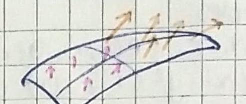
Análisis II 24/04

Repaso: Flujos

$S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada (existe $\nu: S \to \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario cont.), $F: S \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo.

Flujo de F a través de S: $\int_S F \cdot d\vec{S} = \int_S \langle F, \nu \rangle \, dS$



Cálculo:

Si $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización regular que preserva la orientación

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u(u,v) \times T_v(u,v) \rangle \, du \, dv$$

preservar orientación: $T_u(u,v) \times T_v(u,v) = \nu(T(u,v))$

Teorema de STROKES

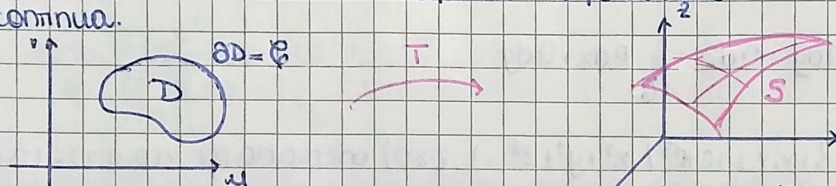
Antes, tenemos que estudiar superficies con "borde" y orientaciones compatibles

$S \to$ la orientamos

$\mathcal{C}$: "borde de S" $\to$

Observación: en $\mathbb{R}^3$, el borde de una superficie S no es un "borde topológico"

Observación: si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie es porque existe $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización continua.



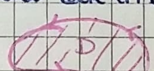
Muy tentador pero no es del todo correcto $\partial S = T(\partial D)$

$\sigma: [a,b] \to \mathcal{C}$ su param.

En el caso de $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, regular (inyectiva) tenemos que $\partial S = T(\partial D)$

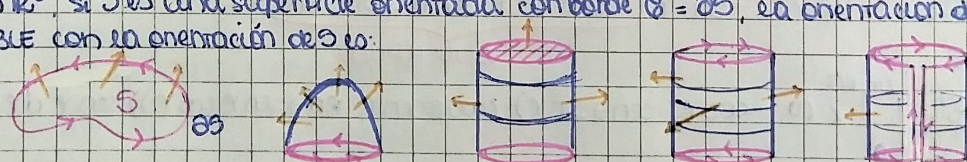
Orientaciones compatibles:

Recordar que en el Teorema de Green pedimos

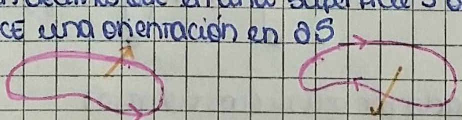


$$\iint_D Q_x - P_y \, dA = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$$ $\mathcal{C}$ orientada unitaria (positivo)

En $\mathbb{R}^3$, si S es una superficie orientada con borde $\mathcal{C} = \partial S$, la orientación de $\mathcal{C}$ COMPATIBLE con la orientación de S es:



También decimos que en una superficie S orientable con borde $\mathcal{C} = \partial S$, una orientación en S INDUCE una orientación en ∂S



Teorema de STROKES:

$S \subset \mathbb{R}^3$, $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular con $D \subset \mathbb{R}^2$ donde vale Green.

Si $T \in C^2$ y consideramos en $\mathcal{C} = \partial S$ la orientación inducida por la orientación de S, entonces vale:

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{\sigma} \quad \forall \text{ campo } F \in C^1,\ F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$\nabla \times F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

El flujo del rotor de F ($\nabla \times F$) a través de la superficie orientada S coincide con la circu-

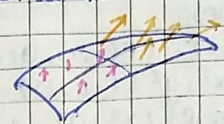
Análisis II 24/04

Repaso: Flujos

$S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada (existe $V: S \to \mathbb{R}^3$ un campo normal unitario cont). F

$F: S \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo.

Flujo de F a través de S: $\int_S F.d\vec{S} = \int_S \langle F, V \rangle dS$.



