

# MATEMÁTICA ELEMENTAR II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia



© 2009 – IESDE Brasil S.A. É proibida a reprodução, mesmo parcial, por qualquer processo, sem autorização por escrito dos autores e do detentor dos direitos autorais.

#### CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

L55m

Leite, Olímpio Rudinin Vissoto.

Matemática elementar II: situações de matemática do ensino médio no dia a dia. / Olímpio Rudinin Vissoto Leite, Marcelo Gorges. - Curitiba, PR: IESDE, 2009.

444 p.

Sequência de: Matemática elementar I

ISBN 978-85-387-0414-0

1. Matemática (Ensino médio). I. Gorges, Marcelo. II. Inteligência Educacional e Sistemas de Ensino. III. Título.

09-3612. CDD: 510

CDU: 51

Capa: IESDE Brasil S.A. Imagem da capa: Júpiter Images/DPI Images

Todos os direitos reservados.



#### **IESDE Brasil S.A.**

Al. Dr. Carlos de Carvalho, 1.482. CEP: 80730-200 Batel - Curitiba - PR Ad Maiora Seugar! 0800 708 88 88 - www.iesde.com.br

Esse material é parte integrante do Aulas Particulares on-line do IESDE BRASIL S/A, mais informações www.aulasparticularesiesde.com.br

# Olímpio Rudinin Vissoto Leite

Mestre em Gestão de Negócios pela Universidade Católica de Santos. Graduado em Licenciatura em Matemática pela USP.

### Marcelo Gorges

Licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

# Sumário

#### Números e operações | 11

- Números naturais | 11
- Números inteiros | 14
- Números racionais | 17
  - Números reais | 20
  - Porcentagem | 24
- Fator de aumento | 26
- Fator de redução | 27

#### Geometria e medidas | 33

- Comprimento e massa | 33
- Área, volume e capacidade | 37
  - Volume e capacidade | 42
- Estimativas e arredondamentos | 46
  - Teorema de Tales | 51
  - Teorema de Pitágoras | 58

#### Gráficos | 65

Tipos de gráficos | 65

#### Introdução às funções | 83

- Conceito intuitivo de função | 83
  - Gráfico cartesiano | 85
- Domínio e imagem de uma função | 88
  - Uma nova notação para função | 89

#### Função afim | 97

Gráfico da função afim | 97
Função linear | 98
Função identidade | 98
Função constante | 99
Coeficientes da função afim | 100
Interseção da reta com eixo x (raiz da função afim) | 101
Equações da reta | 108

#### Função quadrática | 115

Gráfico de uma função quadrática | 115 Domínio e imagem da função quadrática | 126 Máximo ou mínimo de uma função quadrática | 127

#### Tópicos complementares de funções | 135

Função definida por várias sentenças | 135 Estudo da variação das funções | 139 Valores extremos de uma função | 141 Estudo do sinal de uma função | 147 Inequação | 149

#### Funções exponenciais | 155

Potenciação | 155 Propriedades das potências | 156 Notação científica | 157 Função exponencial | 163 Equações exponenciais | 169

#### Função logarítmica | 175

O que é logaritmo? | 175

Propriedades dos logaritmos | 178

Função logarítmica | 186

Equação logarítmica | 190

A função exponencial de base 'e' e de base  $\frac{1}{e}$  | 192

Logaritmo natural | 193

#### Introdução à trigonometria | 197

As razões trigonométricas | 197

Como calcular o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo? | 199

Seno, cosseno e tangente de um ângulo obtuso | 211

Lei dos senos | 219

Lei dos cossenos | 219

#### Progressão Aritmética (P.A.) | 225

Sequência numérica | 225

Progressão Aritmética (P.A.) | 228

#### Progressão Geométrica (P.G.) | 241

Progressão Geométrica | 241

Classificação de P.G. | 242

#### Sistemas lineares | 259

Matrizes | 259

Determinantes | 265

Sistemas lineares | 269

#### Princípio fundamental da contagem | 279

Princípio fundamental da contagem | 279 Tipos de agrupamentos | 281

#### Análise combinatória | 287

Fatorial | 287
Permutação simples | 288
Permutação com repetição | 289
Arranjo simples | 292
Combinação simples | 295

