**Опыт применения деревьев решения  
для ускорения алгоритма глобального поиска[[1]](#footnote-1)\***

Е.А. Козинов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Алгоритмы глобального поиска могут применяться при решении задач оптимального выбора. Решение задач с множеством оптимизируемых параметров может быть сведено к решению серии задач глобального поиска с одним параметром. Как следствие, разработка более эффективных алгоритмов глобального поиска с одним параметром является актуальной задачей. В рамках статьи предлагается модификация алгоритма глобального поиска, позволяющая сократить число испытаний, необходимых для поиска оптимального решения.

*Ключевые слова***:** глобальная оптимизация, многоэкстремальные функции, деревья решений.

# Введение

Задачи поиска решений возникают перед человеком практически в любой сфере деятельности. Возникающие при этом задачи достаточно редко могут быть решены на основе только интуиции и накопленного опыта исследователя в силу их значительной сложности. Высокая сложность задач обусловлена такими факторами, как большое количество вариантов, нуждающихся в оценке, противоречивость требований, а также изменение самого представления об оптимальности выбранного решения в процессе исследований. Поиск решения при выбранных требованиях к оптимальности может быть выполнен с применением алгоритмов глобального поиска.

Для решения задач глобальной оптимизации могут быть применены как детерминированные алгоритмы глобального поиска [1-8], так и недетерминированные алгоритмы [9-13]. Недетерминированные алгоритмы, как правило, легко реализовать, однако данные алгоритмы не могут гарантированно утверждать, что найденное решение близко к реальному с заданной точностью. В свою очередь, детерминированные алгоритмы гарантируют нахождение оптимального решения с заданной точностью. Гарантированность результата обеспечивается доказанными теоремами сходимости.

В рамках статьи рассматривается модификация одного известного и эффективного детерминированного алгоритма глобального поиска, предложенного Стронгиным Р.Г. [1]. Модификация алгоритма позволяет сократить число испытаний, необходимых на поиск решений. Эффективность предложенного алгоритма показана на решении серии задач глобального поиска.

# Постановка задачи

В рамках статьи рассматривается одномерная задача глобальной оптимизации:

|  |  |
| --- | --- |
| , , , | (1) |

где определяют область поиска, а функция описывает поведение оптимизируемого критерия. В рамках статьи предполагается, что оптимизируемые критерии удовлетворяют условию Липшица

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2) |

Требование выполнимости условия Липшица имеет принципиальный характер, поскольку позволяет строить оценки возможных значений критериев по конечному количеству значений, ранее вычисленных в точках области поиска из (1).

# Метод решения

Описание предлагаемого подхода к глобальному поиску будет выполнено в два этапа. В начале приводится базовый алгоритм глобального поиска [1]. Далее рассматривается предлагаемая модификация алгоритма.

Для поиска оптимального решения в алгоритме глобального поиска выполняются испытания. Под испытанием понимается вычисление значения оптимизируемого критерия из (1). Первые два испытания выполняются на границах области поиска: и . Последующие точки проведения испытаний определяются на основе следующих правил:

1. Отсортировать точки испытаний вместе с вычисленными значениями критериев в порядке возрастания их координат:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3) |

1. Вычислить оценку *m* для неизвестной константы Липшица *L*,

|  |  |
| --- | --- |
| , | (4) |

1. Для каждого интервала , , вычислить характеристику ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

где, , − параметр метода.

1. Определить номер интервала с максимальным значением характеристики:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (6) |

1. Провести очередное испытание в точке из интервала

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Алгоритм прекращает работу, если выполняется следующее условие остановки

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

В качестве оптимального значения принимается

|  |  |
| --- | --- |
| . | (9) |

Представленный алгоритм позволяет найти оптимальное решение с высокой эффективностью. Точки проведенных испытаний будут сконцентрированы в окрестности глобального минимума [1-3]. Вместе с тем, в алгоритме поиска (3)-(8) есть неявное предположение о том, что на всей области поиска из (1) оценка константы Липшица из (4) является одинаковой и, как следствие, для дальнейших вычислений берется максимальной по всем интервалам из (3) в расчете на худший случай. Подобные предположения приводят к избыточным испытаниям в процессе глобального поиска. В рамках статьи предложена одна из возможных модификаций позволяющая оценивать константу Липшица из (4) более точно, что должно привести к сокращению числа испытаний. В разработанном методе правило 2 из (4) заменено на следующую последовательность действий:

2а. Построить кусочно-линейную аппроксимацию оптимизируемого критерия. Для построения аппроксимации в рамках статьи использовались деревья решений из пакета sklearn [].

