Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический Факультет
Кафедра Вычислительной Математики

Лебедь Иван Сергеевич

Методы анализа временных рядов и финансовых котировок

Москва, 2020

Содержание

1. Анализ временных рядов.

1.1. Анализ тренда. `http://statsoft.ru/home/textbook/modules/sttimser.html#systematic`

Не существует автоматического способа обнаружения тренда в временном ряде. Однако если тренд является монотонным, то анализировать такой ряд нетрудно. Если временные ряды содержат значительную ошибку, то первым шагом выделения тренда является сглаживание.

(1) Сглаживание.

Сглаживание включает способ локального усреднения данных, при котором несистематические компоненты взаимно погашают друг друга. Самый общий метод сглаживания - скользящее среднее, в котором каждый член ряда заменяется простым или взвешенным средним n соседних членов, где n - ширина "окна". Вместо среднего можно использовать медиану. Основное преимущество медианного сглаживания, в сравнении со сглаживанием скользящим средним, состоит в том, что результаты становятся более устойчивыми к выбросам. Таким образом, сглаживание медианой обычно приводит к более гладким или более "надежным" кривым, по сравнению со скользящим средним с тем же самым окном. Недостаток медианного сглаживания: при отсутствии явных выбросов, он приводит к более "зубчатым" кривым (чем сглаживание скользящим средним) и не позволяет использовать веса.

Когда ошибка измерения очень большая, используется метод сглаживания методом наименьших квадратов, взвешенных относительно расстояния или метод отрицательного экспоненциально взвешенного сглаживания. Эти методы отфильтровывают шум и преобразуют данные в относительно гладкую кривую. Ряды с относительно небольшим количеством наблюдений и систематическим расположением точек могут быть сглажены с помощью бикубических сплайнов.

(2) Подгонка функции.

Многие монотонные временные ряды можно хорошо приблизить линейной функцией. Если же имеется явная монотонная нелинейная компонента, то данные вначале следует преобразовать, чтобы устранить нелинейность. Обычно для этого используют логарифмическое, экспоненциальное или полиномиальное преобразование данных.

1.2. Анализ сезонности. Периодическая и сезонная зависимость (сезонность) представляет собой другой общий тип компонент временного ряда. Периодическая зависимость может быть формально определена как корреляционная зависимость порядка k между каждым i-м элементом ряда и (i-k)-м элементом (Kendall, 1976). Ее можно измерить с помощью автокорреляции (т.е. корреляции между самими членами ряда); k обычно называют лагом (сдвиг, запаздывание). Если ошибка измерения не слишком большая, то сезонность можно определить визуально, рассматривая поведение членов ряда через каждые k временных единиц.

(1) Автокорреляционная коррелограмма.

Сезонные составляющие временного ряда могут быть найдены с помощью коррелограммы. Коррелограмма (автокоррелограмма) показывает численно и графически автокорреляционную функцию (АКФ), иными словами коэффициенты автокорреляции (и их стандартные ошибки) для последовательности лагов из определенного диапазона (например, от 1 до 30). На коррелограмме обычно отмечается диапазон в размере двух стандартных ошибок на каждом лаге, однако обычно величина автокорреляции более интересна, чем ее надежность, потому что интерес в основном представляют очень сильные (а, следовательно, высоко значимые) автокорреляции (`http://statsoft.ru/home/textbook/esc.html`).

(2) Исследование коррелограмм.

При изучении коррелограмм следует помнить, что автокорреляции последовательных лагов формально зависимы между собой. Если первый член ряда тесно связан со вторым, а второй с третьим, то первый элемент должен также каким-то образом зависеть от третьего и т.д. Это приводит к тому, что периодическая зависимость может существенно измениться после удаления автокорреляций первого порядка (после взятия разности с лагом 1).

(3) Частные автокорреляции.

Исследуем частную автокорреляционную функцию (ЧАКФ), представляющую собой углубление понятия обычной автокорреляционной функции. В ЧАКФ устраняется зависимость между промежуточными наблюдениями (наблюдениями внутри лага). Другими словами, частная автокорреляция на данном лаге аналогична обычной автокорреляции, за исключением того, что при вычислении из нее удаляется влияние автокорреляций с меньшими лагами (см. Бокс и Дженкинс, 1976; см. также McDowall, McCleary, Meidinger, and Hay, 1980). На лаге 1 (когда нет промежуточных элементов внутри лага), частная автокорреляция равна, очевидно, обычной автокорреляции. На самом деле, частная автокорреляция дает более "чистую" картину периодических зависимостей.

