Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones en $x = x(t)$ son homogéneas de grado cero y resuelva:

a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ b) $txx' = 2x^2 - t^2$ c) $x' = \dfrac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

Ecuaciones Homogéneas

$f(t, x)$ es Homogénea de Grado n si:

$$f(\lambda . t, \lambda . x) = \lambda^n . f(t, x)$$

a) $$x' = \frac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}}$$

$$\parallel$$

$$f(t, x) = \frac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda . x}{\lambda . t} + 2 . e^{-\frac{\lambda x}{\lambda t}} = \frac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}} = f(t, x)$$

Es homogénea de grado cero!

$$\Rightarrow y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

$$x = y . t$$

$$x' = y' . t + y$$

Como $x' = f(t, x) = \dfrac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}}$

$\Rightarrow$ Si $\lambda = \frac{1}{t}$

$$\underbrace{f(\lambda.t, \lambda.x)}_{= f(t,x)} = f(1, y)$$

$$\underbrace{= x'}$$

$$y'.t + \cancel{y} = \cancel{y} + 2 . e^{-y}$$

$$y' = \frac{2}{t} . e^{-y}$$

$$y' . e^{y} = \frac{2}{t}$$

$$e^{y} = \int \frac{2}{t} . dt$$

$$e^{y} = 2 \ln|t| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\ln$

$$y = \ln(2 . \ln|t| + C)$$

Como $y = \frac{x}{t}$

$$\boxed{x = t . \ln(2 . \ln|t| + C) \qquad C \in \mathbb{R}}$$

b) $t \cdot x \cdot x' = 2 \cdot x^2 - t^2$

$$x' = \frac{2x^2}{tx} - \frac{t^2}{tx}$$

$$x' = f(t, x)$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{2\lambda^2 \cdot x^2}{\lambda^2 t x} - \frac{\lambda^2 t^2}{\lambda^2 t x} = f(t, x)$$

$\therefore$ es H. de grado 0

- Si $\lambda = \frac{1}{t}$, $y(t) = \frac{x(t)}{t}$

$$\Rightarrow \quad x = t \cdot y$$

$$x' = y + t \cdot y'$$

$$f(\underbrace{\lambda \cdot t}_{=1}, \underbrace{\lambda x}_{\frac{x}{t} = y}) \overset{\substack{H.G.0 \\ \downarrow}}{=} f(t, x) = x' = \frac{2x^2}{tx} - \frac{t^2}{tx}$$

$$= f(1, y)$$

$$= \frac{2 \cdot y^2}{y} - \frac{1}{y}$$

$$x' = 2 \cdot y - \frac{1}{y}$$

$$\cancel{y} + t \cdot y' = \cancel{2} \cdot y - \frac{1}{y}$$

$$t \cdot y' = \frac{y^2 - 1}{y}$$

$$\frac{y'}{y^2-1} \cdot y = \frac{1}{t} \qquad t \neq 0 \qquad y^2 \neq 1$$

$$\int \frac{y'}{y^2-1} \cdot y \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{y^2-1} \cdot 2y \cdot y'$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln |y^2 - 1| = \ln |t| + c$$

$$|y^2 - 1| = \underbrace{e^{2 \cdot \ln |t|}}_{=\left(e^{\ln |t|}\right)^2} \cdot e^c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= |t|^2 \cdot \tilde{C} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$|y^2 - 1| = \tilde{C} \cdot t^2$$

$$y^2 - 1 = \begin{cases} -\tilde{c} \cdot t^2 & \text{si} \quad y^2 - 1 < 0 \\ \tilde{c} \cdot t^2 & \text{si} \quad y^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 1 = \begin{cases} -\tilde{c}\cdot t^2 & \text{si } y^2 < 1 \\ \tilde{c}\cdot t^2 & \text{si } y^2 \geq 1 \end{cases}$$

- Si $y^2 < 1$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \tilde{c}\, t^2$$

$$|y| = \underbrace{\sqrt{1-\tilde{c}\, t^2}}$$

$$y^2 < 1 \downarrow y \in (-1, 1)$$

$$\longrightarrow 1 - \tilde{c}\cdot t^2 \geq 0$$

$$1 \geq \tilde{c}\, t^2 \qquad \tilde{c} > 0$$

$$\frac{1}{\tilde{c}} \geq t^2$$

$$|t| \leq \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}}} \Rightarrow t \in \left(-\frac{1}{\sqrt{\tilde{c}}}, \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}}}\right)$$

