2. Hallar la solución general en $(0, +\infty)$ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2y'' - 7xy' - 20y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 8. \end{cases}$$

$$x^2 y'' - 7xy' - 20y = 0$$

Como $x \neq 0$

$$y'' - 7x^{-1}y' - 20y \cdot x^{-2} = 0$$

Si $x = e^t$

$$\Rightarrow e^{2t} \cdot y'' - 7 \cdot e^t \cdot y' - 20y = 0$$

$\cdot e^{-2t}$

$$y'' - 7 \cdot e^{-t} \cdot y' - 20 \cdot y \cdot e^{-2t} = 0$$

Como $y = y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Como $x = x(t)$

Regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=e^t}$$

$$\Rightarrow y' = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2. Hallar la solución general en $(0, +\infty)$ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2y'' - 7xy' - 20y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 8. \end{cases}$$

Si $x = e^t$

Como $y = y(x) \wedge x = x(t) = e^t$

$\Rightarrow \quad y = y(e^t)$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{d\,y(e^t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= y' \cdot \frac{de^t}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} y = y' \cdot e^t$$

$y' = y'(e^t) \cdot e^t$

$y'' = y''(e^t) \cdot e^t + y'(e^t) \cdot e^t$

Reemplazo en

$$x^2 \cdot y'' - 7xy' - 20y = 0$$

$$e^{2t} \cdot y''(\quad) \qquad - 7 \cdot e^t \cdot \qquad - 20$$

$$y''(e^t)\, e^{3t} + y'(e^t) \cdot e^{3t} - 7 \cdot y'(e^t) \cdot e^{2t} - 20 \cdot y(e^t)$$

2. Hallar la solución general en $(0, +\infty)$ al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2y'' - 7xy' - 20y = 0, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 8. \end{cases}$$

Si $x = e^t$

Como $= y(x) \wedge x = x(t) = e^t$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{d\,y(e^t)}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= y' \cdot \frac{de^t}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} y = y' \cdot e^t$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y'\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{d^2t} \cdot e^{-t} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-e^{-t}\right)$$

$$= e^{-t}\left(\frac{d^2y}{d^2t} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d^2y}{dx\,dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{d}{dx}\, y'$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt\,dx} \cdot e^{-t} - \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{d^2y}{d^2t} \cdot e^{-t} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-e^{-t}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{d^2t} \cdot e^{-t} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot e^{-t} \qquad - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-e^{-t}}\right) \cdot e^{-t} \qquad - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{d^2y}{dx\,dt} \cdot \frac{d^2x}{d^2t} \cdot e^{-t} \qquad - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$

$$= \frac{d^2y}{dx\,dt} \cdot e^{-t} \cdot e^{-t} \qquad - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot e^{-t}$$