**An Approach for Simultaneous Finding of Multiple Effective Decisions in Multi-objective Optimization Problems**

К.А. Баркалов, В.П. Гергель, В.А. Гришагин, Е.А. Козинов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет   
им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматриваются вычислительно трудоемкие задачи многокритериальной оптимизации, для решения которых требуется вычисление нескольких Парето-оптимальных decisions. Предполагается также, что критерии эффективности могут быть многоэкстремальными, а вычисление значений функций может требовать большого объема вычислений. Предлагаемый подход основывается на редукции задач многокритериальной оптимизации к задачам одномерной глобальной оптимизации, для решения которых применяются эффективные информационно-статистические алгоритмы глобального поиска. Новизна предлагаемого подхода состоит в возможности одновременного решения нескольких задач глобальной оптимизации, что позволяет получать сразу нескольких Парето-оптимальных decisions. Кроме того, в рамках такого подхода обеспечивается повторное использование поисковой информации, получаемой в процессе вычислений, что значительно уменьшает вычислительную трудоемкость решения многокритериальных задач оптимизации. Результаты выполненных вычислительных экспериментов подтверждают перспективность разработанного подхода.

*Ключевые слова:* multi-objective optimization, multiple global optimization, dimensionality reduction, optimization method, search information, computational complexity

1. Введение

Выбор наилучших вариантов decision making при наличии многих различных альтернатив является проблемой, которая встречается практически во всех сферах человеческой деятельности. В наиболее простых случаях задачи принятия решений могут рассматриваться как проблемы оптимизации различного вида таких как, например, convex programming, discrete optimization, nonlinear programming, etc. В более сложных ситуациях целевые функции, которые определяют эффективность принимаемых решений, могут быть многоэкстремальными и принятие решений уже требует решения задач глобальной оптимизации. В самом же общем случае эффективность решений может определяться несколькими целевыми критериями, что приводит к необходимости решения multi-objective optimization (MOO) problems. Тем самым, MOO problеms являются наиболее общими постановками decision making, которые требуется решать во многих научно-технических приложениях. Для решения подобных задач разработано большое количество подходом и методов, которые были использованы при решении многих decision making problems в различных областях практических приложений – см., например, [1-9].

Наличие в MMO problems нескольких целевых функций, которые определяют эффективность принимаемых решений, приводит в большинстве случаев к ситуациям, когда во всем множестве альтернатив отсутствует вариант, который является наилучшим одновременной по всем критериям эффективности. В таких ситуациях под решением MOO problems обычно понимается нахождение non-dominated (or efficient) decisions, в которых значения не могут быть улучшены одновременно по всем objective functions. Множество всех efficient decisions обычно именуется множеством Парето.

Нахождение всего множества Парето при решении MOO problems может потребовать большого объема вычислений (особенно в случае многоэкстремальности целевых функций). Кроме того, наличие всего множества Парето может быть и избыточным для лица, принимающего решения (decision maker, DM) в силу сложности анализа большого количества возможных альтернатив. Как результат, при практическом решении MOO problems может оказаться достаточным нахождение одного или нескольких efficient decisions, определяемых с учетом представлений DM о необходимой оптимальности выбираемых вариантов.

Одним из наиболее широким используемым подходом поиска efficient decisions является скаляризация векторного критерия эффективности, когда задача MOO сводится к решению одной или нескольких задач скалярных задач (в общем случае глобальной) оптимизации, в которых целевая функция является уже единственной – порождаемое при подобном подходе семейство оптимизационных задач именуется далее как задача of multiple global optimization (MGO) В рамках такого подхода можно выделить методы лексикографической оптимизации, в которых целевые функции упорядочены по важности, что позволяет проводить оптимизацию функций последовательно по мере убывания их важности [10]. В число возможных методов скаляризации входят также различные способы свертки критериев эффективности, среди которых the weighted sum method, the compromise programming method, the reference point method, the weighted min-max method и др. - см., например, [2, 11,12].

Некоторым общим свойством методов, основанных на скаляризация векторного критерия эффективности, является наличие некоторых коэффициентов скаляризации, изменяя которых можно получать различные решения из множества Парето. Тем самым, коэффициенты скаляризации можно интерпретировать как показатели важности критериев эффективности, определяемые DM в соответствии со своим представлением о необходимой оптимальности принимаемых решение. Как результат, общая схема решения задачи MOO может быть представлена в виде последовательности этапов, на каждом из которых DM задает необходимые коэффициенты скаляризации, затем выполняется решение получаемой скалярной задачи оптимизации, после чего DM проводит анализ найденного эффективного решения и при необходимости, далее перечисленные выше действия повторяются.

Рассмотренная выше общая схема может быть расширена возможностью выбора на каждом этапе не одного, а нескольких различных вариантов коэффициентов скаляризации. Подобная возможность снижает сложность задания коэффициентов для DM. Одновременное решение нескольких порождаемых задач скалярной оптимизации позволяет получить оценки эффективных решений на самых ранних этапах вычислений, что дает возможность динамического (в процессе вычислений) изменения множества решаемых задач – прекращать решение явно бесперспективных (с точки зрения DM) или добавлять новые задачи оптимизации.

Важно отметить также, что одновременное решение множества порождаемых задач скалярной оптимизации позволяет существенно снизать вычислительную трудоемкость каждой задачи в отдельности. Подобный эффект может быть обеспечен в силу того, что все порождаемые скалярные задачи основываются на одно и той же задачи MOO и, соответственно, все вычисленные значения критериев эффективности задачи MOO могут быть приведены к значениям любой одновременно решаемой скалярной задачи без каких-либо трудоемких вычислений. В таких случаях вся поисковая информация, получаемая при решении какой-либо отдельной скалярной задачи, может быть использована при решении всех других скалярных задач порождаемого множества.

