1. Schulübung am 14.9.2022

Sophie Stöger

1. Folgen und Reihen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... 11, 12, 13, ...

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

−1, 1, −1, 1, −1, 1 (−2, 2, −2)

2. Schulübung am 16.9.2022

Definition: Eine fortlaufende Anordnung vieler Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \rangle$ mit einem Bildungsgesetz, heißt unendliche Zahlen(folge)

Die einzelnen Zahlen heißen (Folge)glieder; Index n gibt, das wie vielte Glied gemeint ist.

Ist die Anzahl der Folgenglieder endlich, dann heißt die Folge endlich, sonst unendlich

Bemerkung: 1. Jede Folge wird also durch die Reihenfolge ihrer Glieder festgelegt

$a_n = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 7 \ldots \rangle$
$b_n = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7 \ldots \rangle$
$a_n \neq b_n$

2. Der Index n kann auch mit 0 beginnen

$\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$

Termdarstellung oder explizite Darstellung

$a_n = 3n + 4 \quad \langle 7, 10, 13, 16, \ldots \rangle \qquad a_{100} = 304$

Rekursive Darstellung

$\boxed{a_1 = 15 \quad a_{n+1} = 2 + 3a_n}$ $\langle 15, 47, 143, \ldots \rangle$

1.6 1) $\langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \rangle$ 2) $\langle 7, 49, 343, 2401, 16807, 7^6, 7^7, \ldots \rangle$

3) $\langle 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots \rangle$ alternierende Folge $(a_n = (-1)^{n+1} \cdot n)$ 4) $\langle 3, 1, -3, -7, -11, -15, \ldots \rangle$

1.8 b) $a_n = (n-1) \cdot (3-n)$

$\langle 0, 1, 0, -3, -8, -15, \ldots \rangle$

1.9 b) $\langle 1, 3, 9, 27, 81, 243 \rangle$ $\boxed{a_1 = 1 \quad a_{n+1} = 3a_n}$ $n \geq 1$ $\boxed{a_1 = 1 \quad a_n = 3a_{n-1}}$ $n \geq 2$

Explizite Darstellung: $a_n = 3^{n-1}$

3. Schulübung am 20.9.2022

Sophie Stöger

1.11a) $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n$ mit $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$\langle 2, 1, 0, -1, -2, \ldots \rangle$

1.2 Folgen

1.2.1 Arithmetische Folge

Ein Folge $\langle a_n \rangle$ heißt Arithmetische Folge, wenn die Differenz d je zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant ist.

Es gilt also:

$a_n = a_{n-1} + d$ $\quad a_1$ beliebig, aber fest

bzw.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Bemerkung: In jeder Arithmetischen Folge gilt ab dem zweiten Glied, dass jedes Glied der Folge das Arithmetische Mittel der beiden Nachbargliedern ist.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \forall n \geq 2$$

1.2.2 Geometrische Folge

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt Geometrische Folge, wenn der Quotient q je zwei aufeinander Folgenden Gliedern konstant ist.

Es gilt also:

$b_{n+1} = b \cdot n \cdot q$ $\quad b_1$ beliebig, aber fest

bzw.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Bemerkung: In jeder Geometrischen Folge gilt ab dem zweiten Glied, dass jedes Glied der Folge, das geometrische Mittel der beiden Nachbargliedern ist.

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

6. Schulübung am 27.9.22 Sophie Stöger

1.64 c)

$s = 99{,}2$ mit $b_1 = b_1$

$p = 4096$ $b_2 = b_1 q$

$b_3 = b_1 \cdot q^2$

$s = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = b_1(1 + q + q^2) = 99{,}2$

$p = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 = b_1^3 \cdot q^3 = 4096$

$b_1 = \frac{99{,}2}{1+q+q^2}$

$b_1 = \frac{16}{q}$

$\frac{99{,}2}{1+q+q^2} = \frac{16}{q}$

$99{,}2q = 16(1+q+q^2)$

$99{,}2q = 16 + 16q + 16q^2$

$0 = 16q^2 - 83{,}2q + 16$

$q_{1/2} = \frac{83{,}2 \pm \sqrt{83{,}2 - 4 \cdot 16^2}}{32}$

$q_1 = 5 \Rightarrow b_1 = 3{,}2 \Rightarrow \underline{\underline{b_n = 3{,}2 \cdot 5^{n-1}}}$

$q_2 = 0{,}2 \Rightarrow b_{1,1} = 80 \Rightarrow \underline{\underline{b_n = 80 \cdot 0{,}2^{n-1}}}$

Die drei Zahlen lauten 3,2; 16; 80 oder

80; 16; 3,2.

