Algorithmique des images, textes et données

2. Transformations Géométriques 2D

David Parello

david.parello@univ-perp.fr

Université de Perpignan Via Domitia

S4 Licence 2023-2024

Les différentes transformations

- Motivations
- Les transformations euclidiennes
- Les homothéties
- Les cisaillements
- Les transformations affines

Interpolation

- Transformations géométrique d'une image
- Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1
- Généralisation aux ordres supérieurs

Exemple d'application : le morphing

- Qu'est ce que le morphing
- Triangularisation des images
- Déterminer la transformation

Motivations

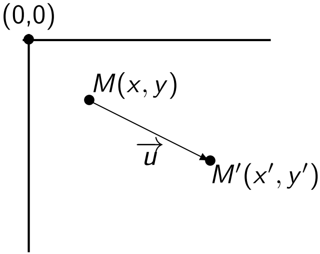
- Transformation géométriques 2D : l'ensemble des transformations du plan pouvant être appliquées aux pixels d'une image
  - adapter l'échelle de l'image
  - zoomer sur une image
  - rotation une image
  - translation d'une image
- Ces transformations sont utilisées dans plusieurs tâches courantes.
  - correction du mauvais alignement d'une image scannée
  - zoom des appareils photos numériques
- Il faut faire attention à traiter les cas limites de façon cohérente
  - translation vers la gauche, comment traiter le bord droit ?

Les transformations euclidiennes

- Les transformations euclidiennes (également qualifiées de “rigides”) sont les transformations qui préservent les distances et les angles.
- Ces transformations sont des compositions de translations et de rotations.
- Toute transformation euclidienne peut s’exprimer comme la composition d’une rotation et d’une translation ou comme la composition d’une translation et d’une rotation.
- Attention la composition de rotation et de translation n’est pas commutative – i.e. si τ est une translation et r est une rotation, en général $r \circ \tau \neq \tau \circ r$.

Les transformations euclidiennes

- Une translation est entièrement déterminée par un vecteur $\overrightarrow{u}$.



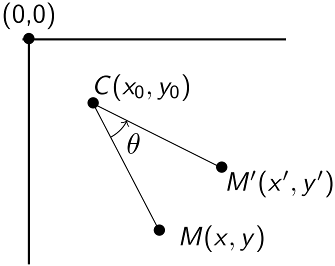
- Les coordonnées (x', y') d'un point après translation de vecteur $\overrightarrow{u}(x_u, y_u)$

$$\begin{cases} x' &= x + x_u \\ y' &= y + y_u \end{cases}$$

- L'inverse de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$

Les transformations euclidiennes

- Une rotation est déterminée par un centre $C(x_0, y_0)$ et d'un angle θ.



- Les coordonnées (x', y') d'un point après rotation sont données par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x_0 + (x - x_0)\cos(\theta) - (y - y_0)\sin(\theta) \\ y' & = & y_0 + (x - x_0)\sin(\theta) + (y - y_0)\cos(\theta) \end{array} \right.$$

- L'inverse de la rotation de centre C et d'angle θ est la rotation de centre C et d'angle $-\theta$.

Les homothéties

- Les homothéties sont des changements d'échelle selon l'axe des x et l'axe des y à partir d'une origine donnée. On les qualifie souvent de "zoom".

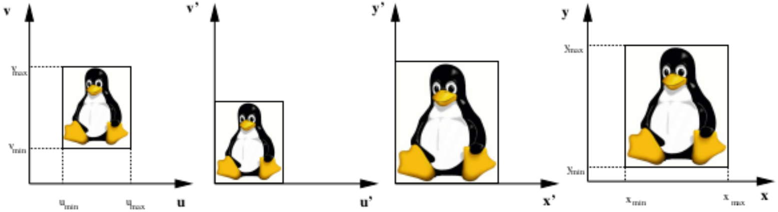
- Une homothétie de rapport λ_x et λ_y par rapport à l'origine s'exprime par
$$\begin{cases} x' &= \lambda_x x \\ y' &= \lambda_y y \end{cases}$$

- Un rapport λ tel que $|\lambda| > 1$ provoque un grossissement de l'image sur l'axe concerné