Дальнейшая структура статьи имеет следующий вид. В главе 2 дается постановка задачи многокритериальной оптимизации. В главе 3 представлена схема редукции задач многокритериальной оптимизации к задачам одномерной глобальной оптимизации и методы решения таких задач. В главе 4 рассматривается предлагаемый подход для одновременного решения нескольких задач глобальной оптимизации, что обеспечивает получения сразу нескольких Парето-оптимальных decisions. Глава 5 содержит результаты численных экспериментов, подтверждающих эффективность разработанных подхода. В заключении обсуждаются полученные результаты и приводятся основные направления продолжения исследований.

для решения которых применяются эффективные информационно-статистические алгоритмы глобального поиска. Новизна предлагаемого подхода состоит в возможности одновременного решения сразу нескольких задач глобальной оптимизации, что позволяется получать сразу нескольких Парето-оптимальных decisions. Кроме того, в рамках такого подхода обеспечивается повторное использование поисковой информации, получаемой в процессе вычислений, что значительно уменьшает вычислительную трудоемкость решения многокритериальных задач оптимизации.

# 2. Постановка задачи

In the most general form, the multi-objective optimization (MMO) problem can be formulated as follows

|  |  |
| --- | --- |
| *f*(*y*) = (*f*1(*y*), *f*2(*y*),…, *f*s(*y*)) → min, *y*∈*D*, | (1) |

где *f*(*y*) = (*f*1(*y*), *f*2(*y*),…, *f*s(*y*)) есть objective functions (критерии эффективности), *y* = (*y*1, *y*2,…, *yN*) есть вектор варьируемых параметров, а *N* есть размерность решаемой задачи multi-objective оптимизации. Множество возможных значений параметров (search domain) *D* обычно представляет собой *N*-мерный гиперкуб

|  |  |
| --- | --- |
| *D*  = { *y*∈*RN*: *ai*≤ *yi*≤ *bi*, 1≤*i*≤*N* } | (2) |

при заданных граничных векторах *a* и *b*.

Не уменьшая общности, предполагается, что objective functions должны быть минимизированы для повышения показателей эффективности принимаемых решений *y*∈*D.* При этомпредполагается, что *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* являются многоэкстремальными представлены в виде time-consuming “black-box” computational procedures. Предполагается также, что objective functions *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* удовлетворяют условию Липщица

|  |  |
| --- | --- |
| , 1≤*i*≤*s,* | (3) |

where *Li*, 1≤*i*≤*s* are the Lipschitz constants and  denotes the Euclidean norm in . Условие (3) означает, что при небольших вариациях параметра *y*∈*D* соответствующие изменения значений functions *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* являются ограниченными.

# 3. Reducing the Problem of Multi-objective Optimization to the Problems of One-dimensional Global Optimization

Как уже упоминалась ранее, в рамках предлагаемого подхода решение задач MMO сводится к решению сводится к решению одной или нескольких задач скалярных задач глобальной оптимизации, в которых единственный критерий эффективности порождается с использованием каких-либо методов скаляризации multiple objective functions. Далее рассматривается общая схема такой редукции задачи MMO и приводится метод решения порождаемых задач глобальной оптимизации.

1. **Scalarization of multiple objective functions**. В самом общем виде, задача глобальной оптимизации, порождаемой при скаляризации multiple objective functions задачи МMО, может быть представлена в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (4) |

где есть скалярная многоэкстремальная функция, порождаемая в результате скаляризации objective functions *fi*, 1≤*i*≤*s,* есть вектор параметров применяемой свертки functions, а есть область поиска из (1). В рамках предлагаемого подхода для скаляризации используется the compromise programming method [2,11], при котором решение задачи MMO состоит в нахождении efficient decision, наиболее точно соответствующего показателям оптимальности задаваемого reference decision . Возможный вариант свертки objective functions *fi*, 1≤*i*≤*s,* в этом случае может иметь вид

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (5) |

где есть среднеквадратичное отклонение значений objective functions *fi*, 1≤*i*≤*s,* для decision и задаваемого reference decision , а коэффициенты есть показатели значимости точности приближения по каждой варьируемой переменной в отдельности – не уменьшая общности, можно предполагать, что область возможных значений коэффициентов представляется собой множество

|  |  |
| --- | --- |
| *s*. | (6) |

The reference decision in (5) can be known a priori или определяться на основе какого-либо известного прототипа. В многих случаях в качестве the reference decision используется абстрактное идеальное decision , в котором значения objective functions *fi*, 1≤*i*≤*s,* принимают минимально-возможны значения, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . | (7) |

Следует отметить, что в силу (3) скалярная функция *F*(,y) из (5) также удовлетворяет условию Липщица c некоторой константой *L*, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

2. **Dimensionality reduction**. Как уже было отмечено, что задача (4) является задачей многомерной глобальной оптимизации. Задачи подобного вида являются вычислительно сложными и, как известно, подвержены «проклятию размерности» - вычислительная сложность возрастает экспоненциально при увеличении размерности решаемой задачи оптимизации [13-20]. Тем не менее, вычислительная сложность алгоритмов глобальной оптимизации может существенно снижена за счет редукции размерности на основе использования *кривых* или *разверток* Пеано *y*(*x*), однозначно и непрерывно отображающих отрезок [0,1] на N-мерный гиперкуб D– см., например, [15,21]. В результате такой редукции многомерные задачи глобальной оптимизации (4) сведятся к одномерным задачам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Получаемые в результате такой редукции размерности одномерные функции удовлетворяют равномерному условию Гёльдера, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

где константа *H* определяется соотношением *,* *L* есть константа Липшица из (8), а *N* есть размерность задачи оптимизации (1).

