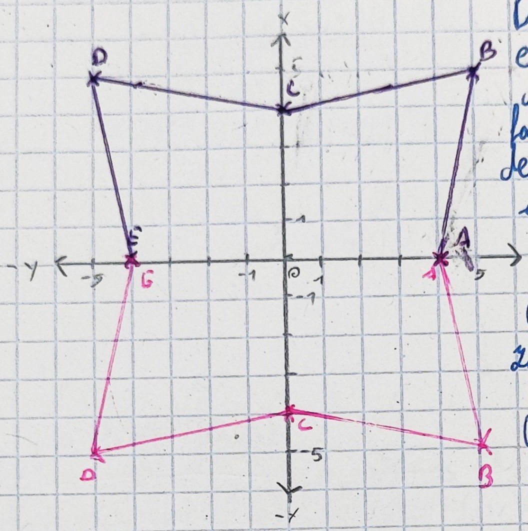
Sophie Stöger

Kapitel 3 Vektorrechnung - Ebene der Kordinatengeometrie

3.1 Einführung

Vektorielle Größen: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung

•) A(0,4); B(5,5); C(4,0); D(5,-5); E(0,-4)



Die kartesische Koordinaten (x,y) eines Punktes lassen sich nicht nur der Beschreibung eines Ortes auffassen, sondern auch als Beschreibung des kürzesten Weges vom Koordinatenursprung (0,0) zum Punkt P.

Der kürzeste Weg vom Ursprung zum Punkt 0 lässt sich durch eine Orientierte Strecke - Pfeil - dem sogenannten Ortsvektor darstellen

Sophie Stöger

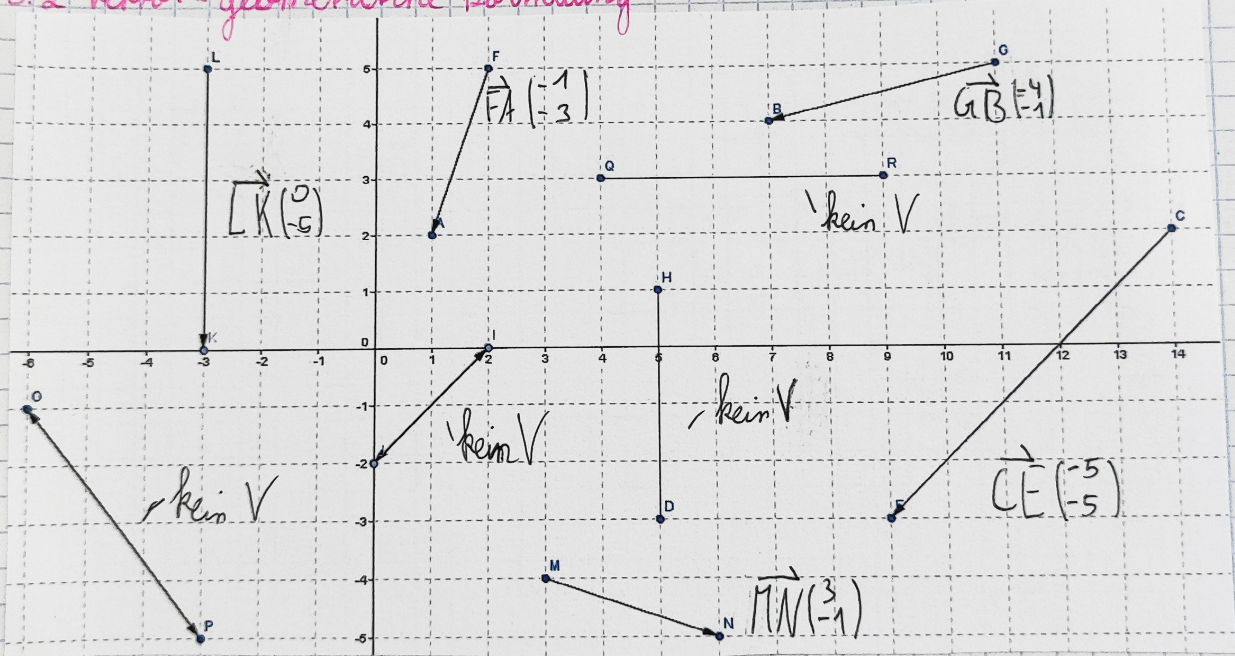
① $\dfrac{1-\frac{x}{1+x}}{\frac{x}{1+x}+1} = \dfrac{\frac{1(1+x)-x}{1+x}}{\frac{x+1\cdot(1+x)}{1+x}} = \dfrac{(1+x)-x\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot x\cdot(1+x)} = \dfrac{-x}{x}$

