Многократный глобальный поиск при использовании различных способов скаляризации критериев в задачах многокритериальной оптимизации

Multistage global search using various scalarization schemes in multicriteria optimization problems

В.П. Гергель, Е.А. Козинов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Задачи рационального выбора могут быть сведены к решению многокритериальных задач глобальной оптимизации. Сложность задачи обусловлена тем, что критерии и ограничения в процессе поиска решения могут быть изменены. Вместе с тем для поиска оптимального решения необходимо использовать алгоритмы, использующие все доступные вычислительные ресурсы и всю накопленную в процессе поиска информацию об объектах исследования. В рамках статьи рассматривается способ повторного использования накопленной информации об объекте исследований при последовательном и параллельном поиске оптимальных решений. Предложенный подход иллюстрируется на примере разработанной демонстрационной системы.

*Ключевые слова:* Задача рационального выбора, глобальная оптимизация, высокопроизводительные вычисления, повышение эффективности вычислений.

# 1. Введение

Принятие решений (decision making) является присущей практически всем сферам человеческой деятельности [1]. Для формального описания проблем принятия решений предложено целое множество математических постановок, среди которых many classes of optimization problems, including unconstrained optimization, nonlinear programming, global optimization, etc. В наиболее сложных ситуациях выбора широко используются постановки задач многокритериальной оптимизации (МКО). Отличительное свойство задач МКО состоит в возможности задания нескольких критериев, что позволяет более точно формулировать требования к оптимальности выбираемых решений. Тематика МКО является областью активных научных исследований - см., например, монографии [2-6] и обзоры научных и практических результатов в данной области [7-10].

Данная работа посвящена решению задач МКО, которые используются для описания decision-making problems при проектировании сложных технических объектов и систем. В таких приложениях частные критерии могут иметь сложный *многоэкстремальный* вид, а определение значений критериев и ограничений может потребовать *большого объема вычислений*.

Важной особенностью задач многокритериальной оптимизации является возможная противоречивость частных критериев эффективности, что делает невозможным достижение оптимальных (наилучших) значений одновременно по всем частным критериям. Как следствие, под решением задачи МКО обычно понимается нахождение некоторых компромиссных (effective, non-dominated) decisions, в которых улучшение значений по каким-либо критериям не может быть достигнуто без ухудшения показателей эффективности по другим критериям. В предельном случае, при решении задач МКО может оказаться необходимым получение всего множества effective decisions (the Pareto set). Однако нахождение всех effective decisions может потребовать значительного объема вычислений, а множество получаемых решений может оказаться очень большим, анализ которых может оказаться затруднительным. Как результат, более широко применяются подходы к решению задач МКО, при которых в соответствии с требованиями к оптимальности получаемый набор effective decisions является более ограниченным. Разработаны и широко используются различные способы вычисления таких ограниченных наборов эффективных решений. Так, например, если принимается, что критерии эффективности являются равными по важности, то в этом случае часто применяются различные виды свертки (минимаксная, аддитивная и др.) критериев. Если критерии эффективности могут быть упорядочены по важности, то в данной ситуации используются различные методы лексикографической оптимизации. При наличии некоторого прототипа (желаемого или идеального) decision способ решения задачи МО состоит в поиске наилучшего приближения имеющего прототипа. Возможны и другие способы решения задач МКО.

Все перечисленные способы позволяют учитывать характерные особенности решаемых задач МКО и соответствуют требованиям к оптимальности, существующие у лица, принимающего решение (ЛПР, decision maker, DM). Однако открытым остается вопрос, какой способ следует выбрать при решении конкретной задачи МКО. Кроме того, в ходе вычислений могут измениться требования к оптимальности. Подобные возможности изменения способов и параметров решения задачи МКО является дополнительным источником повышенной вычислительной сложности процессов поиска оптимальных решений. Можно предполагать, что необходимость большого объема вычислений является основной причиной того, что другими исследователями в рамках выполняемых исследований возможность корректировки постановок задач МКО, как правило, не допускается.

В данной статье рассматриваются расширенная постановка задач МКО и спектр способов скаляризации критериев, допускающая в рамках единой схемы формулировать требования к оптимальности. Постановка задачи МКО, используемые способы и параметры скаляризации критериев могут уточняться в ходе вычислений при изменений представления об оптимальности. Возможность подобной вариации приводит к необходимости многократного решения задач глобальной оптимизации. Реалистичность данного подхода предполагает преодоление **значительной вычислительной сложности** задач принятия решения, что может быть обеспечено за счет использования высокоэффективных методов глобальной оптимизации и полного использования поисковой информации, получаемой в процессе вычислений.

