Théorie des Jeux.

Walter Briec

Université de Perpignan Via Domitia-LAMPS

8 Janvier 2020

Plan

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Notion de Jeux

Un jeu est la représentation d'une situation dans laquelle un certain nombre d'individus prennent des décisions stratégiquement indépendantes. Cela signifie que l'issue du jeux dépend non seulement des décisions prise par un agent mais aussi des décisions prises par les autres. Les meilleurs décisions dépendent donc aussi des décisions prises par les autres joueurs.

Elements Constitutifs d'un Jeu

Plusieurs éléments entrent en compte dans la définition d'un jeu :

- Les joueurs concernés
- Les règles du jeu
- Les résultats liés à chaque action du jeu
- Les gains liés aux préférences des joueurs sur tous les résultats possibles

Exemple : Le jeu des tirs aux buts

Les 4 points précédent apparaissent comme suit dans cet exemple :

- Les joueurs concernés : Le tireur et le Gardien.
- Les règles du jeu : chacun choisit le côté droit ou le côté gauche.
- Les résultats liés à chaque action du jeu : But marqué ou pas.
- Les gains liés aux préférences des joueurs sur tous les résultats possibles : Par exemple 100 Euros en cas de gain et -100 Euros dans le cas contraire.

Ce type de jeu est aussi appelé jeu à somme nulle : ce que l'un gagne, l'autre le perd.

Forme extensive d'un jeu

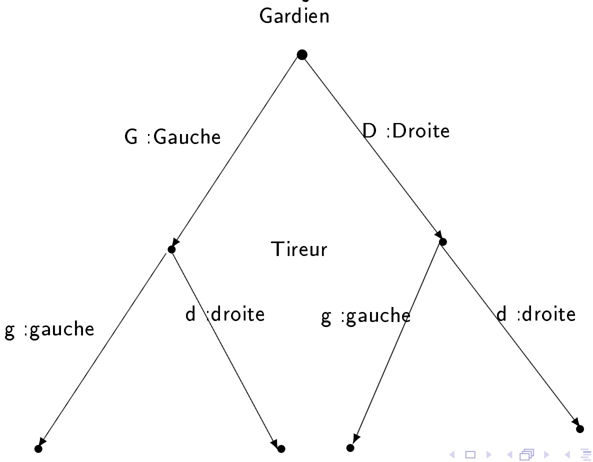
La forme extensive spécifie :

- L'ordre dans lequel chaque joueur joue.
- L'information dont dispose chaque joueur à chaque étape.
- Les gains obtenus en fonction des choix réalisés.
- Le rôle éventuel des probabilités ; une distribution éventuelle de probabilité sur les mouvements de la nature.

La forme extensive d'un jeu peut se représenter sous forme séquentielle ou non séquentielle.

La Forme Séquentielle

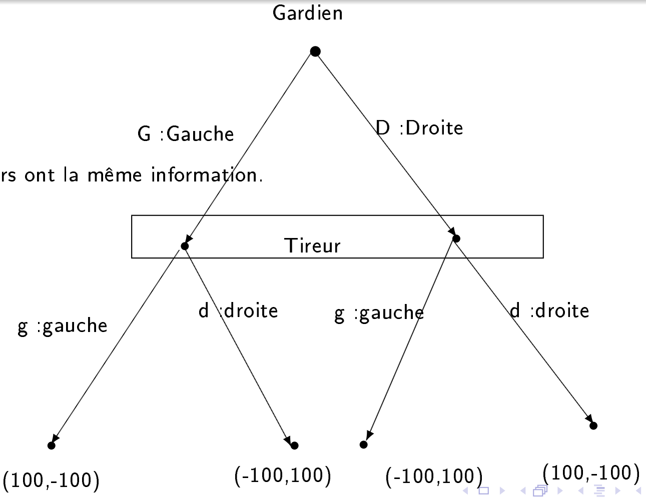
On peut l'illustrer dans le cas du jeu des tirs aux buts.



Forme séquentielle

Ce jeu décrit la situation suivante : à l'instant $t = 1$ seul le gardien prend une décision. Il choisit la droite D ou la gaucha G. A l'instant $t = 2$ le second tireur prend sa décision en fonction du choix du gardien. Il a une information sur son choix. Les résultats montrent qu'il aura à tirer du côté qui n'est pas choisi par le gardien.

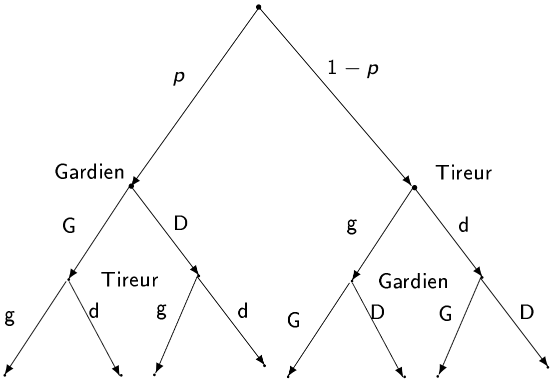
Forme Extensive non-séquentielle



Les deux joueurs ont la même information.

Différences entre les Approches

La différence avec la première approche est qu'ici le joueur 2 n'a plus d'information sur le choix du gardien. On peut aussi proposer une forme en stratégie mixte qui intègre les probabilités choisies par les joueurs d'adopter l'une ou l'autre des stratégies.



Stratégies Pures

Les décisions d'aller à gauche ou à droite sont appelées Stratégies pures. Dans le cas d'un jeu en stratégie mixte, ce sont les états de la nature qui vont imposer par exemple lequel des deux joueurs commence le premier.

Forme Normale d'un Jeu

On peut représenter un jeu en forme normale par un tableau qui reporte tous les gains qui sont associés.

$1\backslash 2$	(g,g)	(d,d)	(g,d)	(d,g)
G	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$
D	$-100 \quad \backslash \quad 100$	$100 \quad \backslash \quad -100$	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$

Par exemple, pour le joueur 2 (d,g) signifie que le tireur répond d si le gardien joue G

et répond g si le gardien joues D.

Forme Normale (non-séquentielle)

Dans le cas non séquentiel la forme est plus simple.

$1 \backslash 2$	g	d
G	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$
D	$-100 \quad \backslash \quad 100$	$100 \quad \backslash \quad -100$

Définition Formelle d'un Jeu

Il est utile de modéliser les paiements des joueurs en utilisant la notion de fonction d'utilité.

Définition Formelle d'un Jeu à 2 Joueurs

On appelle jeu à 2 joueurs la collection $\mathcal{G} = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ où S_1 et S_2 sont les ensembles de stratégies respectives des joueurs 1 et 2 et $u_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont leurs fonctions d'utilité.

Définition Formelle d'un Jeu : Jeu des tirs aux buts

Dans le cas du jeu des tirs au but on a :

$$S_1 = \{G, D\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{g, d\}.$$

• $u_1(G, g) = 100$, $u_1(G, d) = -100$; $u_1(D, g) = -100$, $u_1(D, d) = 100$.
• $u_2(G, g) = -100$, $u_2(G, d) = 100$; $u_2(D, g) = 100$, $u_2(D, d) = -100$.

La Matrice de Paiement

La matrice de paiements des joueurs est modélisée comme suit

Définition Formelle

Soit $\mathcal{G} = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ un jeu à deux joueurs où S_1 et S_2 sont les ensembles de stratégies respectives des joueurs 1 et 2 et $u_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont leurs fonctions d'utilité. La matrice

$$M = \Big(u_1(s_1, s_2) \backslash u_2(s_1, s_2)\Big)_{\substack{s_1 \in S_1 \\ s_2 \in S_2}}$$

est appelée matrice de paiement.

Jeux à somme nulle

La matrice de paiements des joueurs est modélisée comme suit

Définition Formelle

Soit $\mathcal{G} = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ un jeu à deux joueurs où S_1 et S_2 sont les ensembles de stratégies respectives des joueurs 1 et 2 et $u_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont leurs fonctions d'utilité. On dit que le jeu est à somme nulle si pour tput $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ on a :

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0.$$

1 Notion de Jeux

2 Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier

3 Equilibre de Nash

4 Stratégies Mixtes et Convexification

5 Jeux à Plusieurs Joueurs

6 Applications de la Théorie des Jeux

7 Jeux Coopératifs

Notion de Stratégie Dominante

On va considère l'exemple de deux journaux 1 et 2 qui décident soit de titre sur l'économie ou le sport. Ils cherchent donc à proposer le titres qui seront les plus vendeurs. On suppose que les lecteurs sont intéressés à 30% par l'économie et à 70 % par le sport. Si les deux journaux présentent le même titre ils se partagent les lecteurs $70/2 = 35$ ou $30/2 = 15$. Les stratégies sont les suivantes $s_1 = Sport$ et $s_1' = Economie$et $s_2 = Sport$ et $s_2' = Economie$. Il résulte que $S_1 = \{Sport, Economie\}$ et $S_2 = \{Sport, Economie\}$. La matrice de jeu est la suivante

Times \ Newsweek	$s_2 = Sport$	$s_2' = Economie$
$s_1 = Sport$	35 \ 35	70 \ 30
$s_1' = Economie$	30 \ 70	15 \ 15

$s_1 = Sport$ est une stratégie dominante pour le joueur 1, car

$u_1(Sport, Sport) = 35 > 30 = u_1(Economie, Sport)$ et

$u_1(Sport, Economie) = 70 > 15 = u_1(Economie, Economie)$. On vérifie de même que

titrer sur le sport est une stratégie dominante pour le joueur 2.

