

北京理工大学

本科生毕业设计（论文）

动态跟踪定位问题的算法研究

Algorithm Research of Dynamic Tracking Location Problem

学 院：	数学与统计学院
专 业：	信息与计算科学
学生姓名：	于程洋
学 号：	1120170359
指导教师：	李庆娜

2021 年 5 月 20 日

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的毕业设计（论文），是本人在指导老师的指导下独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

特此申明。

本人签名：

日期：

年

月

日

关于使用授权的声明

本人完全了解北京理工大学有关保管、使用毕业设计（论文）的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交本毕业设计（论文）的原件与复印件；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存本毕业设计（论文）；③学校可允许本毕业设计（论文）被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换本毕业设计（论文）；⑤学校可以公布本毕业设计（论文）的全部或部分内容。

本人签名：

日期：

年

月

日

指导老师签名：

日期：

年

月

日

动态跟踪定位问题的算法研究

摘 要

本文……。

摘要正文选用模板中的样式所定义的“正文”，每段落首行缩进 2 个字符；或者手动设置成每段落首行缩进 2 个汉字，字体：宋体，字号：小四，行距：固定值 22 磅，间距：段前、段后均为 0 行。阅后删除此段。

摘要是一篇具有独立性和完整性的短文，应概括而扼要地反映出本论文的主要内容。包括研究目的、研究方法、研究结果和结论等，特别要突出研究结果和结论。中文摘要力求语言精炼准确，本科生毕业设计（论文）摘要建议 300-500 字。摘要中不可出现参考文献、图、表、化学结构式、非公知公用的符号和术语。英文摘要与中文摘要的内容应一致。阅后删除此段。

关键词：北京理工大学；本科生；毕业设计（论文）

Algorithm Research of Dynamic Tracking Location Problem

Abstract

In order to study……

Abstract 正文设置成每段落首行缩进 2 字符，字体：Times New Roman，字号：小四，行距：固定值 22 磅，间距：段前、段后均为 0 行。阅后删除此段。

Key Words: BIT; Undergraduate; Graduation Project (Thesis)

目 录

摘 要	I
Abstract	II
第 1 章 引言	1
1.1 跟踪定位背景介绍	1
1.2 测向定位法（BO）及算法简述	1
第 2 章 基于纯角度信息的单站跟踪定位模型	4
2.1 可观测性分析	5
2.2 跟踪定位模型	8
第 3 章 单站跟踪定位模型的求解算法	14
3.1 OLS 求解算法	14
3.2 TLS 求解算法	15
3.3 MLE 求解算法	17
3.4 AUE 求解算法	18
第 4 章 数值实验	22
结 论	22
参考文献	24
附 录	25
致 谢	27

第1章 引言

1.1 跟踪定位背景介绍

定位技术在现代社会中被广泛应用，对人们的日常生活、勘探作业以及国防事业等都具有重要意义。随着定位技术的发展也产生了不同方式的定位技术，如无线传感网络（WSN）定位技术^{[1][2][3][4]}，通过多个传感器组成的无线通信网络在其监控的区域内实现目标的定位，可以应用于事件检测（火灾、洪水、冰雹），监视（工业，农业）等，定位算法也比较完善。水声定位系统^{[5][6][7][8]}，利用水声探测装置通过测量声源到基元之间的相关信息量实现对声源的定位，根据定位系统的基阵长度可以分为：长基线、短基线和超短基线，通常用于对水下目标的勘察。

除此之外，无源定位与跟踪定位技术在国防事业上的应用具有更为重要的意义^[9]，按照不同定位方法进行划分，无源定位可以分为基于测向的测角定位法、基于测信号到达时间差的时差定位法、基于相对运动产生多普勒频率的频率定位方法，以及这些方法的混合方法。按照定位系统的观测站数量又可划分为单站定位和多站定位。一方面，由于多站定位会存在站间通信稳定、站间信号匹配等方面的问题，而单站定位有着较强的机动性和适应性，另一方面，在固定多站或运动多站的设备受到影响时，定位结果也会受到影响，此时单站定位可以作为补充手段。因此，单站无源定位与跟踪技术的发展显得尤为重要

1.2 测向定位法（BO）及算法简述

单站无源定位跟踪技术是利用一个观测站对目标进行无源定位的技术，由于获得的信息量相对较少，所以实现定位的难度相对较大。在定位时，由观测站对目标进行连续的测量，在获得一定的定位信息后，经过适当的数据处理获得目标的定位信息。

单站跟踪定位在很多应用场合目标是运动的，对于固定的目标观测站可通过连续的运动获得目标的角度信息，再通过三角定位法对其定位，该问题相对简单。本文考虑的场景为运动的目标，根据文献^[10]的第8章，利用对运动的目标的测量信息有可能获得目标位置和运动状态的过程称为目标运动分析（Target Motion Analysis, TMA）。按照观测其的运动方式，TMA 可分为两类，第一类观测站自身是机动的，

第二类观测站无机动运动。对两类观测站应用不同的跟踪定位方法可能会得到不同的定位结果。目前，单站无源跟踪定位技术采用的方法主要有^[11]：到达时间定位法（TOA）、多普勒频率定位法、测向定位法（BO），以及联合信息定位法。然而对于运动的目标只测量单一的信息量通常并不能得到目标的全部运动状态，通常需要联合两种或多种信息量以实现对目标的测量。不过对观测站的运动状态做相应的要求也可以实现对特殊运动状态的目标进行定位跟踪。其中测向定位法的研究较为完善。

测向定位法是单站无源跟踪定位技术中研究最多最主要的一种方法，测向定位法是指仅利用目标相对于观测站的角度信息对目标进行定位。当观测站固定时，文献^[10]中 8.4 节指出对于二维平面上匀速直线运动的目标，只要其运动方向不是径向的，就可以通过三次以上的测量确定目标的运动方向，但是不能得到目标的距离及速度大小。文献^[12]在测角信息的基础上添加径向加速度信息，得出对于非径向运动的匀速运动目标，利用径向加速度信息和角度信息可以实现对目标的定位，并且目标距离越近，相对运动速率越大运动方向越接近切向，其可观测度越高，并且由于观测站与目标轨迹可构成二维平面，故该结论可以推到三维空间。

对于运动的观测站，实质是利用多次观测来拟合目标的运动轨迹，文献^{[13][14]}给出了目标可观测性条件，其中文献^[13]给出了二维平面上匀速直线运动目标可观测的充要条件，文献^[14]给出了三维空间上匀速直线运动目标可观测的充要条件。因此对于满足条件的机动观测站可实现对匀速目标的定位跟踪。

