4. SÜ am 24.9.21

Sophie Stöger

1.2 Quadratische Funktionen und Gleichungen

1.2.1 Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen sind Funktionen, die sich mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ beschreiben lassen.

Quadratische Funktionen heißen auch Polynomfunktionen 2. Grades. Der Graf der quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Fall 1: $a \neq 0 \wedge b = c = 0$

$$f(x) = ax^2$$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$

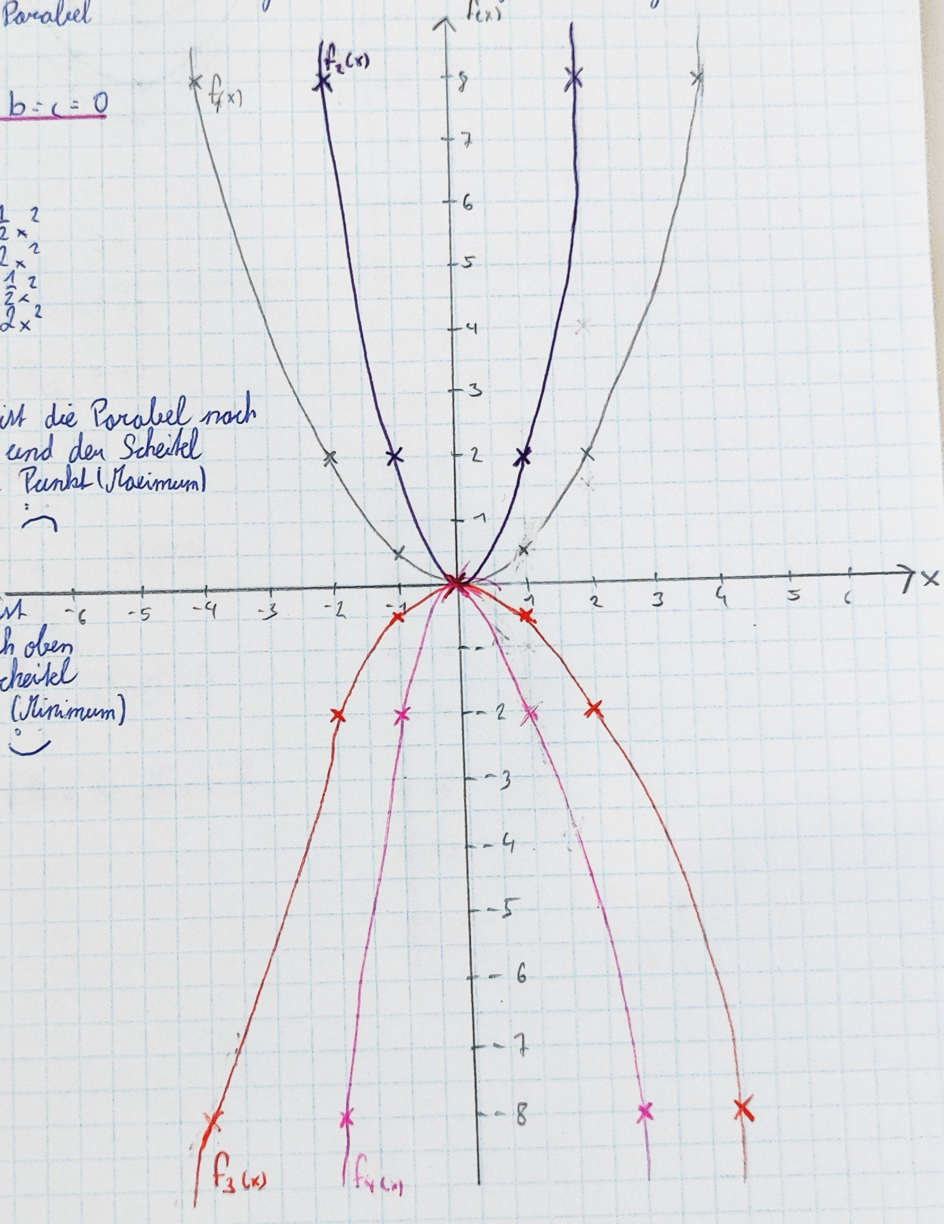
$a = 2$ $\quad f_2(x) = 2x^2$

$a = -\frac{1}{2}$ $\quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2$

$a = -2$ $\quad f_4(x) = -2x^2$

Ist $a < 0$ so ist die Parabel nach unten offen und der Scheitel ist der höchste Punkt (Maximum) des Grafen.