Équilibre en Stratégie Dominante.

Stratégie Dominante

Une stratégie $s_1^\star \in S_1$ est une stratégie dominante pour le joueur 1 si pour tout $(s_1, s_2) \in S$ on a

$$u_1(s_1^\star, s_2) \geq u_1(s_1, s_2).$$

De même une stratégie $s_2^\star \in S_2$ est une stratégie dominante pour le joueur 2 si pour tout $(s_1, s_2) \in S$ on a

$$u_2(s_1, s_2^\star) \geq u_2(s_1, s_2).$$

Si $s_1^\star$ et $s_2^\star$ sont respectivement des stratégies dominantes des joueurs 1 et 2 alors $(s_1^\star, s_2^\star) \in S = S_1 \times S_2$ est appelé un équilibre en stratégie dominante.

Existence de Stratégies Dominantes

Il peut ne pas exister de Statégie dominante.

Par exemple supposons que Times a 60 % et Newsweek 40 % .

Times \ Newsweek	s_2 = *Sport*	s_2' = *Economy*
s_1 = *Sport*	42 \ 28	70 \ 30
s_1' = *Economy*	30 \ 70	18 \ 12

Il n'y a pas de stratégie dominante pour le joueur 2 car
$u_1(Sport, Economie) = 30 > 28 = u_2(Sport, Sport)$ et
$u_2(Economie, Economie) = 12 < 70 = u_2(Economie, Sport)$.

Notons également que le jeu des tirs aux buts ne comporte aucune stratégie dominante.

Dilemme du Prisonnier.

Le jeu du dilemme du prisonnier illustre la nécessité de procéder à une coordination des agents. Le jeu est le suivant. Deux personnes sont arrêtées pour un délit. Le deux suspects sont arrêtés dans des cellules différentes si bien qu'ils ne peuvent pas échanger d'information. Le suspect qui dénonce l'autre sera récompensé par une remise totale de peine à condition que l'autre ne le dénonce pas. Ce dernier, s'il ne dénonce pas écope de 3 ans de prison. S'ils ne se dénoncent pas l'un et l'autre ils écopent de 1 an seulement. S'ils se dénoncent mutuellement ils écopent de 2 ans de prison.

$1 \setminus 2$	$s_2 = C$	$s'_2 = D$
$s_1 = C$	$-1 \quad \setminus \quad -1$	$-3 \quad \setminus \quad 0$
$s'_1 = D$	$0 \quad \setminus \quad -3$	$-2 \quad \setminus \quad -2$

Conséquence.

$s_2 = D$ est une stratégie dominante pour le joueur 1, car $u_1(C,D) = 0 > -1 = u_1(C,C)$ et $u_1(D,D) = -2 > -3 = u_1(C,D)$. On vérifie de même que dénoncer est une stratégie dominante pour le joueur 2. Il est clair que (D,D) est un équilibre en stratégie dominante. Et pourtant les deux joueurs auraient plus en coopérant. En effet

$$u_1(C,C) = u_2(C,C) = -1 > -2 = u_1(D,D) = u_2(D,D).$$

Cele signifie qu'un équilibre en stratégie dominate n'est pas nécessairement la meilleure solution pour les deux joueurs. Le comportement purement rationnel ne donne pas nécessairement la solution collectivement la meilleure. Cette propriété a des conséquence importante en économie industrielle pour le formation des cartels par exemple.

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Equilibre de Nash

Considérons le jeu précédent du dilemme du prisonnier.

$1 \setminus 2$	$s_2 = C$	$s_2' = D$
$s_1 = C$	$-1 \quad \setminus \quad -1$	$-3 \quad \setminus \quad 0$
$s_1' = D$	$0 \quad \setminus \quad -3$	$-2 \quad \setminus \quad -2$

Dans ce jeu, on observe que si le joueur 1 joue D, l'autre a également intérêt à jouer D. L'inverse est également vrai, si le joueur 2 joue D l'autre a également intérêt à jouer D. Aucun joueur n'a donc intérêt à dévier. On est donc en présence d'un concept d'équilibre. En l'occurence, il s'agit d'un équilibre en stratégie dominante.

Equilibre de Nash

Il peut cependant exister plusieurs équilibres de cette nature faisant apparaitre des situations dans laquelle aucun des deux joueurs n'a intérêt à dévier. Modifions le payoff du jeu en supposant que $u_1(C, C) = u_2(C, C) = 1$

$1 \setminus 2$	$s_2 = C$	$s_2' = D$
$s_1 = C$	$1 \setminus 1$	$-3 \setminus 0$
$s_1' = D$	$0 \setminus -3$	$-2 \setminus -2$

(D, D) est toujours un équilibre au sens précédent du jeu. Cependant, un nouvel équilibre apparaît qui est (C, C). Ici, on observe que si le joueur 1 joue C, l'autre a également intérêt à jouer C qui lui procure un paiement positif. L'inverse est également vrai, si le joueur 2 joue C l'autre a également intérêt à jouer C pour les mêmes raisons. Aucun joueur n'a donc intérêt à dévier. On est donc en présence d'un d'équilibre du même type. En l'occurence, il s'agit d'un équilibre en stratégie dominante et il est à noter que (D, D) est toujours un équilibre, mais il n'est plus un équilibre en stratégie dominante.

Equilibre de Nash

Ce concept d'équilibre est le concept d'équilibre de Nash. Il correspond à un couple de choix stratégiques pour lequel aucun des deux joueurs n'a intérêt à dévier. Ce concept a de nombreuses applications. Un équilibre en stratégie dominante est toujours un équilibre de Nash. Cependant l'inverse n'est pas vrai.

Définition Formelle

Un équilibre de Nash se définit comme suit

Définition Formelle

Soit $\mathcal{G} = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ un jeu à deux joueurs où S_1 et S_2 sont les ensembles de stratégies respectives des joueurs 1 et 2 et $u_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont leurs fonctions d'utilité. On dit que $(s_1^\star, s_2^\star) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre de Nash du jeu si :

$$u_1(s_1^\star, s_2^\star) \geq u_1(s_1, s_2^\star) \quad \forall s_1 \in S_1$$

et

$$u_2(s_1^\star, s_2^\star) \geq u_2(s_1^\star, s_2) \quad \forall s_2 \in S_2.$$

Fonction de Réaction ou de Meilleure Réponse

On peut aussi caractériser un équilibre de Nash en utilisant la notion de fonction de meilleure réponse. Pour le joueur 1 la fonction de meilleure réponse est l'application $R_1 : S_2 \longrightarrow \mathcal{P}(S_1)$ définie par :

$$R_1(s_2) = \arg \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2).$$

Il peut exister plusieurs meilleures réponse pour le joueur 1 c'est pourquoi l'application prend ses valeurs dans $\mathcal{P}(S_1)$. Le joueur 1 cherche la meilleure façon de répondre à la stratégie s_2 du joueur 2. On peut de même définir une fonction de meilleure réponse pour le joueur 2. Pour le joueur 2 la fonction de meilleure réponse est l'application $R_2 : S_1 \longrightarrow \mathcal{P}(S_2)$ définie par :

$$R_2(s_1) = \arg \max_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2).$$

Il cherche la (ou les) meilleures réponse à la stratégie s_1 du joueur 1.

Formulation Alternative de l'équilibre de Nash

$s^\star = (s_1^\star, s_2^\star) \in S$ est un équilibre de Nash si

$$\begin{cases} s_1^\star \in R_1(s_2^\star) \end{cases}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

$1 \setminus 2$	$s_2 = C$	$s_2' = D$
$s_1 = C$	$1 \setminus 1$	$-3 \setminus 0$
$s_1' = D$	$0 \setminus -3$	$-2 \setminus -2$

Ici on a $C = R_1(C)$ et $C = R_2(C)$, (C, C) est donc un équilibre de Nash. De même $D = R_1(D)$ et $D = R_2(D)$, (D, D) est donc également un équilibre de Nash.

Stratégies Mixtes et Existence d'un Equilibre de Nash

Il n'existe pas toujours d'équilibre de Nash. Le jeu des tirs au buts en est un exemple.

$1 \backslash 2$	g	d
G	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$
D	$-100 \quad \backslash \quad 100$	$100 \quad \backslash \quad -100$

Ici, si le joueur 1 joue G, le joueur 2 a intérêt à jouer d. Mais si ce denier joue d, le joueur 1 a intérêt à jouer D. Il n'y a donc pas de stabilité du choix (G, d). Ceci vaut pour toutes les alternatives stratégiques du jeu.

Exemple en Dimension 3

Le jeu Pierre, Feuille, Ciseau.

$1 \setminus 2$	$s_2 = Pierre$	$s_2' = Feuille$	$s_2'' = Ciseau$
$s_1 = PIERRE$	$0 \setminus 0$	$-1 \setminus 1$	$1 \setminus -1$
$s_1' = FEUILLE$	$1 \setminus -1$	$0 \setminus 0$	$-1 \setminus 1$
$s_1'' = CISEAU$	$-1 \setminus 1$	$1 \setminus -1$	$0 \setminus 0$

Il n'y a pas d'équilibre de Nash.