(4) Удаление периодической зависимости.

Как отмечалось выше, периодическая составляющая для данного лага k может быть удалена взятием разности соответствующего порядка. Это означает, что из каждого i-го элемента ряда вычитается (i-k)-й элемент. Имеются два довода в пользу таких преобразований. Во-первых, таким образом можно определить скрытые периодические составляющие ряда (Автокорреляции на последовательных лагах зависимы). Поэтому удаление некоторых автокорреляций изменит другие автокорреляции, которые, возможно, подавляли их, и сделает некоторые другие сезонные составляющие более заметными. Во-вторых, удаление сезонных составляющих делает ряд стационарным, что необходимо для применения АРПСС и других методов.

1.3. Авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС)..

(1) Процесс авторегрессии.

Большинство временных рядов содержат элементы, которые последовательно зависят друг от друга. Такую зависимость можно выразить следующим уравнением:

$$x_t = \xi + \phi_1 * x_{t-1} + \phi_2 * x_{t-2} + \cdots + \epsilon$$

где ξ - свободный член, ϕ_i - параметры авторегрессии.

Т.е., каждое наблюдение есть сумма случайной компоненты (случайное воздействие, ϵ) и линейной комбинации предыдущих наблюдений.

Требование стационарности. Процесс авторегрессии будет стационарным только, если его параметры лежат в определенном диапазоне. Например, если имеется только один параметр, то он должен находиться в интервале $-1 < \phi < +1$. Иначе, предыдущие значения будут накапливаться и значения последующих x_t могут быть неограниченными, следовательно, ряд не будет стационарным. Если имеется несколько параметров авторегрессии, то можно определить аналогичные условия, обеспечивающие стационарность (см. например, Бокс и Дженкинс, 1976; Montgomery, 1990).

(2) Процесс скользящего среднего.

В отличие от процесса авторегрессии, в процессе скользящего среднего каждый элемент ряда подвержен суммарному воздействию предыдущих ошибок. В общем виде это можно записать следующим образом:

$$x_t = \mu + \epsilon_t - \theta_1 * \epsilon_{t-1} - \theta_2 * \epsilon_{t-2} - \dots$$

где μ - константа, θ_i - параметры скользящего среднего.

Другими словами, текущее наблюдение ряда представляет собой сумму случайной компоненты (случайное воздействие, ϵ) в данный момент и линейной комбинации случайных воздействий в предыдущие моменты времени.

1.4. Экспоненциальное сглаживание. Экспоненциальное сглаживание - популярный метод прогнозирования многих временных рядов. Исторически метод был независимо открыт Броуном и Холтом. Независимо друг от друга, Броун и Холт открыли экспоненциальное сглаживание для процессов с постоянным трендом, с линейным трендом и для рядов с сезонной составляющей.

Gardner (1985), предложил "единую" классификацию методов экспоненциального сглаживания. Введение в эти методы можно найти в книгах Makridakis, Wheelwright, and McGee (1983), Makridakis and Wheelwright (1989), Montgomery, Johnson, and Gardiner (1990).

1) Простое экспоненциальное сглаживание

Простая модель временного ряда имеет следующий вид: Xt = b + t, где b - константа и ϵ - случайная ошибка. Константа b относительно стабильна на каждом временном интервале, но может также медленно изменяться со временем. Один из интуитивно ясных способов выделения b состоит в том, чтобы использовать сглаживание скользящим средним, в котором последним наблюдениям приписываются большие веса, чем предпоследним, предпоследним большие веса, чем пред-предпоследним и т.д. Простое экспоненциальное именно так и устроено. Здесь более старым наблюдениям приписываются экспоненциально убывающие веса, при этом, в отличие от скользящего среднего, учитываются все предшествующие наблюдения ряда, а не те, что попали в определенное окно. Точная формула простого экспоненциального сглаживания имеет следующий вид:

$$S_t = \alpha * X_t + (1 - \alpha * S_{t-1})$$

Когда эта формула применяется рекурсивно, то каждое новое сглаженное значение (которое является также прогнозом) вычисляется как взвешенное среднее текущего наблюдения и сглаженного ряда. Очевидно, результат сглаживания зависит от параметра α. Если α равно 1, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются. Если α равно 0, то игнорируются текущие наблюдения.

