Grafos

3.1. ¿Cuál es el mayor número de vértices que puede tener un grafo con 19 aristas y tal que sus vértices tienen grado al menos 3?

3.2. a. ¿Cuántos vértices tendrá un grafo con 12 aristas y todos sus vértices de grado 2?

b. ¿Cuántos vértices tendrá un grafo con 15 aristas, 3 vértices de grado 4 y los otros vértices de grado 3?

c. ¿Cuántos vértices tendrá un grafo con 20 aristas y todos sus vértices del mismo grado?

3.3. Probar que para un digrafo G cualquiera se verifica

$$\sum_i d_{in}(v_i) = \sum_j d_{out}(v_j)$$

3.4. Probar que en cualquier grupo de 2 o más personas, hay al menos 2 que tienen la misma cantidad de amigos dentro del grupo.

3.5. ¿Es posible que haya un grupo de 7 personas tal que cada persona conozca exactamente otras 3 personas del grupo?

3.6. Probar que un grafo es conexo si y sólo si para toda partición de V en dos subconjuntos V_1 y V_2 ($V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cup V_2 = V$) hay un eje de G que une un nodo de V_1 con uno de V_2.

3.7. a. Probar que la unión de dos caminos simples distintos entre dos nodos p y q contiene un circuito simple.

b. ¿Qué pasa si los caminos no son simples?

3.8. Probar que en un grafo conexo cualquier par de caminos simples de longitud máxima tienen un vértice en común.

3.9. Si G tiene vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, se define como la secuencia de grados de G a la secuencia $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$. Probar que una secuencia de números enteros no negativos $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es la secuencia de grados de un grafo (o multigrafo, o pseudografo) si y sólo si $\sum_i d_i$ es par.

3.10. Dado un grafo $G = (V, X)$, se define el *grafo complemento* de G como $\overline{G} = (V, \overline{X})$ donde un eje $e \in \overline{X} \Leftrightarrow e \notin X$. Si G tiene n vértices, tal que exactamente $n-1$ de los mismos tienen grado impar, ¿cuántos vértices de grado impar tendrá $\overline{G}$?

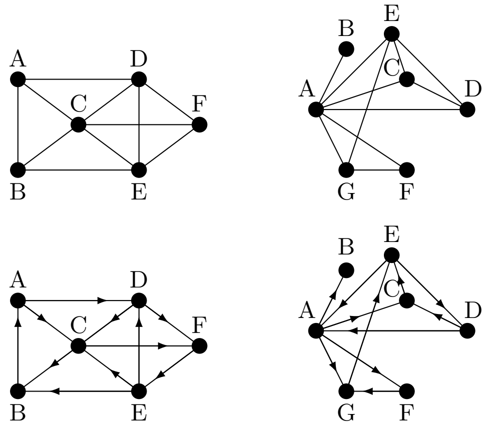
3.11. Dado un digrafo, se define su grafo subyacente como aquel que resulta de eliminar las direcciones a los arcos del digrafo. Si entre dos vértices había dos aristas de dirección opuesta, éstos se funden en uno solo no orientado. Dada la matriz de adyacencia de un digrafo, cómo se construye la matriz de adyacencia de su grafo subyacente?

3.12. a. Escribir un algoritmo que dado un grafo G indique si es o no un grafo bipartito. Idem para digrafos.

b. Definir un procedimiento que dado un grafo G calcule $\overline{G}$. Idem para digrafos.

c. Calcular las complejidades de los algoritmos de a. y b.

3.13. Dados los grafos y digrafos de la figura:



a. Representar mediante matrices de adyacencia y listas de adyacencias.

b. Dadas las siguientes matrices de adyacencia representar el correspondiente grafo o multigrafo (no orientado).

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

c. Calcular el grado de los vértices de los grafos de a. y b. usando las matrices de adyacencias correspondientes.

d. Representar los digrafos cuyas matrices de adyacencia son

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$