- Un rapport λ tel que $|\lambda| < 1$ provoque un rapetissement de l'image sur l'axe concerné

Les homothéties

- Pour effectuer une homothétie de centre $C(x_0, y_0)$ on commence par effectuer une translation à l'origine du repaire (vecteur $\overrightarrow{CO}$), puis une homothétie de centre l'origine, puis une translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$



$$\begin{cases} x' &= x_0 + \lambda_x(x - x_0) \\ y' &= y_0 + \lambda_y(y - y_0) \end{cases}$$

- Ce sont les homothétie ayant pour origine le centre de l'image et de facteur supérieur à 1 qui sont utilisées pour effectuer un zoom sur les appareils photos numériques.

Les cisaillements

- Le cisaillement est une transformation qui fait penser à un étirement selon un axe. Le cisaillement selon les abscisses ne modifie pas la coordonnée en y et vice-versa.

- Cisaillement selon les abscisses de coefficient c_x

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + c_x y \\ y' & = & y \end{array} \right.$$

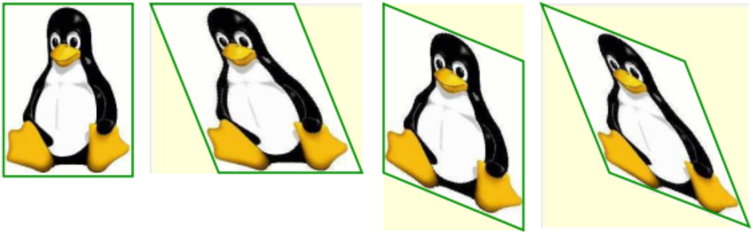
- Cisaillement selon les ordonnées de coefficient c_y

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & y + c_y x \end{array} \right.$$

- Les transformations précédentes sont des cas particuliers du cisaillement selon les deux axes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + c_x y \\ y' & = & y + c_y x \end{array} \right.$$

Les cisaillements



$c_x = c_y = 0$ $\quad c_x = 0.4$ $\quad c_y = 0.4$ $\quad c_x = c_y = 0.4$

- La transformation inverse d'un cisaillement de coefficients c_x, c_y (avec $c_x c_y \neq 1$) est donnée par

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{x - c_x y}{1 - c_x c_y} \\ y' &= \dfrac{y - c_y x}{1 - c_x c_y} \end{cases}$$

Les différentes transformations

- Motivations
- Les transformations euclidiennes
- Les homothéties
- Les cisaillements
- Les transformations affines

Interpolation

- Transformations géométrique d'une image
- Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1
- Généralisation aux ordres supérieurs

Exemple d'application : le morphing

- Qu'est ce que le morphing
- Triangularisation des images
- Déterminer la transformation

Les transformations affines

- Les transformations affines préservent le plan affine ainsi que le parallelisme des droites, elles comprennent notamment
  - les transformations euclidiennes
  - les homothéties
  - les symétries
  - les cisaillements
- De manière générale toutes les transformations précédentes peuvent s'exprimer sous la forme d'un produit matrice vecteur. Par exemple
  - Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(x_u, y_u)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_u \\ 0 & 1 & y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - Rotation de centre $C(x_0, y_0)$ et d'angle θ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_0 - x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y_0 - x_0\sin(\theta) - y_0\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les transformations affines

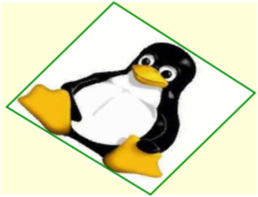
- Une transformation affine est la généralisation des transformations précédentes à toutes les matrices de type 2×3.
- Une transformation affine est déterminée par 6 paramètres

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Exemple :

Transformation affine de matrice

$$\begin{pmatrix} 1.27 & -0.82 & 200 \\ 0.78 & 0.78 & 20 \end{pmatrix}$$



Les transformations affines

- Bien qu'un transformation affine puisse être définie par une matrice 2×3, on préfère généralement lui associer une matrice 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le produit matrice vecteur précédent devient donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Avantage** : cela permet de composer plusieurs transformations en effectuant les produits matriciels à l'avance.