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Stratégies Mixtes

Supposons que S_1 et S_2 sont des ensembles de stratégies finis. On définit pour la probabilité $p_1 : S_1 \longrightarrow [0,1]$ telle que $p_1(s_1) \in [0,1]$ pour tout $s_1 \in S_1$ et $\sum_{s_1 \in S_1} p_i(s_1) = 1$. Le paiement espéré du joueur 2, lorqu'il choisit s_2 est calculé relativement aux choix stratégiques du joueurs 1. Il est donc :

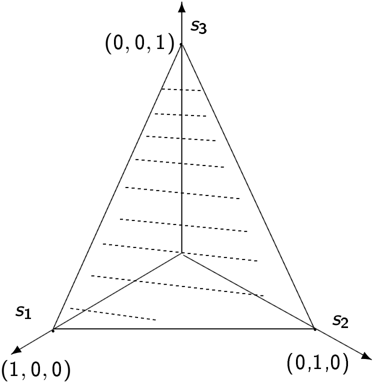
$$E\left[u_2(\cdot, s_2)\right] = \sum_{s_1 \in S_1} p_1(s_1) u_2(s_1, s_2).$$

On peut procéder de façon similaire pour le joueur 2. On définit pour la probabilité $p_2 : S_2 \longrightarrow [0,1]$ telle que $p_2(s_2) \in [0,1]$ pour tout $s_2 \in S_2$ et $\sum_{s_2 \in S_2} p_2(s_2) = 1$. Le paiement espéré du joueur 1, lorqu'il choisit s_1 est calculé relativement aux choix stratégiques du joueurs 2. Il est donc :

$$E\left[u_1(s_1, \cdot)\right] = \sum_{s_2 \in S_2} p_2(s_2) u_1(s_1, s_2).$$

Chaque choix des joueurs va générer un paiement espété qui dépend des stratégies de l'autre joueur

Avec 3 Stratégies Pures



Simplexe en Dimension 3 avec 3 stratégies pures

Exemple

$1 \backslash 2$	Mixed	p_2	$p_2' = 1 - p_2$
Mixed	Pure	s_2	s_2'
p_1	s_1	$2 \quad \backslash \quad 3$	$1 \quad \backslash \quad 1$
$p_1' = 1 - p_1$	s_1'	$1 \quad \backslash \quad 1$	$3 \quad \backslash \quad 2$

Paiement Espéré Joueur 1 : $s_1 \to 2p_2 + 1.(1 - p_2) = 1 + p_2$, $s_1' \to p_2 + 3(1 - p_2) = 3 - 2p_2$.

Paiement Espéré Joueur 2 : $s_2 \to 3p_1 + 1.(1 - p_1) = 1 + 2p_1$, $s_2' \to p_1 + 2(1 - p_1) = 2 - p_1$

Meilleure Réponse Joueur 1

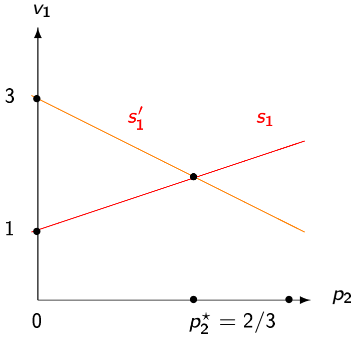


Figure Meilleure Réponse Joueur 1

Meilleure Réponse Joueur 2

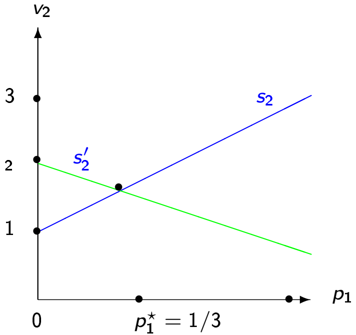


Figure Meilleure Réponse Joueur 2

Fonctions de Réaction

Pour le Joueur 1 :

$$p_1^\star(p_2) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p_2 < 2/3 \\ [0,1] & \text{if} \quad p_2 = 2/3 \\ 1 & \text{if} \quad p_2 > 2/3 \end{cases}$$

Pour le joueur 2 :

$$p_2^\star(p_1) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p_1 < 1/3 \\ [0,1] & \text{if} \quad p_1 = 1/3 \\ 1 & \text{if} \quad p_1 > 2/3 \end{cases}$$

Figure

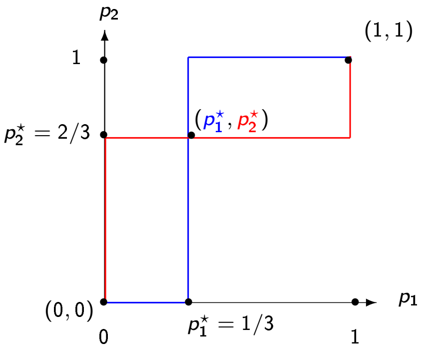


Figure Equilibre de Nash

Equilibres

Ici on a 3 équilibres de Nash. deux en stratégies pures (s_1, s_1) $(p_1 = p_2 = 1)$et (s_2, s_2) $(p_1 = p_2 = 0)$ et un en stratégies mixtes $p_1^\star = 1/3$, $p_2^\star = 2/3$. Dans le cas des tirs aux buts il n'en existe qu'un seul.

Jeux des tirs aux buts

Gardien\ Tireur	Mixed	p_2	$p'_2 = 1 - p_2$
Mixte	Pure	*Gauche*	*Right*
p_1	*GAUCHE*	$100 \quad \backslash \quad -100$	$-100 \quad \backslash \quad 100$
$p'_1 = 1 - p_1$	*DROITE*	$-100 \quad \backslash \quad 100$	$100 \quad \backslash \quad -100$

Fonctions de Réactions

Paiement Espéré du Joueur 1 : $GAUCHE \to 200p_2 - 100$, $DROITE \to 100 - 200p_2$.

Paiement Espéré du Joueur 2 : $Gauche \to 100 - 200p_1$, $Droite \to 200p_1 - 100$

$$p_1^\star(p_2) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad p_2 < 1/2 \\ [0,1] & \text{if} \quad p_2 = 1/2 \\ 0 & \text{if} \quad p_2 > 1/2 \end{cases}$$

$$p_2^\star(p_1) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p_1 < 1/2 \\ [0,1] & \text{if} \quad p_1 = 1/2 \\ 1 & \text{if} \quad p_1 > 1/2 \end{cases}$$

Figure

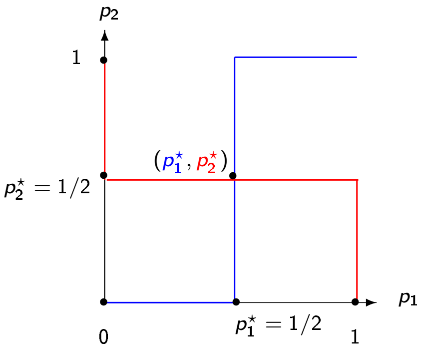


Figure Equilibre de Nash Unique

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Finite Normal Form Game

We first give a formal definition of a n-players game.

Definition d'un Jeu à n- Joueurs

Supposons que pour tout i, S_i is un ensemble de stratégies pour le joueur i. Il suit que $S = \prod_{i\in[n]} S_i$ est l'ensemble des stratégies qui détermine les paiements des joueurs. Pour tout i, $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité (payoff). Pour simplifier on note :

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i})$$

où $s_{-i} \in S_{-i}$ represente la stratégie des autres joueurs. Un jeu à n à n joueurs est alors défini par la collection $\mathcal{G} = \{(S_i)_{i\in[n]}, (u_i)_{i\in[n]}\}$.

Staratégie Dominante dans le cas Général

Définition d'une Stratégie Dominante

Une stratégie $s_i^\star \in S_i$ est dominante pour le joueur i si pour tout $(s_i, s_{-i}) \in S$,

$$u_i(s_i^\star, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}).$$

Si pour tout $i \in [n]$, $s_i^\star$ est dominante pour le joueur i, alors $s^\star$ est un équilibre en stratégie dominante.

Propriété de Point Fixe

Théorème du Point Fixe en Dimension 1

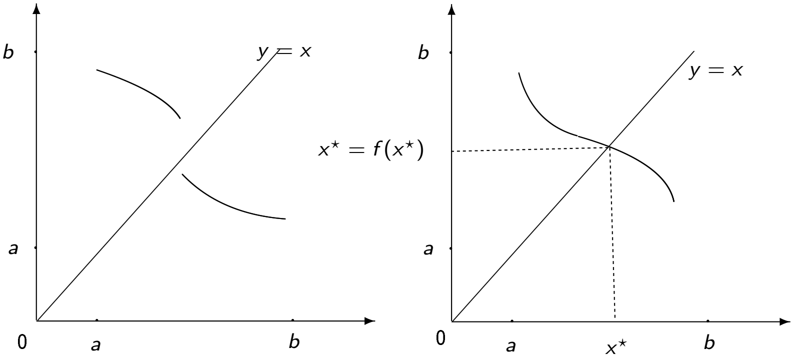
Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, d]$ une fonction continue. Il existe $x^\star \in [a, b]$ tel que $x^\star = f(x^\star)$

Le théorème du point fixe peut se généraliser au Théorème de Brouwer pour des ensembles convexes et fermés. Pour obtenit l'existence de l'équilibre de Nash in faut utiliser le Théorème de Kakutani que l'étend aux correspondences.

