Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0,$ b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1,$ d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

e) $x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0,$ f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

a) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0,$

$$x' = 2tx + t$$

$$x' = 2t\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x'}{x + \frac{1}{2}} = 2t$$

$$\int \frac{x'}{x + \frac{1}{2}}\, dx = \int 2t\, dt$$

$$\ln\left|x + \tfrac{1}{2}\right| = t^2 + C$$

$e^{\cdots}$

$$\left|x + \tfrac{1}{2}\right| = e^{t^2 + C}$$

$$\left|x + \tfrac{1}{2}\right| = e^{t^2} \cdot e^{C}$$

$$\left|x + \tfrac{1}{2}\right| = C \cdot e^{t^2}$$

Revisar si descarta solución!

$x + \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

No! Solo se descarta si la ec. final tiene un punto problemático.

Los pasos intermedios son solo un medio para obtener una solución, y es esta solución final la que determina el intervalo maximal de existencia.

$x(1) = 0$:

$$\left|0 + \tfrac{1}{2}\right| = C \cdot e^{1}$$

$$\tfrac{1}{2} = C \cdot e$$

$$C = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1}$$

$$\left|x + \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2}$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} \\ -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 1)\ \tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} - \tfrac{1}{2} \\ 2)\ -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} - \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Intervalo maximal: Todo R

Más de una solución (no es única)

Verifico

1) $x' = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} \cdot \cancel{2}t$

$$\Rightarrow x' - 2tx = e^{-1} \cdot e^{t^2} \cdot t - \cancel{2}t\left(\cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} - \cancel{\tfrac{1}{2}}^{\,1}\right)$$

$$= t \checkmark$$

2) $x = -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} \cdot e^{t^2} - \frac{1}{2}$

$$x' = -e^{-1} \cdot e^{t^2} \cdot t$$

$$\Rightarrow x' - 2tx = -e^{-1} \cdot e^{t^2} \cdot t - \cancel{2}t \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}} e^{-1} \cdot e^{t^2} - \frac{\overset{1}{\cancel{1}}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= t \quad \checkmark$$

~~(Revisar!) pero como $x \neq -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Intervalo: $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ pues incluye el t_0.~~

Valen las dos soluciones

Intervalo maximal: Todo R

Más de una solución (no es única)

b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

$$\frac{x'}{1+x^2} = \frac{1}{1+t^2} \qquad 1 + x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Recuerdo:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x'}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\arctan x = \arctan t + c$$

$$x = \tan(\arctan t + c)$$

Uso $x(1) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \tan\Big(\underbrace{\arctan 1}_{\frac{\pi}{4}} + C\Big)$$