#### Noções de probabilidade | 299

Experimentos aleatórios | 299 Probabilidade | 300 Probabilidade condicional | 306

#### Matemática Financeira | 313

Porcentagem | 313
Porcentagem de uma quantia | 314
Porcentagem de um número em relação a outro | 314
Aumento | 315
Desconto | 317
Juros | 320

#### Geometria espacial | 327

Prismas | 327

Paralelepípedo reto-retângulo | 329

Cubo | 330

Pirâmides | 334

Cilindro | 339

Cone | 341

Esfera | 342

#### Estatística | 345

Notações | 345

Tipos de variáveis | 345

Medidas de tendência central | 346

Medidas de dispersão | 350

Apresentação de dados estatísticos | 353

Frequências | 354

#### Circunferência trigonométrica | 359

Circunferência trigonométrica | 359

Relações trigonométricas | 363

# Matemática Financeira

**Marcelo Gorges** 

### Porcentagem

Vamos iniciar nosso estudo relembrando um importante conceito: A porcentagem.

O símbolo % remete a uma fração cujo denominador é 100.

Assim, veja os exemplos abaixo:

a) 30 por cento = 
$$30\% = \frac{30}{100} = 0.30$$

b) 45 por cento = 
$$45\% = \frac{45}{100} = 0.45$$

c) 6,9 por cento = 6,9% = 
$$\frac{6,9}{100}$$
 = 0, 069

d) 64,3 por cento = 64,3% = 
$$\frac{64,3}{100}$$
 = 0, 643

### Porcentagem de uma quantia

Para determinar uma porcentagem de uma quantidade devemos multiplicar a taxa percentual por esta quantia.

#### **Exemplos:**

1. Quanto representa 20% de 90?

$$20\% \text{ de } 90$$

$$\frac{20}{100} \cdot 90 =$$

$$= 0.20 \cdot 90 = 18$$

Resposta: 20% de 90 é 18.

2. Oual é o valor de 75% de 1 800?

75% de 1 800  $\frac{75}{100} \cdot 1800 = 0.75 \cdot 1800 = 1350$ 

Resposta: 75% de 1 800 é 1 350.

### Porcentagem de um número em relação a outro

A porcentagem de um número a em relação a outro b é dada pela razão  $\frac{a}{b}$ .

Desta maneira, a quantia de R\$46,00 corresponde a quanto por cento de R\$230,00?

Assim:

$$\frac{46}{230} = 0.2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

# **Exercícios**

1.	Represente: a) 15% na forma de decimal;
	b) 3,8 na forma de porcentagem;
	c) 62% na forma decimal;
	d) 1% na forma decimal;
	e) 0,85% na forma decimal;
2.	Responda: a) Qual é o valor de 40% de 1 200?

b) R\$92,00 corresponde a quanto por cento de R\$460,00?

#### Aumento

Observe a seguinte situação:

Uma loja adquiriu uma mercadoria por R\$300,00 e deseja vender obtendo um lucro de 10% sobre o preço de custo. Qual deve ser o preço de venda?

Preço de custo (C) = R\$300,00

Lucro (L) = 10% do preço de custo

Preço de venda (V)

Como neste caso o preço de venda é composto pelo preço de custo acrescido do lucro temos:

V = C + L

Devemos então determinar o valor do lucro. Assim:

10% de 300

10% . 300 =

= 0.10 .300 = 30

O valor do lucro é de R\$30,00.

Portanto o valor de preço de venda é igual a:

V = C + I

V = 300 + 10

O preço de venda será de R\$330,00.

Esta mesma situação poderia ser resolvida utilizando o fator de aumento, da seguinte forma:

 $V = F \cdot C$ , sendo que:

V é o preço de venda;

C é o preço de custo;

F é o fator de aumento, onde F = 1 + i.

