6.5. Schularbeit am 8.4.2022

Sophie Stöger

5. Vektorrechnungen

5.1. Wiederholung der Vektorrechnung in der Ebene

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = B - A$

Spitze - Schaft

Betrag: $|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Einheitsvektor $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\quad |\vec{a_0}| = 1$

Mittelpunkt: $M = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(A + B)$

Schwerpunkt Dreieck: $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$

5.2 das Skalarprodukt zweier Vektoren

5.2.1 der Normalvektor

$\vec{a}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n_L} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$\vec{n_R} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

5.2.2 Skalares Produkt

Definition: Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ $\quad$ α: Winkel den die beiden Vektoren einschließen

$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Ortogonalitätskriterium

2 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind genau dann Ortogonal wenn das Skalarprodukt gleich 0 ist, also:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

5.2.3 Parallelitätskriterium

$\vec{a} = v b$

•) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad 2 = v6 \Leftrightarrow v = \frac{1}{3}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad 4 = v4 \Leftrightarrow v = \frac{4}{4}$ $\quad \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$

↯

70. Schulübung am 3.5.2022

Sophie Stöger

5.4 Vektoren im Raum

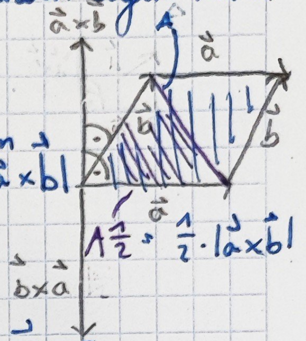
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

kein n_L oder n_R weil es unendlich viele Normalvektor gibt

5.5 das Vektorprodukt

Das Vektorielle Produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ normal
2. Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Flächeninhalt ist der von den $\vec{a}$ Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bildet ein Rechtssystem $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



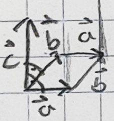
2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Kollinear genau dann, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Volumen Parallelepiped

$V = |\vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{b})|$



Volumen gerade Pyramide

$V = \frac{1}{3} \cdot |\vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{b})|$

Volumen Tetraeder

$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{b})|$

2a. Schulübung am 15.6.22 Sophie St.

4.5 Logarithmische Skalierung

Möchte man sehr kleine und sehr große Werte auf einer gemeinsamen Skala grafisch veranschaulichen, so ist das mit einem linearen Maßstab oft nicht möglich. Man kann dann eine Skala verwenden, bei der gleiche Abstände nicht gleichem additivem Zuwachs bei der Ausgangsgröße entsprechen.

z.B. lineare Skala:

1kg ... 1cm von 0 entfernt
4kg ... 4cm von 0 entfernt

Die Entfernung eines Werts zum Ursprung der Skala ist proportional zur Größe des Werts

logarithmische Skala

Zu Beginn der Skala: $1 (= 10^0)$
10^1 kg ... 1cm von 1kg entfernt, da $\log(10)^1 = 1$
10^4 kg ... 4 cm von 1kg entfernt, da $\log(10^4) = 4$
80000 kg ... 4,9 cm von 1kg entfernt, da $\log(80000) \approx 4,9$

Ist die Markierung 3,5 cm von der 1kg-Markierung entfernt, dann ist der Wert $10^{3,5}$ mal so groß, also $1kg \cdot 10^{3,5} = 3,162 kg$

Die Entfernung zum Ursprung der Skala ist proportional zum Zehnerlogarithmus des dargestellten Werts.

Werden auf einer Skala von einem Ursprung ausgehend die Funktionswerte einer Funktion $y = f(x)$ markiert und mit den x-Werten beschriftet, so erhält man eine Funktionsleiter. Eine logarithmische Funktionsleiter ist eine Skala, bei der von einem Ursprung ausgehenden die Logarithmen der Werte aufgetragen werden. Gleichen Abständen auf der Skala entsprechen dann gleiche Änderungsfaktoren. Da der Logarithmus von 0 nicht definiert ist, kann der Ursprung einer solchen Skala nie 0 sein.

logarithmische Koordinatensysteme

Für die Darstellung von Funktionen in einem Koordinatensystem kann es vorteilhaft sein, für eine oder beide Achsen keine lineare, sondern eine logarithmische Skala zu verwenden.
Ist die senkrechte Achse eine logarithmische Skala und die waagrechte Achse eine lineare Skala, spricht man von einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem. Zur Unterscheidung wird die y-Achse mit dem Großbuchstaben Y bezeichnet.

Auf der x-Achse trägt die tatsächlichen x-Werte als Abstände ein, auf der Y-Achse jedoch deren Logarithmen

$Y = E \cdot \log(y)$ E.. Zeicheneinheit

·) $Y = k \cdot x + d \Rightarrow E \cdot \log(y) = k \cdot x + d \quad | : E$
$\log(y) = \frac{k}{E} \cdot x + \frac{d}{E}$

$y = 10^{\frac{k}{E} \cdot x + \frac{d}{E}} = (10^{\frac{k}{E}})^x \cdot 10^{\frac{d}{E}} = a^x \cdot c$

Da k und E Konstanten sind ist auch $10^{\frac{k}{E}}$ eine Konstante, die wir mit a bezeichnen, ebenso ist $10^{\frac{d}{E}}$ eine Konstante c. Die Funktion, deren Darstellung in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade ist, ist daher eine Exponentialfunktion.

In einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem ist die waagrechte Achse logarithmisch skaliert, die senkrechte Achse linear. Die Darstellung jeder logarithmischen Funktion ist hier eine Gerade.

Sind beide Achsen eines Koordinatensystem logarithmisch skaliert, so spricht man von einem doppellogarithmischen Koordinatensystem.
Zeichnet man zum Beispiel die Potenzfunktion $y = 0{,}7 \cdot x^5$ so erscheint sie hier als Gerade

Da $\log(y) = \log(a \cdot x^n) = \log(a) + n \cdot \log(x)$ ist, erscheint jede Potenzfunktion $y = a \cdot x^n$ als Gerade $y = \log(a) + n \cdot X$