Algoritmos y Estructuras de Datos 2
Parcial 4

Leandro Carreira
669/18

Documento online: https://docs.google.com/document/d/1Vj76q07aYvwFVg1i9osum9DHRv-vlz2ccWmxJPVsAHg/edit?usp=sharing

---

Ej. 1. Sorting

Se tiene un arreglo P con n puntos de coordenadas enteras ($P[i] = (x_i, y_i)$ con $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$), todos distintos. Sabemos que en P hay a lo sumo $\frac{n}{\log n}$ puntos que están fuera del círculo de centro $(0,0)$ y radio n.

Dar un algoritmo estable de tiempo $O(n)$ que ordene los puntos según su distancia al origen $(0,0)$. Por ejemplo: si tenemos $P = [(1,0), (-3,4), (0,1), (2,-1)]$, el resultado debe ser $[(1,0), (0,1), (2,-1), (-3,4)]$.

Demostrar que el algoritmo propuesto efectivamente ordena el arreglo, que es estable y que cumple con la cota de complejidad pedida.

Resolución:

Sé que voy a tener que calcular distancias (o medida equivalente) para cada uno de los n puntos, tarea con complejidad O(n)

Suponiendo que ya tengo las distancias calculadas, divido el análisis en dos partes:

Primero investigo qué forma tiene la cota de puntos exteriores a la circunferencia de radio n:

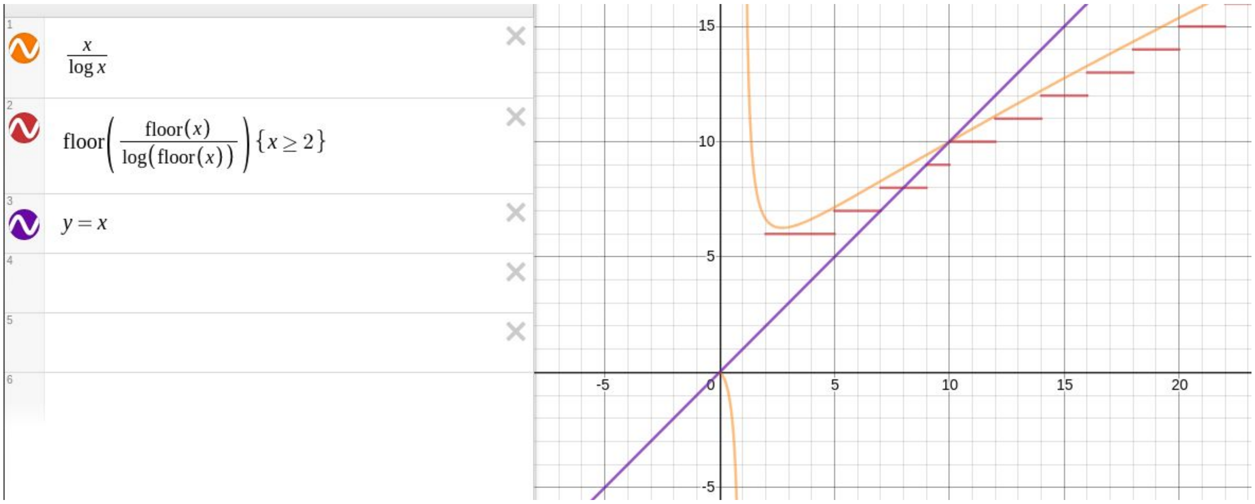
- Para n ≤ 1, la función se indetermina, por lo que es necesario que n sea mayor o igual a 2.

  esto es asumiendo log en base 10
- En el siguiente gráfico, se observa como para valores de n por debajo de 10, todos los puntos pueden estar por afuera de la circunferencia, pero a partir de 11 inclusive, la cantidad de puntos que pueden estar afuera de la circunferencia pueden ser A LO SUMO un número estrictamente menor a la cantidad total de puntos.

  Esto da una intuición que los puntos exteriores NO crecen a la misma velocidad que n.

