26. SÜ am 1. 12. 21 Sophie Stöger

1.4 Trigonometrische Funktionen

1.4.1 Sinus- und Cosinusfunktion

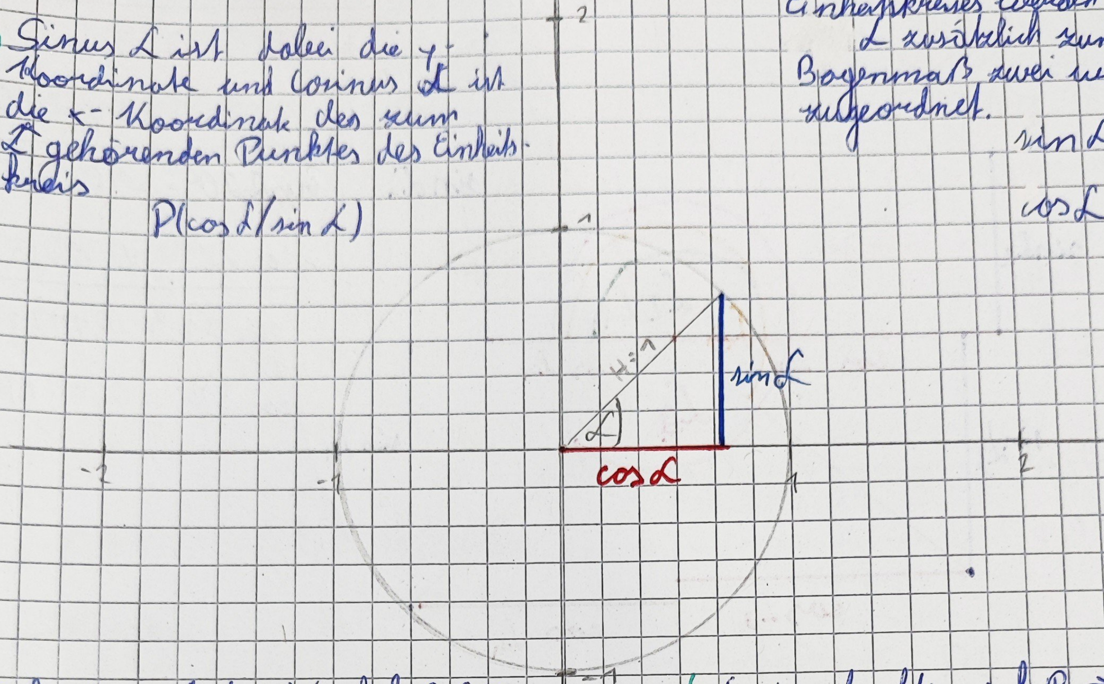
1) Durch die Verwendung des Einheitskreises werden jedem Winkel α zusätzlich zum Grad- bzw. Bogenmaß zwei weitere Werte zugeordnet.

$\sin\alpha = \frac{GK}{H}$

$\cos\alpha = \frac{AK}{H}$

2) Sinus α ist dabei die y-Koordinate und Cosinus α ist die x-Koordinate des zum $\angle$ gehörenden Punktes des Einheitskreis

$P(\cos\alpha / \sin\alpha)$



3) Definition: Jedem Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ wird im Einheitskreis eindeutig ein Cosinus und Sinus Wert zugeordnet.

4) Cosinusfunktion: $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ mit $f(x) = \cos x$

Sinusfunktion: $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin x$

·) Gegeben sind die Winkel $\alpha = 60°$ $150°$ $220°$ und $315°$

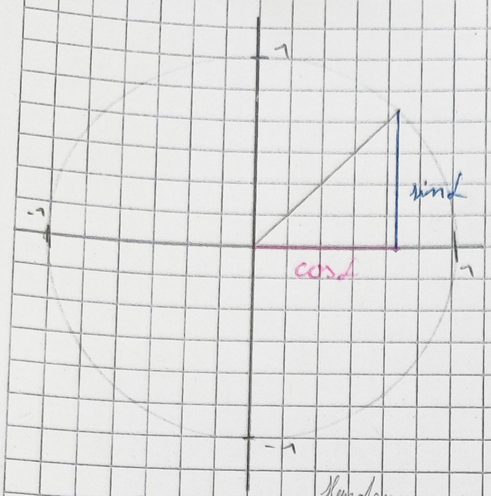
1) Stellen Sie die Kreisfunktionswerte dieser Winkel im Einheitskreis dar

