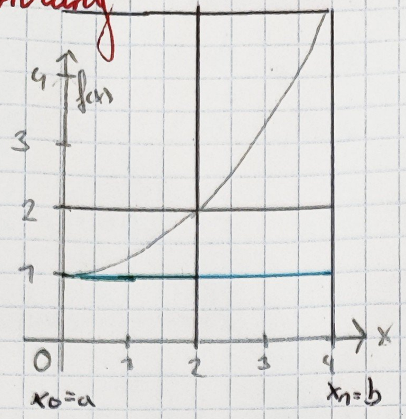
46. Schulübung am 15.2.2023

Sophie Stöger

4. Integralrechnen

4.1. Einführung

$f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

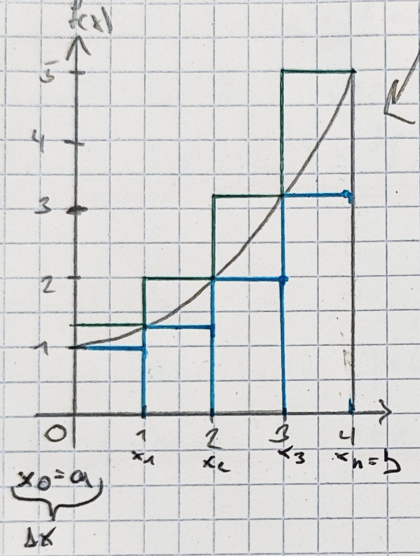


Gesucht ist die Fläche im Intervall $[0;4]$

$O_1 = 4 \cdot 5 = 20$
$U_1 = 4 \cdot 1 = 4$

$O_2 = 2f(2) + 2f(4) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 14$
$U_2 = 2f(0) + 2f(2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$

$O_3 = 1f(1) + 1f(2) + 1f(3) + 1f(4) = 1{,}25 + 2 + 3{,}25 + 5 = 11{,}5$
$U_3 = 1f(0) + 1f(1) + 1f(2) + 1f(3) = 1 + 1{,}25 + 2 + 3{,}25 = 7{,}5$



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$x_i = x_0 + \frac{b-a}{n} \cdot i$

$U_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$O_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Satz:
Ist die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ im Intervall $[a,b] \subseteq A$ stetig, dann gibt es genau eine reele Zahl I, so dass für alle Untersummen U und alle Obersummen O von f in $[a,b]$ gilt

Definition:
Die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ sei im Intervall $[a,b] \subseteq A$ beschränkt. Dann heißt die reele Zahl I, die für jede Untersumme U und jede Obersumme O von f in $[a,b]$ die Bedingung $U \leq I \leq O$ erfüllt, das bestimmte Integral von f in $[a,b]$.

Man schreibt dafür:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

In diesem Fall sagt man auch, dass die Funktion f integrierbar ist.

Satz:
Ist die Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ im Intervall $[a,b] \subseteq A$, so ist f integrierbar ist.

Bsp. 6.24a)

Arbeitsauftrag vom 17.3.2023

6.3.1 Lineare Subtitution

Beim differenzieren von verketteten Funktionen, wird die Kettenregel verwendet. Man beginnt damit die "innere" Funktion mit einer Variable zu subtituieren und dann, leitet man die äußere Funktion ab, diese wird dann mit der "inneren" Ableitung multipliziert.

$y(x) = f(u(x)) \Rightarrow \quad y' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ bzw. $f'(u) \cdot u'$ bzw. $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Integrale von Funktionen wie $f(ax+b)$ werden beim Subtituieren auf Grundintegrale umgeformt. $\rightarrow f(ax+b) = (f(ax+b))' = f'(ax+b) \cdot a$

- $y(t) = \sin(3t+\pi)$
  $y'(t) = \cos(3t+\pi) \cdot 3$
  $\int \cos(3t+\pi) \cdot 3\, dt \quad u(t) = 3t+\pi \quad \frac{du}{dt} = 3 \quad dt = \frac{du}{3} = \frac{1}{3} du$
  $\int \cos(u) \cdot \cancel{3} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} du = \int \cos(u) du = \sin(u) + C = \underline{\underline{\sin(3t+\pi) + C}}$

es gilt:

