Análisis II-Análisis Matemático II-Matemática 3-Análisis II(LCD)
Primer Parcial (23/2/2022)
Verano

1. Sea C la curva con punto inicial $(1,0)$, que es imagen de $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^6, \sqrt{1-t^{12}})$.

   a) Probar que γ no es una parametrización regular.

   b) Probar que C es una curva suave y simple. ¿Es cerrada?

   c) Sea F el campo definido como
$$F(x,y) = (4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + 2x + y + 1, 2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1).$$
   Hallar el trabajo de F a lo largo de C.

a) es regular si:

- $\gamma(t) \in C^1$ ✓
- $\gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [-1,1]$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} 6t^5 = 0 \iff t=0 \\ \left(\sqrt{1-t^{12}}\right)' = 0 \iff t = 1 \text{ ó } -1 \end{array}\right\} \therefore \gamma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [-1,1]$$

- $\gamma(t)$ inyectiva en $[-1,1]$ si es abierta

  en $[-1,1)$ si es cerrada con $\gamma'(a) = \gamma'(b)$

Como $\gamma(-1) = \gamma(1) = (1,0)$

$\Rightarrow \gamma(t)$ con $t \in [-1,1]$ no es inyectiva

$\therefore$ no es regular.

b) Si $\exists\, \sigma(t)$ param. regular $\Rightarrow$ C es suave

$$\gamma(t) = \left(t^6, \sqrt{1-t^{12}}\right) \quad t \in [-1,1]$$

$$\sigma(t) = \left(t, \sqrt{1-t^{2}}\right) \quad t \in [0,1]$$

Orientada en sentido opuesto

Qvq:

$\gamma(t) \subseteq \sigma(t)$

Sea $t_0 \in [-1,1]$

$$\gamma(t_0) = \left(t_0^6, \sqrt{1-t_0^{12}}\right)$$

$$= \left(t_0^6, \sqrt{1-t_0^{12}}\right)$$

Si $t = t_0^6$

$\Rightarrow t \in [0,1]$ (pues $t_0 \in [-1,1]$

y $t_0^2 \in [0,1]$

$\Rightarrow (t_0^2)^3 \in [0,1]$)

$$\Rightarrow \gamma(t_0) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$$

$$= \sigma(t) \checkmark \qquad \gamma \subseteq \sigma$$

$\sigma(t) \overset{?}{\subseteq} \gamma(t)$

Sea $t_0 \in [0,1]$

$\Rightarrow \sigma(t_0) = \left(t_0, \sqrt{1-t_0^2}\right)$

Sea $t = t_0^{1/6}$ $\quad t_0 \geq 0$

$\Rightarrow t^6 = t_0$

$= \left(t^6, \sqrt{1-t^{12}}\right)$ con $t \in [0,1]$

o sea que

$\sigma \subseteq \gamma$

$\therefore$ como $\left.\begin{array}{l}\sigma \supseteq \gamma \\ \sigma \subseteq \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(t) = \gamma(t)$

Parametrizan la misma curva

Como $\sigma(t)$ es inyectiva ✩

es C^1

y $\sigma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \sigma(t)$ es regular $\therefore$ C es suave.

σ es inyectiva pues

$$\sigma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

- 1° componente es igual $\Leftrightarrow t_1 = t_2$ con t_1, t_2 $[0,1]$

Pues $f(t) = t$ es inyectiva (identidad)

- 2 campo:

$$\sqrt{1-t_1^2} = \sqrt{1-t_2^2}$$

$$1-t_1^2 = 1-t_2^2$$

$$t_1^2 = t_2^2 \quad \text{como } t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0$$

$$t_1 = t_2 \quad \checkmark$$

$\therefore$ es inyectiva.