2 $\dfrac{1}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1\cdot(1-x)}{1\cdot 1} = 1-x$ $\dfrac{\frac{1}{1-x}}{x} = \dfrac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1}} = \dfrac{1\cdot 1}{(1-x)\cdot x} = \dfrac{1}{x\cdot(1-x)}$

① $\dfrac{1-\frac{x}{1+x}}{\frac{x}{1+x}+1} = \dfrac{\frac{1}{1}-\frac{x}{1+x}}{\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1}} = \dfrac{\frac{1\cdot x-x}{1+x}}{\frac{x+(1\cdot x)}{1+x}} = \dfrac{(x-x)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x+x)} = \dfrac{x(1-1)}{x(1+1)} = \dfrac{1-1}{1+1}$

20. SÜ am 9.12.2020 Sophie Stöger

3.2 Vektor - geometrische Darstellung



$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$
Endpunkt
Anfangspunkt

Merke: Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass mit der Angabe der Koordinaten des Anfangspunktes und den Koordinaten des Endpunktes die Koordinatendarstellung eindeutig festgelegt ist.
! Die Umkehrung gilt nicht.

3.2.1 Bestimmung eines Vektors

Die Berechnung eines Vektors lässt sich folgendermaßen durchführen:

$\overrightarrow{AB} = B - A$ "Spitze - Schaft"-Regel

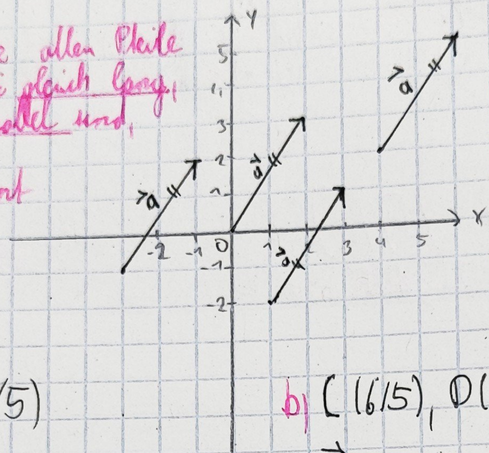
Ist $\vec{AB}$ und A oder B bekannt, dann gilt:

$B = \vec{AB} + A$

$\underline{\underline{A = B - \vec{AB}}}$

Hat man einen Vektor $\vec{a} = \binom{a_x}{a_y} = \binom{2}{3}$ gegeben, so kann jeder Anfangspunkt beliebig gewählt werden.
Jeder beliebige Vektor $\vec{a}$ kann also durch unendlich viele Pfeile in der Ebene dargestellt werden.
Alle Pfeile sind <u>gleich lang</u>, <u>parallel</u> und <u>gleich orientiert</u> (gleich sinnig)

Definition: Die Menge aller Pfeile der Koordinatenebene, die <u>gleich lang</u>, <u>gleich orientiert</u> und <u>parallel</u> sind, nennt man Vektoren.
Der Pfeil heißt Repräsentant des Vektors