Эмпирические исследования Makridakis и др. (1982; Makridakis, 1983) показали, что весьма часто простое экспоненциальное сглаживание дает достаточно точный прогноз.

2) Сезонная и несезонная модели с трендом или без тренда

   a) Аддитивная и мультипликативная сезонность.

   Многие временные ряды имеют сезонные компоненты. Тогда имеет смысл независимо экспоненциально сгладить сезонную компоненту с дополнительным параметром, обычно обозначаемым δ. Сезонные компоненты могут быть аддитивными или мультипликативными. Например, в течение декабря продажи определенного вида игрушек увеличиваются на 1 миллион долларов каждый год. Для того чтобы учесть сезонное колебание, вы можете добавить в прогноз на каждый декабрь 1 миллион долларов (сверх соответствующего годового среднего). В этом случае сезонность - аддитивная. Альтернативно, пусть в декабре продажи увеличились в 1.4 раза. Тогда, если общие продажи малы, то абсолютное увеличение продаж в декабре тоже относительно мало (процент роста константа). Если в целом продажи большие, то абсолютное увеличение продаж будет пропорционально больше. Снова, в этом случае продажи увеличатся в определенное число раз, и сезонность будет мультипликативной (в данном случае мультипликативная сезонная составляющая была бы равна 1.4).

Параметр сезонного сглаживания δ. В общем, прогноз на один шаг вперед вычисляется следующим образом (для моделей без тренда; для моделей с линейным и экспоненциальным трендом, тренд добавляется):

Аддитивная модель:

$$Prognoz_t = S_t + I_{t-p}$$

Мультипликативная модель:

$$Prognoz_t = S_t * I_{t-p}$$

В этой формуле S_t обозначает (простое) экспоненциально сглаженное значение ряда в момент t, и I_{t-p} обозначает сглаженный сезонный фактор в момент $t-p$ (p - длина сезона). Таким образом, в сравнении с простым экспоненциальным сглаживанием, прогноз "улучшается" добавлением или умножением сезонной компоненты. Эта компонента оценивается независимо с помощью простого экспоненциального сглаживания следующим образом:

Аддитивная модель:

$$I_t = I_{t-p} * \delta * (1-\alpha) * e_t$$

Мультипликативная модель:

$$I_t = I_{t-p} * \delta * (1-\alpha) * e_t / S_t$$

Обратим внимание, что предсказанная сезонная компонента в момент t вычисляется, как соответствующая компонента на последнем сезонном цикле плюс ошибка (e_t, наблюдаемое минус прогнозируемое значение в момент t). Ясно, что параметр δ принимает значения между 0 и 1. Если он равен нулю, то сезонная составляющая на следующем цикле та же, что и на предыдущем. Если δ равен 1, то сезонная составляющая "максимально" меняется на каждом шаге из-за соответствующей ошибки (множитель $(1-\alpha)$ не рассматривается из-за краткости введения). В большинстве случаев, когда сезонность присутствует, оптимальное значение δ лежит между 0 и 1.

b) Линейный, экспоненциальный, демпфированный тренд.

Возвращаясь к примеру с игрушками, мы можем увидеть наличие линейного тренда (например, каждый год продажи увеличивались на 1 миллион), экспоненциального (например, каждый год продажи возрастают в 1.3 раза) или демпфированного тренда (в первом году продажи возросли на 1 млн долларов; во втором увеличение составило только 1.8 по сравнению с предыдущим, т.е. на $800,000$; в следующем году вновь увеличение было только в 1.8, т.е. на $800,000 * .8 = 640,000$ и т.д.). Каждый тип тренда по-своему проявляется в данных. В целом изменение тренда - медленное в течение времени, и опять (как и сезонную компоненту) имеет смысл экспоненциально сгладить его с отдельным параметром (обозначаемым γ - для линейного и экспоненциального тренда, ϕ - для демпфированного тренда).

Параметры сглаживания γ и ϕ. Аналогично сезонной компоненте компонента тренда включается в процесс экспоненциального сглаживания. Сглаживание ее производится в каждый момент времени независимо от других компонент с соответствующими параметрами. Если γ равно 0, то тренд постоянен для всех значений временного ряда (и для всех прогнозов). Если γ равно 1, то тренд "максимально" определяется ошибками наблюдений. Параметр ϕ учитывает, как сильно изменяется тренд, т.е. как быстро он "демпфируется" или, наоборот, возрастает.