Cálculo:

Si $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización regular que preserva la orientación

$$\int_S F.d\vec{S} = \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u(u,v) \times T_v(u,v) \rangle du\, dv$$

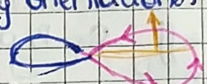
preservar orientación: $T_u(u,v) \times T_v(u,v) = V(T(u,v))$

Teorema de STROKES

Antes, tenemos que estudiar superficies con "borde" y orientaciones compatibles

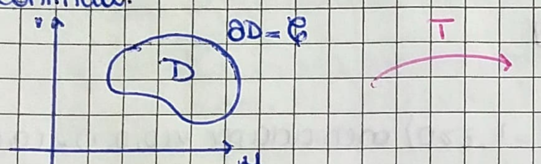
$S \to$ la orientamos

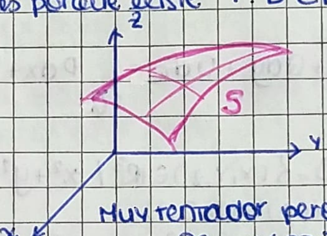
$\mathcal{C}$: "borde de S" $\to$



Observación: en $\mathbb{R}^3$ el borde de una superficie S no es un "borde topológico"

Observación: si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie es porque existe $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ parametrización continua.





$\sigma: [a,b] \to \mathcal{C}$ su param.

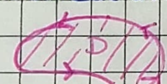
Muy tentador pero no es del todo correcto

$\partial S = T(\partial D)$

En el caso de $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, regular (inyectiva) tenemos que $\partial S = T(\partial D)$

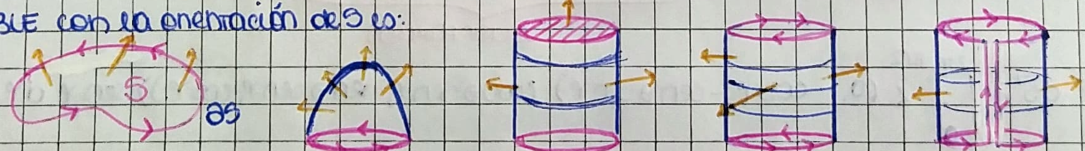
Orientaciones compatibles:

Recordar que en el Teorema de Green pedimos

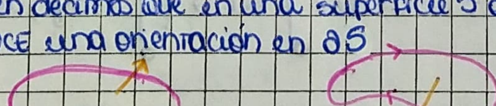


$$\iint_D Q_x - P_y\, dA = \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy \qquad \mathcal{C} \text{ orientada antihoraria (positivo)}$$

En $\mathbb{R}^3$, si S es una superficie orientada con borde $\mathcal{C} = \partial S$, la orientación de $\mathcal{C}$ COMPATIBLE con la orientación de S es:



También decimos que en una superficie S orientable con borde $\mathcal{C} = \partial S$, una orientación en S INDUCE una orientación en ∂S



Teorema de STROKES:

$S \subset \mathbb{R}^3$, $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular con $D \subset \mathbb{R}^2$ donde vale Green.

Si $T \in C^2$ y consideramos en $\mathcal{C} = \partial S$ la orientación inducida por la orientación de S, entonces vale:

$$\int_S \nabla \times F . d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} F . d\vec{\sigma} \quad \forall \text{ campo } F \in C^1,\ F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\nabla \times F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

El flujo del rotor de F a través de la superficie orientada S coincide con la circu

$\nabla \times F$

Asamblea

lación de F a lo largo de $C=\partial S$ con la orientación inducida por S.

