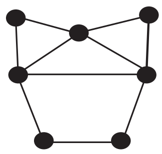
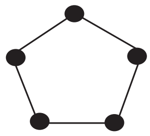
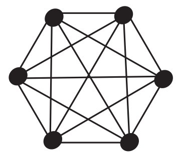
Coloreo

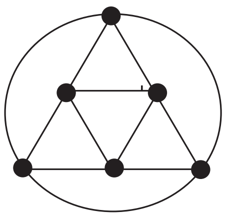
6.1. *a*) Calcular el número cromático de los siguientes grafos:

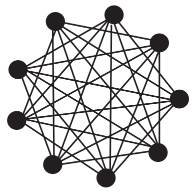




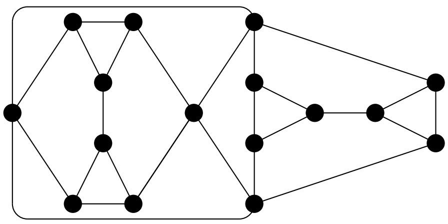


K6





$\overline{C_9}$



6.2. Se tiene una lista de tareas a desarrollar. Existen tareas que utilizan el mismo recurso, y cada tarea demora una hora. Dado que los recursos son limitados (se dispone de una unidad por recurso), es imposible que dos tareas que comparten algún recurso, se desarrollen al mismo tiempo. Determinar cuántas horas son necesarias como mínimo para cumplir con todas las tareas. Modelar el problema como un problema de coloreo.

6.3. Decidir si las afirmaciones siguientes son V o F. Justificar:

a) Si un grafo G contiene al grafo completo K_s como subgrafo inducido entonces $\chi(G) \geq s$.

b) Si todos los subgrafos completos de G tienen tamaño menor o igual que s, entonces $\chi(G) \leq s$.

c) El problema de encontrar el número cromático de un grafo G es equivalente al problema de encontrar el subgrafo completo máximo de G.

d) Si $\chi(G) \leq s$ entonces el grado de todo vértice de G es menor o igual que $s - 1$.

6.4. Se va a realizar un congreso en el cual se dictarán varios cursos. Se tiene la lista de inscriptos y en base a ella se quiere armar el cronograma de horarios de tal manera que todos los participantes puedan asistir a los cursos que se anotaron, es decir, no se superpongan los horarios de cursos que serán asistidos por una misma persona. Modelar este problema como un problema de coloreo.

6.5. Se quieren usar torres existentes para transmisión de ondas para celular. El problema es que dos torres que están muy cerca pueden interferirse, si se utiliza la misma frecuencia para ambas. ¿Cuál es el menor número de frecuencias diferentes que hace falta usar en este caso? Modelar este problema como un problema de coloreo y resolver para la instancia dada por la matriz de distancias entre las torres y la distancia mínima para usar la misma frecuencia es 50 km..

	B	C	D	E	F	G	H
A	170	140	28	189	25	186	67
B		100	46	70	26	2	214
C			0	56	110	34	16
D				18	30	90	13
E					134	48	53
F						14	55
G							50

6.6. Un grafo G es color crítico si sacando un vértice cualquiera disminuye el número cromático de G.

a) Para cada grafo del ejercicio 6.1, decidir si, al sacar cualquier vértice de los grafos , disminuye el número cromático.

b) Probar que todo grafo k-cromático ($k \geq 2$) contiene un subgrafo k-cromático color crítico.

6.7. El grafo junta de los grafos G y H, denotado $H + G$, se define agregando un eje entre cada vértice de H y cada vértice de G. Probar que $\chi(G + H) = \chi(G) + \chi(H)$. Concluir que el grafo junta de dos grafos color críticos es color crítico.

6.8. Probar que para cualquier conjunto independiente S de un grafo color crítico G se cumple que $\chi(G - S) = \chi(G) - 1$.

6.9. Sea G un grafo

a) Probar que G es bipartito si y sólo si $\chi(G) = 2$ (suponiendo que tiene al menos una arista).

b) Enunciar un algoritmo para determinar si un grafo es 2-coloreable.

c) Determinar la complejidad del algoritmo dado en *b*).

6.10. Probar que si G es un grafo de n vértices y $\overline{G}$ es su complemento, entonces:

a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

b) $n \leq \chi(G) \times \chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

c) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{n}$

6.11. Analizar el siguiente algoritmo secuencial para colorear un grafo:

1. Dado un grafo $G = (V, X)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, poner $f(v_1) = 1$.

2. Para $i = 2, n$ poner $f(v_i) = \min\{k/k \geq 1 \text{ y } f(v_j) \neq k \text{ para } (1 \leq j < i) \text{ y } v_j \text{ adyacente a } v_i\}$

3. Parar.

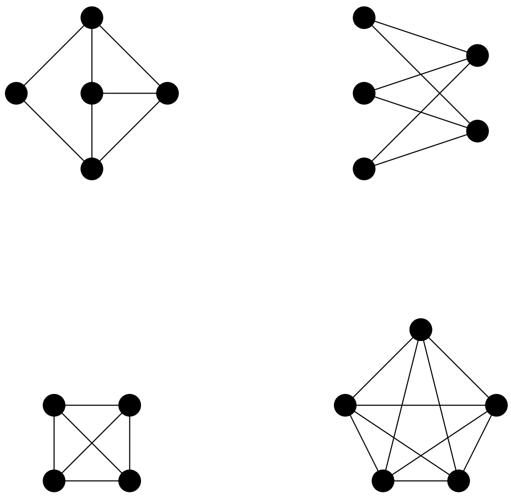
a) Determinar la complejidad del algoritmo de a.

b) Decidir si este algoritmo siempre calcula el número cromático de un grafo. ¿De qué depende que esto suceda?

c) Dar ejemplos donde el algoritmo no encuentre número cromático, si existe.

d) Demostrar que para todo grafo G existe un orden de rotulado de los vértices para el cuál el algortimo de a. determina el número cromático de G.

6.12. Calcular el índice cromático de los siguientes grafos:



6.13. (Teorema de Vizing) Sea $\Delta(G)$ el grado máximo de G. Dar ejemplos de grafos, donde el índice cromático sea igual a $\chi'(G) = \Delta(G)$ y grafos donde $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

6.14. Supongamos que 11 equipos deben jugar entre si. Suponiendo que un equipo no puede jugar más de un partido por día, cuantos días son necesarios? Modelar este problema cono un problema de coloreo de aristas y como un problema de coloreo de vértices.