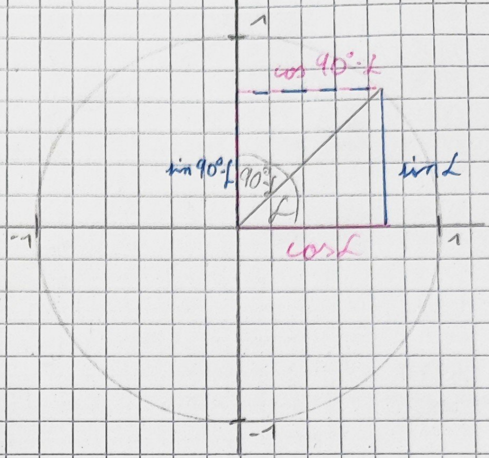
2) Ermitteln Sie deren Werte mithilfe des Taschenrechners nächste Seite

28. SÜ am 7.12.21

Sophie Stöger

Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinusfunktion





$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ Hypotenuse

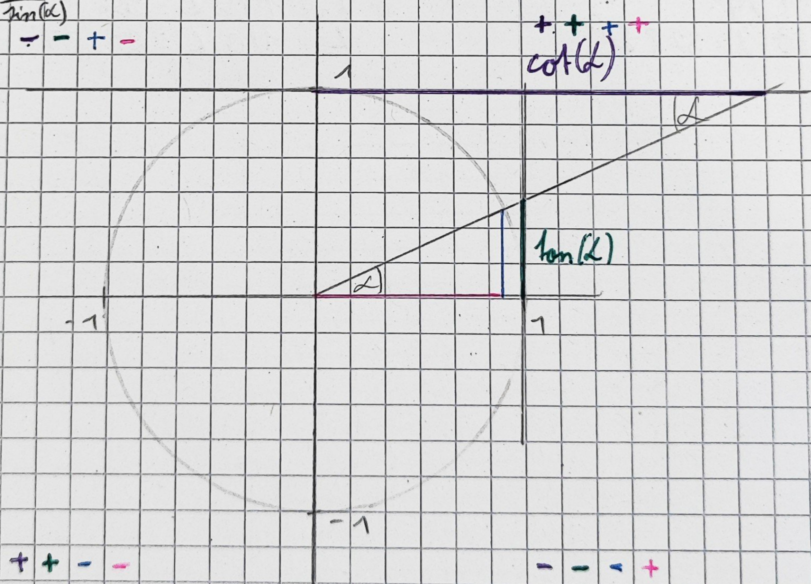
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

1.4.2 Tangens- und Cotangensfunktion

$\tan\alpha = \frac{GK}{AK} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$



Zusammenhänge

$\boxed{\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha) = -\sin(2\pi - \alpha)}$

$\boxed{\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha) = -\cos(2\pi + \alpha)}$

$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$

$\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\sin(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$\sin(\alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$-\tan(\alpha) = \tan(\pi - \alpha)$

$\tan(\alpha) = \tan(\pi + \alpha)$

$\tan(\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

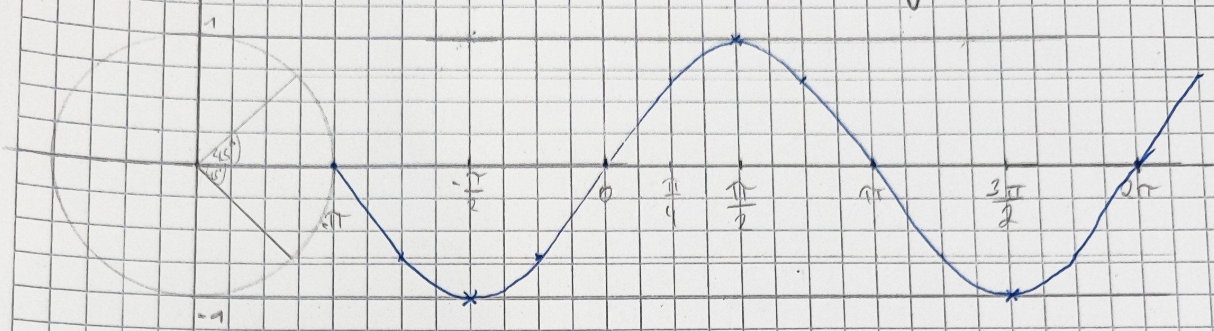
$1 = \frac{1}{\sin(\alpha)^2} - \frac{1}{\tan(\alpha)^2}$

