12. SÜ 9.11.2020

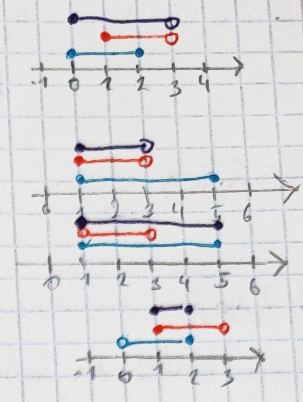
2a) $[0,2] \cup [1,3[\; = [0,3[$

a) $[1,5] \cap [1,3[\; = [1,3[$

b) $[1,5] \cup \,]1,3[\; = [1,5]$

c) $]0,2] \cap [1,3[\; = [1,2]$

$[0,2]$
$[1,3[$



2. Variablen und Terme:

2.1 Einführung:

Definition: Eine Variable ist ein beliebiges Zeichen, das stellvertretend für Zahlen oder Größen steht, die in einem bestimmten Ausmaß frei wählbar sind.
Eine Zahl, eine Variable oder deren sinvolle Verknüpfung mit Rechenzeichen ("+", Klammer, ...) heißt Term.

Beispiele: 3, $17x$, $5x-3a$, $\frac{2a-5b}{3a}$, ...

→ wird die Variable durch eine Zahl ersetzt, so geht der Term in eine Zahl über

Definition: •) Die Menge aller Zahlen, die für das Einsetzen in die Variable vorgesehen sind, nennt man Grundmenge G

•) Die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge für die ein Term einen sinvollen Zahlenwert ergibt heißt Definitionsmenge D

Beispiele: $T(x) = \frac{2x-5}{x-2}$ $D = ?$

a) mit $G = \{1, 2, 3\}$ $D = \{1, 3\}$

b) $G = \mathbb{R}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Wichtige Terme: Monom: -3, $17x$, $11x^2$, ...

Binom: $a+b$, $5x-3$, ...

Polynom: $3x+1$, $3x^2-2x+1$, ...

Rationaler Term: $\frac{2x-5}{x-2}$, $\frac{3a^2-b}{a+b}$

Bsp I) $T_1(x) = 3x+5$

a) $G = \{1, 2, 3\}$ $D = G$

b) $G = \mathbb{N}$ $D = \mathbb{N}$

c) $G = \mathbb{Z}$ $D = \mathbb{Z}$

d) $G = \mathbb{R}$ $D = \mathbb{R}$

II) $T_2(x) = \frac{1}{x+2}$ a) $G = \{1, 2, 3\}$ b) $G = \mathbb{N}$ c) $G = \mathbb{Z}$ d) $G = \mathbb{R}$

$D = \{1, 2, 3\}$ $D = \mathbb{N}$ $D = \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Bsp 2.4 a) $\frac{7x}{4}$ b) $2x - 5$ c) $4 + \frac{x}{3}$ d) $\frac{x}{2} \cdot 3$

2.7 a) Das vierfache einer Zahl

b) ein fünftel der Zahl

c) die Zahl um 5 vermindert

d) die Zahl um 7 vermehrt

2.17 $70 \cdot n + 30 \cdot \frac{5}{6} n$

2.15 a) $T_a(x) \frac{x^3}{4} + \frac{x}{2}$

$T_a(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$T_a(0) = \frac{0^3}{4} + \frac{0}{2} = 0$

$T_a(-1) = \frac{(-1)^3}{4} + \frac{-1}{2} = \frac{-1}{4} + \frac{-1}{2} = \frac{-1}{4} + \frac{-2}{4} = -\frac{3}{4}$

b) $T_b(x) = \sqrt{x}$

$T_b(16) = \sqrt{16} = 4$

$T_b(0) = \sqrt{0} = 0$

$T_b(-4) = \sqrt{-4}$ ↯ kann nicht gerechnet werden, weil Wurzeln negativer Zahlen nicht berechenbar sind.

13. SÜ

11.11.20

2.2. Rechenregeln

→ Terme mit gleichen Variablen werden addiert indem ~~ds~~ man die Summ der Koeffizienten bildet und diese mit den Variablen multipliziert.