- **Remarque** : la transformation est inversible si et seulement si $a_{00}a_{11} \neq a_{10}a_{01}$

Les transformations affines

- Il est possible de déterminer les coefficients d'une transformation affine à l'aide du déplacement de quelques points $((x, y) \rightarrow (x', y'))$
- Chaque couple de point fournissant deux équations, on a besoin de 3 couples de points (image d'origine $\rightarrow$ image transformée) pour retrouver les 6 coefficients de la matrice.

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}}_{X} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$$

Les transformations affines

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Le système précédent admet une solution unique lorsque la matrice X précédente est inversible or

$$\det(X) = -\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}^2$$

- La matrice est donc inversible si et seulement si les trois points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ choisis sont non alignés.

Les différentes transformations

- Motivations
- Les transformations euclidiennes
- Les homothéties
- Les cisaillements
- Les transformations affines

Interpolation

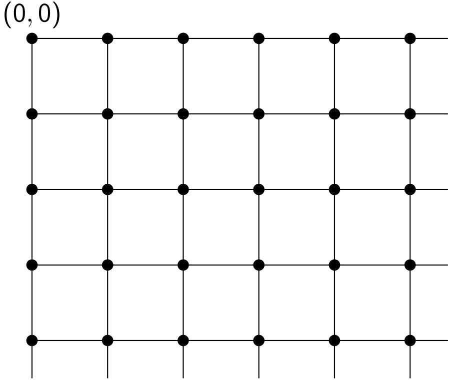
- **Transformations géométrique d'une image**
- Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1
- Généralisation aux ordres supérieurs

Exemple d'application : le morphing

- Qu'est ce que le morphing
- Triangularisation des images
- Déterminer la transformation

Transformations géométrique d'une image

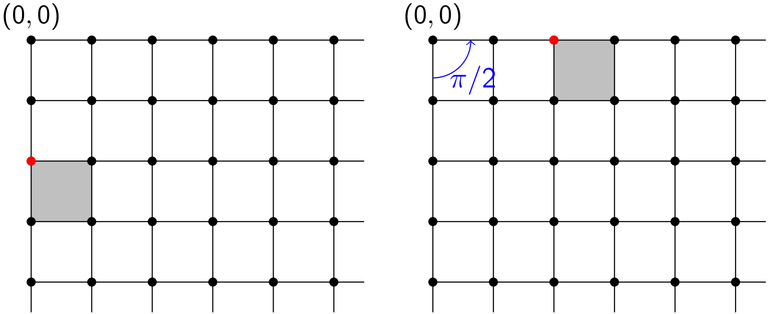
- Une image est formée par un ensemble de pixels $P(x, y)$, chaque pixel pouvant être vu comme un point à coordonnées entières : $(x, y) \in \mathbb{N}^2$



- Lorsque l'on applique une transformation géométrique f au pixel P de coordonnées (x, y), le pixel de départ se retrouve aux coordonnées $f(x, y)$ sur l'image transformée.

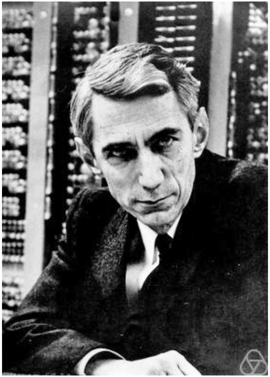
Transformations géométrique d'une image

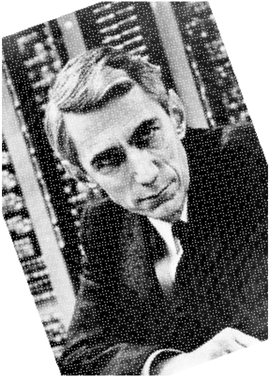
- En appliquant une rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\pi/2$ au pixel de coordonnées $(2,0)$, celui ci se retrouve aux coordonnées $(0,2)$.



- Observons maintenant le résultat sur une image entière

Transformations géométrique d'une image





Rotation de $\theta = 20^\circ$ de l'image de Shannon

- Certains pixels apparaissent blanc, pourquoi ?

