К.А. Баркалов, Е.А. Козинов, И.Г. Лебедев, А.В. Сысоев, М.А. Усова

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ методы решения задач многокритериальной многоэкстремальной оптимизации для многопроцессорных систем[[1]](#footnote-1)\*

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Н. Новгород,  
{konstantin.barkalov,evgeny.kozinov}@itmm.unn.ru

Введение

К числу вычислительно-трудоемких задач, для решения которых могут потребоваться суперкомпьютерные системы, относятся проблемы многокритериальной многоэкстремальной оптимизации в самых разнообразных областях и приложениях. В задачах такого вида допускается, что критерии могут иметь несколько локальных оптимумов в области поиска, которые имеют различные значения. Наличие нескольких локальных оптимумов существенно усложняет поиск глобального оптимума, так как требует исследования всей допустимой области поиска. В случае нескольких критериев сложность решаемой задачи многократно возрастает, так как за частую необходимо найти целое множество компромиссных вариантов.

Постановки задач глобальной оптимизации используются, как правило, в наиболее трудных ситуациях оптимального выбора, когда проводится моделирование сложных технических объектов, изделий и систем. Показатели эффективности моделируемой системы могут являться нелинейными, области поиска могут быть несвязными, а вычислительная сложность функционалов, лежащих в основе оптимизируемых критериев, может быть значительной.

Многокритериальные постановки задач используются в случаях, когда объект оптимизации сложно описать одним критерием. Решение подобных задач, как правило, требует определения значимости каждого критерия, а затем решения серии задач глобального поиска. В некоторых случаях значимость критериев может меняться, что приводит к необходимости решения новых задач глобального поиска.

Общее состояние исследований в области глобальной оптимизации достаточно полно представлено в ряде ключевых работах [1-5]. Основные методы решения многокритериальных задач оптимизации можно найти в работах [6-8].

Коллективом авторов разработана система Globalizer, сочетающая эффективные методы решения задач многокритериальной многоэкстремальной оптимизации [9-14]. В данной работе показаны ключевые особенности и продемонстрирована эффективностью методов, реализованных в Globalizer.

Постановка задачи

В рамках системы Globalizer задача многокритериального глобального поиска (МКП) состоит в решении задач вида:

(1)

(2)

где, , критерии эффективности, вектор варьируемых параметров, а размерность решаемой задачи. Предполагается, что критерии , *,* являются многоэкстремальными, заданы в виде «черного ящика» и удовлетворяют условию Липщица

(3)

где , априори неизвестные константы Липщица.

В качестве частного решения задачи МКП может рассматриваться любой эффективный (Парето-оптимальный) вариант, в котором нельзя уменьшить значения сразу всех критериев , , путем изменения значений параметров . Как отмечалось ранее, чтобы решить задачу МКП, как правило, необходимо найти несколько эффективных вариантов.

Подход к решению задач многокритериального поиска

На практике, для поиска эффективных вариантов часто применяются различные методы скаляризации [6-9]. В рамках настоящего исследования применяется минимаксная свертка частных критериев, обладающая хорошими теоретическими свойствами

, (4)

где , , есть показатели значимости каждого критерия.

В рамках предлагаемого подхода для решения скалярных задач оптимизации (4) используется информационно-статистическая теория глобального поиска. При решении задач с несколькими параметрами (), выполняется редукция размерности на основе кривых или разверток Пеано [4]. Для поиска оптимального решения выполняются испытания. Под испытанием понимается вычисление значений критериев , , из (4) при заданных значениях параметра , а также выбранном наборе коэффициентов . Выбор значений оптимизируемых параметров выполняется согласно следующим правилам.

1. Для каждого набора значений параметров , , для которых были выполнены испытания, используя развертку Пеано, получить образ , , на одномерной отрезке [0,1].
2. Разбить отрезок [0,1] на интервалы согласно образам проведенных испытаний.
3. Вычислить характеристику для каждого интервала.
4. Выбрать интервал с максимальным значением характеристики .
5. В выбранном на одномерном отрезке интервале определить очередное значение для проведения испытаний.
6. По выбранному значению на одномерном отрезке определить значения параметров проведения нового испытания.

Алгоритм заканчивает выполнение при достижении требуемой точности. В предлагаемом подходе, после остановки алгоритма глобального поиска, на основе накопленной в процессе оптимизации информации строится оценка области Парето. Если качество полученной оценки области Парето является не достаточным, то задаются новые предпочтения (набор коэффициентов ) и процесс поиска продолжается.

Для эффективного параллельного поиска в рамках системы   
Globalizer реализованы несколько модификаций.

Первая модификация позволяет параллельно и совместно решать сразу несколько задач (4) при разных наборах коэффициентов . Каждая решаемая задача (4) может быть запущенна на отдельном вычислительном узле. Эффективность поиска повышается за счет обмена, хранения и повторного использования вычисленных значений критериев [13].

Вторая модификация позволяет задействовать параллельные свойства каждого отдельного вычислительного узла. При выполнении правил 4-6 алгоритма глобального поиска, выбирается не один, а несколько интервалов с максимальным значением характеристик. В каждом выбранном интервале вычисление очередной точки испытания и значений критериев может быть выполнено параллельно [4,13].

Эффективность разработанных параллельных алгоритмов показана на примере решения серии задач многокритериальной оптимизации.

Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский» Нижегородского государственного университета. Для демонстрации эффективности разработанных алгоритмов были выполнены эксперименты по решению 100 тестовых четырехмерных десятикритериальных задач с критериями, получаемыми при помощи генератора GKLS [4], т.е. , .

Условием остановки метода при решении очередной задачи оптимизации из (4) являлось нахождение набора параметров в   
-окрестности минимального значения соответствующей свертки частных критериев. Точность поиска была выбрана . Для решения каждой задачи МКП решалось задач (4) при разных значениях коэффициентов свертки . Результаты вычислений были усреднены по всем решенным задачам МКП.

Результаты экспериментов представлены в таблице 1. Первые два столбца в таблице 1 обозначают количество используемых процессоров (*P*) и вычислительных ядер каждого процессора (*Q*). В третьем столбце (*P*\**Q*) содержится общее количество используемых вычислительных ядер при решении задачи МКП. В четвертом и пятом столбце приведено среднее количество итераций и испытаний, необходимых для нахождения решения задач. Последний столбец содержат информацию об ускорении параллельных вычислений.

Таблица 1

**Эффективность параллельного метода   
решения задач многокритериальной оптимизации**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P\*Q** | **Итераций** | **Испытаний** | **Ускорение** |
| 1 | 1 | 1 | 23 791.80 | 23 791.80 | 1 |
| 1 | 40 | 40 | 616.4 | 24 654.80 | 38.6 |
| 50 | 1 | 50 | 594.5 | 29 723.10 | 40.0 |
| 50 | 40 | 2000 | 21.0 | 41 967.70 | 1 134.0 |

Из таблицы 1 следует, что использование 40 вычислительных ядер или 50 процессоров позволяет получить ускорение около 40 раз. При использовании в общей сложности 2000 вычислительных ядер величина ускорения достигает величины 1134. С учетом сложности решаемой задачи получаемые ускорения вычислений является значительным.

Заключение

В рамках работы демонстрируются возможности системы   
Globalizer реализующей эффективные методы решения сложных многокритериальных задач оптимизации, в которых критерии оптимальности могут быть многоэкстремальными, а вычисление значений критериев может требовать большого объема вычислений.

Эффективность реализованных методов основана на хранении и повторном использовании поисковой информации, а также на использовании нескольких уровней параллелизма в гетерогенных вычислительных системах. Представленные результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность предлагаемых подходов.

1. **Floudas C.A.** Recent advances in global optimization / C.A. Floudas, M.P. Pardalos*.* – Princeton University Press, 2016. – 644 p.
2. **Locatelli M.** Global optimization: theory, algorithms and applications / M. Locatelli, F. Schoen.– SIAM, 2013. – 432 p.
3. **Pintér J.D.** Global optimization in Action (Continuous and Lipschitz optimization: algorithms, implementations and applications) / J.D. Pintér.– Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. – 480 p.
4. **Strongin R.G.** Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms / R.G. Strongin, Y.D. Sergeyev*.* – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 2nd ed. 2013, 3rd ed. 2014. – 704 p.
5. **Pardalos M.P.** Advances in stochastic and deterministic global optimization / M.P. Pardalos, A.A. Zhigljavsky, J. Žilinskas*.* – Springer, 2016. – 296 p.
6. **Miettinen K.** Nonlinear Multiobjective Optimization / K. Miettinen*.* – Springer, 1999. – 298 p.
7. **Ehrgott M.** Multicriteria Optimization / M. Ehrgott*.* – Springer, 2005. – 323 p.
8. **Pardalos P.M.** Non-Convex Multi-Objective Optimization / P.M. Pardalos, A. Žilinskas, J. Žilinskas*.* – Springer, 2017. – 192 p.
9. **Gergel V.** Adaptive nested optimization scheme for multidimensional global search / V. Gergel, V. Grishagin, A. Gergel // Journal of Global Optimization. – 2016. – №66(1). – P. 35–51.
10. **Sysoyev A.** Globalizer – A parallel software system for solving global optimization problems / A. Sysoyev, K. Barkalov, V. Sovrasov, I. Lebedev, V. Gergel // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – №10421. – P. 492-499.
11. **Barkalov K.A.** Acceleration of global optimization algorithm by detecting local extrema based on machine learning / K.A. Barkalov, I.G. Lebedev, E.A. Kozinov // Entropy. – 2021. – № 23. – P. 1272.
12. **Gergel V.P.** Efficient multicriterial optimization based on intensive re-use of search information / V.P. Gergel, E.A. Kozinov// In: J. Glob. Optim. – 2018. – №71(1). – P. 73-90.
13. **Gergely V.P.** Parallel solving of multiple information-coordinated global optimization problems / V.P. Gergely, E.A. Kozinov // Journal of Parallel and Distributed Computing. – 2021. – № 154. – P. 153-162.
14. **Barkalov K.A.** An Approach for Simultaneous Finding of Multiple Efficient Decisions in Multi-objective Optimization Problems / K.A. Barkalov, V.P. Gergel, V.A. Grishagin, E.A. Kozinov // Lecture Notes in Computer Science. – 2021. – № 12755. – P. 127-143.

Коды ГРНТИ:

50.41.25, 50.51.17

1. \* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (соглашение № 075-02-2021-1394). [↑](#footnote-ref-1)