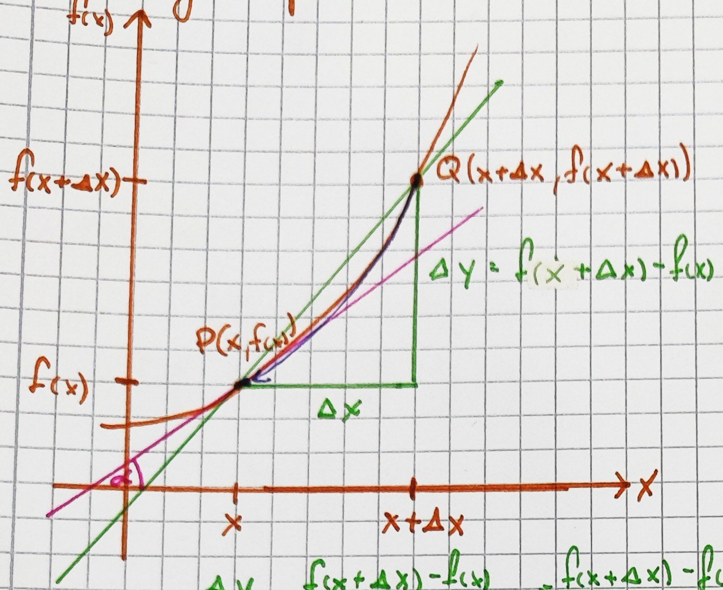
15. Schulübung am 4.11.2022

Sophie Stöger

2. Differentialrechnung

2.1 Tangentenproblem



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differenzenquotient

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

durchschnittliche Änderungsrate

Differentialquotient

$$\tan(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

momentane Änderungsrate im Punkt P $\hat{=}$ Steigung

4.11b) $f(x) = 2x^2 - 3$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3 - (2x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\cdot(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3 - 2x^2 + 3}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 \cancel{-3} - \cancel{2x^2} \cancel{+3}}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x \cdot (4x + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4x + 2\Delta x$$ Differenzenquotient

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(4x + 2\Delta x) = 4x$$

$2\Delta x \to 0$ Differentialquotient

18. Schulübung am 11.11.22

Sophie Stöger

MAK AM 11.11.22: (wird auf Moodle geladen)

A) •) x_2 ist negativ bei $[0, \infty]$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)}$

•) selbe y Koordinate wie x_2

B) Differenzenquotient einzeichnen und Geodreieck parallel verschieben und Tangente einsetzen

C) •) Differenzialquotient $x = 6$ bzw $x = 3$ Tangente einzeichnen

•) ✓ negative Steigung

•) $\frac{3}{3} = 1$

•) bsp $[-3, 3]$

•) ✓ positive Steigung

Bei linearen Funktionen ist der Differenzenquotient gleich dem Differenzialquotienten weil die Steigung konstant ist.

•) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot (x+\Delta x)^2 - 4 \cdot (x + \Delta x) + 3 - (2x^2 - 4x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) \cancel{- 4x} - 4\Delta x \cancel{+ 3} - 2x^2 \cancel{+ 4x} \cancel{- 3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 4\Delta x \cancel{- 2x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (4x + 2\Delta x - 4)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} = 4x + \underset{\downarrow \atop 0}{2\Delta x} - 4 = \underline{\underline{4x - 4}}$$

22. Schulübung am 23.11.22

Sophie Stöger

2.3.4 Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

Beispiel: $f(x) = (3x^2 + 6x) \cdot (7x + 9)$

$u = 3x^2 + 6x \qquad u' = 6x + 6$

$v = 7x + 9 \qquad v' = 7$

$f'(x) = (6x+6) \cdot (7x+9) + (3x^2+6x) \cdot 7$
$= 42x^2 + 42x + 54x + 54 + 21x^2 + 42x$
$= 63x^2 + 138x + 54$

•) $f(x) = (3x + 6x^2 + 3) \cdot e^{4x}$

$u = 3x + 6x^2 + 3 \qquad u' = 3 + 12x$

$v = e^{4x} \qquad v' = 4e^{4x}$

$f'(x) = (3 + 12x) \cdot e^{4x} + (3x + 6x^2 + 3) \cdot 4e^{4x}$
$= e^{4x} \cdot (3 + 12x + 12x + 24x^2 + 12)$
$= e^{4x} \cdot (24x^2 + 24x + 15)$

2.3.5 Quotientenregel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$$

•) $f(x) = \frac{2x+5}{3x^2+5}$

$u = 2x + 5 \qquad u' = 2$

$v = 3x^2 + 5 \qquad v' = 6x$

$f'(x) = \frac{2 \cdot (3x^2 + 5) - 6x \cdot (2x + 5)}{(3x^2 + 5)^2}$

$= \frac{6x^2 + 10 - 12x^2 - 30x}{(3x^2+5)^2} = \frac{-6x^2 - 30x + 10}{(3x^2 + 5)^2}$ ← nicht ausquadrieren!