Transformations géométrique d'une image

- Supposons que l'image de départ soit de taille $M \times N$
- Lorsque l'on calcule l'ensemble des transformations des pixels de la nouvelle image $\{f(x,y)\}_{\substack{0 \leq x < M \\ 0 \leq y < N}}$
- Pas de certitude sur le fait que $f(x,y) \in [0,M[\times[0,N[$
  - certains pixels sont envoyés en dehors de la nouvelle image
- La fonction f n'est pas forcément surjective

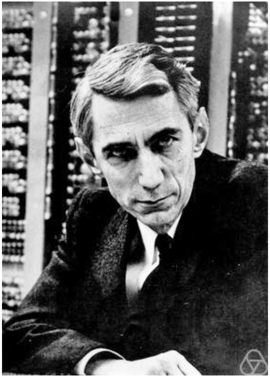
$$\exists\ (x',y') \in [0,M[\times[0,N[\text{ tq } \forall (x,y) \in [0,M[\times[0,N[\ f(x,y) \neq (x',y')$$

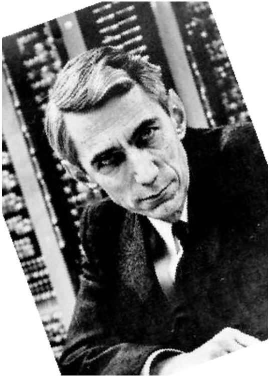
  - il peut exister des pixels de l'image d'arrivée qui ne correspondent à aucun pixel de l'image de départ

Transformations géométrique d'une image

- Pour résoudre ce problème il faut raisonner à l'envers.
  - Idée de départ : calculer l'image par la transformation f de tous les pixels de l'image de départ.
  - Meilleure idée : calculer pour chaque pixel de l'image d'arrivée son antécédent sur l'image de départ – i.e. son image par la transformation inverse f^{-1}
- Lorsque l'antécédent ne fait pas partie de l'image de départ, on suppose généralement que le pixel est de couleur noire.
  - Si $f^{-1}(x', y') \notin [0, M[\times[0, N[$ alors $P(x', y')$ sera noir.
- **Exemple** : rotation d'angle θ d'une image $\{P(x, y)\}$
  - on cherche l'image de chaque pixel $\{P(x', y')\}$ par une rotation d'angle $-\theta$.
  - si l'on trouve un antécédent $(x, y) = f_{-\theta}(x', y')$ alors $P(x', y') = P(x, y)$.

Transformations géométrique d'une image

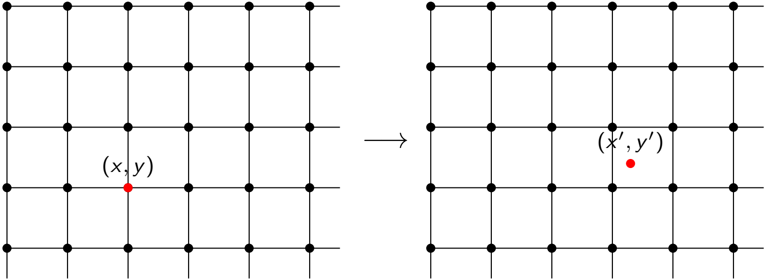




Rotation de $\theta = 20°$ de l'image de Shannon

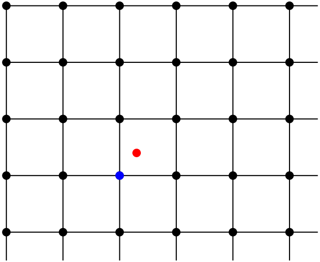
Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1

- Lorsque l'on cherche l'image par f^{-1} du point (pixel) de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ on obtient un couple $(x', y') = f^{-1}(x, y)$.
  - Rien ne garantie que $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ et en général ce ne sera pas le cas.



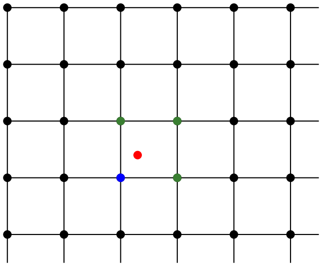
- Quelle valeur de pixel prendre, quand on tombe au milieu de quatre ?

Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1

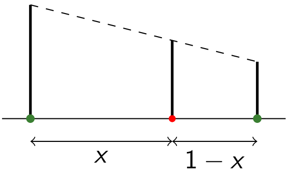


- Idée naturelle : on prend la valeur du pixel le plus proche.
  - Problème : les contours apparaissent hachés

Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1



- Autre idée : on prend en compte les 4 pixels les plus proches.
  - Quel poids accorder à la valeur de chacun des quatres pixels ?
  - Regardons le problème en dimension 1



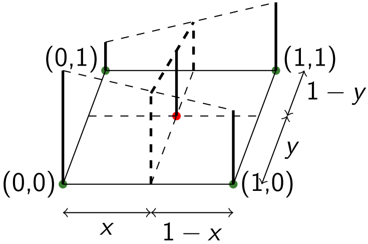
On connait $f(0)$ et $f(1)$, si $x \in [0,1]$, alors :

$$f(x) = (1-x) \cdot f(0) + x \cdot f(1)$$

Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1

- En dimension 1 on parle d'interpolation linéaire

- En dimension 2 on parle d'interpolation bilinéaire



$$f(x,y) = (1-x)(1-y)f(0,0) + x(1-y)f(1,0) + (1-x)yf(0,1) + xyf(1,1)$$

- Comment généraliser si l'on veut prendre en compte plus de points ?

Les différentes transformations

- Motivations
- Les transformations euclidiennes
- Les homothéties
- Les cisaillements
- Les transformations affines

Interpolation

- Transformations géométrique d'une image
- Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1
- Généralisation aux ordres supérieurs

Exemple d'application : le morphing

- Qu'est ce que le morphing
- Triangularisation des images
- Déterminer la transformation

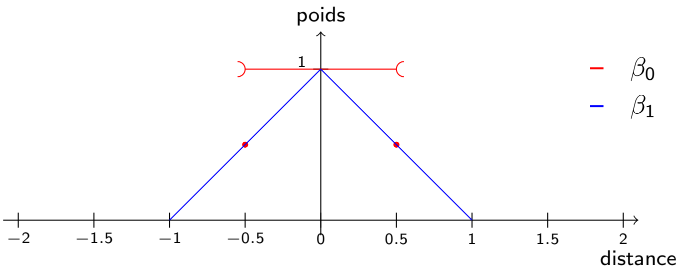
Généralisation aux ordres supérieurs

- Retour en dimension 1
  - On souhaite prendre en compte la valeur de $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) points pour déterminer la valeur de la fonction f.
    - pour $n = 0$ on prend la valeur du pixel le plus proche
    - pour $n = 1$ on interpole linéairement f par rapport aux deux pixels les plus proche
    - pour $n = 2$?
  - Il faut déterminer une fonction β_n qui attribue un poids à chaque pixels de l'image en fonction de leur distance par rapport au point obtenu.
  - Quelques propriétés relativement évidentes :

$$\forall x \in [0, N] \quad f(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_n(x-k) f(k)$$

    - seulement les $n+1$ points les plus proches : $|y| > n/2 \implies \beta_n(y) = 0$
    - la somme des poids doit faire 1 : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=0}^{N} \beta_n(x-i) = 1$
    - la fonction est paire : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \beta_n(y) = \beta_n(-y)$

Généralisation aux ordres supérieurs



- pour $n = 0$ on prend la valeur du pixel à distance $< 1/2$
  - Cas particulier : si on est pile entre deux pixels alors on fait la moyenne de leur valeur
- Pour $n = 1$ on interpole linéairement
  - $\beta_1(0) = 1$
  - $\beta_1(-1) = \beta_1(1) = 0$

Généralisation aux ordres supérieurs

- La généralisation aux ordres supérieurs est effectuée grâce à la théorie des B splines. La B-spline de degré n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{n+1}{(n+1-k)!k!} \left(x - k + \frac{n+1}{2}\right)_+^n$$

