

单圆柱对高斯脉冲波的散射数值模拟实验

目 录

一. 问题背景	2
二. 控制方程及计算模型	2
2.1 控制方程.....	2
2.2 计算模型.....	3
三. 离散方法	4
四. 边界条件	5
4.1 固壁边界条件.....	5
4.2 远场边界条件.....	8
五. 数值结果与分析	10
5.1 脉冲声波在各个时刻的分布图.....	10
5.2 数值探针 A, B, C 三点的声压随时间的变化	12
5.3 结果分析.....	14
六. 总结	16
参考文献:	17

一. 问题背景

在第二届 CAA workbench 问题中, 第二个问题描述的是螺旋桨噪声在机身上散射的模型, 其中将机身直接简化为圆柱, 噪声简化为高斯脉冲波, 之后观察高斯脉冲波随时间的演变情况, 由于该问题存在解析解, 因此可以很好的检验 CAA 中的数值格式, 边界条件等方法的实效性。具体问题简述如下:

背景平均流动速度为 $0(u=0, v=0)$ 。该问题示意图如图 1 所示, 求解在静止空气中, $t=0$ 时有如下扰动的初值问题:

$$p' = 10^{-3} \exp \left[-\ln 2 \left(\frac{(x-4)^2 + y^2}{0.2^2} \right) \right] \quad (1.1)$$

图中 A,B,C 三点为距离圆柱中心 5 倍直径的三个观测点, 三点与 x 轴的夹角分别为 $90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ 。监测 A, B, C 三点压力随时间的变化, 与解析解进行对比。

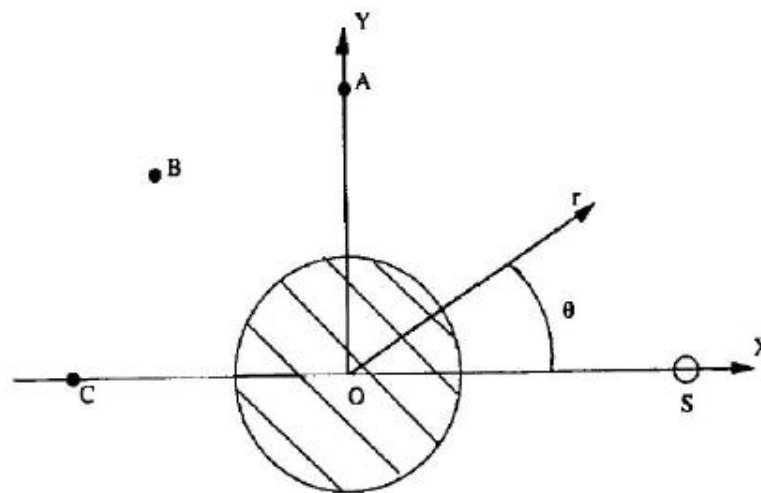


Figure 1 计算模型

针对以上描述问题, 本文将利用 CAA 高精度时间及空间数值格式以及无反射边界条件, 并且结合自己的研究方向-利用浸入式边界方法处理气动弹性问题, 设计计算模型模拟该圆柱散射问题

二. 控制方程及计算模型

2.1 控制方程

通过以上问题描述, 可以知道其背景流场流速为 0, 属于无背景流动的声学散射问题, 这样的问题黏性作用非常小, 因此考虑使用线化 Euler 方程来刻画声

散射过程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = S \end{cases} \quad (2.1)$$

以上 ρ, u, v, p 分别表示无量纲化之后的脉动量, 其中 S 代表源项, 无量纲化特征尺度如下:

- (1) 长度= D (圆柱直径);
- (2) 速度= c (声速);
- (3) 时间= D / c ;
- (4) 密度= ρ (环境密度);
- (5) 压力= ρc^2 。

2.2 计算模型

考虑如图二 (a) 所示的计算模型, 其中中间圆柱界面处施加固壁无滑移边界条件, 外面四个边分别施加 **PML** 边界条件, 对于本问题, 常规思想是采用贴体网格进行计算, 从而在边界处构造速度边界条件。然而对于浸入式物体, 根据 Sirovich^[1]证明, 物体边界对流场的影响可以认为是分布力源的作用, 因此为了避免生成贴体网格的复杂性, 这里将浸入式边界方法 (**Immersed Boundary Method, IBM**) 应用到该无粘可压缩问题中, 通过梁岸^[2]以及蒋永松^[3]的阐述, 根据物体边界处的间断条件, 可以对分布力源进行模化, 将浸入式物体看成是刚性的, 在物体界面处, 仅仅只需满足无穿透边界条件即可, 边界的影响可以通过边界力的方法作用到流场中。于是得到利用 **IB** 刻画该问题的模型如图二 (b) 所示。

