**Parallel Computations for Solving Multicriteria Mixed-Integer Optimization Problems**

В.П. Гергель, Е.А. Козинов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет   
им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается новый подход для решения многокритериальных вычислительно-трудоемких задач оптимизации, в которых часть варьируемых параметров могут принимать только дискретные значения. В рамках разработанного подхода решение задач смешанной оптимизации (mixed-integer optimization problems) сводятся к решению семейства оптимизационных задач, в которых используются только непрерывные параметры. Решение всех задач семейства осуществляется одновременно в режиме разделения времени, при котором выбор задачи оптимизации для выполнения очередной итерации глобального поиска выполняется адаптивно с учетом поисковой информации, получаемой в процессе вычислений. Разработанные алгоритмы обеспечивает возможность параллельных вычислений на высокопроизводительных вычислительных системах. Выполненные вычислительные эксперименты подтверждают, что разработанный подход позволяет существенно сократить объем и время вычислений для решения сложных задач многокритериальной mixed-integer оптимизации.

*Ключевые слова:* Многокритериальная оптимизация, mixed-integer optimization problems, методы скаляризации критериев, глобальная оптимизация, поисковая информация, параллельные вычисления, вычислительный эксперимент

# 1. Введение

Задачи многокритериальной оптимизации (МКО) возникают практически всегда при выборе оптимальных вариантов разрабатываемых сложных технических объектов и систем. Столь широкая востребованность задач МКО определяет высокую интенсивность научных исследований по данной тематике - см., например, монографии [1-5] и обзоры научных и практических результатов в данной области [6-9].

В качестве решения задач МКО обычно рассматривается множество efficient (non-dominated) decisions, для которых улучшение значений по каким-либо критериям не может быть достигнуто без ухудшения показателей эффективности по другим критериям. Определение всего множества efficient decisions (the Pareto set), с одной стороны, может потребовать выполнения большого объема вычислений, а, с другой стороны, может оказаться избыточным, т.к. анализ большого количества эффективных решений может потребовать значительных усилий для лица, принимающего решения (decision maker, DM). Тем самым, практически оправданным может являться нахождение только сравнительно небольшого набора efficient decisions, формирование которого может осуществляться в соответствии с требованиями к оптимальности, определяемые DM.

Ограничение набора вычисляемых efficient decisions приводит к заметному сокращению объема требуемых вычислений. Однако критерии эффективности могут иметь сложный *многоэкстремальный* вид, а вычисление значений этих критериев может оказаться *вычислительно-трудоемкой*. Кроме того, часть варьируемых параметров могут принимать только дискретные значения. В таких случаях решение задач МКО отличаются **значительной вычислительной сложностью**, преодоление которой может быть обеспечено только при использования высокопроизводительных суперкомпьютерных систем.

Для решения задач МКО предложено множество различных подходов (см., например, [3,6,10-11], среди которых наиболее часто используются те или способы скаляризации, основанные на сведении векторного критерия к той иной скалярной функции [2,12]. Количество работ по задачам multicriteria mixed-integer уже более ограничено – в большинстве своем, вопросы анализа дискретных параметров рассматриваются применительно к задачам скалярной оптимизации (см., например, обзоры [13,14]). Широко используемые детерминированные методы решения задач этого класса основаны, как правило, на on the Branch-and-Bound [15] or on the Branch-and-Reduce approaches [16]. Также известен ряд метаэвристических и генетических алгоритмов, которые так или иначе базируются на концепции случайного поиска [17,18].

В данной статье представлены результаты выполненных исследований по развитию высокоэффективных параллельных методов многокритериальной оптимизации, использующих всю поисковую информацию, получаемую в процессе вычислений [19-21]. Новый вклад в развитии тематики состоит в разработке подхода для решения задач МКО, в которых часть варьируемых параметров могут принимать только дискретные значения. В рамках разработанного подхода решение задач смешанной оптимизации (mixed-integer optimization problems) сводятся к решению семейства оптимизационных задач, в которых используются только непрерывные параметры. Решение всех задач семейства осуществляется одновременно в режиме разделения времени, при котором выбор задачи оптимизации для выполнения очередной итерации глобального поиска выполняется адаптивно с учетом поисковой информации, получаемой в процессе вычислений. Разработанные алгоритмы обеспечивает возможность эффективных параллельных вычислений на высокопроизводительных вычислительных системах.