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \int f(u) \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \cdot \int f(u)\, du = \frac{F(u)}{a} + C = \frac{F(ax+b)}{a} + C \qquad u = ax+b \Rightarrow \frac{du}{a}}$$

6.72 a) $\int \cos(5t+1) dt \overset{u=5t+1}{=} \frac{1}{5} \int \cos(u)\, du = \frac{1}{5} \sin(u) + C = \underline{\underline{\frac{\sin(5t+1)}{5} + C}}$

b) $\int \frac{3}{x-2} dx \quad u = x-2 \quad = 1 \cdot 3 \cdot \int \frac{1}{u} du = 3 \cdot \ln(|u|) + C = \underline{3 \cdot \ln(|x-2|) + C}$

6.3.2 Weitere Subtitution

Arten von Intergralen, bei denen Subtitution möglich ist:

- $\int 8x \cdot (x^2+4)^3 \quad u = x^2+4 \quad dx = \frac{du}{2x}$
  $\int \cancel{8x}^{4} \cdot u^3 \frac{du}{\cancel{2x}} = 4 \cdot \int u^3 du = 4 \frac{u^4}{4} + C = \underline{(x^2+4)^4 + C}$

hier gilt:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = u'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)} \qquad \int f[u(x)] \cdot \cancel{u'(x)}\, dx = \int f(u) \cdot \frac{du}{\cancel{u'(x)}} = \int f(u)}$$

andere Schreibweise:

- $\int \underbrace{(x^3+4)^5}_{u^5} \cdot \underbrace{3x^2\, dx}_{du}$ mit $u = x^3+4$ und $du = 3x^2 dx$
  $\underline{\int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (x^3+4)^6 + C}$

49. SÜ am 1.3.2023

Sophie Stöger

$f(x) = x^2$ $\qquad \int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + C$

$f'(x) = 2x$

$f(x) = x^n$ $\qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\qquad$ für $n \neq -1$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

$f(x) = x^3$ $\qquad f'(x) = 3x^2$ $\qquad \int 3\cdot x^2\,dx = 3\cdot\int x^2\,dx = \cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}} = x^3 + C$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$$

$$a\cdot\int f(x)\,dx = \int a\,f(x)\,dx$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

6.18)

$f(x) = 2x$ $\qquad \int 2x\,dx = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + C = x^2 + C$ $\qquad$ 1) → F)

$f(x) = (x+1)^2$ $\qquad \int (x+1)^2\,dx = \int (x^2+2x+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$ $\qquad$ 2) → E)

$f(x) = 2$ $\qquad \int 2\,dx = 2x + C$ $\qquad$ 3) → C)

$f(x) = 4x^3$ $\qquad \int 4x^3\,dx = \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}} + C = x^4 + C$ $\qquad$ 4) → A)

$f(x) = x^5$ $\qquad \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ $\qquad$ 5) → D)

6.19 e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad \int -\frac{1}{x^2}\,dx = -\int x^{-2} = +\frac{x^{-1}}{+1} + C = \underline{x^{-1} + C}$ $\qquad F_1 = \frac{1}{x} + 3$ $\quad F_2 = \frac{1}{x} - 4$

f) $f(x) = x + 2$ $\qquad \int x + 2\,dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + 2x + C}}$ $\qquad F_1 = \frac{x^2}{2} + 2x + 3$ $\quad F_2 = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Es sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F(x): I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ falls $F'(x) = f(x)$ gilt.