对于纯角度单站无源跟踪定位的算法主要有最小二乘法（LS）、极大似然估计法（MLE）、近似无偏估计法（AUE）以及卡尔曼滤波法（KF）。文献^{[15],[2]}通过对角度信息量的处理，将非线性的测量方程转化为线性方程求解，由此得到了处理角度信息的最小二乘法。文献^[16]推导了二维平面上匀速目标基于奇异值分解（SVD）的总体最小二乘法。文献^[15]通过对角度信息的噪声概率密度函数分析得到其极大似然估计函数，并在考虑加权对位置定位的影响时得到了极大似然估计的迭代算法。文献^[10]中第 9 章中推导了二维平面上基于纯角度信息对匀速运动目标进行定位的极大似然估计的迭代算法。由于在考虑噪声误差的情况下，最小二乘法是有偏估计，文献^[17]提出了二维平面上基于角度的双站无源定位近似无偏估计，与扩展卡尔曼滤波法相比，该方法的收敛速度和误差精度都相对较好。文献^[18]提出了基于角度和时差的双站定位的近似无偏估计算法，结果表明与有偏估计算法相比该算法具有更高的精度。文献^[19]给出了卡尔曼滤波和扩展卡尔曼滤波的方法和原理，卡尔曼滤波对模

型线性的要求较高，无法直接应用于非线性无源定位系统。通过对卡尔曼滤波加以扩展和改进可以得到适应于非线性模型的无源定位系统，扩展卡尔曼滤波（EKF）即可用于解决非线性的无源定位模型。不过在将非线性模型线性化的过程中通常会带来误差，导致收敛不稳定，甚至发散，使其应用受限。文献^[20]基于扩展卡尔曼滤波提出了一种改进算法，该算法可以消除不利误差的影响，并提高定位精度。不过卡尔曼滤波算法计算量相对较大，并且对迭代初值的依赖较大，通常会出现不收敛的情况。

本文研究的问题是基于纯角度的单站跟踪定位算法，并根据上述相关文献推导了三维空间上基于纯角度的匀速运动目标的跟踪定位的相关算法，包括最小二乘法、总体最小二乘法、极大似然估计法和近似无偏估计法。最后通过数值实验比较四种算法的性能。

第2章 基于纯角度信息的单站跟踪定位模型

本文主要讨论三维空间中基于纯角度信息的单站无源跟踪定位问题，关于该问题的模型如下图所示：

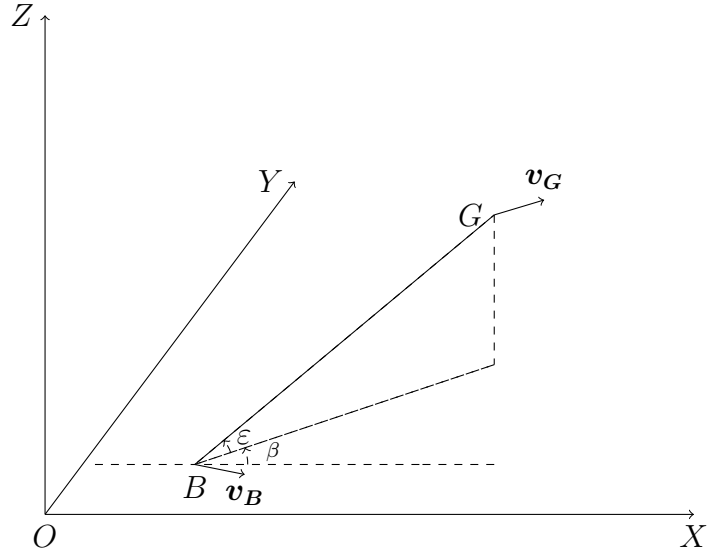


图 2-1 纯角度单站跟踪定位模型示意图

其中， G 表示运动的目标， B 表示运动的观测站， v_G 和 v_B 分别表示目标和观测站运动的速度矢量， ε 表示目标 G 和观测站 B 连线与 XOY 平面形成的夹角，并称之为仰角， β 表示目标 G 在 XOY 平面的投影点和观测站 B 连线与 X 轴正向形成的夹角，并称之为方位角。

在纯角度信息的单站跟踪定位模型中，观测站的运动信息是已知的，观测站每经过时间 T 对运动的目标进行一次测量，得到目标的仰角和方位角测量值，然后根据这些已知信息对目标进行定位跟踪。然而，在多数情况下，单站无源定位在仅有角度信息时只能描述目标所在的方向，无法确定目标的距离，从而也就无法确定目标的实际位置。因此需要对运动目标的可观测性进行分析。

2.1 可观测性分析

假设目标做匀速直线运动,根据文献⁴¹⁰⁴⁰⁴⁰,假设目标 G 的位置坐标为 (r_{Gx}, r_{Gy}, r_{Gz}) , 以速度 (v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}) 匀速运动, 故目标在坐标系下的状态矢量可表示为

$$\mathbf{X}_G = [r_{Gx}, r_{Gy}, r_{Gz}, v_{Gx}, v_{Gy}, v_{Gz}]^T$$

同样的, 观测站的状态矢量可表示为

$$\mathbf{X}_B = [r_{Bx}, r_{By}, r_{Bz}, v_{Bx}, v_{By}, v_{Bz}]^T$$

则目标相对于观测站的状态矢量可表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_G - \mathbf{X}_B = [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z]^T \quad (2-1)$$

从而得到

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{u} \quad (2-2)$$

其中

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \mathbf{u} = [\mathbf{0}, \mathbf{a}^T]^T = [0, 0, 0, a_x, a_y, a_z]^T$$

$\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ 表示观测站的加速度, 对式2-2求积分可得

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{v}(t_0) - \int_{t_0}^t (t - \tau)\mathbf{a}(\tau)d\tau \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbf{a}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中 t_0 表示任意确定的初始时刻。

对于方位角和仰角，根据几何知识可以得到

$$\begin{aligned}\beta &= \arctan \frac{r_y}{r_x} \\ \varepsilon &= \arctan \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}\end{aligned}\tag{2-4}$$

对上式做等价变形可得到（参见附录中 A 部分）

$$H\mathbf{X} = \mathbf{0}\tag{2-5}$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos \beta \cot \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sin \beta \cot \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假定 $\varepsilon \neq 0$ ，在不考虑噪声的情况下，可以精确确定 \mathbf{H} ，根据附录中 B 部分结论可对式 (2-2) 和式 (2-5) 的线性系统进行处理，从而得到可观测性的充分必要条件，即目标可被唯一确定的充分必要条件。

$$\det[C^T C] \neq 0\tag{2-6}$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \dot{C}_0 + C_0 A \\ \dot{C}_1 + C_1 A \\ \dot{C}_2 + C_2 A \\ \dot{C}_3 + C_3 A \\ \dot{C}_4 + C_4 A \end{bmatrix}\tag{2-7}$$

由于 A 和 H 都是稀疏矩阵，可以得到 C 的形式如下

$$C = \begin{bmatrix} I & \mathbf{h}_0 & O & \mathbf{0} \\ O & \mathbf{h}_1 & I & \mathbf{h}_0 \\ O & \mathbf{h}_2 & O & 2\mathbf{h}_1 \\ O & \mathbf{h}_3 & O & 3\mathbf{h}_2 \\ O & \mathbf{h}_4 & O & 4\mathbf{h}_3 \\ O & \mathbf{h}_5 & O & 5\mathbf{h}_4 \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

其中， I 是 2×2 的单位矩阵， O 是 2×2 的零矩阵，并且有

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{d^i(\cos \beta \cot \varepsilon)}{dt^i} \\ \frac{d^i(\sin \beta \cot \varepsilon)}{dt^i} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2-9)$$

