Ejercicio 17. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Evaluar la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathcal{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

(a) $\sigma(t) = (t,t,t), \quad 0 \le t \le 1.$

(b) $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

a) Ahora cambian a:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_0^1 \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^1 \langle (t,t,t), (1,1,1) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^1 3t$$

$$= 3 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \quad //$$

b) $$\int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$F(\sigma(t)) = (\sin t, 0, \cos t)$$

$$\sigma'(t) = (\cos t, 0, -\sin t)$$

$$\int_0^{2\pi} \langle (\sin t, 0, \cos t), (\cos t, 0, -\sin t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0 \quad //$$

Ejercicio 18. Para las curvas orientadas $\mathcal{C}$ parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

(a) $\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx$, $\quad \sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.

(b) $\int_{\mathcal{C}} x\,dx + y\,dy$, $\quad \sigma(t) = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t))$, $\quad 0 \le t \le 2$.

a) Jeje ... ¬¬ $x\,dy - y\,dx$

$$\Rightarrow F(x,y) = (-y, x)$$

$$\int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \; dt$$

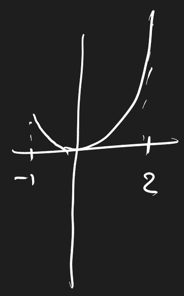
$$= 2\pi \; //$$

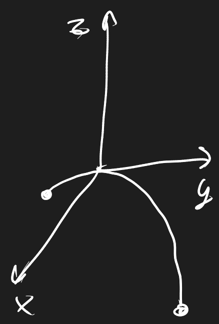
b) $$\int_0^2 \langle (\cos \pi t, \sin \pi t), (-\pi \cdot \sin(\pi t), \pi \cdot \cos(\pi t)) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\pi \cdot \sin \pi t \cdot \cos \pi t + \pi \cdot \sin \pi t \cdot \cos \pi t$$

$$= 0 \; //$$

Ejercicio 19. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.





$$\sigma(t) = (t, t^2, 0) \qquad t \in [-1, 2]$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^{2} \left\langle \overbrace{(t, t^2, 0)}^{F(t,t^2,0)}, (1, 2t, 0) \right\rangle dt$$

$$= \int_{-1}^{2} t + 2t^3 \quad dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + \cancel{2}\frac{t^4}{\cancel{4}\,2} \Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} + \frac{16}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2 + 8 - 1$$

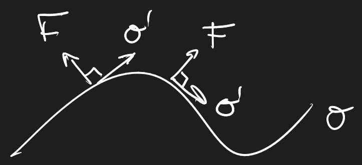
$$= 9 \ //$$

Ejercicio 20. Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave parametrizada por σ.

(a) Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

(b) Si $\mathbf{F}$ tiene el mismo sentido que $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t (es decir, si $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$), mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} ||\mathbf{F}||\, ds.$$

a)

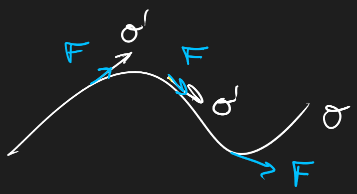


$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_{\sigma(t)} \underbrace{\langle F(\sigma(t)) , \sigma'(t)\rangle}\, dt$$

El producto interno entre dos vectores perpendiculares, es siempre cero!

$$= \int 0\, dt = 0 \;//$$

b)



$$F(\sigma(t)) = \lambda(t)\cdot\sigma'(t)$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_{\sigma(t)} \langle F(\sigma(t)) , \sigma'(t)\rangle\, dt$$

$$\langle \lambda(t)\,(a,b,c) , (a,b,c)\rangle = \lambda(t)\cdot \langle (a,b,c) , (a,b,c)\rangle$$

$$= \int_{\sigma(t)} \langle \lambda(t)\cdot\sigma'(t) , \sigma'(t)\rangle\, dt$$

$$= \int \lambda(t)\, \langle \sigma'(t) , \sigma'(t)\rangle\, dt$$

$$= \int \lambda(t)\, \left((a_t')^2 + (b_t')^2 + (c_t')^2\right) dt$$

CA

$$\|F\| = \|\lambda_t \sigma'(t)\| = \sqrt{\lambda_t^2 \cdot ((a')^2 + (b')^2 + (c')^2)}$$

$$= \lambda(t) \cdot \|\sigma'(t)\|$$

$$= \int \lambda(t) \cdot \|\sigma'(t)\|^2 \, dt$$

$$= \int \lambda(t) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$\lambda(t) \geq 0$

$$= \int \underbrace{\|\lambda(t) \cdot \sigma'(t)\|} \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$$= \int \|F(\sigma(t))\| \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Como

$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$ y $\cos 0 = 1$

$$= \int \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int \|\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle\| \, dt$$

$$= \int \|F\| \cdot d\vec{s}$$

Ejercicio 21. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada $\mathcal{C}$?

Cero, pues por prop. de Campo Gradiente $F = \nabla f$

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot ds = f(b) - f(a)$$

Pero si $a = b$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot ds = 0$$

Ejercicio 22. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz \cdot e^{x^2} \Rightarrow f = yz\,e^{x^2} + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \cdot e^{x^2} \Rightarrow f = yz \cdot e^{x^2} + \psi(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot e^{x^2} \Rightarrow f = yz \cdot e^{x^2} + \xi(x,y)$$

$$\therefore\ f(x,y,z) = y \cdot z \cdot e^{x^2} + C$$

Como

$$f(0,0,0) = 5 \Rightarrow C = 5$$

$$\therefore\ f(x,y,z) = y \cdot z \cdot e^{x^2} + 5$$

Finalmente

$$\boxed{f(1,1,2) = 2 \cdot e^{x} + 5}$$

Ejercicio 23. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Ejercicio 24. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ejercicio 25. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, y sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Damos a $\mathcal{C}$ la orientación dada por σ. Sea $\bar{\sigma}$ una reparametrización de σ, y sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua.

Probar que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ, si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Probar que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.