Determinando o fator de aumento temos:

F = 1 + 10%

F = 1 + 0.10

F = 1,10

Assim temos:

V = F.C

V = 1.10.300

V = 330

O valor do preço de venda é de R\$330,00.

#### Desconto

Observe a seguinte situação:

Uma loja de roupas, no final da estação, ainda tinha um bom estoque de peças. Como necessitava de dinheiro em caixa para se preparar para a nova estação, decidiu vender as peças em estoque por um valor 10% abaixo do preço de custo. Se uma peça custou R\$200,00 para a loja, qual foi o preço de venda da mercadoria após o desconto?

Preço de Custo (C) = R\$200,00

Prejuízo (Z) = 10 % do preço de custo

Preço de venda (V)

Como neste caso o preço de venda é composto pelo preço de custo, subtraindo o valor do prejuízo, temos:

$$V = C - Z$$

Assim, para determinar o valor do preço de venda, devemos determinar o valor do prejuízo:

Z = 10% de 200

Z = 0.10.200

Z = 20

O prejuízo é de R\$20,00.

Agora, para determinar o preço de venda, devemos subtrair do preço de custo o valor do prejuízo, logo:

V = C - Z, então

V = 200 - 20, logo

V = 180

O preço de venda é de R\$180,00.

Este valor também pode ser determinado utilizando o fator de redução. Sendo que:

 $V = F_R \cdot C$ , onde:

V é o preço de venda

C é o preço de custo;

 $\boldsymbol{F_{_{R}}}$  é o fator de redução, este fator pode ser calculado da seguinte forma:

 $F_R = 1 - i$ 

 $F_{_{\rm B}} = 1 - 10\%$ 

 $F_{R} = 1 - 0.10$ 

 $F_{R} = 0.90$ 

Assim o valor do preço de venda é:

 $V = F_R \cdot C$ 

V = 0.90.200

V = 180

O preço de venda é R\$180,00.

### **Exercícios**

3.	O salário de um estagiário de matemática era de R\$920,00 e passou a ser, de-
	pois de formado e contratado pela empresa, de R\$1.500,00. Qual foi, aproxi-
	madamente, a porcentagem de aumento?

**4.** Em uma panificadora 63% dos pães são vendidos no período da tarde, sabendo que a panificadora produz 30 000 pães por dia. Quantos pães são vendidos no período da tarde?

5. Um tanque contém 36 litros de combustível, do qual 40% é gasolina e 60% álcool. Quantos litros de gasolina e quantos litros de álcool possui o tanque?

6. Uma loja de camisas aumenta em 25% o preço de uma camisa que custa R\$60,00. Ao entrar em liquidação, essa loja passa a oferecer a mesma camisa com um desconto de 20% para pagamento à vista. Quanto será pago pela mesma camisa em uma compra à vista?



Juro é a importância que se paga pelo empréstimo de certa quantia de dinheiro, chamada de capital, durante algum tempo.

#### **Juros simples**

Juros simples: são calculados tendo como base o capital inicial, período a período. O valor do juro é constante nos períodos de tempo considerados.

O valor dos juros simples (J) produzidos por um capital (C) a uma taxa fixa (i) durante um período (n) é dado por:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

#### **Exemplos:**

1. Qual é o valor dos juros simples pagos pelo empréstimo de R\$650,00 a uma taxa de 2% ao mês, durante 9 meses?

#### Solução:

```
Sendo:
```

```
C = 650,00 reais;

i = 2\% ao mês = 0,02;

n = 9 meses.
```

Substituindo os valores temos:

```
j = C.i.n

j = 650.0,02.9

j = 117
```

Resposta: O valor a ser pago é R\$117,00.

Mas atenção: A taxa (i) e o número de períodos (n) devem estar na mesma unidade de tempo.

2. Quanto rendeu a quantia de R\$1.500,00, aplicada a juros simples, a uma taxa de 4,5% ao mês, durante 2 anos?

#### Solução:

```
Sendo:

C = 1.500,00 \text{ reais};

i = 4,5\% \text{ ao mês} = 0,045;

t = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}.

Como:

j = C \cdot i \cdot t

j = 1.500 \cdot 0,045 \cdot 24

j = 1.620
```

Resposta: O rendimento será de R\$1.620,00.