В результате редукции размерности вычислительная схема решения задачи (9) состоит в следующем (см. рис. 1):

* Алгоритм оптимизации осуществляет минимизацию редуцированной одномерной функции из (9),
* После определения точки очередной итерации одномерного глобального поиска вычисляется многомерный образ при используемом отображении *y*(*x*),
* В многомерной точке *у*∈*D* вычисляется значение исходной многомерной функции из (4),
* Вычисленное значение *z* = используется далее как значение редуцированной одномерной функции в точке .

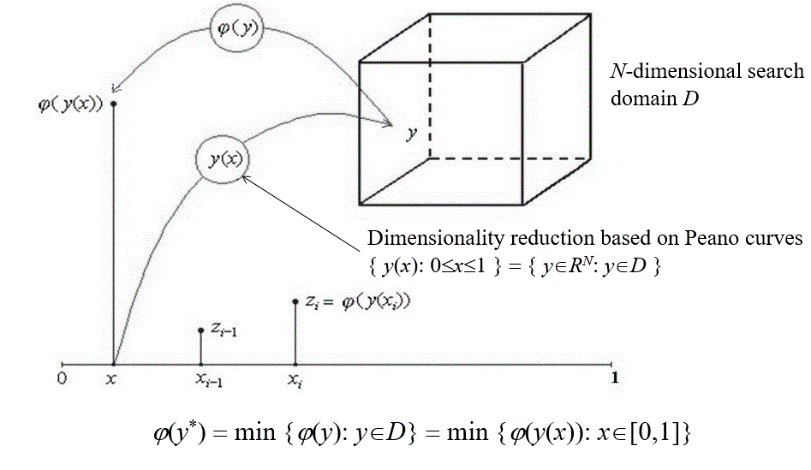


Рис. 1. Общая схема решения задачи (9)

3. **Solving the one-dimensional reduced optimization problem**. Использование редукции размерности приводит еще к одному дополнительному преимуществу предлагаемого подхода - для решения исходной многомерной задачи MMO из (1) можно использовать многие широко-известные одномерные алгоритмы глобального поиска (может быть, после некоторого дополнительного обобщения) - см., например, [22-29]. Вместе с этим, следует отметить, что основной спектр работ, учитывающих редукцию размерности как ключевую особенность для решения многоэкстремальных задач вида (4) выполнен в рамках информационно-статистической теории глобального поиска [15]. Данная теория послужила основой для разработки большого количества эффективных методов многоэкстремальной оптимизации – см., например, [28-37].

В рамках информационно-статистической теории была предложена общая вычислительная схема алгоритмов глобальной оптимизации, которая в кратком изложении состоит в следующем [15,30,35].

Пусть выполнено *k*, *k*≥2, итераций глобального поиска при минимизации функции из (9). Далее для адаптивного выбора точек следующих итераций алгоритм оптимизации выполняет оценку возможности расположения глобального минимума в интервалах, на которые разбивается исходный отрезок [0,1] точками ранее выполненных итераций глобального поиска

|  |  |
| --- | --- |
| . | (11) |

Данная оценка определяется с помощью *характеристик* интервалов значения которых должны быть пропорциональны степени возможности расположения глобального минимума в этих интервалах. Вид данных характеристик зависит от применяемого алгоритма глобальной оптимизации - так, например, для алгоритма, который строит равномерную плотную сетку в области глобального поиска, характеристика представляет собой просто длину интервала

|  |  |
| --- | --- |
| *.* | (12) |

Для алгоритмов, предложенных в [22,23], в случае применения редукции размерности, характеристика представляет собой оценку минимально возможного значения минимизируемой функции на интервале , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

где *H* есть константа Гельдера из (10) для решаемой редуцированной задачи глобальной оптимизации (9), а *N* есть размерность задачи из (1)). Для алгоритма глобальной оптимизации (АГП) [15,24], разработанного в рамках информационно статистического подхода, характеристика имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

где *m* численная оценка константы Гёльдера, полученная на основе имеющейся поисковой информации

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

(*r*>1 есть параметр алгоритма АГП).

Наличие характеристик интервалов позволяет представить процедуру выполнения итерации глобального поиска в виде следующей последовательности шагов [15].

*Шаг 1*. Вычислить характеристики интервалов и определить интервал с максимальной характеристикой

|  |  |
| --- | --- |
| . | (16) |

*Шаг 2*. Выбрать точку очередной итерации в интервале с максимальной характеристикой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

вычислить значение минимизируемой функции в этой точке (процедура вычисления значения функции будет называться далее испытанием).

*Шаг 3*. Проверить условие остановки

|  |  |
| --- | --- |
| ρt≤ε, | (18) |

где , t из (16) и ε>0 есть заданная точность решения задачи оптимизации. Если условие остановки (18) достигнуто, то решение задачи оптимизации останавливается, иначе полагается *k*=*k*+1 и осуществляется переход к выполнению следующей итерации глобального поиска.