将矩阵 C 的第二个和第三个分区列互换，此时 $\det[C^T C]$ 的值并不会改变，在结合行列式简化公式（参见附录中 C 部分）可得到

$$\det[C^T C] = \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{h}'_{i+1} \mathbf{h}_{i+1} & \sum_{i=1}^4 (i+1) \mathbf{h}'_{i+1} \mathbf{h}_i \\ \sum_{i=1}^4 (i+1) \mathbf{h}'_i \mathbf{h}_{i+1} & \sum_{i=1}^4 (i+1)^2 \mathbf{h}'_i \mathbf{h}_i \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

最终得到

$$\begin{aligned} \det[C^T C] = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \{ [(i+1)f_i f_{j+1} - (j+1)f_j f_{i+1}]^2 + 2[(i+1)f_i g_{j+1} - (j+1)g_j f_{i+1}]^2 \\ & + [(i+1)g_i g_{j+1} - (j+1)g_j g_{i+1}]^2 \} \end{aligned} \quad (2-11)$$

由式(2-11)可看出,当且仅当两次求和中至少有一项不完全相同时,才满足 $\det[C^T C] \neq 0$ ，根据附录中 C 部分可以得到满足该条件的充分必要条件为

$$\int_{t_0}^t (t-\tau) \mathbf{a}(\tau) d\tau \neq \alpha(t) [\mathbf{r}(t_0) + (t-t_0) \mathbf{v}(t_0)] \quad (2-12)$$

对任意的标量函数 α 成立

通过以上描述，得到了目标做匀速直线运动时的可观测性条件。本文的以下内容是在可观测的条件下对纯角度的单站无源定位模型进行分析求解。

2.2 跟踪定位模型

假设目标做匀速直线运动，在 k 个时间周期，每个时间周期时间为 T ，观测站从初始时刻（记初始时刻 $t_0 = 0$ ）开始测量目标的方位信息，之后每经过时间周期 T 对目标的方位信息进行一次测量，得到目标相对于观测站的仰角和方位角分别为 ε_i 和 β_i ，其中 $k = 0, 1, 2, \dots, k$

根据图 (2-1) 及几何关系可得：

$$\begin{cases} \beta_i = \arctan \frac{y_i - B_{iy}}{x_i - B_{ix}} & i = 0, 1, 2, \dots, k \\ \varepsilon_i = \arctan \frac{z_i - B_{iz}}{\sqrt{(x_i - B_{ix})^2 + (y_i - B_{iy})^2}} & i = 0, 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (2-13)$$

其中， (B_{ix}, B_{iy}, B_{iz}) 表示观测站 B 在时刻 iT 时的坐标， $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i, z_i, v_x, v_y, v_z)^T$ 表示目标在时刻 iT 时的状态矢量，从而可以由目标在 iT 时刻的状态得到目标在 jT 时刻的状态：

$$\begin{cases} x_j = x_i + v_x(j - i)T \\ y_j = y_i + v_y(j - i)T \\ z_j = z_i + v_z(j - i)T \end{cases} \quad (2-14)$$

其中 $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ 。根据三角函数公式并结合式 (2-14) 可以对式 (2-13) 进行如下变形：

$$\begin{cases} \cos \beta_i(y_j + v_y(i - j)T - B_{iy}) = \sin \beta_i(x_j + v_x(i - j)T - B_{ix}) \\ \sin \varepsilon_i \cos \beta_i(x_j + v_x(i - j)T - B_{ix}) + \sin \varepsilon_i \sin \beta_i(y_j + v_y(i - j)T - B_{iy}) \\ = \cos \varepsilon_i(z_j + v_z(i - j)T - B_{iz}) \end{cases} \quad (2-15)$$

其中 $i = 0, 1, 2, \dots, k, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ 。由于在实际情况中测量角度得到的观测值

可能存在噪声，并不是真实值，即

$$\begin{cases} \beta_{mi} = \beta_i + n_{\beta i} \\ \varepsilon_{mi} = \varepsilon_i + n_{\varepsilon i} \end{cases} \quad (2-16)$$

其中， $\beta_{mi}, \varepsilon_{mi}$ 表示观测值， β_i, ε_i 表示真实值， $n_{\beta i}, n_{\varepsilon i}$ 表示误差值，并假设 $n_{\beta i} \sim N(0, \sigma^2), n_{\varepsilon i} \sim N(0, \sigma^2)$ ，且 $n_{\beta i}, n_{\varepsilon i}$ 相互独立。由 Taylor 展开，令 $n_{\varepsilon i} \rightarrow 0, n_{\beta i} \rightarrow 0$ ，可以得到

$$\begin{cases} \cos \beta_i = \cos \beta_{mi} + \sin \beta_{mi} n_{\beta i} + o(n_{\beta i}) \\ \sin \beta_i = \sin \beta_{mi} - \cos \beta_{mi} n_{\beta i} + o(n_{\beta i}) \\ \cos \varepsilon_i = \cos \varepsilon_{mi} + \sin \varepsilon_{mi} n_{\varepsilon i} + o(n_{\varepsilon i}) \\ \sin \varepsilon_i = \sin \varepsilon_{mi} - \cos \varepsilon_{mi} n_{\varepsilon i} + o(n_{\varepsilon i}) \end{cases} \quad (2-17)$$

当 $n_{\varepsilon i} \rightarrow 0, n_{\beta i} \rightarrow 0$ 时，可得 $o(n_{\beta i}) \approx 0, o(n_{\varepsilon i}) \approx 0, n_{\beta i} n_{\varepsilon i} \approx 0$ ，对这些无穷小量忽略不计，可将式 (2-15) 改写为

$$\begin{cases} -(\sin \beta_{mi} - \cos \beta_{mi} n_{\beta i})x_j + (\cos \beta_{mi} + \sin \beta_{mi} n_{\beta i})y_j \\ -(\sin \beta_{mi} - \cos \beta_{mi} n_{\beta i})(i-j)Tv_x + (\cos \beta_{mi} + \sin \beta_{mi} n_{\beta i})(i-j)Tv_y \\ = -(\sin \beta_{mi} - \cos \beta_{mi} n_{\beta i})B_{ix} + (\cos \beta_{mi} + \sin \beta_{mi} n_{\beta i})B_{iy} \\ -(\sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} + n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi})x_j \\ -(\sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi})y_j \\ +(\cos \varepsilon_{mi} + n_{\varepsilon i} \sin \varepsilon_{mi})z_j \\ -(\sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} + n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi})(i-j)Tv_x \\ -(\sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi})(i-j)Tv_y \\ +(\cos \varepsilon_{mi} + n_{\varepsilon i} \sin \varepsilon_{mi})(i-j)Tv_z \\ = -(\sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} + n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi})B_{ix} \\ -(\sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} - n_{\beta i} \sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} - n_{\varepsilon i} \cos \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi})B_{iy} \\ +(\cos \varepsilon_{mi} + n_{\varepsilon i} \sin \varepsilon_{mi})B_{iz} \end{cases} \quad (2-18)$$