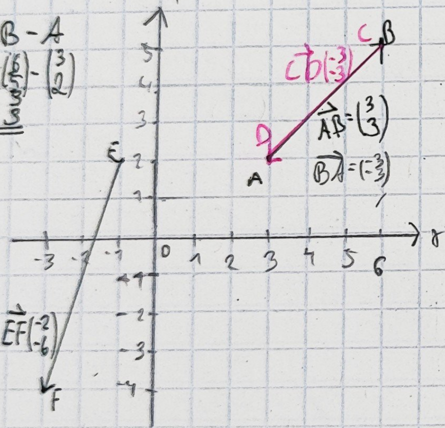


Abl 3.1 1a) A(3/2), B(6/5)

$\vec{AB} = B - A$

$\vec{AB} = \binom{6}{5} - \binom{3}{2}$

$\underline{\underline{\vec{AB} = \binom{3}{3}}}$



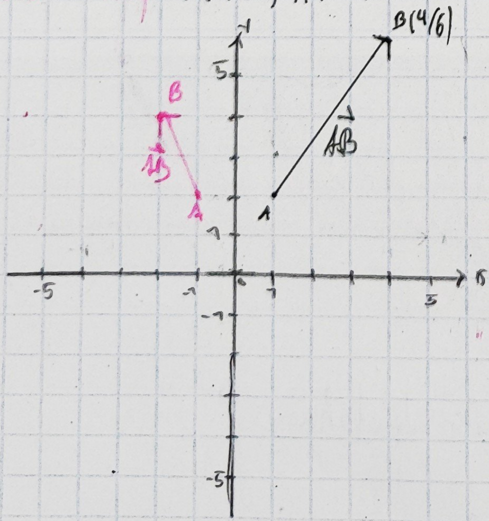
b) C(6/5), D(3/2)

$\underline{\underline{\vec{CD}}} = D - C = \binom{3}{2} - \binom{6}{5} = \underline{\underline{\binom{-3}{-3}}}$

c) E(-1/2) F(-3/-4)

$\underline{\underline{\vec{EF}}} = F - E = \binom{-3}{-4} - \binom{-1}{2} = \underline{\underline{\binom{-2}{-6}}}$

Abl 3.1 2a) A(1/2) $\vec{AB}\binom{3}{4}$ B = ?



$\vec{AB} = B - A \quad | + A$

$B = \vec{AB} + A$

$B = \binom{3}{4} + \binom{1}{2} = \binom{4}{6} \Rightarrow \underline{\underline{B(4/6)}}$

b) B(-2/4), $\vec{AB} = \binom{-1}{2}$

$\vec{BA} = -\vec{AB} = \binom{1}{-2}$

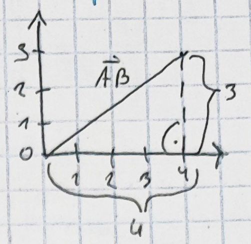
$\vec{AB} = B - A \quad | + A$

$\vec{AB} + A = B \quad | - \vec{AB}$

$A = B - \vec{AB}$

$A = \binom{-2}{4} - \binom{-1}{2} = \binom{-1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A(-1/2)}}$

2.1. SÜ am 14.12.2020 Sophie Stöger



3.2.2 Der Betrag (die Länge) eines Vektors

Wie bekommt man den Betrag eines Vektors?

Beispiel $\vec{AB}\binom{4}{3}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

Der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ ist definiert als $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Beispiele: 9.79 a)

A(-4/7) und B(8/3) $\vec{AB} = B - A = \binom{8}{3} - \binom{-4}{7} = \binom{12}{-4}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{12^2+(-4)^2} = \sqrt{144+16} = \underline{\underline{\sqrt{160}}}$

b)

G(-3/7), H(8/-4) $\vec{GH} = \binom{8}{-4} - \binom{-3}{7} = \binom{11}{-11}$ $|\vec{GH}| = \sqrt{11^2+(-11)^2} = \sqrt{121+121} = \underline{\underline{\sqrt{242}}}$

9.81 a) A(3/-6), B(7/0) C(1/4), D(-3/-2)

