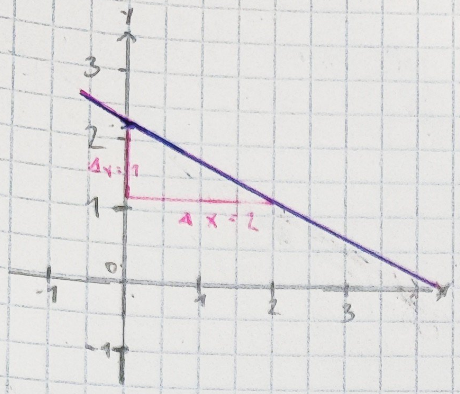
•)

I) $2x + 4y = 9 \Rightarrow y = -\frac{2}{4}x + \frac{9}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2{,}25$ • f_1

II) $-x - 2y = -4{,}5 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{4{,}5}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2{,}25$



$\Rightarrow$ Die beiden Gleichungen sind identisch

$y = 0$

$0 = -\frac{1}{2}x + 2{,}25 \quad | + \frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}x = 2{,}25 \quad | \cdot 2$

$x = 4{,}5$

7.1.3 Lösbarkeit eines linearen GLS mit 2 Variablen:

Ein GLS mit 2 Variablen

- ist eindeutig lösbar, wenn die Steigungen der beiden Gleichungen ungleich sind → Schnittpunkt existiert
- besitzt keine Lösung, wenn die beiden Geraden parallel sind
- besitzt unendlich viele Lösungen, wenn die beiden Gleichungen identisch sind.

7.1.4 Eliminationsverfahren (Additionsverfahren):

•)

I) $3x + 2y = 5 \quad | \cdot 5$

II) $4x - 5y = -1 \quad | \cdot 2$

I) $15x + 10y = 25$

II) $8x - 10y = -2$

$\oplus \; 23x = 23 \quad | : 23$

$\underline{\underline{x = 1}}$ → in I) einsetzen $3 \cdot 1 + 2y = 5 \quad | -3 \quad | : 2$