其中 $i = 0, 1, \dots, k, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ 。

将上式的 $2(k+1)$ 个方程放在一起可以得到矩阵方程

$$A\mathbf{X}_j = b \quad (2-19)$$

其中 \mathbf{X}_j 为目标在 jT 时刻的状态矢量，记 $A = [A_1 \ A_2]$ ， $A_1 = [A_{11}^T \ A_{22}^T]^T$ ， $A_2 = [A_{21}^T \ A_{22}^T]$ ， $b = [b_1^T \ b_2^T]$ ，并记 A 为系数矩阵， b 为观测矩阵，具体表示如下：

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{m0} + \cos \beta_{m0} n_{\beta 0} & \cos \beta_{m0} + \sin \beta_{m0} n_{\beta 0} & 0 \\ -\sin \beta_{m1} + \cos \beta_{m1} n_{\beta 1} & \cos \beta_{m1} + \sin \beta_{m1} n_{\beta 1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \beta_{mk} + \cos \beta_{mk} n_{\beta k} & \cos \beta_{mk} + \sin \beta_{mk} n_{\beta k} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} & -\sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} & \cos \varepsilon_{m0} \\ -n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} & +n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} & +n_{\varepsilon 0} \sin \varepsilon_{m0} \\ +n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} & +n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} & \\ -\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} & -\sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} & \cos \varepsilon_{m1} \\ -n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} & +n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} & +n_{\varepsilon 1} \sin \varepsilon_{m1} \\ +n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} & +n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} & -\sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} & \cos \varepsilon_{mk} \\ -n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} & +n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} & +n_{\varepsilon k} \sin \varepsilon_{mk} \\ +n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} & +n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} & \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -(\sin \beta_{m0} - \cos \beta_{m0} n_{\beta 0})(0-j)T & (\cos \beta_{m0} + \sin \beta_{m0} n_{\beta 0})(0-j)T & 0 \\ -(\sin \beta_{m1} - \cos \beta_{m1} n_{\beta 1})(1-j)T & (\cos \beta_{m1} + \sin \beta_{m1} n_{\beta 1})(1-j)T & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sin \beta_{mk} - \cos \beta_{mk} n_{\beta k})(k-j)T & (\cos \beta_{mk} + \sin \beta_{mk} n_{\beta k})(k-j)T & 0 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -(\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} + n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} - n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0})(0-j)T & -(\sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} - n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} - n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0})(0-j)T & (\cos \varepsilon_{m0} + n_{\varepsilon 0} \sin \varepsilon_{m0})(0-j)T \\ -(\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} + n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} - n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1})(1-j)T & -(\sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} - n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} - n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1})(1-j)T & (\cos \varepsilon_{m1} + n_{\varepsilon 1} \sin \varepsilon_{m1})(1-j)T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} + n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} - n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk})(k-j)T & -(\sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} - n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} - n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk})(k-j)T & (\cos \varepsilon_{mk} + n_{\varepsilon k} \sin \varepsilon_{mk})(k-j)T \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -(\sin \beta_{m0} - \cos \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0x} + (\cos \beta_{m0} + \sin \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0y} \\ -(\sin \beta_{m0} - \cos \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0x} + (\cos \beta_{m0} + \sin \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0y} \\ -(\sin \beta_{m0} - \cos \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0x} + (\cos \beta_{m0} + \sin \beta_{m0} n_{\beta 0})B_{0y} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -(\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} + n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} - n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0})B_{0x} \\ -(\sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} - n_{\beta 0} \sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} - n_{\varepsilon 0} \cos \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0})B_{0y} \\ +(\cos \varepsilon_{m0} + n_{\varepsilon 0} \sin \varepsilon_{m0})B_{0z} \\ -(\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} + n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} - n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1})B_{1x} \\ -(\sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} - n_{\beta 1} \sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} - n_{\varepsilon 1} \cos \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1})B_{1y} \\ +(\cos \varepsilon_{m1} + n_{\varepsilon 1} \sin \varepsilon_{m1})B_{1z} \\ \vdots \\ -(\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} + n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} - n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk})B_{kx} \\ -(\sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} - n_{\beta k} \sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} - n_{\varepsilon k} \cos \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk})B_{ky} \\ +(\cos \varepsilon_{mk} + n_{\varepsilon k} \sin \varepsilon_{mk})B_{kz} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

考虑将矩阵 A, b 分解为测量值和误差项的和，即 $A = A^* + \Delta_A, b = b^* + \Delta_b$ ，则有如

下表示：

$$A_1^* = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{m0} & \cos \beta_{m0} & 0 \\ -\sin \beta_{m1} & \cos \beta_{m1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \beta_{mk} & \cos \beta_{mk} & 0 \\ \hline -\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} & -\sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} & \cos \varepsilon_{m0} \\ -\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} & -\sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} & \cos \varepsilon_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} & -\sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} & \cos \varepsilon_{mk} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$$A_2^* = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{m0}(0-j)T & \cos \beta_{m0}(0-j)T & 0 \\ -\sin \beta_{m1}(1-j)T & \cos \beta_{m1}(1-j)T & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \beta_{mk}(k-j)T & \cos \beta_{mk}(k-j)T & 0 \\ \hline -\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0}(0-j)T & -\sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0}(0-j)T & \cos \varepsilon_{m0}(0-j)T \\ -\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1}(1-j)T & -\sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1}(1-j)T & \cos \varepsilon_{m1}(1-j)T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk}(k-j)T & -\sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk}(k-j)T & \cos \varepsilon_{mk}(k-j)T \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

$$b^* = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{m0} B_{0x} + \cos \beta_{m0} B_{0y} \\ -\sin \beta_{m1} B_{1x} + \cos \beta_{m1} B_{1y} \\ \vdots \\ -\sin \beta_{mk} B_{kx} + \cos \beta_{mk} B_{ky} \\ \hline -\sin \varepsilon_{m0} \cos \beta_{m0} B_{0x} - \sin \varepsilon_{m0} \sin \beta_{m0} B_{0y} + \cos \varepsilon_{m0} B_{0z} \\ -\sin \varepsilon_{m1} \cos \beta_{m1} B_{1x} - \sin \varepsilon_{m1} \sin \beta_{m1} B_{1y} + \cos \varepsilon_{m1} B_{1z} \\ \vdots \\ -\sin \varepsilon_{mk} \cos \beta_{mk} B_{kx} - \sin \varepsilon_{mk} \sin \beta_{mk} B_{ky} + \cos \varepsilon_{mk} B_{kz} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

从而式 (2-19) 可以表示为

$$(A^* + \Delta_A)\mathbf{X}_j = b^* + \Delta_b \quad (2-29)$$

经过以上步骤将角度信息量这种非线性问题式 (2-13) 化为线性问题，即式 (2-19)，再将测量值和误差项分解得到式 (2-29)，下面将介绍不同的算法求解目标的状态。