- Si $y^2 \geq 1$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 + \tilde{c}\, t^2$$

$$y^2 \geq 1 \downarrow$$

$$|y| = \underbrace{\sqrt{1+\tilde{c}\, t^2}}_{t \in \mathbb{R}}$$

$$y \in (-\infty, -1]$$

ó

$$y \in [-1, +\infty)$$

$$\underbrace{t \in \mathbb{R}}_{\text{Intervalo maximal}}$$

Obtuve 2 familias de soluciones

1°: $y = \sqrt{1+\tilde{c}t^2}$ $\quad\quad \tilde{c} > 0$

2°: $y = -\sqrt{1+\tilde{c}t^2}$

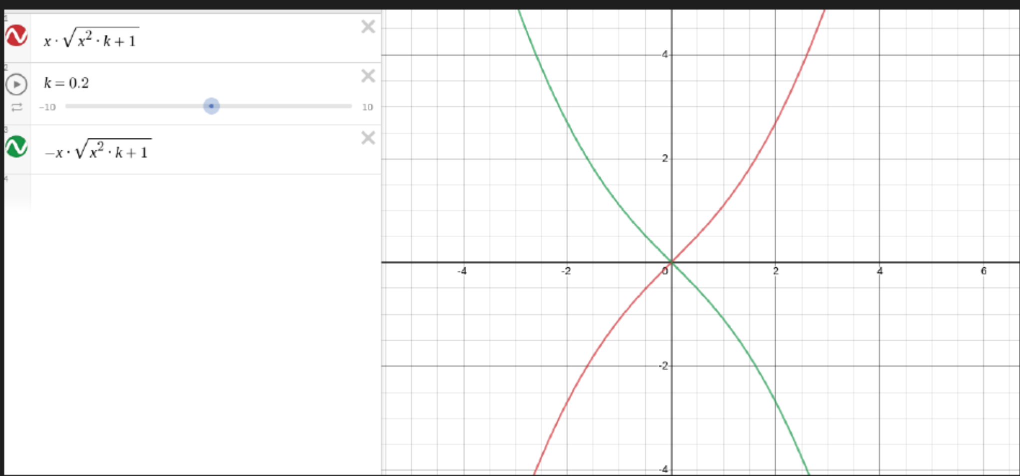
Como $y = \frac{x}{t}$

1°: $x = t\sqrt{1+\tilde{c}t^2}$

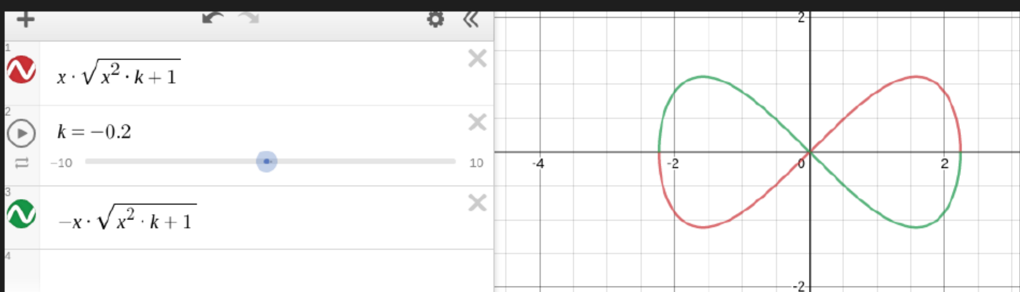
2°: $x = -t\sqrt{1+\tilde{c}t^2}$

1°

2°



¡!