Satz: Sind F und G Stammfunktionen von f auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, so ist $F - G$ konstant

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Es seien $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und F eine Stammfunktion von f auf dem Intervall I, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

4.3 Integrationsmethoden

4.3.1 Summen- und Faktorregel

Satz: Sind $f_1: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_2: [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen, so g

1. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$
2. $\int_a^b c \cdot f_1(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f_1(x)\,dx$ mit $c \in \mathbb{R}$
3. $\int_a^b f_1(x)\,dx \geq 0$, wenn $f_1(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$
4. $\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx$, wenn $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $a \leq b$
5. $\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_1(x)\,dx$, wenn $a < b < c$

4.3.2 Grundintegrale

siehe Buch Seite 205

53. Schulübung am 10.3.2023

Sophie Stöger

4.3.3 Partielle Integration

Es seien die Funktionen

$f_1(x): [a,b] \to \mathbb{R}$ und

$f_2(x): [a,b] \to \mathbb{R}$

differenzierbar und $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ stetig im Intervall $[a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2'(x)\, dx = f_1(x)\cdot f_2(x)\Big|_a^b - \int_a^b f_1'(x)\, f_2(x)\, dx$$

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u' v$$

6. 103a) $\int t\cdot \cos(t)\,dt = t\cdot \sin(t) - \int \sin(t)\,dt$

$\underline{\underline{= t\cdot \sin(t) + \cos(t) + C}}$

$u = t \quad u' = 1$
$v' = \cos(t) \quad v = \sin(t)$

b) $\int x\cdot e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x = \frac{x^2}{2}e^x - \left(\frac{x^2}{2}e^x - \int x\cdot e^x\,dx\right)$

$= \int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = \underline{\underline{x\cdot e^x - e^x + C}}$

vertut man sich nicht nochmal rechnen, sondern v' und v vertauschen!

$u = e^x \quad u' = e^x$
$v' = x \quad v = \frac{x^2}{2}$

$u = \frac{x^2}{2} \quad u' = x$
$v' = e^x \quad v = e^x$

$u = x \quad u' = 1$
$v' = e^x \quad v = e^x$

6. 104c) $\int t^2\cdot \ln(t)\,dt = \ln(t)\cdot\frac{t^3}{3} - \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^3}{3}\,dt = \frac{t^3}{3}\ln(|t|) - \int \frac{t^2}{3}\,dt$

$\underline{\underline{= \frac{t^3}{3}\ln(|t|) - \frac{t^3}{9} + C}}$

$u = \ln(t) \quad u' = \frac{1}{t}$
$v' = t^2 \quad v = \frac{t^3}{3}$

56. SÜ am 21.3.2023

Sophie Stöger

4.3.4 Substitutionsregel

Satz: Ist die Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sind die Funktionen $g': [a,b] \to \mathbb{R}$, $f[g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz \qquad \text{mit } z = g(x),\ g(a)$$

Bemerkung: lineare Substitution $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ mit $a \neq b$

Logarithmische Substitution

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + C \qquad \text{mit } f(x) \neq 0$$

Spezialfälle:

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \arctan(|f(x)|) + C$$

6.102) $\int 3x \cdot e^{3x^2+1}\,dx \qquad u = 3x^2+1 \qquad du = 6x\,dx \qquad dx = \frac{du}{6x}$

$$\int \cancel{3x} \frac{e^u}{{}_2\cancel{6x}}\,du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{3x^2+1} + C$$

6.94c) $\int x^2 \cdot (4x^3+5)^4\,dx \qquad u = 4x^3+5 \qquad dx = \frac{du}{12x^2}$

$$\int \cancel{x^2} \cdot u^4 \frac{1}{12\cancel{x^2}}\,du = \frac{1}{12}\int u^4\,du = \frac{1}{12} \cdot \frac{u^5}{5} + C = \frac{(4x^3+5)^5}{60} + C$$

d) $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^3} \qquad u = x^2-4x+5 \qquad dx = \frac{1}{2x-4}\,du = \frac{1}{2\cdot(x-2)}\,du$

$$\int \frac{\cancel{x-2}}{u^3} \cdot \frac{1}{2\cdot\cancel{(x-2)}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-2}}{(-2)} + C = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(x^2-4x+5)^2} + C$$

59. SÜ am 29.3.2023

Sophie Stöger

3. SA: Notenspiegel

1	2	3	4	5	+
1	5	6	2	12	1

Ø = 3,8

60. SÜ am 31.3.2023

Sophie Stöger

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

6.63c) $\int_0^2 x^2-4dx = \frac{x^3}{3}-4x\Big|_0^2 \quad (\frac{0^3}{3}-4\cdot 0)-(\frac{2^3}{3}-4\cdot 2) = 0-(\frac{8}{3}-\frac{24}{3}) = -(-\frac{16}{3}) = \frac{16}{3}$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\,dt = -\cos(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos(0)+\cos(-\frac{\pi}{2}) = -1+0 = -1$