Como es inyectiva en $[0,1]$ cerrado $\Rightarrow$ es una curva simple abierta

c) $F(x,y) = (4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + 2x + y + 1, 2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1)$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P \qquad\qquad\qquad\qquad Q$

$$\int_C F \cdot ds = ?$$

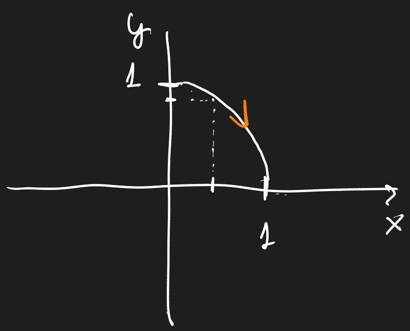
$$Q_x = 2y \cdot 4x \cdot e^{2x^2+y^2} + 3x^2$$

$$P_y = 4x \cdot 2y \cdot e^{2x^2+y^2} + 3x^2 + 1$$

$$Q_x - P_y = -1$$

Sea C la curva con punto inicial $(1,0)$, que es imagen de $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^6, \sqrt{1-t^{12}})$.

$\sigma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ orientada en sentido opuesto



$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma(\frac{1}{2}) = (\underbrace{\frac{1}{2}}_{0,5}, \underbrace{\sqrt{\frac{3}{4}}}_{\approx 0,87})$

La cierro con $\varphi_1(t) = (1-t, 0)$, $\varphi_2(t) = (0, t)$

Por Green, como $F \in C^1$

$$\Rightarrow \int_C F \cdot ds + \int_{L_1^- \cup L_2^-} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dy\,dx$$

$$\iint_D Q_x - P_y \, dy\,dx = \iint_D -1 \, dx\,dy$$

$$= -\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x}} 1 \, dx\,dy$$

$$= -\int_{x=0}^{1} y \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= -\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx$$

$$u = 1-x$$

$$du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

$$= -\int_1^0 -\sqrt{u} \cdot du$$

$$= -\int_0^1 \sqrt{u} \, du$$

CA:

$$\frac{d}{du} \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} u^{1/2}$$

$$= -\frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1$$

$$\cancel{= -\frac{2}{3}}$$

//

Mal

$$-\frac{1}{4}\pi$$

$$\varphi_1(t) = (1-t, 0), \quad \varphi_2(t) = (0, t)$$

$$F(x,y) = (4xe^{2x^2+y^2} + \cancel{3x^2y} + 2x + \cancel{y} + 1,\ \cancel{2ye^{2x^2+y^2}} + x^3 + 1).$$

$$\int_{\mathcal{L}_1^-} F \cdot ds = -\int_{\mathcal{L}_1} F \cdot ds = -\int_{t=0}^{1} \underbrace{\langle F(1-t, 0), (-1, 0) \rangle}\, dt$$

$$\left\langle \left(4 \cdot (1-t) \cdot e^{2(1-t)^2} + 2(1-t) + 1,\ (1-t)^3 + 1\right), (-1, 0) \right\rangle$$

$$= +\int_{t=0}^{1} \underbrace{4 \cdot (1-t) \cdot e^{2(1-t)^2}} + \underbrace{2(1-t)} + 1 \quad dt$$

$$u = 1-t$$

$$du = -t \cdot dt$$

$$\underbrace{2t\Big|_0^1 - 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t\Big|_0^1}$$

$$2 - 1 + 1 = 2$$

$$= 2 - \int_1^0 4 \cdot u \cdot e^{2u^2}\, du$$

$$= 2 + \int_0^1 4 \cdot u \cdot e^{2u^2}\, du$$

$$\frac{d}{\partial u} e^{2u^2} = 4ue^{2u^2}$$

$$= 2 + e^{2u^2}\Big|_0^1$$

$$= 2 + \left(e^{2} - 1\right)$$

$$= 1 + e^{2} \quad //$$

$$\varphi_1(t) = (1-t, 0), \quad \varphi_2(t) = (0, t)$$

$$F(x,y) = (4\cancel{x}e^{2x^2+y^2} + 3\cancel{x^2}y + 2\cancel{x} + y + 1, 2ye^{2x^2+y^2} + \cancel{x^3} + 1).$$

$$\int_{\mathcal{L}_2^-} F\cdot ds = -\int_{\mathcal{L}_2} F\cdot ds = -\int_{t=0}^{1} \underbrace{\langle F(0,t), (0,1)\rangle}\, dt$$