Caso con $k = -\tilde{c}$

c) $x' = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0$

$$x' = f(t, x) = \frac{x}{t} + \frac{t}{t}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} t} + \frac{\cancel{\lambda} t}{\cancel{\lambda} t} = f(t, x)$$ es homogénea de grado cero

- $\lambda = \frac{1}{t}$

- Si $y = \frac{x}{t} \Rightarrow x = t \cdot y \Rightarrow x' = y + t \cdot y'$ (I)

$$\Rightarrow x' = f(t, x) = f(\lambda t, \lambda x) \overset{\lambda = \frac{1}{t}}{=} f(1, y) = y + 1$$

$$x' = \cancel{y} + 1 \overset{(I)}{=} \cancel{y} + t \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{t}$$

$$\int y' \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt$$

$$y = \ln|t| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$y = \frac{x}{t}$

$$\boxed{x = t\left(\ln|t| + c\right)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Sol. Gral

Si $t = 1 \Rightarrow X(1) = 0 = 1\,(\underbrace{\ln|1|}_{=0} + c)$

$$c = 0$$

Sol. Part.

$$\boxed{x = t \cdot \ln|t|}$$

Verifico: Quiero llegar a $x' = \dfrac{x+t}{t}$

$$x' = \underbrace{\ln|t|}_{\frac{x}{t}} + \underbrace{\frac{t}{|t|} \cdot \text{signo}(t)}_{=1}$$

✓ Verificado.

Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x' = (x+t)^2$ b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

$$y = at + bx + c$$

Dato: $x' = f(y)$

$$\Rightarrow y' = a + b \cdot x' \qquad \left(y' = \frac{\partial}{\partial t} y \text{ y } x' = \frac{\partial}{\partial t} x \right)$$

$$y' = a + b \cdot f(y)$$

Una función f aplicada a y de la forma y=(at + bx + c)

Ejs (para algún a,b,c en R)

f(y) = (at + bx + c)^2
f(y) = sin(at + bx + c)
f(y) = e^(at + bx + c)

a) $x' = (x+t)^2$

Como $x' = f(y)$

$$\Rightarrow f(y) = (x+t)^2$$

Supongo $y = x + t$ con $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x' = \overbrace{y^2}^{f(y)}$$

Además, sé que

$$y' = a + b . f(y)$$

$$y' = 1 + y^2$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\, dt = \int 1 \, dt$$

$$\arctan y = t + d \qquad d \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan(t+d) \qquad d \in \mathbb{R}$$

$$\shortparallel$$

$$x + t = \tan(t+d)$$

$$\boxed{x = \tan(t+d) - t}$$

con $t+d \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pues $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ es indet.

Verifico: Debo llegar a $x' = (x+t)^2$

$$x' = \frac{1}{\cos^2(t+d)} - \underbrace{1}_{\frac{\cos^2(\,)}{\cos^2(\,)}} \stackrel{?}{=} \underbrace{\left(\tan(t+d) - t + t\right)^2}_{\tan^2(t+d)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2(t+d)}{\cos^2(t+d)}$$

$$= \frac{\sin^2(t+d)}{\cos^2(t+d)} = \tan^2(t+d) \quad \checkmark \text{ Verificado}$$

b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

$$y = t - x + 1 \qquad \text{con} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$x' = f(y)$$

$$y' = 1 - x'$$

$$y' = 1 - f(y)$$

$$= 1 - \sin^2 y$$

$$y' = \cos^2 y$$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1 \qquad \text{con } \cos^2 y \neq 0$$

$$\int \frac{y'}{\cos^2 y}\, dt = \int 1\, dt$$

CA

$$(\tan(y))' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$$

$$\tan y = t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \arctan(t + c)$$

$$t - x + 1 = \arctan(t + c)$$

$$-x = \arctan(t + c) - t - 1$$

$$\boxed{x = t + 1 - \arctan(t + c)}$$

Verifico : Quiero $x' = \underbrace{\sin^2(t-x+1)}_{\underbrace{\sin^2(\arctan(t+c))}_{\text{wolfram.}}}$

$$x' = 1 - \frac{1}{1+(t+c)^2}$$

$$= \frac{1+(t+c)^2-1}{1+(t+c)^2} \overset{=}{\longleftrightarrow} \frac{(t+c)^2}{1+(t+c)^2}$$

✓ Verificado

Ejercicio 6.