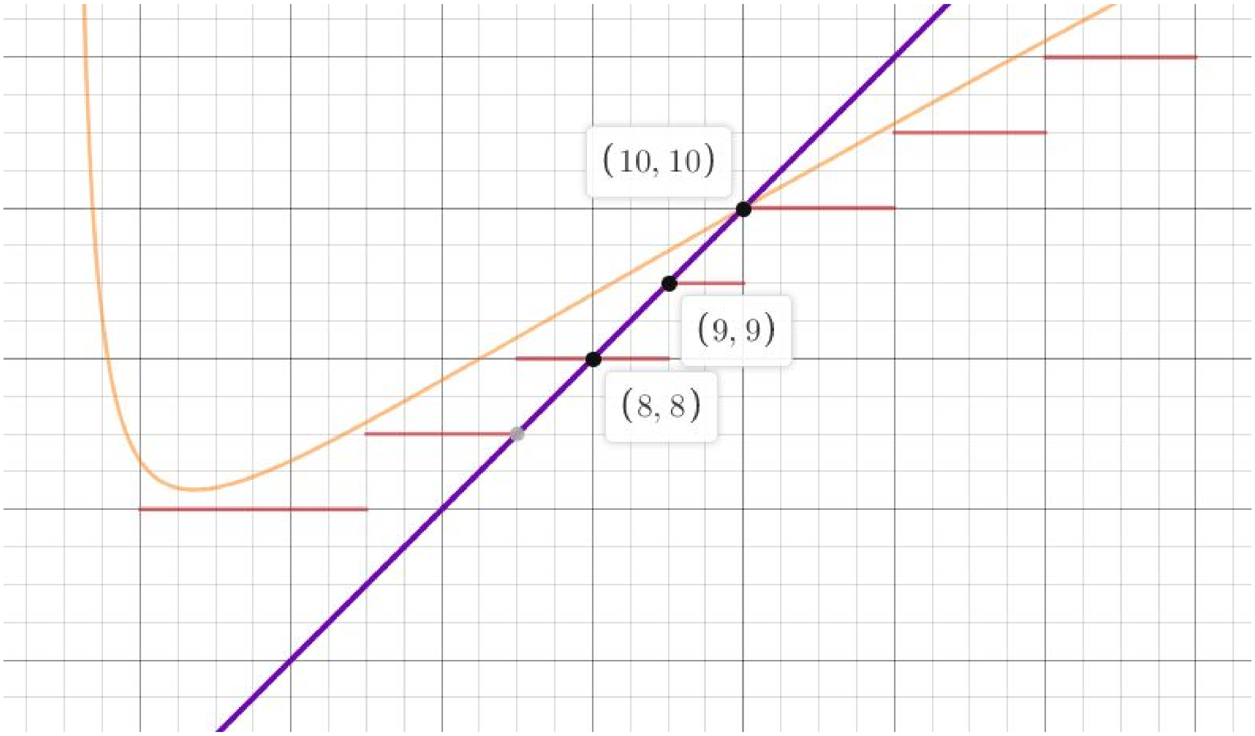
  Grafico:
  - En Naranja función en R
  - En Rojo función con valores en Z
  - En Violeta, función identidad

  (notar que n se representa con la letra x)



$\frac{x}{\log x}$
$\operatorname{floor}\left(\frac{\operatorname{floor}(x)}{\log(\operatorname{floor}(x))}\right)\{x \geq 2\}$
$y = x$
15
10
5
-5
0
5
10
15
20

600
400
200
-200
-200
0
200
400
600
800
1000
1200



buen análisis!

Con esta intuición en mente, puedo ser más formal y probar cual es la cota de complejidad para un algoritmo de ordenamiento estable como Merge Sort, con complejidad O(n log n) en condiciones generales:

Sea n la cantidad total de puntos como define el enunciado, llamo n_c a la cantidad de **puntos exteriores al círculo de radio n**, por lo tanto:

$n_c \leq n / \log n$

Pues n / log n puede no ser entero, por lo que n_c se redondea hacia abajo (no hay "pedacitos" de puntos). bien

Con esto, calculo la cota de complejidad del Merge Sort, pero solo para los puntos exteriores al círculo, que es:

$O(n_c \log n_c)$

Reemplazando con el peor caso ($n_c = n / \log n$) (parte entera)

$$n_c \log n_c = \frac{n}{\log n} * \log \frac{n}{\log n}$$

Por prop de log:

$$n_c \log n_c = \frac{n}{\log n} * (\log n - \log(\log n))$$
$$n_c \log n_c = \frac{n}{\log n} * \log n - \frac{n}{\log n} * \log(\log n)$$
$$n_c \log n_c = n - n * \frac{\log(\log n)}{\log n}$$

bien

Y como log(log n) / log n es **menor a 1** para todo n en Z mayor o igual a 2

$$n_c \log n_c < n$$

Por lo tanto, la complejidad de ordenar los puntos por afuera del círculo de radio n puede acotarse por:

O(n) bien

Ya se cómo ordenar los puntos por afuera del círculo con la cota de complejidad solicitada, faltan los de adentro.

Para el interior de la circunferencia, uso el dato de que **las coordenadas están en Z**:

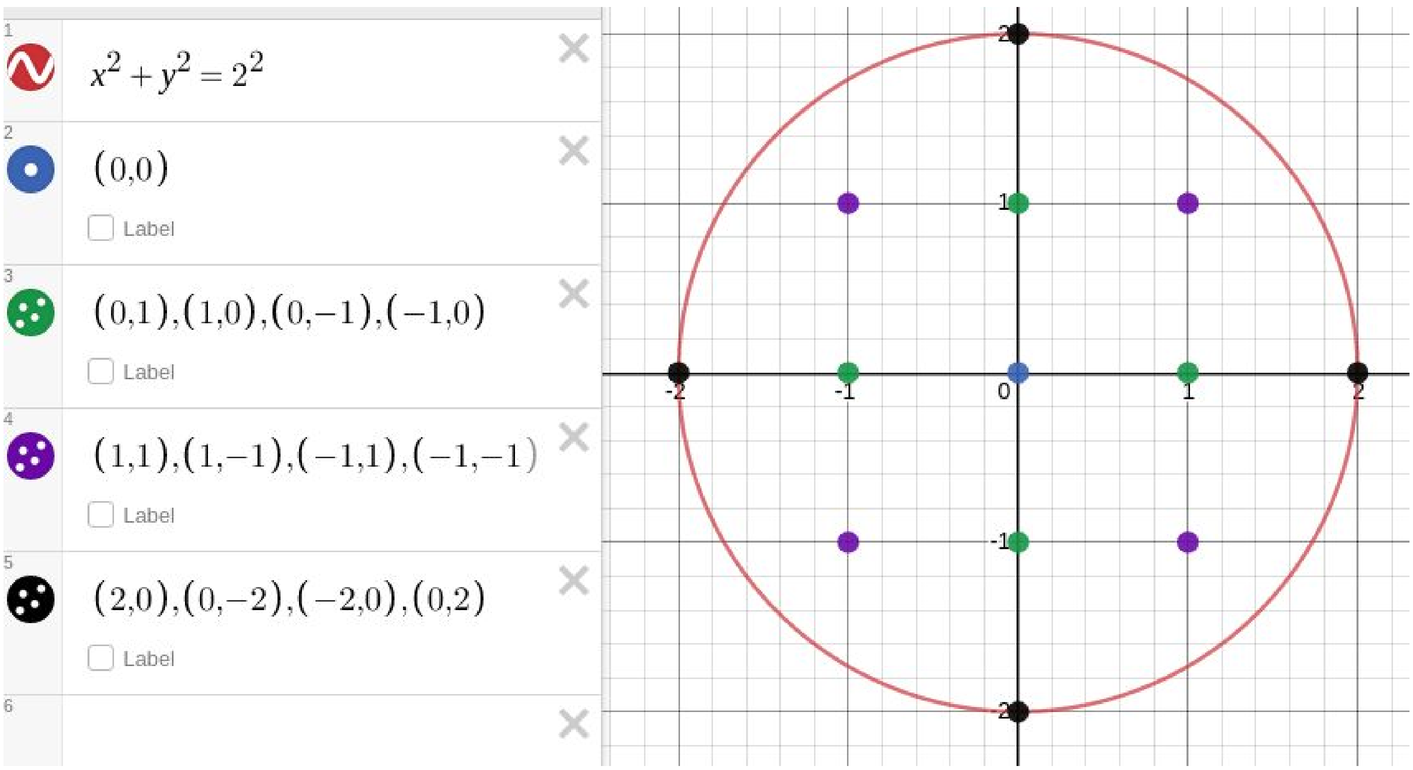
Como las coordenadas están en Z, y n es un número finito natural, entonces **la cantidad de distancias posibles al centro también estará acotada**.