$\underline{\underline{y = 1}}$

$\underline{\underline{\Rightarrow L = \{(1/1)\}}}$

7.1.5 Gleichsetzungsverfahren:

I) $3x + 2y = 5 \Rightarrow$ I) $\frac{5-3x}{2}$

II) $4x + 5y = -1 \Rightarrow$ II) $\frac{-1-4x}{-5}$

I = II

$\frac{5-3x}{2} = \frac{-1-4x}{-5}$

$\frac{5-3x}{2} = \frac{1+4x}{5} \quad | \cdot 10$

$25 - 15x = 2 + 8x \quad | + 15x \quad | -2$

$23 = 23x \quad | : 23$

$\underline{\underline{x = 1}}$

einsetzen

$\frac{5-3x}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

I.1.2 Grafisches Lösen eines linearen GLS

↳ Einführendes Beispiel

→ Die Gleichungen lassen sich in die Form $y = kx + d$ bringen → Geraden

→ Zeichnen

y-Achse 1cm ≙ 5h
x-Achse 1cm ≙ 1h

I) $4x + y = 38 \quad |-4x$
$y = -4x + 38$

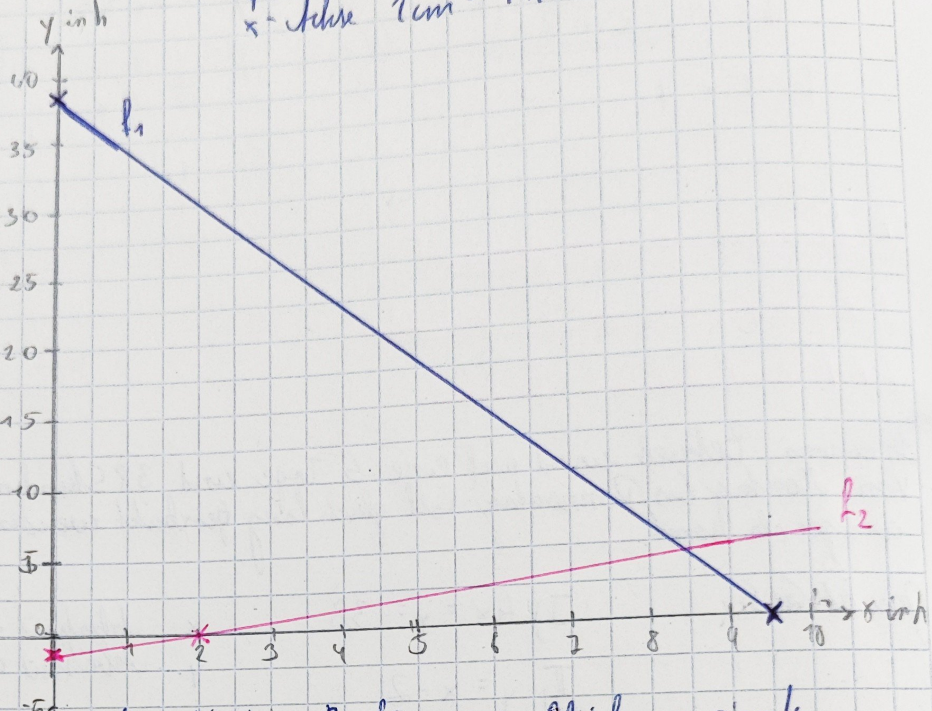
II) $y = x - 2$

f_1: $y = 0$

$0 = -4x + 38 \quad |-38 \quad |:4$
$x = 9,5$

f_2: $y = 0$

$0 = x - 2 \quad |+2$
$x = 2$



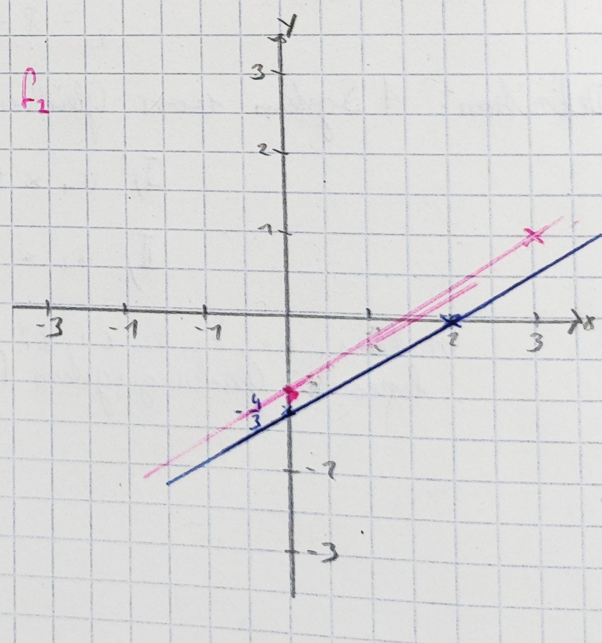
→ rechnerische Überprüfung notwendig! z.B Lösung in Gleichung einsetzen

→ Das GLS besitzt einen gemeinsamen Schnittpunkt ⇒ GLS ist eindeutig lösbar

•) I) $2x - 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ $\quad f_1$

II) $4x - 6y = 6 \Rightarrow y = \frac{4}{6}x - \frac{6}{6} = \frac{2}{3}x - 1$ $\quad f_2$

Die Beiden Gleichungen sind parallel.



51. Schulübung am 10. Mai

Sophie Slöger

5.86)

$$f(x) \begin{cases} -2x+6 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 & \text{für } 2 < x < 6 \\ x-4 & \text{für } 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

f_1: $y = kx + d$ $\quad d = 6$ $\quad P_1(2/2)$

$2 = k \cdot 2 + 6 \quad |-6 \quad |:2$

$k = -2$

$y = -2x + 6$

f_3: $y = kx + d$ $\quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$

$2 = 1 \cdot 6 + d \quad |-6 \quad P_3(6/2)$

$d = -4$

$f_3 = y = x - 4$

7 Lineare Gleichungssysteme:

7.1 Lineare GLS in 2 Variablen:

7.1.1. Einführendes Beispiel:

In einem Betrieb wird auf eine 5 Tage und 38 Stunden Woche umgestellt. Von Montag bis Donnerstag soll gleich lang gearbeitet werden, am Freitag 2 Stunden weniger als sonst.

Gesucht: GLS

I) $4x + y = 38$

II) $y = x - 2$

x... Arbeitszeit in h von Montag bis Donnerstag

y... Arbeitszeit in h vom Montag

II in I einsetzen: $4x + x - 2 = 38 \quad |+2 \quad |:5$

$x = 8h$

$y = 8 - 2 = 6h$

$L = \{(8/6)\}$

Definition: 1 System von Gleichungen der Form

I) $a_1 x + b_1 y = c_1$

II) $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $a_1, a_2, b_1, b_2 \neq 0$ heißt lineares Gleichungssystem (GLS) mit 2 Variablen

54. Schulübung am 19.5.21 Sophie Stöger

7.1.7 Cramersche Regel:

Das vierte (rechnerische) Lösungsverfahren beruht darauf, dass sich jedes Gleichungssystem in der Form

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

schreiben lässt, wobei A eine Matrix ist und $\vec{x}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren.

Merke:
Ein rechteckiges Zahlenschema, das in Zeilen und Spalten angeordnet ist, heißt Matrix.

z.B. 2×2 Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Determinante der Matrix A: $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ ... ("Zahl" / Wert)

Bsp:
I) $3x + 2y = 5$
II) $4x - 5y = -1$

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 = -23$

$D \neq 0 \Rightarrow$ GLS eindeutig lösbar

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-5) - (-1) \cdot 2 = -23$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 = -23$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-23}{-23} = 1$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-23}{-23} = 1$

$L = \{(1/1)\}$

Allgemein gilt: GLS: I) $a_1 x + b_1 y = c_1$

II) $a_2 x + b_2 y = c_2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ... GLS in Matrizenform

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ... erweiterte Matrix

Das lineare GLS besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von 0 verschieden ist.

Dann gilt die Cramersche Regel:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ und } y = \frac{D_y}{D}$$

wobei:

$D = \det(A)$, $D_x = \det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $D_y = \det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$