Дальнейшая структура статьи имеет следующий вид. В главе 2 представлена постановка задач многокритериальной mixed-integer оптимизации, приводится минимаксная схема скаляризации векторного критерия эффективности и вводится понятие многоэтапного решения задач многокритериальной оптимизации. В главе 3 рассматривается разработанный подход, основанный на сведении решения задач смешанной оптимизации (mixed-integer optimization problems) к решению семейства оптимизационных задач, в которых используются только непрерывные параметры. В данной главе приводится также схема редукции размерности, которая позволяет свети многомерные задачи оптимизации к задача одномерного глобального поиска. В главе 4 излагается применяемый в рамках разработанного подхода параллельный алгоритм решения задач многокритериальной mixed-integer оптимизации. Глава 5 содержит результаты численных экспериментов, подтверждающих перспективность разработанного подхода. В заключении обсуждаются полученные результаты и приводятся возможные основные направления продолжения исследований.

# 2. Problems of Multicriteria Mixed-Integer Optimization

The problem of multicriteria mixed-integer optimization (MCOmix) can be formulated as follows

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (1) |

где есть векторный критерий эффективности, варьируемые параметры в котором относятся к двум разным видам:

* непрерывные параметры , область возможных значений которых представляет *N*-мерный гиперпараллелепипед:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (2) |

для заданных векторов и .

* дискретные параметры , каждый из который может принимать только фиксированный (дискретный) набор значений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

где , есть набор из допустимых дискретных значений для параметра , т.е., все множество возможных значений дискретных параметров содержит

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

различных элементов (кортежей ). Не уменьшая общности при дальнейшем рассмотрении будет предполагаться, что критерии являются неотрицательными и их уменьшение соответствует повышению эффективности выбираемых decisions.

В наиболее сложном варианте критерии могут быть многоэкстремальными, а процедуры вычисления их значений могут оказаться вычислительно трудоемкими. Предполагается также, что критерии удовлетворяют условию Липщица

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5) |

where *Li* is the Lipschitz constant for the criterion and  denotes the Euclidean norm in .

Критерии эффективности задачи МКО обычно противоречивы и параметры c наилучшими значениями одновременно по всем критериям могут отсутствовать. В таких ситуациях для задач МКО обычным является нахождение efficient (non-dominated) decisions, для которых улучшение значений по каким-либо критериям приводит к ухудшению показателей эффективности по другим критериям. Получение всего множества efficient decisions (the Pareto set) может потребовать выполнения большого объема вычислений и, как результат, часто используется другой подход - нахождение только сравнительно небольшого набора efficient decisions, определяемых в соответствии с требованиями decision maker.

Широко используемый подход к получению отдельных efficient decisions состоит в преобразовании векторного критерия в некоторый общий скалярный показатель эффективности[[1]](#footnote-1)

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (6) |

где есть целевая функция, порождаемая в результате скаляризации критериев *fi*, 1≤*i*≤*s,* есть вектор параметров применяемой свертки критериев, а и есть области возможных значений параметров из (2-3). В силу (5) функция *F*(*α*,y) также удовлетворяют условию Липщица c некоторой константой *L* , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Для построения общего скалярного показателя эффективности из (6) один из наиболее часто используемых способов скаляризации состоит в использовании минимаксной свертки критериев [2,5]:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (8) |
| *s*. |  |

Следует отметить, что в силу возможности изменения требований к оптимальности в процессе вычислений может потребоваться изменение параметров свертки из (8). Подобные вариации формируют множество задач скалярной глобальной оптимизации (6)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

которое необходимо при решение задачи MCOmix. Данное множество задач может формироваться последовательно в ходе вычислений; задачи множества могут решаться строго последовательно или одновременно в режиме разделения времени. Кроме того, задачи множества могут решаться параллельно с использованием высокопроизводительных вычислительных систем. Возможность формирования множества определяет *новый подход к многоэтапному решению задач многокритериальной оптимизации* (MMCO) – см., например, [22].

# 3. The Approach: Unrolling Mixed-Integer Optimization Problems and Dimensionality Reduction

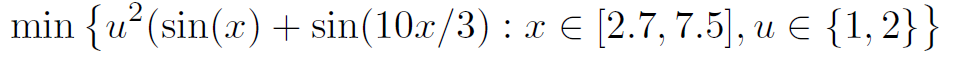
Наличие дискретных параметров значительно усложняет проблему решения задач многокритериальной оптимизации – во многих случаях решение таких задач приводит к необходимости вычисления значений критериев для всех возможных значений дискретных параметров. Предлагаемый подход для повышения эффективности решения задач MCOmix основывается на двух следующих основных идеях - unrolling mixed-integer optimization problems [23] and dimensionality reduction [24,25].