Bsp: $7 \cdot (x+y) + 3(x+y) = 10 \cdot (x+y)$

Auflösen von Klammern:

Beim Auflösen einer Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, erfolgt ein Vorzeichenwechsel bei den in der Klammer stehenden Summanden

Bsp. $-(3a - 3b) = -3a + 3b$

$-(-3a - 3b) = 3a + 3b$

Faktorisieren:

Faktorisieren heißt man macht aus einer Summe ein Produkt

2.38c) $\frac{n}{2} - \left[\frac{m}{3} - \left(\frac{n}{4} - 1\right)\right] - \frac{m}{6} = \frac{n}{2} - \left[\frac{m}{2} - \frac{n}{4} + 1\right] - \frac{m}{6} = \frac{n}{2} - \frac{m}{3} + \frac{n}{4} - 1 - \frac{m}{6}$

$= \frac{2n}{4} + \frac{n}{4} - \frac{2m}{6} - \frac{m}{6} - 1 = \underline{\underline{\frac{3n}{4} - \frac{m}{2} - 1}}$

d) $-0{,}1x + 9{,}9y - [x - (0{,}1y - 9{,}9x)] =$

$-0{,}1x + 9{,}9y - [x - 0{,}1y + 9{,}9x] =$

$-0{,}1x + 9{,}9y - x + 0{,}1y - 9{,}9x =$

$-0{,}1x - x - 9{,}9x + 9{,}9y + 0{,}1y =$

$\underline{\underline{-11x + 10y}}$

2.41a) $4s - (3r - (9s + 6t - 7r) + 4t) =$

$= 4s - (3r - 9s - 6t + 7r + 4t) =$

$= 4s - 3r + 9s + 6t - 7r - 4t =$

$= 4s + 9s - 3r - 7r + 6t - 4t = \underline{\underline{13s - 10r + 2t}}$

b) $7x - (8y + (6 + 9y) - (10x + 5y)) =$

$7x - (8y + 6 + 9y - 10x - 5y) =$

$7x - 8y - 6 - 9y + 10x + 5y =$

$7x + 10x - 8y - 9y + 5y - 6 = \underline{\underline{17x - 12y - 6}}$

2.48a) $4 \cdot (d - 4) - 2 \cdot (2d + 3)(5 - 8d) \cdot 6 =$

$4d - 16 - 4d - 6 + 30 - 48d =$

$4d - 4d - 48d - 16 - 6 + 30 = -48d + 8$

d) $-(12a + \frac{1}{2}) \cdot 4 + 3(a + 9) - \frac{1}{4} \cdot (-3 - 28a) =$

$-48a + 2 + 3a + 27 + \frac{3}{4} + 7a =$

$-48a + 3a + 7a + 2 + 27 + \frac{3}{4} =$

$-38a + 25 + \frac{3}{4}$ $\quad \frac{103}{4}$

14. SÜ am 16.11.2020 — Sophie Stöger

Fragen zur Hü:

$ac + ad - bc - bd =$
$ac - bc + d \cdot (a-b) =$
$c \cdot (a-b) + d \cdot (a-b) = \underline{(a-b)(c+d)}$

$2x - 2b = \underline{2 \cdot (x-b)}$ $\quad$ $2x - 2b + 3 = \underline{2 \cdot (x-b) + 3}$

2.3.2 Rechnen mit Potenzen:

Addition und Subtraktion von Potenzen:

Potenzen können nur dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn ihre Basis und ihr Exponent übereinstimmen.

·) $15a^2 - 7a^2 = 8a^2$

Aber: $15a^2 + 7b^2 = 15a^2 + 7b^2$

Multiplikation von Potenzen:

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert in dem man ihre Exponenten addiert.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

·) $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$

Aber: $3^2 \cdot 4^5 = 3^2 \cdot 4^5$

Division von Potenzen:

Potenzen mit gleichen Basis werden dividiert, in dem man ihre Exponenten subtrahiert.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Bsp) $\frac{4^6}{4^{-5}} = 4^{11}$

Aber: $\frac{2^6}{2^{-8} \cdot 3^{14}} = \frac{2^{14}}{3^{14}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{14}$

Potenzen mit einer negativen Hochzahl lassen sich schreiben als

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad m_1 \quad a \neq 0$$

Potenzieren von Potenzen:

Potenzen werden potenziert in dem man ihre Exponenten multipliziert

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

·) $(3^7 \cdot a^2)^3 = \underline{3^{21} \cdot a^6}$

15\. SÜ am 18.11.2020 Sophie Stögen

2.124 a) $\frac{x^{-1}}{a^2} \cdot \frac{y^2 z}{a^3 b} \cdot \frac{4^2 \cdot a \cdot b^{-1} \cdot x}{y \cdot z^{-1}} = \frac{x^2 \cdot y \cdot z \cdot 4}{a \cdot b}$

b) $\frac{6x^2 y^{-1} z}{a^0 b^{-1}} : \frac{abz}{6^{-1} x^{-2} y} = \frac{6x^2 y^{-1} z \cdot 6^{-1} x^{-2} y}{b^{-1} \cdot abz} = \frac{1}{a}$

