Использование параллельной системы глобальной оптимизации Globalizer для решения задач оптимального управления

И.Г. Лебедев В. В. Соврасов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Задача поиска оптимального управления

Необходимо найти оптимальное управление в виде обратной связи по состоянию для системы:

$$\dot{x} = (A + B_u\Theta)x + B_v v, x(0) = 0$$

Выходы системы описываются выражениями:

$$z_k = (C_k + B_u\Theta), k = \overline{1, N}$$

Критерии оптимальности:

$$J_k(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_{1 \leqslant i \leqslant n_k} \sup_{t \geqslant 0} |z_k^{(i)}(\Theta, t)|}{||v||_2} \to \min_{\Theta}$$

Ограничение на устойчивость системы:

$$g_0(\Theta) = \min_j \mathrm{Re}(\lambda_j(A + B_u\Theta)) < 0$$

Многокритериальная задача сводится к скалярной методом ε-ограничений или с помощью свёртки Гермейера. В [2] доказано, что использование последней позволяет найти всё множество Парето.

Под данную постановку подходят задачи виброизоляции. Объект защиты представлен многомассовой механической системой, состоящей из n материальных точек, связанных одинаковыми линейными упруго-диссипативными элементами между собой и основанием.

На данном этапе рассматривается задача виброизоляции системы из 10 точек. Поскольку на практике наблюдать состояние системы целиком затратно, размерность пространства параметров была выбрана равной 3 (не все элементы вектора-состояния участвуют в формировании обратной связи).

Задача глобальной оптимизации

Постановка задачи с ограничениями:

$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y) : y \in D\}, D = \{x \in \mathbf{R}^n : g_j(x) \leqslant 0, j = \overline{1, m}\}$$

Предполагается, что все функции задачи удовлетворяют условию Липшица:

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leqslant L\|y_1 - y_2\|, y_1, y_2 \in D, 0 < L < \infty$$

Целевая функция и ограничения могут быть невыпуклы, многоэкстремальны, недифференцируемы.