$$0 = \tan\left(\frac{\pi}{4} + C\right)$$

elijo $C = -\frac{\pi}{4}$

$\therefore$

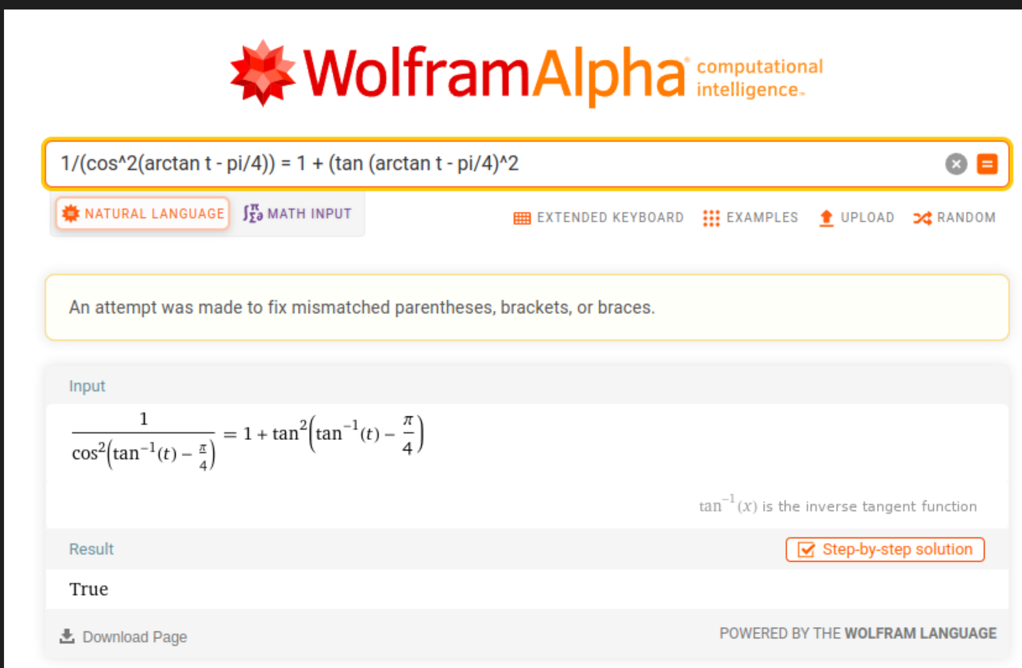
$$x = \tan\left(\arctan t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Verifico

$$x' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\left(\arctan t - \frac{\pi}{4}\right)}}_{\text{debe ser igual a } 1+x^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Lo cual es verdadero segun wolfram:

1/(cos^2(arctan t - pi/4)) = 1 + (tan (arctan t - pi/4)^2



c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \qquad x(0) = 1,$

$$\frac{x'}{1+x} = \frac{1}{1+t} \qquad \text{con } x \neq -1$$

$$\ln(1+x) = \ln(1+t) + C$$

$e^{\cdots}$

$$1 + x = e^{\ln(1+t)+C}$$

$$= e^{C} \cdot (1+t)$$

$$1 + x = C \cdot (1+t)$$

$$x = C \cdot (1+t) - 1$$

Como $x(0) = 1$

$$1 = C \cdot (1+0) - 1$$

$$C = 2$$

$\therefore$

$$x = 2(1+t) - 1$$

$$= 2 + 2t - 1$$

$$x = 2t + 1 \qquad \cancel{\boxed{\text{con } t \in (-1, +\infty)}}$$

con $t \in \mathbb{R}$

Verifico:

$$x' = 2$$

$$x' = \frac{1 + 2t + 1}{1 + t} = \frac{2\cancel{(1+t)}}{\cancel{1+t}} = 2 \checkmark$$

d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

$x \neq -1$

Obs: inversa de tan. hiperb.

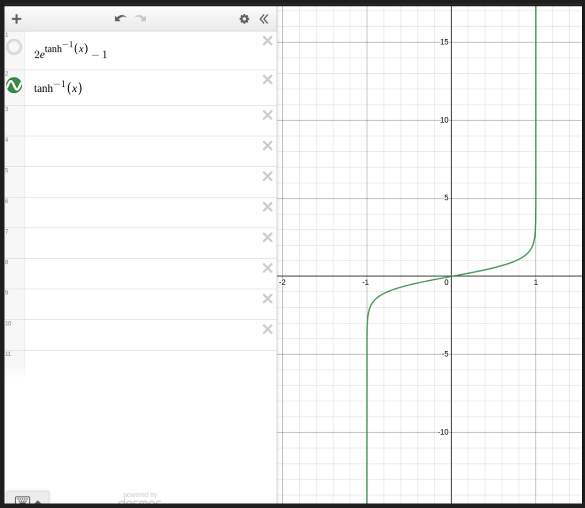
$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x} dx = \int \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$\ln|1+x| = \tanh^{-1} t + C$$