•) $f(x) = \frac{\cos(2x)}{4e^{3x}}$

$u = \cos(2x) \qquad u' = -2\sin(2x)$

$v = 4e^{3x} \qquad v' = 12e^{3x}$

$f'(x) = \frac{-2 \cdot \sin(2x) \cdot 4e^{3x} - 12e^{3x} \cdot \cos(2x)}{(4e^{3x})^2}$

$= \frac{\cancel{4e^{3x}} \cdot (-2\sin(2x) - 3\cos(2x))}{(4e^{3x})^2} = -\frac{2\sin(2x) + 3\cos(2x)}{4e^{3x}}$

BRUNNEN

23. Schulübung am 25.11.2022 Sophie Stöger

2.3.6 Kettenregel

$$f = g(v(x))$$

$$f' = \underbrace{g'(v(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

äußere Ableitung * innere Ableitung

Beispiel

•) $f(x) = (2x+3)^2$

$f'(x) = 2\cdot(2x+3)\cdot 2 = 4\cdot(2x+3) = 8x + 12$

Äußere Ableitung

innere Ableitung

•) $f(x) = e^{3x+7x^2+3}$

$f'(x) = e^{3x+7x^2+3}\cdot(3+14x) = (3x+14)\cdot e^{3x+7x^2+3}$

•) $f(x) = \cos(2x^2 + \sqrt[3]{x}) = \cos(2x^2 + x^{\frac{1}{3}})$

$f'(x) = (4x + \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}})\cdot \sin(2x^2 + \sqrt[3]{x})$

$= -\left(4x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot \sin(2x + \sqrt[3]{x})$

2.3.7 Implizites Differenzieren

Bezeichnet man mit x die unabhängige und mit y die abhängige Variable so differenziert man gliedweise jeden Term der Funktionsgleichung nach x.

Jeden Term der y enthält ist mit der Kettenregel abzuleiten, da y eine Funktion von x ist. Anschließend löst man die erhaltene Gleichung nach y'.

Beispiel:

•) $y + 2y^2 = 3x$

$y' + 4\cdot y\cdot y' = 3$

$y'\cdot(1+4y) = 3$

$y'(x) = \frac{3}{1+4y(x)}$

•) $y\cdot x + 2 = 17$

$y'\cdot x + y\cdot 1 = 17$

$y'(x) = \frac{17 - y(x)}{x}$

$u = y \quad u' = y'$

$v = x \quad v' = 1$

29. Schulübung am 7.12.2022 Sophie Stöger

2.4 höhere Ableitungen (siehe B. S152 ff)

Die k-te Ableitung von f wird mit $f^{(k)}$ bzw. mit $\frac{d^k f}{dx^k}$ bezeichnet

Nachstehende Funktionen sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar

- Polynomfunktion
- Rationale Funktionen
- Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Winkel- und Arkusfunktion

Monotonie und erste Ableitung

$f'(x) > 0$ Die Funktion ist um x streng monoton steigend.

$f'(x) < 0$ Die Funktion ist um x streng monoton fallend.

Krümmung und zweite Ableitung

$f''(x) > 0$ Der Graph ist linksgekrümmt (Linkskurve um x, positiv gekrümmt)

$f''(x) < 0$ Der Graph ist rechtsgekrümmt (Rechtskurve um x, negativ gekrümmt)

Definition

Eine Funktion besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (Maximum), wenn für alle $x \neq x_0$ in einer Umgebung von x_0 gilt:

$$f(x_0) < f(x)$$

bzw.

$$f(x_0) > f(x)$$

x_0 heißt Minimum- bzw. Maximumstelle

Bemerkung

- Minimum und Maximum werden als Extremum bezeichnet. Ein Maximum wird häufig als Hochpunkt und ein Minimum als Tiefpunkt bezeichnet.
- Ein Extremum kann natürlich auch global sein, wenn sich die Extremaleigenschaft auf den gesamten Definitionsbereich bezieht. Globale Extrema können auch am Rand des Definitionsbereich auftreten. In diesem Fall spricht man von Randextremum.

Notwendiges Kriterium für ein lokales Extremum

Ist f(x) an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist x_0 eine lokale Extremstelle, wenn $f'(x) = 0$ ist.

