Árboles

4.1. a. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede tener un grafo conexo de 20 aristas?

b. Probar que si G es un árbol con un número par de ejes, entonces G tiene al menos un nodo de grado par.

c. Supongamos que el promedio de los grados de los nodos de G es exactamente 2. Si G es conexo, ¿cuántos circuitos tiene G?

4.2. Es cierto que:

a. Si un grafo[1] no tiene puentes entonces todo nodo tiene grado par?

b. Un grafo conexo con n ejes tiene exactamente un circuito?

c. Existe un grafo conexo con $n+1$ ejes que tiene exactamente dos circuitos?

(tanto en b. como en c., n es la cantidad de nodos del grafo)

4.3. a. Probar que todo árbol no trivial es un grafo bipartito.

b. ¿Hay árboles bipartitos completos?

4.4. Dibujar todos los árboles no isomorfos[2] de 4 vértices, 5 vértices y 6 vértices.

4.5. Probar que todo árbol con dos o más vértices tiene al menos 2 hojas.

4.6. Se dice que un grafo es un bosque si no tiene ciclos. Probar que G es un bosque si y solo si al sacar cualquier eje de G aumenta el número de componentes conexas.

4.7. Probar que el grafo complemento de un árbol es conexo o tiene un vértice aislado y el resto forma un subgrafo completo.

4.8. a. ¿Puede haber un árbol binario con un número par de vértices? Justificar.

b. ¿Cuál es el máximo número de vértices que puede tener un árbol m-ario de altura h?

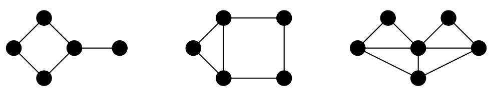
c. Probar que un árbol m-ario de altura h tiene a lo sumo m^h hojas.

d. Probar que un árbol m-ario con l hojas tiene altura $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Si el árbol es balanceado, probar que $h = \lceil \log_m l \rceil$.

e. Se define el nivel de un vértice v en un árbol como su distancia a la raíz, o sea, como la longitud del único camino de la raíz al vértice. Mostrar que en un árbol binario con l hojas, la suma de los niveles de las mismas es mayor igual a $\lceil l \times \log_2 l \rceil$, y el nivel promedio es mayor o igual a $\log_2 l$.

Nota: $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbf{Z} : z \geq x\}$.

4.9. Dibujar todos los árboles generadores de los siguientes grafos:

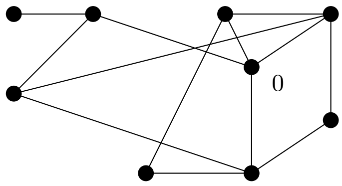


4.10. a. Probar que si un grafo conexo tiene un único árbol generador entonces es un árbol.

b. ¿Es posible reconstruir un grafo si se conocen todos sus árboles generadores con los vértices numerados? ¿Cómo?

[1] Un *puente* es una arista del grafo tal que si se saca aumenta la cantidad de componentes conexas del grafo.
[2] Un grafo es isomorfo de otro si resultan ser iguales con un renombre de los vértices.

4.11. a. Usar *BFS* para numerar el grafo de la figura a partir del nodo marcado con 0.



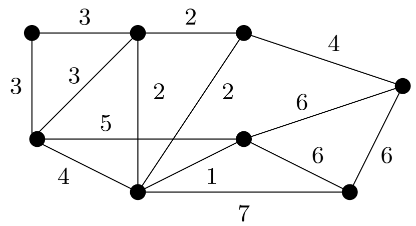
b. Idem a. para *DFS*.

4.12. Vialidad Nacional quiere construir, de la forma más económica posible, caminos que vinculen 5 ciudades (aunque para ir de una a otra haya que pasar por una tercera). Los costos de los tramos entre cada par de ciudades están dados en la tabla. Decir que tramos deberían construirse.

	B	C	D	E
A	5	10	80	90
B		70	60	50
C			8	20
D				10

4.13. a. Enunciar un algoritmo que determine un árbol generador máximo de un grafo dado.

b. Aplicar el algoritmo al grafo de la figura.



4.14. Probar que si todos los arcos de un grafo G tienen distinta longitud entonces G tiene un único árbol generador mínimo.

4.15. Sea T un árbol generador mínimo de un grafo G.Probar que T contiene todos los arcos de longitud mínima salvo que los mismos incluyan un circuito.