$$\langle (t+1,\ 2.t.e^{t^2}+1), (0,1)\rangle$$

$$= -\int_0^1 2t.e^{t^2} + 1\, dt$$

$$= -1 - e^{t^2}\Big|_0^1$$

$$= -1 - (e - 1)$$

$$= -e \quad //$$

$$\int_C F\cdot ds + \int_{\mathcal{L}_1^- \cup \mathcal{L}_2^-} F\cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dy\,dx$$

$$\underbrace{\int_C F\cdot ds + \int_{\mathcal{L}_1^- \cup \mathcal{L}_2^-} F\cdot ds}_{} \qquad \underbrace{\iint_D Q_x - P_y \, dy\,dx}_{}$$

$$\left(1 + e^2 - e\right) \qquad -\frac{1}{4}\pi$$

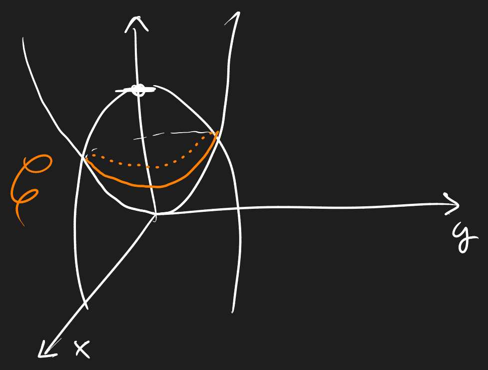
$$\int_C F\cdot ds = -\frac{1}{4}\pi - 1 - e^2 + e$$

$$= e - e^2 - \frac{1}{4}\pi - 1 \quad //$$

2. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones:

$$z = 2x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad z = 6 - x^2 - y^2.$$

Calcular la circulación $\int_C F \cdot ds$ del campo $F(x,y,z) = (2yxe^{x^2} + z, e^{x^2}, x)$ a lo largo de la porción de C con $y \geq 0$, **indicando la orientación elegida.**



$$z - 6 = -(x^2 + y^2)$$

$$6 - z = x^2 + y^2 \qquad z \leq 6$$

$$2x^2 + y^2 = 6 - x^2 - y^2$$

$$3x^2 + 2y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \qquad a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3}$$

Despejo z:

$$z = 2x^2 + 6 - z - x^2$$

$$2z = x^2 + 6$$

$$z = \frac{x^2}{2} + 3$$

Curva $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \\ z = \dfrac{x^2}{2} + 3 \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \left(a . \cos t, \; b . \sin t, \; a^2 . \cos^2 t + 3\right) \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$= \left(\sqrt{2} . \cos t, \; \sqrt{3} . \sin t, \; 2 . \cos^2 t + 3\right)$$

Como $F \in C^1 \Rightarrow$ Uso Stokes

$$\nabla \times F = \begin{array}{ccc} & (-) & \\ \end{array}$$
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2yxe^{x^2}+z & e^{x^2} & x \end{vmatrix}$$

$$= \left(0, -(1-1), 2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot e^{x^2}\right)$$

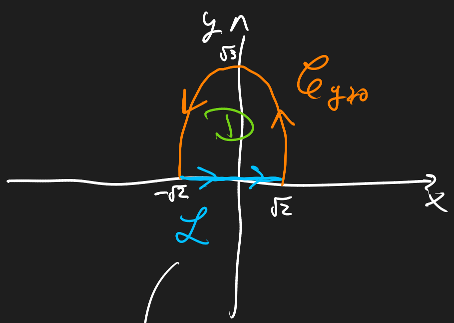
$$= \vec{0}$$

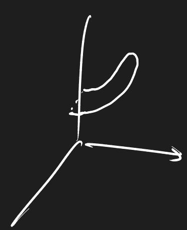
Llamo $C_{y\geq 0}$ a C con $y \geq 0$

Parametrizada por

$$\tilde{\sigma}(t) = \left(\sqrt{2} \cdot \cos t, \sqrt{3} \cdot \sin t, 2 \cdot \cos^2 t + 3\right)$$
$$t \in [0, \pi]$$