После завершения вычислений в качестве оценки глобального минимума может быть принято наименьшее вычисленное значение минимизируемой функции

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

Следует повторно отметить, что рассмотренная выше вычислительная схема является достаточно общей. В рамках данной схемы могут быть представлены многие алгоритмы глобального поиска, о чем свидетельствуют, в частности, приведенные примеры (12)-(14), а также другие характеристически-представимые алгоритмы – см., например, [28-37].

Условия сходимости характеристически-представимых алгоритмов зависят от свойств используемых характеристик интервалов. Одним из достаточных условий сходимости алгоритмов является, например, требование, чтобы при выполнении итераций глобального поиска характеристика интервала, в котором содержится точка глобального минимума, принимала максимальное значение на шаге 1 характеристической схемы. Данное условие выполняется, например, для многомерных обобщенных алгоритмов, предложенных в [22-23] при точном задании константы Гельдера из (10). Для АГП достаточным условием сходимости является соотношение [15]

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

которое должно выполняться начиная с некоторой итерации *k*>1 глобального поиска (*L* есть константа Липщица из (8)). Более того, при выполнении условия (20) предельными точками последовательности испытаний , генерируемых алгоритмом АГП, будут являться только точки глобального минимума функции из (4).

# 4. An Approach for Simultaneous Finding of Multiple Effective Solutions in Multi-objective Optimization Problems

**1. Необходимость решения множества задач глобальной оптимизации**. Как уже отмечалось ранее, в процессе решения задачи MOO может потребоваться нахождение нескольких различных эффективных decisions в силу возможных изменения требований к оптимальности. Получение различных эффективных decisions в предлагаемом подходе обеспечивается выбором различных коэффициентов свертки (показателей важности) целевых функций *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* что приводит к получению разных скалярных многоэкстремальные функции из (4). Получаемые в результате различные функции для разных значений коэффициентов могут оптимизироваться последовательно определяя, тем самым многоэтапную схему решения задачи MOO, когда на каждом этапе DM задает необходимые коэффициенты скаляризации, затем выполняется решение получаемой скалярной задачи оптимизации, после чего DM проводит анализ найденного эффективного решения.

Рассмотренная выше общая схема может быть расширена возможностью выбора на каждом этапе не одного, а нескольких различных вариантов коэффициентов скаляризации. Подобная возможность снижает сложность задания коэффициентов важности целевых функций *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* для DM. Одновременное решение нескольких порождаемых задач скалярной оптимизации позволяет получить оценки эффективных решений на самых ранних этапах вычислений, что дает возможность динамического (в процессе вычислений) изменения множества решаемых задач – прекращать решение явно бесперспективных (с точки зрения DM) или добавлять новые задачи оптимизации.

Подобное обобщение процесса решения задачи MOO приводит к тому, что в каждый текущий момент вычислений существует множество одновременно оптимизируемых функций вида (4)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |

которое может изменяться динамически в ходе вычислений путем добавления новых или удаления уже существующих функций оптимизации из (4).

**2.** **Поэтапное решение множества задач глобальной оптимизации**. Как было показано в Главе 3, применяемые в предлагаемом подходе информационно-статистические алгоритмы многоэкстремальной оптимизации определяют точки очередных итераций глобального поиска с учетом поисковой информации

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| , | (22) |  |

получаемой в процессе вычислений (см. (14)-(17)). В (22) *xi*,1≤*i*≤*k*, есть редуцированные точки выполненных итераций глобального поиска, упорядоченные в порядке возрастания координат, *zi*, 1≤*i*≤*k*, есть значения скалярной функции из (4) и целевых функций *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* из (1) текущей решаемой задачи оптимизации в точках . Использование поисковой информации из (22) при выборе очередных итераций поиска позволяет существенно повысить эффективность решения задач глобальной оптимизации и обеспечить сходимость алгоритмов только к точкам глобального минимума минимизируемых многоэкстремальных функций.

Важно отметить, что поскольку множество одновременно оптимизируемых функций порождается исходя из одной и той же задачи MOO из (1), наличие множества из (12) позволяет привести результаты всех ранее выполненных вычислений значений целевых функций *fi*(*y*), 1≤*i*≤*s,* к значениям очередной оптимизируемой функции из (4) без каких-либо повторных трудоемких вычислений значений, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . | (23) |

Тем самым, вся поисковая информация из (22), пересчитываемая согласно (23), может быть повторно использована для продолжения решения задач множества . Подобная возможность обеспечивает значительное уменьшение выполняемых вычислений вплоть до выполнения только некоторого ограниченного набора итераций глобального поиска (см. результаты вычислительных экспериментов в Главе 5).

Наличие подобной информационной связности функций множества из (21) позволяет обобщить вычислительную схему (16)-(18) решения отдельной задачи глобальной оптимизации на случай оптимизации множества функций множества из (21) добавлением предварительного этапа преобразования поисковой информации

*Шаг 0*. Привести состояние поисковой информации из (22) к значениям оптимизируемой функции из множества в соответствии с правилом (23).

Алгоритм АГП, примененный для оптимизации функций множества из (21) и использующий поисковую информацию , будет именоваться далее как алгоритм многократного глобального поиска (MGSA).

**3.** **Одновременное решение множества задач глобальной оптимизации**. Наличие информационной связности позволяет предложить более общую схему одновременной оптимизации всего множества функций множества из (21). В этом случае поисковая информация из (22) будет содержать вычисленные значения всех одновременно оптимизируемых функций , т.е.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| , | (24) |  |

где значения , представляют собой вектора

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| . | (25) |  |

Соответственно, для каждого интервала на которые разбивается отрезок [0,1], будет вычисляться набор характеристик

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |
|  | (28) |
| . | (29) |

(,, есть оценка константы Гёльдера в условии (10) для функции , множества из (21)).