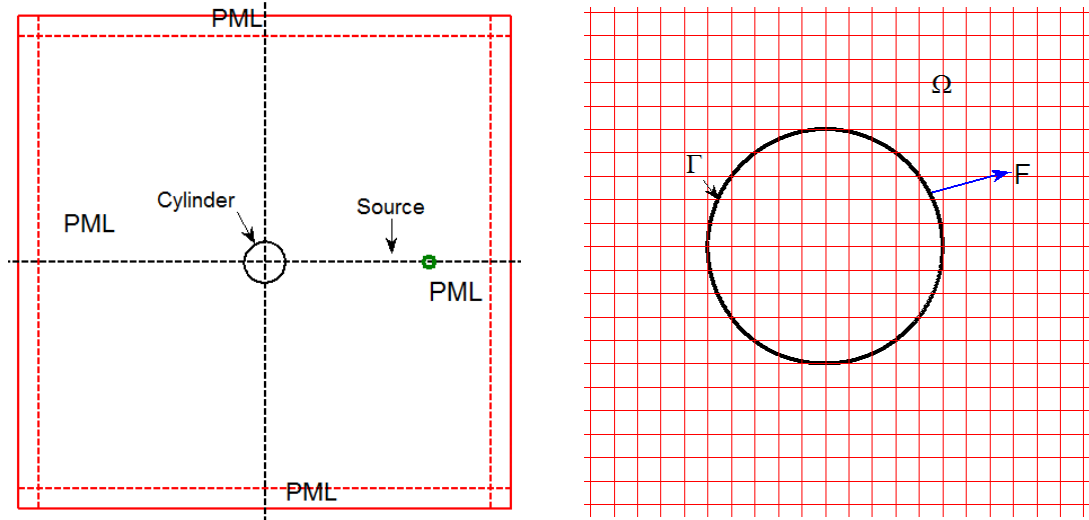


Figure 2 计算模型（左-a， 右-b）

如图 2 中右-b 所示， Ω 代表计算域，为 Cartesian 网格坐标， Γ 代表是物面边界，也是力源构造点， F 代表的是 Lagrange 点对流场中点的作用力，因此计算模型主要由两套网格系统组成，其中背景网格为 Cartesian 网格，用来进行数值离散，这对于 DRP 这类对网格正交性以及光滑性要求非常高的格式非常有利，物面点构成 Lagrange 坐标系，进行力源构造

三. 离散方法

由于声传播过程本质上属于非定常过程，对于数值精度极其敏感，而对于精确刻画非定常过程，特别是对于没有黏性机制的 Euler 方程时间精度和空间要求很高。为此本文将采用 Hu^[4]优化后的低频散低耗散 Runge-Kutta 方法（LDDRK 格式）进行时间推进，使用 Tam 和 Webb^[5]发展的四阶七点 DRP 格式进行空间离散。具体格式如下所示：

对于初值问题

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{U}) \quad (3.1)$$

采用 LDDRK 格式如下：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U^{(n+1)}} &= \overrightarrow{U^{(n)}} + \sum_{j=1}^4 w_j \vec{k}_j \\ \begin{cases} \vec{k}_1 = \vec{F}(U^{(n)})\Delta t \\ \vec{k}_2 = \vec{F}(U^{(n)} + \beta_2 k_1)\Delta t \\ \vec{k}_3 = \vec{F}(U^{(n)} + \beta_3 k_2)\Delta t \\ \vec{k}_4 = \vec{F}(U^{(n)} + \beta_4 k_3)\Delta t \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

系数如下所示：

$$w_1 = w_4 = 0.1630296, w_2 = 0.348012, w_3 = 0.3259288$$

$$\beta_2 = \beta_3 = 0.5, \beta_4 = 1$$

对于空间格式，其形式如下所示：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^3 a_l f_{j+l} \quad (3.1a)$$

其中 $a_0 = 0, a_1 = -a_{-1} = 0.77088238051822552$
 $a_2 = -a_{-2} = -0.166705904414580469, a_3 = -a_{-3} = 0.02084314277031176$

四. 边界条件

4.1 固壁边界条件

1977 年, Peskin 为了模拟心脏瓣膜及血液流动而提出了 IB 方法, IB 方法巧妙地将固壁对流动的影响转化为了作用在流体上的体积力, 其中体积力的大小应该满足流场在固壁处无滑移边界条件, 体积力则由边界构造成线密度形式, 即为奇异力源形式, 通过 δ 函数将边界处的奇异力源分布到流场中。在实际计算时, 为了消除奇异力源, 则一般构造 δ 的光滑型函数形式。此时可以将控制方程(1.1)写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = S \end{cases} \quad (4.1)$$

以上 f_x, f_y 分别表示边界对流体在 x 和 y 方向上的作用力，本质上边界对流体的作用力为表面力，因此可以将 f_x, f_y 写成如下形式：

$$\begin{cases} f_x = \int_s F_x \delta(x - \vec{X}) ds \\ f_y = \int_s F_y \delta(x - \vec{X}) ds \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 F_x, F_y 为边界的线密度力源项，对于 Euler 方程，在固壁处仅仅只需满足无穿透边界条件，因此边界对于流体只存在法向作用力，因此 F_x, F_y 的合力方向与界面的法向相同，为此得到如下关系式：

$$\begin{cases} F_x = F_n n_x \\ F_y = F_n n_y \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 F_n 表示的是边界处的法向力源， n_x, n_y 分别表示界面法向单位向量在 x 和 y 方向上的投影。

对于 F_n 的构造，从物理过程上 F_n 最终通过 f_x, f_y 达成的效果需要使得流体在壁面处的法向速度为 0，为此可以通过 Lagrange 边界点与其对应的 Cartesian 网格系统中的速度差来构造力源形式。其中 Lagrange 边界点对应的 Cartesian 网格点处的流体质点速度可以通过下式计算：

$$\begin{cases} U_x = \int_{\Omega} u_x \delta(x - \vec{X}) d\vec{x} \\ U_y = \int_{\Omega} u_y \delta(x - \vec{X}) d\vec{x} \end{cases} \quad (4.4)$$