6.66a) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = 2\cdot(4)^{\frac{1}{2}}-2 = 2$

b) $\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_1^{27} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Big|_1^{27} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{36^2}}{2} - \frac{3\cdot\sqrt[3]{1^2}}{2} = \frac{27}{2}-\frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12$

6.69a) $\int_1^3 4x^3-x+2\,dx = \frac{4x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2x\Big|_1^3 = 3^4-\frac{3^2}{2}+2\cdot 3-(1^4-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1) = 81-4,5+6-(1-0,5+2) = 80$

6.71b) $\int_0^{\pi} \sin(t)-1\,dt = -\cos(t)-t\Big|_0^{\pi} = \cos(\pi)-\pi-(-\cos(0)-0) = 1-\pi+1 = 2-\pi$

6.87a) $\int_1^2 (2x+1)^3\,dx \qquad u=2x+1 \qquad du = 2dx \quad dx = \frac{1}{2}du$

$\int u^3\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^3\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4} = \frac{1}{8}\cdot u^4 = \frac{1}{8}(2x+1)^4\Big|_1^2 = \frac{(2\cdot 2+1)^4}{8}-\frac{(2\cdot 1+1)^4}{8} = \frac{1}{8}\cdot(5^4-3^4)$

$= \frac{544}{8} = 68$

62. Schulübung am 18.4.2023

Sophie Stöger

6.113a) $\int_0^{\pi} t \cdot \cos(t)\,dt = \ldots \sin(t) - \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = t \cdot \sin(t) + \cos(t) \Big|_0^{\pi}$ $\quad v' = \cos(t)$, $u = t$ $\quad v = \sin(t)$, $u' = 1$

$= \ldots \cdot \sin(\pi) + \cos(\pi) - (\ldots \sin(0) + \cos(\pi)) = \underline{\underline{-2}}$

4.3.5 Integration rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion f ist der Quotient zweier Polynome P und Q

das heißt: $f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $a_i \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$

diese Funktionen lassen sich immer geschlossen integrieren

Beispiel 1:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{2}{(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{(x+3)}\,dx = \underline{\underline{2\ln(|x-2|) + \ln(|x+3|)}}$$

$u = x^2+x-6 \quad du = (2x+1)\,dx$

Substitution nicht möglich!

NR: $\frac{3x+4}{x^2+x-6} = \frac{3x+4}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$

2 und 3 sind Nullstellen/$x_{1,2}$

$x^2+x-6=0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$x_1 = 2, \; x_2 = -3$

$3x + 4 = A(x+3) + B(x-2)$

$= Ax + 3A + Bx - 2B$

$= x \cdot (A+B) + 3A - 2B$

Koeffizientenvergleich:

$A + B = 3 \quad | \cdot 3$

$3A - 2B = 4$

$3A + 3B = 9$

$3A - 2B = 4 \quad] -$

$5B = 5$

$B = 1$

$A + 1 = 3 \quad | -1$

$A = 2$

Beispiel 2:

$$\int \frac{2x^2-13x+27}{x^3-6x^2+9x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-3}\,dx + \int \frac{2}{(x-3)^2}\,dx = \underline{\underline{3\ln(|x|) - \ln(|x-3|) - \frac{2}{x-3} + C}}$$

NR: $x^3 - 6x^2 + 9x = x\cdot(x^2-6x+9) = x\cdot(x-3)^2$

$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

$2x^2 - 13x + 27 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$

$= A(x^2-6x+9) + Bx^2 - 3Bx + Cx$

$= Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx$

$= x^2 \cdot (\ldots) + x \cdot (-6A - 3B + C) + 9A$

$\frac{2x^2-13+27}{x^3-6x^2+9x} = \frac{2x^2-13+27}{x\cdot(x-3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$

Koeffizientenvergleich:

$2 = A + B$

$-13 = -6A - 3B + C$

$27 = 9A$

$\Rightarrow A = 3, \; B = -1, \; C = 2$

64. Schulübung: am 21.4.2023

Sophie St.