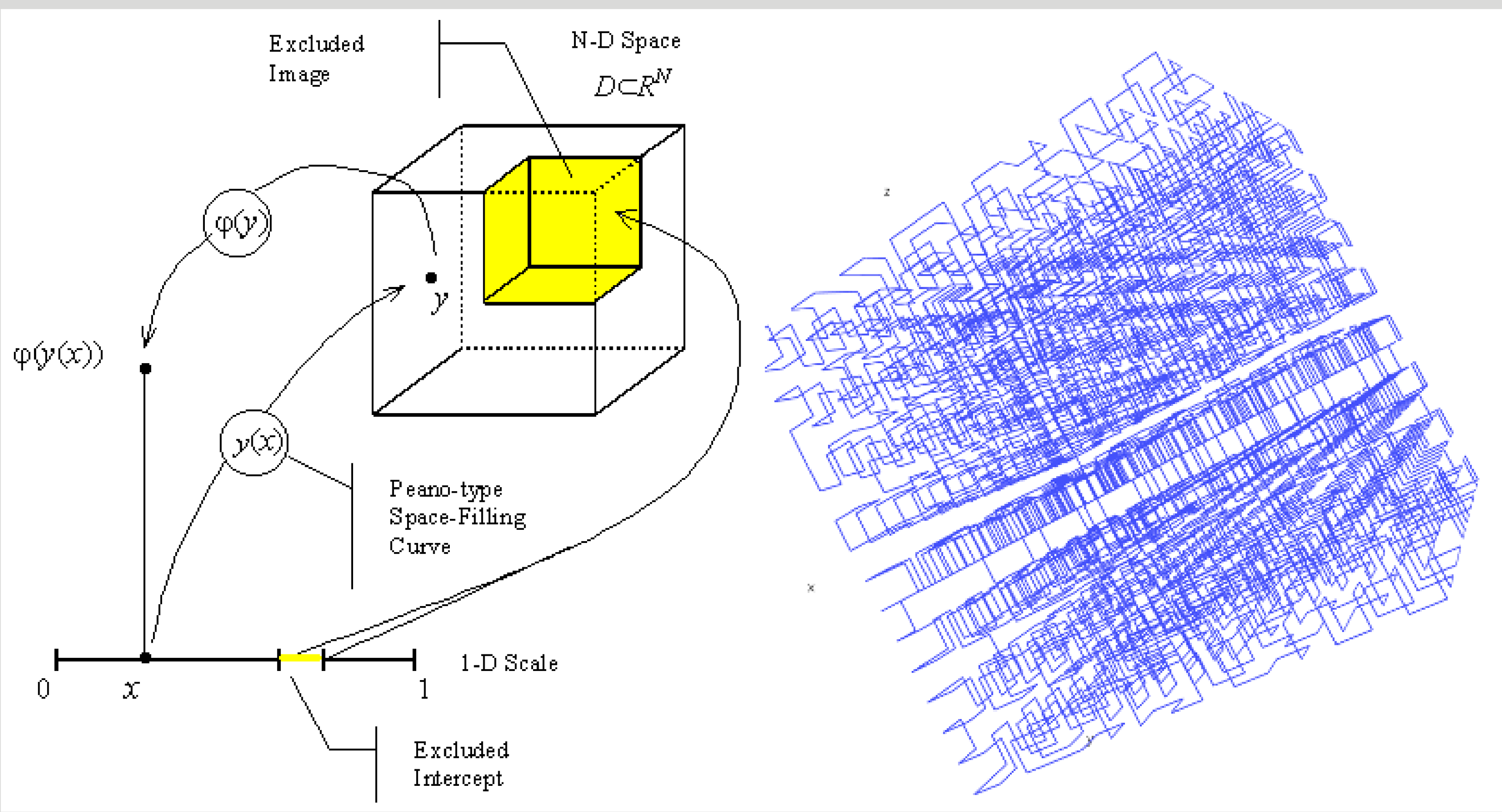
Метод глобальной оптимизмции

Для оптимизации используется одномерный метод Стронгина. Редукция размерности осуществляется с помощью кривой Пеано.

Общая схема одной итерации одномерного метода:

1. Упорядочить точки предшествующих испытаний в порядке возрастания их координат: $a = x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = b$.
2. Вычислить для каждого интервала $(x_{i-1}; x_i), 1 \leq i \leq k$ характеристику $R(i)$.
3. Определить интервал $(x_{t-1}; x_t)$, которому соответствует максимальная характеристика $R(t) = \max\{R(i), 1 \leq i \leq k\}$.
4. Провести следующее испытание в точке $x^{k+1} = d(t) \in (x_{t-1}; x_t)$, где $d(t)$ — правило размещения точки следующего испытания в интервале с номером t.
5. Проверить выполнение критерия остановки $x_t - x_{t-1} < \varepsilon$.

Подробное описание метода и индексной схемы учёта ограничений можно найти в [1].



Параллельные версии метода оптимизации

Существует несколько способов распареллеливания алгоритма глобального поиска (АГП):

- Распараллеливание по характеристикам в рамках системы с общей памятью. На шаге 2 вместо одного интервала выбираются p интервалов с наилучшими характеристиками и в них параллельно проводятся испытания.
- Распараллеливание по развёрткам в рамках системы с раздельной памятью. На каждом узле системы работает копия метода, использующая уникальную развёртку. Копии метода обмениваются многомерными точками, однако одномерные прообразы этих точек различны для каждого метода. При использовании L развёрток каждый метод дополнительно получает $L-1$ точку в свою поисковую информацию на каждой итерации, что ускоряет его сходимость.
- Сочетание указанных выше подходов.

В [3] перечисленные схемы описаны более подробно.

Результаты

В таблице 1 приведены результаты применения распараллеливания по характеристикам, а также результаты, полученные при использовании комбинированного подхода с двумя развёртками. Поскольку размерность задачи оптимизации невелика, добавление дополнительных развёрток не привело к ускорению.

Таблица 1: Результаты параллельных запусков на двух узлах кластера

L	$p = 1$	$p = 2$	$p = 4$	$p = 8$
1	75,09 (1)	59,58 (1,26)	39.60 (1,89)	12.28 (6,11)
2	58,55 (1,28)	46,14 (1,62)	18.09 (4,15)	9.21 (8,15)

Достигнутым практическим результатом является построение парето границы на плоскости критериев (рис. 1).