Observaciones / ejemplos:

1) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=(P(x,y),Q(x,y),0)$

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\le 1, z=0\}$ (orientada con $v(0,0,0)=(0,0,1)$)

$\partial S=C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=1, z=0\}$, $\sigma:[0,2\pi]\to C$, $\sigma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,0)$

$$\nabla\times F(x,y,z)=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ P & Q & 0\end{pmatrix}=(0,0,Q_x(x,y)-P_y(x,y))$$

$$\int_S \nabla\times F\,d\vec{S}=\int_S\langle\nabla\times F,v\rangle\,dS=\int_S\langle(0,0,Q_x-P_y),(0,0,1)\rangle\,dS=$$

v: normal unitario

$$=\int_S Q_x-P_y\,dS=\iint_D Q_x-P_y\,dx\,dy\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le 1\}$$

$T(x,y)=(x,y,0)$, $T:D\to S$

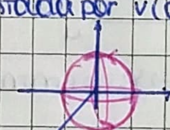
$T_x(x,y)\times T_y(x,y)=(0,0,1)$

$\|T_x\times T_y\|=1$

Por otro lado:

$$\int_C F\,d\vec{s}=\int_C P\,dx+Q\,dy+0\,dz=\int_C P\,dx+Q\,dy$$

2) S = semiesfera $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}$ orientada por $v(0,0,1)=(0,0,1)$



$p=(0,0,1)\in S$, $v(p)=(0,0,1)$

$C=\partial S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=1, z=0\}$

orientación de ∂S inducida por S antihoraria.

$F(x,y,z)=(y^2,xy,xz)$

Verificamos STOKES.

La parte de S: $\nabla\times F(x,y,z)=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ y^2 & xy & xz\end{pmatrix}=(0,-z,-y)$

Param. de S: $T(\theta,\varphi)=(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)$

$0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\varphi\le\pi/2$

$$(T_\theta\times T_\varphi)(\theta,\varphi)=-\operatorname{sen}\varphi\underbrace{(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)}_{\text{vector posición}}$$

$$\int_S\nabla\times F\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\langle(0,-\cos\varphi,-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi),(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\cos\varphi)\rangle\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}-\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\left(\int_0^{\pi/2}\dots d\varphi\right)d\theta=0$$

La parte de la curva: $C=\partial S$ parametrizado por $\sigma(t)=(\cos t,\operatorname{sen}t,0)$

σ preserva la orientación compatible con S.

$\sigma'(t)=(-\operatorname{sen}t,\cos t,0)$

$$\int_C F\cdot d\vec{s}=\int_0^{2\pi}\langle F(\sigma(t)),\sigma'(t)\rangle\,dt=\int_0^{2\pi}\langle(\operatorname{sen}^2t,\cos t\operatorname{sen}t,0),(-\operatorname{sen}t,\cos t,0)\rangle\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}-\operatorname{sen}^3t+\operatorname{sen}t\cos^2t\,dt=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}t\,(1-2\operatorname{sen}^2t)\,dt=0$$

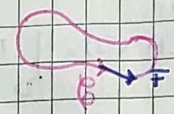
Análisis II | 24/04

Teorema de los campos conservativos

Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de tipo C^1 salvo quizás en finitos puntos.

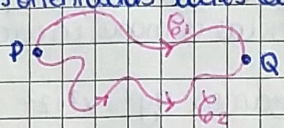
Son equivalentes:

1) $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall$ curva $\mathcal{C}$ cerrada simple



2) Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son curvas simples orientadas tales que conectan los mismos puntos.

$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\vec{s}$



"Independencia del camino"

3) $F = \nabla f$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

4) $\nabla \times F = \vec{0}$ (en $\mathbb{R}^2$, "rotacional" $= Q_x - P_y$)

Práctica:

Definiciones:

① Sea S una superficie suave que admite una parametrización regular $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A) El área de S se calcula como $\iint_D \| T_u \times T_v \| \, du\, dv$

B) Si $f: S \overset{\subseteq \mathbb{R}^3}{\to} \mathbb{R}$ es una función continua, llamamos integral de superficie de f en S a: $\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(T(u,v)) \, \| T_u \times T_v (u,v) \| \, du\, dv$

Problema I: Calcular el área del toro obtenido por revolucionar: $c(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t + 2, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$ alrededor del eje x

Resolución: En general, si $c(t) = (x(t), y(t), 0)$, $t \in [a,b]$, $y \geq 0$

la parametrización de la superficie de revolución es:

$T_1(t, \theta) = (x(t), y(t) \cos\theta, y(t) \operatorname{sen}\theta)$, $t \in [a,b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Si quisiera revolucionar alrededor del eje y (supongamos $x(t) \geq 0$)

tendría: $T_2(t, \theta) = (x(t) \cos\theta, y(t), x(t) \operatorname{sen} t)$

Dist. de $\mathcal{C}$ al eje y en c/ punto

$\sqrt{x(t)^2 + 0^2} = |x(t)| = x(t)$ (porque $x(t) \geq 0$)

En nuestro caso:

$T(t, \theta) = (\operatorname{sen} t, (\cos t + 2) \cos\theta, (\cos t + 2) \operatorname{sen}\theta)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

¿es suave esta superficie? ¿Mi parametrización $T(t,\theta)$ es regular?

→ $T \in C^1$ ✓, → ¿T inyectiva? falla la inyectividad en todos los puntos: $T(t, 0) = T(t, 2\pi) \ \forall t \in [0, 2\pi]$; $T(0, \theta) = T(2\pi, \theta)$

→ ¿$T_t \times T_\theta \neq 0$?

$T_t = (\cos t, \cos\theta(-\operatorname{sen} t), \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen} t)$

$T_\theta = (0, -\operatorname{sen}\theta(\cos t + 2), \cos\theta(\cos t + 2))$

$T_t \times T_\theta = (-\operatorname{sen} t(\cos t + 2), -(\cos t + 2)\cos\theta \cos t, -(\cos t + 2)\operatorname{sen}\theta \cos t)$

Si bien T no es inyectiva porque $T(t, 0) = T(t, 2\pi) \ \forall t$ si demostramos que el vector normal $\begin{cases} T_t \times T_\theta (0, \theta) = T_t \times T_\theta (2\pi, \theta) \\ T_t \times T_\theta (t, 0) = T_t \times T_\theta (t, 2\pi) \end{cases}$ vale lo mismo, demostramos que S es suave y que parametrización igual sirve.

Veamosla: $\left.\begin{aligned} T_t \times T_\theta (t, 0) &= (-\operatorname{sen} t(\cos t + 2), -(\cos t + 2)\cos t, 0) \\ T_t \times T_\theta (t, 2\pi) &= (-\operatorname{sen} t(\cos t + 2), -(\cos t + 2)\cos t, 0) \end{aligned}\right\} ✓$

chequear que ocurre con $T_t \times T_\theta (0, \theta) = T_t \times T_\theta (2\pi, \theta)$

$\|T_t \times T_\theta\|^2 = \text{sen}^2 t\,(\cos t + 2)^2 + (\cos t + 2)^2 \cos^2\theta \cos^2 t + (\cos t + 2)^2 \text{sen}^2\theta \cos^2 t$

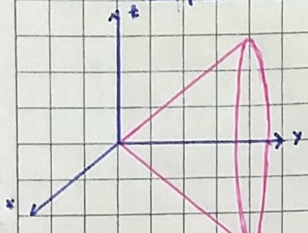
$\|T_t \times T_\theta\| = \cos t + 2 > 0$, no se anula

Ahora sí puedo calcular:

$$\text{AREA }(S) = \iint_D \|T_t \times T_\theta\|\, dt\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t + 2 \; dt\, d\theta = 8\pi^2$$

(área del toro)

Problema II: calcular la masa de la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 9y^2 = x^2 + z^2,\ 0 \leq y \leq 2,\ x \leq z\}$ sabiendo que la densidad superficial de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al plano xz.



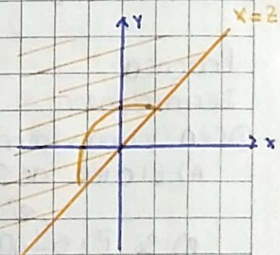
parametrizamos $9y^2 = x^2 + z^2$

$T(u,v) = (u\cos v,\ u/3,\ u.\text{sen}\, v)$

$x^2 + z^2 = 9y^2$

$u^2 = 9y^2$

$u^2/9 = y \underset{\substack{u>0 \\ y>0}}{\Longrightarrow} y = \dfrac{u}{3}$



veamos donde se mueven u y v: $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq \dfrac{u}{3} \leq 2$, $0 \leq u \leq 6$.