Kakutani Fixed Point Theorem

Soit S un ensemble convexe fermé borné de $\mathbb{R}^d$. Soit $F : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ une application . ayant un graphe fermé et des valeurs convexe non vide. Alors il existe un $s \in S$ tel que $s \in F(s)$.

Propriété de Point Fixe



Propriété de point fixe.

Fonction de Meilleure Réponse et Equilibre

Fonction de Meilleure Réponse

Pour tout $i \in [n]$, l'application $R_i : S_{-i} \longrightarrow \mathcal{P}(S_i)$ définie par :

$$R_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

est appelée fonction de meilleure réponse du joueur i.

Formulation Alternative de la notion d'Equilibre de Nash

$s^\star \in S$ est un équilibre de Nash si

$$s^\star \in \prod_{i \in [n]} R_i(s^\star_{-i}).$$

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Economie Industrielle

La théorie des jeux s'applique au domaine de l'économie industrielle, notamment dans le cas d'un oligopole. Un oligopole peut-être vu comme un jeu non coopératif dans lequel chaque firme poursuit son propre intérêt. D'une manière générale il n'y a pas d'opposition entre les notions de non-coopération et et de collusion.

Non-Coopération et Collusion

• La fonction objectif d'un agent altruiste peut englober celle d'un autre agent.

• En l'absence d'altruisme des firmes peuvent se mettre d'accord en signant un contrat pour se partager par exemple le marché.

• Dans le cas d'un jeu répété les firmes peuvent avoir intérêt à ménager leur concurrents afin d'éviter des mesures de rétorsions.

Modèle Général

On considère un jeu simultané avec deux firmes qui maximisent leur profit $\Pi_1(s_1, s_2)$ et $\Pi_2(s_1, s_2)$ où s_1 et s_2 définissent les stratégies qui sont des nombres réels. On supposera que ces fonctions de profit sont deux fois continument différentiables. Supposons que $(s_1^\star, s_2^\star)$ est un équilibre de Nash. Cela suppose que étant donné $s_2^\star$ $s_1^\star$ maximise le profit de la firme 1. De même, étant donné $s_1^\star$, $s_2^\star$ maximise le profit de la firme 2.

Conditions d'optimalité

Les conditions d'optimalité sont donc les suivantes.
Au premier ordre :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1}(s_1^\star, s_2^\star) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2}(s_1^\star, s_2^\star) = 0.$$

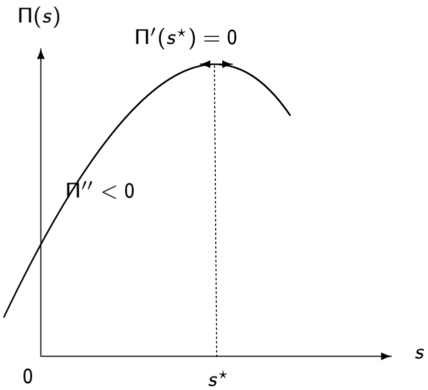
Au second ordre (concavité)

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2}(s_1, s_2) \leq 0 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On a unicité de l'équilibre si (concavité stricte) :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_2}(s_1, s_2) < 0 \quad \forall (s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Figure



Fonctions de Meilleure Réponse

Les fonctions de réaction sont définies par :
Au premier ordre :

$$R_1(s_2) = \arg\max_{s_1} \Pi_1(s_1, s_2) \quad \text{et} \quad R_2(s_1) = \arg\max_{s_2} \Pi_2(s_1, s_2).$$

L'équilibre de Nash est donc solution du système :

$$\begin{cases} s_1^\star = R_1(s_2^\star) \\ s_2^\star = R_2(s_1^\star). \end{cases}$$

Comportement Stratégique

Les dérivées croisées de la fonction de profit permettent de nous renseigner sur la substituabilité ou la complémentarité stratégique. On peut considérer deux cas de figures :

- **Substituabilité stratégique.**

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1 \partial s_2} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_1 \partial s_2} < 0.$$

Dans ce cas il y a substituabilité stratégique. Si le firme 2 augmente s_2, la firme 1 a intérêt à dimuner s_1 pour augmenter son profit. De même si la firme 1 augmente s_1, la firme 2 a intérêt à dimuner s_2 pour augmenter son profit.

- **Complémentarité stratégique (supermodularité).**

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial s_1 \partial s_2} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial s_1 \partial s_2} > 0.$$

Dans ce cas il y a complémentarité stratégique. Si le firme 2 augmente s_2, la firme 1 a également intérêt à augmenter s_1 pour augmenter son profit. De même si la firme 1 augmente s_1, la firme 2 a intérêt à augmenter s_2 pour augmenter son profit.

Fonctions de Réaction et Comportement Stratégique

Les dérivées croisées de la fonction de profit permettent détérminent la variation des functions de réaction :

- **Substituabilité stratégique.**

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_2} < 0 \ (R_1 \searrow) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} < 0 \ (R_2 \searrow).$$

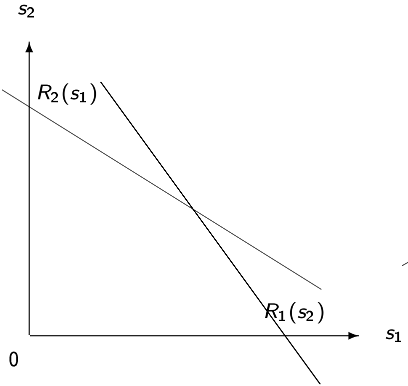
Si la firme 2 augmente s_2, la firme 1 réagit en diminuant s_1. De même si la firme 1 augmente s_1, la firme 2 a intérêt en diminuant s_2 pour augmenter son profit.

- **Complémentarité stratégique.**

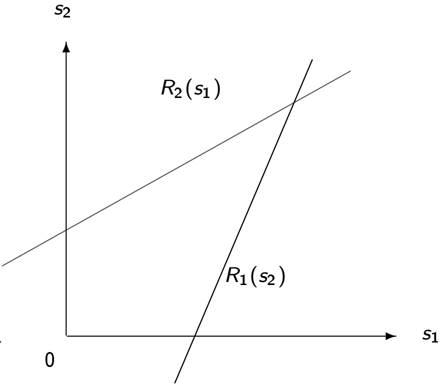
$$\frac{\partial R_1}{\partial s_2} > 0 \ (R_1 \nearrow) \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1} > 0 \ (R_2 \nearrow).$$

Si la firme 2 augmente s_2, la firme 1 réagit en augmentant s_1. De même si la firme 1 augmente s_1, la firme 2 a intérêt en augmenter s_2 pour augmenter son profit.

Complémentarité et Substituabilité Stratégique



Substituabilité Stratégique



Complémentarité Stratégique

Equilibre de Cournot

Une application naturelle du concept d'équilibre de Nash est celui du duopole de Cournot. On considère deux firmes qui maximisent leur profit qui sont

$$\Pi_1(q_1, q_2) = p(q).q_1 - c_1(q_1) \quad \text{et} \quad \Pi_2(q_1, q_2) = p(q).q_2 - c_2(q_2)$$

où q_1 est la quantité produite par la firme 1 et q_2 est la quantité produite par la firme 2. $q = q_1 + q_2$ est la quantité totale produite sur le marché et $p(q) = p(q_1 + q_2)$ est la fonction de demande inverse qui détermine le prix de marché. c_1 et c_2 sont les fonctions de coût respectives des firmes. De manière équivalente nous avons

$$\Pi_1(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2).q_1 - c_1(q_1) \quad \text{et} \quad \Pi_2(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2).q_2 - c_2(q_2)$$

cela signifie que le profit des firmes dépend de la quantité qu'elles produisent mais aussi de celle produite par leur concurrent.

Equilibre de Cournot-Nash

On est donc en présente d'un jeu dans lequel les variables stratégiques sont les quantités choisies par les firmes. En supposant que le revenu est concave pour chaque firme et que les fonctions de coûts respectives sont convexe, les conditions d'optimalité sont :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}(q_1, s_2) = p'(q)q_1 + p(q) - c_1'(q_1) = 0$$

et

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = p'(q)q_2 + p(q) - c_2'(q_2) = 0.$$

Exemple

Considérons la fonction d'offre est $O(p) = 2 - p$. Il résulte que la fonction de demande inverse est $p(q) = 2 - p$. Supposons que les fonctions de coût des firmes sont $c_1(q_1) = \frac{1}{2}{q_1}^2$ et $c_2(q_2) = \frac{1}{2}{q_2}^2$. Leur fonctions de profit sont :

$$\Pi_1(q_1, q_2) = (2 - q_1 - q_2).q_1 - \frac{1}{2}{q_1}^2 \quad \text{et} \quad \Pi_2(q_1, q_2) = (2 - q_1 - q_2).q_2 - \frac{1}{2}{q_2}^2$$

soit

$$\Pi_1(q_1, q_2) = 2q_1 - q_1q_2 - \frac{3}{2}{q_1}^2 \quad \text{et} \quad \Pi_2(q_1, q_2) = 2q_2 - q_1q_2 - \frac{3}{2}{q_2}^2.$$

En supposant que le revenu est concave pour chaque firme et que les fonctions de coûts respectives sont convexe, les conditions d'optimalité sont :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}(q_1, s_2) = 2 - q_2 - 3q_1 = 0$$

et

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 2 - q_1 - 3q_2 = 0.$$

Exemple

Au second ordre :

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial {q_1}^2}(q_1, s_2) = -3 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial {q_2}^2}(q_1, s_2) = -3 < 0.$$

Les conditions du premier ordre nous donnent donc les meilleures réponse pour chacune des firmes.

$$R_1(q_2) = \frac{2 - q_2}{3} \quad \text{et} \quad R_2(q_1) = \frac{2 - q_1}{3}.$$

On a $R_1' = -\frac{1}{3} < 0$ et $R_2' = -\frac{1}{3} < 0$, il y a donc substituabilité stratégique. L'équilibre de Nash du jeux est solution du système

$$\begin{cases} q_1 = \frac{2-q_2}{3} \\ q_2 = \frac{2-q_1}{3}. \end{cases}$$

Il vient $q_1^\star = q_2^\star = \frac{1}{2}$ et $\Pi_1^\star = \Pi_2^\star = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$.