$\vec{a} = \vec{AB} = \binom{7}{0} - \binom{3}{-6} = \binom{4}{6}$ $\vec{b} = \vec{BC} = \binom{-6}{4}$ $\vec{c} = \vec{CD} = \binom{-4}{-6}$ $\vec{d} = \vec{DA} = \binom{6}{-4}$

$a = |\vec{a}| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$ $b = |\vec{b}| = \sqrt{(-6)^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ $c = |\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2+(-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$d = |\vec{d}| = \sqrt{6^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ $a = b = c = d$ $\underline{\underline{u = 4a = 4 \cdot \sqrt{52}}}$ LE

LE... Längeneinheit (E)
FE... Flächeneinheit (E²)

Alle Seiten sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander

3.3 Gleichheit zweier Vektoren:

Definition: Zwei Vektoren heißen gleich wenn gilt:

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \binom{a_1}{a_2} = \binom{b_1}{b_2} \text{ oder } a_1 = b_1 \text{ und } a_2 = b_2$$

Beispiel 1) $\vec{a} = \binom{2}{3}$, $\vec{b} = \binom{4}{6}$ $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_1 = 4$, $b_2 = 6$ $\underline{\underline{\vec{a} \neq \vec{b}}}$

2) $\vec{a} = \binom{2}{3}$; $\vec{b}\binom{2}{3}$ $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 3$ $\underline{\underline{\vec{a} = \vec{b}}}$

3.4 Parallele, antiparallele und kollineare Vektoren:

Def.: Zwei Vektoren heißen parallel, wenn gilt:

$$a \parallel b \iff \vec{a} = v \cdot \vec{b} \iff \binom{a_1}{a_2} = v \cdot \binom{b_1}{b_2} \quad \text{mit } v \in \mathbb{R}$$

mit $v > 0$ und anti-parallel, wenn $v < 0$ ist. Kollineare Vektoren sind parallel oder anti-parallel.

Also: $a_1 = v b_1$ und $a_2 = v b_2$

1) $\vec{a} = \binom{2}{3}$, $\vec{b}\binom{7}{4}$

$a_1 = v_1 \cdot b_1 \quad |:b_1$ $a_2 = v_2 \cdot b_2 \quad |:b_2$ $\underline{\underline{\vec{a} \nparallel \vec{b}}}$

$v_1 = \frac{a_1}{b_1}$ $v_2 = \frac{a_2}{b_2}$

$v_1 = \frac{2}{7}$ $v_2 = \frac{3}{4}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $2 = v \cdot (-4) \quad | : (-4)$ $v = -\frac{2}{4}$ $v = -\frac{1}{2}$ $3 = v \cdot (-6) \quad | : (-6)$ $v = -\frac{3}{6}$ $v = -\frac{1}{2}$ $\underline{\vec{a} \parallel \vec{b}}$

3.5 Rechnen mit Vektoren:

3.5.1 Addition zweier Vektoren:

Die Summe zweier Vektoren ist gegeben durch

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ Es gilt also: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+6 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.5.2 Die Differenz zweier Vektoren:

Die Differenz zweier Vektoren ist gegeben durch:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ Es gilt: $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5.3 Multiplikation eines Vektors mit Skalar (c):

$$c \cdot \vec{a} = c \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c a_1 \\ c a_2 \end{pmatrix} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel: $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

