64. Schulübung am 28.6.2021 Sophie St.

8. Komplexe Zahlen

8.1 Einleitung, j - Definition

Bsp 1) $x^2 - 4 = 0 \quad | + 4$
$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm 2$

$\underline{L = \{\pm 2\}}$

Bsp 2) $x^2 + 4 = 0 \quad | - 4$
$x^2 = -4 \quad | \sqrt{\ }$
$\underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{-4}}$ => keine Lösung im reellen

Merke: Um nun die in $\mathbb{R}$ nicht lösbaren Gleichungen lösen zu können, muss die Menge der reellen Zahlen zur Menge der komplexen Zahlen erweitert werden.

Es wird die Zahl j (i) mit folgenden Eigenschaften definiert

$$j^2 = -1$$
bzw
$$j = \sqrt{-1}$$

=> Bsp 2) $x^2 + 4 = 0 \quad | - 4$
$x^2 = -4 \quad | \sqrt{\ }$
$x_{1/2} = \pm 2j$

$\underline{L = \{\pm 2j\}}$

Es gilt: $j^1 = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = -j \quad = j \cdot j^2 = j \cdot (-1) = -j$
$j^4 = 1 \quad = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$j^5 = j$
$j^6 = -1$
$j^7 = -j$
$j^8 = 1$
⋮

$j^{4n+1} = j$
$j^{4n+2} = j^2 = -1$ mit $n \in \mathbb{Z}$
$j^{4n+3} = j^3 = -j$
$j^{4n} = +1$

Definition: Eine Zahl der Form

$$z = a + jb$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $j^2 = -1$ heißt komplexe Zahlen

a... Realteil von z $(Re(z))$
b... Imaginärteil von z $(Im(z))$
j... imaginäre Einheit

Merke: Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile gleich sind

$$z_1 = z_2 \iff Re(z_1) = Re(z_2) \land Im(z_1) = Im(z_2)$$

- Unterscheiden sich 2 komplexe Zahlen nur durch das Vorzeichen ihrer Imaginärteile, dann heißen die beiden Zahlen konjugiert komplexe Zahlen.

$$z = a + jb$$
$$\bar{z} = a - jb$$

•) In der Elektronik wird die Imaginäre Einheit meist mit j bezeichnet um Verwechslungen mit der Stromstärke i(t) zu vermeiden.

⇒ Nun sind auch quadratische Gleichungen mit negativen Wurzel lösbar.

Ermitteln sie Real und Imaginärteile und die konjugiert komplexe Zahl.

1) $z = 3+4j$ $\quad Re(z) = 3 \quad Im(z) = 4 \quad \bar{z} = 3-4j$

2) $z = 2-2j$ $\quad Re(z) = 2 \quad Im(z) = -2 \quad \bar{z} = 2+2j$

3) $z = -5$ $\quad Re(z) = -5 \quad Im(z) = 0 \quad \bar{z} = -5$

4) $z = 7j$ $\quad Re(z) = 0 \quad Im(z) = 7 \quad \bar{z} = -7j$

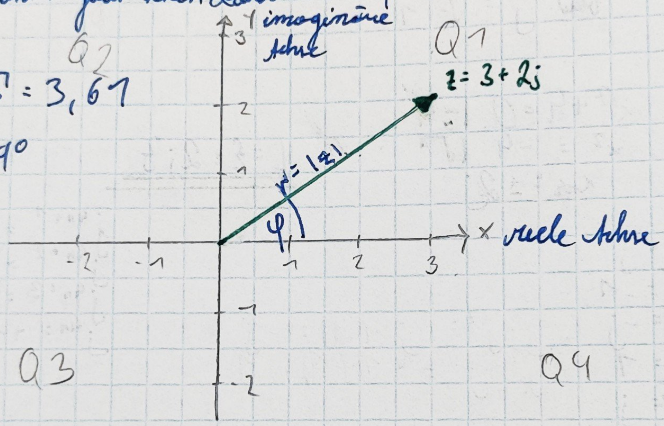
8.2 Veranschaulichung

Jede reele Zahl lässt sich als Punkt auf einer Zahlengerade darstellen.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) schlug vor komplexe Zahlen durch Punkte in einer Ebene, der sogenannten Gaußschen Zahlenebene, darzustellen.

