Clases de Complejidad

10.1. Mostrar que los siguientes problemas pertenecen a P:

a. Ordenar una lista de n números.
b. Verificar si un grafo es conexo.
c. Verificar si un grafo tiene un ciclo.

10.2. Mostrar que la relación $\leq_p$ es transitiva ($P_1 \leq_p P_2$ y $P_2 \leq_p P_3 \Rightarrow P_1 \leq_p P_3$).

10.3. Considerar el conjunto de todos los grafos que contienen a K_4 como subgrafo inducido. ¿Pertenece a P el problema de determinar si un grafo es de esta clase? ¿Pertenece a NP?

10.4. Demostrar que si $\Pi \in NP$, entonces existe un polinomio p tal que Π puede ser resuelto en tiempo determinístico $\mathcal{O}(2^{p(n)})$.

10.5. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no se sabe:

a. $P \subseteq NP$
b. $P \subseteq co\text{-}NP$
c. $P = NP \cap co\text{-}NP$
d. $P = NP \Rightarrow co\text{-}NP = NP$
e. $co\text{-}NP = NP \Leftrightarrow \text{SAT} \in co\text{-}NP$
f. $co\text{-}NP \subseteq NP \Rightarrow NP = co\text{-}NP$
g. $co\text{-}NP \subseteq NP \Rightarrow P = NP$

10.6. ¿Es cierto que si dos problemas X e Y son *NP-completos* entonces $X \leq_p Y$, y también $Y \leq_p X$? Justificar.

10.7. Sean X e Y dos problemas de decisión tales que $X \leq_p Y$. ¿Qué se puede inferir?

a. Si X está en P entonces Y está en P.
b. Si Y está en P entonces X está en P.
c. Si Y es *NP-completo* entonces X también.
d. Si X es *NP-completo* entonces Y también.
e. Si Y es *NP-completo* y X está en NP entonces X es *NP-completo*.
f. Si X es *NP-completo* e Y está en NP entonces Y es *NP-completo*.
g. X e Y no pueden ser ambos *NP-completos*.

10.8. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Si $P = NP$ entonces todo problema *NP-completo* es polinomial.
b. Si $P = NP$ entonces todo problema *NP-hard* es polinomial.
c. Si las clases *NP-completo* y *co-NP-completo* son disjuntas entonces $P \neq NP$ (un problema de decisión es *co-NP-completo* cuando pertenece a *co-NP* y todo otro problema perteneciente a *co-NP* es polinomialmente reducible a él).
Nota: No se sabe si la vuelta vale.

10.9. ¿Qué se puede inferir del hecho de que el problema del viajante de comercio (TSP) es *NP-completo*, suponiendo $P \neq NP$?:

a. No existe un algoritmo que resuelva instancias arbitrarias de TSP.
b. No existe un algoritmo que eficientemente resuelva instancias arbitrarias de TSP.
c. Existe un algoritmo que eficientemente resuelve instancias arbitrarias de TSP, pero nadie lo ha encontrado.
d. TSP no está en P.
e. Todos los algoritmos que resuelven TSP corren un tiempo polinomial para algunas entradas.
f. Todos los algoritmos que resuelven TSP corren un tiempo exponencial para todas las entradas.

10.10. Construir una reducción polinomial de *Clique* a *SAT* (sugerencia: considerar $n \times k$ variables v_{ij}, donde n es la cantidad de vértices del grafo y k es el tamaño del clique. v_{ij} sería verdadera sii el i-ésimo elemento del clique es el j-ésimo vértice del grafo).

10.11. Encontrar una reducción polinomial del problema *Circuito Hamiltoniano* al problema del viajante de comercio (*TSP*) (sugerencia: construir un grafo completo con pesos en los arcos tales que el menor circuito hamiltoniano corresponda a un circuito hamiltoniano del grafo original). Sabiendo que el primer problema es *NP-completo*, ¿qué se puede decir del segundo?

10.12. ¿Cuál de los siguientes dos problemas está en P y cuál es *NP-completo*? Justificar.

a. Entrada: Un grafo conexo con n nodos, dos nodos u y v de G, y un entero k.
Pregunta: ¿Existe un camino simple de u a v de longitud k?
b. Entrada: Un grafo conexo con n nodos, y dos nodos u y v de G.
Pregunta: ¿Existe un camino simple de u a v de longitud 8?

10.13. Utilizando la NP-completitud de otro problema, demostrar que el problema *Camino mínimo condicionado* es *NP-completo*:
Entrada: un grafo $G = (V, X)$ con un peso positivo asociado a cada eje, un par de vértices $s, t \in V$, un subconjunto de nodos $V' \subseteq V$ y un entero $k > 0$.
Pregunta: ¿Existe un camino entre s y t en G que pasa por todos los vértices de V' y de peso total menor o igual que k?

10.14. Mostrar que es *NP-completo* el problema de decidir si una fórmula booleana tiene al menos dos diferentes asignaciones de variables que la hacen verdadera.