29. Schulübung am 10.12.21 Sophie Stöger

1.4.3 Graph und Eigenschaften der Winkelfunktionen

Graph und Eigenschaften der Sinusfunktion

$f(x) = \sin(x)$ $D = \mathbb{R}$ $W = [-1; 1]$ stetig



Periode: $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$

Nullstellen: $\sin(x) = 0 \iff \sin(k\pi) = 0$ $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Extremstellen: Hochpunkt: $\sin(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k$ $k \in \mathbb{Z}$

Tiefpunkt: $\sin(x) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$

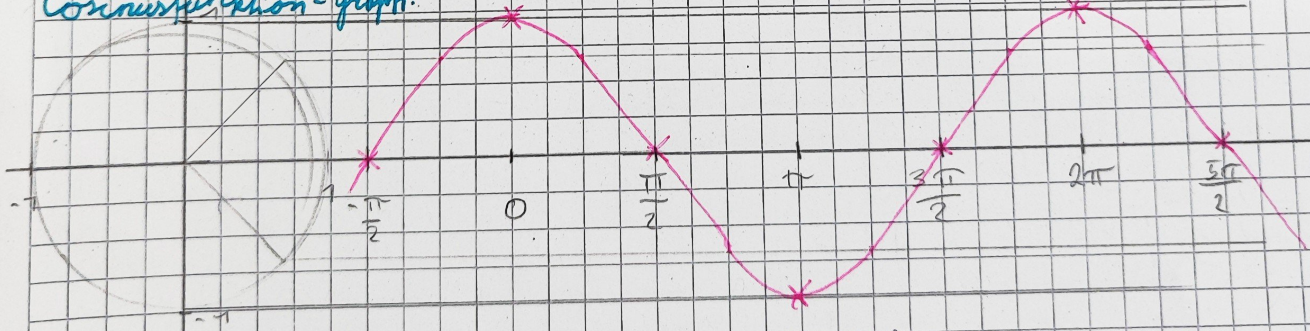
Monotonie: $]-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k[$ ↗

$]\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k[$ ↘

Symmetrie: punktsymmetrisch, ungerade $\sin(x) = -\sin(-x)$

Umkehrfunktion: $f^*(x) = \arcsin(x)$ $D = [-1; 1]$, $W = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Cosinusfunktion-Graph:



Eigenschaften: $f(x) = \cos(x)$ $D = \mathbb{R}$ $W = [-1; 1]$ stetig

Periode: $\cos(x) \overset{2\pi}{=} \cos(x + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$ Nullstellen: $\cos(x) = \frac{\pi}{2} \iff \cos(k\pi) = \frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$ $\cos(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 0$