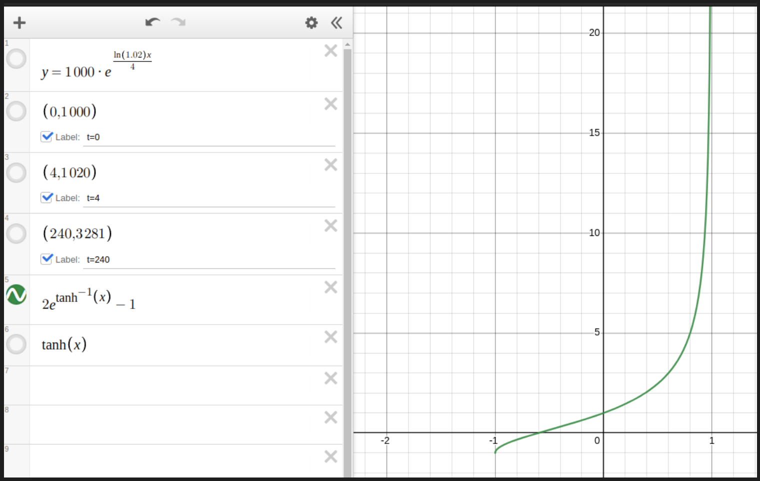
$$|1+x| = C \cdot e^{\tanh^{-1} t}$$

$$1 + x = \pm C \cdot e^{\tanh^{-1} t}$$



$$x = \begin{cases} C \cdot e^{\tanh^{-1} t} - 1 \\ -C \cdot e^{\tanh^{-1} t} - 1 \end{cases}$$

Con $x(0) = 1$



1) $1 = C \cdot 1 - 1$

$C = 2$

2) $1 = -C - 1$

$C = -2$

Sol

$x = 2 \cdot e^{\tanh^{-1} t} - 1 \quad$ con $t \in (-1, 1)$

e) $x' - x^{1/3} = 0, \qquad x(0) = 0,$

$$x' = x^{1/3}$$

$$\frac{x'}{x^{1/3}} = 1$$

$$\int \frac{x'}{x^{1/3}} dx = \int 1 \, dt$$

CA:

$$\frac{d}{dx} x^{2/3} = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} \cdot x'$$

$$\frac{3}{2} \cdot x^{2/3} = t + C$$

$$x^{2/3} = \frac{2}{3} t + C$$

$$(\square)^{3/2}$$

$$x = \left(\frac{2}{3} t + C\right)^{3/2}$$

$x(0) = 0$:

$$0 = C^{3/2}$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$\therefore$

$$\boxed{x = \left(\frac{2}{3} t\right)^{3/2}}$$

f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

del c)

$$x = c \cdot (1+t) - 1$$

con $x(0) = -1$

$$\Rightarrow -1 = c \cdot 1 - 1$$

$$c = 0$$

$\therefore$ $\boxed{x = -1}$ $\leftarrow$ constantemente 1 !

Ejercicio 2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente y'/y.

(a) Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.

(b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.

(c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?

(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.

(e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t $(at + b)$.