Cuya orientación es positiva





$$\varphi(t) = (t, 0, z_0) \qquad t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Con $z_0 = z(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} + 3 = 4$

Por Stokes

$$\int_{\mathcal{C}_{y\geq 0}} F \cdot ds + \int_{\mathcal{L}} F \cdot ds = \underbrace{\iint_{D} \nabla \times F \, ds}_{=0}$$

$$\int_{\mathcal{L}} F \cdot ds = \int_{t=-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{\langle F(t,0,4), (1,0,0) \rangle}_{=4+0+0} dt$$

$$= 4 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

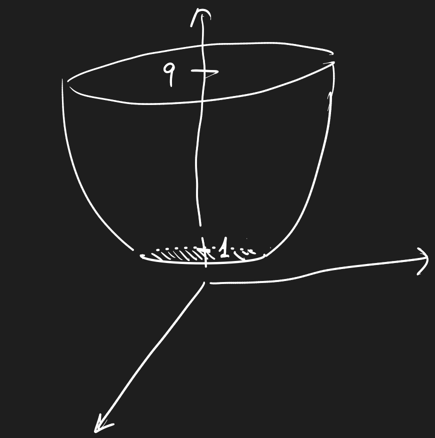
$$\int_{\mathcal{C}_{y\geq 0}} F \cdot ds + 8\sqrt{2} = 0$$

$$\int_{\mathcal{C}_{y\geq 0}} F \cdot ds = -8\sqrt{2}$$

//

3. Una taza descripta por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 9\}$ está llena de sopa, cuya temperatura está dada por $T(x, y, z) = 38 + xy - x^2 - y^2 + 4z$. Calcular el flujo de calor **saliente** a través de la taza **con base**.

Nota: Recordar que el flujo de calor es el flujo del campo $-\nabla T$.



$$F = -\nabla T$$
$$= -(y - 2x,\ x - 2y,\ 4)$$

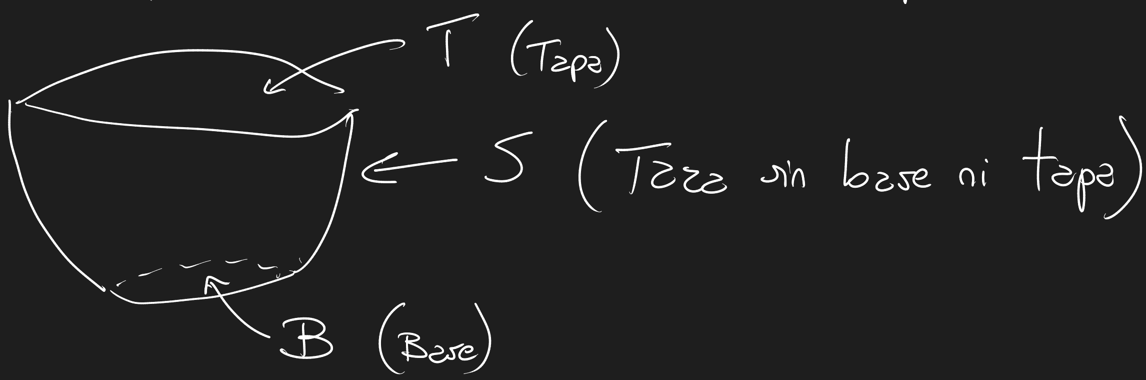
$$F = (2x - y,\ 2y - x,\ -4)$$

$$\iint_{\text{Taza}} F \cdot \eta \, dS = ?$$

Como $F \in C^1$: Puedo usar Gauss

Calculo $\operatorname{div} F = 2 + 2 + 0 = 4$

Sea Ω el volumen de la taza con tapa T



Con $S \cup B \cup T = \partial\Omega$

Por Gauss

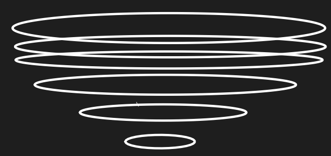
$$\underbrace{\iint_S F\cdot \eta \, dS + \iint_B F\cdot \eta \, dS}_{\text{Lo que me piden}} + \underbrace{\iint_T F\cdot \eta \, dS}_{\text{Tapa agregada}} = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV = \iiint_\Omega 4 \cdot dV = 4 \iiint_\Omega 1 \, dV$$