狄拉克函数此时为二维函数，然而在数值计算中狄拉克函数往往是无法使用的，此时需要使用一个带有狄拉克函数特征的光滑函数来近似表达，常常我们用帽子函数或者多项式函数来近似代替。对于帽子函数由于其存在指数计算，造成计算量较大，因此在实际使用时往往选择计算量较低的多项式函数，本文选择的是 Peskin 使用的分段光滑函数^[6]，由于 Peskin 使用的近似分布函数具有一阶导数，可以证明使用该种近似方法进行刻画间断问题只有一阶精度，因此在物面边界处将会使用较密的网格，这个在后面通过描述 PPW 数可以看出。下面给出近似狄拉克函数的表达式：

$$\delta_d(\vec{x}) = \frac{1}{d_x d_y} \phi\left(\frac{x}{d_x}\right) \phi\left(\frac{y}{d_y}\right)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4r^2}), & 0 \leq |r| \leq 1 \\ \frac{1}{8}(5-2|r|+\sqrt{-7+12|r|-4r^2}), & 1 \leq |r| \leq 2 \\ 0, & |r| > 2 \end{cases} \quad (4.5)$$

其中 d_x, d_y 为 x 方向和 y 方向上的网格间距，一般取相同值。由以上可以看出分布函数的作用区间为两个网格宽度。

由以上狄拉克函数的近似表达 $\delta_d(\vec{x})$ 可以将(4.2)式写成如下离散形式如下：

$$\begin{cases} f_x(i, j) = \sum_k^N \{F_x(k) \Delta s \delta_d(\vec{x}(i, j) - \vec{X}(k))\} \\ f_y(i, j) = \sum_k^N \{F_y(k) \Delta s \delta_d(\vec{x}(i, j) - \vec{X}(k))\} \end{cases} \quad (4.6)$$

其中 Δs 为离散的 Lagrange 点之间的弧长间距， $f_x(i, j)$ 和 $f_y(i, j)$ 表示 Lagrange 边界点对于 Cartesian 网格点(I, j)的作用力大小，由此引起网格点(I, j)的速度改变量为：

$$\begin{cases} \Delta u(i, j) = f_x(i, j) \Delta t \\ \Delta v(i, j) = f_y(i, j) \Delta t \end{cases} \quad (4.7)$$

而由物面边界法向速度与其 x, y 方向上的分量可得如下关系：

$$U_n = n_x U_x + n_y U_y \quad (4.8)$$

通过狄拉克函数可以得到边界上第 k 点对应的 Cartesian 网格点处的速度存在如下关系：

$$U_n(k) = n_x \sum_{i,j} \{u(i, j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y\} + n_y \sum_{i,j} \{v(i, j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y\} \quad (4.9)$$

其中 u, v 代表的是不考虑边界时求解出的流场速度值，而考虑边界后得到的边界处对应的法向速度值与 Cartesian 网格点中的速度值存在如下关系：

$$0 = U'_n(k) = n_x \sum_{i,j} \{u'(i, j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y\} + n_y \sum_{i,j} \{v'(i, j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y\} \quad (4.10)$$

由式 (4.10) - (4.9) 得到

$$-U_n(k) = n_x \sum_{i,j} \left\{ \Delta u(i,j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y \right\} + n_y \sum_{i,j} \left\{ \Delta v(i,j) \delta_d(\vec{x} - \vec{X}) d_x d_y \right\} \quad (4.11)$$

下面再将式 (4.6) 和式 (4.7) 带入到方程 (4.11) 中得到:

$$\begin{aligned} \frac{0 - U_n(k)}{\Delta t} = & n_x(k) \sum_{i,j} \sum_m F_n(m) n_x(m) \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(m)) \Delta s \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(k)) d_x d_y \\ & + n_y(k) \sum_{i,j} \sum_m F_n(m) n_y(m) \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(m)) \Delta s \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(k)) d_x d_y \end{aligned}$$

化简可以得到如下整齐形式:

$$-\frac{U_n(k)}{\Delta t} = \sum_m \left\{ \left[n_x(m) n_x(k) + n_y(m) n_y(k) \right] \cdot \sum_{i,j} \left[\delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(m)) \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(k)) \Delta s d_x d_y \right] \right\} F_n(m) \quad (4.12)$$

将上式 (4.12) 写成矩阵形式如下:

$$A \vec{F}_n = -\frac{\vec{U}_n}{\Delta t} \quad (4.13)$$

其中矩阵 A 为 $N \times N$ 的矩阵, N 为边界上 Lagrange 点的总数, 其元素为:

$$a_{km} = \left\{ \left[n_x(m) n_x(k) + n_y(m) n_y(k) \right] \cdot \sum_{i,j} \left[\delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(m)) \delta_d(\vec{x}(i,j) - \vec{X}(k)) \Delta s d_x d_y \right] \right\}$$

以上 a_{km} 代表的是第 m 个边界点上的力对第 k 个边界点法向速度的影响。

以上通过方程 (4.13) 即可以求出边界上 Lagrange 点的力源, 之后将求出的力源 F 带入式 (4.6) 和 (4.7) 即可以求出 Cartesian 网格点相对于不考虑物体求解的速度场的修正值, 而下一步压力场则根据速度场自动获得更新, 无需修正。然而在求解中发现, 往往获得的矩阵 A 是奇异的, 为此一般采用奇异矩阵 SVD 分解法求解, 在 Fortran 中可以直接利用 Lapack 程序包中的 Dgelss 函数获得方程解。一般为了减少奇异性的影响, 往往取 $\Delta s = d_x = d_y$, 以上方法叫做 IB 方法中的力源影响矩阵法。

4.2 远场边界条件

模拟机身散射问题时假设的是自由空间, 然而计算域属于一个有界空间, 因此为了避免声波反射从而污染内部声场解, 在这里我们利用 Hu^[6]提出的稳定型 PML 无反射边界条件, 在计算域外构造一层 PML 区, 如图二所示。由此将主控