(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

Tasa

$$T = \frac{y'}{y} \quad \text{con } y = y(t)$$

a) Si $\dfrac{y'}{y} = K$

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{y}\, dy = \int K \, dt$$

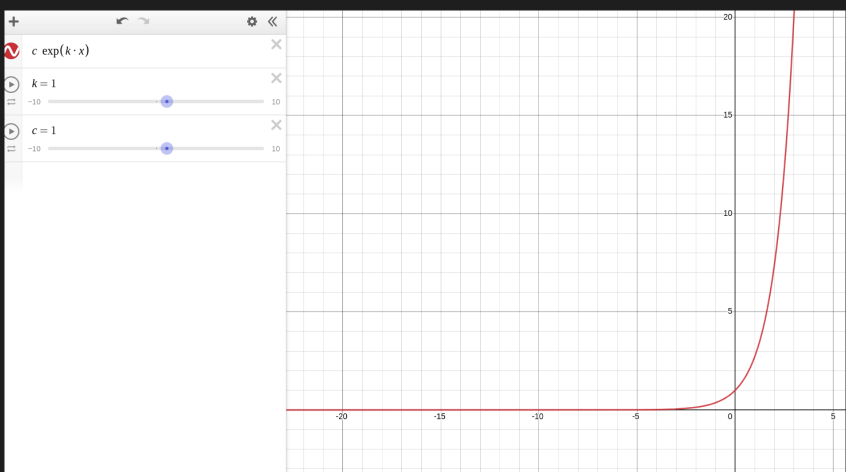
$$\ln y = K \cdot t + C$$

$$y = e^{kt + C}$$

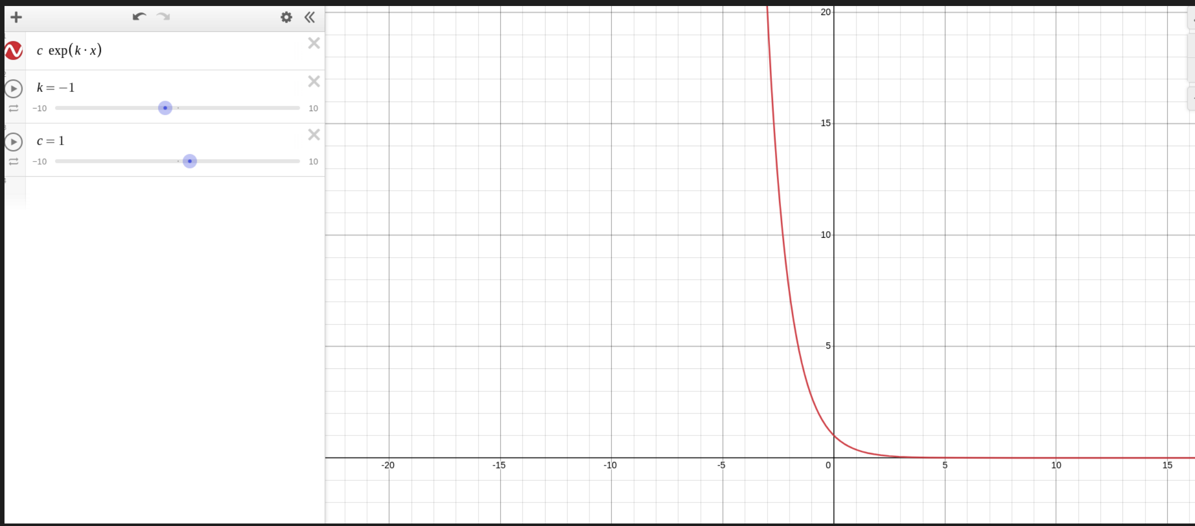
$$\boxed{y = C \cdot e^{kt}}$$

Gráficas:

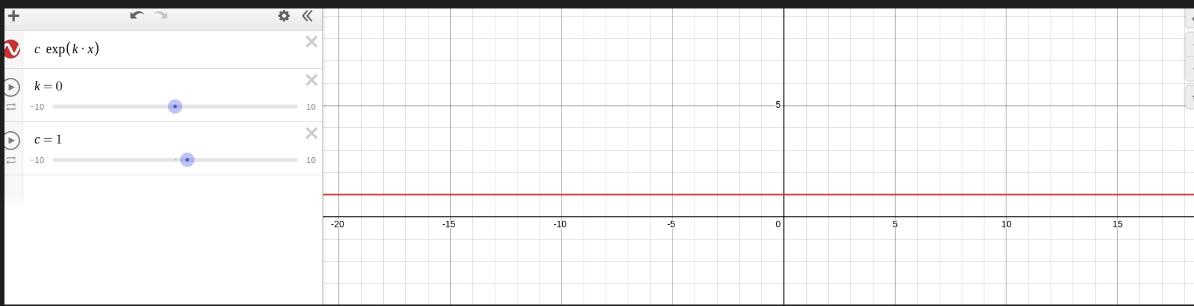
$k > 0$:



$k < 0$



c) Tasa nula $\equiv$ $k = 0$



Son las poblaciones que mantienen su volumen poblacional constante en el tiempo.