В данной статье представлены результаты выполненных исследований по обобщению постановок задач принятия решений [11-12] и по разработке высокоэффективных методов глобальной оптимизации, использующих всю поисковую информацию, получаемую в процессе вычислений [13-17].

Дальнейшая структура статьи имеет следующий вид. В главе 2 дается постановка задачи многокритериальной оптимизации и рассматриваются основы разработанного подхода: сведение многокритериальных задач к скалярным задачам оптимизации при помощи минимаксной свертки частных критериев и редукция размерности при использовании разверток Пеано. В главе 3 приводится параллельный алгоритм глобального поиска для решения редуцированных скалярных задач оптимизации и излагается блочная многошаговая схема редукции размерности, которая обеспечивает возможность использования графических процессоров с многими тысячами вычислительных ядер. Глава 4 содержит результаты численных экспериментов, подтверждающих перспективность предлагаемого подхода. В заключении обсуждаются полученные результаты и приводятся возможные основные направления продолжения исследований.

# 2. Постановка задачи многократной многокритериальной оптимизации

Для формального описания процесса поиска рациональных вариантов в сложных задачах принятия решений предлагается следующая обобщенная многоуровневая модель.

1. В самом общем виде задача принятия решений задается с помощью *вектор-функции характеристик*

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (1) |

где есть *вектор конструктивных параметров*, а есть *область возможных значений*, которая обычно представляет собой *N*-мерный гиперинтервал

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2) |

для заданных векторов и .

Предполагается, что значения характеристик являются неотрицательными и их уменьшение соответствует повышению эффективности выбираемых вариантов. Предполагается также, что характеристики могут быть многоэкстремальными и определение их значений может потребовать достаточно большого объема вычислений. Кроме того, предполагается, что характеристики удовлетворяют условию Липщица

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3) |

where *Li* is the Lipschitz constant for the характеристики and  denotes the Euclidean norm in .

1. Далее, на основе на основе рассмотренной выше модели формулируется задача МКО. Для этого среди характеристик из (1) выделяется *векторный критерий эффективности*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

и *вектор-функцию ограничений*

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (6) |

где , есть допуска на допустимые значения характеристик .

Сформированные подобным образом критерии эффективности и ограничения позволяют сформировать *задачу многокритериальной оптимизации*

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (7) |

где есть *допустимая область многокритериального поиска*

|  |  |
| --- | --- |
| . | (8) |

Предложенная выше схема охватывает многие существующие постановки оптимизационных задач. При и общая постановка становится задачей глобальной оптимизации. При и общая постановка определяет задачу нелинейного программирования. При и общая постановка приводится к задаче многокритериальной оптимизации с ограничениями.

В развитие данной схемы постановки задач МКО, впервые предложенной в [11], далее будет допускаться возможность одновременного формулирования нескольких задач МКО

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

набор которых может изменяться в процессе вычислений за счет добавления новых или удаления уже существующих задач

|  |  |
| --- | --- |
| . | (10) |

Решение задач множества могут выполняться последовательно либо одновременно в режиме разделения времени или параллельно при наличии нескольких вычислительных устройств. Безусловно, одновременный способ решения задач является более предпочтительным – получаемые результаты в ходе вычислений позволяет оперативно корректировать имеющееся множество задач . В случае же использования параллельных вычислений общее время решения поставленных задач может быть значительно сокращено.

В наиболее простом случае, множество может состоять из одной задачи МКО, после решения которой текущая постановка задачи МКО может быть изменена после анализа получаемых результатов, и процесс вычислений может быть продолжен уже для новой постановки задачи МКО до получения желаемого оптимального решения.

В целом, предложенная модель (1)-(10) процесса поиска оптимальных решений определяет новый класс оптимизационных задач - задач *многократной многокритериальной глобальной оптимизации* (ММГО).

Важно отметить, что возможность применения подобной модели процесса поиска решений основывается на информационной совместимости решаемых задач МКО. При смене постановки задач МКО вся поисковая информация, получаемая в процессе вычислений, может быть сохранена и повторно использована при решении новых сформулированных оптимизационных задач. Данный аспект являются ключевым в рамках разработанного подхода и рассмотрен более подробно в Главе Х.