2б. Для каждой точки проведения испытаний определить принадлежность номеру отрезка из построенной аппроксимации:

|  |  |
| --- | --- |
| . | (10) |

2c. Посчитать как глобальную оценку константы Липшица *L* по формуле из базового алгоритма (4).

2д. Посчитать в качестве уточненной оценки константы Липшица *L*

|  |  |
| --- | --- |
| , | (11) |

где вычисляется согласно правилу 2 из (4), а , − параметр метода.

При подсчете характеристик интервалов из (5), а также определении очередной точки проведения испытаний (7) используется уточненная оценка константы Липшица *L* из (11), при этом выбор константы осуществляется на основании формулы (10).

# Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились с использованием ресурсов МСЦ РАН, СК Intel Endeavor и СК "Лобачевский". В качестве критериев задач использовались многоэкстремальные функции Шекеля и Хилла-Гибсона [1-3,15]. Для рассматриваемых алгоритмов параметр надежности метода из (4) был выбран , а точность метода из (8) была выбрана . Для того чтобы показать эффективность предложенной модификации решались серии по 100 задач для каждого класса функций.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Рис. 1**. Сравнение алгоритмов глобального поиска с использованием   
функций Хилла-Гибсона (слева) и Шекеля (справа)

Сравнение методов производилось на основе построенных графиков операционных характеристик[1-3]. Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 1. Из представленных графиков можно сделать вывод, что предложенная модификация метода позволила повысить эффективность выбора точек проведения испытаний и, как следствие, повысить эффективность поиска.

# Заключение

В рамках статьи предложен новый подход для оценки константы Липшица в рамках алгоритма глобального поиска. С учетом нового подхода оценки константы Липшица разработана модификация метода глобального поиска и проведены вычислительные эксперименты. Вычислительные эксперименты показали перспективность направления исследований.

# Литература

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы) – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1978. – 240 с.
2. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. – The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 728 p.
3. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. – М.: Издательство Московского университета. 2013. – 280 с.
4. Сергеев Я.Д., Квасов Д. Диагональные методы глобальной оптимизации. – ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 352 c.
5. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. A Parallel Method for Finding the Global Minimum of Univariate Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1994. – V. 80(3). – P. 513–536.
6. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // J. Comput. Anal. Appl. – 2001. – V. 3(2). – P. 123–145.
7. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. Introduction to global optimization exploiting space filling curves. – Verlag New York:Springer. – 2013. – 125 p.
8. Gergel V. An Unified Approach to Use of Coprocessors of Various Types for Solving Global Optimization Problems // 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. – 2015. – P. 13–18.
9. Yang, X.-S. Nature-inspired metaheuristic algorithms. – Frome: Luniver Press. – 2008. – 148 p.
10. Zhigljavsky, A.A. Theory of Global Random Search. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1991. – 341 p.
11. Kennedy J., Eberhard R. Particle swarm optimization // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Neural Networks. – 1995. – V. 4. – P. 1942–1948.
12. Карпенко А.П., Селиверстов Е.Ю. Обзор методов роя частиц (particle swarm optimization) // Электронное научно-техн. издание “Наука и образование”. – 2009. – № 3.
13. Кошур, В.Д. Глобальная оптимизация на основе гибридного метода усреднения координат и метода роя частиц // Ж. Вычислительные технологии. – 2013. – №4(18) .– C. 36-47.
14. Реализация деревьев решений. URL:  <https://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html> (дата обращения: 10.10.2020)
15. Hill, J.D. A Search Technique for Multimodal Surfaces // IEEE Transactions on Systems and Cybernetics. – 1969. – V. 5(1). – P. 2–8.

1. \* Исследование выполнено в рамках государственного задания (0729-2020-0055), а также при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1)

   Вычислительные эксперименты проводились с использованием ресурсов МСЦ РАН,   
   СК Intel Endeavor и СК "Лобачевский". [↑](#footnote-ref-1)