1.5. Рекурентные нейорнные сети. `https://ru.wikipedia.org/wiki/\T2A\CYRR\T2A\cyre\T2A\cyrk\T2A\cyru\T2A\cyrr\T2A\cyrr\T2A\cyre\T2A\cyrn\T2A\cyrt\T2A\cyrn\T2A\cyra\T2A\cyrya_\T2A\cyrn\T2A\cyre\T2A\cyrishrt\T2A\cyrr\T2A\cyro\T2A\cyrn\T2A\cyrn\T2A\cyra\T2A\cyrya_\T2A\cyrs\T2A\cyre\T2A\cyrt\T2A\cyrsftsn#\T2A\CYRA\T2A\cyrr\T2A\cyrh\T2A\cyri\T2A\cyrt\T2A\cyre\T2A\cyrk\T2A\cyrt\T2A\cyru\T2A\cyrr\T2A\cyra`

Архитектура.

Существует много разновидностей, решений и конструктивных элементов рекуррентных нейронных сетей.

Трудность рекуррентной сети заключается в том, что если учитывать каждый шаг времени, то становится необходимым для каждого шага времени создавать свой слой нейронов, что вызывает серьёзные вычислительные сложности. Кроме того, многослойные реализации оказываются вычислительно неустойчивыми, так как в них как правило исчезают или зашкаливают веса. Если ограничить расчёт фиксированным временным окном, то полученные модели не будут отражать долгосрочных трендов. Различные подходы пытаются усовершенствовать модель исторической памяти и механизм запоминания и забывания.

Соотвественно есть следующие разновидности рекурентных нейронных сетей:

(1) Полностью рекуррентная сеть.

Это архитектура разработана в 1980-х. Сеть строится из узлов, каждый из которых соединён со всеми другими узлами. У каждого нейрона порог активации меняется со временем и является вещественным числом. Каждое соединение имеет переменный вещественный вес. Узлы разделяются на входные, выходные и скрытые.

Для обучения с учителем с дискретным временем, каждый шаг времени на входные узлы подаются данные, а прочие узлы завершают свою активацию, и выходные сигналы готовятся для передачи нейроном следующего уровня. Если например сеть отвечает за распознавание речи, в результате на выходные узлы поступают уже метки (распознанные слова).

В обучении с подкреплением (reinforcement learning) нет учителя, обеспечивающего целевые сигналы для сети, вместо этого иногда используется функция приспособленности (годности) или функция оценки (reward function), по которой проводится оценка качества работы сети, при этом значения на выходе оказывает влияние на поведение сети на входе.

Каждая цепочка вычисляет ошибку как суммарную девиацию по выходным сигналам сети. Если имеется набор образцов обучения, ошибка вычисляется с учётом ошибок каждого отдельного образца.

(2) Рекурсивная сеть.

Рекурсивные нейронные сети представляют собой более общий случай рекуррентных сетей, когда сигнал в сети проходит через структуру в виде дерева (обычно бинарные деревья).Те же самые матрицы весов используются рекурсивно по всему графу в соответствии с его топологией. Рекурсивные нейронные сети находят применение в задачах обработки естественного языка. Существуют также тензорные рекурсивные нейронные сети (RNTN, Recursive Neural Tensor Network), которые используют тензорные функции для всех узлов в дереве.

(3) Нейронная сеть Хопфилда.

Сеть Хопфилда — это такой тип рекуррентной сети, когда все соединения симметричны. Изобретена Джоном Хопфилдом в 1982 году и гарантируется, что динамика такой сети сходится к одному из положений равновесия. Если при создании соединений используют обучение Хебба, то сеть Хопфилда может работать как надежная ассоциативная память, устойчивая к изменению подключений.

(4) Двунаправленная ассоциативная память (BAM)

Вариацией сети Хопфилда является двунаправленная ассоциативная память (BAM). BAM имеет два слоя, каждый из которых может выступать в качестве входного, находить (вспоминать) ассоциацию и генерировать результат для другого слоя. Rául Rojas. [в «Книгах Google» Neural networks: a systematic introduction] (англ.). — Springer, 1996. — P. 336. — ISBN 978-3-540-60505-8.

(5) Сети Элмана и Джордана.

Нейронная сеть Элмана представляет из себя трёхслойную нейронную сеть, слои которой называются на иллюстрации x, y, и z.