# 3. Редукция многократного многокритериального поиска к задачам скалярной одномерной глобальной оптимизации

Как уже отмечалось во Введении, один из более широко используемых подходов к решению задач МКО состоит в скаляризации векторного критерия в некоторый общий скалярный показатель эффективности, и дальнейшее решение задач МКО при таком подходе может быть обеспечено с использованием уже существующих методов оптимизации. В числе возможных методов скаляризации, например, Weighted sum method, Compromise programming method, Weighted min-max method, Goal programming и многие другие способы – см., например, [2-6].

В самом общем виде, постановка порождаемых при таком походе задач глобальной оптимизации может быть представлена в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| ,, | (11) |

где есть вектор параметров применяемой свертки критериев, ограничения из (6), а область из (2).

1. В случае равной важности критериев эффективности наиболее часто применяется минимаксная свертка

|  |  |
| --- | --- |
| , | (12) |

где есть вектор весовых коэффициентов критериев

|  |  |
| --- | --- |
| *s*. | (13) |

Важным свойством минимаксной свертки является необходимость и достаточность данного способа скаляризации для решения задачи МКО: результат минимизации приводит к получению эффективного варианта[[1]](#footnote-1) задачи МКО и, обратно, любой эффективный вариант задачи МКО может быть получен в результате минимизации при соответствующих значениях коэффициентов свертки *λi*, 1≤*i*≤*s* – см., например, [4,6,21].

1. В случае упорядоченности критериев по важности широко используется метод последовательных уступок (МПУ, method of successive concessions, MSC)[xxx]. В соответствии с данным методом оптимизация выполняется сначала для наиболее важного критерия (предполагается, что критерии перенумерованы в соответствии с порядком убывания их важности). Затем, после завершения задачи глобального поиска для , задается величина допустимой уступки от минимального значения первого критерия и проводится оптимизация второго по важности критерия при условии не превышения заданной уступки. Далее таким же образом выполняется оптимизация всех последующих критериев – более подробное изложение метода MSC приведено, например, в [xxx].

Подобная строгая последовательность оптимизации критериев приводится к повышению вычислительной сложности решения задачи МКО – в соответствии с методом MSC необходимым является решение *s* задач глобальной оптимизации (т.е. столько же, сколько имеется критериев). В этой статье для преодоления отмеченной выше вычислительной сложности предлагается все необходимые вычисления свести к решению единственной задачи скалярной оптимизации, возникающей на последнем этапе метода последовательных уступок

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (14) |

есть минимальные и максимальные значения критериев в допустимой области *Q* соответственно, а есть уступки по каждому критерию[[2]](#footnote-2).

В отличие от исходного метода МПУ в задаче (14) требуется задать сразу все уступки по всем критериям, что часто может оказаться затруднительным. Снижение подобной сложности может быть достигнуто за счет возможности многократного изменения значения уступок непосредственно уже в ходе вычислений.

Достаточно сложным является также использование величин значения которых могут быть не известными а приори. Но данные величины, как показано в вычислительных экспериментах (Глава 5), могут быть заменены на минимальные и максимальные оценки значений критериев, вычисляемых с использованием имеющейся поисковой информации.

1. В случае наличия каких-либо оценок значений критериев требуемого эффективного варианта (например, на основе некоторого идеального варианта или каких-либо существующих прототипов) решение задачи МКО может состоять в нахождении эффективного варианта, наиболее полно соответствующего заданным оценкам. Задача поиска такого варианта может быть сформулирована в виде задачи скалярной оптимизации:

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (15) |

где целевая функция есть средне квадратичное отклонение варианта от искомого идеального варианта, а параметры есть показатели значимости аппроксимации по каждой варьируемой переменной в отдельности.

Рассмотренные выше способы скаляризации не охватывают весь спектр возможных методов решения задач МКО и могут быть дополнены. Для представленного набора важным является то, что данные способы позволяют учесть характерные свойства решаемых задач МКО для выделения целесообразного подмножества эффективных вариантов, трудоемкость анализа которого значительно ниже по сравнению с рассмотрением всего множества Парето. И, как уже отмечалось ранее, в рамках разработанного подхода представляется возможным уточнение постановки задач МКО (5)-(6), смену способов скаляризации (12)-(15) и/или изменение параметров сверток и . Подобные вариации расширяют множество задач МКО из (9), необходимых для решения исходной задачи принятия решения, в более широкое множество задач скалярной оптимизации (11)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

для которого каждой задаче из (9) может соответствовать несколько задач (11).