(a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $t = s - h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

(b) Resuelva las ecuaciones:

a) $x' = \dfrac{2x - t + 4}{x + t - 1}$ b) $x' = \dfrac{x + t + 4}{t - x - 6}$

c) $x' = \dfrac{x + t + 4}{x + t - 6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

$$at + bx + c \overset{\substack{t = s - h \\ x = y - k \\ \downarrow}}{=} a(s-h) + b(y-k) + c$$

$$= as - ah + by - bk + c$$

$$dt + ex + f = ds - dh + ey - ek + f$$

Además

$$x' = (y-k)' = y'$$

$$\Rightarrow y' = F\left(\frac{as - ah + by - bk + c}{ds - dh + ey - ek + f}\right)$$

$$= F\left(\frac{as + by + c - ah - bk}{ds + ey + \underbrace{f - dh - ek}}\right)$$

Si $\begin{cases} c = ah + bk \\ f = dh + ek \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = F\left(\frac{as + by}{ds + ey}\right)$$

Busco h y k / $\begin{cases} c = ah + bk \\ f = dh + ek \end{cases}$

Resuelvo el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}_{ae - bd \neq 0} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$ae - bd \neq 0 \Rightarrow$ determinante no nulo

$\Rightarrow$ tiene solución ($\exists\, h, k$ que resuelven el sistema para cualquier a, b, d, e, c, f con $ae - bd \neq 0$)

$$\Rightarrow y' = F\left(\frac{as + by}{ds + ey}\right) \qquad (y = y(s))$$

$$\| $$

$$f(s, y) = F\left(\frac{as + by}{ds + ey}\right)$$

$$f(\lambda s, \lambda . y) = F\left(\frac{\lambda . as + \lambda . by}{\lambda . ds + \lambda . ey}\right) = f(s, y) \checkmark$$

es homogénea de grado cero.

(b) Resuelva las ecuaciones:

$$\text{a) } x' = \frac{2x - t + 4}{x + t - 1} \qquad \text{b) } x' = \frac{x + t + 4}{t - x - 6}$$

$$\text{c) } x' = \frac{x + t + 4}{x + t - 6}, \quad x(0) = 2. \text{ ¿Se satisface } ae \neq bd \text{ en este caso?}$$

a) $a = -1 \quad b = 2 \quad c = 4$

$d = 1 \quad e = 1 \quad f = -1$

Veo det de $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$: si es $\neq 0 \Rightarrow$ puedo usar sustitución

$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$ ✓ Vale la sustitución de arriba

$$\begin{cases} t = s - h \\ x = y - k \end{cases} \quad (y = y(s))$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -h + 2k = 4 \longrightarrow 1 + k + 2k = 4 \\ h + k = -1 \Rightarrow h = -1 - k \end{cases}$$

$3k = 3$

$k = 1$

$\Rightarrow h = -2$

$$\begin{cases} t = s + 2 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{as + by}{ds + ey}$$

$$f(s,y) = \frac{-s+2y}{s+y} \qquad \text{Si } \lambda = \frac{1}{s}$$

$$\left(f(\lambda s, \lambda y)\right)$$

$$f\left(1, \frac{y}{s}\right) = \frac{-1+2\frac{y}{s}}{1+\frac{y}{s}}$$

Llamo $u = \dfrac{y}{s}$

$$\Rightarrow u \cdot s = y$$

$$\Rightarrow y' = u + s \cdot u'$$

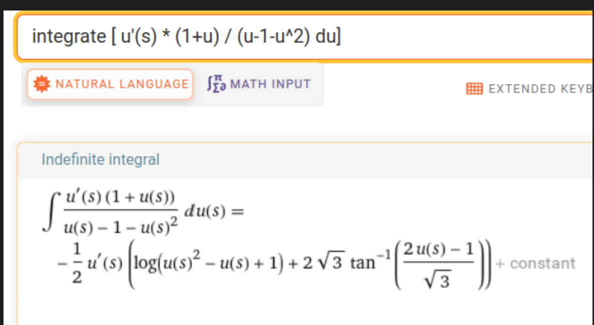
$$\underbrace{f(1, u)}_{=y'} = \frac{-1+2u}{1+u}$$

$$u + s \cdot u' = \frac{-1+2u}{1+u}$$

$$s \cdot u' = \frac{2u - 1 - u(1+u)}{1+u} = \frac{u - 1 - u^2}{1+u}$$

$$\frac{u' \cdot (1+u)}{u - 1 - u^2} = \frac{1}{s}$$

$$\int \frac{u' \cdot (1+u)}{u-1-u^2}\, ds = \int \frac{1}{s}\, ds$$



integrate [u'(s) * (1+u) / (u-1-u^2) du]

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYB

Indefinite integral

$$\int \frac{u'(s)(1+u(s))}{u(s)-1-u(s)^2}\, du(s) = -\frac{1}{2} u'(s) \left(\log\left(u(s)^2 - u(s) + 1\right) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2u(s)-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \text{constant}$$

???