1.66) $b_5 = 10\,000$ $b_5 = b_1 \cdot q^4$

$b_n = b_1 q^{n-1}$ $10000 = b_1 \cdot 1{,}2^4 \Rightarrow b_1 = \frac{10\,000}{1{,}2^4} = 4822{,}53$

$q = 1{,}2$ $\underline{\underline{b_n = 4822{,}5 \cdot 1{,}2^{n-1}}}$

A: Das älteste Kind bekommt 4822,53€; das 2. erhält 5787,04€; das nächste Kind erhält 6944,44; das 4. erhält 8333,33€; und das jüngste Kind bekommt 10 000€

BRUNNEN

1.2.3 Monotonie von Folgen

$\langle 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$ (streng monoton steigend) $\quad a_n = 2n \quad$ mit $n \in \mathbb{N}$

$\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \rangle$ (streng monoton fallend) $\quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad$ mit $n \geq 1$

Definition: Eine Folge a_n heißt (streng) monoton steigend, wenn für alle Indices $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq a_{n+1}$$

bzw.

$$(a_n < a_{n+1})$$

Definition: Eine Folge a_n heißt (streng) monoton fallend, wenn für alle Indices $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \geq a_{n+1}$$

bzw.

$$(a_n > a_{n+1})$$

Bemerkung:
1) Eine Folge deren Glieder alle übereinstimmen heißt konstante Folge
2) Folge deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind nennt man alternierend.

7. Schulübung vom 30.9.2022 Sophie Stöger

1.2.4 Schranken von Folgen

$a_n = 2 + 3n$ $n \geq 1$ untere Schranke: 5, -333, ...

$a_n = 5 - 3n$ $n \geq 1$ obere Schranke: 2, 333, ...

Definition: Eine Folge a_n heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_n \geq c$ c... untere Schranke

Eine Folge a_n heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_n \leq b$ b... untere Schranke

Bemerkungen:
1) die größte untere Schranke bezeichnet man als Infimum
2) die kleinste obere Schranke nennt man Supremum
3) hat eine Folge eine unter und eine obere Schranke, so heißt sie beschränkt
4) eine Folge heißt unbeschränkt, wenn sie keine obere oder keine untere Schranke besitzt

1.145 b)

$a_n = \frac{24n - 5}{2n^2 + 1}$ z.Z. $a_n > a_{n+1}$ $n \geq 1$ immer!

$$\frac{24n - 5}{2n^2 + 1} > \frac{24(n+1) - 5}{2(n+1)^2 - 5}$$

$$\frac{24n - 5}{2n^2 + 1} > \frac{24n + 19}{2n^2 + 4n + 3}$$

$$(24n - 5) \cdot (2n^2 + 4n + 3) > (24n + 19) \cdot (2n^2 + 1)$$

$$\cancel{48n^3} + 96n^2 + 72n - 10n^2 - 20n - 15 > \cancel{48n^3} + 24n + 38n^2 + 19$$

$$86n^2 + 52n - 15 > 38n^2 + 24n + 19$$

$$48n^2 + 28n - 34 > 0$$

$n_1 < -1{,}18$

$n_2 > 0{,}6$ w. A

streng monoton fallend

9. Schulübung am 5.10.22 — Sophie Stöger

1.2.5 Konvergenz von Folgen – Grenzwert von Folgen

Definition: Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt Nullfolge, wenn es zu jeden $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

man sagt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Definition: Das Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ heißt eine ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

$$U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+c\}$$

Unter verwendung dieser Definition lautet die Def. der Nullfolge: eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt Nullfolge wenn in jeder ε-Umgebung fast alle Glieder der Folge liegen.