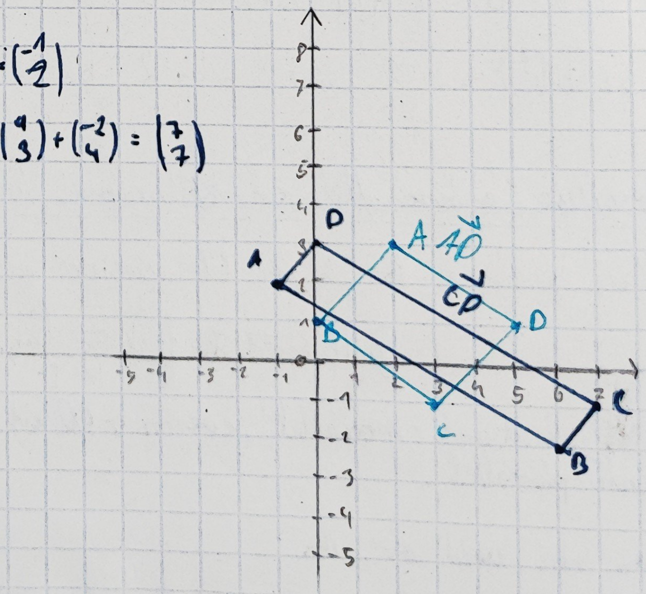
3.5.4 Komponenten eines Vektors:

Gegeben seien die Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dann gilt: $\vec{c} = 3a + 2b = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

1a) $A = (-1/2)$, $C(7/-1)$ $D(0/3)$

$B = A + \vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = (6/-2)}$



b) $A = (2/3)$, $B(0/1)$, $D(5/1)$

$C = B + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C = (3/-1)}$

22. SÜ am 16.12.2020

Sophie Stöger

Bsp 2a) $3a - b = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$

3.5.5 Einheitsvektor als Richtungsvektor:

Vektoren werden oft verwendet um Richtungen anzugeben. Dabei ist sein Betrag häufig unbedeutend.
Man verwendet dazu den so genannten Einheitsvektor.

Definition: Der Einheitsvektor ist definiert durch

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad \text{mit } \vec{a} \neq 0$$

Der Einheitsvektor ist <u>eine</u> (1) Einheit lang.

Beispiel 1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

3.5.6 Der Normalvektor:

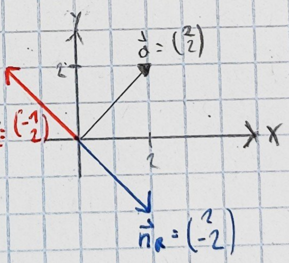
Bei vielen geometrischen Konstruktionen benötigt man den "Rechten Winkel".

Man benötigt also die zu einen vorgegebenen Richtung orthogonale Richtung.

Um den <u>Normalvektor</u> bzw. den orthogonal stehenden Vektor zu erhalten kippt man den Vektor um 90° nach links oder nach rechts.

Links-Kipp-Regel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \vec{n}_L = \begin{pmatrix}-a_2\\a_1\end{pmatrix}$

Rechts Kipp-Regel: $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \vec{n}_R = \begin{pmatrix}a_2\\-a_1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_L = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$



Beispiel 1: Berechne die Normalvektoren

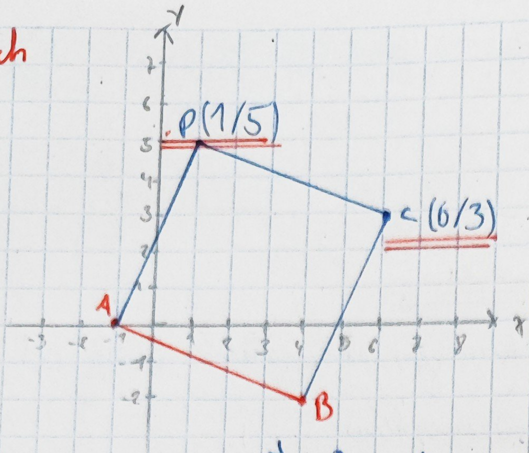
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \vec{n}_L = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{n}_R = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} \quad \vec{n}_L = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \quad \vec{n}_R = \begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

2) Von einem Quadrat kennt man die Eckpunkte A(-1/0) und B(4/-2). Ermitteln sie die Eckpunkte C und D grafisch und rechnerisch.
Orientierung beachten!