第 3 章 单站跟踪定位模型的求解算法

3.1 OLS 求解算法

普通最小二乘算法（Ordinary Least Squares, OLS）是最常用的求解估计算法，通过最小化误差的平方和求出超定线性方程组的最优解，具体求解过程如下：

$$b = AX + e \quad (3-1)$$

其中 e 为误差项，定义损失函数为

$$J(X) = (b - AX)^T(b - AX) \quad (3-2)$$

为了使得误差得平方和最小，即求解如下问题

$$\min_X J(X) \quad (3-3)$$

令 $J(X)$ 对 X 求导，令导函数为零，求出极值点满足：

$$A^T AX = A^T b \quad (3-4)$$

若矩阵 $A^T A$ 可逆，即 A 列满秩，便可得：

$$X = (A^T A)^{-1}(A^T b) \quad (3-5)$$

利用 OLS 对定位跟踪问题式 (2-19) 进行求解，可以得到目标在时刻 jT 的状态矢量为

$$\mathbf{X}_j = (A^T A)^{-1}(A^T b) \quad (3-6)$$

由于在实际情况中仅能得到目标角度信息的测量值，不能得到真实值，所以目标的状态矢量估计值表示为

$$\hat{\mathbf{X}}_j = (A^{*T} A^*)^{-1}(A^{*T} b^*) \quad (3-7)$$

3.2 TLS 求解算法

通过最小二乘法的求解过程可知，OLS 仅考虑了观测矩阵存在误差，没有考虑系数矩阵存在误差。总体最小二乘法（Total Least Squares, TLS）同时考虑了系数矩阵和观测矩阵存在误差的情况，即考虑矩阵方程为：

$$(A + E)X = b + e \quad (3-8)$$

其中 E, e 分别表示系数矩阵和观测矩阵的误差项，记 $B = [-b \ A], D = [-e \ E]$ ，可得

$$(B + D) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X} \end{bmatrix}_{1 \times (n+1)} = \mathbf{0} \quad (3-9)$$

求解式 (3-9) 的总体最小二乘法可以表示为求解如下问题

$$\min_X \|D\|_F^2 \quad (3-10)$$

若矩阵 B 为满秩矩阵（在可观测的条件下得到的矩阵为满秩矩阵），对矩阵进行奇异值分解，并使对角矩阵的对角元素满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+1}$ ，即

$$B = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} V^H \quad (3-11)$$

为保证式 (3-9) 有非零根，矩阵 $B + D$ 必须为降秩矩阵，又有

$$B = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i v_i^T \quad (3-12)$$

其中， u_i, v_i 分别对应 U, V 的第 i 个列向量，为了满足式 (3-10)，应有

$$D = -\lambda_{n+1} u_{n+1} v_{n+1}^T \quad (3-13)$$

此时可以求得

$$\|D\|_F^2 = \text{tr}(D^T D) = \lambda_{n+1}^2 \quad (3-14)$$

根据式 (3-13) 便可得到

$$(B + D)V = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

根据矩阵相乘可以得到

$$(B + D)v_{n+1} = \mathbf{0} \quad (3-16)$$

由此可以得到

$$\mathbf{X} = \frac{1}{v_{1,n+1}} \begin{bmatrix} v_{2,n+1} \\ v_{3,n+1} \\ \vdots \\ v_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

利用 TLS 算法求解式 (2-29) 可以得到目标的状态矢量的估计值为

$$\hat{\mathbf{X}}_j = \frac{1}{v_{1,7}} \begin{bmatrix} v_{2,7} \\ v_{3,7} \\ \vdots \\ v_{7,7} \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

式 (3-11) 相应变为如下表达式

$$[-b^* \quad A^*] = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} V^H \quad (3-19)$$

3.3 MLE 求解算法

OLS 和 TLS 算法是对式 (2-19) 和式 (2-29) 中的线性方程组进行求解估计，极大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）则是通过对式 (2-16) 的处理进行求解估计。令 $\boldsymbol{\beta}_m = [\beta_{m0}, \beta_{m1}, \dots, \beta_{mk}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_m = [\varepsilon_{m0}, \varepsilon_{m1}, \dots, \varepsilon_{mk}]^T$, $\boldsymbol{\theta}_m = [\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T$, 在测量噪声服从正态分布的情况下, \mathbf{X} 的似然函数为

$$p(\boldsymbol{\theta}_m | \mathbf{X}) = [(2\pi)^{(k+1)} \det W]^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}))^T W^{-1}(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}))] \quad (3-20)$$

其中, $W = \sigma^2 I_{2(k+1) \times 1}$, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})$ 表示真实的角度矢量。对上式对 \mathbf{X} 求导, 并令导函数为零, 可得

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right]^T W^{-1} [\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})] = 0 \quad (3-21)$$

根据式 (2-13) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{X}_j} &= \frac{1}{r_i} \begin{bmatrix} -\sin \beta_i & \cos \beta_i & 0 & -\sin \beta_i(i-j)T & \cos \beta_i(i-j)T & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \mathbf{X}_j} &= \frac{1}{r_i} \begin{bmatrix} -\sin \varepsilon_i \cos \beta_i \\ -\sin \varepsilon_i \sin \beta_i \\ \cos \varepsilon_i \\ -\sin \varepsilon_i \cos \beta_i(i-j)T \\ -\sin \varepsilon_i \sin \beta_i(i-j)T \\ \cos \varepsilon_i(i-j)T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3-22)$$

其中, $r_i = \sqrt{(x_i - B_{ix})^2 + (y_i - B_{iy})^2 + (z_i - B_{iz})^2}$, 由上式可以得到

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}_j)}{\partial \mathbf{X}_j} \right|_{\mathbf{X}_j = \hat{\mathbf{x}}_j} = \hat{R}^{-1} A^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3-23)$$

其中, $A^*(\hat{\theta})$ 即为式 (2-29) 中的 A^* , 并将 $\beta_{mi}, \varepsilon_{mi}$ 换成相应的 $\hat{\beta}_i, \hat{\varepsilon}_i$

$$\hat{R} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \hat{r}_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{r}_k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \hat{r}_k \end{array} \right] \quad (3-24)$$

代入式 (3-21) 可得

$$A^{*T}(\hat{\theta})\hat{R}^{-1}W^{-1}[\theta_m - \hat{\theta}] = 0 \quad (3-25)$$

极大似然估计即为非线性方程组式 (3-25) 的解 $\hat{\mathbf{X}}_j$, 采用高斯-牛顿迭代法求解该非线性方程组, 迭代公式为

$$\mathbf{X}_j^{l+1} = \mathbf{X}_j^l + \mu_l [A^{*T}(\hat{\theta})\hat{R}^{-1}W^{-1}\hat{R}^{-1}A^*(\hat{\theta})]^{-1}A^{*T}(\hat{\theta})\hat{R}^{-1}W^{-1}[\theta_m - \hat{\theta}] \quad (3-26)$$

其中, μ_l 是迭代收敛步长, $\hat{R}, \hat{\theta}$ 是估计值为 \mathbf{X}_j^l 时的计算值。为了保证收敛并提高计算速度, 通常取 OLS 或 TLS 算法得到的估计值作为初值代入上述迭代公式。

