Algoritmos y Estructura de Datos 2

Recuperatorios

X4

Alumno: Leandro Carreira
LU: 669/18

Link a documento online (en caso que algún caracter se haya pasado mal a .pdf):
https://docs.google.com/document/d/1YTTKsL5jPRnfuZErhZuG9wHYfTRbwfUTkjYPc99aJyU/edit?usp=sharing

Ejercicio X4

4. Ejercicio X4 — Notación "O"

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ constantes, $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, y $h(n) = q(n) + 1$, donde $q(n)$ es la cantidad de veces que 2 divide exactamente a n (por ejemplo, $q(1) = 0$, $q(2) = 1$, $q(8) = 3$, $q(10) = 1$).
Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar detalladamente.

1. $f(n) \in \Omega(f(n)^2) \Rightarrow f(n) \in O(1)$
2. $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n)^2 \in \Omega(g(n))$
3. $n! \in \Theta((n+1)!)$
4. $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$.
5. $nf(m) + mg(n) \in O(f(nm) + g(nm))$
6. $h(n) \in O(n)$, y es la cota más justa posible.
7. $\log_2 n \in O(h(n))$
8. Hay una cantidad infinita de funciones $i(n)$, tal que $i(n) \in O(h(n))$

1. VERDADERO.

Si $f(n) \in \Omega(f(n)^2)$, por def de Ω :

$$\exists\, n_0, k > 0 \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq k * f(n)^2$$

Como f(n) está en R+, puedo dividir por f(n) de ambos lados

$$\Rightarrow 1 \geq k * f(n)$$

Reescribo

$$f(n) \leq \tilde{k} * 1$$

con $\tilde{k} > 0$.

Esta es justamente la **definición de** $f(n) \in O(1)$:

$$\exists\, n_0, \tilde{k} > 0 \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq \tilde{k}$$

Por lo tanto, es verdadera.

2. VERDADERO.

2) $f(n) \in \Omega(g(n)) \Rightarrow f(n)^2 \in \Omega(g(n))$

Por def:

$$\exists n_0, k>0 \;/\; n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq k \cdot g(n)$$

divido por $f(n) > 0$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{f(n)} \geq k \cdot \frac{g(n)}{f(n)}$$

$$\Rightarrow 1 \geq k \cdot \frac{g(n)}{f(n)}$$

$k>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{g(n)}{f(n)}$$

Obtuve una cota superior para el cociente g(n)/f(n), dada por una constante $\tilde{k} \neq 0$ finita (pues existe k>0 finita) por lo que por propiedad de Big-Ω, Por prop. 8:

Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \tilde{K}$

y $K \neq 0$, $K < \infty$

entonces

$\Omega(f) = \Omega(g)$

Como $\Omega(f) = \Omega(g)$

$\Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$

$\overset{prop}{\Rightarrow} f(n) \in \Omega(f(n))$

Usando el resultado del ejercicio 1:

$f(n) \in \Omega(f(n)) \Rightarrow f(n)^2 \in \Omega(f(n))$

Volviendo a que $\Omega(f) = \Omega(g)$

$f(n) \in \Omega(f(n)) \Rightarrow f(n)^2 \in \Omega(g(n))$ //

3. FALSO

3) $\underbrace{n!}_{f(n)} \in \Theta\left(\underbrace{(n+1)\cdot n!}_{g(n)}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \overset{\text{prop. 8}}{\Longrightarrow} \Theta(g) \neq \Theta(f)$$

$\therefore$ por contrarrecíproco de prop. 2:

$$f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$$

$$f \notin \Theta(g)$$

$$n! \notin \Theta((n+1)!)$$

//

4. VERDADERO

4. $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{(n+a)^b} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+a}\right)^b$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{\left(1+\underbrace{\frac{a}{n}}_{\to 0}\right)} = 1$$

Por prop, como el límite es finito y $\neq 0$

$\Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

$\therefore$

Como $(n+a)^b \in \Theta\left((n+a)^b\right)$

uso $\Theta(f) = \Theta(g)$

$\Rightarrow (n+a)^b \in \Theta(n^b)$ //

5. FALSO

$$5.\quad n \cdot f(m) + m \cdot g(n) \in O\big(f(n \cdot m) + g(n \cdot m)\big)$$

Sospecho que es falso, pues implicaría que

$$n \cdot f(m) \in O\big(f(n \cdot m)\big)$$

y

$$m \cdot g(n) \in O\big(g(n \cdot m)\big)$$

Construyo contraejemplo

$$\text{Si: } f(m) = 2^{1/m}$$

$$\Rightarrow f(n \cdot m) = 2^{1/(n \cdot m)}$$

Analizo cociente

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{2^{\frac{1}{n \cdot m}}}{n \cdot 2^{\frac{1}{m}}} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \overset{\to 0}{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\overset{\to 0}{\frac{1}{n \cdot m}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{m}}} = 0$$

Por prop de Big-O

Como el cociente es cero :

$$n \cdot 2^{\frac{1}{m}} \notin O\left(2^{\frac{1}{n \cdot m}}\right)$$

$$g \notin O(f)$$

$$n \cdot f(m) \notin O(f(n \cdot m))$$

Equivalentemente,

$$m \cdot g(n) \notin O(g(n \cdot m))$$

Entonces

$$n \cdot f(m) + m \cdot g(n) \notin O(f(n \cdot m)) + O(g(n \cdot m))$$

$$n \cdot f(m) + m \cdot g(n) \notin O(f(n \cdot m) + g(n \cdot m))$$

//

6. VERDADERO

6) $h(n) \in O(n)$

$$h(n) = q(n) + 1$$

Def: $h(n) \in O(n)$

$$\exists\, n_0, k > 0 \;/\; n \geq n_0 \Rightarrow h(n) \leq k \cdot n$$

$$\Rightarrow q(n) + 1 \leq k \cdot n$$

Como $n \geqslant q(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

(pues no se puede dividir un número n por 2 n veces)

acoto $q(n)$ por n

$\Rightarrow q(n) + 1 \leq n + 1 \leq k \cdot n$

lo cual vale para $k \geqslant 2$

$\therefore$ $h(n) \in O(n)$ //

7. FALSO

7) $\log_2 n \in O(h(n))$

$\in O(q(n)+1)$

$\log_2 n = x$ se corresponde con $2^x = n$

O sea: cuántas veces divide 2 a n

Pero $q(n)$ cuenta veces exactas

$\Rightarrow$ si n es impar $\Rightarrow q(n) = 0$

$\Rightarrow h(n) = 1$

$\Rightarrow \log_2 n \in O(1)$

Abs!

$\therefore \log_2 n \notin O(h(n))$ //

8. VERDADERO

8) $i(n) \in O(h(n))$

Sé que

$$h(n) \in O(h(n))$$

$$g(n)+1 \in O(h(n))$$

y a partir de ella puedo crear infinitas funciones

$$i_1(n) = g(n)+1 \in O(h(n))$$

$$i_2(n) = 2.(g(n)+1) \in O(2.h(n))$$

por def de Big-O

$$\in O(h(n))$$

$$i_k(n) = k\cdot(g(n)+1) \in O(k\cdot h(n)) \quad k \in \mathbb{N}$$

por def de Big-O

$$\in O(h(n))$$

$\therefore$ existen infinitas funciones $i_k(n)$,

y en particular

infinitas $i(n) \in O(h(n))$ //

---

fin :)