Ist $a > 0$ dann ist die Parabel nach oben offen und der Scheitel ist der tiefste Punkt (Minimum) des Grafen.



6. Schulübung am 29.9.21

Sophie Stöger

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 8$$
$$= 3 \cdot \left(x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{8}{3}\right)$$
$$3 \cdot \left(\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{9}\right)$$
$$3 \cdot \left(\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{20}{9}\right)$$
$$3 \cdot \left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{20}{3}$$

$$\underline{\underline{S\left(-\tfrac{2}{3} \,\middle|\, \tfrac{20}{3}\right)}}$$

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 8$$
$$= -2 \cdot (x^2 - x - 4)$$
$$= -2 \cdot \left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 4 - \tfrac{1}{4}\right)$$
$$= -2 \cdot \left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{17}{4}\right)$$
$$= -2 \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{17}{2}$$

$$\underline{\underline{S\left(\tfrac{1}{2} \,\middle|\, \tfrac{17}{2}\right)}} = H\left(\tfrac{1}{2} \,\middle|\, \tfrac{17}{2}\right)$$

$]-\infty, \tfrac{1}{2}[\ \nearrow$

$]\tfrac{1}{2}, \infty[\ \searrow$

3.15b) $v(t) = t^2 + 6t - 2$
$$= (t+3)^2 - 2 - 9$$
$$= (t+3)^2 - 11$$
$$\underline{\underline{S(-3 \mid -11)}}$$

Eigenschaften der quadratischen Funktion

Ist $a < 0$ so besitzt de Parabel im Scheitel einen Hochpunkt (Maximum). Der Graf der Funktion ist im Intervall $]-\infty, -\frac{b}{2a}[$ streng monoton steigend und im Intervall von $]-\frac{b}{2a}, \infty[$ streng monoton fallend.
Ist $a > 0$ so besitz die Parabel im Scheitel ein Minimum (Tiefpunkt). Der Graf der Funktion ist im Intervall $]-\infty, -\frac{b}{2a}[$ streng monoton fallend und im Intervall $]-\frac{b}{2a}, \infty[$ streng monoton steigen.
Die Funktion ist stetig und symmetrisch bezüglich jener Achse, die durch den Scheitel der Parabel geht und parallel zur y-Achse ist.

7. Schulübung am 1. Oktober

Sophie Stöger

Eine quadratische Funktion kann höchstens 2 (reele) Nullstellen besitzen. Liegt der Scheitel auf der x-Achse, hat die Funktion nur eine Nullstelle. Ist a < 0 und liegt der Scheitel unterhalb der x-Achse bzw. ist a > 0 und liegt der Scheitel oberhalb der x-Achse besitzt die Funktion keine Nullstellen. In allen anderen Fällen besitzt sie 2 reele Nullstellen

1.2.2 Quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

große Lösungsformel

$p = \frac{b}{a}$

$q = \frac{c}{a}$

$$f(x) = x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

kleine Lösungsformel

$$\left.\begin{array}{l} D = \Delta = b^2 - 4ac \\ \text{bzw.} \\ D = \Delta = \frac{p^2}{4} - q \end{array}\right\} \text{Diskriminante}$$

$\Delta > 0$ ... zwei reele Nullstellen $\Leftrightarrow$ genau eine Lösung x_1, x_2

$\Delta < 0$ ... keine reele Nullstelle $\Leftrightarrow$ keine reele Lösung

$\Delta = 0$ ... genau eine reele Nullstelle $\Leftrightarrow$ eine Doppellösung $x_1 = x_2$

- $f(x) = x^2 - 2x - 3$

  $f(x) = (x-1)^2 - 3 - 1$

  $f(x) = (x-1)^2 - 4$

  $S(1/-4) = T(1/-4)$ weil $a = 1 > 0$

  $]-\infty, 1[$ streng monoton fallend

  $]1, \infty[$ streng monoton steigend

Sophie Stog[illegible]

10. Schulübung am 8.10.21

Ermitteln der Funktionsgleichung

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Um die Koeffizienten eindeutig bestimmen zu können, benötigen wir daher 3 von einander unabhängige Bedingungen und wir erhalten ein System von 3 Gleichungen. Die Lösung dieses Gleichungssystem liefert uns dann die unbekannten Koeffizienten.