## 3.1. Simultaneous Solving Mixed-Integer Optimization Problems

Для решения задачи глобальной оптимизации (6) может быть использована двухэтапная схема вложенной оптимизации

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

В вычислительной схеме (11) для любого значения непрерывных параметров вычисляются значения функции для всех возможных значений дискретных параметров . Однако наименьшее значение функции достигается только при одном конкретном значении дискретных параметров и вычисление значений функции при других значениях дискретных параметров является избыточным. Так, например, для задачи

, (12)

в которой один непрерывный и один дискретный параметры, графики функции при разных значениях дискретного параметра имеют вид

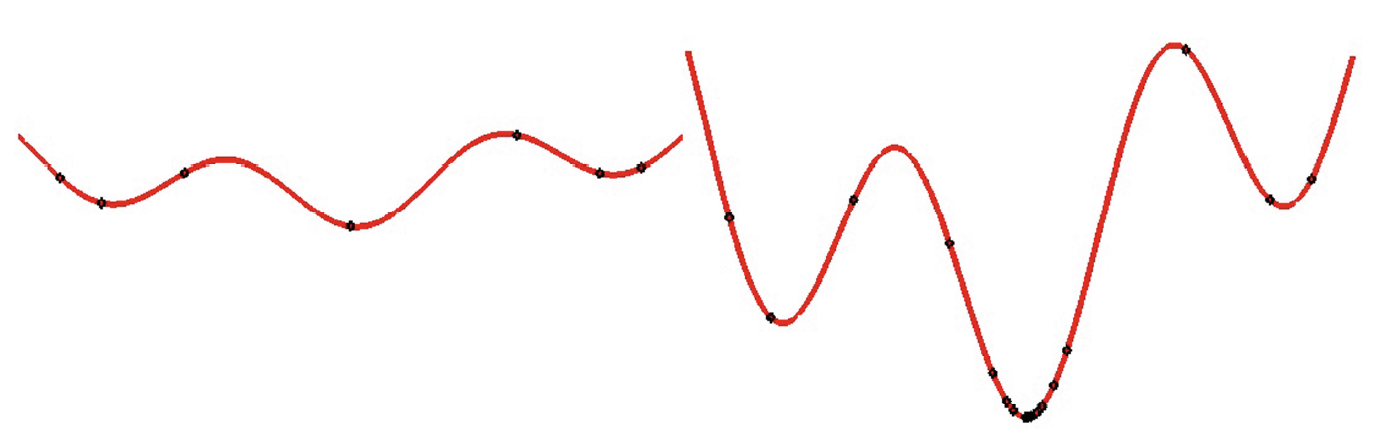


Рис. 1. Графики функции задачи (12) для разных значениях дискретного параметра (слева , справа

и как можно видеть, вычисления значения функции при не являются необходимыми.

Повышение эффективности и, соответственно, снижение вычислительной сложности решения задачи (6) может быть обеспечено при исключении (или, по крайней мере, в сокращении) вычислений значения функции при дискретных параметрах . В достаточно редких ситуациях сведения о значениях дискретных параметров, при которых минимальное значение функции не будет достигаться, могут известны а приори. В основном же такую информацию можно получить только в процессе вычислений на основе получаемой поисковой информации.

Пусть

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

есть поисковая информация, получаемая в процессе вычислений после выполнения итераций глобального поиска. Тогда процедуру адаптивного оценивания значения дискретного параметра, при котором ожидается получения минимального значения функции , можно определить с помощью решающего правила

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

определяющего на каждом шаге глобального поиска наиболее перспективное значение дискретного параметра .

При наличии подобного решающего правила общая вычислительная схема решения задачи может быть представлена следующим образом.

*Правило*1*.* Для имеющейся поисковой информации из (13) применить решающее правило из (14) и определить значение дискретного параметра .

*Правило*2*.* Определить точку выполняемой итерации глобального поиска при фиксированном значении дискретного параметра .

*Правило*2*.* Проверить условие остановки процесса вычислений. Если требуемая точность глобального поиска не достигнута, необходимо дополнить поисковую информацию из (13) результатами выполнения текущей итерации и перейти к выполнению правила 1.

Конкретизация приведенной выше вычислительной схемы будет выполнена далее после описания применяемого алгоритма глобального поиска.

## 3.2. Dimensionality Reduction of Mixed-Integer Optimization Problems

Следует отметить, что вычислительная сложность решения задач глобальной оптимизации экспоненциально возрастает при увеличении размерности – подобная проблема возрастания вычислительной сложности получила даже наименование «проклятия размерность». В частности, при применении рассмотренной в п. 3.1. вычислительной схемы необходимым является накопление и анализ многомерной поисковой информации из (13). Данная вычислительная сложность может существенно снижена за счет редукции решаемых задач оптимизации с использованием *кривых* или *разверток* Пеано *y*(*x*), однозначно и непрерывно отображающих отрезок [0,1] на n-мерный гиперкуб D– см., например, [24-25]. В результате такой редукции многомерная задача глобальной оптимизации (6) сводится к одномерной задаче:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

Следует отметить, что получаемые в результате редукции одномерные функции при фиксированном значении дискретных параметров удовлетворяют равномерному условию Гельдера, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

где константа определяется соотношением *,* есть константа Липшица из (7), а *n* есть размерность задачи оптимизации (1).