Алгоритм одновременного решения одновременной оптимизации всего множества функций множества из (21) (обозначаемый далее как SGSA) может быть представлен в виде следующей последовательности шагов.

*Шаг 1*. Вычислить характеристики интервалов , и определить функцию , поисковая информация которой содержит интервал с максимальной характеристикой

|  |  |
| --- | --- |
| . | (30) |

*Шаг 2*. Выбрать точку очередной итерации в интервале с максимальной характеристикой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

И вычислить значение всех одновременно оптимизируемых функций , в точке (при вычислении точки должны использоваться значения , функции , номер которой определен на шаге 1).

*Шаг 3*. Проверить условие остановки в соответствии с (18)

|  |  |
| --- | --- |
| ρt≤ε. | (32) |

При одновременной оптимизации функций , следует учитывать, что данные функции могут иметь отличающие значения в точках своих глобальных минимумов. Для обеспечения сходимости к точкам глобальных минимумов всех одновременно оптимизируемых функций алгоритм SGSA необходимо дополнить предварительным этапом приведения фунцкий , к единому однородному виду.

*Шаг 0*. Преобразовать , в соответствии с правилом

|  |  |
| --- | --- |
| , | (33) |

где , есть минимальное значение функции , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| , | (33) |

а , есть константа оценка константы Гёльдера в условии (10) для функции .

В случае, когда значения величин , не известны a prori, данные значения могут быть заменены на оценки, вычисленные на основе имеющей поисковой информации из (22) в соответствии с выражениями (19) и (29).

# 5. Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский» Нижегородского государственного университета (операционная система – CentOS 6.4, система управления – SLURM). Один узел суперкомпьютера располагает 2-я процессорами Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz, 64 Gb RAM. Центральный процессор является 8-и ядерным (т.е. всего на узле доступно 16 ядер CPU). Для получения исполняемого программного кода использовался компилятор Intel C++ 14.0.2. The numerical experiments were performed using the Globalizer system [36].

Первая серия экспериментов была выполнена для сравнения алгоритма MGSA с рядом широко известных алгоритмов многокритериальной оптимизации на примере решения тестовой двухкритериальной задачи [40]:

(34)

В ходе экспериментов для решения задачи (34) выполнялось построение численной аппроксимации области Парето, качество аппроксимации которого оценивалось с помощью показателей the hypervolume and distribution uniformity indexes (HV). [37, 40]. Первый из этих показателей характеризует полноту аппроксимации (большее значение соответствует более полному покрытию области Парето), а второй - равномерность покрытия (меньшее значение соответствует более равномерному покрытию области Парето).

В рамках данного эксперимента сравнивались пять алгоритмов многокритериальной оптимизации: the Monte-Carlo (MC) method, the genetic algorithm SEMO from the PISA library [42], the Non-uniform coverage (NUC) method [40], the bi-objective Lipschitz optimization (BLO) method [39] и алгоритм MGSA, предложенного в данной статье. For the first three algorithms, the numerical results were used from [41]. The results of the BLO method were presented in [39].

Для MGSA было решено 50 задач (3) при разных значениях коэффициентов свертки λ, равномерно распределенных в Λ. В полном виде результаты выполненных экспериментов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение эффективности алгоритмов многокритериальной оптимизации

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Метод решения** | MC | SEMO | NUC | BLO | **MGSA** |
| **Количество  итераций метода** | 500 | 500 | 515 | 498 | **370** |
| **Количество найденных точек  Парето границы** | 67 | 104 | 29 | 68 | **100** |
| **HV индекс** | 0.300 | 0.312 | 0.306 | 0.308 | **0.316** |
| **DU индекс** | 1.277 | 1.116 | 0.210 | 0.175 | **0.101** |

Как показывают результаты выполненных экспериментов, алгоритм MGSA имеет заметное преимущество по сравнению с рассмотренными методами многокритериальной оптимизации даже при решении сравнительно простых задач МКО.

Во второй серии вычислительных экспериментов производилось решение двухкритериальных двумерных задач MOO, т.е. *N* = 2, *s* = 2. В качестве критериев задачи использовались многоэкстремальные функции, получаемые при помощи генератора GKLS [43]. В ходе экспериментов было выполнено решение 100 многокритериальных задач данного класса, для каждой из которых множество из (21) из 5, 10 и 25 одновременно оптимизируемых функции соответственно (коэффициенты свертки из (6) для функций множества равномерно распределялись в ). Для проверки точности решения задач MOO вычисленные оценки эффективных решений проверялись на принадлежность области Парето. Для параметров алгоритма MGSA использовались значения: точность метода , надежность метода . Полученные результаты вычислений усреднялись по количеству решенных задач MOO.

Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты вычислительных экспериментов по решению двумерных двухкритериальных MOO задач

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Количество функций в | **Алгоритмы** | | | | | | | | |
| **GSA** | | | **MGSA** | | | **SGSA** | | |
| Iters | HV | DU | Iters | HV | DU | Iters | HV | DU |
| 5 | 3771,8 | 6,455 | 0,250 | 1823,4 | 6,481 | 0,208 | 2090,5 | 6,479 | 0,217 |
| 10 | 7941,6 | 6,485 | 0,183 | 1955,5 | 6,486 | 0,205 | 2224,4 | 6,486 | 0,191 |
| 25 | 20456,2 | 6,504 | 0,143 | 2135,8 | 6,490 | 0,209 | 2456,1 | 6,493 | 0,188 |

В таблице 2 в первом столбце указано количество используемых вычислительных ядер для решения задач из рассматриваемой серии экспериментов. Во втором и четвертом столбцах указано среднее количество итераций, затрачиваемых алгоритмом AGCS на решение задачи оптимизации. Третий и пятый столбцы содержат процент решенных задач при заданных параметрах метода. Последние два столбца содержат информацию о достигаемых ускорениях. Столбец (S1) показывает эффект от повторного использования накопленной поисковой информации. Столбец (S2) содержит информацию об общем достигнутом ускорении по сравнению с исходным алгоритмом без использования поисковой информации.

Полученные результаты экспериментов показывают, что даже простое повторное использование поисковой информации позволяет сократить общий объем вычислений в 18,4 раз без использования дополнительных вычислительных ресурсов. При использовании 25 вычислительных ядер максимальное ускорение составляет 295,6 раза.

В третьей серии вычислительных экспериментов производилось решение двухкритериальных четырехмерных задач МКО с двумя ограничениями, т.е. *N* = 4, *s* = 2, *m* = 2. Критерии и ограничения решаемых задач МКО определялись, как и ранее, при помощи генератора GKLS [X44]. При решении серии задач использовалась точность метода , надежность метода . Результаты вычислительных экспериментов представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты серии экспериментов по решению   
четырехмерных двухкритериальных МКО задач с ограничениями

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Количество  вычислительных ядер** | **Поисковая информация** | | | | **S1** | **S2** |
| **не используется** | | **используется** | |
| **Итераций метода** | **Решенных задач** | **Итераций метода** | **Решенных задач** |
| **1** | **5224909,1** | **95%** | **371501,8** | **96%** | **14,1** | **14,1** |
| **2** | **2141142,3** | **93%** | **140730,3** | **95%** | **15,2** | **37,1** |
| **5** | **862582,2** | **93%** | **57744,1** | **96%** | **14,9** | **90,5** |
| **10** | **625742,5** | **96%** | **43577,7** | **97%** | **14,4** | **119,9** |
| **25** | **177865,2** | **94%** | **12179,6** | **96%** | **14,6** | **429,0** |

Результаты экспериментов показывают, что при увеличении размерности решаемых задач МКО и соответствующего увеличения объема вычислений эффективность алгоритма PAGCS существенно возрастает – так, например, достигаемое ускорение при использовании 25 вычислительных ядер составляет 429 раз.

# 6. Заключение

В статье предлагается эффективный метод решения сложных многокритериальных задач оптимизации с невыпуклыми ограничениями, в которых критерии оптимальности могут быть многоэкстремальными, а вычисление значений критериев может требовать большого объема вычислений. Основа предлагаемого подхода состоит в сведении многокритериальных задач к задачам нелинейного программирования при помощи минимаксной свертки частных критериев, редукции размерности при использовании разверток Пеано и применении эффективных информационно-статистических методов глобальной оптимизации с оригинальной индексной схемы учета ограничений вместо обычно используемых штрафных функций.

Ключевой аспект разработанного подхода состоит в преодолении большой вычислительной сложности глобального поиска множества эффективных вариантов при решении задач многокритериальной оптимизации. Значительное повышение эффективности и существенное снижение объема вычислений обеспечивается за счет максимально возможного использования всей поисковой информации, получаемой в процессе вычислений. Для этого необходимо было обеспечить возможность хранения поисковой информации большого объема, эффективной обработки и использования поисковых данных в ходе решения задач многокритериальной оптимизации. В рамках разработанного подхода предложены способы приведения всей имеющейся поисковой информации к значениям очередной решаемой скалярной задачи нелинейного программирования. Приведенная к актуальному состоянию поисковая информация используется применяемыми методами оптимизации для адаптивного планирования выполняемых итераций глобального поиска.

Наличие поисковой информации позволяет также эффективно организовывать параллельные вычисления, обеспечивая выбор наиболее перспективных точек области поиска при поиске эффективных решений задач МКО.

Как показывают результаты вычислительных экспериментов, разработанный подход позволяет значительно – в десятки и сотни раз – сократить вычислительную трудоемкость решения задач многокритериальной оптимизации с невыпуклыми ограничениями.

Как заключение, можно отметить, что разработанный подход является перспективным и требует дальнейшего продолжения исследований. Прежде всего, необходимо продолжить проведение вычислительных экспериментов по решению задач многокритериальной оптимизации при большем количестве частных критериев эффективности и для большей размерности решаемых задач оптимизации. Следует также оценить возможность организации параллельных вычислений для высокопроизводительных систем с распределенной памятью.

# Acknowledgements

This research was supported by the Russian Science Foundation, project No 16-11-10150 “Novel efficient methods and software tools for time-consuming decision making problems using supercomputers of superior performance.”