Por ejemplo:

para **n=2**, habrá **13 puntos**, cuyas distancias (diferenciadas en colores) serán 4 **distintas**:

$$Distancia \in \{0,\ 1,\ \sqrt{2},\ 2\}$$

Dadas al resolver $D(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



esta cota no vale :(, ¿cómo fue calculada?

Dado que existen 2*n+1 posibles valores en x para un círculo de radio n, con n la distancia máxima posible, puedo usar la suma de los valores absolutos de las coordenadas como unidad de medida para establecer el órden de los puntos. Contraejemplo, para n=10 hay 49 ptos. y sigue creciendo.

Juntando todo, se qué:

Calcular todas las distancias me lleva **O(n)**

Ordenar las coordenadas exteriores a la circunferencia se acota por **O(n)** con **Merge Sort**

Ordenar las coordenadas interiores (y el borde) de la circunferencia se acota por **O(n)** usando **Bucket Sort** sobre los (como máximo) **n** elementos dentro de la circunferencia.

La idea para ordenar los puntos interiores, es usar radix sort en base n. Ya que la cantidad de dígitos, de una coordenada <= n^2, es a lo sumo 3.

Algoritmo:

```
coordenada es tupla de int con signo

ordenarPuntos(inout P: arreglo(coordenada))
    int n ← tam(P)                                                 O(1)
    lista(coordenada) Afuera ← Vacía()                                 O(1)
    arreglo(lista(coordenada)) Adentro ← crearArreglo(2*n+1)           O(n)

    // Inicializo buckets
    for i ← 0 to 2*n+1 do                                          O(n)
        Adentro[i] ← Vacía()                                           O(1)
    end for

    // Recorro todos los puntos
    for i ← 0 to n do                                                  O(n)
        // Calculo distancia
        int d ← (P[i].prim)^2 + (P[i].segu)^2                      O(1)
        if d > n^2 then
            // Punto fuera del círculo
            AgregarAtrás(Afuera, P[i])                                 O(1)
        else
            // Punto dentro del círculo
            // Uso suma de valores absolutos como medida de distancia/orden
            int j ← abs(P[i].prim) + abs(P[i].segu)                    O(1)
            AgregarAtrás(Adentro[j], P[i])                             O(1)
        end if
    end for

    // Ordeno los puntos exteriores usando un MergeSort que computa y ordena
    // la suma de los cuadrados de las componentes de cada tupla en O(1)
    // MergeSort recibe arreglo para acceder a sus elementos en el tiempo deseado.
    // Ordena por distancia cuadrada. Más información debajo de algoritmo.
    lista(coordenada) listaDeExteriores ← MergeSort(deListaAArreglo(Afuera))
                                                                       O(n)

    // Transformo arreglo de puntos interiores a lista
    lista(coordenada) listaDeInteriores ← deArregloALista(Adentro)
                                            O(Longitud(listaDeInteriores))

    // Concateno listas en orden creciente de distancias y
    // convierto a Arreglo para devolver el mismo tipo de entrada
    P ← concatenarListasYConvertirAArreglo(listaInteriores, listaDeExteriores)
                                                                       O(n)
```