Importance de l'information : L'équilibre de Stackelberg

Ici nous allons considérer uns situation dans laquelle il y a un "leader" qui connait la fonction de réaction du "follower" qui ne connait pas celle du leader. Ce type de jeu illustre l'importance de l'information détenue par les agents. Le leader peut obtenir un gain supérieur en raison de son avantage informationnel. Supposons que la firme 1 connait la fonction de réaction de la firme 2. Son programme est donc de maximiser :

$$\Pi_1(s_1, R_2(s_1)).$$

La firme 2 procède quant à elle de la même façon que précédemment. Elle maximise

$$\Pi_2(s_1, s_2).$$

Nous allons voir que cela induit un gain supérieur pour le joueur 1.

Exemple

Considérons comme précedemment que la fonction d'offre est $O(p) = 2 - p$. Il résulte que la fonction de demande inverse est $p(q) = 2 - p$. Supposons que les fonctions de coût des firmes sont $c_1(q_1) = \frac{1}{2}{q_1}^2$ et $c_2(q_2) = \frac{1}{2}{q_2}^2$. Nous avons vu que dans ce cas la fonction de réaction du joueur 2 est :

$$R_2(q_1) = \frac{2 - q_1}{3}.$$

Comme la firme 1 connait cette fonction de réaction son programme est de maximiser :

$$\Pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \big(2 - q_1 - R_2(q_1)\big).q_1 - \frac{1}{2}{q_1}^2.$$

Elle maximise donc

$$\Pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \left(2 - q_1 - \frac{2 - q_1}{3}\right).q_1 - \frac{1}{2}{q_1}^2 = \frac{4}{3}q_1 - \frac{7}{6}{q_1}^2.$$

La condition du premier ordre donne

$$\Pi_1' = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}q_1 = 0 \iff q_1^S = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}.$$

La firme 1 doit augmenter sa production relativement au cas où il n'y a pas de leader.

Exemple

Le profit est alors

$$\Pi_1(q_1^S, R_2(q_1^S)) = \frac{4}{3}.\frac{4}{7} - \frac{7}{6}.(\frac{4}{7})^2 = \frac{112}{294} = \Pi_1^S > \Pi_1^\star = \frac{3}{8}.$$

La firme obtient un meilleur profit que dans le cas où elle avait la même information que sa concurente. Pour la firme 2 safonction de réaction nou donne :

$$R_2(q_1^S) = \frac{2 - q_1^S}{3} = \frac{2 - 4/7}{3} = \frac{10}{21} < \frac{1}{2}.$$

La firme 2 doit diminuer sa production relativement au cas où il n'y a pas de leader. Son profit est le suivant :

$$\Pi_2(\frac{4}{7}, \frac{10}{21}) = \left(2 - \frac{4}{7} - \frac{10}{21}\right).\frac{10}{21} - \frac{1}{2}(\frac{10}{21})^2 = \frac{3}{2}(\frac{10}{21})^2 = \Pi_2^S < \Pi_2^\star = \frac{3}{8}.$$

Le "follower" voit donc son profit diminuer

Compétition par les prix et Duopole de Bertrand

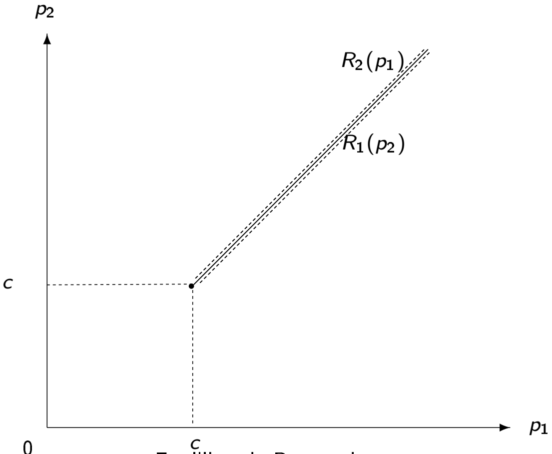
Dans ce modèle deux firmes proposent un prix de marché. Celle qui propose le plus bas remporte l'offre. Elles doivent cependant faire face à un coût unitaire de production qui sera supposé être le même et égal à $c > 0$. Nous alons voir que pour étudier ce problème à l'aide de la notion de fonction réponse qui permet une analyse des stratégies des firmes. Supposons que ces deux firmes sont les firmes 1 et 2. Si la firme 2 propose un prix p_2, la firme 1 propose un prix plus petit. Sa fonction de réaction est donc :

$$R_1(p_2) = [c, p_2[$$

elle ne peut pas proposer un prix plus petit que c car si non son profit est négatif. De même si la firme 1 propose un prix p_1 la firme 2 a une fonction de réaction

$$R_2(p_1) = [c, p_1[.$$

figure



Equilibre de Bertrand

Interprétation

Il n'existe pas d'équilibre au sens de la définition de Nash. Par contre (c, c) peut-être vu comme un cas limite du processus dans lequel chaque firme baisse son prix juste au dessus du coût marginal pour emporter le marché. Cependant il apparait plutôt comme un cas limite des fonctions réponse des joueurs. On retrouve la condition limite de profit nul. Notons que si l'on considère une forme étendue de la fonction réponse des firmes incluant le prix proposé par l'autre firme, c'est à dire

$$\bar{R}_1(p_2) = [c, p_2] \quad \text{et} \quad \bar{R}_2(p_1) = [c, p_1]$$

alors il existe une infinité d'équilibres de la forme (p, p) avec $p \geq c$ car

$$p \in \bar{R}_1(p) = [c, p] \quad \text{et} \quad p \in \bar{R}_2(p) = [c, p].$$

Les firmes auraient dans ce cas là intérêt à s'entendre et à fixer le prix le plus élevé possble.

Problèmes de Cartel

La théorie des jeux permet d'étudier la formation d'ententes possiblement illégales et les processus de collusion entre firmes. La configuration de type dillemme du prisonnier montre comment les firmes peuvent avoir intérêt à coopérer plutôt que de choisir une stratégie dominante qui peut ne pas se révéler le meilleure.

Problèmes de Cartel

On considère deux pays producteurs de pétrole A et B. Ils ont la possibilité de produire 2 Millions de barrils ou 4 Millions. Le prix du marché varie en fonction inverse de la quantité totale qui est produite. On a les cas de figure suivants :

- Si 4M de barrils sont produits le prix est de 25 \$.
- Si 6M de barrils sont produits le prix est de 15 \$.
- Si 8M de barrils sont produits le prix est de 10 \$.

Le coût unitaire de production pour le pays A est $C_A = 2$ et pour le pays B il est égal à $C_B = 4$. Nous alons à partir de là construire un jeu qui montre que les deux pays peuvent avoir intérêt à s'entendre afin de réaliser de plus grands profits. Pour cela il faut analyser les différentes configurations et construire un jeu approprié.

Représentation par un Jeu en Forme Normale

(i) Si A et B produisent 2MB.
Dans ce cas la production totale est 4MB. Il résulte que le prix du marché est de 25 \$.
- Pour le pays A le profit est $\Pi_A = 25 \times 2 - 2 \times 2 = 46$
- Pour le pays B le profit est $\Pi_B = 25 \times 2 - 4 \times 2 = 42$

(ii) Si A produit 4MB et B produit 2MB.
Dans ce cas la production totale est 6MB. Il résulte que le prix du marché est de 15 \$.
- Pour le pays A le profit est $\Pi_A = 15 \times 4 - 2 \times 4 = 52$
- Pour le pays B le profit est $\Pi_B = 15 \times 2 - 4 \times 2 = 22$

(iii) Si A produit 2MB et B produit 4MB.
Dans ce cas la production totale est 6MB. Il résulte que le prix du marché est de 15 \$.
- Pour le pays A le profit est $\Pi_A = 15 \times 2 - 2 \times 2 = 26$
- Pour le pays B le profit est $\Pi_B = 15 \times 4 - 4 \times 4 = 44$

(iv) Si A produit 4MB et B produit 4MB.
Dans ce cas la production totale est 8MB. Il résulte que le prix du marché est de 10 \$.
- Pour le pays A le profit est $\Pi_A = 10 \times 4 - 2 \times 4 = 32$
- Pour le pays B le profit est $\Pi_B = 10 \times 4 - 4 \times 4 = 24$

Matrice de Jeu

En fonction des choix de chacun nous pouvons construire la matrice de jeu suivante :

$A \vert B$	2	4
2	$46\backslash 42$	$26\backslash 44$
4	$52\backslash 22$	$32\backslash 24$

Matrice des gains

Interprétation

L'analyse du jeux montre que le pays A a une stratégie dominante qui est de produire 4MB.
En effet on a :
- si B produit 2MB : $\pi_A(4,2) = 52 > 46 = \pi_A(2,2)$
- si B produit 4MB : $\pi_A(4,4) = 32 > 26 = \pi_A(2,4)$.