В разработанном подходе выполняется еще один шаг преобразования решаемых задач *F*(*λ*,*y*) из (11) – осуществляется редукция размерности с использованием *кривых* (*разверток*) Пеано *y*(*x*), обеспечивающих однозначное отображение отрезка [0,1] на N-мерный гиперкуб D [18, 20]. В результате такой редукции многомерная подзадача глобальной оптимизации (11) сводится к одномерной подзадаче:

|  |  |
| --- | --- |
| *F*(*α*,y(x\*)) = min { *F*(*α*,y(x)) :  x∈[0,1] }. | (16) |

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией *F*(*α*,y) одномерную задачу, в которой редуцированная функция *F*(*α*,y(x)) удовлетворяют равномерному условию Гельдера, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| , | (17) |

где константа *H* определяется соотношением , *N* есть размерность задачи принятия решений (1), а *L* есть константа Липшица функции *F*(*α*,y). Редукция размерности позволяет применять для решения задач (11) многие хорошо известные и высокоэффективные одномерные алгоритмы глобальной оптимизации (после проведения необходимого обобщения – см., например, [18, 20, Пиявский, Шуберт,Евтушенко,Сергеев с обобщением Пиявского].

# 4. Повышение эффективности многократного многокритериального поиска на основе повторного использования поисковой информации

Как уже отмечалось ранее, для решения последовательности задач из множеств и требуемый объем вычислений может оказаться еще более значительным. Возможный подход к преодолению вычислительной сложности задач принятия решений может состоять в интенсивном использовании всей поисковой информации, получаемой в процессе вычислений.

Численное решение задач глобально-оптимального выбора обычно сводится к последовательному вычислению значений характеристик в точках области поиска [18, 22-25]. Получаемые в результате вычислений данные могут быть представлены в виде *матрицы поисковой информации* (МПИ)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

В результате скаляризации векторного критерия (11) и применения редукции размерности (16) МПИ из (18) может быть преобразована к форме *матрицы состояния поиска* (*МСП*):

|  |  |
| --- | --- |
| , | (19) |

где *xi*, *zi*, , 1≤*i*≤*k*, есть соотвественно редуцированные точки выполненных итераций глобального поиска, значения скалярного критерия и ограничений текущей решаемой задачи оптимизации *F*(*α*,y(x)) в этих точках, а *li*, 1≤*i*≤*k*, - есть номера итераций глобального поиска, на которых вычислялись точки *xi*, 1≤*i*≤*k*.

Матрица содержит поисковую информацию, приведенную в текущей решаемой скалярной редуцированной задачи (11). Кроме того, поисковая информация в МСП упорядочена по значениям координат точек *xi*, 1≤*i*≤*k*, для более эффективного выполнения алгоритмов глобального поиска (см. Главу 5); упорядоченное представление точек отражается использованием нижнего индекса.

Представление поисковой информации, получаемой в ходе вычислений, в виде матриц и составляет основу для создания эффективных процедур оптимизационного поиска. Наличие подобной информации позволяет осуществлять адаптивный выбор точек выполняемых итераций глобального поиска с учетом результатов всех ранее выполненных вычислений в соответствии с некоторым правилом :

|  |  |
| --- | --- |
| , | (20) |

Подобный адаптивный выбор точек выполняемых итераций поиска может ускорить нахождение эффективных решений, а любое сокращение поисковой информации при определении выполняемых точек может приводить к проведению избыточных итераций глобального поиска.

Особо следует отметить, что наличие МПИ из (18) позволяет привести результаты всех предыдущих вычислений *zi*, 1≤*i*≤*k*, в МСП к значениям очередной решаемой задачи оптимизации *F*(*α*,y(x)) из (11) без каких-либо повторных трудоемких вычислений значений из (1), т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . | (21) |

Тем самым, вся поисковая информация в полном объеме может быть задействована для продолжения вычислений. Эффективное использование данной информации становится важным требованием при выборе методов решения задач *F*(*α*,y(x)) из (11). Повторное использование поисковой информации может обеспечить все уменьшающийся объем вычислений при решении каждой последующей оптимизационной задачи вплоть до выполнения всего лишь нескольких итераций для поиска очередного эффективного варианта.