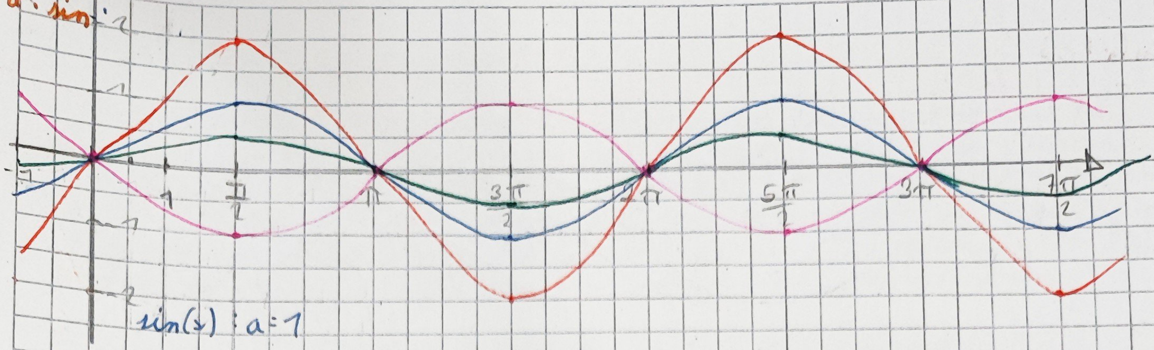
Hochpunkt: $\cos(x) = 1 \iff x = k \cdot 2\pi$ Tiefpunkte: $\cos(x) = -1 \iff x = k\pi$ $\cos(2k)\pi + 1$

Monotonie: $](2k-1)\pi; 2k\pi[$ ↗ $]2k\pi; (2k+1)\pi[$ ↘

Symmetrie Achsensymmetrisch, gerade $\cos(x) = -\cos(x)$

Umkehrfunktion: $f^*(x) = \arccos(x)$ $D = [-1, 1]$, $W = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

• $y = a \cdot \sin$:



$\sin(x)$: $a = 1$

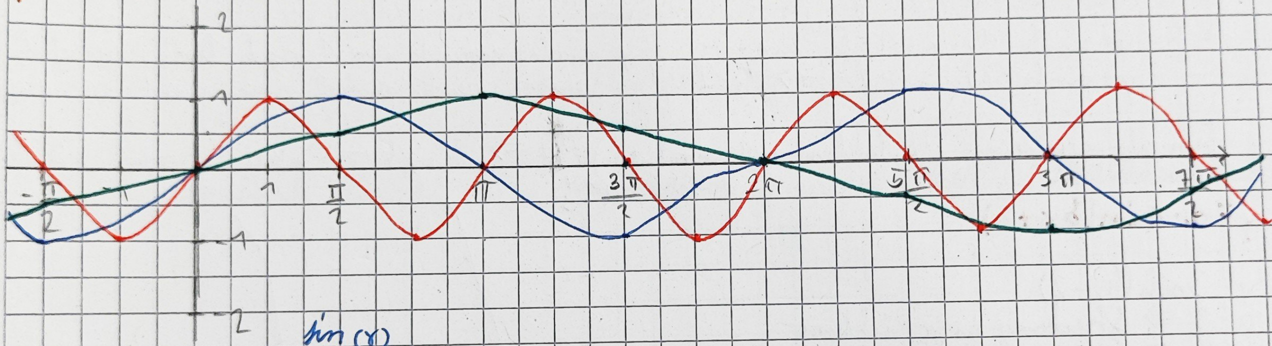
$2 \cdot \sin(x)$: $a = 2$ Die Funktionswerte werden verdoppelt

$\frac{1}{2} \cdot \sin(x)$: $a = \frac{1}{2}$ Die Funktionswerte werden halbiert

$-\sin(x)$: $a = -1$ Die Funktionswerte wechseln die Vorzeichen

Die Multiplikation mit a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung je nachdem ob die Amplitude $|a| \geq 1$ oder < 1 ist. Die Periode ändert sich nicht. Die Amplitude kann man an jeder Extremstelle ablesen.

• $y = \sin(b \cdot x)$

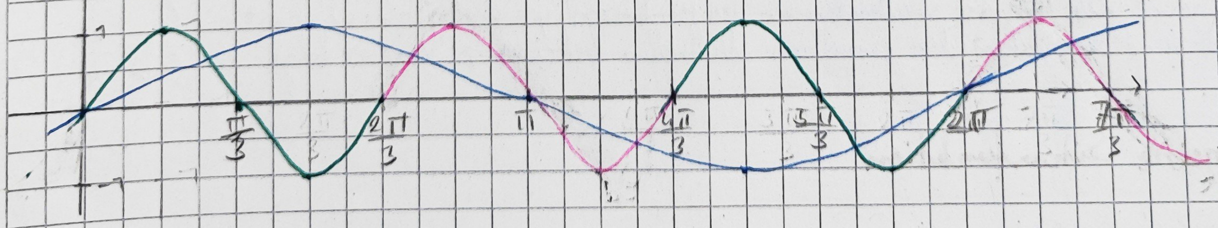


$\sin(x)$

$\sin(2x)$: $b = 2$ $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi)$; Beim halben x-Wert wird bereits derselbe Wert wie bei $y = \sin(x)$ erreicht. Die neue Periode ist π