L'analyse du jeux montre que le pays B a une stratégie dominante qui est également de produire 4MB. En effet on a :
- si A produit 2MB : $\pi_B(2,4) = 44 > 42 = \pi_B(2,2)$
- si A produit 4MB : $\pi_B(4,4) = 24 > 22 = \pi_B(2,4)$.

Il y a donc une stratégie dominante qui est de produire 4MB. L'équilibre du jeu est donc $(4,4)$ ce qui conduit aux profits suivants : $\pi_A(4,4) = 32$ et $\pi_B(4,4) = 24$. On voit cependant qu'en se coordonnant pour rationaliser leur production les firmes auraient pu réaliser un profit plus grand. En effet :

$$\pi_A(2,2) = 46 > 32 = \pi_A(4,4) \quad \text{et} \quad \pi_B(2,2) = 42 > 24 = \pi_B(4,4).$$

Ce jeu montre, come dans le cas du dilemme du prisonnier que la stratégie dominante n'est pas nécessairement la meilleure. Il illustre l'importance de l'information dont dispose chaque joueur sur le choix de l'autre ainsi que l'importance de la coordination.

Barrières à l'Entrée et Jeux à Mouvements Séquentiels

Supposons qu'une firme veuille s'opposer à l'entrée d'une autre sur son marché. Pour qu'elle puiss y parvenir, il faut que sa menace soit crédible. Considérons le jeu suivant représenté en forme normale :

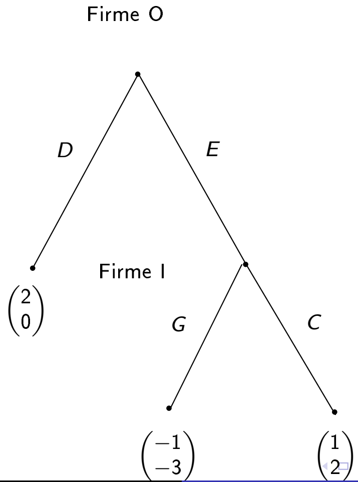
$I \mid O$	D	E
G	2 | 0	-1 | -3
C	2 | 0	1 | 2

Matrice des gains

Si la firme O (outsider) décide de ne pas entrer sur le marché (stratégie D) les paiements restent les mêmes. Si elle décide d'entrer (stratégie E), la firme I (Insider) a deux possibilités guerre (G) ou coopération (C). Dans ce cas si la guerre est décidée la firme I perd 1 et la firme 2 a une perte plus lourde 3. Par contre en cas de coopération la firme I gagne moins mais évite une perte (1 contre -1). La firme entrante gagne 2. Le pont essentiel dans ce jeu est que les deux firmes ne sont pas sur un pieds d'égalité. Comme pour l'équilibre de Stackelberg, il y a une firme leader et une firme follower. Seule la firme O a le pouvoir de décider ou pas d'entrer sur le marché.

Schéma

Cette particularité est représentée sur le schémas suivant :



Fonction de Réaction et Backward Induction

L'examen du diagramme montre qu'une fois que la firme I est entrée sur le marché (décision qui dépend d'elle), le meilleur choix de la firme I est de coopérer puis qu'elle obtient dans ce cas 1 au lieu de -1. Ainsi la menace de guerre (G) n'est-elle pas crédible.
Pour résoudre le jeu il faut partir de l'idée que la firme O connait la fonction de réaction de la firme I. Elle prend sa décision en otpimisant et en intégrant cette fonction de réaction dans ces calculs. Le programme d'optimisation de la firme O (dentifié à la seconde firme) est le suivant :

$$\max_{s_2 \in S_2} u_2\big(R_1(s_2), s_2\big),$$

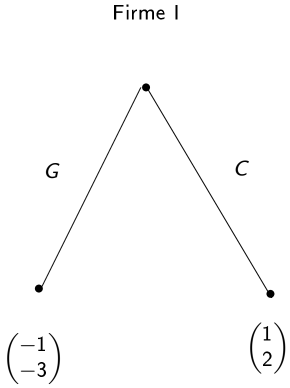
où $S_2 = \{D, E\}$. La fonction de réaction de la firme I est clairement :

$$R_1(s_2) = \begin{cases} G \text{ ou } G & \text{si } s_2 = D \\ C & \text{si } s_2 = E \end{cases}$$

Fonction de Réaction et Backward Induction

On a alors deux cas de figures :
- si la firme O choisit D elle obtient le paiement
$u_2(G,D) = u_2(C,D) = 0$.
- si la firme O choisit D elle obtient le paiement
$u_2\Big(R_1(E), E\Big) = u_2(C,E) = 2$.
La meilleure stratégie est donc E. Tout se passe donc comme si on pouvait se ramener à une forme réduite du jeux et être amené à considérer un sous-jeu qui est donné par la forme séquentielle réduite suivante :

Equilibre Parfait en Sous-Jeux



Représentation séquentielle

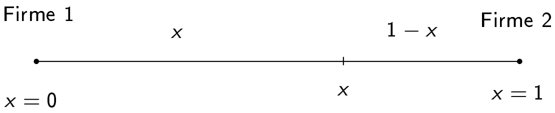
Dan cettte situation on parle d'équilibre parfait en sous-jeux.

Modéle d'Hotelling

Le modèle d'Hotelling est un modèle de différentiation horizontale qui intègre une forme de compétition spatiale entre les entreprises. Ce modèle traduit le fait que les consommateurs différent par localisation et leur goût et que les produits vendus sur le marché procurent des utilités différentes.

Le Modèle d'Hotelling

Le modèle d'Hotelling est un modèle de différentiation horizontale qui intègre une forme de compétition spatiale entre les entreprises. On localise deux firmes aux extrémités d'un segment.



Concurrence

Le firme proposent des prix de marché qui sont respectivement p_1 et p_2. Elles font face à un coùt unitaire de production qui est c. Il y a aussi un coût de transport t pour les consommateur qui doit donc multiplier la distance séparant le point de demande (représenté par x) du positionnement des firmes 1 et 2.
L'utilité nette est donc de la forme

$$r - p - \text{coût de transport}.$$

r représente un seuil qui ne peut être dépassé pour le consommateur.

- L'utilité pour le produit de la firme 1 est $u_1(p_1, p_2) = r - p_1 - tx$.
- L'utilité pour le produit de la firme 2 est $u_2(p_1, p_2) = r - p_2 - t(1 - x)$.

Demande pour le Produit de Chaque Firme

Supposons que $\bar{x}$ représente une localisation d'indifférence pour les consommateur. Tous les consommateurs tels que $x < \bar{x}$ choisissent donc la firme 1. Tous ceux tels que $x > \bar{x}$ choisent la firme 2. Le seuil d'indifférence correspond à la situation telle que :

$$u_1(p_1, p_2) = r - p_1 - tx = r - p_2 - t(1 - x) = u_2(p_1, p_2).$$

La résolution de l'équation nous donne

$$\bar{x} = \frac{p_1 - p_2 + t}{2t}$$

Demande pour le Produit de Chaque Firme

La demande est donc :

- Pour la firme 1 :

$$D_1(p_1, p_2) = \bar{x} = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}$$

- Pour la firme 2 :

$$D_2(p_1, p_2) = 1 - \bar{x} = \frac{p_1 - p_2 + t}{2t}.$$

Demande pour le Produit de Chaque Firme

On note que :

$$D_1(p_1, p_2) + D_2(p_1, p_2) = 1.$$

Par ailleurs :

- Si $p_1 = p_2$ alors $\bar{x} = \frac{1}{2}$ (même demande pour les deux firmes).
- Si $p_1 < p_2$ alors $\bar{x} > \frac{1}{2}$ (plus de demande pour la firme 1).
- Si $p_1 > p_2$ alors $\bar{x} < \frac{1}{2}$ (plus de demande pour la firme 2).

Maximisation du Profit

Comme nous avons calculé la demande pour chaque firme, les fonctions de profit sont donc les suivantes :

- Pour la firme 1 :

$$\Pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)D_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)\left(\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right)$$

- Pour la firme 2 :

$$\Pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)D_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)\left(\frac{p_1 - p_2 + t}{2t}\right).$$

On notera qu'elle dépendent des prix proposés par les deux firmes.