方程改写成如下 (4.14) 形式, 可以发现对于方程 (4.14) 当 $\sigma_x, \sigma_y = 0$ 时, 方程即退化为原始方程 (4.1), 因此应用 PML 边界条件的关键在于如何选择吸收系数 σ_x, σ_y 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial q_p}{\partial x} + (\sigma_x + \sigma_y)u + \sigma_x \sigma_y q_u = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma_x \frac{\partial q_p}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y)v + \sigma_x \sigma_y q_v = f_y \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial q_u}{\partial x} + \sigma_x \frac{\partial q_v}{\partial y} + (\sigma_x + \sigma_y)p + \sigma_x \sigma_y q_p = 0 \\ \frac{\partial q_u}{\partial t} = u \\ \frac{\partial q_v}{\partial t} = v \\ \frac{\partial q_p}{\partial t} = p \end{array} \right. \quad (4.14)$$

其中 \vec{q} 为辅助变量, 初始时刻可以设为 0。

利用 Hu 在文献[6]中发展的稳定 PML 无反射边界条件中吸收系数的选择方法, 可以得到如下吸收系数表达式:

$$\sigma_x = \sigma_{\max} \left| \frac{x - x_l}{D} \right|^\beta, \sigma_y = \sigma_{\max} \left| \frac{y - y_l}{D} \right|^\beta \quad (4.15)$$

其中 x_l, y_l 表示 PML 区域和非 PML 区域的界面, D 代表 PML 的宽度, 选择 Hu 推荐的经验常数取法: $\beta = 2, \sigma_{\max} d_x = 2$ 。之后通过设定非 PML 区域, $\sigma_x, \sigma_y = 0$, 对于 PML 区域则按照以上 (4.15) 计算吸收系数。然而可以注意到, 利用 IB 方法进行求解时同时还要计算物体内部的声场, 本质上物体内部声场是不需要计算的, 为了保证计算的一致性常常进行统一计算, 对于 CFD 计算中往往由于求解的是粘性方程, 使得流场中的粘性机制可以将物体内部流场耗散掉, 但是对于求解声散射问题, 由于求解的 Euler 方程没有黏性存在, 使得物体内部的内传播往往会污染整个声场, 从而得不到真正物理解。为此我们在物体内部也设置 PML 区域, 其吸收系数表达式如下 (4.16) 所示:

$$\sigma_x = \sigma_{\max} \left| \frac{R_0 - r}{R_0} \right|^\beta, \sigma_y = \sigma_{\max} \left| \frac{R_0 - r}{R_0} \right|^\beta \quad (4.16)$$

其中 σ_{\max}, β 取值和以上相同，式 (4.16) 中 R_0 代表圆柱半径， r 代表的是物体内的 Cartesian 网格点到圆心的距离， $|R_0 - r|$ 代表物体内部点距 PML 区域边界的距离。

在计算的四周运用 PML 吸收域时还涉及到外边界条件，在这里为了计算的稳定采用周期性边界条件，即上下边界和左右边界分别为周期性边界条件。

五. 数值结果与分析

选取计算域为 $[-6, 6] \times [-6, 6]$ 的方形区域，其中圆柱位于中心位置 $(0, 0)$ ，高斯脉冲波位于 $(x_s, y_s) = (4, 0)$ 。在本次数值模拟中网格数量为 553×553 ，由此得到的网格间距为 $\Delta x = 0.0217$ ，根据前面的约定，为了尽量较少矩阵 A 奇异性的影响，我们往往选择 $\Delta s = \Delta x$ ，这里我们最终计算选择 $\Delta s = 0.0218$ ，其中 Lagrange 点的总数为 144。并取 $CFL = 0.5$ ，因此计算可得时间步长 $\Delta t = 0.0109$ ，总共计算时间 $t = 15s$ ，总共计算 1380 步。下面将展现某些时刻下的声场解以及数值探针 A, B, C 处的声压随压力的变化曲线图。

5.1 脉冲声波在各个时刻的分布图

在计算中一共选取了 8 个时刻作为观测点，分别为 $t = 0, t = 2.5, t = 4.5, t = 6.5, t = 8.5, t = 10.5$ ，得到以上时刻的声场分布图如下：