Esta es la distancia Manhattan y no es equivalente con la distancia euclidiana. Contraejemplo: (2,8) y (4,7) los ordenes según dist euclidiana y manhattan son distintos

bien

```
deListaAArreglo(in A: lista(coordenada), out O: arreglo(coordenada))
    arreglo(coordenada) O ⟵ crearArreglo(Longitud(A))          O(Longitud(A))
    for i ⟵ 0 to Longitud(A) do                                  O(Longitud(A))
        O[i] ⟵ A[0]                                              O(1)
        // Borro primer elemento de A
        Fin(A)                                                   O(1)
    end for
```

bien

```
deArregloALista(in A: arreglo(lista(coordenada)), out O: lista(coordenada))
    lista(coordenada) O ⟵ Vacía()                                O(1)
    for i ⟵ 0 to tam(A) do                                       O(tamA)
        concatenar(O, A[i])                                      O(n)
    end for
```

bien

falta justificar por qué la complejidad final es lineal y no cuadrática

```
concatenar(inout A: lista(coordenada), in B: lista(coordenada))
    for i ⟵ 0 to Longitud(B) do                                  O(Longitud(B))
        AgregarAtrás(A, B[i])                                    O(1)
    end for
```

bien

```
concatenarListasYConvertirAArreglo(inout A: lista(coordenada),
                                   inout B: lista(coordenada),
                                   out C: arreglo(coordenada))
    arreglo(coordenada) C ⟵ crearArreglo(Longitud(A) + Longitud(B))      O(n)
    int longA ⟵ Longitud(A)                                              O(1)
    int longB ⟵ Longitud(B)                                              O(1)
    // Nota: longA + longB = n
    for i ⟵ 0 to longA do                                             O(longA)
        C[i] ⟵ A[0]   primero(A)                                         O(1)
        // Borro primer elemento de A
        Fin(A)                                                           O(1)
    end for
    for i ⟵ 0 to longB do      (j)                                    O(longB)
        C[longA + j] ⟵ A[0]     primero(A)                               O(1)
        // Borro primer elemento de B
        Fin(B)                                                           O(1)
    end for
```

Sobre MergeSort

MergeSort() recibe una lista de coordenadas para las cuales computa sus componentes al cuadrado en una primer pasada por todos los puntos n*O(1), los guarda en un

¿cuál es el tiempo de búsqueda de estas claves en el diccionario?
diccionario con clave coordenada y valor distancia cuadrado n*O(copia(int)) ≡ n*O(1), y utiliza estas distancias para comparar coordenadas de forma rápida.
debería ser O(1) para que el caso base de merge sort se mantenga cte
(es más barato calcular la distancia en el momento)

Agrega una complejidad de O(n) al principio del algoritmo, que ya se encuentra acotada por la complejidad del algoritmo de O(n) para la cantidad de datos exteriores a la circunferencia (demo de esto al comiendo del ejercicio).

O sea, O(n) + O(n) ≡ O(n + n) ≡ O(n)

