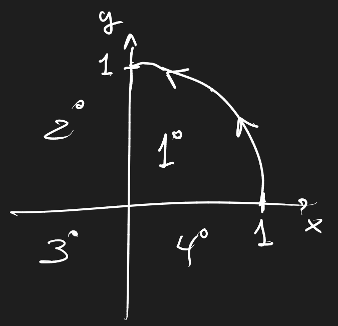
ANÁLISIS II-ANÁLISIS MATEMÁTICO II-MATEMÁTICA 3-ANÁLISIS II(LCD)
PRIMER PARCIAL (16/05/2022)

Ejercicio 1. (2 puntos) Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la porción de la circunsferencia de centro cero y radio 1 en el primer cuadrante, recorrida de manera antihoraria, y el campo vectorial $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2xy - 4 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2}; x^2 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\ell$.



Llamo :

$$G(x,y) = \left(2xy - 4 \, , \, x^2\right)$$

$$H(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$I(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2} \, , \, \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\right)$$

Sospecho que $\exists g(x,y) \,/\, \nabla g(x,y) = G(x,y)$

- Si $g_x = 2xy - 4 \Rightarrow g(x,y) = x^2y - 4x + \varphi(y)$
- Si $g_y = x^2 \Rightarrow g(x,y) = x^2 \cdot y + \bar{\varphi}(x)$

Encontré $g(x,y) = x^2y - 4x \,/\, \nabla g = G$

$\therefore$ G es C. Grad.

Parametrizo C como $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Respeta la orientación pues :

$\sigma(0) = (1, 0)$

$\sigma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$

$$\int_C G \cdot ds \overset{\text{G es C. Grad.}}{=} g(\sigma(\tfrac{\pi}{2})) - g(\sigma(0))$$

$$= g(0,1) - g(1,0)$$

$$\boxed{g(x,y) = x^2 y - 4x}$$

$$= 0 - (0 - 4)$$

$$= 4$$

//

$$\boxed{\begin{aligned} H(x,y) &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ \sigma(\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}}$$

Calculo

$$\int_C H \cdot ds = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \langle H(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle \, d\theta$$

$$\underbrace{\langle (-\sin\theta, \cos\theta), (-\sin\theta, \cos\theta) \rangle}_{=1}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, ds = \frac{\pi}{2}$$

//

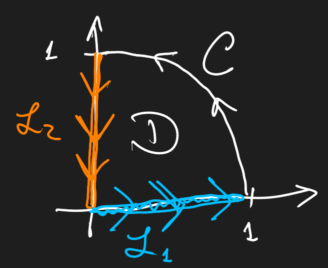
Por último:

$$I(x,y) = \Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{x}{2}\cdot\sin\tfrac{y}{2}}_{P},\ \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{y}{2}}_{Q}\Big)$$

Como $I \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Puedo usar Green

$$\int_C I\cdot ds + \int_{L_1} I\cdot ds + \int_{L_2} I\cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

con L_1, L_2 los segmentos que cierran la curva C



Calculo $Q_x - P_y$

$$\boxed{\Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{x}{2}\cdot\sin\tfrac{y}{2}}_{P},\ \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\cos\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{y}{2}}_{Q}\Big)}$$

$$Q_x = -\frac{1}{4}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}$$

$$P_y = -\frac{1}{4}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}$$

$$Q_x - P_y = 0$$

$$\therefore \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy = 0$$

Parametrizo

Respeta orientación

- $\mathcal{L}_1$ como $\sigma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0,1]$
- $\mathcal{L}_2^-$ como $\sigma_2(t) = (0, t) \quad t \in [0,1]$

Invierte la orientación de $\mathcal{L}_2$

Calculo

$$\int_{\mathcal{L}_1} I \cdot ds = \int_0^1 \langle I(t,0), (1,0) \rangle \, dt$$

$$\boxed{I(x,y) = \left(-\frac{1}{2} \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{y}{2}, \ \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{y}{2} \right)}$$

$$= \int_0^1 \langle (0, \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} \cdot \overbrace{\cos\frac{0}{2}}^{=1}), (1,0) \rangle$$

$$\int_{\mathcal{L}_1} I \cdot ds = 0 \quad //$$

$$\int_{\mathcal{L}_2} I \cdot ds = -\int_{\mathcal{L}_2^-} I \cdot ds$$

$$= -\int_0^1 \langle \underbrace{H(0,t)}, (0,1) \rangle \, dt$$

$$\langle (0, \tfrac{1}{2} \cos\tfrac{t}{2}), (0,1) \rangle$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{2} \cos\frac{t}{2} \, dt$$

CA

$$= -\sin\frac{t}{2}\Big|_0^1 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$= -\sin\frac{1}{2}$$