# 5. Эффективный метод решения задач многократной многокритериальной оптимизации с нелинейными ограничениями

Наличие немонотонных ограничений заметно усложняет трудоемкость решения задач глобальной оптимизации – получаемые решения должны принадлежать допустимой области Q. Ситуация становится еще более сложной в случае частичной вычислимости, когда вычисление некоторых критериев и ограничений является невозможным при наличии хотя бы одного невыполненного ограничения. Для решения оптимизационных задач с ограничениями часто выделяют более простые случаи – например, выделяются задачи с линейными или квадратичными ограничениями. Широко применяются различные способы аппроксимации сложных ограничений при помощи ограничений более простого вида (линейных, выпуклых и т.п.). Но наиболее часто используется метод штрафных функций, когда при вычислениях в недопустимой области D\Q к значениям критериев добавляется некоторый штраф. Однако, метод штрафных функций часто предполагается многократное решение задачи оптимизации для оценки надлежащего значения коэффициента штрафа. И, главное, метод штрафов не применим в случае частичной вычислимости. Более полная информация о методах решения оптимизационных задач с ограничениями может быть получена, например, в монографиях [24-25].

В [18] приводится оригинальный метод раздельного учета ограничений, разработанного в рамках информационно-статистической теории глобального поиска. Суть подхода состоит в построении некоторой интегральной целевой функции без ограничений, решение которой приводит к решению исходной задачи (16) – более подробное изложение подхода приводится далее.

Введем более простое обозначение редуцированных одномерных задач (16) как

|  |  |
| --- | --- |
| min {gm+1(x) : gi(y(x))≤ 0*,* 1≤*i*≤*m,* x∈[0,1] }.  gm+1(x) = *F(λ,*y(x)). | (22) |

Задача (22) может быть рассмотрена в постановке частичной вычислимости, когда каждая функция gj, 1≤j≤m+1, определена и вычислима лишь в соответствующей подобласти Δj⊂[0,1], где

|  |  |
| --- | --- |
| Δ1 = [0,1], Δj+1 = { x∈Δj : gj(y(x))≤0 }, 1≤j≤m. | (23) |

С учетом условий (23), исходная задача (22) может быть представлена в виде

|  |  |
| --- | --- |
| ϕ(x\*)=min{gm+1(y(x)): x∈Δm+1}. | (24) |

Данная форма представления задачи (22) позволяет определить для точек x∈ [0,1] *индекс* ν=ν(x), где ν−1 есть число ограничений, которые выполняются в этой точке. Указанный индекс ν определяется условиями

|  |  |
| --- | --- |
| gν(y(x))>0, gj(y(x))≤0, 1≤j≤ν−1, 1≤ν=ν(x)≤m+1. | (25) |

где последнее неравенство несущественно, если ν=m+1.

С учетом введенных обозначений для задачи (22) может быть построена единая функция

|  |  |
| --- | --- |
| (y(x)) = gν(y(x)), ν=ν(x), | (26) |

определенную и вычислимую всюду на [0,1]*.* Ее значение в точке x есть либо значение левой части ограничения, нарушенного в этой точке (случай, когда ν≤m), либо значение минимизируемой функции (случай, когда ν=m+1). Поэтому определение значения (y(x)), x∈[0,1], сводится к последовательному вычислению величин gj(y(x)), 1≤j≤ν=ν(x), т.е. последующее значение gj+1(x) вычисляется лишь в том случае, когда gj(x)≤0. Процесс вычислений завершается либо в результате установления неравенства gj(x)>0, либо в результате достижения значения ν(x)=m+1 (данная процедура называется далее *испытанием*).

Построение единой функции (x) из (26) позволяет преобразовать условную задачу (22) к безусловной задаче оптимизации

|  |  |
| --- | --- |
| Φ(x\*) = min {Φ(x): x∈[0,1]}, | (27) |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Следует отметить, что максимальный индекс *M*, значения констант Липшица ,1≤ν≤M, функций gi(y(x)), 1≤i≤m+1, и минимальное значение  функции gm+1(y(x)) являются неизвестными. Однако при выполнении вычислений вместо этих величин можно использовать их адаптивные оценки, получаемые в процессе решения задачи на основании результатов испытаний.

В рамках разработанного подхода для решения задач (27) используется алгоритм глобальной оптимизации с нелинейными ограничениями (algorithm of global constrained optimization, AGSO), который подробно приведен в [xxx]. Для полноты изложения материалы далее приводится общая вычислительная схема алгоритма AGSO.