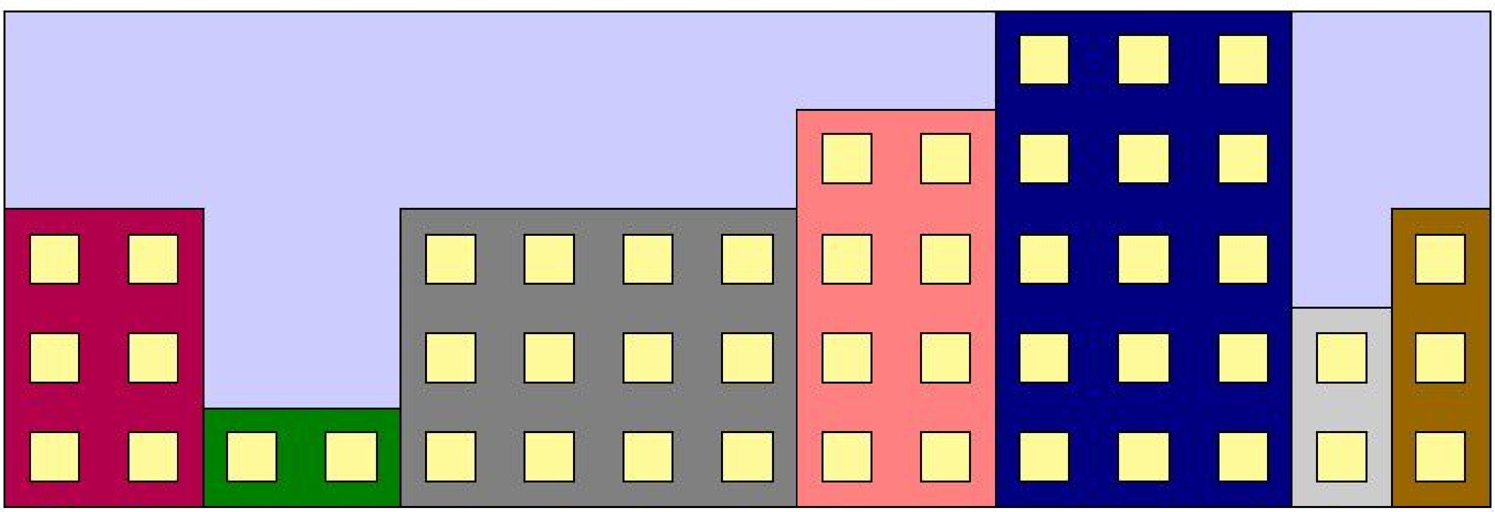
Ej. 2. Dividir y conquistar

Durante la cuarentena, un fotógrafo quiere sacar la foto perfecta para subir a las redes sociales. Su idea es retratar la vida en la nueva cotidianeidad, vista a través de las ventanas.

Los edificios que ve desde su ventana son rectángulos, uno inmediatamente al lado de otro, sin superposiciones. Por una regulación municipal, todos los edificios de la ciudad tienen una altura máxima de 30m.

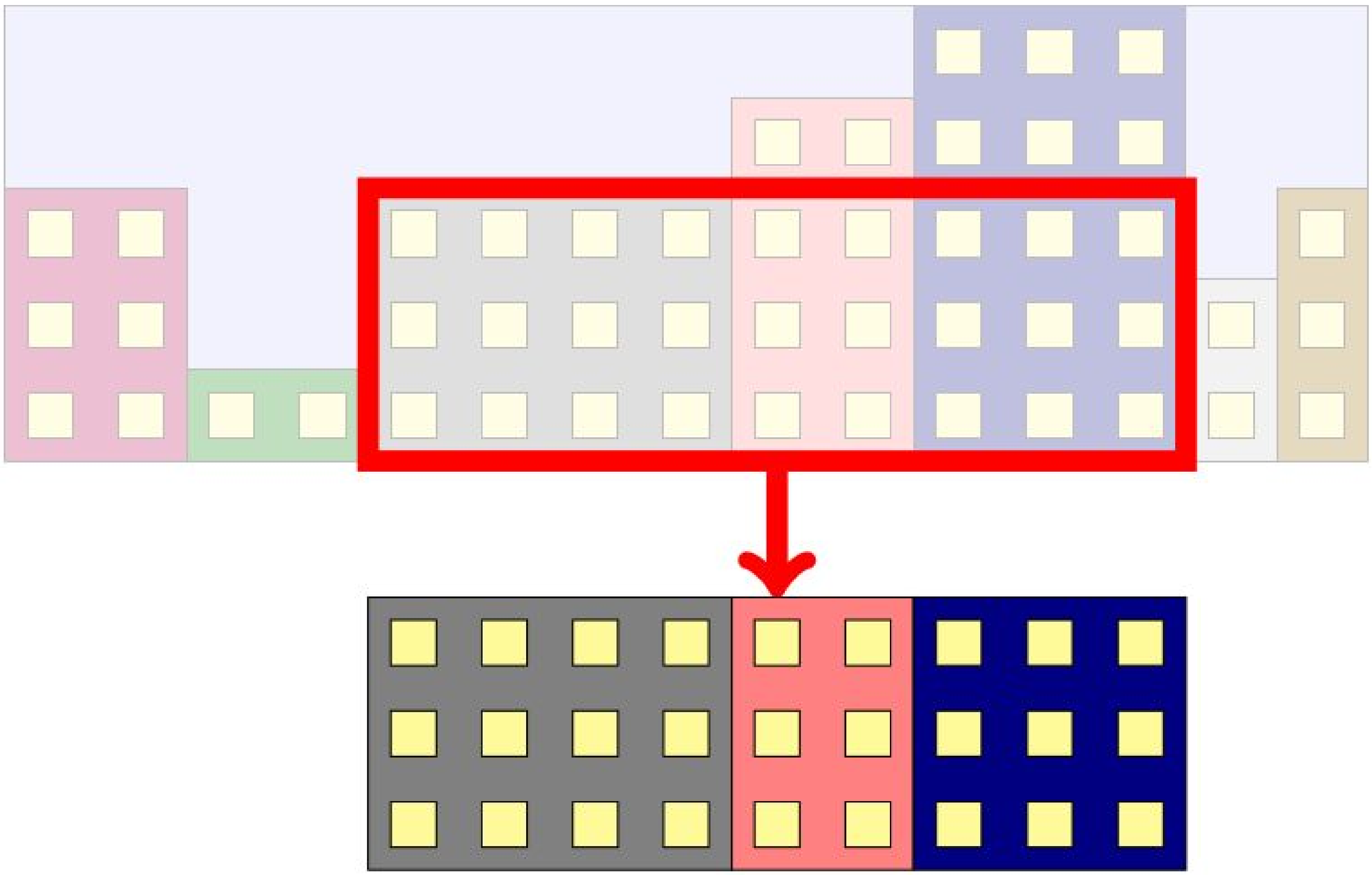
El fotógrafo nos contactó por videollamada para que lo ayudemos a determinar cuál es la foto de mayor área que puede tomar de modo tal que sólo se vean edificios (sin ninguna porción de cielo).