//

Finalmente

$$\int_C I\cdot ds + \int_{\mathcal{L}_1} I\cdot ds + \int_{\mathcal{L}_2} I\cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$\int_C I\cdot ds + 0 - \sin\frac{1}{2} = 0$$

$$\int_C I\cdot ds = \sin\frac{1}{2}$$

//

Como $F = G + H + I$

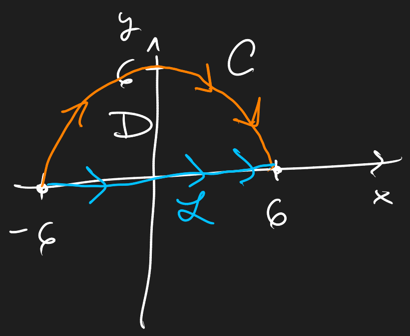
$$\Rightarrow \int_C F\cdot ds = \int_C G\cdot ds + \int_C H\cdot ds + \int_C I\cdot ds$$

$$\boxed{\int_C F\cdot ds = 4 + \frac{\pi}{2} + \sin\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva dada por la parametrización $\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (-6\cos(t), 6\sin(t))$ y el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(y + x\sin(x^2), 3x - \cos\left(e^{y^2}\right)\right).$$

Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\ell$.



Como F es $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ uso Green

Cierro C con $\mathcal{L}$ parametrizada por

$$\sigma_2(t) = (t, 0) \quad t \in [-6, 6]$$

Como $\sigma(t)$ no respeta la orientación de Green

$$\Rightarrow \int_{C^-} F \cdot ds = -\int_C F \cdot ds$$

Por Green, como $\partial D = C^- \cup \mathcal{L}$

$$\int_{C^-} F \cdot ds + \int_{\mathcal{L}} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dxdy$$

$$-\int_C F \cdot ds + \int_{\mathcal{L}} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dxdy$$

Calculo $Q_x - P_y$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= 3 \\ P_y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_x - P_y = 2$$

$$\Rightarrow \iint_D z \, dx\,dy = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{ Área (Circunferencia de radio 6)}$$

$$= 36\pi$$

Calculo:

$$\int_L F \cdot ds = \int_{t=-6}^{6} \langle F(t,0), (1,0) \rangle \, dt$$

$$\underbrace{\langle (0 + t \cdot \sin t^2, 3t - \cos 1), (1,0) \rangle}_{t \cdot \sin t^2}$$

$$= \int_{-6}^{6} t \cdot \sin t^2 \, dt$$

$$u = t^2$$

$$du = 2t \, dt \Rightarrow \frac{1}{2} du = t \cdot dt$$

$$= \int_{36}^{36} \sin u \cdot \frac{1}{2} du = 0$$

$$\int_L F \cdot ds = 0$$

Volviendo

$$-\int_C F \cdot ds + \underbrace{\int_L F \cdot ds}_{=0} = \underbrace{\iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy}_{36\pi}$$

$\therefore$

$$\int_C F \cdot ds = -36\pi$$

//

Ejercicio 3. (3 puntos) Sean S_1, y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies regulares orientadas tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$, donde C es una curva suave. Probar que

$$\left(\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right)^2 - \left(\iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right)^2 = 0$$

para todo vector $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$.

Planteo Stokes ($F \in \mathcal{C}^1$)

$$\int_{C=\partial S} F \cdot ds = \iint_S \nabla \times F \cdot ds$$

Quiero $\nabla \times F$ cte, de forma que $\nabla \times F = B$

$$\nabla \times F = \begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{matrix} \right| \end{array}$$

$$= \left(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\right)$$

Asumo $Q_z = R_x = P_y = 0$

$$\Rightarrow \nabla \times F = \left(R_y,\ P_z,\ Q_x\right) \overset{\text{quiero}}{=} (a, b, c) \text{ con } \underset{\text{ctes}}{a, b, c} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} R_y = a \Rightarrow R = a \cdot y + \varphi(x,z) \\ P_z = b \Rightarrow P = b \cdot z + \bar{\varphi}(x,y) \\ Q_x = c \Rightarrow Q = c \cdot x + \tilde{\varphi}(y,z) \end{cases}$$

Obtuve F / $\nabla \times F$ es constante

$$F(x,y,z) = (b \cdot z,\ cx,\ ay) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Nota que $\nabla \times F = (a,b,c)$ puede representar <u>todos</u> los vectores $B \in \mathbb{R}^3$

Volviendo, como $F \in \mathcal{C}^1$, vale Stokes:

Para S_1:

$$\int_{C = \partial S_1} F \cdot ds = \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot ds$$

Para S_2:

$$\int_{C = \partial S_2} F \cdot ds = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot ds$$

Como por dato $\partial S_1 = \partial S_2 = C$ con la misma orientación

$$\Rightarrow \int_{C = \partial S_1} F \cdot ds = \int_{C = \partial S_2} F \cdot ds$$

$$\left(\text{si tuvieran orientación opuesta} \Rightarrow \int_{\partial S_1} F \cdot ds = -\int_{\partial S_2} F \cdot ds \right)$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\iint_{S_1} \nabla \times F \cdot ds = \iint_{S_2} \nabla \times F \cdot ds$$