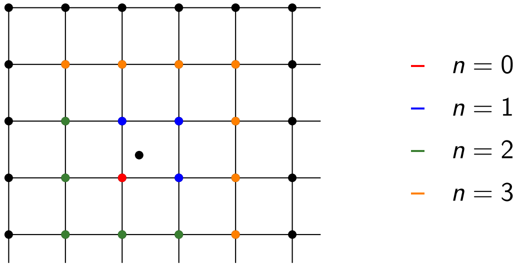
avec

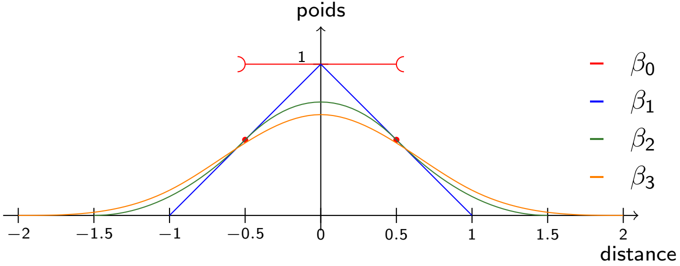
$$(y)_+^n = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1/2 & \text{si } y = 0 \text{ et } n = 0 \\ 1 & \text{si } y > 0 \text{ et } n = 0 \\ y^n & \text{si } y \geq 0 \text{ et } n \geq 1 \end{cases}$$

- Pour $n = 0$ on obtient :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)_+^0 - \left(x - \frac{1}{2}\right)_+^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/2 \\ 1/2 & \text{si } x = -1/2 \\ 1 & \text{si } -1/2 < x < 1/2 \\ 1/2 & \text{si } x = 1/2 \\ 0 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Généralisation aux ordres supérieurs





Généralisation aux ordres supérieurs

- En dimension 1 on interpole la valeur d'un pixel à l'ordre n avec la formule :

$$\forall x \in [0, N] \quad f(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_n(x-k) f(k)$$

- En dimension 2 on obtient donc :

$$\forall (x, y) \in [0, M] \times [0, N] \quad f(x, y) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \beta_n(x-i)\beta_n(y-j) f(i, j)$$

- C'est à dire qu'on accorde au pixel de coordonnées (i, j) un poids de $\beta_n(x-i)\beta_n(y-j)$

Généralisation aux ordres supérieurs

$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$

Rotation de 20° de l'image de Shannon avec des interpolations d'ordre n.

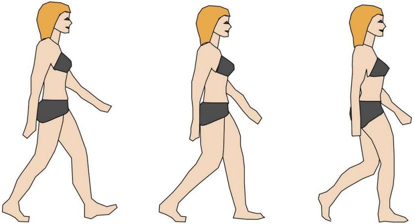
Généralisation aux ordres supérieurs

$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$ $\qquad$ $n = 2$ $\qquad$ $n = 3$

18 rotations successives de 20° avec des interpolations d'ordre n.

Qu'est ce que le morphing

- Le morphing est un des effets spéciaux applicables à des images photographiques ou cinématographiques.
- À partir de deux images de départ, il permet de fabriquer une troisième image qui sera la position intermédiaire des deux premières.



- Cela permet de réaliser des vieillissements accélérés dans les films, d'éviter de dessiner plusieurs dessins intermédiaires dans les animés.
- Il a été utilisé au cinéma dans plusieurs films (Indiana Jones et la dernière croisade, Terminator 2, Titanic, ...)

