13. SÜ am 20. Okt. 21 Sophie Stöger

1.3 Potenzen und Potenzfunktion

1.3.1 Wiederholung Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition: Ein Ausdruck der Form $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ heißt Potenz

a … Basis
n … Exponent / Hochzahl

Rechenregeln:

$a^n \pm a^m$ wenn $n = m$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^0 = 1$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

2.3b) $-3^0 \cdot (-3)^3 \cdot \frac{-3^{-3}}{-3^2} = -1 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^{-5} = \underline{\underline{3^{-2}}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

2.4b) $(4^{-2} c^4 d^{-3} k^7)^{-2} = \underline{\underline{4^4 c^{-8} d^6 k^{-14}}} = 4^4 \frac{1}{c^8} d^6 \frac{1}{k^{14}} = \frac{4^4 d^6}{c^8 k^{14}} = \underline{\underline{\frac{265 d^6}{c^8 k^{14}}}}$

2.5b) $\left(\frac{2p^{-1}}{3q^3}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{3q}{2p^{-2}}\right)^{-4} = \frac{2^{-5} p^5}{3^{-5} q^{-15}} \cdot \frac{3^{-4} q^{-4}}{2^{-4} p^8} = \underline{\underline{-2^{-1} p^{-3} 3^1 q^{11} = -\frac{3 q^{11}}{2 p^{-3}}}}$

14. SÜ am 22.10.21

Sophie Stöger

2.3c) $\frac{(-4)^{-4}\cdot(-4^{-4})}{(-4^{4})}\cdot(-4)^{-3} = -\frac{4^{-4}\cdot 4^{4}4^{3}}{4^{4}} = -\frac{4^{-11}}{4^{4}} = \underline{\underline{-4^{-15}}}$

1.3.2. Potenzen mit rationalen Exponenten - Wurzeln

Definition: Die n-te Wurzel einer Zahl $a \geq 0$ ist jene Zahl $b \geq$, deren n-te Potenz gleich a ist

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftarrow a = b^{n}$$

Wurzelziehen oder Radizieren

mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

a... Radikant n... Wurzelexponent
b... Wurzel

Aus der Definition der n-ten Wurzel einer Zahl $a \geq 0$ erhält man

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, $n_{n \geq 2} \in \mathbb{N}^*$ und $a > 0$

$\sqrt[2]{5^{1}} = 5^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[7]{10^{-3}} = 10^{\frac{-3}{7}}$ $\sqrt[11]{x^{6}y^{4}} = (x^{6}y^{4})^{\frac{1}{11}}$

Wurzeln lassen sich stets als Potenzen mit rationalen Exponenten schreiben und umgekehrt. Jede Aufgabe der Wurzelrechnung lässt sich mit Hilfe der Potenzrechnung lösen. Es gelten die obigen Rechenregeln wenn man $n, m \in \mathbb{Z}$ durch $m, n \in \mathbb{Q}$ ersetzt. Des weiteren gelten die folgenden Regeln:

1. Wurzeln können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn ihre Radikanten und Wurzelexponenten übereinstimmen

   Bsp. $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
   $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

2. Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren: siehe oben

3. Radizieren von Wurzeln:

$$\sqrt[m\cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}}$$

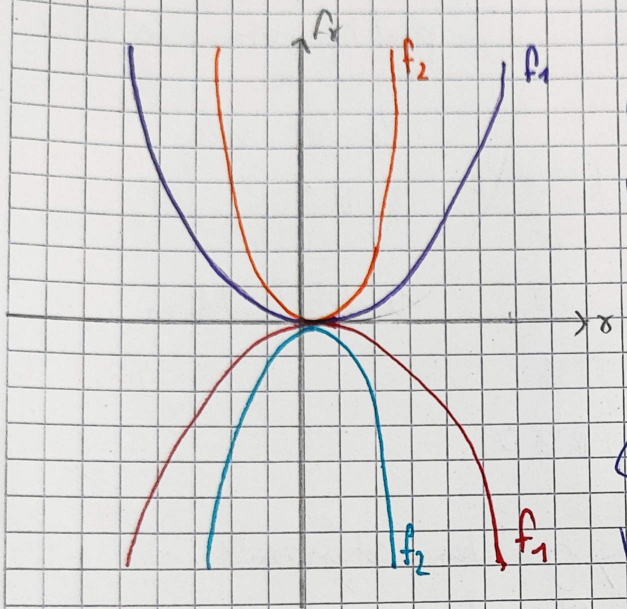
21. Schulübung am 19.11.21 / 22. SÜ am 23.11 Sophie Stöger