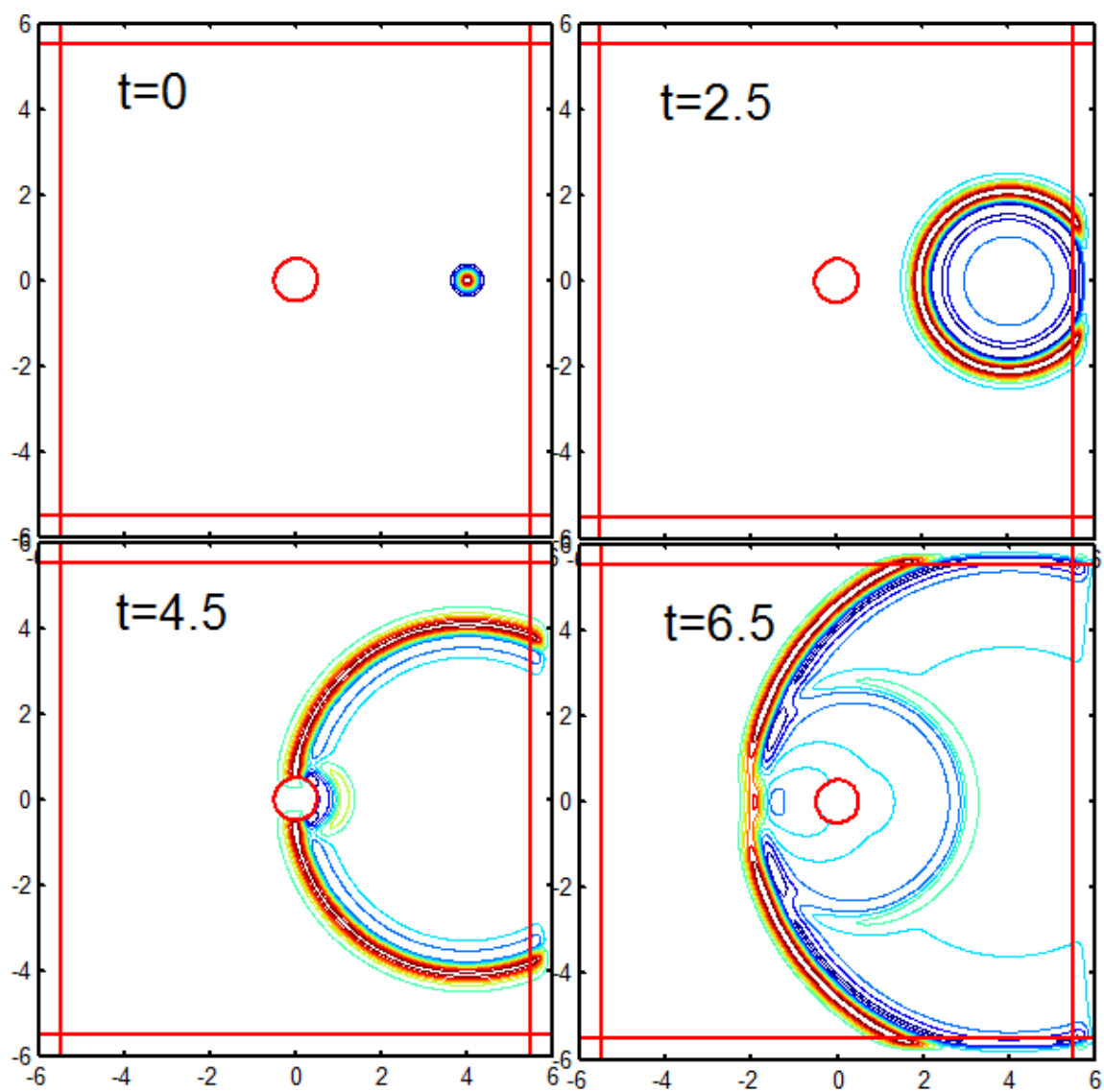


Figure 3 $t=0, 2.5, 4.5, 6.5$ 时刻的声压分布图

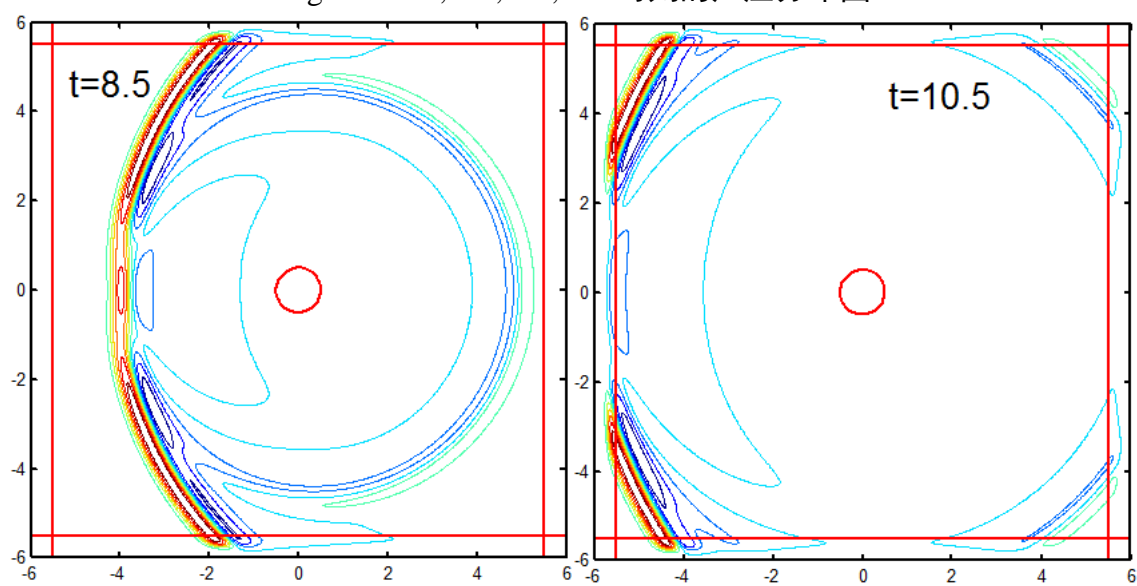


Figure 4 $t=8.5, t=10.5$ 时刻的声压分布

以上再现了声波脉冲从开始传播到击打到圆柱发生散射的过程，从以上声压等高线图可以看出，在外围设置的 PML 区域中声波很好地得到了吸收，内部计算区域的声压登高线依然维持一个圆形，说明声波在边界处并未发生反射；当 $t = 4.5$ 时，声波已经打到圆柱，此时可以看到声波绕过圆柱，其登高线发生融合变化的过程，观察圆柱内部可以发现圆柱内部声波几乎完全被吸收，说明圆柱内部使用的 PML 吸收边界很好的吸收了圆柱内部的内传波，防止了内传播对声场进行污染，说明了本次采用的“IB+DRP+LDDRK+PML”方法能够很好的刻画声散射过程。下面将定量从图线上观察声波盛传过程中数值探针 A, B, C 三点的声压变化曲线图。

5.2 数值探针 A, B, C 三点的声压随时间的变化

数值探针 A, B, C 的选取位置分别为 $(0, 5), (-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}), (-5, 0)$ ，下面通过记录计算时刻 A, B, C 三点的声压值定量校验本次数值实验的准确性，得出如下声压随时间的变化曲线：