Mas atenção: A taxa (i) e o número de períodos (n) devem estar na mesma unidade de tempo.

# Exercícios

7. Calcule os juros simples referente a um capital de R\$3.500,00 aplicado a uma taxa de 3% ao mês, durante 6 meses.

**8.** Determine os juros simples referente a um capital de R\$6.000,00 aplicado a taxa de 10% ao ano, durante 6 meses.

9. Um capital aplicado a juros simples rende R\$520,00 de juros em 2 meses, a uma taxa de 4% a.m. Qual é esse capital?

**10.** Durante quanto tempo um capital de R\$500,00 deve ser aplicado, à uma taxa de juros simples de 12% ao ano, para que se obtenha um juro de R\$300,00?

11. Qual é o montante de um capital de R\$800,00 aplicado à taxa de 2,5% ao mês pelo prazo de 10 meses? Sendo que montante (M) = C + J.

12. Que montante receberá um aplicador que tenha investido à taxa de juros simples de 0,64% ao mês, um capital de R\$ 2.000,00, durante 3 anos? Sendo que montante (M) = C + J.

#### **Juros compostos**

Um capital está aplicado a juros compostos quando, após cada período préfixado do prazo do investimento, os juros são incorporados ao capital, passando a render juros.

O valor do montante (M) produzido por um capital (C) aplicado a uma taxa (i) de juros compostos, durante um período (n) é dado por:

```
M = C \cdot (1+i)^n

Em que:

M \in O montante;

C \in O capital;

i \in A taxa;

n \in O número de períodos.

Como o montante M \in O igual ao capital acrescido dos juros temos que:

M = C + J, assim:

J = M - C
```

#### **Exemplos:**

1. Qual é o montante produzido pelo capital de R\$1.900,00, aplicado a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante 6 meses?

#### Solução:

```
Sendo:

C = 1.900,00 \text{ reais};

i = 2\% \text{ ao mês} = 0,02;

t = 6 \text{ meses}.

Como:

M = C \cdot (1+i)^t

M = 1.900 \cdot (1+0,02)^6

M = 1.900 \cdot (1,02)^6

M = 1.900 \cdot 1,126162

M = 2.139,70
```

Resposta: O montante produzido será de aproximadamente R\$ 2.139,70.

# **Exercícios**

13.	Qual é o montante produzido pelo capital de R\$800,00, aplicado a uma taxa de juros compostos de 9% ao mês, durante 3 meses?
14.	Um capital de R\$5.000,00 foi investido numa caderneta de poupança, em regime de juros compostos, que paga um juro mensal de 0,72%. Qual o valor que o investidor encontrará ao final de 3 anos?
15.	Calcule o montante produzido por R\$8.000,00 aplicado à taxa de 4% ao trimestre, após um ano, no sistema de juros compostos?
16.	Determine o capital que, investido a juros compostos de 0,25% ao mês, du-

rante 4 meses, produziu um montante de R\$8.585,32.

<b>17.</b>	Qual é o capital que, investido durante 6 anos, produziu um montante de
	R\$39.476,45, aplicado à uma taxa de juros compostos de 12% ao ano?

**18.** Um investidor aplicou R\$15.000,00 em um banco que paga à taxa de juros compostos, 15% ao ano. Após certo tempo, ele recebeu um montante no valor de R\$19.837,50. Quanto tempo o dinheiro ficou aplicado?

19. Uma quantia x é aplicada em um fundo de investimento que rende a uma taxa de 15% a.a., com juros capitalizados ao final de cada ano. Após quanto tempo essa quantia será dobrada? Dados:  $\log 115 \cong 2,0607$  e  $\log 2 \cong 0,3010$ .

**20.** A tabela abaixo mostra a variação mensal dos juros de certa aplicação bancária no 1.º trimestre de determinado ano:

Janeiro	Fevereiro	Março
1,01%	0,94%	1,08%

Considerando que o banco cobra uma taxa de manutenção de 1% do capital inicial na entrada e mais 10% do lucro obtido em todos os meses, quanto você poderá resgatar após o mês de março se você aplicar R\$1.000,00 em janeiro?