Spezialfälle einer quadratischen Gleichung

$f(x) = ax^2 + bx \overset{!}{=} 0$

und

$f(x) = ax^2 + c \overset{!}{=} 0$

$ax^2 + bx = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{b}{a}$

$ax^2 + c = 0 \quad | -c$

$ax^2 = -c \quad | : a$

$x^2 = -\frac{c}{a} \quad | \sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

3.24) $P(\frac{1}{5} | 1)$; $Q(-1 | \frac{11}{5})$; $R(5 | 25)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

I) $1 = a\frac{1}{25} + b \cdot \frac{1}{5} + c$

II) $\frac{11}{5} = a - b + c$

III) $25 = 25a - 5b + c$

I − II) $-\frac{6}{5} = a\frac{24}{25} - b\frac{6}{5} \quad | \cdot 5$

II − III) $-\frac{114}{5} = -24a - 6b$

IV) $-6 = a\frac{24}{5} + b \cdot 6$

V) $-\frac{114}{5} = -a24 - b \cdot 6$

VI) $-\frac{144}{5} = -a \cdot \frac{144}{5}$

$\underline{\underline{a = 1}}$

IV) $-6 = \frac{24}{5} + 6b \quad | + \frac{24}{5} \quad | : 6$

$-\frac{6}{5} = 6b$

$\underline{\underline{b = -\frac{1}{5}}}$

$\underline{\underline{c = 1}}$

$\underline{\underline{f(x) = x^2 - \frac{1}{5}b + 1}}$

12. SÜ am 19. Okt. 2021 Sophie Stoger

1.2.3 Der Satz von Vieta

$x^2 + px + q = 0$

1. $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
2. $p = -x(x_1 + x_2)$
3. $q = x_1 \cdot x_2$

Besitzt die quadratische Gleichung eine reele Lösung, dann gilt:

Jene quadratische Gleichung, die sich nicht in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen lässt, nennt man irreduzibel

3.82 e) $v_1 = -\frac{3}{2}$, $v_2 = 2$

$p = -(-\frac{3}{2} + 2) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$q = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$

$0 = v^2 - \frac{1}{2}v - 3 \quad | \cdot 2$

$\underline{\underline{0 = 2v^2 - v - 6}}$

f) $s_1 = -\frac{5}{4}$, $s_2 = -\frac{1}{2}$

$p = -(-\frac{5}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$

$q = (-\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$

$0 = s^2 + \frac{5}{4}s + \frac{1}{2}s + \frac{5}{8}$

$0 = s^2 + \frac{7}{4}s + \frac{5}{8} \quad | \cdot 8$

$\underline{0 = 8s^2 + 14s + 5}$

3.142 a) $x^2 - 3x + q = 0$

$x_1 = 6$

$p = -3 = -(x_1 + x_2)$

$-3 = -(6 + x_2) \quad | \cdot (-1)$

$3 = 6 + x_2 \quad | -6$

$x_2 = -3$

$q = x_1 \cdot x_2$

$q = 6 \cdot (-3)$

$q = -18$

$\underline{\underline{x^2 - 3x - 18 = 0}}$

b) $x^2 + px + 52 = 0$

$x_1 = -13$

$q = 52$

$52 = x_1 \cdot x_2$

$52 = -13 \cdot x_2 \quad | : (-13)$

$x_2 = -4$

$p = (x_1 + x_2)$

$p = 13 + 4 = 17$

$\underline{\underline{x^2 + 17x + 52 = 0}}$

3.92 $x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 36}}{2}$

keine reelen Lösungen

$p^2 - 36 < 0 \quad | +36$

$p^2 < 36 \quad | \sqrt{\ }$

$-6 < p < 6$

zwei reele Lösungen:

$p^2 > 36 \Leftrightarrow |p| > 6$

3.98 $ax^2 + bx + c = 0$

hat welche Lösung $a + b + c = 0$

$ax^2 + bx + (a + b) = 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2a}$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b + 2a)^2}}{2a}$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm (b + 2a)}{2a}$

$b^2 + 4a \cdot (a + b) =$
$= b^2 + 4a^2 + 4ab$
$= b^2 + 4ab + 4a^2$
$= (b + 2a)^2$

$x_1 = \frac{2a}{2a} = 1$

$x_2 = \frac{-2b - 2a}{2a} = \frac{\cancel{2} \cdot (-b - a)}{\cancel{2}a} = -\frac{b + a}{a}$

$\underline{\underline{L = \{-\frac{b + a}{a}; 1\}}}$