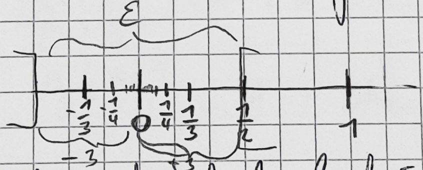
Definition: Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung $U(a,\varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge liegen.

Es gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}^*$: $|a_n - a| < \varepsilon$

Man schreibt: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergente Folge.
Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt divergente Folge.

Es gilt der Folgende



Satz

Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $\langle a_n \rangle$ ist konvergent

Eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $\langle a_n \rangle$ ist konvergent

Es gelten die Grenzwertsätze

Satz

1. $\lim\limits_{n \to \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n \to \infty} a_n = c \cdot a$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a \pm b$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ mit $b_n \neq 0$; $b \neq 0$

11. Schulübung am 14.10.22

Sophie Stöger

•) $a_n = \frac{3n+4}{2n-1}$ $\quad a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{n(3+\frac{4}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} \cdot \frac{3}{2}$ $\quad \varepsilon = 0{,}05$

$|a_n - a| < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest

$\left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{\cancel{6n}+8-\cancel{6n}+3}{4n-2}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{11}{4n-2}\right| < \varepsilon$

$11 < \varepsilon \cdot (4n-2)$

$11 < 4\varepsilon n - 2\varepsilon$

$\frac{11+2\varepsilon}{4\varepsilon} < n$

$55{,}5 < n$

ab dem 56 Glied liegen alle Folgenglieder in $U(\frac{3}{2}; 0{,}05)$

55 Glieder liegen außerhalb der ε-Umgebung

1.3. Reihen

1.3.1. Endliche Reihen

Als eine endliche Zahlenreihe bezeichnet man die Folge der Partialsumme $\langle s_1, s_2, s_3, \dots s_n \rangle$ die der Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots a_n \rangle$ zugeordnet ist

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_n$

Endliche arithmetische Reihen

Liegt einer Reihe eine arithmetische Folge zugrunde, dann spricht man von einer arithmetischen Reihe

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

bzw.

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d)$

12. Schulübung am 18.10.22 Sophie Stöger

Endliche geometrische Reihe

Liegt einer Reihe eine geometrische Folge zu Grunde, dann spricht man von einer geometrischen Reihe. Die Summenformel für das n-te Glied der geometrischen Reihe ist gegeben durch:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{mit } q \neq 1$$

Beweis:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n$$

$$S_n - S_n \cdot q = b_1 - b_1 \cdot q^n$$

$$S_n(1-q) = b_1 \cdot (1-q^n)$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$$

1.3.2 Unendliche Reihen

Als eine unendliche geometrische Zahlenreihe bezeichnet man die Folge der Partialsummen $\langle s_1, s_2, s_3, \dots \rangle$ die der unendlichen geometrischen Folge $\langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$ zugeordnet ist.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$S = \lim_{n \to \infty} b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} \quad \text{wenn } |q| < 1$$

$$S = b_1 \cdot \frac{1}{1-q} \quad |q| < 1$$

1.48b) $a_n = 84 + (n-1) \cdot 3$

$$s_{23} = \frac{23}{2} \cdot ((84 + 3 \cdot (1-1)) + (84 + 3 \cdot (23-1)))$$

$$s_{23} = \frac{23}{2} \cdot (84 + (84 + 3 \cdot (23-1)))$$

$$\underline{\underline{s_{23} = 2691}}$$

c) $a_n = 132 - 2 \cdot n$

$$s_{60} = \frac{60}{2} \cdot ((132 - 2 \cdot 1) + (132 - 2 \cdot 60))$$

$$s_{60} = 30 \cdot (130 + (132 - 120))$$

$$\underline{\underline{s_{60} = 4260}}$$

150c) $s_9 = 27 \quad a_9 = 15 \quad n = 20$

$$27 = (2a_1 + 8d) \cdot \frac{9}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$15 = a_1 + 8d$$

BRUNNEN