3.4 AUE 求解算法

近似无偏估计 (Approximate Unbiased Estimate, AUE) 算法具有更好的估计结果, 相比于有偏估计该方法具有更好的定位精度。下面给出该跟踪定位问题的 AUE 算法, 由于测量误差 $n_{\beta i} \approx 0, n_{\varepsilon i} \approx 0$, 记

$$\begin{aligned} e_i &= -(x_i - B_{ix}) \sin \beta_{mi} + (y_i - B_{iy}) \cos \beta_{mi} \\ &= -(x_i - B_{ix})(\sin \beta_i \cos n_{\beta i} + \cos \beta_i \sin n_{\beta i}) + (y_i - B_{iy})(\cos \beta_i \cos n_{\beta i} - \sin \beta_i \sin n_{\beta i}) \\ &\approx [-(x_i - B_{ix}) \sin \beta_i + (y_i - B_{iy}) \cos \beta_i] + [-(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i - (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] n_{\beta i} \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned}
 f_i &= -\sin \varepsilon_{mi} \cos \beta_{mi} (x_i - B_{ix}) - \sin \varepsilon_{mi} \sin \beta_{mi} (y_i - B_{iy}) + \cos \varepsilon_{mi} (z_i - B_{iz}) \\
 &= -[(x_i - B_{ix})(\cos \beta_i \cos n_{\beta i} - \sin \beta_i \sin n_{\beta i}) + (y_i - B_{iy})(\sin \beta_i \cos n_{\beta i} + \cos \beta_i \sin n_{\beta i})] \sin \varepsilon_{mi} \\
 &\quad + \cos \varepsilon_{mi} (z_i - B_{iz}) \\
 &= -[(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] \cos n_{\beta i} (\sin \varepsilon_i \cos n_{\varepsilon i} + \cos \varepsilon_i \sin n_{\varepsilon i}) \\
 &\quad - [-(x_i - B_{ix}) \sin \beta_i + (y_i - B_{iy}) \cos \beta_i] \sin n_{\beta i} (\sin \varepsilon_i \cos n_{\varepsilon i} + \cos \varepsilon_i \sin n_{\varepsilon i}) \\
 &\quad + (z_i - B_{iz})(\cos \varepsilon_i \cos n_{\varepsilon i} - \sin \varepsilon_i \sin n_{\varepsilon i}) \\
 &\approx \{ -[(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] \sin \varepsilon_i + (z_i - B_{iz}) \cos \varepsilon_i \} \\
 &\quad + [(x_i - B_{ix}) \sin \beta_i - (y_i - B_{iy}) \cos \beta_i] \sin \varepsilon_i n_{\beta i} \\
 &\quad + \{ -[(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] \cos \varepsilon_i - (z_i - B_{iz}) \sin \varepsilon_i \} n_{\varepsilon i}
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

构造代价函数如下

$$\begin{aligned}
 J_1^* &= \sum_{i=0}^k E[e_i^2] = \sum_{i=0}^k [-(x_i - B_{ix}) \sin \beta_i + (y_i - B_{iy}) \cos \beta_i]^2 \\
 &\quad + \sum_{i=0}^k \sigma^2 [(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i]^2 \\
 J_2^* &= \sum_{i=0}^k E[f_i^2] = \sum_{i=0}^k \{ -[(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] \sin \varepsilon_i + (z_i - B_{iz}) \cos \varepsilon_i \}^2 \\
 &\quad + \sum_{i=0}^k \sigma^2 [(x_i - B_{ix}) \sin \beta_i - (y_i - B_{iy}) \cos \beta_i]^2 \sin^2 \varepsilon_i \\
 &\quad + \sum_{i=0}^k \{ [(x_i - B_{ix}) \cos \beta_i + (y_i - B_{iy}) \sin \beta_i] \cos \varepsilon_i + (z_i - B_{iz}) \sin \varepsilon_i \}^2
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

不妨记 J_1^* 中含有 σ^2 的项的和为 \hat{J}_1^* ，其它项的和为 J_1 ，同样的记 J_2^* 中含有 σ^2 的项的和为 \hat{J}_2^* ，其它项的和为 J_2 ，并记

$$J^* = J_1^* + J_2^* = J_1 + J_2 + \hat{J}_1^* + \hat{J}_2^* \tag{3-30}$$

为了得到无偏估计，即为求解 $J_1 + J_2$ 的最小值，并保持 $\hat{J}_1^* + \hat{J}_2^*$ 保持为一个定值。记 $\mathbf{q} = c[\mathbf{X}^T \quad 1]^T$ ，式中 c 为标量。在忽略 c 时，可以得到

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &= \mathbf{q}^T B_0^T B_0 \mathbf{q} \\ J_1^* &= \sigma^2 \mathbf{q}^T B_1^T B_1 \mathbf{q} \\ J_2^* &= \sigma^2 \mathbf{q}^T B_2^T B_2 \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3-31)$$

其中 $B_0 = [A^* \quad -b]$ ，将矩阵角度测量量相应的换为真实值即可，且有

$$B_1 = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 & \cos \beta_0(0-j)T & \sin \beta_0(0-j)T & 0 & -(B_{0x} \cos \beta_0 + B_{0y} \sin \beta_0) \\ \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1(1-j)T & \sin \beta_1(1-j)T & 0 & -(B_{1x} \cos \beta_1 + B_{1y} \sin \beta_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \beta_k & \sin \beta_k & 0 & \cos \beta_k(k-j)T & \sin \beta_k(k-j)T & 0 & -(B_{kx} \cos \beta_k + B_{ky} \sin \beta_k) \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= \begin{bmatrix} \sin \varepsilon_0 \sin \beta_0 & -\sin \varepsilon_0 \cos \beta_0 & 0 \\ \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 & -\sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \varepsilon_k \sin \beta_k & -\sin \varepsilon_k \cos \beta_k & 0 \\ \hline \cos \varepsilon_0 \cos \beta_0 & \cos \varepsilon_0 \sin \beta_0 & \sin \varepsilon_0 \\ \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 & \cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 & \sin \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varepsilon_k \cos \beta_k & \cos \varepsilon_k \sin \beta_k & \sin \varepsilon_k \end{bmatrix} \\ B_{22} &= \begin{bmatrix} \sin \varepsilon_0 \sin \beta_0(0-j)T & -\sin \varepsilon_0 \cos \beta_0(0-j)T & 0 \\ \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1(1-j)T & -\sin \varepsilon_1 \cos \beta_1(1-j)T & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin \varepsilon_k \sin \beta_k(k-j)T & -\sin \varepsilon_k \cos \beta_k(k-j)T & 0 \\ \hline \cos \varepsilon_0 \cos \beta_0(0-j)T & \cos \varepsilon_0 \sin \beta_0(0-j)T & \sin \varepsilon_0(0-j)T \\ \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1(1-j)T & \cos \varepsilon_1 \sin \beta_1(1-j)T & \sin \varepsilon_1(1-j)T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varepsilon_k \cos \beta_k(k-j)T & \cos \varepsilon_k \sin \beta_k(k-j)T & \sin \varepsilon_k(k-j)T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} -B_{0x} \sin \varepsilon_0 \sin \beta_0 + B_{0y} \sin \varepsilon_0 \cos \beta_0 \\ -B_{1x} \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 + B_{1y} \sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 \\ \vdots \\ -B_{kx} \sin \varepsilon_k \sin \beta_k + B_{ky} \sin \varepsilon_k \cos \beta_k \\ -B_{0x} \cos \varepsilon_0 \cos \beta_0 - B_{0y} \cos \varepsilon_0 \sin \beta_0 - B_{0z} \sin \varepsilon_0 \\ -B_{1x} \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 - B_{1y} \cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 - B_{1z} \sin \varepsilon_1 \\ \vdots \\ -B_{kx} \cos \varepsilon_k \cos \beta_k - B_{ky} \cos \varepsilon_k \sin \beta_k - B_{kz} \sin \varepsilon_k \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