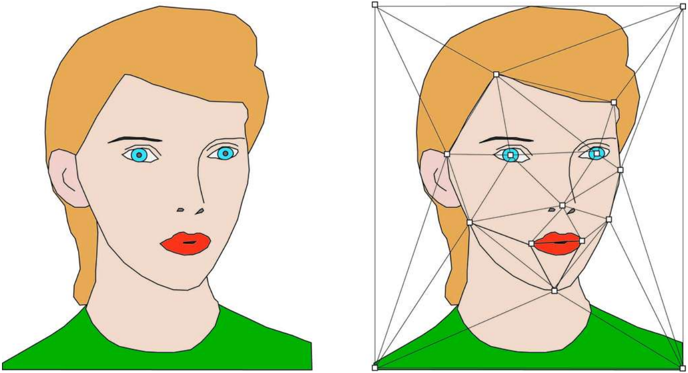
Qu'est ce que le morphing

- Son principe est simple :
  1. Les deux dessins doivent être découpés en deux systèmes de triangles compatibles (même nombre, même disposition).
  2. Pour chaque paire de triangles on peut déterminer les coordonnées d'un triangle intermédiaire.
  3. On peut donc déterminer la transformation permettant de passer du triangle de départ au triangle intermédiaire et du triangle intermédiaire au triangle d'arrivé.
     - nous avons l'image de 3 points non-alignés pour déterminer la transformation.
  4. Une fois les transformations déterminées, on peut calculer la valeur de chaque pixel du triangle intermédiaire.

- Comment choisir les triangles ?

Triangularisation des images

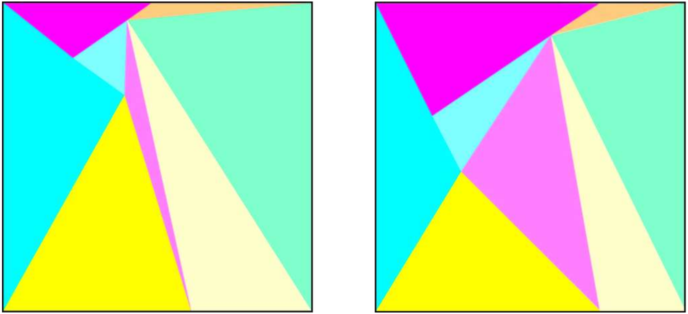
- Les sommets des triangles doivent correspondre à des éléments importants du dessin
  - les coins de l'image
  - pour un visage : menton, oreilles, oeil, front



- Les découpages doivent être effectués de la même façon sur les deux images.

Triangularisation des images

- Une fois les deux dessins découpés, on obtient deux ensembles de triangles : chaque triangle sur l'image de départ correspondant à un triangle sur l'image d'arrivée.



- Il s'agit à présent d'interpoler chaque paire de triangles de sorte à déterminer les coordonnées d'un triangle intermédiaire

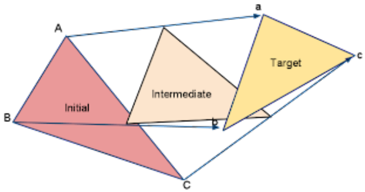
Triangularisation des images

- **Rappel** : étant donné deux points $P(x_P, y_P)$ et $Q(x_Q, y_Q)$, les points du segments $[PQ]$ ont pour coordonnées

$$\begin{cases} x = (1-\alpha)x_P + \alpha x_Q \\ y = (1-\alpha)y_P + \alpha y_Q \end{cases}$$

  avec $\alpha \in [0, 1]$
  - si $\alpha = 0$ le point correspond à P
  - si $\alpha = 1$ le point correspond à Q
  - si $\alpha = 0.5$ le point correspond au milieu de $[PQ]$

- On peut donc déterminer les coordonnées des sommets de notre triangle intermédiaire



Les différentes transformations

- Motivations
- Les transformations euclidiennes
- Les homothéties
- Les cisaillements
- Les transformations affines

Interpolation

- Transformations géométrique d'une image
- Interpolation à l'ordre 0 et à l'ordre 1
- Généralisation aux ordres supérieurs

Exemple d'application : le morphing

- Qu'est ce que le morphing
- Triangularisation des images
- Déterminer la transformation

Déterminer la transformation

- Étant donné que l'on dispose des coordonnées des sommets du triangle de départ et du triangle intermédiaire on peut déterminer la transformation affine pour passer de l'un à l'autre.
- De la même manière on peut déterminer la transformation permettant de passer du triangle intermédiaire au triangle final.
- Pour chaque pixel du triangle intermédiaire on peut donc :
  - Chercher la couleur du pixel correspondant sur le triangle de départ C_d
  - Chercher la couleur du pixel correspondant sur le triangle d'arrivé C_a
  - Obtenir la couleur du pixel en calculant : $(1-\alpha)C_d + \alpha C_a$
- On applique ce procédé à chaque paire de triangles des images de départ et finale pour obtenir l'image intermédiaire.