1.3.3 Potenz- und Wurzelfunktion

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ heißt Potenzfunktion

Gerade Exponenten:

$n > 0$ $f_1(x) = cx^2$; $f_2(x) = cx^4$ $D = \mathbb{R}$



$c > 0$

$W = \mathbb{R}_0^+$

$c < 0$

$W = \mathbb{R}_0^-$

Scheitel im Koordinatenursprung $S = (0|0)$

Hochpunkt wenn $c < 0$
Tiefpunkt wenn $c > 0$

Funktion ist gerade

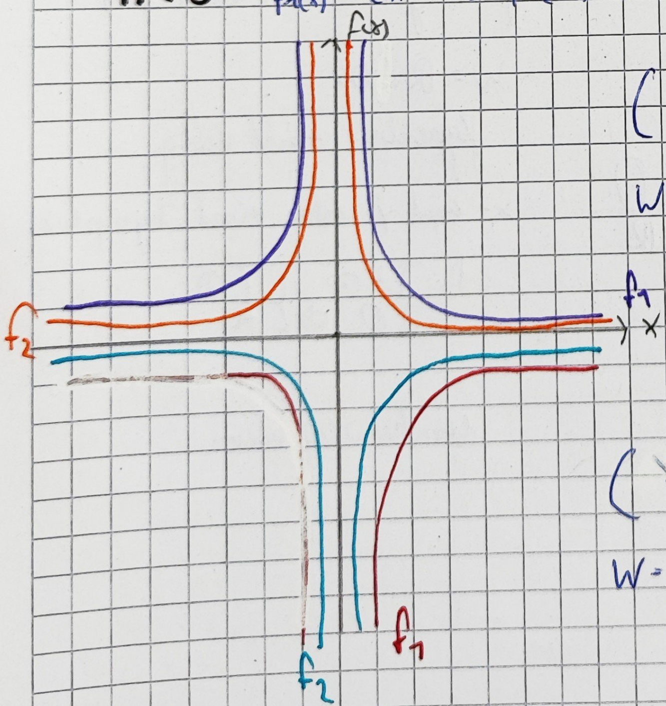
symmetrisch zur y-Achse

Parabel, stetig

f_2 $]-\infty; 0[$ ↗
$]0; \infty[$

keine Umkehrfunktion

$n < 0$ $f_1(x) = cx^{-2} = \frac{c}{x^2}$; $f_2(x) = \frac{c}{x^4}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$c > 0$

$W = \mathbb{R}^+$

$c < 0$

$W = \mathbb{R}^-$

keinen Extrempunkt

Funktion ist gerade

symmetrisch zur y-Achse

Hyperbel, nicht stetig

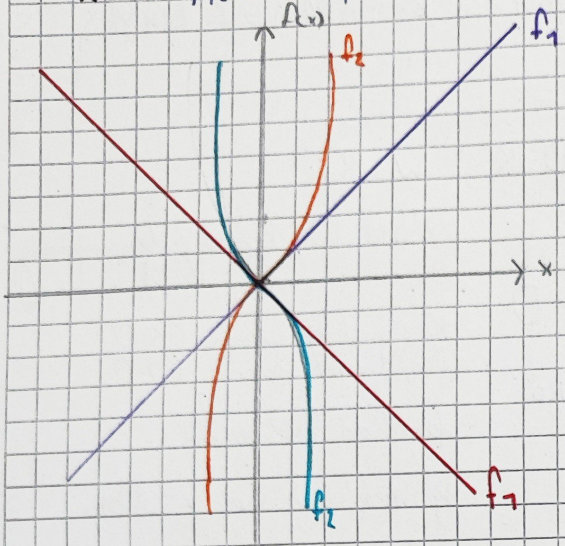
x und y-Achse sind Asymptoten

f_1 $]-\infty; 0[$ ↘
$]0; \infty[$ ↗

keine Umkehrfunktion

Ungerade Exponenten:

