2020随机过程课程Project

说明

1. 本次Project意在鼓励大家通过课程相关知识，从理论推导和建模仿真两个方面解决问题。
2. 第三问为开放性问题，鼓励大家通过不同角度对你认为有意义的问题进行分析，并在一定条件下得到具有适用性的结论或者**针对仿真结果的猜想**。如果觉得问题难度过大/小或者对题目场景下的其他问题感兴趣，可以做必要的说明并替代原有问题。
3. 题目中没有明确定义的地方可以做**自由假设**，在报告中说明假设以及其合理性或必要性即可。
4. 引用他人的学术成果或开源代码应在参考文献中说明。
5. 请大家**在截止日期前于网络学堂提交实验报告和代码文件**。其中，实验报告要求提交pdf文档，至少应包含问题描述、基本原理、符号及假设说明、推导过程、仿真思路及结果、得到的结论及分析等部分，无需在报告中粘贴代码；仿真代码建议使用Python、Matlab等实现，注明运行环境并对代码文件与问题的对应进行必要的说明。
6. 本次Project不限制大家讨论交流，但报告和代码要求独立完成，如果发现抄袭现象，则计0分。

问题介绍

这里介绍一类特殊的随机游走，Elephant Random Walk (ERW)。不同于一维对称随机游走，一维ERW的一般形式定义如下：

> 定义质点第n个时刻的移动记作X_n，位置为S_n。起始点$S_0=0$，在$n=1$时刻，质点以$(q,1-q)$的概率向右/左移动一格，即$S_1=X_1$，之后每个$n+1$时刻，都从之前的动作池$\{X_1,\cdots,X_n\}$中以均匀分布抽样，并以概率$(p,1-p)$决定方向，即
>
> $$X_{n+1}=\begin{cases}+X_k & \textit{with probability} \quad p,\\ -X_k & \textit{with probability} \quad 1-p.\end{cases}$$
>
> 则ERW在第$n+1$时刻位置为$S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$。

1. 推导上述ERW首次到达位置A所需平均步数（或所满足的关系式），并通过理论推导和仿真验证讨论结果与q，p，A的关系。

2. 考虑动作池的记忆有限的情况，即动作池只能保留M次动作，常见的如前向记忆初始的M个动作$\{X_1,\cdots,X_M\}$或后向记忆更新最近的M个动作$\{X_{n-M+1},\cdots,X_n\}$，通过推导和仿真讨论在这类动作记忆受限情形下上述问题的结论。

3. 二选一：

   （1）对于前向记忆动作池受限情形，通过**推导或仿真**讨论$\frac{S_n}{n}$的收敛特性，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$或$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]$，并考虑动作池大小$M$对其影响。

   （2）考虑ERW的渐进特性，通过**推导或仿真**讨论$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$的分布或统计特征。