4.4 Anwendung d. Integralrechnung

4.4.1 Flächenberechnung

→ Mithilfe des bereits angeführten Integralbegriffs lässt sich das Flächenmaß folgendermaßen definieren

Definition: Es sei $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und A jene Fläche, die vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den beiden Senkrechten $x=a$ und $x=b$ begrenzt wird.
Gilt für $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $a \leq b$ so ist die Fläche geg. durch

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Gilt für $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $a \leq b$, so ist die Fläche geg. durch

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Bemerkung:

1. Hat die Funktion f im Intervall $[a,b]$ sowohl positive als auch negative Werte, so zerlegt man $[a,b]$ in Teilintervallen, sodass die Funktion in diesen Intervallen konstantes Vorzeichen hat. Es gilt $A = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^b f(x)\,dx$
2. Für eine gerade Funktion ($f(x) = f(-x)$) gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
3. Für eine ungerade Funktion ($f(x) = -f(-x)$) gilt: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
4. *

Beispiele

1. Berechnen Sie den Flächeninhalt jenes Flächenstücks, das von den Graphen $f(x) = x+1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ begrenzt wird.

Eine Parabel 4. Ordnung hat in W(0|0) einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente und im Punkt (-4/0) einen weiteren Schnittpunkt mit der x-Achse. Die Fläche, die die Kurve mit der x-Achse begrenzt, hat den Flächeninhalt 12,8. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und fertigen Sie eine Skizze an!

* Für den Flächeninhalt zwischen den Graphen zweier Funktionen gilt:
Es seien $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und A jene Fläche, die von den Funktionsgraphen begrenzt wird, dann gilt:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

11. SÜ am 17.5.23 Sophie Stöger

4.4.3 Längenberechnung

Gesucht ist die Länge (Bogenlänge) eines Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$. Zerlegt man das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle, so kann die Länge eines beliebig herausgegriffenen kleinen Kurvenstücks durch das Linienelement ds ersetzt werden, mit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2 = \left(1 + f'(x)^2\right) dx^2$$

also:

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Die Gesamtlänge der Funktion im Intervall $[a,b]$ ist damit gegeben durch

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Liegt die Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ vor, so gilt mit $a = x(t_1)$, $b = y(t_2)$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

($\dot{x}$ ... Ableitung nach t (Zeit))

4.4.4 Mantelfläche eines Drehkörpers

Die Herleitung der Mantelfläche lässt sich analog zur Längenberechnung durchführen und führt auf

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

bzw.

$$M_y = 2\pi \int_a^b f^*(y) \sqrt{1 + (f^{*\prime}(y))^2}\, dy$$

72. SÜ am 23.5.23 Sophie Stöger

4.4.5 Lineare und quadratische Mittelwerte

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es sei f stetig auf [a, b]. Dann existiert eine Zahl $\xi \in]a, b[$, so dass

$$\int_a^b f(x) = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Definition

Die Zahl $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ heißt Mittelwert von f auf dem Intervall [a, b]

Definition

Der quadratische Mittelwert einer Funktion f im Intervall [a, b] ist definiert durch

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Wichtige quadratische Mittelwerte sind die Effektivwerte von Strom und Spannung

Bemerkung

1. Bei konstanten Funktionen stimmen sowohl der lineare als auch quadratische Mittelwert überein.
2. Bei nichtkonstanten Funktionen ist der lineare Mittelwert stets kleiner als der quadratische Mittelwert.

90. Schulübung am 21.6.23 Sophie St

6 Uneigentliche Integrale

1. Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsbereich

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

mit $c \in \mathbb{R}$ $\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^c f(x)\,dx$

Cauchyscher Hauptwert

2. Uneigentliche Integrale mit unbeschränkten Integranden an der Stelle $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Cauchyscher Hauptwert

Der Cauchysche Hauptwert kann existieren, obwohl das uneigentliche Integral divergiert. Konvergiert andererseits das Uneigentliche Integral, dann existieren der Cauchysche Hauptwert und beide Werte sind gleich.