$n > 0$ $f_1(x) = Cx^1$; $f_2(x) = Cx^3$ $D = \mathbb{R}$



$C = 1$

$C = -1$

keinen hoch oder Tiefpunkt

funktion ist ungerade

punktsymmetrisch bei (0/0)

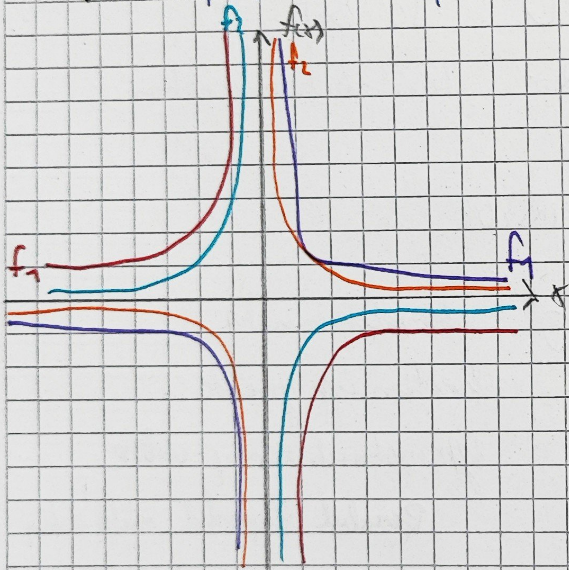
$W = \mathbb{R}$

Parabel, stetig

f_2 $\mathbb{R} \nearrow$

Umkehrfunktion

$n < 0$ $f_1(x) = Cx^{-1} = \frac{c}{x}$; $f_2(x) = \frac{c}{x^3}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$C > 0$

$C < 0$

keinen Extrempunkt

funktion ist ungerade

punktsymmetrisch bei (0/0)

$W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Hyperbel, nicht stetig

x- und y-Achse sind Asymptoten

f_1 $]-\infty; 0[\nearrow$

$]0, \infty[\nearrow$

Umkehrfunktion

24. Schulübung am 26.11.2021

Sophie Stöger

2.144b)
$$6\cdot\sqrt{x-5}=\sqrt{x+30}$$
$$36\cdot(x-5)=x+30$$
$$36x-180=x+30 \quad |-x \; |+180$$
$$35x=210 \quad |:35$$
$$x=6$$

$x-5\geq 0$
$x\geq 5$

$x+30\geq 0$
$x\geq -30$

$D=[5;\infty[$

$\underline{\underline{L=\{6\}}}$

Probe: $6\cdot\sqrt{1}=\sqrt{36}$
$6=6$ w.A

1.3.5 Polynomfunktion

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ mit $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ mit $a_i\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}^*$ heißt Polynomfunktion n-ten Grades.

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_0$ Koeffizienten

$f(x)=kx^1+d \Rightarrow$ 1. Grades
$f(x)=16x^{27}+3 \Rightarrow$ 27. Grades
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow$ 3. Grades (Kubische Fkt.)
$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow$ 2. Grades (Quadratische Fkt.)
$f(x)=3x^2 \Rightarrow$ 2. Grades

1) Eine Polynomfunktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Lineare Funktionen 1 Nullstelle, Quadratische Funktionen 2 Nullstellen, Kubische Funktionen 3 Nullstellen: $16x^{27}+3 \Rightarrow$ max. 27 Nullstellen.

2) Sind alle Exponenten Gerade, so spricht man von einen geraden (Achsensymmetrischen) Funktion. $f(x)=16x^{27}+3 \Rightarrow$ weder gerade noch ungerade

3) Sind alle Exponenten Ungerade, so spricht man von einer ungeraden (Punktsymmetrische) Funktion. $f(x)=16x^{27}+3x \Rightarrow$ beide ungerade daher Punktsymmetrisch

4) Polynomfunktionen n-ten Grades [redacted] mit ungeraden Exponent n haben mindestens eine reele Nullstelle

5) Polynomfunktion n-ten Grades mit geraden Exponenten haben keine, eine, ..., n reele Nullstellen