Por ejemplo, si la vista desde su ventana fuera[1]:



la foto de mayor área que puede tomar es:

[1] Dibujo a escala, suponer que el primer edificio mide 2m de ancho y 3m de alto.



La información proporcionada está en el siguiente formato: un arreglo A de n pares (w_i, h_i), de modo que w_i y h_i representan, respectivamente, el ancho y la altura (en metros) del i-ésimo edificio contando desde la izquierda. Para cada i, los valores w_i y h_i son números enteros positivos, y $h_i \leq 30$. La respuesta al problema debe ser *el área* de la mayor foto que puede tomar.

Por ejemplo, una entrada posible es: $A = [(57, 2), (1, 1), (1, 28), (1, 30), (1, 29), (1, 29), (1, 29), (57, 1)]$. En este caso, el primer edificio contando desde la izquierda mide 57m de ancho y 2m de alto. La solución (que se obtiene con un rectángulo de 5m de ancho y 28m de alto) debería ser 140m^2.

Se pide:

- Describir un algoritmo (que utilice la técnica **Divide & Conquer**) que resuelva el problema y cuya complejidad sea $O(n \cdot \log n)$.
- Demostrar que el algoritmo es correcto.
- Demostrar que su complejidad es efectivamente $O(n \cdot \log n)$.

No supe cómo resolver el problema :(

Intenté de varias formas pero no supe como mantener la información de si estoy en un caso de un edificio aislado maximo, o una suma de edificios consecutivos.

Porque SIEMPRE existe la posibilidad de que alguno de los edificios mida 1 de altura, pero 50 millones de ancho, por lo que no puedo decidirme qué arrastrar en el árbol de recursión, hasta haber comparado todas las entradas.

Agregar más casos base no sirvió.

El caso de 1 edificio aislado máximo se arrastraría en los llamados recursivos a cada una de las mitades (que vendría arrastrandose desde el caso base), al quedarse con el máximo de esas mitades, se "arrastra" el edificio asilado máximo.

A continuación uno de los intentos.

```
ÁreaAdyacenteMáxima(A) ⟶ int
     return obtenerÁreaYMin(A).prim

obtenerÁreaYMin(A) ⟶ tupla(int, int)
     if |A| = 1 then
          int base ⟵ A[0].prim                                O(1)
          int minH ⟵ A[0].segu                                     O(1)
          return tupla(base, minH)
     end if
```

bien

parte entera

```
     b1, h1 ⟵ ÁreaAdyacenteMáxima(A[0 .. n/2])                    T(n/2)
```