$T(u,v) = (u\cos v,\ u/3,\ u\,\text{sen}\, v)$, $u \in [0,6]$, $v \in [\pi/4, 5\pi/4]$

$\iint_S \underbrace{\delta}_{\uparrow} \, dS = \text{masa}(S)$

la función a integrar $\delta(x,y,z) = K\underbrace{|y|}_{\text{distancia de }(x,y,z)\text{ al plano }xz} \overset{y\geq 0}{=} Ky$

$$\iint_S \delta\, dS \underset{\Sigma}{=} \iint_D \delta(T(u,v))\, \|T_u \times T_v\|\, du\, dv = \circledast$$

si T es mi porción y D mi dominio, $D = [0,6] \times [\pi/4, 5\pi/4]$

$T_u = (\cos v,\ 1/3,\ \text{sen}\, v)$

$T_v = (-u\,\text{sen}\, v,\ 0,\ u\cos v)$

$\Longrightarrow T_u \times T_v = (1/3\, u\cos v,\ -u,\ 1/3\, u.\text{sen}\, v)$

$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{\frac{1}{9}u^2 + u^2} \underset{\substack{\downarrow \\ u\geq 0}}{=} \dfrac{\sqrt{10}}{3} u$

$$\circledast = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^6 \underbrace{K\frac{u}{3}}_{\delta(T(u,v))} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} u \, du\, dv = \frac{K}{9}\sqrt{10}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^6 u^2 du\, dv = \frac{K}{9}\sqrt{10}\int_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/4} dv \int_0^6 u^2 du =$$

$$= \frac{K}{9}\sqrt{10}.\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{K}{9}\sqrt{10}\ \pi.\left(\frac{6^3}{3}\right) = \frac{K}{27}\sqrt{10}.\pi.6^3$$

+ Definiciones:

c) Decimos que S es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de S un versor normal $v(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre S resulta continua.

Ejemplos:

i -  puede tomar normal exterior o interior

ii -  puede tomar la normal que tiene coordenada $z > 0$ o la que verifica $z < 0$.

D) Si S es una superficie orientada con parametrización regular $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y F un campo vectorial continuo sobre S entonces el flujo de F a través de S se define como:

$$\iint_S F.d\vec{S} = \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v\rangle\, du\, dv$$

Analisis II

Problema III: Calcular el flujo de $F(x,y,z) = (x+y, -2z, 2x^2)$ a través de la superficie definida por $y = x^3$ con $z+y \leq 1$ en el 1° octante. Indique el sentido de la normal elegida e interprete el signo del flujo.

Resolución:

Parametrizamos S: $T(u,v) = (u, u^3, v)$

$T_u(u,v) = (1, 3u^2, 0)$

$T_v(u,v) = (0, 0, 1)$

$T_u \times T_v (u,v) = (3u^2, -1, 0)$

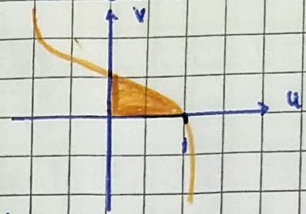
$z + y \leq 1$

$u^3 + v \leq 1$

$v \leq -u^3 + 1$

$u \in [0,1]$

$0 \leq v \leq -u^3 + 1$



Oriento S con la normal que tiene coord. y < 0.

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^{-u^3+1} \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle \, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{-u^3+1} \langle (u+u^3, -2v, 2u^2) \cdot (3u^2, -1, 0) \rangle \, dv\, du = \int_0^1 \int_0^{-u^3+1} 3u^3 + 3u^5 + 2v \, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 3u^3 \cdot v + 3u^5 \cdot v + v^2 \Big|_{v=0}^{v=-u^3+1} du = \int_0^1 3u^3(-u^3+1) + 3u^5(-u^3+1) + (-u^3+1)^2 - 0 \, du =$$

$= \frac{95}{84} > 0 \rightarrow$ el flujo es positivo, $y > 0$