2}$

CAPÍTULO 4

1. a) 7/2
   b) 2
   c) 2
   d) 0
   e) 2
   f) 12

2. a) $7/8$
   b) $7/3$
   c) $20/3$
   d) $19/3$

3. a) $ln2$
   b) 0
   c) 5/4
   d) $\pi/4$