Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

Método de Separación de Variables
Busco llegar a algo de la forma:
x'/x = t

Variables separables: $y'(x) = f(y)g(x)$

Podemos integrar directamente.

Ejemplo: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y(x)| = K e^{x^2/2} \rightarrow \boxed{y(x) = 3e^{x^2/2}}$$

Ecuaciones Homogéneas de Grado cero

Ec. homogénea de grado cero:

$$f(\lambda x, \lambda t) = \lambda^0 f(x,t) \quad \forall (x,t,\lambda)$$

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ b) $txx' = 2x^2 - t^2$ c) $x' = \dfrac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

Ecuaciones homogéneas

Def. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice HOMOGÉNEA de grado 0 si

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo. $F(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y}.$$

¿Para qué?

Proposición: Si $y' = F(x,y)$ con F hom. gr. 0, el cambio de variable $y = xu$ lo convierte en una ecuación de variables separables:

$y' = F(x,y)$ se convierte en:

$$u + xu' = F(x, xu) = F(1,u)$$

$$u' = \frac{F(1,u) - u}{x}$$

Sustitución

a) $M\,dx + N\,dy = 0$

Supongo que $\exists\, F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^2$ /

$$\nabla F = (M, N)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(x, \overset{y=y(x)}{y}) = M(x,y) + N(x,y)\cdot y'(x) = 0$$

o también

$$\frac{\partial}{\partial y} F(\overset{x=x(y)}{x}, y) = M(x,y)\, x'(y) + N(x,y) = 0$$

F es cte sobre la curva (x, y(x)) o (x(y), y) respectivamente

$\Rightarrow$ $F(x,y) = C \in \mathbb{R}$ define implícitamente una solución

$$M_y = N_x \Leftrightarrow \text{es } \underline{\text{exacta}}.$$

Llamo

$$\tilde{M} = \mu \cdot M$$
$$\tilde{N} = \mu \cdot N$$

$\Rightarrow$ $\tilde{M}\,dx + \tilde{N}\,dy = 0$ es exacta

(c) $\underbrace{(3x^2 - y^2)}_{N}\, dy - \underbrace{2xy}_{M}\, dx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -2x \\ N_x = 6x \end{array}\right\} \text{ Quiero } M_y = N_x$$

$$\Rightarrow \quad \mu \cdot M = \mu \cdot N$$

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu_y \cdot M - \mu_x N = \mu N_x - \mu M_y$$

$$\frac{\mu_y \cdot M - \mu_x N}{N_x - M_y} = \mu$$

$x' - x = 0$ >> Multiplico por e^t en ambos lados

Sistemas de Ecuaciones

```
X' = A X

Calculo autovalores
    det( \lambda I - A ) = 0

Obtengo lambda_1 y _2

Calculo autovectores
    V_1 = Nu(lambda_1 I - A)

Casos en R2:

    Autovalores distintos:
        X(t) = c1 e^l_1t V1 + c2 e^l_2t V2

    Autovalores complejos:
        Calculo parte real e imaginaria

    Autovalor único
        Calculo una solución como siempre: c1 e^l_1t V1
        La otra es de la forma:
            e^l_1t (W + t V_1)
            Para obtener W calculo:
                (A - l_1 I) W = V_1
```