Первое испытание осуществляется в произвольной внутренней точке x1∈(0,1)*.* Выбор точки xk+1, k≥1, любого последующего испытания определяется следующими правилами.

*Правило* 1. Перенумеровать точки x1,…, xk предшествующих испытаний нижними индексами в порядке увеличения значений координаты, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| x1**<…<**xi<…<xk, | (28) |

и сопоставить им значения zi=gν(xi), ν=ν(xi), 1≤i≤k, из (26).

*Правило 2*. Оценить максимальный индекс *M*, и вычислить численные оценки констант Липшица ,1≤ν≤M, функций gi(y(x)), 1≤i≤m+1, и минимального значения  функции gm+1(y(x)), необходимых для построения комбинированной функции Φ(x) из (27).

*Правило 3*. Для каждого интервала (xi−1,xi), 1<i≤k, вычислить *характеристику* R(i), и определить интервал (xt−1,xt), которому соответствует максимальная характеристика

|  |  |
| --- | --- |
| R(t)=max{R(i): 1<i≤k }. | (29) |

*Правило 4*. Провести очередное испытание в точке интервала *xk*+1∈(xt−1,xt).

Итерации алгоритма прекращаются, если выполняется условие остановки

|  |  |
| --- | --- |
| ρt≤ε, | (30) |

где t из (29) и ε>0 есть заданная точность.

Значения характеристик интервалов R(i), 1<i≤k*,* и точка очередного испытания *xk*+1 в интервале с максимальной характеристикой вычисляются в соответствии с выражениями алгоритма AGCO. При этом характеристики интервалов *R*(*i*), 1<i≤k, определены таким образом, что их значения могут интерпретироваться как некоторые меры важности интервалов на предмет содержания в них точек глобального минимума функции Φ(x) из (27).

Подробное изложение algorithm AGCO and the corresponding theory of convergence are presented in [X12-X13].

# 6. Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский» Нижегородского государственного университета. Пиковая производительность кластера 573 Tflops. Один вычислительный узел суперкомпьютера располагает 2-мя процессорами Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz, 64 Gb RAM. Каждый процессор является 8-ми ядерным (т.е., всего каждый вычислительный узел содержит 16 ядер CPU). Для получения исполняемого программного кода использовался компилятор Intel C++ 14.0.2. Кластер использует систему управления SLURM. На каждом узле кластера установлена операционная система CentOS 6.4.

Под решением задачи МКО в рамках статьи понималось построение численной аппроксимации (*PDA*) области Парето (*PD*). Для оценки эффективности построения аппроксимации *PDA* использовались два широко применяемых основных показателя: полнота покрытия области Парето (*hypervolume index, HV*) и равномерность расположения вычисленных оценок эффективных решений (*distribution uniformity index, DU*) [Евтушенко, наша статья JGO]. Лучшему алгоритму соответствует индекс *HV* с большим значением, а индекс *DU* с меньшим.

В первой серии экспериментов сравнивались пять алгоритмов многокритериальной оптимизации и рассмотренный в статье подход:

* Метод Монте-Карло (MC), в котором точки выполняемых испытаний выбираются случайным образом равномерно в области поиска *D* [XXX],
* Обобщенный алгоритм SEMO из библиотеки PISA [XXX],
* Метод неравномерных покрытий (NUC) [XXX],
* Метод двухкритериальной Липшицевой оптимизации (BLO) [XXX],
* Метод МАМГП, метод рассмотренный в рамках статьи.

Для проведения экспериментов использовалась следующая тестовая двухкритериальная задача оптимизации:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (31) |

Для сторонних алгоритмов из приведенного списка использовались результаты экспериментов, представленные в научных публикациях [XXX]. Для алгоритма МAMГП использовалась минимаксная свертка (12). Всего для МAMГП было решено подзадач (31) при разных значениях коэффициентов свертки .

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов   
для тестовой задачи (31)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Метод** | **Итераций** | **Точек в PDA** | **HV** | **DU** |
| MC | 500 | 67 | 0.300 | 1.277 |
| SEMO | 500 | 104 | 0.312 | 1.116 |
| NUC | 515 | 29 | 0.306 | 0.210 |
| BLO | 498 | 68 | 0.308 | 0.175 |
| **МАМГП** | **390** | **90** | **0.317** | **0.094** |

Из таблицы 1 следует, что предложенный в рамках статьи алгоритм совершил меньшее количество итераций и при этом получил лучшее по качеству решение.