Luego de analizar las screenshots de abajo y otros ejercicios sobre ecuaciones Exactas, se debe considerar otra manera de resolver este tipo de integrales.

Hasta ahora separábamos variables e integrábamos de ambos lados de la igualdad, pero esta integración era de ambos lados sobre una misma variable!

$$\int \frac{x'}{x}\, dt = \int t \cdot dt \qquad \text{con} \quad x = x(t)$$

misma variable

Pero a partir de que

$$x' = \frac{dx}{dt} \leftarrow \text{derivada de } x \text{ wrt. } t$$

Puedo hacer lo siguiente

$$\int \frac{x'}{x}\, dt = \int t \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt} \cdot dt}_{\frac{dx}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = dx} = \int t \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int t \cdot dt$$

ahora integro sobre x! ("x es como una variable")

$$\ln|x| = \ln|t| + c$$

y resuelvo como siempre

Volviendo al ejercicio:

$$\int \frac{u' \cdot (1+u)}{u-1-u^2}\, ds = \int \frac{1}{5}\, ds$$

$$\int \frac{(1+u)}{u-1-u^2} \frac{du}{ds}\, ds =$$

$$\int \frac{(1+u)}{u-1-u^2}\, du =$$

la integral es sobre u!

Llamo $x := u$

Problem:

$$\int \frac{x+1}{-x^2+x-1}\, dx$$

Apply linearity:

$$= -\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\, dx$$

Now solving:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\, dx$$

Write $x+1$ as $\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}$ and split:

$$= \int \left(\frac{2x-1}{2(x^2-x+1)} + \frac{3}{2(x^2-x+1)} \right) dx$$

Apply linearity:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx$$

Now solving:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx$$

Substitute $u = x^2-x+1 \longrightarrow \frac{du}{dx} = 2x-1$ (steps) $\longrightarrow dx = \frac{1}{2x-1}\, du$:

$$= \int \frac{1}{u}\, du$$

This is a standard integral:

$$= \ln(u)$$

Undo substitution $u = x^2-x+1$:

$$= \ln\left(x^2-x+1\right)$$

Now solving:

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx$$

Complete the square:

$$= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx$$

Substitute $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (steps) $\longrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, du$:

$$= \int \frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{3u^2}{4}+\frac{3}{4}\right)}\, du$$

Simplify:

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\, du$$

Now solving:

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

This is a standard integral:

$$= \arctan(u)$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{2\arctan(u)}{\sqrt{3}}$$

Undo substitution $u = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

$$= \frac{2\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

Plug in solved integrals:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$
$$= \frac{\ln(x^2-x+1)}{2} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Plug in solved integrals:

$$-\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$$
$$= -\frac{\ln(x^2-x+1)}{2} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

The problem is solved:

$$\int \frac{x+1}{-x^2+x-1}\,dx$$
$$= -\frac{\ln(x^2-x+1)}{2} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(u^2-u+1\right) - \sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) = \ln|s| + C \quad C\in\mathbb{R}$$

Como $u = \frac{y}{s}$,

y además $\begin{cases} t = s+2 \\ x = y-1 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{x+1}{t-2}$

reemplazo en todos los u y obtengo una horrible sol. implícita.

Esta ecuación, por lo dicho antes, es homogénea de grado 0.

(*b*) Resuelva las ecuaciones:

i) $x' = \dfrac{2x - t + 4}{x + t - 1}$ ii) $x' = \dfrac{x + t + 4}{t - x - 6}$

iii) $x' = \dfrac{x + t + 4}{x + t - 6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

i) a=2, b=-1, c=4, d=1, e=1, f=-1. $ae - bd = 2.1 + 1.1 = 3 \neq 0$. Podremos llevarla a una homogénea.