(Rückseite)

a) grafisch



b) rechnerisch

$\vec{AB} = B - A = \binom{4}{-2} - \binom{-1}{0} = \binom{5}{-2}$

$\vec{n_L} = \vec{AD} = \binom{2}{5}$

$\vec{AD} = D - A \quad | + A$

$D = \vec{AD} + A = \binom{2}{5} + \binom{-1}{0} = \binom{1}{5} \Rightarrow D(1/5)$

$C = B + \vec{n_L} = \binom{4}{-2} + \binom{2}{5} = \binom{6}{3} \Rightarrow C(6/3)$

9.35 a) $\vec{a} = \binom{-8}{15}$ $\quad \vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \binom{-8}{15} = \frac{1}{\sqrt{(-8)^2 + (15)^2}} \binom{-8}{15} = \frac{1}{\sqrt{64 + 225}} \binom{-8}{15} = \frac{1}{\sqrt{289}} \binom{-8}{15} = \frac{1}{17} \binom{-8}{15}$

b) $\vec{b} = \binom{20}{-4,5}$ $\quad \vec{b_0} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{(-4,5)^2 + 20^2}} \binom{20}{-4,5} = \frac{1}{\sqrt{420,4,5}} \binom{20}{-4,5}$

3.5.7 Orthogonalitätskriterium - Skalares Produkt zweier Vektoren:

Definition: Die Zahl $a_1 b_1 + a_2 b_2$ heißt Skalares Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Definition: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn ihr skalares Produkt null ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

24. SÜ am 23.12.2020

rechnet wurden 23 SÜ weiter

Prüfen orthogonalität (⊥)

$\vec{BC} \perp \vec{CD}$?

$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = \binom{-1}{-7} \cdot \binom{7}{-1} = (-1)\cdot 7 + (-7)\cdot(-1) = -7 + 7 = 0 \Rightarrow$ weil $\vec{BC} \cdot \vec{CD} = 0$ handelt es sich um einen rechten winkel

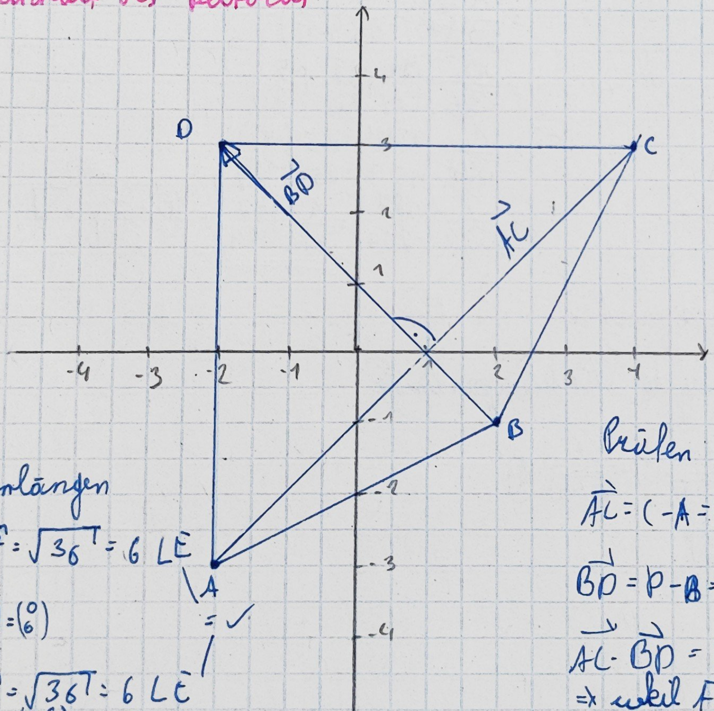
Prüfen Seitenlänge

$|\vec{BC}| = |\binom{-1}{-7}| = \sqrt{(-1)^2+(-7)^2} = \sqrt{50}$ LE

$|\vec{CD}| = |\binom{7}{-1}| = \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$ LE $= ✓$

A: Da jeweils gegenüberliegende Seiten parallel sind und zwei benachbarte Seiten

11 Gegeben ist das Viereck ABCD A(-2/-3), B(2/-1), C(4/3) und D(-2/3). Zeigen Sie dass es sich um ein Deltoid handelt. Berechnen Sie den weiteren Umfang und den Flächeninhalt des Deltoids