В результате применения редукции размерности поисковая информация из (13), получаемая в процессе вычислений, может быть представлена в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (17) |

где , есть точки выполненных итераций глобального поиска, *zi*, , 1≤*i*≤*k*, есть значения скалярного критерия *F*(*α*,y(x),u) и критериев , вычисленные в точках . Отметим, что данные в множестве расположены в порядке возрастания[[2]](#footnote-2) точек , т.е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

для более эффективного выполнения алгоритмов глобального поиска.

Использование редукции размерности позволяет скомпоновать (конкатенировать) одномерные функции в единую одномерную функцию , определенную на отрезке [0,*l*] (см. рис. 1)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

где *l* из (4) есть количество различных вариантов значений дискретных параметров . Отображение расширенного отрезка [0,*l*] на область значений непрерывных параметров *D* из (2) может быть определено как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

(обозначение *E*(*x*) означает операцию взятия целой части числа *x*). Следует отметить, что функция является разрывной в точках , далее значения функции в этих точках считаются неопределенными и вычислениях не используются.

# 4. Parallel Computation for Solving Mixed-Integer Optimization Problems

В общем случае, задача минимизации функции из (8) являются задачами глобальной оптимизации, решение которых предполагает построение сеток, покрывающих область поиска *D* - см., например, [24-31].

В предлагаемом подходе для решения задача минимизации функции используется алгоритм глобального частично-целочисленного поиска (AGMIS), расширяющий возможности методов многоэкстремальной оптимизации, разработанных в рамках информационно-статистической теория глобального поиска [19-23, 32-39], для минимизации редуцированной одномерной функции из (19).

Общая вычислительная схема AGMIS может быть представлена следующим образом (см. также [21]).

На начальной итерации AGMIS осуществляется вычисление значения минимизируемой функции в некоторой произвольной точке интервала (получение значения функции будет называться далее *испытанием*). Пусть далее выполнено *k*, *,* итераций глобального поиска. Выбор точек испытаний ( очередной итерации определяется следующими правилами.

*Правило*1*.* Для каждого интервала ,1<i≤k, вычислить величину R(i), называемую далее *характеристикой* интервала.

*Правило*2. Определить интервал ,, которому соответствует максимальная характеристика

|  |  |
| --- | --- |
| R(t)=max { R(i): 1<i≤k}. | (21) |

*Правило*3*.* Выполнить новое испытание в из интервале с максимальной характеристикой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |

(значение дискетных параметров u в соответствии с (19)).

Условие остановки, в соответствии с которым прекращаются испытания, определяется условием

|  |  |
| --- | --- |
| ≤ε, | (23) |

где *t* из (21), *n* есть размерность решаемой задачи из (1), а ε>0 есть заданная точность решения задачи. Если условие остановки не выполняется, то номер итерации *k* увеличивается на единицу, и осуществляется выполнение новой итерации глобального поиска.

Для пояснения рассмотренной вычислительной схемы можно отметить следующее. Вычисляемые характеристики *R*(*i*), 1<i≤k, могут интерпретироваться как некоторые меры важности интервалов на предмет содержания в них точки глобального минимума. Тогда становится понятной схема выбора интервала для проведения очередного испытания – точка каждого следующего испытания из (22) выбирается в интервале с максимальным значением характеристики интервала (т.е. в интервале, в котором наиболее возможно расположение глобального минимума).

Следует отметить также, что рассмотренная вычислительная схема AGMIS уточняет общую схему глобального поиска для mixed-integer optimization problems из п. 3.1 – так, выбор функции , для выполнения очередной итерации обеспечивается процедурой нахождения интервала с максимальной характеристикой.

Полное описание алгоритмов многоэкстремальной оптимизации и условия их сходимости, разработанных в рамках информационно-статистической теории глобального поиска, рассмотрены в [24]. Так, при надлежащей численной оценке констант Гельдера *H* из (16) алгоритм AGMIS сходится ко всем имеющимся точкам глобального минимума минимизируемой функции .

Пример использования алгоритма AGMIS для задачи (12) в рамках разработанного подхода приведен на рис. 1 – в данном примере значение функции при значении дискретного параметра вычислялось только ХХ раз, а для значения – ХХ раз, т.е. итерации глобального поиска выполнялась в основном для значения дискретного параметра, при котором достигается наименьшее значение функции .