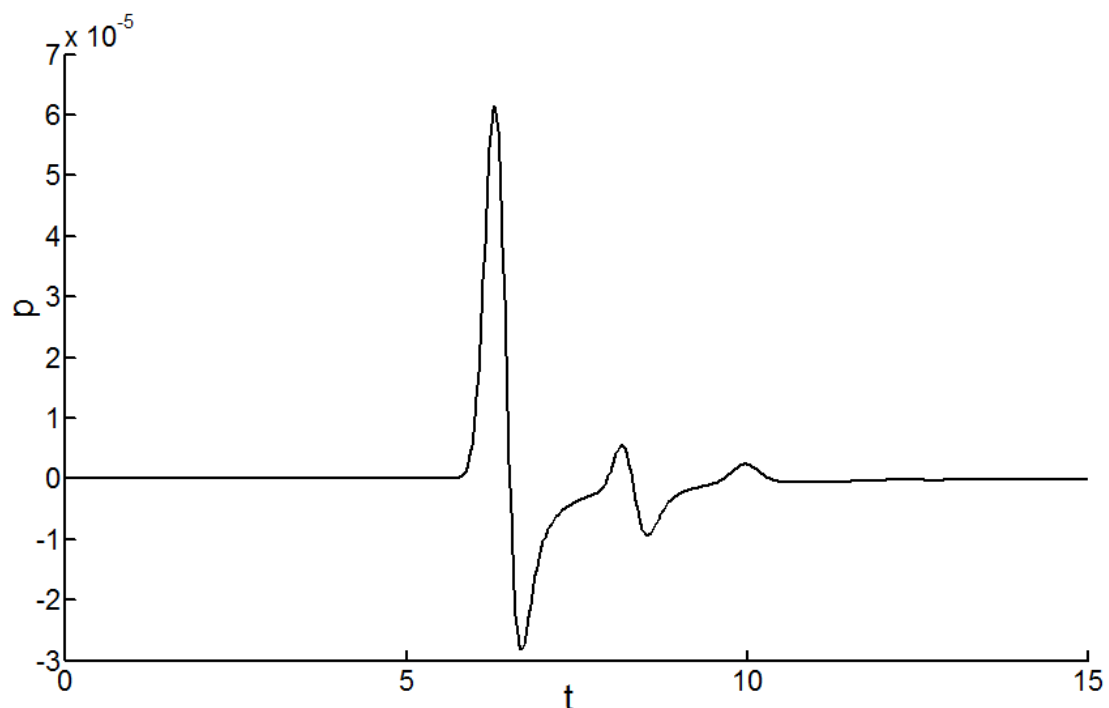


Figure 5 数值探针 A 点声压随时间的变化曲线图

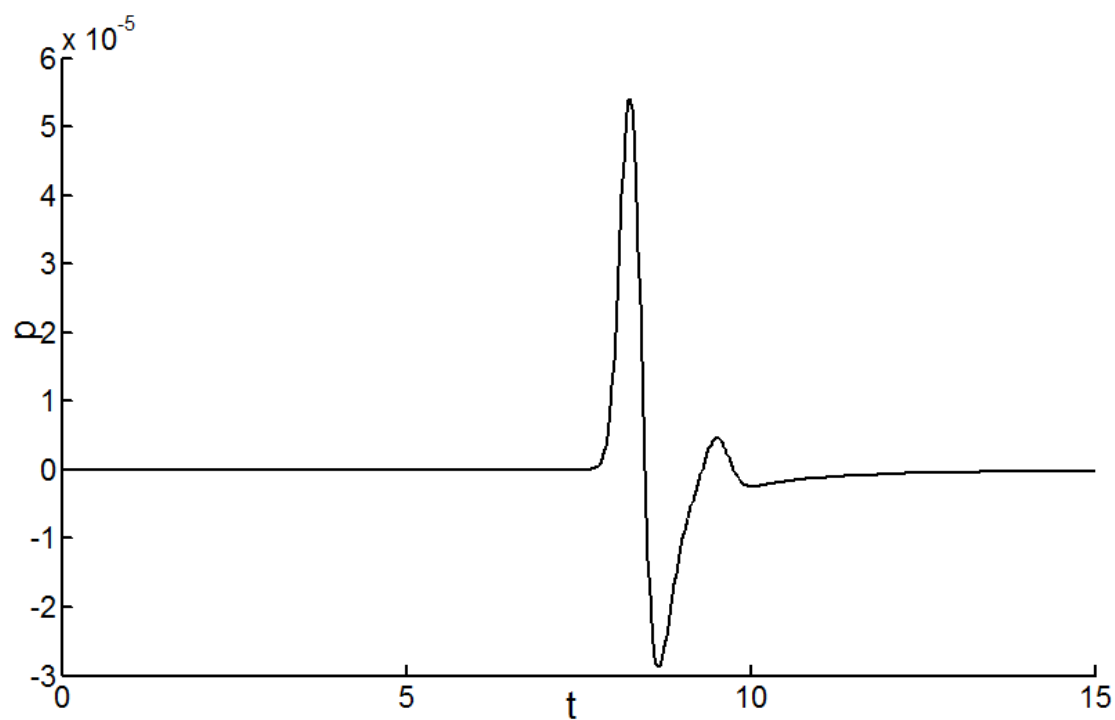


Figure 6 数值探针 B 点声压随时间的变化曲线图

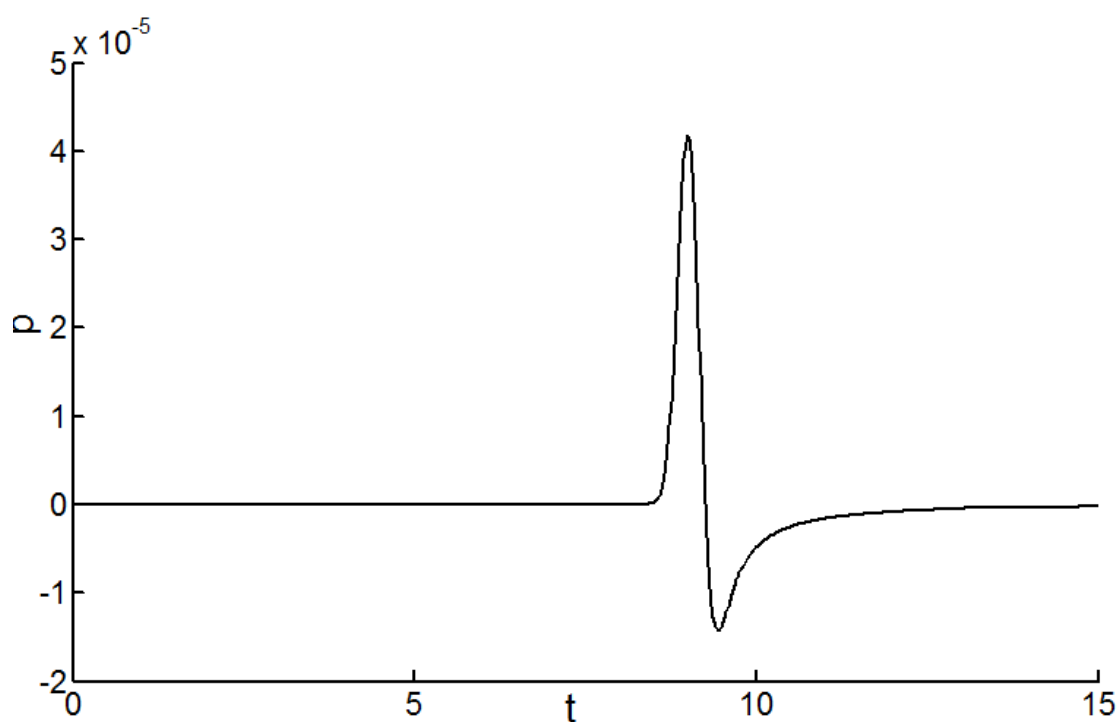


Figure 7 数值探针 C 点声压随时间的变化曲线图

由以上图 5,6,7 可以看出从声脉冲开始传播到最后离开计算域的过程中, A,B,C 三点的声压也由零出现波动后最终趋于零, 说明在声脉冲传播过程中没有伪波产生, 数值模拟效果良好。

5.3 结果分析

(1) 由以上 5.1 和 5.2 可以看出本次数值模拟很好的刻画了脉冲声源传播的过程, PML 无反射边界条件结合 IB 方法很好的满足了远场边界无反射以及圆柱内部内传播耗散要求, 并从数值探针 A, B, C 三点的结果可以看出其声压呈现出波动, 但是最终声波传播过后即又回归零。

(2) 在数值模拟中还可以发现, 本次数值模拟虽然仅仅模拟了 1380 步, 共计 15s, 网格大约 25 万, 但是花费时间是巨大的, 这主要是为了在一阶近似下保持最后的总体数值精度, 因此网格量较大。其次在 IB 计算影响矩阵 A 时, 可以发现矩阵 A 的计算量较大, 在本次 25 万网格中计算矩阵 A 的元素共需循环约 6.34×10^9 次, 大约花费计算机 (Intel Core™ 2 Duo CPU E9=8300@2.83GHz) 近二十分钟。然而当按照梁岸论文[2]中将网格数量设置为 1153×1153 , 此时 Lagrange 点为 301 个, 则计算矩阵 A 中的元素共需 1.2×10^{11} 次循环计算, 此时仅矩阵 A 便需花费四个小时以上, 对于本问题由于圆柱静止, 因此仅需计算一遍矩阵 A 即可, 然而对于运动边界物体的声散射问题, 无疑矩阵 A 的计算将是极大问题。然而我们注意到由于 δ 函数的紧致性, 使得矩阵 A 实则为一带状矩阵, 其大部分元素均为 0, 这些元素是无需计算的, 下面图 5 给出了矩阵 A 的非零元素分布图。