(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.

$t = 0$: 1000 indiv.

$t = 4$: 1020

$t = 240$: ?

Tengo

$$y = c \cdot e^{kt}$$

Uso 1° dato : $1000 = c \cdot e^{k \cdot 0}$

$$1000 = c$$

$\Rightarrow y = 1000 \cdot e^{k \cdot t}$

Uso 2° dato:

$$1020 = 1000 \cdot e^{k \cdot 4}$$

$$1{,}02 = e^{4k}$$

$$\ln 1{,}02 = 4k$$

$$k = \frac{1}{4} \cdot \ln 1{,}02$$

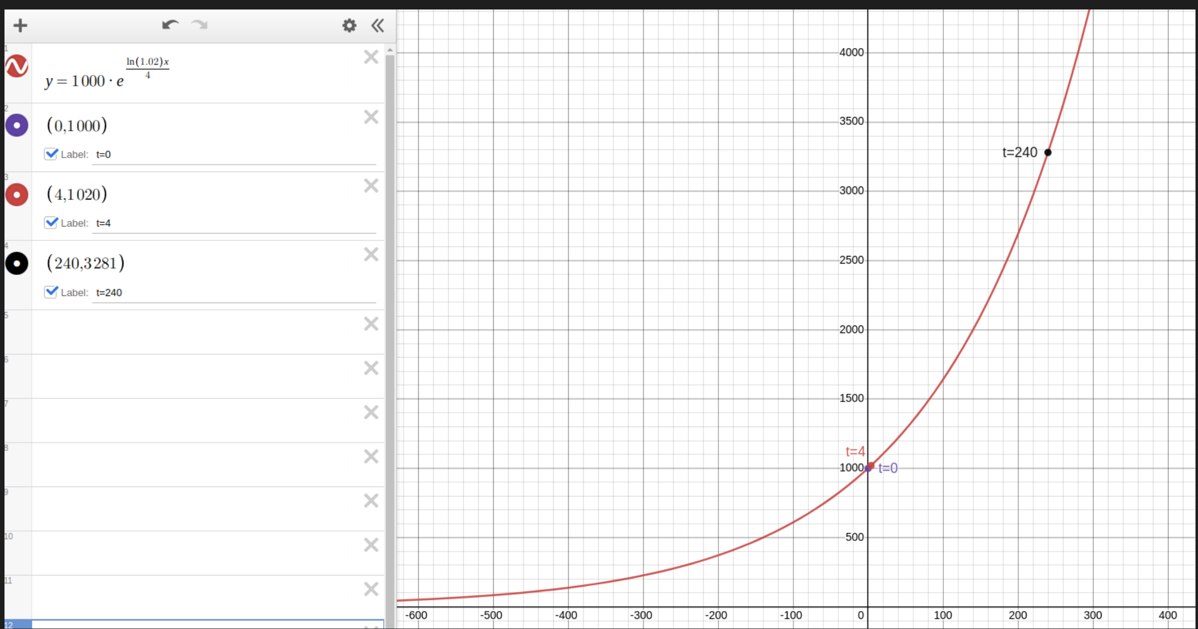
$\therefore$

$$y = 1000 \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot \ln 1{,}02 \cdot t}$$ con t en meses

Quiero:

$$y(240) = 1000 \cdot e^{\frac{1}{4} \cdot \ln 1{,}02 \cdot 240}$$

$$\approx 3281$$



(e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t $(at+b)$.

$$\frac{y'}{y} = a.t + b$$

$$\ln y = \frac{a}{2}.t^2 + bt + c$$

$$y = e^{\frac{a}{2}.t^2 + bt + c}$$

$$\boxed{y = C.e^{\frac{a}{2}.t^2 + bt}}$$

(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

$$\frac{y'}{y} = r - c.y$$

???

