Эффективные методы глобальной оптимизации для решения задач оптимального управления

К.А. Баркалов М.А. Кочеганова С.А. Бевзюк А.А. Федюков

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Задача поиска H_∞-динамического регулятора

Рассматривается задача поиска H_∞ -динамического регулятора для обратного маятника с подвижным основанием.

$$\dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u \qquad (1)$$

Известно [1], что для существования регулятора с наименьшим уровнем гашения возмущений $\gamma > 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая двум матричным неравенствам, одно из которых не является выпуклым, т.к. зависит от обратной матрицы X^{-1}:

$$W_P^T \begin{bmatrix} A_0^T X + XA_0 & XB_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & 0 \\ C_0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} W_P < 0 \qquad (2)$$

$$W_R^T \begin{bmatrix} X^{-1}A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1}C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & 0 \\ C_0 X^{-1} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} W_R < 0 \qquad (3)$$

Возникает задача поиска минимального значения γ при ограничениях (2) и (3). Причем неравенство (3) не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства, т.е. данную задачу нельзя решить стандартными методами выпуклой оптимизации в сочетании с методами решения линейных матричных неравенств, реализованными, например, в MATLAB Robust Toolbox. Требуется использование методов, обладающих сходимостью к глобальному экстремуму.

Задача глобальной оптимизации

Общая постановка задачи глобальной оптимизации с ограничениями:

$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y) : y \in D\},\ D = \{x \in \mathbf{R}^n : g_j(x) \leqslant 0, j = \overline{1, m}\}$$

Предполагается, что все функции задачи удовлетворяют условию Липшица:

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant L\|y_1 - y_2\|,\ y_1, y_2 \in D,\ 0 < L < \infty$$

Целевая функция и ограничения могут быть невыпуклы, многоэкстремальны, недифференцируемы.