$\sin(\frac{1}{2} \cdot x)$: $b = \frac{1}{2}$

Der Parameter b wird Kreisfrequenz genannt



$y = \sin(3x)$: $p = \frac{\pi}{3}$

$y = \sin(x)$, $p = 2\pi$

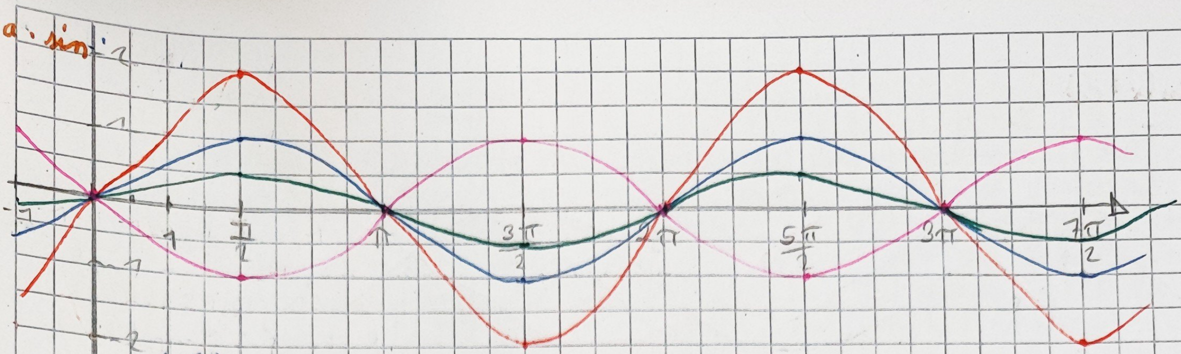
$|b| < 1$ (x-Richtung) gestreckt

$|b| > 1$ gestaucht

$b < 0$ Spiegelung der Achse

Die Multiplikation des Arguments x mit einem Faktor bewirkt Änderung der Periode p: $y = \sin(x)$ $p = 2\pi$
$y = \sin(b \cdot x)$ vollendet genau dann eine Periode wenn $b \cdot x = 2\pi$ ist, daher ist $x = \frac{2\pi}{b}$
Für Periode von $\sin(b \cdot x)$ gilt daher: $p = \frac{2\pi}{b}$
Mit der Veränderung der Periode verlagern sich auch die Nullstellen der Funktion $\sin(b \cdot x) = 0$, wenn $b \cdot x = k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{b}$
$k \in \mathbb{Z}$

• $y = a \cdot \sin$



$\sin(x)$: $a = 1$

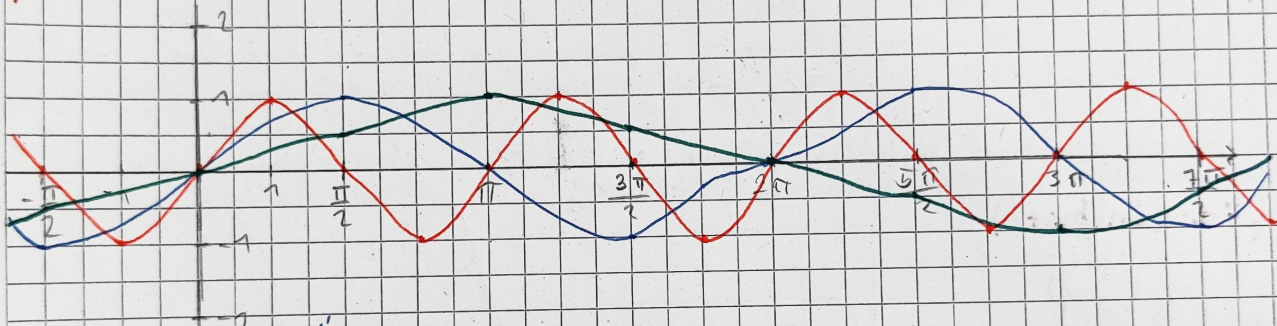
$2 \cdot \sin(x)$: $a = 2$ Die Funktionswerte werden verdoppelt