$$\int \frac{y'}{y} + c.y = \int r\, dt$$

$$\ln y + \frac{c}{2}.y^2 = rt$$

Ejercicio 3. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?.

$$y(t+1) = 2 \cdot y(t) \qquad t \text{ en horas}$$

$$y(t+2) = 2 \cdot y(t+1)$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot y(t)$$

$$= 4 \cdot y(t)$$

Sé

$$y = c \cdot e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad c \cdot e^{k \cdot (t+2)} = 4 \cdot c \cdot e^{k \cdot t}$$

$$c \cdot e^{kt} \cdot e^{2k} = 4 \cdot c \cdot e^{kt}$$

$$e^{2k} = 4$$

$$2k = \ln 4$$

$$k = \frac{1}{2} \cdot \ln 4$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{2}\ln 4 \cdot t} \quad \leftarrow \text{prop. log.}$$

$$= c \cdot e^{\ln\left(4^{t/2}\right)}$$

$$= c \cdot 4^{t/2}$$

- Si $t = 0$ (Población inicial)

$$y(0) = c$$

- Si $t = 2$

$$y(2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. inicial}}}{c} \cdot 4$$

$\therefore$ en 2 hs aumenta el cuádruple.

(Teo 15 y 16)

Para estos ejercicios usé las primeras 2 teóricas de ec. diferenciales: Método de separación de variables.

Variables separables: $y'(x) = f(y)\,g(x)$

Podemos integrar directamente.

Ejemplo: $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y(x)| = K e^{x^2/2} \longrightarrow \boxed{y(x) = 3e^{x^2/2}}$$

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ b) $txx' = 2x^2 - t^2$ c) $x' = \dfrac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ec. homogénea de grado cero:} \\ f(\lambda . x, \lambda t) = \lambda^{0} . f(x, t) \quad \forall (x, t, \lambda)\end{array}}$

a) $t . x' = x + 2t . e^{-\frac{x}{t}}$

$$x' = \frac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}}$$

Llamo $F(x, t) = \dfrac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}}$

Calculo

$$F(\lambda x, \lambda t) = \frac{x . \lambda}{t . \lambda} + 2 . e^{-\frac{x . \lambda}{t . \lambda}}$$

$$= \frac{x}{t} + 2 . e^{-\frac{x}{t}} = F(x, t) \checkmark$$

$\therefore$ es homogénea de grado cero.

Falta resolver.

Uso :

Ecuaciones homogéneas

Def: $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice HOMOGÉNEA de grado 0 si

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: $F(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y}.$$

¿Para qué?

Proposición: Si $y' = F(x,y)$ con F hom. gr. 0, el cambio de variables $y = xu$ lo convierte en una ecuación de variables separables:

$y' = F(x,y)$ se convierte en:

$$u + xu' = F(x, xu) = F(1,u)$$

$$u' = \frac{F(1,u) - u}{x}$$

defino

$$x = t \cdot u$$

Calculo

$$x' = 1 \cdot u + t \cdot u'$$

$$x' = u + t \cdot u'$$

Como

$$x' = F(x,t) = \frac{x}{t} + 2 \cdot e^{-\frac{x}{t}}$$

homogénea

$$F(t \cdot u, t) = t^0 \cdot F(u, 1)$$

$$= F(u, 1)$$

o lo que es lo mismo, sustituyo

$$\Rightarrow u + t \cdot u' = \frac{t \cdot u}{t} + 2 \cdot e^{-\frac{t \cdot u}{t}}$$

$$u + t \cdot u' = u + 2 e^{-u}$$

$$t \cdot u' = 2 \cdot e^{-u}$$

$$u' \cdot e^{u} = 2 \cdot t^{-1}$$

$$\int u' \cdot e^{u} \, du = \int \frac{2}{t} \, dt$$

$$e^{u} = 2 \cdot \ln|t| + C$$

$$u = \ln\left(2 \cdot \ln|t| + c\right)$$

Como

$$x = u \cdot t \Rightarrow u = \frac{x}{t} \quad \text{con } t \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{t} = \ln\left(2 \cdot \ln|t| + c\right)$$

