Inducción falsa

Sea $f(n) = 2^n$, probemos que para todo n dado $f(n) \in O(1)$

Caso base: $n = 1$, y por definición, $\exists n_0, k : 2^1 \leq 1k \, \forall n \geq n_0$, tomo $k = 2$ y listo. **¡NO! MAL. Porque existe un $n \geq n_0$ que no verifica la desigualdad: por ejemplo, con $n = 2$, $2^2 = 4 \leq 2$ es falso.**

Paso inductivo: Supongamos que vale para n, ie, $f(n) = 2^n \in O(1)$. Qvq vale para $n + 1$

Pero $f(n+1) = 2^{n+1} = 2^n * 2 = 2 * O(1) = O(1)$. Entonces, $f(n) \in O(1)$

Inducción buena

Demostrar que $n2^n \in O(3^n)$.

O sea, probemos que $\exists n_0, k : n2^n \leq k \cdot 3^n \; \forall n \geq n_0$

Caso base: $n = 1$ ~~fijamos n_0=2 (por tomar un n_0 arbitrario) y buscamos un k que cumpla la desigualdad.~~

Eso es justamente lo que NO tenemos que hacer. No tenemos que fijar el n_0 y el k, sino encontrarlos a partir del n.

Entonces, si $n = 1$, $n2^n = 1 \cdot 2^1 = 1 \leq k \cdot 3^1$. Pero, ¿qué k verifica $3k \geq 1$? En particular, tomo $k = 1$ y $n_0 = 1$ que verifican.

Paso inductivo: supongamos que $\exists n_0, k : n2^n \leq k \cdot 3^n \forall n \geq n_0$

Qvq $(n+1)2^{n+1} \leq k \cdot 3^{n+1}$

Pero $(n+1)2^{n+1} = n2^n 2 + 2^{n+1} \leq_{HI} 2k \cdot 3^n + 2^{n+1}$

$\leq 2k \cdot 3^n + n2^n \leq 2k \cdot 3^n + k * 3^n \leq 3k * 3^n = k \cdot 3^{n+1}$

En particular, vale para los valores de n_0 y k que había tomado en el caso base.

$\square$

Demostrar que $x^p \in O(b^x)$, ie, $\exists x_0, c : x^p \leq cb^x \; \forall x \geq x_0$

Ayuda: $(\frac{x}{pk})^n \leq b^{n(x/p+k)}$

En particular, tomo $n = p$ (notar que quiero despejar el b^x, pero como me "molesta" que esté dividido por p, y como es para cualquier n, puedo tomar el que quiera para simplificar mis cuentas).

$\implies (\frac{x}{pk})^p \leq b^{p(x/p+k)}$

$(\frac{x}{pk})^p = x^p/(pk)^p \leq b^{p(x/p+k)} = b^{x+pk}$

$\iff x^p \leq (pk)^p b^{pk} b^x$

Tomo $c = (pk)^p b^{pk} \implies x^p \leq cb^x$

$\square$

Esta propiedad nos dice que cualquier función acotda superiormente por una función polinómica (no importa de qué grado), también lo estará por una exponencial (sin importar cuál sea la base). Por ejemplo, si $p = 5$ y $b = 3$ $x^5 \in O(3^x)$