31. Schulübung am 13.12.2022

Sophie Stöger

S. 24e)

$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x^4 - 8x^2 - 3)$

Es handelt sich um eine Gerade Funktion, da alle Exponenten gerade sind.

a) $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot (4x^3 - 16x)$

$f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot (12x^2 - 16)$

$f'''(x) = -\frac{24x}{3} = -8x$

1) Nullstellen: 4 → Grad der Funktion f ist 3

Extremstellen: 3 → Grad der ersten Ableitung ist 3

Wendestellen: 2 → Grad der zweiten Ableitung ist 2

I) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$

stetig

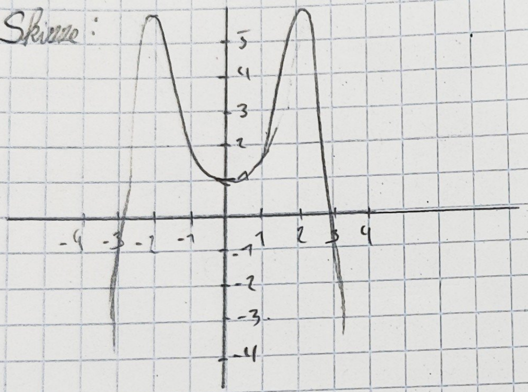
keine Polstellen

keine Lücken

II) Asymptoten, Verhalten im Unendlichen, Verhalten an Unstetigkeitsstellen:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Skizze:



III) Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,89$ $x_2 = -2,89$

$N_1(2,89 / 0)$ $N_2(-2,89 / 0)$

IV) Extremstellen:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x_2 = -2$ $x_3 = 2$

$f''(x_1) = -\frac{1}{3} \cdot (12 \cdot 0^2 - 16) = \frac{16}{3}$ $f(x_1) = 1$

↳ > 0 also Tiefpunkt $T(0/1)$

$f''(x_2) = -\frac{1}{3} \cdot (12(-2)^2 - 16) = -\frac{32}{3}$ $f(x_2) = \frac{19}{3} = 6,\dot{3}\dot{3}$

↳ < 0 also Hochpunkt $H_1(-2/6,\dot{3}\dot{3})$

$f'''(x_3) = -\frac{32}{3}$ $f(x_3) = 6,\dot{3}\dot{3}$ → < 0 also $H_2(2/6,\dot{3}\dot{3})$

V) Wendestellen:

$f''(x) = 0$ $x_1 = -1,15$ $x_2 = 1,15$ $y_1 = f(x_1) = 3,69$

$W_1(-1,15/3,69)$ $W_2 = (1,15/3,69)$

$k_1 = f'(x_1) = -4,106$ $3,69 = -4,106 \cdot (-1,15) + d_1 \Rightarrow d_1 = 0,7619$

$k_2 = f'(x_2) = 4,106$ $3,69 = 4,106 \cdot 1,15 + d_2 \Rightarrow d_2 = -0,7619$

$t_{w_1}: k_1 \cdot x + d_1 \Rightarrow -4,106 \cdot x - 0,76$ $t_{w_2}: k_2 \cdot x + d_2 = 4,06 \cdot x - 0,76$

44. Schulübung vom 1.2.2023 Sophie Stöger

2.3.7 Implizites Differenzieren

$f(x) = 3x^2 \iff y = 3x^2$ $\quad$ $f(x)$ u. y = abhängige variable

$f'(x) = 6x \iff y' = 6x$ $\quad$ x = unabhängige variable

$$3x^2y + 4y^2 = 11x$$

$$6xy + 3x^2y' + 8yy' = 11$$

$$2x^6 \cdot y + 3y^3 = 12x^2$$

$$12x^5 \cdot y + 2x^6y' + 9y^2 \cdot y' = 24x$$

$$2x^2 + 3\cos(2x+3y) - 3\sqrt[3]{xy} + 11 = 3x^2 + y^3$$

$$2x^2 + 3\cos(2x+3y) - 3x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + 11 = 3x^2 + y^3$$

$$4x - 3\sin(2x+3y) \cdot (2+3 \cdot y') - 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right) - \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot y'\right)\right) = 6x + 3y^2 \cdot y'$$

$$4x - 3\sin(2x+3y) \cdot (2+3y') - \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}\,y' = 6x + 3y^2y'$$

$$3x^2 \cdot \cos(2y) + 3x^2 = 10$$

$$(6x \cdot \cos(2y)) - (3x^2 \cdot \sin(2y) \cdot 2 \cdot y') + 6x = 0$$

$$6x\cos(2y) - 6x^2y'\sin(2y) + 6x = 0$$

$$2y^6 + 3xy = 7$$

$$12y^5y' + 3 \cdot (y + xy') = 0$$

$$12y^5y' + 3y + 3xy' = 0$$