Дополнительно к сети добавлен набор «контекстных блоков» (u на иллюстрации). Средний (скрытый) слой соединён с контекстными блоками с фиксированным весом, равным единице. С каждым шагом времени на вход поступает информация, которая проходит прямой ход к выходному слою в соответствии с правилами обучения. Фиксированные обратные связи сохраняют предыдущие значения скрытого слоя в контекстных блоках (до того как скрытый слой поменяет значение в процессе обучения).

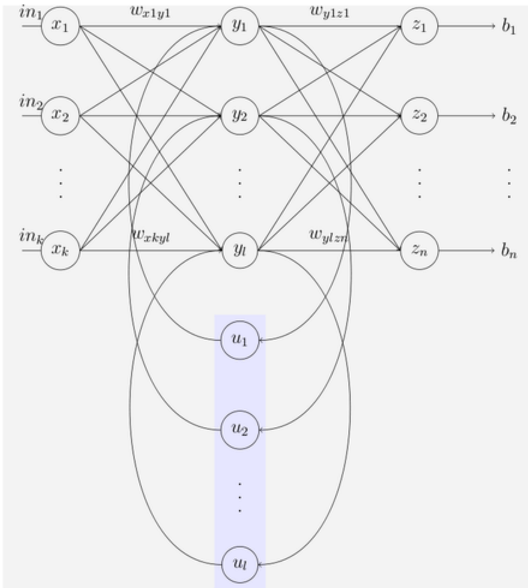

Figure 1: Сети Элмана и Джордана

Таким способом сеть сохраняет своё состояние, что может использоваться в предсказании последовательностей, выходя за пределы мощности многослойного перцептрона.

Нейронная сеть Джордана подобна сети Элмана. Однако контекстные блоки связаны не со скрытым слоем, а с выходным слоем. Контекстные блоки таким образом сохраняют своё состояние. Они обладают рекуррентной связью с собой.

Сети Элмана и Джордана называют также «простыми рекуррентными сетями» (SRN).

Сеть Элмана:

$$h_t = \sigma_h(W_h x_t + U_h h_{t-1} + b_h)$$

$$y_t = \sigma_y(W_y h_t + b_y)$$

Сеть Джордана:

$$h_t = \sigma_h(W_h x_t + U_h y_{t-1} + b_h)$$

$$y_t = \sigma_y(W_y h_t + b_y)$$

Обозначения:

x_t - вектор входого слоя

h_t - вектор скрытого слоя

y_t - вектор выходного слоя

W, U, b - матрица и вектор параметров

σ_h, σ_y - функции активации

(6) Эхо-сети.

Эхо-сеть (англ. echo state network; ESN) характеризуется одним скрытым слоем (который называется резервуаром) со случайными редкими связями между нейронами. При этом связи внутри резервуара фиксированы, но связи с выходным слоем подлежат обучению. Состояние резервуара (state) вычисляется через предыдущие состояния резервуара, а также предыдущие состояния входного и выходного сигналов. Так как эхо-сети обладают только одним скрытым слоем, они обладают достаточно низкой вычислительной сложностью, однако качество моделирования сильно зависит от начальных установок, которые грубо говоря случайны. Эхо-сети хорошо работают, воспроизводя временные ряды. Вариацией эхо-сетей являются импульсные (спайковые) нейронные сети, известные также как жидкие нейронные сети ("жидкие" сети названы с использование метафоры расходящихся кругов по воде от падения камешка, что характеризует кратковременную память от входного события).

2. Японсикие свечи.

2.1. Описание. Японские свечи - способ представления графика финансовых котировок. Свеча отражает максимальную и минимальную цены за период и цены открытия и закрытия периода. При этом свеча закрашивается черным цветы, если цена открытия была больше цены закрытия. В противном случае свеча закрашивается белым (или красным) цветом.

3. Индексы.

3.1. Примеры.

(1) Абсолютный индекс ширины (ABI) — это динамический индикатор рынка. ABI показывает уровень активности, волатильности и изменений на Нью-йоркской фондовой бирже без учета направления движения цен. ABI можно

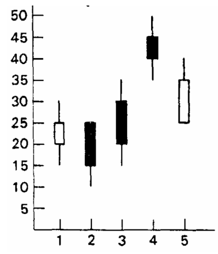

Figure 2: Японские свечи

рассматривать как «индекс активности». Его высокие значения отражают высокую рыночную активность и изменчивость, а низкие свидетельствуют о "вялости" рынка.