Eigenschaften-Deltoids

·) $e \perp f$ $\quad \vec{AC} \perp \vec{BD}$

·) $|\vec{AD}| = |\vec{CD}|$

$|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$

Prüfen $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

$\vec{AC} = C - A = \binom{4}{3} - \binom{-2}{-3} = \binom{6}{6}$

$\vec{BD} = D - B = \binom{-2}{3} - \binom{2}{-1} = \binom{-4}{4}$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \binom{6}{6} \cdot \binom{-4}{4} = 6 \cdot (-4) + 6 \cdot 4 = -24 + 24 = 0$

$\Rightarrow$ weil $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, gilt $\vec{AC} \perp \vec{BD}$

Prüfen: Seitenlängen

$|\vec{AD}| = \sqrt{0^2+6^2} = \sqrt{36} = 6$ LE

$\vec{AD} = \binom{-2}{3} - \binom{-2}{-3} = \binom{0}{6}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{(-6)^2+0^2} = \sqrt{36} = 6$ LE $= ✓$

$\vec{CD} = \binom{-2}{3} - \binom{4}{3} = \binom{-6}{0}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ LE

$\vec{AB} = B - A = \binom{2}{-1} - \binom{-2}{-3} = \binom{4}{2}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$ LE $= ✓$

$\vec{BC} = C - B = \binom{4}{3} - \binom{2}{-1} = \binom{2}{4}$

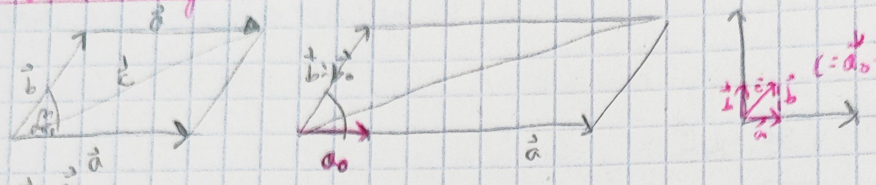
A: Die beiden Diagonalen stehen normal aufeinander und jeweils 2 benachbarte Seiten sind gleich, aber nicht alle 4. Deshalb handelt es sich um ein Deltoid

Umfang: $U = 2\cdot|\vec{AB}| + 2|\vec{FD}|$
$= 2\cdot\sqrt{20} + 2\cdot 6$
$= 2\cdot(\sqrt{20}+6)$ LE

Fläche: $A = \frac{e\cdot f}{2} = \frac{|\vec{AC}|\cdot|\vec{BD}|}{2}$ $A = \frac{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}}{2} = \frac{48}{2}$
$A = 24$ FE

$|\vec{AC}| = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72}$ LE
$|\vec{BD}| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$ LE

3.6 Winkelsymmetrale:



$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$

Die Winkelsymmetrale lässt sich mit Hilfe der Einheitsvektoren berechnen: $\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0$

$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$

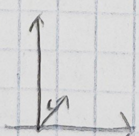
Bsp. $\vec{a} = \begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{24^2+7^2}}\cdot\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$
$$= \frac{13}{325}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix} + \frac{25}{325}\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{325}\begin{pmatrix}13\cdot 24 + 25\cdot(-5)\\13\cdot 7 + 25\cdot(-12)\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{325}\begin{pmatrix}187\\-209\end{pmatrix} = \frac{11}{325}\begin{pmatrix}17\\-19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}58\\-0{,}64\end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Richtung der Winkelsymmetrale: $\vec{w} = \begin{pmatrix}17\\-19\end{pmatrix}$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ Richtung der Winkelsymmetrale

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{4^2+8^2}}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{8^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{80}}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{80}}\cdot\left(\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{80}}\cdot\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}34\\1{,}34\end{pmatrix}$$
$$= \frac{12}{\sqrt{80}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow w = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$