2.131 b) $\left(\frac{3bv^3}{2a^2 v^{1}}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^{-1} b^{-2}}{5^{-1} a^{-2} v^2 v^2}\right)^3 : \left(\frac{4v^{-2}}{5v^{-4} b^6}\right)^{-2} = \frac{3^3 b^3 v^4 \cdot 3^{-3} b^6}{2^3 a^6 v^3 \cdot 5^{-3} a^{-6} v^6 v^6} \cdot \left(\frac{2^2 \cdot v^{-2}}{5 v^{-4} b^6}\right)^2$

$= \frac{3^3 b^3 v^4 \, 3^{-3} b^6}{2^3 a^6 v^3 5^{-3} a^{-6} v^6 v^6} \frac{2^4 v^{-4}}{5^2 v^{-8} b^{12}} = \frac{2 \cdot 5}{b^3 \cdot v \cdot v} = \frac{10}{b^3 v v}$

Multiplizieren von Summen: Eine Summe wird mit einem Term multipliziert, indem man jeden Summanden mit dem Term multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + ac$

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$

2.99 a) $3a \cdot [-2a \cdot (5a^2 - 4) - a \cdot (1 - 3a^3) + 7a^2 \cdot (1 - a)] =$

$3a \cdot [-10^3 + 8a - a + 3a^4 + 7a^2 - 7a^3]$

$3a \cdot [3a^4 - 17a^3 + 7a^2 + 7a] = 9a^5 - 51a^4 + 21a^4 + 21a^2$

2.104 a) $(x^2 + 2y) \cdot (4x^2 - y) + 6 \cdot (5x^3 - 7y) \cdot (2y + 2x) =$

$4x^4 - x^2 y + 8x^2 y + 6 \cdot (10x^3 y + 10x^4 - 14y^2 - 14xy) =$

$4x^4 - x^2 y + 8x^2 y + 60x^3 y + 60x^4 - 84y^2 - 84xy$

$64x^4 - 60x^3 y + 7x^2 y - 84xy - 84y^2$

$\frac{14 \cdot 6}{84}$

2.3.3

Besondere Multiplikationsformeln:

$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab^2 + b^2$

$(a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab^2 + b^2$

$= (b-a)^2$

$(a+b \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^0$			1			1
$(a+b)^1$		1		1		$1 \cdot a + 1 \cdot b$
$(a+b)^2$	1		2		1	$1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$
$(a+b)^3$	1	3		3	1	$1 \cdot a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3$
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1	$1 \cdot a^4 b^0 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1 a^0$

⋮

16. SÜ am 23. 11.

Sophie Stöger

2.160 a) $25a^2 + 20ab + 4b^2 = \underline{(5a+2b)^2}$ b) $49x^2 - 42xy + 9y^2 = \underline{(7x-3y)^2}$

c) $81v^2 + 18v + 1 = \underline{(9v+1)^2}$

2.161 a) $16e^2 - 24ef + 9f^2 = \underline{(4e-3f)^2}$ b) $\left(\frac{1}{4}c\right)^2 + c + 1 = \left(\frac{1}{2}c + 1\right)$

2.162 a) $64a^2 - 1 = \underline{(8a+1)\cdot(8a-1)}$ b) $x^2 - y^4 = \underline{(x+y^2)\cdot(x-y^2)}$

c) $x^6 - 121y^8 = \underline{(x^3+11y^4)\cdot(x^3-11y^4)}$

2.166 c) $(v+2u)^3 - (3v-4u)^3 = v^3 + 3v^2 2u + 3v4u^2 + 8u^3 - (27v^3 - 3\cdot(3v)^2\cdot 4u + 3\cdot 3v(4u)^2 - (4u)^3)$

$= v^3 + 6v^2u + 12vu^2 + 8u^3 - 27v^3 + 108v^2u - 144vu^2 + 64u^3$

$\underline{\underline{= -26v^3 + 114v^2u - 132vu^2 + 72u^3}}$

d) $-(v+5u)^3 + (6v-3u)^3 = -(v^3 + 3\cdot v^2\cdot 5u + 3\cdot v\cdot(5u)^2 + (5u)^3) + (6v)^3 - 3\cdot(6v)^2\cdot 3u + 3\cdot 6v\cdot(3u)^2 - (3u)^3$

$= -v^3 - 15v^2u - 75vu^2 - 125u^3 + 11v^3 - 324v^2u + 162vu^2 - 27u^3$

$\underline{\underline{= 215v^3 - 339v^2u + 87vu^2 - 152u^3}}$

NR: $\frac{25\cdot 3}{75}$ $\frac{25\cdot 5}{125}$ $\frac{36\cdot 6}{116}$

2.4. Bruchterme: (Buch S. 79)

Terme der Form $\frac{A}{B}$ heißen Bruchterme, wobei A und B wiederum Term sind und B ungleich Null ist.