则 $B_2 = [B_{21} \ B_{22} \ b_2]$ ，从而可求解如下等式约束优化问题求得近似无偏估计值 $\hat{\mathbf{X}}_j$

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}_j} J_1 + J_2 \\ s.t. \quad J_1^* + j_2^* = \mathbf{q}^T W \mathbf{q} = 1 \end{aligned} \quad (3-35)$$

其中， $W = \sigma^2(B_1^T B_1 + B_2^T B_2)$ ，常数 1 的约束条件是任意给定的，可以通过通过修改标量 c 得到其它常数。对式 (3-35) 利用 Lagrange 乘子法求解，构造辅助函数为

$$L(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbf{q}^T B_0^T B_0 \mathbf{q} + \lambda(1 - \mathbf{q}^T W \mathbf{q}) \quad (3-36)$$

对 $L(\mathbf{q}, \lambda)$ 关于 \mathbf{q} 求导，并令导函数为 0 得

$$B_0^T B_0 \mathbf{q} = \lambda W \mathbf{q} \quad (3-37)$$

从上式可以看出 \mathbf{q} 为矩阵 $[B_0^T B_0 \ W]$ 的广义特征向量，式 (3-37) 两边同时左乘 \mathbf{q}^T 可得

$$\lambda = \mathbf{q}^T B_0^T B_0 \mathbf{q} \quad (3-38)$$

矩阵 $[B_0^T B_0 \ W]$ 最小广义特征值对应的特征向量 \mathbf{q} 即为所求，目标在 jT 时刻的状态矢量即为

$$\mathbf{X}_j = \frac{1}{q_7} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_6 \end{bmatrix}^T \quad (3-39)$$

由于在计算时角度信息真实值是未知的，一般使用测量值代入计算。

第 4 章 数值实验

让观测站在 X 轴上运动，观测站的加速度矢量为 $a = [0.01, 0, 0]^T$ ，初始速度为 0，初始位置为 $B_0 = (5km, 0, 0)$ ，在 $(x_0, y_0, z_0) \in [0, 1000] \times [0, 1000] \times [0, 1000]$ ， $(v_x, v_y, v_z) \in [0, 10] \times [0, 10] \times [0, 10]$ 的范围随机选取 100，做 100 Monte Carlo 实验，并取 $\sigma = 0.0001rad$

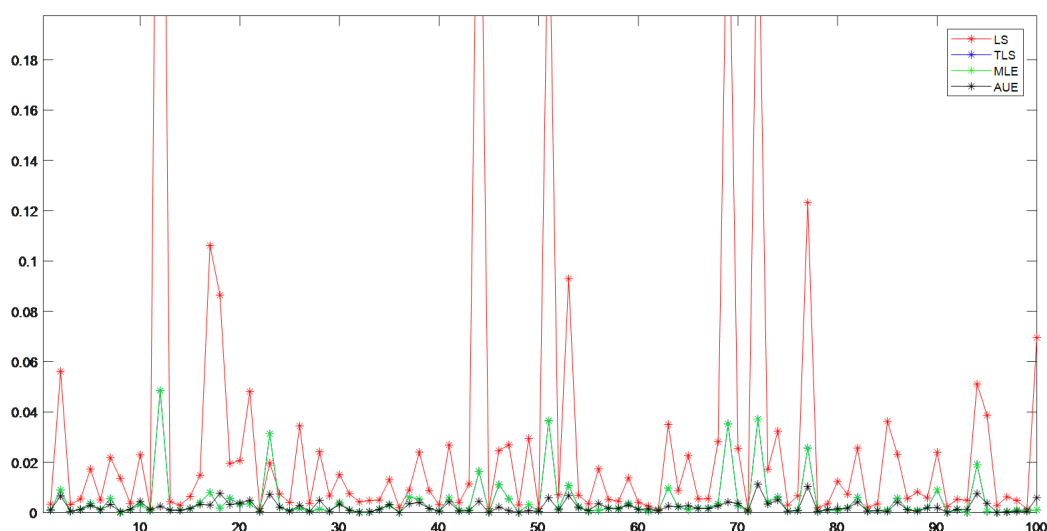


图 4-1 100 次 Monte Carlo 实验算法距离相对误差图

根据上图可以看出，在 100 次 Monte Carlo 实验中，对目标的初始状态 X_0 求解结果的相对误差进行比较。AUE 算法的结果相对较好，且最为稳定，而 OLS 算法的结果在多数情况下表现得较好，但是并不稳定，有时会产生较大的误差。TLS 算法以及使用 TLS 求解估计值做为初值的 MLE 算法的结果相对 OLS 较好，且比 OLS 稳定，但比 AUE 算法的结果较差。