$r = |z| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = 3,61$

$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33,69°$



Komplexe Zahlen können mit Pfeilen, den sogenannten Zeigern, dargestellt werden.

Unter dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a+jb$ versteht man die Länge des Zeigers.

$$r = |z| = |a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Winkel: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ... 1. und 4. Quadrant

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$ 2. und 3. Quadrant

Beispiele) Stelle die komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene dar und berechne Betrag und Winkel

1.) $z_1 = -4+2j$
2) $z_2 = 3+2j$
3) $z_3 = -3-3j$
4) $z_4 = 3-4j$

nächste Seite →

50. Schulübung am 1.3.2022

Sophie Stöger

3. Komplexe Zahlen, $\mathbb{C}$

3.1 Einführung - Wiederholung (Kapitel 8. 1. Jahrgang)

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm j$

$j^2 = i = -1$ $\boxed{j = \sqrt{-1}}$

i... Imaginäre Einheit

Es gilt
$j^2 = -1$
$j^3 = -j$
$j^4 = 1$
$j^5 = j$
$j^6 = -1$

$\boxed{\begin{array}{l} j^{4n} = 1 \\ j^{4n+1} = j \\ j^{4n+2} = -1 \\ j^{4n+3} = -j \end{array}}$

z) $j^{87} = j^3 = -j$

$j^{-22} \cdot j^{24} = j^2 = -1$

$j^{-14} \cdot j^{16} = j^2 = -1$

$j^{48} = 1$

$j^{-117} \cdot j^{120} = j^{4\cdot(-30)+3} = j^3 = -j$

$j^{57} \cdot j^{36+1} = j^{4\cdot 14+1} = j$

Definition: Eine Zahl der Form $z = a + jb$ heißt komplexe Zahl.

a... $Re(z)$ Realteil von z

j... imaginäre Einheit

b... $Jm(z)$ Imaginärteil von z

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl die beiden Realteile als auch die beiden Imaginärteile übereinstimmen.

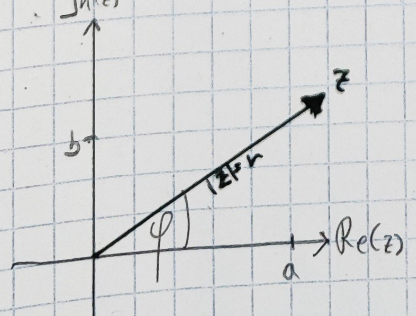
$z_1 = a + jb$
$z_2 = c + jd$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2) \land Jm(z_1) = Jm(z_2)$

Unterscheiden sich zwei komplexe Zahlen nur durch das Vorzeichen ihrer Imaginärteile, dann heißen die beiden Zahlen konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = z^* = a - jb$

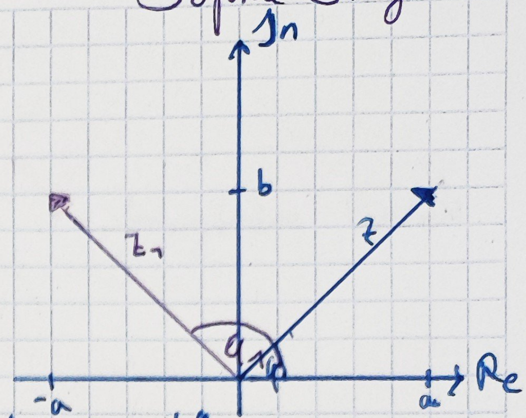
3.2 Veranschaulichung

Gaußsche Zahl: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$



51. Schulübung am 2.3.2022

Sophie Stöger



·) $(1+j^3)\cdot(1-j) = (1-j)\cdot(1-j) = 1-j = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

·) $Re(z) = 9 \quad Im(z) = 7 \quad z = 9+7j \quad \bar{z} = 9-7j$

$$\boxed{z = a+bj \qquad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \varphi = \tan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \tan(\varphi) = \left(\frac{b}{a}\right)}$$

$\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\cdot\sin(\varphi)$

$\cos(\varphi) = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cdot\cos(\varphi)$

Kartesische Darstellung
$\Rightarrow z = a+bj = r\cdot\cos(\varphi) + j\cdot r\cdot\sin(\varphi)$
$= r\cdot(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$