Die Definitionsmenge eines Bruchterms: $G = \mathbb{R}$ $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Da der Nenner eines Bruchterms nicht Null sein darf, müssen wir jene Zahlen, für die den Nenner Null ergeben kann, ausschließen.

2.190 a) $\frac{15a-21}{25a^2-35a} = \frac{3\cdot\cancel{(5a-7)}}{5a\cdot\cancel{(5a-7)}} = \underline{\frac{3}{5a}}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0; \frac{7}{5}\}$

NR: $25a^2 - 35a = 0$

$5a\cdot(5a-7) = 0$

0

$5a - 7 = 0 \quad |+7$

$5a = 7 \quad |:5$

$a = \frac{7}{5}$

b) $\frac{88ab+55b}{40a+25} = \frac{11b\cancel{(8a+5)}}{5\cancel{(8a+5)}} = \underline{\underline{\frac{11b}{5}}}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{8}\}$

$40a + 25 = 0 \quad |-25$

$40a = -25 \quad |:40$

$a = \frac{-25}{40}$

$a = \frac{-5}{8}$

18. SÜ am 30.11.2020

Sophie Stöger

2.238b) $\frac{b+4}{36+12b+b^2} - \frac{3-2b}{6+b} = \frac{(b+4)-(3-2b)\cdot(6+b)}{(6+b)^2} = \frac{b+4-(18+3b-12b-2b^2)}{(6+b)^2}$

$36+12b+b^2 = (6+b)^2$ | 1

$6+b = (6+b)$ | $(6+b)$

HN: $(6+b)^2$

$= \frac{b+4-18-3b+12b+2b^2}{(6+b)^2} = \underline{\underline{\frac{2b^2+10b-14}{(6+b)^2}}}$

2.238a) $\left(\frac{g}{g-h} - \frac{g^2}{g^2-h^2}\right) \cdot \frac{4g+4h}{3g} = \frac{g\cdot(g+h)-g^2}{(g-h)\cdot\cancel{(g+h)}} \cdot \frac{4\cdot\cancel{(g+h)}}{3g} = \frac{4\cdot(g^2+gh-g^2)}{3g\cdot(g-h)} = \frac{4\cancel{g}h}{3\cancel{g}\cdot(g-h)} = \underline{\underline{\frac{4h}{3\cdot(g-h)}}}$

b) $\left(\frac{y}{x-y}+1\right)\cdot\left(\frac{y}{x+y}-1\right) : \left(2y - \frac{x^2+y^2}{y}\right) = \frac{y+x-y}{x-y} \cdot \frac{y-(x+y)}{x+y} : \frac{2y^2-(x^2+y^2)}{y}$

$= \frac{x}{x-y} \cdot \frac{-x}{x+y} \cdot \frac{y}{(y^2-x^2)} = \underline{\underline{\frac{-x^2y}{(x^2-y^2)\cdot(y^2-x^2)}}}$

Doppelbruch: Bruchterme deren Zähler oder Nenner einen Bruchterm enthalten, werden Doppelbruchterme genannt.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Die Auflösung des Doppelbruchs erfolgt durch „Außen mal Außen" durch „Innen mal Innen"

Merke: Innenglieder und Außenglieder darf man kürzen

2.243c) $\frac{\frac{2}{9c-18}}{\frac{2c+4}{c-2}} = \frac{2\cdot(c-2)}{(9c-18)\cdot(2c+4)} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{(c-2)}}{9\cdot\cancel{(c-2)}\cdot\cancel{2}\cdot(c+2)} = \underline{\underline{\frac{1}{9\cdot(c+2)}}}$

d) $\frac{\frac{4+2d}{d^5}}{\frac{2+d}{d^7}} = \frac{(4+2d)\cdot d^7}{(2+d)\cdot d^5} = \frac{2\cdot\cancel{(2+d)}\cdot d^{\cancel{7}2}}{\cancel{(2+d)}\cdot\cancel{d^5}} = \underline{\underline{2d^2}}$

2.245c) $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}}{\frac{a^2-b^2}{ab}} = \frac{(a^2+b^2-2ab)\cdot\cancel{ab}}{\cancel{ab}\cdot(a^2-b^2)} = \frac{\overset{a^2-2ab+b^2}{a^2+b^2-2ab}}{(a+b)\cdot(a-b)} = \frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{(a+b)\cdot\cancel{(a-b)}} = \underline{\underline{\frac{a-b}{a+b}}}$