Maximisation du Profit

Les fonctions de Profit s'écrivent donc :

- Pour la firme 1 :

$$\Pi_1(p_1, p_2) = \frac{-{p_1}^2 + p_1 p_2 + (t+c)p_1 - cp_2 - ct}{2t}$$

- Pour la firme 2 :

$$\Pi_2(p_1, p_2) = \frac{-{p_2}^2 + p_1 p_2 + (t+c)p_2 - cp_1 - ct}{2t}$$

Fonctions de Réaction

On a un jeu à deux joueurs dans lequel les variables stratégiques sont les prix : Conditions du premier ordre

- Pour la firme 1 :

$$\frac{\partial \Pi_1(p_1,p_2)}{\partial p_1} = 0 \iff \left(\frac{-{p_1}^2 + p_1 p_2 + (t+c)p_1 - cp_2 - ct}{2t}\right)' = \frac{-2p_1 + p_2 + t + c}{2t} = 0$$

- Pour la firme 2 :

$$\frac{\partial \Pi_2(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0 \iff \left(\frac{-{p_2}^2 + p_1 p_2 + (t+c)p_2 - cp_2 - ct}{2t}\right)' = \frac{-2p_2 + p_1 + t + c}{2t} = 0$$

Fonctions de Réaction

Au second ordre on a

$$\frac{\partial^2 \Pi_1(p_1, p_2)}{\partial {p_1}^2} = \frac{\partial^2 \Pi_2(p_1, p_2)}{\partial {p_2}^2} = -2 < 0.$$

Les fonctions de réaction des deux firmes sont donc :

- Pour la firme 1 :

$$R_1(p_2) = \frac{p_2 + t + c}{2}$$

- Pour la firme 2 :

$$R_2(p_1) = \frac{p_1 + t + c}{2}$$

Complémentarité Stratégique

On note que :

- Pour la firme 1 :

$$R_1'(p_2) = \left(\frac{p_2 + t + c}{2}\right)' = \frac{1}{2} > 0$$

- Pour la firme 2 :

$$R_2'(p_1) = \left(\frac{p_1 + t + c}{2}\right)' = \frac{1}{2} > 0$$

On a donc une situation de complémentarité stratégique.

Equilibre de Nash

On obtient l'équilibre en résolvant le système :

$$\begin{cases} p_1 = R_1(p_2) \\ p_2 = R_2(p_1). \end{cases}$$

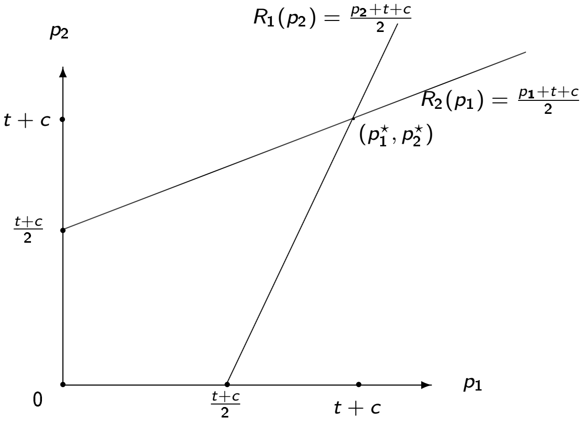
De manière équivalente :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{p_2+t+c}{2} \\ p_2 = \frac{p_1+t+c}{2}. \end{cases}$$

On obtient

$$p_1^\star = p_2^\star = t + c.$$

Figure


$R_1(p_2) = \frac{p_2+t+c}{2}$
p_2
$R_2(p_1) = \frac{p_1+t+c}{2}$
$t+c$
$(p_1^\star, p_2^\star)$
$\frac{t+c}{2}$
0
$\frac{t+c}{2}$
$t+c$
p_1

Equilibre de Nash

A l'équilibre on a donc :

- Pour la firme 1 :

$$\Pi_1(p_1^\star, p_2^\star) = (p_1^\star - c)D_1(p_1^\star, p_2^\star) = \frac{t}{2}$$

- Pour la firme 2 :

$$\Pi_2(p_1^\star, p_2^\star) = (p_2^\star - c)D_2(p_1^\star, p_2^\star) = \frac{t}{2}.$$

1. Notion de Jeux
2. Stratégies Dominantes et Dilemme du Prisonnier
3. Equilibre de Nash
4. Stratégies Mixtes et Convexification
5. Jeux à Plusieurs Joueurs
6. Applications de la Théorie des Jeux
7. Jeux Coopératifs

Dans cette partie, nous nous intéressons au concept de jeux coopératifs. Dans ces jeux, il n'est pas utile de faire appel aux notions d'information. Tout se passe comme si les firmes (ou le modélisateur) anticipaient qu'il était possible de former toutes les coalitions possibles avec les autres joueurs. En effet puisque les jeux sont coopératifs, toutes les coalitions doivent être formées. L'analyse de chaque joueur, en terme de paiement, se fait sur la base du fait qu'ils peuvent intégrer ou quitter une coalition déjà formée.

Définitions et Concepts

On considère n joueurs. On note la grande coalition $N = \{1, ..., n\}$ il s'agit du groupe ayant la taille la plus importante. Les coalitions (groupes) de taille plus restreinte sont notées S, et elles sont toujours incluses dans la grande coalition. Par exemple pour 3 joueurs nous avons les coalitions possibles suivantes :

$$S = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Pour chacune des coalitions un gain y est associé noté $v(S)$. Il s'agit d'une fonction, mais pas toujours, qui permet de calculer les gains (pertes) potentiels de chaque joueur. On l'appelle valeur.

Un jeu coopératif se note : $\mathcal{J} = \{N, v(S)\}$: à chaque coalition est associée une valeur.

Exemple

$V(\{1\})$ est la valeur ou gain du joueur 1 lorsque ce dernier ne coopère pas et qu'il joue seul, ainsi la non coopération n'est pas exclue du problème.

$V(\{1,2\})$ indiquera la valeur ou gain de la coalition 1,2 en cas d'entente entre les joueurs 1 et 2.

$v(\emptyset) = 0$, il s'agit du gain en cas de non participation au jeu.

$v(N)$ est la part de la grande coalition, il s'agit du gâteau à se partager. La question est de savoir comment se partager le gâteau (une somme) en coopérant.

Exemple

Trois firmes viticoles font les bénéfices suivants $v(\{1\}) = 100$; $v(\{2\}) = 150$; $v(\{3\}) = 300$. La première est efficace dans la livraison aux clients, la seconde est efficace dans l'organisation de la production, et la troisième est efficace dans la fabrication de nouveaux cépages. Elles décident de coopérer puisque chacune peut apporter un savoir faire que les autres firmes ne possèdent pas. Elles estiment que la coopération implique des rendements d'échelle pour lesquels le bénéfice estimé est de $v(\{1, 2, 3\}) = 1000$. Comment répartir la somme de 1000 entre les 3 firmes ?

Solution de Shapley

La solution de Shapley consiste à calculer l'espérance de gain de chaque joueur lorsque ces derniers entrent ou sortent d'une coalition. Cette solution de partage est notée α. Il s'agit du vecteur des paiements. Il donne le montant attribué à chaque joueur, càd le gain espéré. Pour un jeu à 2 joueurs $\alpha = (\alpha_1 ; \alpha_2)$.

Exemple

Si en se coalisation avec les autres joueurs, le joueur 1 peut obtenir un gain espéré de $\alpha_1 = 10$, et le joueur 2 un gain espéré de $\alpha_2 = 20$, alors la solution du jeu ou vecteur des paiements est notée : $\alpha = (10; 20)$.

Rationalité Individuelle

Une condition nécessaire doit être vérifiée avant de trouver la solution du jeu. Il s'agit de la rationalité individuelle. Puisqu'un individu est rationnel, il est primordial pour ce dernier que son paiement soit supérieur à celui qu'il obtiendrait en cas de non coopération. Sinon la coopération est inutile. Donc chaque joueur avant d'entrevoir une quelconque alliance avec d'autres joueurs vérifie la condition de rationalité individuelle.

Définition de la Rationalité Individuelle

Définition

Une solution α vérifie le concept de rationalité individuelle si :

$$\alpha_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N.$$

Chaque joueur veut obtenir un paiement (issu du partage) α_i qui soit plus avantageux que son paiement en cas de non coopération $v(\{i\})$. Dans le cas contraire, si $\alpha_i < v(\{i\})$ la coopération n'a pas lieu d'être : le jeu n'a pas de solution, pas d'équilibre.

Définition de la Rationalité Individuelle

Définition

Une solution α est efficiente si :

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N).$$

Autrement dit, lorsque la coopération est mise en place, le partage du gâteau est effectué entre les joueurs. La somme de leur paiement α_i doit obligatoirement aboutir à la somme à se partager $V(N)$. Cela permet de vérifier que la méthode de partage est pertinente (et d'éliminer les autres méthodes non pertinentes).

