Sea $f(n) = 2^n$, probemos que para todo n dado $f(n) \in \mathcal{O}(1)$
¿Esto significa que $2^n \in \mathcal{O}(1)$?

Definición

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{O}(g) \overset{\text{def}}{=} \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}_{>0})\ \ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \ \forall n \geq n_0\}$$

$n = 1 \qquad 2^n = 2 < c_1$

$n \to n+1$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot c_n = c_{n+1} \quad \checkmark$$

ESTO NO ES UNA DEMO. VÁLIDA.

PARA EJEMPLO DE DEMO POR INDUCCIÓN VER LA SIGUIENTE HOJA

Probemos que $n2^n \in \mathcal{O}(3^n)$.

Definición

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Entonces:

$$\underbrace{\mathcal{O}(g)}_{g=3^n} \overset{\text{def}}{=} \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}_{>0})\ f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0\}$$

$\exists\, n_0, c \quad n2^n \leq c \cdot 3^n$

$\forall n \geq n_0$.

$c = 1$

$n_0 = 1$

CASO BASE

$n = 1$

$$n2^n = 1 \cdot 2^1 = 2 \leq \cancel{c}\, 1 \cdot 3^1 \to 2 \leq 3 \checkmark$$

CASO INDUCTIVO

$HI: n2^n \leq 1 \cdot 3^n$

$$(n+1)2^{n+1} = n2^{(n+1)} + 2^{n+1} = 2 \cdot n2^n + 2^{n+1} \underset{HI}{\leq} \boxed{2 \cdot 3^n} + 2^{n+1} \leq 2 \cdot 3^n + n2^n \underset{HI}{\leq} 3 \cdot 3^n$$

$$\boxed{\frac{2 \cdot 2^n}{2^n} \leq \frac{n2^n}{2^n} \quad n \geq 2}$$

Demostrar que, vistas como funciones de $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, vale:

$$x^p \in \mathcal{O}(b^x) \qquad x^3 \qquad 4^x$$

para toda base $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > 1$ y para todo exponente $p \in \mathbb{N}$.

$x_0\, C$

$\forall x \geq x_0$

$$x^p \leq C \cdot b^x$$

$$x^p \leq \underline{\qquad} \cdot b^x$$

C

$x_0 = 1$

Ayuda:

Dados $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > 1$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $b^k \geq 2$ vale la siguiente desigualdad para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y para todo $n, p \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{x}{pk}\right)^n \leq b^{n(\frac{x}{p}+k)}$$

$\forall x$

$\forall n, p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\left(\frac{x}{pk}\right)^n \leq b^{n(\frac{x}{p}+k)}}$$

$$\leq b^{\frac{nx}{p}} \cdot b^{kn}$$

$$(b^x)^{\frac{n}{p}}$$

pido $n = p$

$$\left(\frac{x}{pk}\right)^p \leq (b^x)^{\frac{p}{p}} \cdot b^{kp}$$

$$x^p \left(\frac{1}{pk}\right)^p \leq b^x \cdot b^{kp}$$

$$x^p \leq b^x \underbrace{\boxed{b^{kp}(pk)^p}}_{C}$$

DivisoresDePares(A : arreglo(nat))

> *total* ← 0
> **para** i ← 0...*tam*(A) − 1 **hacer**
>   **si** 2 divide a $A[i]$ **entonces**
>   **para** j ← 0...*tam*(A) − 1 **hacer**
>   **si** $A[j]$ divide a $A[i]$ **entonces**
>   *total* ← *total* + 1
>   **devolver** total

1. ¿La complejidad del *mejor caso* es $\mathcal{O}(n^2)$?
2. ¿La complejidad del *peor caso* es $\Omega(n)$?

$n \in O(n^2)$

$n^2 \in \Omega(n)$

Mejor caso = A[i] es impar || ~~[ ]~~ n=0

$\left.\begin{array}{l} O(n) \\ \Omega(n) \end{array}\right\} \Theta(n)$

¿$O(n^2)$? ✓

$O(n) \leq O(n^2)$

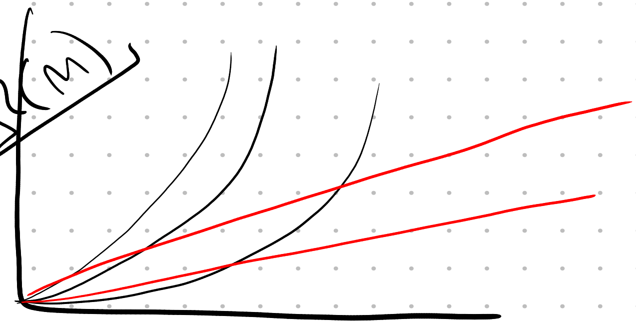
$n \in O(n^2)$

Peor caso: A[i] par.

$\{A[j] \mid A[i] \ \forall i, j \in \text{rango}\}$ n

$\left.\begin{array}{l} O(n^2) \\ \Omega(n^2) \end{array}\right\} \Theta(n^2)$ es $\Omega(n)$?

$\Omega(n^2) \leq \Omega(n)$



```
BÚSQUEDAMATRICIAL(A : arreglo(arreglo(nat)), e : nat)
para i ← 0...tam(A) − 1 hacer                N
    para j ← 0...tam(A[0]) − 1 hacer         M
        si A[i][j] == e entonces
            devolver true
devolver false.
```

MATRIZ:

- N FILAS
- ~~N~~ M COLUMNAS.

· COMPLEJIDAD

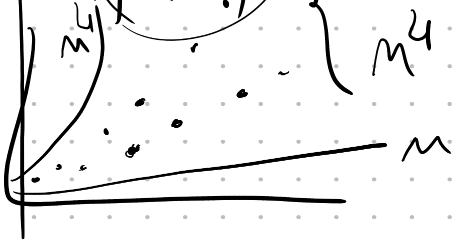
Mejor caso: $\Theta(1)$
(está en A[0][0])

Peor caso: $\Theta(n^2)$ → $\Theta(N \cdot M)$
(no está)

$$\begin{matrix} a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a \end{matrix}$$

$(n \log(n))^2 + \sqrt{n}$

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ par} \\ n^4 & n \text{ impar} \end{cases}$$



$f(n) \in \Theta(f(n))$ $n_0 = 1$

$f(n) \leq 1 \cdot f(n)$

ALG:

$O + O + O$

$O(n^2) \leq O(n^2 \sqrt{n}) \leq O(n^2 \log(n))$