Теперь следует вернуться к исходной постановке проблемы (1) и напомним, что для решения задачи MCOmix может потребоваться решение множества задач из (10). При решение данного множеств задач с помощью алгоритма AGMIS достигается еще одно ключевое свойство разработанного подхода - результаты всех ранее выполненных вычислений значений критериев может быть приведено к значениям очередной решаемой задачи оптимизации *F*(*α*,y(x),u) из (6) при новых значениях из (8) без каких-либо повторных трудоемких вычислений значений критериев, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . | (24) |

Тем самым, вся поисковая информация из (17), пересчитываемая согласно (24), может быть повторно использована для продолжения решения очередной задачи *F*(*α*,y(x),u). Подобная возможность может обеспечить значительное уменьшение объема выполняемых вычислений при решении каждой последующей задачи множества из (10) вплоть до выполнения только некоторого сравнительно небольшого количества итераций глобального поиска. Подтверждение данного предложения показано при выполнении вычислительных экспериментов – см. Главу 5.

Алгоритм AGMIS, дополненный возможностью повторного использования поисковой информации при решении задач MCOmix, именуется далее как алгоритм многокритериального частично-целочисленного поиска (AMMIS).

Завершающий этап в повышении эффективности решения задач MCOmix в разработанном подходе состоит в организации параллельных вычислений на современных высокопроизводительных системах. К сожалению, попытки разработки параллельных вариантов алгоритмов AGMIS и AMMIS с использованием существующих широко применяемых способов распараллеливания являются неуспешными – так, например, при распараллеливании по данным (разделение области вычислений между имеющимися вычислительными элементами) приводит к тому к тому, только один процессор будет обрабатывать подобласть области поиска, в которой содержится искомое глобально-оптимальное решение задачи, все же остальные процессоры будут выполнять избыточные вычисления. В работах [24,32] предложен новый подход к распараллеливанию вычислений при решении задач глобальной оптимизации – параллельность выполняемых расчетов обеспечиваются за счет организации одновременного вычисления значений минимизируемой функции *F*(*α*,*y,u*) из (8) в нескольких разных точках области поиска *D*. Такой подход обеспечивает распараллеливание наиболее трудоемкой части процесса глобального поиска, и является общим – он применим практически для любых методов глобального поиска для самых разных задач глобальной оптимизации.

Применяя данный подход с учетом интерпретации характеристик *R*(*i*),1<i≤k, поисковых интервалов ,1<i≤k, из (21) как меры важности интервалов на предмет содержания в них точки глобального минимума, параллельный вариант алгоритма AGMIS может быть получен при следующем обобщении правил (21)-(22) [32,40]:

*Правило*2′*.* Расположить характеристики интервалов в порядке убывания

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

и выделить *p* интервалов с номерами , имеющие максимальные значения характеристик (*p* есть количество используемых процессоров (ядер) для параллельных вычислений).

*Правило*3′*.* Выполнить новые испытания (вычисления значений минимизируемой функции *F*(*α*,*y*(*x*),*u*) в точках , располагаемых в интервалах с максимальными характеристиками из (25).

Условие остановки алгоритма (23) должно проверяться для всех интервалов, в которых выполняются очередные испытания

|  |  |
| --- | --- |
| . | (26) |

Как и ранее, если условие остановки не выполняется, то номер итерации *k* увеличивается на *p*, и осуществляется выполнение новой итерации глобального поиска.

Данный параллельный вариант алгоритма AGMIS будет именоваться далее как Параллельный глобального частично-целочисленного поиска (PAGMIS), а параллельный вариант алгоритма AMMIS – соответственно как PAMMIS.

Для оценки эффективности параллельных алгоритмов выполнена большая серия вычислительных экспериментов подтверждают, что разработанный подход позволяет существенно сократить объем и время вычислений для решения сложных задач многокритериальной mixed-integer оптимизации – см. Главу 5.

# 5. Результаты вычислительных экспериментов

Numerical experiments were performed on the supercomputers Lobachevsky (University of Nizhni Novgorod), Lomonosov (Moscow State University), MVS-10P (Joint Supercomputer Center of RAS) and supercomputers Endeavor. The numerical results were obtained by using the following computational nodes: 2 Intel Xeon Platinum 8260L, 2.4 GHz, 256 GB RAM (i.e. a total of 48 CPU cores were available on each node). The executable program code was built by using the Intel Parallel Studio XE 2019 software package. The numerical experiments were performed using the Globalizer system [41].

Алгоритмы многоэкстремальной оптимизации, используемые в рамках разработанного подхода, показали свою эффективность при проведении тестовых вычислительных экспериментов и широко применялись при решении практических задач глобального поиска – см., например, [20-23]. Приведем полученные ранее результаты вычислительных экспериментов показывающие эффективность разработанного подхода [21]. Решалась тестовая двухкритериальная задача, предложенная в [42]:

(27)

Под решением задачи МКО понималось построение численной аппроксимации области Парето. Для оценки качества аппроксимации сравнивались полнота и равномерность покрытия области Парето с помощью следующих двух показателей [42,43]:

* The hypervolume index (HV). Данный показатель характеризует полноту аппроксимации области Парето (большее значение соответствует более полному покрытию области Парето).
* The distribution uniformity index (DU). Данный показатель характеризует равномерность покрытия области Парето (меньшее значение соответствует более равномерному покрытию области Парето).