Exemple

Afin de comprendre la solution de Shapley, prenons un jeu à deux joueurs tel que les paiements sont les suivants : $v(\emptyset) = 0$; $v(\{1\}) = 10$; $v(\{2\}) = 12$ et $v(\{1, 2\}) = 38$. Pour le joueur 1, Raisonnons en termes de gain marginal lorsqu'il s'agit de sortir d'une coalition. Le joueur peut faire un arbitrage entre rester seul v($\{1\}$) et ne rien faire $v(\emptyset)$. La différence entre les deux gains est appelée gain marginal :

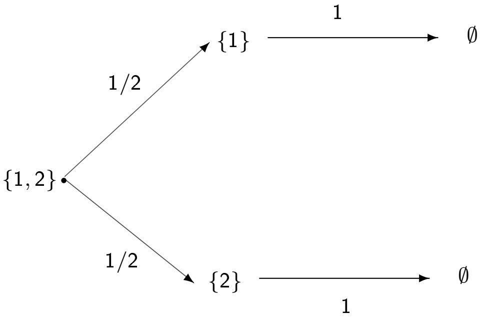
$$v(\{1\}) - v(\emptyset)$$

Le joueur peut également faire un arbitrage entre coopérer en se joignant à l'autre joueur $v(\{1, 2\})$ et rester seul $v(\{1\})$. Dans ce cas l'arbitrage donne un gain marginal qui est :

$$v(\{1, 2\}) - v(\{2\}).$$

Pour affecter des probabilités aux gains marginaux des joueurs, afin de mesurer des gains espérés, analysons les possibilités d'entrée (ou sortie) des joueurs 1 et 2 dans chaque coalition.

Figure



Gains Marginaux du Joueur 1

Il y autant de chance pour que le joueur I (rejoigne) sorte de la grande coalition $\{1, 2\}$ et qu'il ne la rejoigne pas. Par conséquent, il est possible d'affecter des probabilités aux gains marginaux :

• Le passage de la coalition $\{1\}$ à $\emptyset$ se fait avec probabilité $1/2$.

• Le gain marginal $v(\{1\}) - v(\emptyset)$ est donc associé à la probabilité $1/2$.

• Le passage de la coalition $\{1, 2\}$ à $\{2\}$ se fait aussi avec probabilité $1/2$. Le gain marginal $v(\{1, 2\}) - v(\{2\})$ est donc associé à la probabilité $1/2$. Il s'agit de l'impact de la sortie (ou de l'entrée) du joueur 1 dans la grande coalition (on mesure le pouvoir d'un joueur en le retirant ou en l'ajoutant du groupe).

Solution de Shapley du Joueur 1

La solution de Shapley consiste à mesurer l'espérance des gains marginaux. Gain espéré du joueur 1 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}\left[v(\{1\}) - v(\emptyset)\right] + \frac{1}{2}\left[v(\{1,2\}) - v(\{2\})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[10 - 0\right] + \frac{1}{2}\left[38 - 12\right] = 5 + 13 = 18.\end{aligned}$$

Il s'agit du gain moyen d'entrer (ou de sortir) de toutes les coalitions possibles.

Cela ne signifie pas que cet équilibre sera effectivement choisi. Analysons le cas du joueur 2 avant d'analyser l'équilibre.

Gains Marginaux du Joueur 2

Il y autant de chance pour que le joueur 2 (rejoigne) sorte de la grande coalition $\{1,2\}$ et qu'il ne la rejoigne pas. Par conséquent, il est possible d'affecter des probabilités aux gains marginaux :

• Le passage de la coalition $\{2\}$ à $\emptyset$ se fait avec probabilité $1/2$. Le gain marginal $v(\{2\}) - v(\emptyset)$ est donc associé à la probabilité $1/2$.

• Le passage de la coalition $\{1,2\}$ à $\{1\}$ se fait aussi avec probabilité $1/2$. Le gain marginal $v(\{1,2\}) - v(\{1\})$ est donc associé à la probabilité $1/2$. Il s'agit de l'impact de la sortie (ou de l'entrée) du joueur 1 dans la grande coalition (on mesure le pouvoir d'un joueur en le retirant ou en l'ajoutant du groupe).

Solution de Shapley du Joueur 2

La solution de Shapley du joueur 2 consiste donc également à mesurer l'espérance des gains marginaux. Gain espéré du joueur 2 :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{2}\left[v(\{2\}) - v(\emptyset)\right] + \frac{1}{2}\left[v(\{1,2\}) - v(\{1\})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[12 - 0\right] + \frac{1}{2}\left[38 - 10\right] = 6 + 14 = 20.\end{aligned}$$

Il s'agit du gain moyen d'entrer (ou de sortir) de toutes les coalitions possibles.

Equilibre et Solution du Jeu

$$\alpha = (\alpha_1 = 18; \alpha_2 = 20)$$

On remarque que la solution n'est pas égalitaire car le joueur 2 à un gain de +2 par rapport au joueur 1.

Stabilité d'une coalition : la rationalité collective

Il importe de savoir comment déterminer si une solution coopérative est désirable pour l'ensemble des joueurs. Du point de vue individuel, nous l'avons montré, il est nécessaire que la rationalité individuelle soit respectée. Il faut ajouter à ce principe, celui de la rationalité collective.

Définition

Une solution α vérifie le concept de rationalité collective si :

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N.$$

Coalitions Bloquantes

En d'autres termes, la somme des gains de chaque membre de la coalition $\sum_{i \in S} \alpha_i$ doit être supérieure au gain de la coalition $v(S)$. Le groupe est rationnel, il préfère coopérer afin d'augmenter son paiement. Dans le cas contraire si $\sum_{i \in S} \alpha_i < v(S)$on parle de coalition bloquante. Cela signifie que les membres de la coalition S n'ont pas intérêt à s'allier. Elle est donc bloquante.

Lorsqu'une solution α respecte à la fois le critère de rationalité individuelle et celui de rationalité collective, alors la solution appartient au coeur du jeu. Ainsi, toutes les solutions d'un jeu se situant dans le coeur sont désirables pour les individus et pour les groupes auxquels ils appartiennent : la solution est stable, dans la mesure où personne n'a intérêt à s'opposer à la formation de certaines coalitions.

Coeur d'un Jeu

Définition

Une solution α vérifie appartient au le coeur d'un jeu noté C, $\alpha \in C$: si

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N \quad \text{et si} \quad \alpha_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N.$$

Exemple

- Rationalité collective :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 18 + 20 = 38$$

. Puisqu'il n'y a que deux joueurs, on vérifie la règle d'efficience d'une solution : $\alpha_1 + \alpha_2 = 18 + 20 = 38 = V(1, 2)$

- Rationalité individuelle :

On a bien : $\alpha_1 = 18 > v(\{1\}) = 10$ et $\alpha_2 = 20 > v(\{2\}) = 12$. Chaque joueur a individuellement intérêt à coopérer. Conclusion : La solution $\alpha = (18; 20)$ est stable, elle appartient au coeur du jeu.

Partage des Coûts

Les jeux coopératifs permettent aussi de concevoir des solutions lorsque les joueurs ont un coût à se partager et non un bénéfice comme nous l'avons vu à la section précédente. La solution de Shapley peut être utilisée à nouveau, mais les concepts de rationalité individuelle et collective sont utilisés avec des inégalités prises en sens opposé.

Définitions

Définition

Une solution α vérifie le concept de rationalité individuelle si :

$$\alpha_i \leq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$$

L'individu i préfère, suite au partage payer moins α_i, par rapport à la situation où il reste seul $v(\{i\})$.

Définition

Une solution α vérifie le concept de rationalité collective si :

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(S) \quad \forall S \subset N$$

Le groupe préfère payer moins $\sum_{i \in N} \alpha_i$, suite au partage, plutôt que supporter le coût du groupe S noté $v(S)$.

Exemple

Soit un jeu de partage des coûts tel que : $v(\emptyset) = 0$; $v(\{1\}) = 20$; $v(\{2\}) = 50$ et $v(\{1,2\}) = 40$. La solution de Shapley est dans le coeur, car :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[20 - 0] + \frac{1}{2}[40 - 50] = 10 - 5 = 5 < 20$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}[50 - 0] + \frac{1}{2}[40 - 20] = 25 + 10 = 35 < 50$$

Rationalité individuelle et collective (efficience) vérifiées. La solution de Shapley est dans le coeur car $5 + 35 = 40$.

Exemple

Soit un jeu de partage des coûts tel que : $v(\emptyset) = 0$; $v(\{1\}) = 40$; $v(\{2\}) = 36$ et $v(\{1,2\}) = 32$. La solution de Shapley est dans le coeur, car :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[40 - 0\right] + \frac{1}{2}\left[32 - 36\right] = 20 - 2 = 18 < 40$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left[36 - 0\right] + \frac{1}{2}\left[32 - 40\right] = 18 - 4 = 14 < 36$$

Rationalité individuelle et collective (efficience) vérifiées. La solution de Shapley est dans le coeur car $18 + 14 = 32$.

Exemple

Soit un jeu de partage des coûts tel que : $v(\emptyset) = 0$; $v(\{1\}) = 50$; $v(\{2\}) = 120$ et $v(\{1,2\}) = 200$. La solution de Shapley n'est pas dans le coeur, car :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[50 - 0] + \frac{1}{2}[200 - 120] = 25 + 40 = 65 > 50$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}[120 - 0] + \frac{1}{2}[2002 - 50] = 60 + 75 = 135 > 120.$$

La rationalité collective est assurée car 65 + 135 = 200, mais les joueurs 1 et 2 ne souhaitent pas coopérer sous peine de se coaliser pour finalement supporter un coût plus important. On dit alors que le joueur 1 (comme le joueur 2) forme une coalition bloquante. La solution du jeu n'est pas stable, elle n'est pas dans le coeur.