Primer Parcial - Fecha desconocida

3. Calcular por medio de una integral de línea la siguiente integral doble

$$\iint_D (y^2 e^{xy} - x^2 e^{xy})\,dx\,dy$$

siendo D el disco unitario.

Por Teo de Green, sabemos que

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

Si $Q_x = y^2 \cdot e^{xy} \Rightarrow Q = y \cdot e^{xy} + \varphi(y)$

$P_y = x^2 \cdot e^{xy} \Rightarrow P = x \cdot e^{xy} + \bar{\varphi}(x)$

$$\varphi(y) = \bar{\varphi}(x) = 0$$

Llamo $F = (P, Q)$

$$F = (x \cdot e^{xy}, \; y \cdot e^{xy})$$

Volviendo, como F es C^1

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

Parametrizo ∂D como

$$\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \underbrace{F(\sigma(\theta))}, \underbrace{\sigma'(\theta)} \rangle \, d\theta$$

$$\left\langle \left(\cos\theta \cdot e^{\cos\theta \cdot \sin\theta}, \sin\theta \cdot e^{\cos\theta \cdot \sin\theta} \right), \left(-\sin\theta, \cos\theta \right) \right\rangle$$

$$e^{\cos\theta \cdot \sin\theta} \left(-\cos\theta \cdot \sin\theta + \cos\theta \cdot \sin\theta \right) = 0$$

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = 0$$

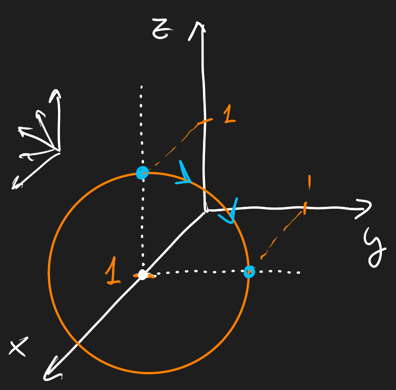
$\therefore$

$$\iint_D y^2 \cdot e^{xy} - x^2 \cdot e^{xy} \, dx\,dy = 0 \quad //$$

4. Dada la curva $C = \{y^2+z^2=1\,,\, x=1\}$, orientada de forma tal que el recorrido desde el $(1,0,1)$ hasta el $(1,1,0)$ sea el más corto posible, y el campo

$$F(x,y,z) = (\sin(y)e^{z^2} + xy,\ \cos(y)xe^{z^2},\ 2\sin(y)zxe^{z^2} + 5z),$$

Calcular $\int_C F \cdot ds$.



Separo F en 2 campos G y H

$$G = \left(\sin y \cdot e^{z^2},\ \cos y \cdot x \cdot e^{z^2},\ 2 \cdot \sin y \cdot z \cdot x \cdot e^{z^2}\right)$$

$$H = (x \cdot y,\ 0,\ 5z)$$

$$G + H = F$$

Sospecho que G es C. Conservativo.

$\Rightarrow$ supongo que $G = \nabla g = (g_x, g_y, g_z)$

Si
$$g_x = \sin y \cdot e^{z^2} \Rightarrow g = \sin y \cdot x \cdot e^{z^2} + \varphi(y,z)$$
$$g_y = \cos y \cdot x \cdot e^{z^2} \Rightarrow g = \sin y \cdot x \cdot e^{z^2} + \bar{\varphi}(x,z)$$
$$g_z = 2 \cdot \sin y \cdot z \cdot x \cdot e^{z^2} \Rightarrow g = \sin y \cdot x \cdot e^{z^2} + \tilde{\varphi}(x,y)$$

$$\Rightarrow g(x,y,z) = \sin y \cdot x \cdot e^{z^2}$$

$\therefore$ G es C. Conservativo

y como C es cerrada

$$\int_C G \cdot ds = 0$$

$H = (x \cdot y, 0, 5z)$

Parametrizo C^- como $\sigma(\theta) = (1, \cos\theta, \sin\theta)$

¡invierte la orientación!

Calculo

$$\int_C H \cdot ds = -\int_{C^-} H \cdot ds$$

$$= -\int_{\theta=0}^{2\pi} \langle \underbrace{H(\sigma(\theta))}, \underbrace{\sigma'(\theta)} \rangle \, d\theta$$

$$\underbrace{\langle (\cos\theta, 0, 5 \cdot \sin\theta), (0, -\sin\theta, \cos\theta) \rangle}_{= 5 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}$$

$$= -5 \cdot \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$u = \sin\theta$

$du = \cos\theta \cdot d\theta$

$$= -5 \cdot \int_0^0 u \, du = 0$$

Como

$$\int_C F \cdot ds = \int_C G \cdot ds + \int_C H \cdot ds$$

$$= 0 + 0$$

$$\int_C F \cdot ds = 0$$

//