(uno es incluido y el otro no)

```
     b2, h2 ⟵ ÁreaAdyacenteMáxima(A[n/2 .. n])                    T(n/2)
     b3, h3 ⟵ ÁreaAdyacenteAlCentro(A)                            O(n)
```

la parte de "combinar" en este caso, es quedarse con la mejor área de las 3 (revisar subcjto de suma máximo que tiene una idea parecida)

```
     int base ⟵ b1 + b2 + b3                                      O(1)
     int minH ⟵ min(h1, h2, h3)                              O(1)
```

una vez tenidas las mejores bases y alturas de cada parte, se puede obtener el máximo entre las 3 áreas (era suficiente con quedarse con el área y descartar base y altura)

```
     return (base * minH, minH)

ÁreaAdyacenteAlCentro(A) ⟶ tupla(int, int)
     bd, hd ⟵ ÁreaHaciaDerecha(A[n/2 .. n])                       O(n)
     bi, hi ⟵ ÁreaHaciaIzquierda(A[0 .. n/2])                     O(n)
     int base ⟵ bd + bi                                           O(1)
     int minH ⟵ min(hd, hi)                                       O(1)

     return (base * minH, minH)
```

Las funciones de ÁreaHaciaIzquierda y ÁreaHaciaDerecha están bien implementadas (para la idea realizada). Sin embargo, la idea no es correcta. Ya que podría haber una mejor solución que pasa por el medio, que tiene altura mayor a la mínima de la mejor solución de ambos lados. Contraejemplo: [(4,1);(1,4);(2,3);(4,2)]. La mejor solución sería (1+2)x(4+3) de los 2 del medio

Derecha

```
ÁreaHaciaIzquierda(A) ⟶ tupla(int, int)
```

una opción era encontrar la mejor área empezando del centro para cada una de las 30 alturas y luego quedarse con la mejor

```
     n ⟵ |A|                                                 O(1)
     int base ⟵ 0                                            O(1)
                 3
     int minH ⟵ 50                                           O(1)
     int bestArea ⟵ 0                                        O(1)
                     3
     int bestMinH ⟵ 50                                       O(1)
     for i = 0 to n-1 do                                     O(n)
          base ⟵ base + A[i].prim                            O(1)
          minH ⟵ min(minH, A[i].segu)                        O(1)
          if bestArea < base * minH then                     O(1)
               bestArea ⟵ base * minH                        O(1)
               bestMinH ⟵ minH                          O(1)
          end if
     end for
     return (bestArea, bestMinH)
```

```
ÁreaHaciaIzquierda(A) → tupla(int, int)
    n ← |A|                                          O(1)
    int base ← 0                                     O(1)
    int minH ← 50                                    O(1)
    int bestArea ← 0                                 O(1)
    int bestMinH ← 50                                O(1)
    for i = 0 to n-1 do                              O(n)
        base ← base + A[n-i].prim                    O(1)
        minH ← min(minH, A[n-i].segu)                O(1)
        if bestArea < base * minH then               O(1)
            bestArea ← base * minH                   O(1)
            bestMinH ← minH                      O(1)
        end if
    end for
    return (bestArea, bestMinH)
```

Analisis de complejidad

a=2 // Partes con las que trabajo

c=2 // En cuánto “parto” el vector de entrada

con f(n) = O(n)

un dibujo del árbol ayudaría

T(n) = 2 * T(n/2) + O(n)

cuyo costo será de O(n log n) dado por analizar el arbol de recursión:

$O(\text{Sumatoria\_}\{i=0 \text{ to } k\}(2^i * n/2^i)) \equiv O(\text{Sumatoria\_}\{i=0 \text{ to } k\}(n)) \equiv O(n * k)$

Donde k es la altura del árbol, o sea que k=log n

Por lo tanto, la complejidad es O(n * log n)

Bien, para ser más formal, habría que demostrar por sustitución la complejidad obtenida.

cuidado que el segundo caso del teo. maestro, necesita que f(n) sea Theta(n) (en particular, la f necesaria era Theta(n))

Usando el Teorema Maestro, como f(n) = O(n), y a=c=2, tanto la llamada recursiva como la parte no recursiva tienen un costo equivalente, por lo que estamos en el segundo caso donde la complejidad es:

$O(n^{\log\_c(a)} * \log n) \equiv O(n^{\log\_2(2)} * \log n) \equiv O(n * \log n)$