Ojo que acá cambié de lugar a x y t (tendría que ser a=-1, b=2, ...)

$c = a.h + b.k \Rightarrow 4 = 2h - k \Rightarrow h = 1,\ k = -2$
$f = d.h + e.k \Rightarrow -1 = h + k$

Propongo un reemplazo: $t = s - k,\ x = y - h$ (porque intercambié las letras)

$2x - t + 4 = 2(y - 1) - (s + 2) + 4 = 2y - 2 - s - 2 + 4 = 2y - s$
$x + t - 1 = (y - 1) + (s + 2) - 1 = y - 1 + s + 2 - 1 = y + s$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x-t+4}{x+t-1} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{2y-s}{y+s}$$

Lo resolvemos con un cambio de variables $z = y/s \Leftrightarrow y = zs$.
$dy/ds = y' = z's + z$

$$z's + z = \frac{2zs-s}{zs+s} = \frac{2z-1}{z+1} \Rightarrow z' = \left(\frac{2z-1}{z+1} - z\right)\frac{1}{s}$$

$$\frac{2z-1}{z+1} - z = \frac{2z-1}{z+1} - \frac{z(z+1)}{z+1} = \frac{-z^2-z+2z-1}{z+1} = \frac{-z^2+z-1}{z+1}$$

falta z'?

$$\Rightarrow \int -\frac{z+1}{z^2-z+1}dz = \int \frac{1}{s}ds$$

Tal vez porque $dz = z'.ds$ pues $z' = \dfrac{dz}{ds}$

Pero operar con diferenciales es medio rancio

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2z+2}{z^2-z+1}dz = -\frac{1}{2}\int\frac{2z-1+3}{z^2-z+1}dz = -\frac{1}{2}\int\frac{2z-1}{z^2-z+1} + \frac{3}{z^2-z+1}dz$$

$$Sustitución:\ u = z^2 - z + 1,\ du = 2z - 1\,dz$$

$$z^2 - z + 1 = z^2 - z + 1/4 + 3/4 = (z - 1/2)^2 + 3/4$$
$$w = z - 1/2,\ dw = dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du + \int\frac{3}{w^2+3/4}dw$$

$$= -\frac{1}{2}ln|u| + \int\frac{4}{(4/3w^2+1)}dw = -\frac{1}{2}ln|u| + \frac{4}{\sqrt{4/3}}\int\frac{1}{v^2+1}dv$$

$$v = \sqrt{4/3}w \Rightarrow dv = \sqrt{4/3}dw$$
$$= -\frac{1}{2}ln|u| + \frac{4}{\sqrt{4/3}}arctan(v)$$

Llamo $u = \frac{y}{s} \Rightarrow us = y \Rightarrow y' = u's + u$

$$y' = u's + u = \frac{2u-1}{u+1}$$

$$\frac{du}{ds}s = \frac{2u-1-u\cdot(u+1)}{u+1}$$

$$\frac{du}{ds}s = \frac{2u-1-u^2-\cancel{x}}{u+1}$$ → Arrastré error

wat!?

$$\frac{du}{ds}s = \frac{-u^2+2u-2}{u+1}$$

$$\int\frac{u+1}{-u^2+2u-2}du = \int\frac{1}{s}ds$$

$$= ln|s| + C$$

Ejemplo (6)

$$y'(x) = \frac{y + x + 4}{x - y - 6}$$

Resolvemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad h = \cancel{5}1$, $k = 5$

$x = s + 1 \qquad y = u - 5$

$$u'(s) = \frac{u - 5 + s + 1 + 4}{s + 1 - u + 5 - 6} = \frac{u + s}{s - u} \quad \text{homogénea.}$$

Proponemos $u = s.v \to$

$$v + s v' = \frac{sv + s}{s - sv} = \frac{v+1}{1-v}$$

$$s v' = \frac{v+1}{1-v} - v = \frac{\cancel{v}+1 \cancel{-v} + v^2}{1-v} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\int \frac{1 - v(s)}{1 + v^2(s)} v'(s)\, ds = \int \frac{1}{s}\, ds$$

$$\operatorname{arctg}(v) - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln(s) + C$$

Volvemos hacia atrás con los cambios de variable.