В рамках данного эксперимента сравнивались пять алгоритмов многокритериальной оптимизации: the Monte-Carlo (MC) method [42], the genetic algorithm SEMO from the PISA library [42], the Non-uniform coverage (NUC) method [42], the bi-objective Lipschitz optimization (BLO) method [43], и метод AMMIS, разработанный авторами в рамках предложенного подхода.

Для AMMIS было решено 50 задач глобальной оптимизации с разным набором коэффициентов свертки. Использовались точность метода из (23) и надежность . В полном виде результаты выполненных экспериментов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение эффективности алгоритмов многокритериальной оптимизации

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Метод решения** | MC | SEMO | NUC | BLO | **MAGCS** |
| **Количество  итераций метода** | 500 | 500 | 515 | 498 | **273** |
| **Количество найденных точек области Парето** | 67 | 104 | 29 | 68 | **80** |
| **HV индекс** | 0.300 | 0.312 | 0.306 | 0.308 | **0.314** |
| **DU индекс** | 1.277 | 1.116 | 0.210 | 0.175 | **0.096** |

Как показывают результаты выполненных экспериментов, алгоритм AMMIS имеет заметное преимущество по сравнению с рассмотренными методами многокритериальной оптимизации даже при решении сравнительно простых задач МКО.

Далее приведем результаты вычислительных экспериментов по решению 100 задач MCOmix множества из (10). Каждая задача в содержала по два критерия. Каждый критерий формировался на основе функций, полученных генератором GKLS [44], в которых часть параметров использовались в качестве дискретных [45]. При генерации задач MCOmix использовалось 4 непрерывных параметра из (2) и 5 дискретных параметра из (3), каждый из которых только по два (т.е., *n*=4, *m*=5, *l*=32).

Для решения каждой задачи MCOmix использовалось равномерно распределенных значений коэффициентов сверток из (8). Для оценки значений показателей эффективности HV и DU для каждой задачи MCOmix вычислялась аппроксимация области Парето с использованием равномерной сетки в области значений переменных из (2-3). Алгоритм PAMMIS использовался при следующих значениях параметров: точность из (26) и надежность (параметр *r* применяется в PAMMIS при построении оценок константы Гельдера *H* из (16))..

Результаты вычислительных экспериментов, усредненные по количеству решаемых задач MCOmix, представлены в таблице 2. Первый столбец показывает число используемых ядер. Во втором столбце содержится информация о среднем числе испытаний (вычислений значений критериев), выполненных в процессе глобального поиска. Третий столбец показывает получаемое ускорение (сокращение числа испытаний) при использовании параллельных вычислений. Последние два столбца содержат значений показателей HV и DU.

Таблица 2. Эффективность параллельного алгоритма PAMMIS при решении задач MCOmix

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Число ядер | Итераций | Ускорение | DU | HV |
| Оценка области Парето полученная перебором | | | | |
| 48 | 1 706 667 | - | 20,6 | 29 784,9 |
| Оценка области Парето полученная методом PAMMI | | | | |
| 1 | 86 261,6 | 1,0 | 13,8 | 30 212,3 |
| 6 | 15 406,2 | 5,6 | 14,4 | 30 317,6 |
| 12 | 6 726,1 | 12,8 | 16,2 | 30 248,3 |
| 18 | 5 972,7 | 14,4 | 14,3 | 30 551,1 |
| 24 | 3 657,4 | 23,6 | 13,9 | 30 092,3 |
| 30 | 3 162,3 | 27,3 | 14,9 | 30 443,9 |
| 36 | 2 888,7 | 29,9 | 14,6 | 30 528,7 |
| 42 | 2 028,8 | 42,5 | 15,6 | 30 046,1 |
| 48 | 1 767,6 | 48,8 | 15,3 | 30 255,5 |

Результаты выполненных вычислительных экспериментов показывают, что алгоритм PAMMIS является масштабируемым – ускорение параллельных вычислений увеличивается практически линейно с увеличением числа используемых вычислительных ядер. Получаемые значения показателей HV и DU свидетельствуют о том, что оценка множества Парето с использованием алгоритма PAMMIS вычисляется более точно и при выполнении существенно меньшего количества испытаний по сравнению с результатами, получаемыми при использовании равномерных сеток в области значений переменных .