# References

1. Miettinen K. (1999) Nonlinear Multiobjective Optimization // Springer.
2. Ehrgott, M. (2005) Multicriteria Optimization // Springer. (2nd ed., 2010)
3. Collette, Y., Siarry, P. (2011) Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies (Decision Engineering) // Springer.
4. Marler, R. T., Arora, J. S. (2009). Multi-Objective Optimization: Concepts and Methods for Engineering // VDM Verlag.
5. Pardalos, P.M., Žilinskas, A., Žilinskas, J. (2017) Non-Convex Multi-Objective Optimization. Springer.
6. Marler, R. T., Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering // Struct. Multidisciplinary Optimization 26, 369-395.
7. Figueira,J., Greco, S., Ehrgott, M., eds. (2005). Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys // New York (NY): Springer.
8. Zavadskas, E. K., Turskis, Z., Kildienė, S. (2014). State of art surveys of overviews on MCDM/MADM methods// Technological and Economic Development of Economy, 20, 165–179.
9. Hillermeier, C., Jahn, J. (2005). Multiobjective optimization: survey of methods and industrial applications. Surv. Math. Ind. 11, 1–42.
10. Collette, Y., Siarry, P.: Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies. Decision Engineering. Springer, Heidelberg (2011). <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08883-8>
11. Eichfelder, G. (2009) Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems // Comput. Optim. Appl. 44, 249–273
12. Figueira, J., Liefooghe, A., Talbi, E., Wierzbicki, A. A parallel multiple reference point approach for multi-objective optimization. European Journal of Operational Research, 2010, 205 (2), pp.390 - 400. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.12.027
13. Zhigljavsky, A.A. (1991). Theory of Global Random Search. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
14. Pintér, J.D. (1996) Global optimization in Action (continuous and Lipschitz optimization: algorithms, implementations and applications) // Kluwer Academic Publishers, Dortrecht.
15. Strongin, R., Sergeyev, Ya. (2000) Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2nd ed. 2013, 3rd ed. 2014).
16. Yang, X.-S. (2008) Nature-inspired metaheuristic algorithms // Luniver Press, Frome
17. Locatelli, M., Schoen, F. (2013). Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. SIAM.
18. Paulavičius, R., Žilinskas, J.: Simplicial Global Optimization. Springer, New York (2014).
19. Floudas, C.A., Pardalos, M.P. (2016). Recent Advances in Global Optimization. Princeton University Press.
20. Sergeyev, Y.D., Kvasov, D.E.: Deterministic Global Optimization: An Introduction to the Diagonal Approach. Springer, New York (2017).
21. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. (2013) Introduction to global optimization exploiting space-filling curves // Springer.
22. Piyavskij, S. An algorithm for finding the absolute extremum of a function, Computational Mathematics and Mathematical Physics 12 (1972), pp. 57-67.
23. Shubert, B.O. A sequential method seeking the global maximum of a function, SIAM Journal on Numerical Analysis 9 (1972), pp. 379-388.
24. Strongin R.G. Multiextremal Minimization // Autom. Remote Control. 1970. 7. pp. 1085-1088.
25. Galperin, E.A. The cubic algorithm, Journal of Mathematical Analysis and Applications 112 (1985), pp. 635-640.
26. Breiman, L., Cutler, A. A deterministic algorithm for global optimization, Mathematical Programming 58 (1993), pp. 179-199.
27. Baritompa, W. Accelerations for a variety of global optimization methods, Journal of Global Optimization 4 (1994), pp. 37-45.
28. Gergel, V.P. A method of using derivatives in the minimization of multiextremum functions (1996) Computational Mathematics and Mathematical Physics, 36 (6), pp. 729-742.
29. Sergeyev, Y.D. Global one-dimensional optimization using smooth auxiliary functions, Mathematical Programming 81 (1998), pp. 127-146.
30. Sergeyev Ya.D., Grishagin V.A., (1994) Sequential and parallel global optimization algorithms, Optimization Methods and Software, 3, 111-124.
31. Sergeyev, Y. D. An information global optimization algorithm with local tuning, SIAM J. Optim., 5(4), 858–870 (1995).
32. Sergeyev, Y. D., Grishagin, V. A. Parallel asynchronous global search and the nested optimization scheme, J. Comput. Anal. Appl., 3(2), 123–145, (2001)
33. Lera D., Sergeyev Ya.D. (2015) Deterministic global optimization using space-filling curves and multiple estimates of Lipschitz and Holder constants, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 23, 328–342.
34. Grishagin, V., Israfilov, R., Sergeyev, Y. (2016) Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization. AIP Conference Proceedings, 1776.
35. Gergel, V.: An Unified Approach to Use of Coprocessors of Various Types for Solving Global Optimization Problems. 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry, 13–18 (2015) DOI: 10.1109/MCSI.2015.18
36. Gergel, V.P., Kozinov, E.A. (2016) Accelerating multicriterial optimization by the intensive exploitation of accumulated search data. AIP Conference Proceedings, 1776, 090003, DOI: 10.1063/1.4965367
37. [Gergel, V.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603540044), [Kozinov, E.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=50061518600) [Efficient multicriterial optimization based on intensive reuse of search information](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85042175451&origin=resultslist). [Journal of Global Optimization](https://www.scopus.com/sourceid/88345?origin=resultslist), 2018, 71(1), 73–90.
38. Gergel, V., Barkalov, K., Sysoyev, A. Globalizer: A novel supercomputer software system for solving time-consuming global optimization problem // Numerical algebra, control and optimization. — 2018. — vol. 8(1) — P. 47— 62.
39. Žilinskas, A., Zilinskas, J. Adaptation of a one-step worst-case optimal univariate algorithm of bi-objective Lipschitz optimization to multidimensional problems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 21 (1-3) (2015) 89-98. DOI:10.1016/j.cnsns.2014.08.025.
40. Evtushenko. Y., Posypkin, M. A deterministic algorithm for global multiobjective optimization, Optimization Methods & Software 29 (5) (2014) 1005-1019. DOI:10.1080/10556788.2013.854357.
41. Evtushenko, Y., Posypkin, M. Method of non-uniform coverages to solve the multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy. Autom. Remote Control 75(6), 1025–1040 (2014)
42. Bleuler, S., Laumanns, M., Thiele, L., Zitzler, E. Pisa-a platform and programming language independent interface for search algorithms, Evolutionary Multi-Criterion Optimization, LNCS 2632 (2003) 494-508. DOI:10.1007/3-540-36970-8\_35.
43. Gaviano, M., Kvasov, D.E, Lera, D., and Sergeyev, Ya.D.: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization. ACM Transactions on Mathematical Software 29(4), 469-480 (2003)
44. 5. Modorskii, V.Y., Gaynutdinova, D.F., Gergel, V.P., Barkalov, K.A.: Optimization in design of scientific products for purposes of cavitation problems. In: AIP Conference Proceedings, vol. 1738, p. 400013 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4952201
45. 6. Gergel, V.P., Strongin, R.G.: Parallel computing for globally optimal decision making. In: Malyshkin, V.E. (ed.) PaCT 2003. LNCS, vol. 2763, pp. 76–88. Springer, Heidelberg (2003). https://doi.org/10.1007/978-3-540-45145-7 7