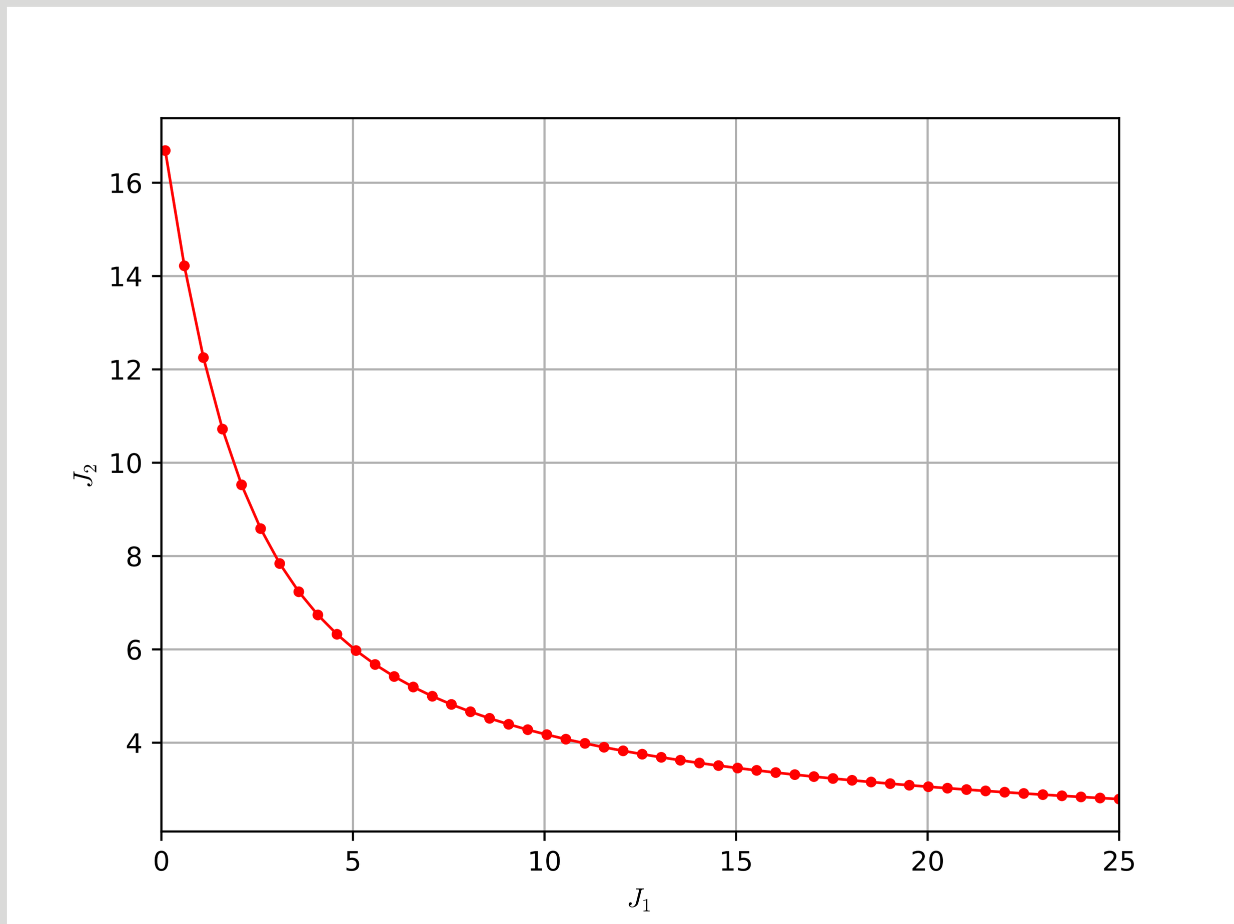


Рис. 1: Парето-граница на плоскости критериев

Дальнейшая работа

В процессе решения задачи выяснилось, что критерии обладают большой константой Липшица вблизи границы устойчивости системы, что затрудняет оптимизацию и приводит к нестабильности результатов параллельных методов. Для решения этой проблемы требуется изменение решающих првил одномерного метода.

Литература

1. *Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.* — Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000.
2. *Д.В. Баландин М.М. Коган.* — Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты. — // Автоматика и телемеханика. Принято к печати. — 2017.
3. *Стронгин Р.Г. Гергель В.П. Гришагин В.А. Баркалов К.А.* — Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. — Москва : Издательство Московского университета, 2013.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00244 мол_а sovrasov.vlad@gmail.com