# Gabarito

#### Matemática Financeira

1.

a) 
$$15\% = \frac{15}{100} = 0.15$$

b) 
$$3.8 = \frac{380}{100} = 380\%$$

c) 
$$62\% = \frac{62}{100} = 0.62$$

2.

a) 
$$40\%$$
 de 1  $200 = \frac{40}{100}$  de 1  $200 = \frac{40}{100} \cdot 1200 = 480$ 

b) 
$$\frac{92}{460} = 0.2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

3. 
$$\frac{920}{1500} \cong 0,6133 \cong \frac{61,33}{100} \cong 61,33\%$$

4. 63% de 30 000 = 
$$\frac{63}{100}$$
 de 30 000 =  $\frac{63}{100} \cdot 30 000 = 18 900 pães$ 

5. Gasolina: 40% de 36 litros = 
$$\frac{40}{100}$$
 de  $36 = \frac{40}{100} \cdot 36 = 14,4$  litros

Álcool: 60% de 36 litros = 
$$\frac{60}{100}$$
 de 36 =  $=\frac{60}{100} \cdot 36 = 21,6$  litros

6. Aumento de 25%: 25% de  $60 = \frac{25}{100}$  de  $60 = \frac{25}{100} \cdot 60 = 15$ Com um aumento de 25% a camisa passa a custar R\$75,00.

Desconto de 20%  
20% de 75 = 
$$\frac{20}{100}$$
 de 75 =  $\frac{20}{100} \cdot 75 = 15$ 

Com um desconto de 20% a camisa volta a custar R\$60,00, para pagamento à vista.

7. Sendo: C = 3.500,00 reais; i = 3% ao mês e n = 6 meses.

Como:

$$j = C.i.n$$

$$j = 3500.0,03.6$$

$$i = 630,00$$

O valor dos juros é de R\$630,00.

**8.** Sendo: C = 6.000,00 reais; i = 10% ao ano e n = 0,5 ano.

Como:

$$i = C. i. n$$

$$i = 6000.0, 1.0, 5$$

$$i = 300$$

O valor dos juros é de R\$300,00.

9. Sendo: j = 520,00 reais; i = 4% ao mês e n = 2 meses.

Como:

$$i = C.i.n$$

$$520 = C.0,04.2$$

$$520 = C.0,08$$

$$C = 6500.00$$

O valor do capital é de R\$6.500,00.

**10.** Sendo: C = 500,00 reais; i = 12% ao ano e j = 300,00 reais.

Como:

$$j = C.i.n$$

$$300 = 500.0.12.n$$

$$300 = 60 . n$$

$$n = 5$$
 anos.

**11.** Sendo: C = 800,00 reais; i = 2,5% ao mês e n = 10 meses.

Como:

$$j = C.i.n$$

$$j = 800.0,025.10$$

$$j = 200,00$$
 reais

Como: M = C + j, então:

$$M = 800 + 200$$

$$M = 1000,00$$

O valor do montante é de R\$1.000,00.

**12.** Sendo: C = 2.000,00 reais; i = 0,64% ao mês e n = 36 meses.

Como:

$$i = C.i.n$$

$$j = 2000.0,0064.36$$

$$i = 460.80$$

Como: M = C + j, então:

$$M = 2000 + 460,80$$

$$M = 2460,80$$

O valor do montante é de R\$2.460,00.

**13.** Sendo: C = 800,00 reais; i = 9% ao mês e n = 3 meses.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 800 \cdot (1 + 0.09)^3$$

$$M = 800 \cdot (1,09)^3$$

$$M = 800.1,295029$$

$$M = 1036,02$$

O valor do montante é de R\$1.036,02.

**14.** Sendo: C = 5.000,00 reais; i = 0,72% ao mês e n = 36 meses.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 5000 \cdot (1 + 0.0072)^{36}$$

$$M = 5000 \cdot (1,0072)^{36}$$

$$M = 5000 . 1,294690066$$

$$M = 6473,45$$

O valor do montante é de R\$6.473,00.