Exponentialdarstellung: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$
$\Rightarrow z = r\cdot e^{j\varphi}$ mit φ in rad

Polardarstellung → φ in Grad

$$z = \overbrace{a+jb}^{\text{kart. Darstellung}} = \underbrace{r\cdot(\cos(\varphi)+j\sin(\varphi))}_{\text{Polardarstellung (grad)}} = \overbrace{re^{j\varphi}}^{\text{Exponentialdarstellung (rad)}}$$

Kurzschreibweise: $(r, \varphi°)$

Eulerische Formel: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

·) $z = 3+4j \qquad$ 1. Q $\qquad r = \sqrt{3^2+4^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{4}{3}$
$r = 5$
$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13° \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}9273$ rad

$\underline{\underline{z = 3+4j = 5\cdot(\cos(53{,}13°) + j\sin(53{,}13°)) = 5e^{j0{,}9273}}}$

54. Schulübung am 9.3.22

Sophie Stöger

•) $z_1^6 = (3+7j)^6$ $\quad z = r \cdot e^{j\varphi}$ $\quad z_1^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$

$r = ?$
$r = \sqrt{3^2+7^2}$
$r = \sqrt{58}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{7}{3}\right)$
$\varphi = 66{,}80° = 1{,}1659\,\text{rad}$

$z_1 = \sqrt{58}^6 \cdot (\cos(40{,}8°) + j\sin(40{,}8°))$

$z_1 = 147680 + j \cdot 127512$

Dividieren zwei komplexer Zahlen

$z_1 = a + jb$
$z_2 = c + jd$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd} = \frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{c^2-(jd)^2} = \frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{c^2+d^2}$$

3.3.3 Multiplikationen und Divisionen in Polarform

$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + j\sin(\varphi_1)) = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$
$z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + j\sin(\varphi_2)) = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

3.3.4 Potenzieren

$$z^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

7.51 a) $z = -4+7j$ $\quad z_1 = -j$

$z \cdot z_1 = (-4+7j)\cdot(-j) = 4j - 7j^2 = 4j + 7 = 7 + 4j$

7.63 a) $z_1 = 6+7j$
$z_2 = -j$

$\cancel{r_1 = \sqrt{6^2+7^2}}$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{7}{6}\right)$
$\cancel{r_1 = \sqrt{85}}$ $\quad \varphi_1 = 49{,}3987$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6+7j}{-j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{(6+7)\cdot j}{1} = 6j - 7$

b) $z_1 = 1$
$z_2 = -9+5j$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{-9+5j} \cdot \frac{-9-5j}{-9-5j} = \frac{-9-5j}{81-25j^2} = \frac{-9-5j}{81+25} = \frac{-9-5j}{106} = \frac{-9}{106} - \frac{5}{106}j$$

57. Schulübung am 16.3.2022

Sophie Stöger

3.3.5 Radizieren (Wurzel ziehen)

Aus einer komplexen Zahl z wird die n-te Wurzel gezogen in der man aus ihrem Betrag r die n-te Wurzel zieht und das Argument der Zahl durch n dividiert.

$$\sqrt[n]{(r \cdot \varphi)} = \left(\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi}{n}\right) \quad \text{Hauptwert}$$

Die Nebenwerte erhält man

$$x_j = \sqrt[n]{(r \cdot \varphi)} = \left(\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi + 360° k}{n}\right)$$

mit $k = 0 \ldots n-1$

$k = 0$ liefert Hauptwert

$k = 1, \ldots n-1$ Nebenwert

7.95a) $z = \sqrt[3]{-1-2j} = (\sqrt{5}; 243{,}4349°)$

$r = \sqrt{5}$

$\varphi = 243{,}4349°$

$x_0 = (\sqrt[6]{5}; 81{,}1450°) = \sqrt[6]{5} \cdot (\cos(81{,}1450°) + j\sin(81{,}1450°))$

$x_1 = (\sqrt[6]{5}; 201{,}1450°) = \sqrt[6]{5} \cdot (\cos(201{,}1450°) + j\sin(201{,}1450°))$

$x_2 = (\sqrt[6]{5}; 321{,}1450°) = \sqrt[6]{5} \cdot (\cos(321{,}1450°) + j\sin(321{,}1450°))$