Como $\nabla \times F = B$ para cualquier $B \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} B \cdot ds = \iint_{S_2} B \cdot ds$$

$$\Rightarrow \left(\iint_{S_1} B \cdot ds\right)^2 = \left(\iint_{S_2} B \cdot ds\right)^2$$

$$\left(\iint_{S_1} B \cdot ds\right)^2 - \left(\iint_{S_2} B \cdot ds\right)^2 = 0$$

Nota: Notación

Ejercicio 3. (3 puntos) Sean S_1, y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies regulares orientadas tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$, donde C es una curva suave. Probar que

$$\left(\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right)^2 - \left(\iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}\right)^2 = 0$$

para todo vector $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$.

ds $\quad f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|$

$d\vec{s}$ $\quad \left\langle F(\sigma(t)), \dfrac{\sigma'(t)}{\cancel{\|\sigma'(t)\|}} \right\rangle \cancel{\|\sigma'(t)\|}$

dS

$d\vec{S}$

Ejercicio 4. (3 puntos) Sean

$$D_1 = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1, z = 2\}, \quad D_2 = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1, z = -1\},$$

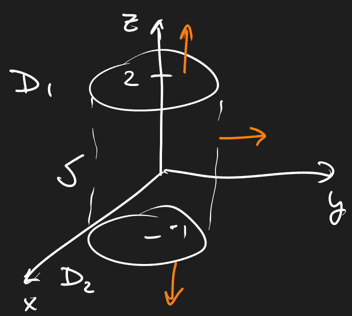
y $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable tal que

$$K = S \cup D_1 \cup D_2$$

es una superficie cerrada regular orientable que encierra una región acotada Ω de $\mathbb{R}^3$ (donde vale el teorema de la divergencia). Asumiendo que el volumen de Ω es 3π y que D_1, D_2 y S se orientan de manera que K quede orientada con la normal exterior, calcular todos los posibles valores de

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^x, -ye^x, x^2+y^2+z)$



$$\text{Vol (Cilindro)} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= 3\pi$$

$$F(x,y,z) = (e^x, -y \cdot e^x, \underbrace{x^2+y^2}_{=1} + z)$$

$(0,3)$

Planteo Gauss pues $F \in \mathcal{C}^1$

$$\iint_K F \cdot ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$$

$$\iint_S F \cdot ds + \iint_{D_1} F \cdot ds + \iint_{D_2} F \cdot ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$$

Calculo

$$\operatorname{div} F = e^x - e^x + 1 = 1$$

$$\iiint_\Omega 1 \, dV = 3\pi$$

Calculo:

$$\iint_{D_1} F \cdot ds =$$

Parametrizo D_1 como $\sigma_1(r,\theta) = (r.\cos\theta, r.\sin\theta, 2)$

$r \in [0,1]$
$\theta \in [0, 2\pi)$

$$\sigma_{1r} \times \sigma_{1\theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, r)$$ $\leftarrow$ $r \geq 0 \Rightarrow$ apunta hacia arriba ✓

$$\iint_{D_1} F \cdot ds = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \underbrace{F(r.\cos\theta, r.\sin\theta, 2)}, (0,0,r) \rangle \, d\theta \, dr$$

$$\langle (\ldots, \ldots, r^2+2), (0,0,r) \rangle$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 + 2r \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 + 2r \, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \cancel{\frac{2}{2}} r^2 \right|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4} + 1 \right)$$

$$= \cancel{2}^{1} \cdot \frac{5}{\cancel{4}_{2}} \cdot \pi = \frac{5}{2}\pi$$

Calculo

$$\int_{D_2} F \cdot dS =$$

Parametrizo D_2

$$\sigma_2(r,\theta) = (r\cdot \cos\theta,\ r\cdot \sin\theta,\ -1) \qquad r \in [0,1) \quad \theta \in [0,2\pi)$$

$$\sigma_{2r} \times \sigma_{2\theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cdot\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0,0,r) \leftarrow \text{invierte la orientación}$$

$\therefore$

$$\int_{D_2} F \cdot dS = -\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{\langle \underbrace{F(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta, -1)}_{(\dots,\dots,\ r^2-1)},\ (0,0,r)\rangle}_{r^3-r} \, d\theta\, dr$$

$$= -2\pi \int_{r=0}^{1} r^3 - r \; dr$$

$$= -2\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{2} \right|_0^1$$

$$= -2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} \right)$$

$$= -\cancel{2} \cdot \pi \cdot \left(- \frac{1}{\cancel{4}_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi$$

$$\iint_S F \cdot ds + \iint_{D_1} F \cdot ds + \iint_{D_2} F \cdot ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$$

$$\iint_S F \cdot ds + \underbrace{\frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi}_{3\pi} = 3\pi$$

$$\iint_S F \cdot ds = 0 \quad //$$