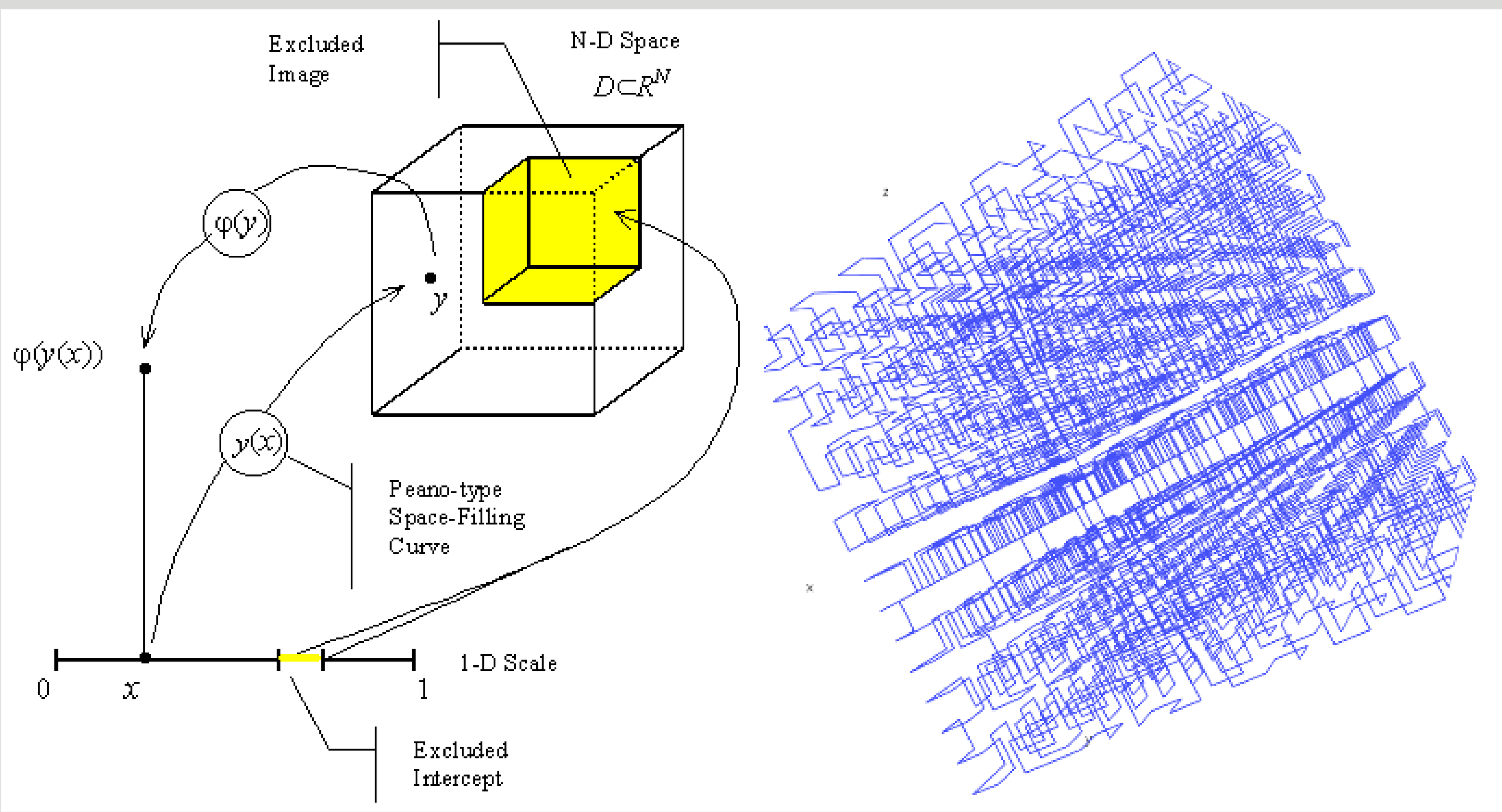
Метод глобальной оптимизации

Задача оптимизации решается Алгоритмом Глобального Поиска (АГП), предложенным Р.Г. Стронгиным [2]. При этом решение многомерной задачи сводится к решению эквивалентной ей одномерной задачи с помощью развертки Пеано, отображающей отрезок $[0, 1]$ на гиперкуб D.

Общая схема одной итерации одномерного метода:

1. Упорядочить точки предшествующих испытаний в порядке возрастания их координат: $a = x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = b$.
2. Вычислить для каждого интервала $(x_{i-1}; x_i)$, $1 \leq i \leq k$ характеристику $R(i)$.
3. Определить интервал $(x_{t-1}; x_t)$, которому соответствует максимальная характеристика $R(t) = \max\{R(i), 1 \leq i \leq k\}$.
4. Провести следующее испытание в точке $x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}; x_t)$, где $d(t)$ — правило размещения точки следующего испытания в интервале с номером t.
5. Проверить выполнение критерия остановки $x_t - x_{t-1} < \varepsilon$.

Подробное описание АГП, а также специальной схемы учёта ограничений (без использования штрафных функций) можно найти в [2].



Параллельные версии метода оптимизации

Существует несколько способов распарелleливания алгоритма глобального поиска (АГП):

- Распараллеливание по характеристикам в рамках системы с общей памятью. На шаге 2 вместо одного интервала выбираются p интервалов с наилучшими характеристиками и в них параллельно проводятся испытания.
- Распараллеливание по развёрткам в рамках системы с раздельной памятью. На каждом узле системы работает копия метода, использующая уникальную развёртку. Копии метода обмениваются многомерными точками, однако одномерные прообразы этих точек различны для каждого метода. При использовании L развёрток каждый метод дополнительно получает $L - 1$ точку в свою поисковую информацию на каждой итерации, что ускоряет его сходимость.
- Сочетание указанных выше подходов.

В [3] перечисленные схемы описаны более подробно.

Результаты

Решена модельная задача, связанная со стабилизацией плоского перевернутого маятника с подвижным основанием. Найдены параметры регулятора θ и соответствующее им минимальное значение уровня гашения возмущений γ. Размерность (число параметров) возникающей при этом задачи глобальной оптимизации $N = 7$.

Таблица 1: Сравнение последовательного и параллельного алгоритма

Алгоритм	Время решения задачи (сек.)
Последовательный алгоритм	125
Параллельный алгоритм (4 ядра)	82
Ускорение	1.5

Эксперименты проводились в системе Globalizer [4] на узле кластера «Лобачевский», CPU Intel Core i7 (3.6 GHz).

Дальнейшая работа

1. В процессе решения задачи обнаружен эффект резкого роста константы Липшица для функций ограничений задачи, что существенно затрудняет поиск глобального экстремума. Планируется разработать подход к учету и обработке подобных ситуаций (идентификация и исключение из рассмотрения подобластей, в которых происходит скачкообразное изменение значений функции).
2. Вычисление ограничений задачи сводится к обращению матрицы X и поиску собственных чисел матриц из правой части ограничений (2), (3). Планируется распараллелить данные операции, что будет актуальным при поиске динамических регуляторов для задач вида (1) большой размерности.

Литература

1. *Баландин Д.В. Коган М.М.* — Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — Москва : Физматлит, 2007.
2. *Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.* — Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000.
3. *Стронгин Р.Г. Гергель В.П. Гришагин В.А. Баркалов К.А.* — Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. — Москва : Издательство Московского университета, 2013.
4. *Gergel V., Barkalov K., Sysoyev A.* — Globalizer: A Novel Supercomputer Software System for Solving Time-Consuming Global Op-timization Problems. — // Numerical Algebra, Control and Optimization. — 2018. — T. 8(1). — C. 47—62.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00242

semen.bevzuk@gmail.com