$$= 4 \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)$$

Como ya conozco el área de una circunferencia de radio r

Caracterizo Ω como



Cavalieri

$$4 \cdot \mathrm{Vol}\, \Omega = 4 \cdot \int_1^9 \text{Área}(D_r)\, dz$$

$$= 4 \int_1^9 \pi \cdot r^2 \cdot dz$$

$r^2 = 4z$ (por dato del enunciado)

$$= 4\pi \int_1^9 4z \, dz$$

$$= \frac{16\pi}{2} \cdot z^2 \Big|_1^9$$

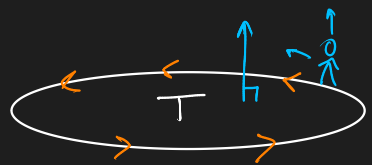
$$= 8 \cdot \pi \cdot (81 - 1)$$

$$4\,\text{Vol}(\Omega) = 640\,\pi$$

//

Tapa de arriba: La oriento con η_T hacia arriba

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta,\ 9) \qquad r \in [0, \underset{\substack{\uparrow \\ 2\sqrt{9}}}{6}) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$



$$\iint_T F \cdot \eta\, dS = \int_r \int_\theta \langle F(T(r,\theta)),\ T_r \times T_\theta \rangle\, d\theta\, dr$$

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r \cdot \sin\theta & r \cdot \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, r)$$ ✓ apunta hacia arriba

$$\int_r \int_\theta \underbrace{\left\langle F(T(r,\theta)),\ T_r \times T_\theta \right\rangle}_{(0,0,\ -4\cdot r)} \, d\theta \, dr =$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{6} -4r$$

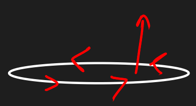
$$= -\frac{8}{2}\pi \left(r^2 \Big|_0^6 \right.$$

$$= -4\pi \cdot 36$$

$$= -144\pi \ //$$

Parametrizo B como

$$T_{B^-}(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ 1) \qquad \begin{array}{l} r \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array}$$



$$\iint_B F\cdot\eta \, ds = -\iint_{B^-} F\cdot\eta \, ds$$

$$-\iint_{B^-} F\cdot \eta \, dS = -\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{\left\langle F\left(T_{B^-}(r,\theta)\right), \underbrace{T_r \times T_\theta}_{(0,0,r)} \right\rangle}_{(0,0,-4.r)} d\theta\, dr$$

$$= 4 \cdot \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r \cdot d\theta\, dr$$

$$= \frac{8\pi}{2} \cdot \left(r^2 \Big|_0^1 \right.$$

$$= 4\pi \quad //$$

$$\iint_S F\cdot \eta\, dS + \iint_B F\cdot \eta\, dS + \iint_T F\cdot \eta\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dV$$

$$\iint_S F\cdot \eta\, dS + 4\pi + \left(-144\pi\right) = 640\pi$$

$$\iint_S F\cdot \eta\, dS = 640\pi + 140\pi = 780\pi$$

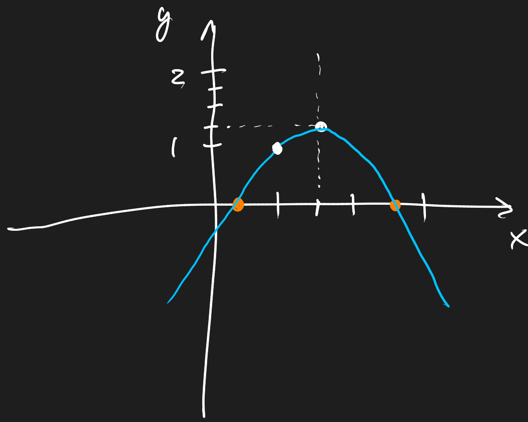
$$\iint_{S\cup B} F\cdot \eta\, dS = 780\pi + 4\pi = 784\pi \quad //$$

4. Sea C la curva frontera de la región plana acotada limitada por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 3x - 1$ y la recta tangente en $(1, 1)$ a la línea de nivel $\frac{2}{3}$ del campo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{3}y^3$.