# 6. Заключение

В статье предлагается новый подход для решения вычислительно-трудоемких задач оптимизации, в которых часть варьируемых параметров могут принимать только дискретные значения (MCOmix), Предполагается также, что критерии оптимальности могут быть многоэкстремальными, а вычисление значений критериев может требовать большого объема вычислений. Большая вычислительная сложность рассматриваемого класса обуславливает необходимость разработки параллельных методов решения, эффективно использующих высокопроизводительные вычислительные системы.

В рамках разработанного подхода решение задач смешанной оптимизации (mixed-integer optimization problems) сводятся к решению семейства оптимизационных задач глобального поиска, в которых используются только непрерывные параметры. Решение всех задач семейства осуществляется одновременно в режиме разделения времени, при котором выбор задачи оптимизации для выполнения очередной итерации глобального поиска выполняется адаптивно с учетом поисковой информации, получаемой в процессе вычислений. Как показывают результаты вычислительных экспериментов, разработанный подход позволяет значительно сократить вычислительную трудоемкость многоэтапного решения задач MCOmix.

Как заключение, можно отметить, что разработанный подход является перспективным и требует дальнейшего продолжения исследований. Прежде всего, необходимо продолжить проведение вычислительных экспериментов по решению задач многокритериальной смешанной оптимизации при большем количестве критериев эффективности и для большей размерности решаемых задач. Следует также оценить возможность организации параллельных вычислений с использованием высокопроизводительных систем с распределенной памятью.

Acknowledgements

This research was supported by the Russian Science Foundation, project No 16-11-10150 “Novel efficient methods and software tools for time-consuming decision making problems using supercomputers of superior performance.”