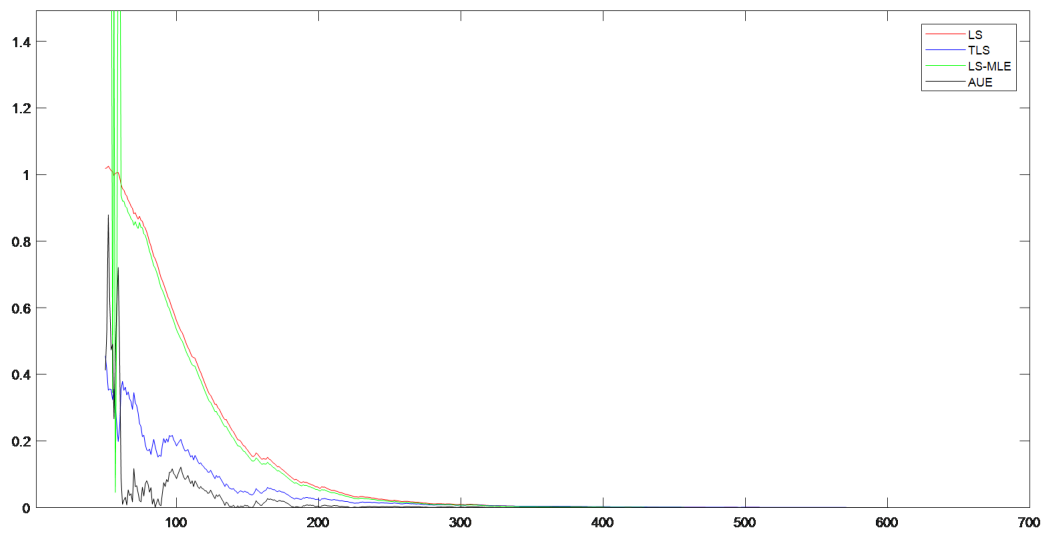


图 4-2 前 k 个时间段求解的距离相对误差图

结 论

参考文献

- [1] Tomic S, Beko M, Dinis R. 3-D Target Localization in Wireless Sensor Networks Using RSS and AoA Measurements[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2017, 66(4): 3197-3210.
- [2] Tomic S, Beko M, Tuba M. A Linear Estimator for Network Localization Using Integrated RSS and AOA Measurements[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(3): 405-409.
- [3] Tomica S, Bekob M, Dinisd R, et al. Distributed algorithm for target localization in wireless sensor networks using RSS and AoA measurements[J]. Pervasive and Mobile Computing, 2016, 37: 63-77.
- [4] Tomica S, Bekob M, Dinisd R, et al. On Target Localization Using Combined RSS and AoA Measurements[J]. Sensors, 2018, 18(4): 1266.
- [5] Qinghua L, Xiaozhen Y, Chunyu J, et al. An Ultra-Short Baseline Underwater Positioning System with Kalman Filtering[J]. Sensors, 2020, 21(1): 143.
- [6] Juan Y, Feng X. A new method for the underwater acoustic positioning: Virtual short baseline positioning[C]//2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. [S.l. : s.n.], 2009: 3910-3913.
- [7] Cheng Q, Wang Y, Zhu G. Data Optimization Algorithm for Short Baseline Acoustic Positioning System based on Substructure of Multi-element Array[C]//OCEANS 2019 - Marseille. [S.l. : s.n.], 2019: 1-5.
- [8] 喻敏, 丁贤君, 张晓亮, 等. 改进的超短基线系统自适应相位差估计器[J]. 兵工学报, 2021: 1-8.
- [9] 谢强. 被动测向单站无源定位与跟踪算法研究与实现[J]. 哈尔滨工程大学, 2019.
- [10] 孙仲康, 郭福成, 冯道旺, 等. 北京: 单站无源定位跟踪技术[J]. 国防工业出版社, 2008.
- [11] 陆效梅. 单站无源定位技术综述[J]. 舰船电子对抗, 2003: 20-23.
- [12] 冯道旺, 李宗华, 周一宇, 等. 一种单站无源定位方法及其可观测性分析[J]. 国防科技大学学报, 2004(01): 68-71.
- [13] Nardone S C, Aidala V J. Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1981, AES-17(2): 162-166.
- [14] Hammel S E, Aidala V J. Observability Requirements for Three-Dimensional Tracking via Angle Measurements[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1985, AES-21(2): 200-207.
- [15] Yi-Chao C. Target Localization Based on Angle of Arrivals[J]. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2007(02): 172-174.
- [16] 夏忠婷, 武洋, 黄苏豫. 基于 SVD-UKF 单站无源定位算法研究[J]. 计算机与数字工程, 2016, 44(03): 445-448.
- [17] 徐本连, 董学平, 王执铨. 一种快速近似无偏的双基阵纯方位目标定位方法[J]. 系统仿真学报, 2005(03): 552-554+562.
- [18] 王鼎, 林四川, 李长胜. 双站基于角度和时差的近似无偏定位算法[J]. 雷达科学与技术, 2008(05): 371-377.
- [19] 李炳荣, 丁善荣, 马强. 扩展卡尔曼滤波在无源定位中的应用研究[J]. 中国电子科学研究院学报, 2011, 6(06): 622-625.
- [20] 马凌, 蒋外文, 张肖霞. 基于改进扩展卡尔曼滤波的单站无源定位算法[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(10): 124-127.

附 录

A

由式 (2-4) 得到

$$0 = r_x \sin \beta - r_y \cos \beta \quad (4-1a)$$

$$0 = r_x \sin \varepsilon \cos \beta + r_y \sin \varepsilon \sin \beta - r_z \cos \varepsilon \quad (4-1b)$$

令式 (4-1a) 等式两边同时乘上 $\sin \beta$ ，式 (4-1b) 等式两边同时乘上 $\cos \beta / \sin \varepsilon$ ，再将结果相加得到

$$0 = r_x - r_z \cos \beta \cot \varepsilon \quad (4-2)$$

再令式 (4-1a) 等式两边同时乘上 $-\cos \beta$ ，式 (4-1b) 等式两边同时乘上 $\sin \beta / \sin \varepsilon$ ，将结果相加得到

$$0 = r_y - r_z \sin \beta \cot \varepsilon \quad (4-3)$$

从而得到

$$HX = 0 \quad (4-4)$$

B

考虑如下线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - \mathbf{w} \quad (4-5)$$

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x}$$

其中 A, H 是给出的连续可微矩阵， \mathbf{w} 是已知向量， \mathbf{x} 是 n 维向量， \mathbf{z} 是测量向量，并且该系统中不存在噪声干扰，视为理想情况。令 $C_0 = H, \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$ ，第一次微分可得

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \dot{C}_0 \mathbf{x} + C_0 \dot{\mathbf{x}} \quad (4-6)$$

将式 (4-5) 中 $\dot{\mathbf{x}}$ 代入上式，并令 $C_1 = \dot{C}_0 + C_0 A, \mathbf{z}_1 = \dot{\mathbf{z}}_0 + C_0 \mathbf{w}$ 可得

$$\mathbf{z}_1 = C_1 \mathbf{x} \quad (4-7)$$

对式 (4-7) 微分并重复上述过程可得

$$\mathbf{z}_2 = C_2 \mathbf{x} \quad (4-8)$$

其中 $C_2 = \dot{C}_1 + C_1 A$, $\mathbf{z}_2 = \dot{\mathbf{z}}_1 + C_1 \mathbf{w}$, 继续并重复上述过程 $n - 2$ 次得到一组独立的关于 \mathbf{x} 的线性方程

$$\mathbf{Z} = C \mathbf{x} \quad (4-9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{n-1}]^T \\ \mathbf{z}_0 &= \mathbf{z} \\ \mathbf{z}_{i+1} &= \dot{\mathbf{z}}_i + C_i \mathbf{w} \quad i = 0, 1, \dots \\ C &= [C_0, C_1, \dots, C_{n-1}]^T \\ C_0 &= H \\ C_{i+1} &= \dot{C}_i + C_i A \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4-10)$$

对式 (4-9) 左乘 C^T 可得

$$C^T \mathbf{Z} = C^T C \mathbf{x} \quad (4-11)$$

则当且仅当 $C^T C$ 是非奇异的, 即 $\det[C^T C] \neq 0$ 时, \mathbf{x} 可以被唯一确定。若 $C^T C$ 是奇异的, 则

$$\mathbf{x} = (C^T C)^* C^T \mathbf{Z} + [I - (C^T C)^* (C^T C)] \mathbf{y} \quad (4-12)$$

其中 $(C^T C)^*$ 是 $C^T C$ 的广义逆, \mathbf{y} 是任意 n 维向量, 故此时 \mathbf{x} 是不唯一的。

致 谢

值此论文完成之际，首先向我的导师……

致谢正文样式与文章正文相同：宋体、小四；行距：22 磅；间距段前段后均为 0 行。阅后删除此段。