$\frac{1}{2} \sin(x)$: $a = \frac{1}{2}$ Die Funktionswerte werden halbiert

$-\sin(x)$: $a = -1$ Die Funktionswerte wechseln die Vorzeichen

Die Multiplikation mit a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung je nachdem ob die **Amplitude** $|a| > 1$ oder < 1 ist. Die Periode ändert sich nicht. Die Amplitude kann man an jeder Extremstelle ablesen.

• $y = \sin(b \cdot x)$

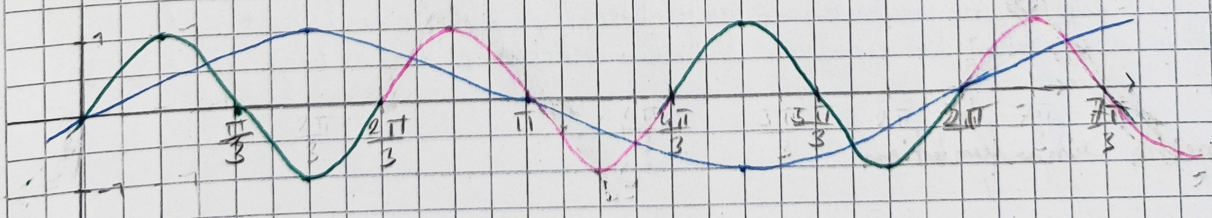


$\sin(x)$

$\sin(2x)$: $b = 2$ $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi)$; Beim halben x-Wert wird bereits derselbe Wert wie bei $y = \sin(x)$ erreicht. Die neue Periode ist π

$\sin(\frac{1}{2} \cdot x)$: $b = \frac{1}{2}$

Der Parameter **b** wird **Kreisfrequenz** genannt



$y = \sin(3x)$: $p = \frac{2\pi}{3}$

$y = \sin(x)$, $p = 2\pi$

$|b| < 1$ x-Richtung gestreckt

$|b| > 1$ gestaucht

$b < 0$ Spiegelung der Achse

Die Multiplikation des Arguments x mit einem Faktor bewirkt Änderung der Periode p: $y = \sin(x)$ $p = 2\pi$

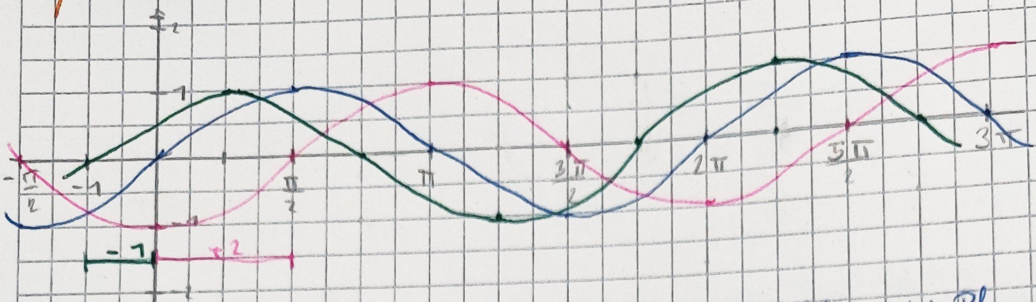
$y = \sin(b \cdot x)$ vollendet genau dann eine Periode wenn $b \cdot x = 2\pi$ ist, daher ist $x = \frac{2\pi}{b}$

Für Periode von $\sin(b \cdot x)$ gilt daher: $p = \frac{2\pi}{b}$

Mit der Veränderung der Periode verlagern sich auch die Nullstellen der Funktion $\sin(b \cdot x) = 0$, wenn $b \cdot x = k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{b}$

$k \in \mathbb{Z}$

- $y = \sin(x + c)$



c bewirkt eine Verschiebung längs der x-Achse, die Phasenverschiebung genannt wird.