Абсолютный индекс ширины представляет собой абсолютное значение разности между числом выросших и упавших в цене акций на торгах Нью-йоркской фондовой биржи

(2) Индекс Армса (ARMS INDEX) — это рыночный индикатор, показывающий соотношение между количеством выросших или упавших в цене акций (растущие/падающие акции) и объемом по выросшим или упавшим в цене акциям (растущий/падающий объем). Он рассчитывается путем деления коэффициента роста/падения на коэффициент растущего/падающего объема.

(3) Индекс баланса неполных лотов (OLBI) — это психологический индикатор рынка, который показывает отношение объема продаж неполными лотами к объему покупок неполными лотами. Считается, что торговцы неполными лотами, то есть самые мелкие участники рынка, плохо ориентируются в рыночной конъюнктуре.

(4) Балансовый объем (OBV) — это динамический индикатор, соотносящий объем торгов и изменение цены. Индикатор балансового объема определяют путем добавления дневного объема торгов к накопленному значению, если цена закрытия бумаги выше предыдущей, и путем вычитания дневного объема, если она ниже предыдущей.

Если сегодняшняя цена закрытия выше вчерашней, то:

$$OBV = OBV_{yesterday} + OBV_{today}$$

. Если сегодняшняя цена закрытия ниже вчерашней, то:

$$OBV = OBV_{yesterday} - OBV_{today}$$

Если сегодняшняя цена закрытия равна вчерашней, то:

$$OBV = OBV_{yesterday}$$

(5) Вертикальный горизонтальный фильтр (VHF) показывает, в какой фазе находится рынок: в фазе направленного движения или застоя.

$$VHF = \frac{|HCP - LCP|}{\sum_{i=1}^{n} |CP_i - CP_{i-1}|}$$

где HCP - высшая цена закрытия за n периодов

LCP - низшая цена закрытия за n периодов

CP_i - цена закрытия i-ого периода

(6) Индекс относительной силы (RSI) — один из самых популярных осцилляторов.

$$RSI = 100 - \frac{100}{1 + \frac{U}{D}}$$

где U - среднее значение положительных ценовых изменений.

D — среднее значение отрицательных ценовых изменений.

(7) Индекс массы (MASS INDEX) предназначен для выявления разворотов тенденции на основе изменений ширины диапазона между максимальной и минимальной ценами. Если диапазон расширяется, индекс массы увеличивается, если сужается — индекс уменьшается.

Для расчета индекса массы необходимо: 1. Рассчитать 9-дневное экспоненциальное скользящее среднее (EMA) разности между максимальными и минимальными ценами. 2. Рассчитать 9-дневное экспоненциальное скользящее среднее скользящего среднего, полученного по п. 1. 3. Разделить значение скользящего среднего по п. 1 на значение скользящего среднего по п.2. 4. Суммировать значения по п.3 для числа n периодов в индексе массы:

$$MASSINDEX = \sum_{i=1}^{n} \frac{9 - daysEMAof(max - min)}{9 - daysEMAof9 - daysEMAof(max - min)}$$

4. Быстрое преобразование Фурье (FFT)

алгоритм ускоренного вычисления дискретного преобразования Фурье, позволяющий получить результат за время, меньшее чем $O(N^2)$ (требуемого для прямого, поформульного вычисления).

Выполнение быстрого преобразования Фурье чрезвычайно эффективно. Однако существует несколько моментов, которые надо помнить при анализе рядов большого размера.

Как упоминалось ранее, для применения стандартного (и наиболее эффективного) алгоритма БПФ требуется, чтобы длина исходного ряда была равна степени 2. Если это не так, должны быть проведены дополнительные вычисления. Будут использоваться простые точные вычислительные формулы, пока исходный ряд относительно мал, и вычисления можно выполнить за относительно короткое время. Для длинных временных рядов, чтобы применить алгоритм БПФ, используется основной подход, описанный Monro и Branch (1976). Этот метод требует значительно больше памяти; однако ряд рассматриваемой длины может анализироваться все еще очень быстро, даже если число наблюдений не является степенью 2.

Для временных рядов, длина которых не равна степени 2, можно сделать следующее: для анализа средних и больших рядов (например, содержащих свыше 100,000 наблюдений), добавим в ряд константы (например нули) до тех пор, пока длина ряда не станет степенью 2 и затем применим косинус-сглаживание ряда в разведочной части анализа наших данных.