Methode der kleinsten Quadrate

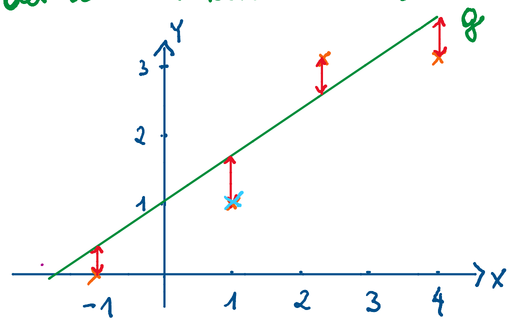
Tuesday, 22 November 2022 08:28

(Ausgleichsrechnung B 266)

Lineare Regression

Bsp: Gegeben sind die Punkte (1|1), (2|3), (4|3), (-1|0)

Gesucht ist eine Gerade so, dass die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände minimal wird.



Skizze

$g: \; y = k \cdot x + d$

$P(1|1)$

$1 - y_g = k \cdot 1 + d \quad / -1$

$$F(k,d) = (k \cdot 1 + d - 1)^2 + (k \cdot 2 + d - 3)^2 + (4k + d - 3)^2 + (-k + d)^2$$

1) $$\frac{\partial F(k,d)}{\partial k} = \cancel{2}(k + d - 1) + \cancel{2}(2k + d - 3) \cdot 2 + \cancel{2}(4k + d - 3) \cdot 4 + \cancel{2}(-k + d) \cdot (-1) = 0$$

2) $$\frac{\partial F(k,d)}{\partial d} = \cancel{2}(k + d - 1) + \cancel{2}(2k + d - 3) + \cancel{2}(4k + d - 3) + \cancel{2}(-k + d) = 0$$

1) $k + d - 1 + 4k + 2d - 6 + 16k + 4d - 12 + k - d = 0$

$22k + 6d = 19 \quad | \cdot 2$

2) $6k + 4d = 7 \quad | \cdot (-3)$

$26k = 17$

$k = \frac{17}{26} \qquad d = \frac{10}{13}$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{17}{26} x + \frac{10}{13}}$$

$X = [\,.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\,]$

line(X, Y)

$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $Y := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

regress(X, Y, 1)

Ordnung

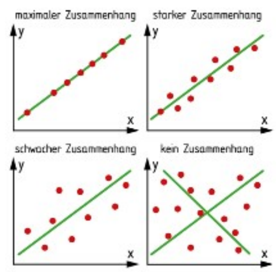
regress$(X^T, Y^T, 1)$

quadratische Regression $y = ax^2 + bx + c$ regress(X, Y, 2)

kubische –||– $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ regress(X, Y, 3)

Korrelationskoeffizient r corr(X, Y)

Der lineare Zusammenhang ist umso stärker, je näher $|r|$ bei 1 liegt.



- $|r| = 1$ ... Alle Punkte liegen auf einer Geraden, es liegt ein linearer Zusammenhang vor.
- $r = 0$ ... Die Punkte liegen verstreut, es gibt keinen linearen Zusammenhang.
- $0 < |r| < 1$ ... Je näher der Wert von $|r|$ bei 1 liegt, desto stärker ist der lineare Zusammenhang.

Das Vorzeichen von r gibt an, ob die Regressionsgerade fallend ($r < 0$) oder steigend ($r > 0$) ist.

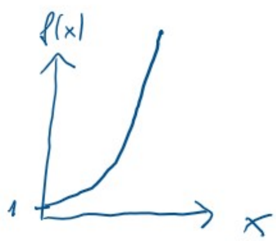
Bestimmtheitsmaß $R^2 = r^2$ ist ein Maß für die Stärke des linearen Zusammenhangs der beiden Merkmale.

4. Klasse Buch

11.5 $|r| > 0{,}6$ starker Zusammenhang

11.16 $|r| > 0{,}8$ sehr starker Zusammenhang

11.14



$f(x) = a^x$

$f(x) = e^x$

Exponentialfunktion

$f(x) = C \cdot e^{\cdots x}$

$\boxed{\text{genfit}}$

~~expfit~~ $= C \cdot e^{\cdots x} + \cancel{D}$

$N(t) = N_0 \cdot e^{\pm \lambda t}$