Для проведения второго и третьего эксперимента использовались критерии заданные с помощью функции Гришагина [XXX]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |

где выражения

,

определены в области , а параметры являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в указанном выше интервале.

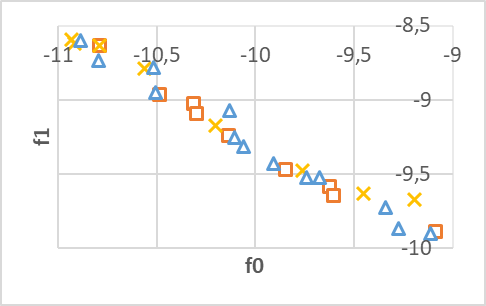
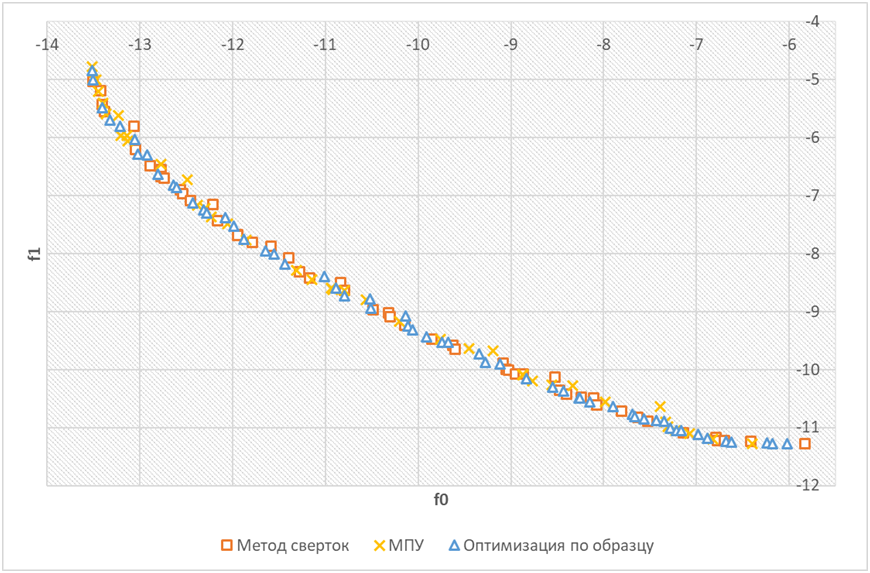
Целью второго эксперимента являлась исследование эффективности от повторного использования информации в случае применения различных сверток. Для достижения указанной цели при отыскании *PDA* применялись свертки (12), (14) и (15). В алгоритмах использовались 50 различных весовых коэффициентов, точность была задана , а надежность . Для оценки показателя HV использовалась точка отсчета (-4,-4). Результаты проведенных экспериментов представлены в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что за счет повторного использования информации для решаемой задачи удалось получить ускорение вычислений более чем в 9 раз (столбец «S»). Продемонстрированный в таблице 2 показатель HV позволяют сделать вывод о том, что повторное использование информации не вносит сильного влияния на полноту получаемых PDA. Вместе с тем из таблицы 2 видно, что при повторном использовании информации показатель DU для PDA получается хуже. Данный факт обусловлен тем, что количество испытаний было существенно сокращено. При необходимости улучшить показатель DU при повторном использовании информации достаточно увеличить количество используемых наборов весовых коэффициентов для используемых сверток.

Таблица 2. Эффективность от повторного использования информации   
при использовании разных сверток.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Информация | Используется | | | | Не используется | | | | S |
| Метод | Итер. | (.) PDA | HV | DU | Итер. | (.) PDA | HV | DU |
| Метод сверток | 922 | 44 | 52.7 | 0.91 | 9124 | 152 | 53.4 | 0.64 | 9.9 |
| МПУ | 1402 | 40 | 52.4 | 1.09 | 12802 | 88 | 52.8 | 1.16 | 9.1 |
| Оптимизация по образцу | 1323 | 56 | 53.0 | 0.83 | 12881 | 240 | 53.6 | 0.51 | 9.7 |

Найденные *PDA* при повторном использовании информациипредставлены на рис.1.