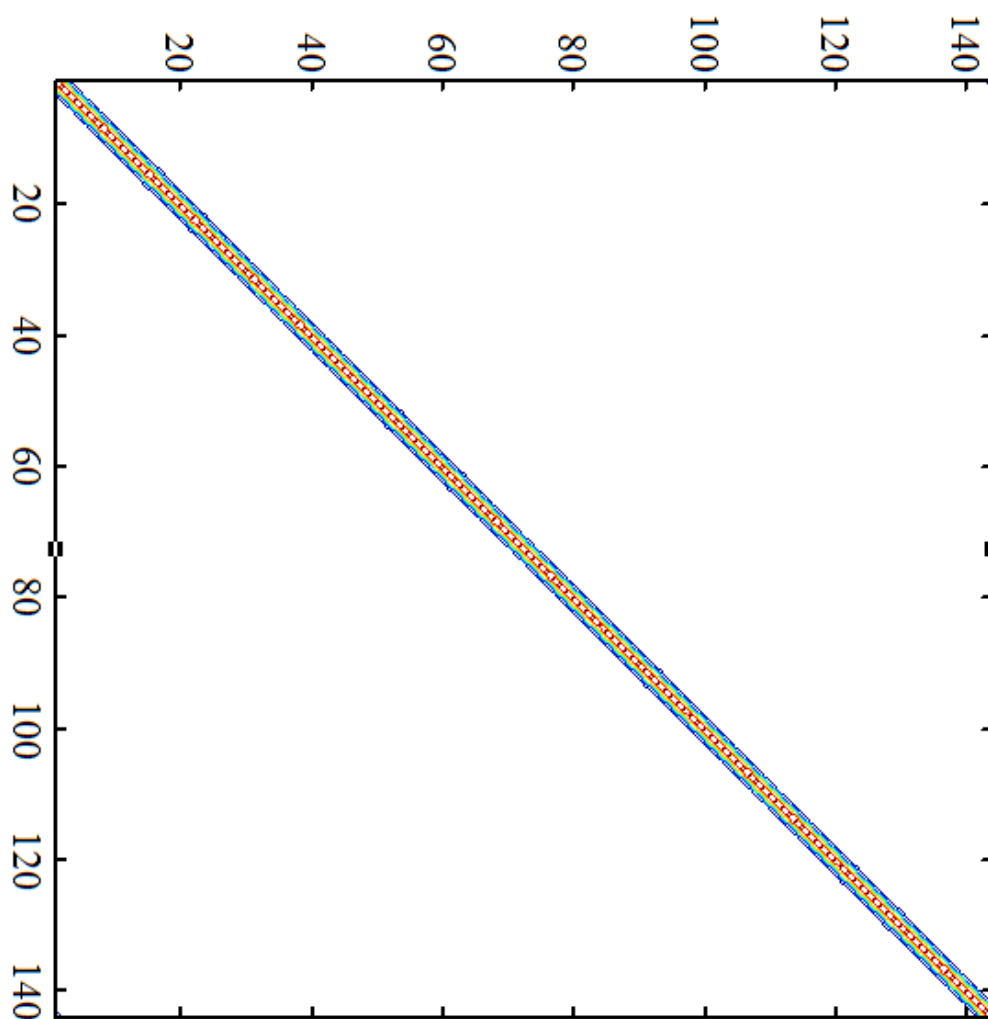


Figure 8 影响矩阵 A 中非零元素分布图

(3) 其中带状部分代表的是矩阵 A 的非零元素部分，如果 δ 函数的近似型函数能够影响的网格间距确定，可以看到非零部分元素仅仅只占到所有元素极少比率，对于本问题约为 5.36%，并且如果网格越密非零部分所占比例将越小。因此如果考虑求解过程中仅仅只求解矩阵 A 的非零部分那么计算量将为原来的 5.36%，此时计算时间完全可以接受，由此看来对于运动边界问题矩阵 A 的计算问题将不会太大，本文使用的影响矩阵方法完全可以推广使用。

(4) 对于本问题的数值模拟中未使用可变人工黏性以及滤波方法，但是仍然得到很好的数值解，进一步说明了 PML 吸收边界以及圆柱内部设置吸收区域对于整个数值模拟中伪波的抑制起到了极大的作用，在此基础上利用浸入式边界方法不但可以避免生成复杂的贴体网格，其良好的正交性也使得 DRP 格式能够发挥最大作用。

六. 总结

对于本文中涉及的第二届 CAA workbench 的问题二, 过去学者们一直采用多块贴体或者重叠网格进行求解, 并得到了不错的结果, 然而对于网格划分或者插值仍然是令人头痛的问题。将浸入式边界方法引入到 CAA 计算中则可以很好的避免复杂网格的划分以及网格划分造成的数值误差, 为此本文利用 CAA 中常用数值格式以及边界条件, 结合了 IB 方法将壁面的影响考虑成体积力, 从而使得方程组封闭, 最后得到了非常理想的结果。总结上文可以得到如下结论:

(1) PML 吸收边界条件能够很好的刻画声散射问题, 并且施加非常方便, 同时利用 PML 吸收边界条件进行物体内部内传波的吸收, 效果非常好;

(2) IB 方法刻画声学问题, 特别是复杂物体的声学散射问题具有极大优势, 但是由于常用的 IB 为一阶精度, 为了减小界面处数值误差, 往往需要划分特别密的网格, 由于 CFL 数的限制, 使得其时间步长一般较小, 计算量较大。因此在后续工作中可以考虑采用隐式时间法进行求解, 并且在壁面附近考虑采用重叠网格从而提高物面处的数值模拟精度;

(3) 本文计算影响矩阵 A 时使用了遍历计算, 这导致计算量极大增加, 然而通过观察矩阵 A 可以发现其为典型的带状矩阵, 带宽由 δ 函数的近似型函数的作用网格宽度决定, 因此对于矩阵 A 的计算应该考虑仅仅计算非零带状元素, 其他非零元素不予计算从而能够极大减少计算量。其中对于本问题中采用的网格数目为 553×553 的情况, 如果仅仅计算矩阵 A 的非零元素, 那么计算时间缩短为原来的 $1/20$ 。

参考文献

- [1] Sirovich L. Initial and boundary value problems in dissipative gas dynamics[J]. *Physics of Fluids* (1958-1988), 1967, 10(1): 24-34.
- [2] 梁岸. 运动边界的数值计算方法及其在气动声学问题中的应用[D]. 北京航空航天大学, 2010.
- [3] 蒋永松. 间断问题高精度算法及复杂几何声散射的浸入式边界计算模型[D]. 北京航空航天大学, 2012.
- [4] Hu F Q, Hussaini M Y, Manthey J L. Low-dissipation and low-dispersion Runge–Kutta schemes for computational acoustics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 124(1): 177-191.
- [5] Tam C K W, Webb J C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics[J]. *Journal of computational physics*, 1993, 107(2): 262-281.
- [6] Hu F Q. A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 173(2): 455-480.
- [7] 李晓东, 高军辉. 计算声学 Lectures.2015.
- [8] K. W. TAM. *Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach*[M].Cambridge, Cambridge University Press. 2012.