**15.** Sendo: C = 8.000,00 reais; i = 4% ao trimestre e n = 4 trimestres.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 8000 \cdot (1 + 0.04)^4$$

$$M = 8000 \cdot (1,04)^4$$

M = 8000 . 1,16985856

$$M = 9358,86$$

O valor do montante é de R\$9.358.86.

**16.** Sendo: i = 0,25% ao mês; n = 4 meses e M = 8.585,32 reais.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$8585,32 = C.(1 + 0,0025)^4$$

$$8585,32 = C.(1,0025)^4$$

$$8585,32 = C.1,010037563$$

$$C = 8500,00$$

O valor do capital é de R\$8.500,00.

**17.** Sendo: i = 12% ao ano; n = 6 anos e M = 39.476,45 reais.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$39476,45 = C.(1 + 0,12)^6$$

$$39476,45 = C.(1,12)^6$$

$$39476,45 = C.1,97382268$$

$$C = 20\ 000,00$$

O valor do capital é de R\$20.000,00.

**18.** Sendo: C = 15.000,00 reais; i = 15% ao ano e M = 19.837,50 reais.

Como:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$19837,50 = 15000.(1 + 0,15)^n$$

$$19837,50 = 15000.(1,15)^n$$

$$(1,15)^{\rm n} = \frac{19\,837,50}{15\,000}$$

$$(1,15)^n = 1,3225$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, teremos:

$$\log (1,15)^n = \log 1,3225$$

$$n \cdot \log (1,15) = \log 1,3225$$

$$n = \frac{\log 1,3225}{\log 1,15}$$

$$n = \frac{0,12139568}{0,06069784}$$

$$n = 2$$
 anos

**19.** Como os juros são capitalizados, trata-se de juros compostos. Utilizando a fórmula do montante temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$
 com:

$$M = 2C$$

$$i = 15\%$$

Substituindo na fórmula do montante temos:

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

$$2C = C \cdot (1 + 0.15)^n$$

$$2 = (1 + 0.15)^n$$

Aplicando logaritmo nos dois membros da equação anterior temos:

$$log 2 = (1 + 0.15)^n$$

$$log 2 = n \cdot log 1,15$$

$$\log 2 = n \cdot \log \frac{115}{100}$$

$$\log 2 = n \cdot (\log 115 - \log 100)$$

Substituindo os valores dos logaritmos temos:

$$n = 4.958$$

Aproximadamente 5 anos.

**20.** C = 1000

Primeiro mês:

$$C_1 = 1000 - 1\% . 1000$$

$$C_1 = 990$$

$$M_1 = 990 \cdot (1 + 1,01\%)$$

$$M_1 = 990 \cdot (1,0101)$$

$$M_1 = 999,99$$

Retirando os 10% do banco temos:

$$R = 999,99.(0,1)$$

$$R = 1$$

Portanto o montante ao final do primeiro mês é:

$$M = 1000 - 1$$

$$M = 999$$

$$C_{2} = 999$$

$$M_3 = 999 \cdot (1 + 0.94\%)$$

$$M_3 = 999 \cdot (1,0094)$$

$$M_{2} = 1008,4$$

Retirando os 10% do banco temos:	
R = 9,94 . (0,1)	
R =0,99	
Portanto o montante ao final do segundo mês é:	
M = 1 008,4 – 0,99	
M = 1 007,41	
3.º mês:	
C <sub>3</sub> = 1 007,41	
$M_3 = 1 007,41 \cdot (1 + 1,08\%)$	
M <sub>3</sub> =1 007,41 . (1,0108)	-
$M_3 = 1 \ 018,29$	
Retirando os 10% do banco temos:	
R = 10,88 . (0,1)	
R =1,09	
Portanto o montante ao final do segundo mês é:	
M = 1 018,29 - 1,09	
M = 1 017,2	
Portanto ao final de março poderá ser resgatada a quantia de R\$1.017,20	