**Рис. 1.** Оценки области Парето найденные   
с использованием различных методов сверток

В третьем эксперименте была попытка показать один из возможных сценариев работы ЛПР при решении задачи МКО. Предполагался следующий сценарий решения задачи МКО. На первом шаге ЛПР имеет малое представление об области возможных значений оптимизируемых критериев. Для оценки возможных значений критериев ЛПР может применить минимаксную свертку (12). На втором шаге ЛПР может сформировать представление об оптимальном решении которое необходимо достичь. На основе требуемого образца PDA может быть улучшена с применением свертки (15). На заключительном шаге ЛПР может попытаться улучшить полученное решение применив МПУ (14).

На рис. 2. показано как менялась по шагам PDA при повторном использовании информации. На первом шаге применялась свертка (12), с тремя наборами весовых коэффициентов: (1,0), (0.5,0.5) и (0,1). Для решения поставленных подзадач было выполнено 304 испытания. По результатам испытаний было найдено 14 точек входящих в PDA. На втором шаге применялась свертка (15), с образцом представленным точкой (-14,-7). На втором шаге предполагалось, что критерии являются равнозначными и как следствие применялись веса (0.5,0.5). Чтобы найти решение поставленной подзадачи потребовалось провести 98 дополнительных испытаний. По результатам испытаний PDA была расширена до 19 точек. На финальном шаге применялась свертка (14). При проведении экспериментов в свертке (14) . Чтобы решить последнюю подзадачу потребовалось всего 35 дополнительных испытаний. По завершению вычислений на финальном шаге PDA содержала 24 точки.

**Рис. 2.** Последовательное решение задачи МКО   
с применением различных вариантов сверток   
и повторном использовании информации

# Литература

# References

1. Parnell, G.S., Driscoll, P.J., Henderson, D.L., editors. (2008) Decision Making in Systems Engineering and Management. Wiley, New Jersey (2nd ed. 2011).
2. Miettinen K. (1999) Nonlinear Multiobjective Optimization. Springer.
3. Marler, R. T., Arora, J. S. (2009). Multi-Objective Optimization: Concepts and Methods for Engineering. VDM Verlag.
4. Ehrgott, M. (2005) Multicriteria Optimization. Springer. (2nd ed., 2010)
5. Collette, Y., Siarry, P. (2011) Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies (Decision Engineering). Springer.
6. Pardalos, P.M., Žilinskas, A., Žilinskas, J. (2017) Non-Convex Multi-Objective Optimization. Springer.
7. Figueira,J., Greco, S., Ehrgott, M., editors. (2005). Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. New York, Springer.
8. Hillermeier, C., Jahn, J. (2005). Multiobjective optimization: survey of methods and industrial applications. Surv. Math. Ind. 11, 1–42.
9. Zavadskas, E. K., Turskis, Z., Kildienė, S. (2014). State of art surveys of overviews on MCDM/MADM methods. Technological and Economic Development of Economy 20, 165–179.
10. Cho, J.-H., Wang, Ya., Chen, I.-R., Chan, K.S., Swami, A. (2017) A Survey on Modeling and Optimizing Multi-Objective Systems. IEEE Communications Surveys & Tutorials 19 (3), 1867 – 1901.
11. Gergel V.P., et al. High Performance Computing in Biomedical Applications //Procedia Computer Science, 2013, Vol.18, P. 10—19.
12. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms //Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2000
13. Strongin R.G., Gergel V.P. Parallel computing for globally optimal decision making //Lecture Notes in Computer Science, 2003 Vol.2763, P. 76—88.
14. Strongin R.G., Gergel V.P. Parallel computing for globally optimal decision making on cluster systems //Future Generation Computer Systems, 2005, Vol.21, P. 673—678
15. Barkalov K., Gergel V.P. Multilevel scheme of dimensionality reduction for parallel global search algorithms // OPT-i 2014. An International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization (Kos Island, Greece, 4–6 June 2014). – 2014. P. 2111–2124.
16. Gergel V.P., Grishagin V.A., Israfilov R. Local Tuning in Nested Scheme of Global Optimization. Procedia Computer Science. V. 51. 2015. P. 865–874.

1. Точнее, минимизация *F*(*λ*,*y*) может приводить к получению слабо-эффективных вариантов (множество слабо-эффективных вариантов включает в себя область Парето). [↑](#footnote-ref-1)
2. При постановке вида (14) метод MSC близок к методу ε-ограничений – см. [xxx]. [↑](#footnote-ref-2)