$\sin(x)$ $\sin(x - 2)$ $\sin(x + 1)$

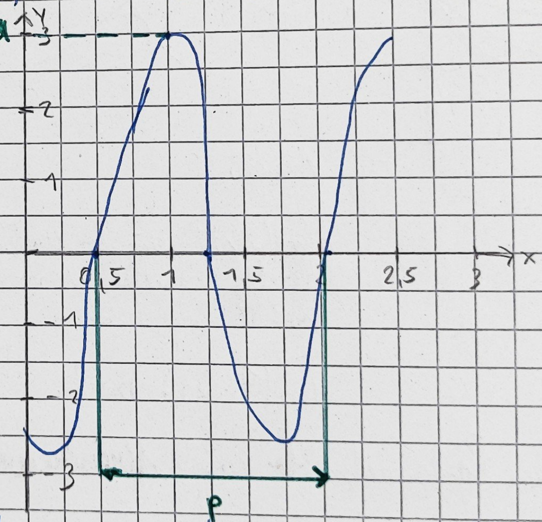
Diese Verschiebung erhält man durch Berechnung jenes Punkt, der dem Punkt $N_0(0|0)$ von $y(x) = \sin(x)$ entspricht. Diesen erhält man durch Berechnung der Nullstelle: $\sin(x + c) = 0$ mit $x + c = 0 \Rightarrow x_0 = -c$
Ist c positiv, so erfolgt die Verschiebung nach links, bei negativen nach rechts

z.B. $y = \sin(x + 1): x + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$, $y = \sin(x)$ wurde um 1 nach links verschoben
$y = \sin(x - 2): x - 2 = \Rightarrow x_0 = 2$, $y = \sin(x)$ wurde um 2 nach rechts verschoben

Für alle weiteren Nullstellen gilt $\sin(x + c) = 0 \Rightarrow x + c = k\pi \Rightarrow k\pi - c$ mit $k \in \mathbb{Z}$

- $y = a \cdot \sin(bx + c)$

$y = 3\sin(4x - 2)$
$a = 3 \Rightarrow$ Streckung in y-Richtung
$b = 4 \Rightarrow$ Periode $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



Nullstellen:
$x_0: 3\sin(4x - 2) = 0$ mit $4x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$
Die Verschiebung kann durch Herausheben von b auch direkt abgelesen werden $y = 3\sin(4 \cdot (x - \frac{1}{2}))$
Der Abstand zwischen zwei Nullstellen beträgt eine halbe Periode: $\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}; \ldots; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}; \ldots$

Allgemein gilt für die Nullstellen x_k der Funktion $y = a\sin(bx + c)$: $bx + c = 0$
Der Abstand zwischen den einzelnen Nullstellen beträgt $\frac{p}{2}$. Daraus folgt: $x_k = -\frac{c}{b} + \frac{k\pi}{b} = \frac{k\pi - c}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$

Allgemeine Sinusfunktion

$y = a\sin(bx + c)$

Sie hat den Wertebereich $[-a, a]$, die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ und eine Nullstellen bei $x_0 = -\frac{c}{b}$

Ist eine Funktion in der Form $y = a\sin(bx + c) + d$ gegeben, dann bewirkt d eine Verschiebung in y-Richtung. Oft wird auch diese Form als allgemeine Sinusfunktion

Harmonische Schwingungen

Eine praktische Anwendung der allgemeinen Sinusfunktion ist die Beschreibung von Schwingungen, wie sie zum Beispiel in der Mechanik, in der Optik oder bei Wechselströmen auftreten. Ist das Weg-Zeit-Diagramm einer Schwingungen eine allgemeine Sinuskurve, so heißt die Schwingungen harmonische Schwingung oder Sinusschwingung. Die Gleichung der allgemeinen Sinusschwingung schreibt man dann meist in der Form $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Bei einer Schwingung sind folgende Größen von Bedeutung:

- **Amplitude** A: Maximalwert, zum Beispiel die maximale Auslenkung
- **Periodendauer** T (in s): Dauer einer vollen Schwingung bzw. Periode der Sinusfunktion
- **Frequenz** $f = \frac{1}{T}$ (in Hz bzw. in s^{-1}): Anzahl der Schwingungen pro Sekunden
- **Kreisfrequenz** ω (in s^{-1}), $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: Winkelgeschwindigkeit
- **Nullphasenwinkel** φ: Winkel zum Zeitpunkt $t = 0\,s$

Die Nullstelle t_0 und damit die Phasenverschiebung erhält man aus: $\omega \cdot t + \varphi = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

Harmonische Schwingung bzw. Sinusschwingung
$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

A ... Amplitude, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ... Kreisfrequenz, T .. Periodendauer, φ Nullphasenwinkel

39. u. 38. SÜ (Part 2) am 17. 1. 22 und 19.1.2022 Sophie St.

1.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

1.5.1 Exponentialfunktion

Def. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$ heißt Exponentialfunktion mit der Basis a;

$f_1(x) = 2^x$
$f_2(x) = (\frac{1}{2})^x$
$f_3(x) = e^x$
$f_4(x) = e^{-x}$

Eigenschaften

1) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$W = \mathbb{R}^+$

2) Nullstellen:
keine Nullstellen

3) Extrempunkte
keine Extrempunkte

4) Symmetrie:
$f(x) = a^x$ und $f(x) = a^{-x}$ liegen symmetrisch zueinander

5) Monotonie:
$a > 1$ streng monoton steigend
$0 < a < 1$ streng monoton fallend

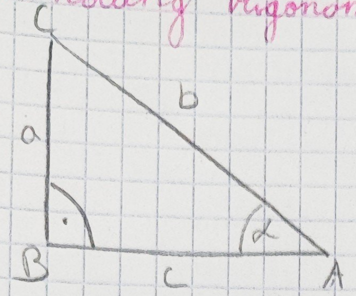
6) x-Achse: Asymptote
(Funktion erreicht nie 0)

7) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

4. Schulübung am 22.3.2022 Sophie Stöger

4. Trigonometrie - Teil 2

4.1. Wiederholung Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck



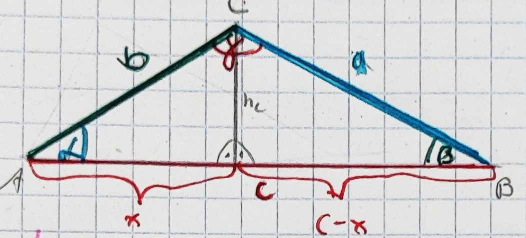
$\sin(\alpha) = \frac{GK}{H} \hat{=} \frac{a}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{AK}{H} \hat{=} \frac{b}{c}$

$\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} \hat{=} \frac{a}{b}$

$\cot(\alpha) = \frac{AK}{GK} \hat{=} \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

4.2 Trigonometrie am allgemeinen Dreieck



4.2.1 Sinussatz

Herleitung: $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b \cdot \sin(\alpha) = h_c$

$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin(\beta) = h_c$

$\boxed{b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)}$

$\boxed{\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$

Sinussatz:

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Um den Sinussatz anwenden zu können, benötigt man 2 Seiten und einen gegenüberliegenden Winkel oder 2 Winkel und eine gegenüberliegende Seite. In allen anderen Fällen benötigt man den sogenannten Cosinussatz

4.2.2 Cosinussatz

Herleitung: $\cos(\alpha) = \frac{x}{b} \Leftrightarrow x = b \cdot \cos(\alpha)$

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = b \cdot \sin(\alpha)$

$a^2 = (c-x)^2 + h_c^2 \Leftrightarrow a^2 = (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 + b^2 \cdot \sin(\alpha)^2$

$a^2 = c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + b^2\sin(\alpha)^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Cosinussatz:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}}$$

Der Cosinussatz kann angewendet werden, wenn man 2 Seiten und deren eingeschlossenen Winkel hat oder wenn alle 3 Seiten gegeben sind.