Supongamos que C se orienta en sentido positivo y sea $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$G(x, y) = (2xy + 3y, x^2 + e^{y^2}).$$

Hallar la circulación de G a lo largo de C, $\int_C G \cdot ds$.



$$0 = -x^2 + 3x - 1 = x^2 - 3x + 1$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \approx 2{,}62 \\ \approx 0{,}38 \end{cases}$$

Calculo máx

$$y' = -2x + 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 = y$$

$$y = 1{,}25$$

Calculo

$$x^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}y^3 = x^2 - \frac{2}{3}$$

$$y^3 = 3x^2 - 2$$

$$y = (3x^2 - 2)^{1/3}$$

derivo

$$y' = \frac{1}{3}(3x^2 - 2)^{-2/3} \cdot 6x$$

$$y' = 2x(3x^2 - 2)^{-2/3} =: m$$

↳ m con x = 1 o 2

Recta

$$y = m \cdot x + b$$

Despejo b

$$b = y - m \cdot x$$

Como quiero $(x,y) = (1,1)$

$$b = 1 - m(1)$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 \left(3 \cdot 1^2 - 2\right)^{-2/3}$$

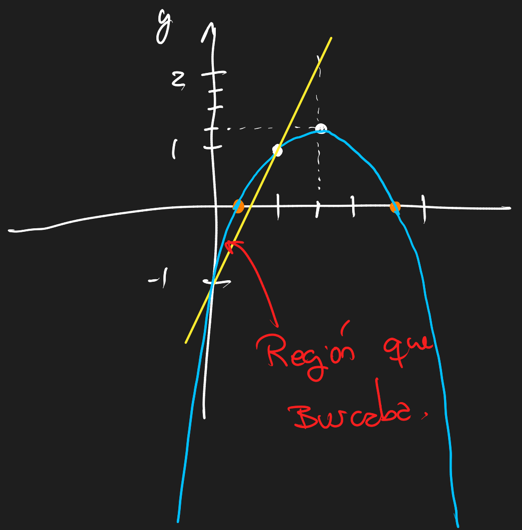
$$= 1 - 2 \underbrace{\left(3 - 2\right)}_{1}^{-3/2}$$

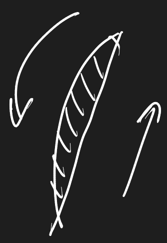
$$b = -1$$

Finalmente la recta es

$$y = 2 \cdot x - 1$$

Positiva





$$\int_C G \cdot ds = ?$$

Como G es $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Puedo usar Green.

Calculo $Q_x - P_y$

$$P = 2xy + 3y \Rightarrow P_y = 2x + 3$$

$$Q = x^2 + e^{y^2} \Rightarrow Q_x = 2x$$

$$Q_x - P_y = 2x - (2x + 3) = -3$$

Llamo $\mathcal{L}_1$ a la curva $\swarrow$ orientada con sentido hacia abajo

$\mathcal{L}_2$ a la curva $\nearrow$ " " " " arriba

Con $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = C$ con sentido positivo

$$\int_C G \cdot ds = \int_{\mathcal{L}_1} G \cdot ds + \int_{\mathcal{L}_2} G \cdot ds$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

Región encerrada por C

$$\int_{\mathcal{L}_1} G \cdot ds + \int_{\mathcal{L}_2} G \cdot ds = \iint_D -3 \, dx\,dy$$

$$\iint_D -3 \, dx\,dy = -3 \cdot \int_{x=0}^{1} \int_{y=2x-1}^{-x^2+3x-1} 1 \, dy\,dx$$

$$= -3 \int_0^1 \underbrace{-x^2+3x-1-2x+1}_{-x^2+x} \, dx$$

$$= -3 \left(\underbrace{\underbrace{-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1}_{-\frac{1}{3}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1}_{\frac{1}{2}}}_{-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}} \right)$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_C G \cdot ds = -\frac{1}{2}$$