# References

1. Miettinen K. (1999) Nonlinear Multiobjective Optimization. Springer.
2. Ehrgott, M. (2005) Multicriteria Optimization. Springer. (2nd ed., 2010)
3. Collette, Y., Siarry, P. (2011) Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies (Decision Engineering). Springer.
4. Marler, R. T., Arora, J. S. (2009). Multi-Objective Optimization: Concepts and Methods for Engineering. VDM Verlag.
5. Pardalos, P.M., Žilinskas, A., Žilinskas, J. (2017) Non-Convex Multi-Objective Optimization. Springer.
6. Marler, R., Arora , J.: Survey of multi-objective optimization methods for engineering. Struct. Multidisc. Optim. 26, 369-395 (2004)
7. Figueira,J., Greco, S., Ehrgott, M., (eds.): Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. Springer, New York (NY). (2005)
8. Zavadskas, E.K., Turskis, Z., Kildien\_e, S.: State of art surveys of overviews on MCDM/MADM methods. Technol. Econ. Dev. Econ. 20, 165-179 (2014)
9. Hillermeier, C., Jahn, J.: Multiobjective optimization: survey of methods and industrial applications. Surv. Math. Ind. 11, 1-42 (2005)
10. Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowinski, R., editors. (2008). Multi-Objective Optimization—Interactive and Evolutionary Approaches // Springer, Berlin.
11. Voutchkov, I., Keane, A.: Multi-objective optimization using surrogates. Comput. Intell. Optim. Adapt. Learn. Optim. 7, 155–175 (2010)
12. Eichfelder, G. (2009) Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems // Comput. Optim. Appl. 44, 249–273
13. Burer, S., Letchford, A.N.: Non-convex mixed-integer nonlinear programming: a survey. Surv. Oper. Res. Manage. Sci. 17, 97–106 (2012)
14. Boukouvala, F., Misener, R., Floudas, C.A.: Global optimization advances in mixed-integer nonlinear programming, MINLP, and constrained derivative-free optimization, CDFO. Eur. J. Oper. Res. 252, 701–727 (2016)
15. Belotti, P., Lee, J., Liberti, L., Margot, F., W¨achter, A.: Branching and bounds tightening techniques for non-convex MINLP. Optim. Methods Softw. 24(4–5), 597–634 (2009)
16. Vigerske, S., Gleixner, A.: SCIP: global optimization of mixed-integer nonlinear programs in a branch-and-cut framework. Optim. Methods Softw. 33(3), 563–593 (2018)
17. Deep, K., Singh, K.P., Kansal, M.L., Mohan, C.: A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. Appl. Math. Comput. 212(2), 505–518 (2009)
18. Schlüter, M., Egea, J.A., Banga, J.R.: Extended ant colony optimization for nonconvex mixed integer nonlinear programming. Comput. Oper. Res. 36(7), 2217–2229 (2009)
19. Gergel, V.: An Unified Approach to Use of Coprocessors of Various Types for Solving Global Optimization Problems. 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry, 13–18 (2015) DOI: 10.1109/MCSI.2015.18
20. [Gergel, V.P.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603540044), [Kozinov, E.A.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=50061518600) [Accelerating Parallel Multicriterial Optimization Methods Based on Intensive Using of Search Information](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85027349183&origin=resultslist). Procedia Computer Science, 2017, 108, 1463-1472
21. Gergel, V.P., Kozinov, E.A. (2018) Efficient multicriterial optimization based on intensive reuse of search information. J Glob Optim. DOI: DOI: 10.1007/s10898-018-0624-3
22. [Gergel, V.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603540044), [Kozinov, E.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=50061518600) [Multilevel parallel computations for solving multistage multicriteria optimization problems](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85087531385&origin=resultslist). LNCS, 2020, 12137, 78-81.
23. Gergel V., Barkalov K., Lebedev I. A Global Optimization Algorithm for Non-Convex Mixed-Integer Problems. LNCS, 2019, vol 11353. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05348-2\_7
24. Strongin, R., Sergeyev, Ya. (2000) Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2nd ed. 2013, 3rd ed. 2014).
25. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. (2013) Introduction to global optimization exploiting space-filling curves. Springer.
26. Zhigljavsky, A.A.: Theory of Global Random Search. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1991)
27. Pintér, J.D.: Global Optimization in Action (Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications). Kluwer Academic Publishers, Dortrecht (1996)
28. Zhigljavsky, A., Žilinskas, A. (2008) Stochastic Global Optimization. Springer, Berlin (2008)
29. Locatelli, M., Schoen, F.: Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications. SIAM, Philadelphia (2013)
30. Paulavičius, R., Žilinskas, J. (2014). Simplicial Global Optimization. Springer Briefs in Optimization, Springer.
31. Floudas, C.A., Pardalos, M.P.: Recent Advances in Global Optimization. Princeton University Press, Princeton (2016)
32. Strongin R.G., Sergeyev Y.D., Global multidimensional optimization on parallel computer, Parallel Computing, 18(11), 1259−1273, (1992).
33. Y. D. Sergeyev, An information global optimization algorithm with local tuning, SIAM J. Optim., 5(4), 858–870 (1995).
34. Y. D. Sergeyev, V. A. Grishagin, Parallel asynchronous global search and the nested optimization scheme, J. Comput. Anal. Appl., 3(2), 123–145, (2001),
35. Sergeyev Ya.D., Famularo D., Pugliese P., Index Branch-and-Bound Algorithm for Lipschitz univariate global optimization with multiextremal constraints, Journal of Global Optimization, 21(3), 317-341, (2001).
36. Lera D., Sergeyev Y.D., Lipschitz and Holder global optimization using space-filling curves, Appl. Numer. Math, 60 (1-2), 115-129, (2010).
37. Sergeyev Y.D., Kvasov D.E., A deterministic global optimization using smooth diagonal auxiliary functions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 21 (1-3), 99-111, (2015).
38. Grishagin, V., Israfilov, R., Sergeyev, Y. (2016) Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization. AIP Conference Proceedings, 1776, 060011 DOI: 10.1063/1.4965345
39. Sergeyev Y.D., Nasso M.C., Mukhametzhanov M.S., Kvasov, D.E (2021) Novel local tuning techniques for speeding up one-dimensional algorithms in expensive global optimization using Lipschitz derivatives, Journal of Computational and Applied Mathematics, 383, article number 113134.
40. V. Grishagin, Y. Sergeyev, R. Strongin, Parallel characteristical global optimization algorithms, Journal of Global Optimization 10 (1997) 185-206.
41. Gergel, V.P. and Barkalov, K.A. and Sysoyev, A.V. A novel supercomputer software system for solving time-consuming global optimization problems // Numerical Algebra, Control & Optimization, 8(1), pp. 47--62 (2018)
42. Evtushenko, Yu.G., Posypkin, M.A. Method of non-uniform coverages to solve the multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy // Automation and Remote Control, \textbf{75}(6), 1025--1040 (2014)
43. Žilinskas, A., Žilinskas, J. (2015). Adaptation of a one-step worst-case optimal univariate algorithm of bi-objective Lipschitz optimization to multidimensional problems // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 21, 89--98.
44. Gaviano, M., Kvasov, D.E, Lera, D., and Sergeyev, Ya.D.: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization. ACM Transactions on Mathematical Software 29(4), 469-480 (2003)
45. Barkalov K., Lebedev I. (2019) Parallel Global Optimization for Non-convex Mixed-Integer Problems. In: Voevodin V., Sobolev S. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2019. Communications in Computer and Information Science, vol 1129. pp 98-109

1. Следует отметить, что такой подход обеспечивает возможность использования для решения задач МКО широкое множество уже существующих методов глобальной оптимизации. [↑](#footnote-ref-1)
2. Упорядоченность данных отражается использованием нижнего индекса [↑](#footnote-ref-2)