12. Gergel, V.P., Kuzmin, M.I., Solovyov, N.A., Grishagin, V.A. (2015) Recognition of surface defects of cold-rolling sheets based on method of localities. International Review of Automatic Control 8 (1), 51-55.

13. Kvasov D.E., Sergeyev Y.D. (2015) Deterministic approaches for solving practical black-box global optimization problems. Advances in Engineering Software, vol. 80, pp.58-66

14. Modorskii, V.Y., Gaynutdinova, D.F., Gergel, V.P., Barkalov, K.A. Optimization in design of scientific products for purposes of cavitation problems (2016) AIP Conference Proceedings, 1738, art. no. 400013

15. Gergel, V.P., Kozinov, E.A. Accelerating Parallel Multicriterial Optimization Methods Based on Intensive Using of Search Information (2017) Procedia Computer Science, 108, pp. 1463-1472.

16. Gergel, V., Kozinov, E. Efficient multicriterial optimization based on intensive reuse of search information (2018) Journal of Global Optimization, 71 (1), pp. 73-90.

17. Gergel, V., Kozinov, E. Comparative Analysis of Parallel Computational Schemes for Solving Time-Consuming Decision-Making Problems (2019) Communications in Computer and Information Science, 1063, pp. 107-121.

22. S. Piyavskij, An algorithm for finding the absolute extremum of a function, Computational Mathematics and Mathematical Physics 12 (1972), pp. 57-67.

23. B.O. Shubert, A sequential method seeking the global maximum of a function, SIAM Journal on Numerical Analysis 9 (1972), pp. 379-388.

24. Strongin R.G. Multiextremal Minimization // Autom. Remote Control. 1970. 7. pp. 1085-1088.

26. E.A. Galperin, The cubic algorithm, Journal of Mathematical Analysis and Applications 112 (1985), pp. 635-640.

26. L. Breiman and A. Cutler, A deterministic algorithm for global optimization, Mathematical Programming 58 (1993), pp. 179-199.

27. W. Baritompa, Accelerations for a variety of global optimization methods, Journal of Global Optimization 4 (1994), pp. 37-45.

28. Gergel, V.P. A method of using derivatives in the minimization of multiextremum functions (1996) Computational Mathematics and Mathematical Physics, 36 (6), pp. 729-742.

29. Y.D. Sergeyev, Global one-dimensional optimization using smooth auxiliary functions, Mathematical Programming 81 (1998), pp. 127-146.

30. Lera D., Sergeyev Ya.D. (2015) Deterministic global optimization using space-filling curves and multiple estimates of Lipschitz and Holder constants, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 23, 328–342.

31. Grishagin, V., Israfilov, R., Sergeyev, Y. (2016) Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization. AIP Conference Proceedings, 1776.

32. Sergeyev Ya.D., Strongin R.G. (1990) A global minimization algorithm with parallel iterations. *Comput. Maths. Math. Phys*., 29(2), 7-15.

33. Grishagin V.A., Sergeyev Ya.D., Strongin R.G. (1997) Parallel characteristical global optimization algorithms, *Journal of Global Optimization*, 10, 185-206.

34. Sergeyev Ya.D., Grishagin V.A., (1994) Sequential and parallel global optimization algorithms, Optimization Methods and Software, 3, 111-124.

35. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. (2003) Global optimization: fractal approach and non-redundant parallelism, Journal of Global Optimization, 27(1), 25-50.

Jones, D.R.: The DIRECT global optimization algorithm. In: Floudas, C., Pardalos, P.M. (eds.) Encyclopedia of Optimization, pp. 431–440. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2001)

Gablonsky J.M., Kelley C.T. A Locally-Biased Form of the DIRECT Algorithm. Journal of Global Optimization, 21(1), 27–37 (2001).

Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. (2003) Global optimization: fractal approach and non-redundant parallelism, Journal of Global Optimization, 27(1), 25-50.

Lera D., Sergeyev Ya.D. (2015) Deterministic global optimization using space-filling curves and multiple estimates of Lipschitz and Holder constants, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 23, 328–342.

Grishagin, V., Israfilov, R., Sergeyev, Y. (2016) Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization. AIP Conference Proceedings, 1776.

Использовались

2019\_WCGO\_MCO\_Ru\_2019\_10\_17

2020\_MCO\_OptLet\_2020\_05\_29