$$\boxed{x = t \cdot \ln\left(2 \cdot \ln|t| + c\right)}$$

b) $txx' = 2x^2 - t^2$

Despejo x'

$$x' = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

Llamo

$$F(t,x) = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

Veo

$$F(\lambda.t, \lambda x) = \frac{2\lambda^2 . x^2 - \lambda^2 . t^2}{\lambda^2 . t . x} = F(t,x) \checkmark$$

es Homog. de grado cero.

Defino cambio de variables

$$x = t . u \qquad \text{donde } u = u(t)$$

$$\Rightarrow F(t,x) = F(t, t.u)$$

$$\overset{\text{Homog. g. cero}}{=} t^0 . F(1, u)$$

$$= \frac{2u^2 - 1^2}{1\, u} = \frac{2u^2 - 1}{u}$$

$$x' = (t.u)' = 1.u + t.u'$$

$$\Rightarrow u + t.u' = \frac{2u^2 - 1}{u}$$

$$t \cdot u' = \frac{2u^2 - 1 - u^2}{u}$$

$$t \cdot u' = \frac{u^2 - 1}{u}$$

$$\frac{u' \cdot u}{u^2 - 1} = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{u' \cdot u}{u^2-1}\, du = \int \frac{1}{t}\, dt$$

CA

$$\left(\ln(u^2-1)\right)' = \left|\frac{1}{u^2-1}\right| \cdot 2u \cdot u'$$

$$\frac{1}{2} \ln|u^2-1| = \ln|t| + C$$

$$\ln|u^2-1| = 2 \ln t + C$$

$$|u^2-1| = C \cdot e^{2\ln t} = C \cdot e^{\ln(t^2)} = C \cdot t^2$$

$$u^2 - 1 = \begin{cases} C \cdot t^2 \\ -C \cdot t^2 \end{cases}$$

son la misma solución pues C puede ser cualquier valor

ie: si $C^{(1)} = -C^{(2)}$

$$u^2 = C \cdot t^2 + 1$$

$$|u| = \sqrt{C \cdot t^2 + 1}$$

con $C \cdot t^2 + 1 \geq 0$

$C \geq -\frac{1}{t^2}$ $\quad t \neq 0$

$$u = \begin{cases} \sqrt{C \cdot t^2 + 1} \\ -\sqrt{C \cdot t^2 + 1} \end{cases}$$

Como $x = t \cdot u$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{t} = \begin{cases} \nearrow \sqrt{c \cdot t^2 + 1} \\ \searrow -\sqrt{c \cdot t^2 + 1} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \nearrow t \cdot \sqrt{c \cdot t^2 + 1} \\ \searrow -t \cdot \sqrt{c \cdot t^2 + 1} \end{cases}$$

Como $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ son la misma solución.

$$\therefore \quad \boxed{x = t \cdot \sqrt{c \cdot t^2 + 1}} \qquad c \cdot t^2 + 1 \geq 0$$

Verifico

$$x' = \sqrt{c \cdot t^2 + 1} + t \cdot \frac{1}{2\sqrt{c \cdot t^2 + 1}} \cdot 2 \cdot c \cdot t$$

$$x^2 = t^2 \cdot (c \cdot t^2 + 1)$$

qvq

$$t \cdot x \cdot x' \stackrel{?}{=} 2x^2 - t^2$$

$$t \cdot t \cdot \sqrt{c \cdot t^2 + 1} \cdot \left(\sqrt{c \cdot t^2 + 1} + \frac{c \cdot t^2}{\sqrt{c \cdot t^2 + 1}} \right) =$$

$$= t^2 \cdot (c \cdot t^2 + 1) + t^2 \cdot c \cdot t^2$$

$$= t^2 \cdot \left((c \cdot t^2 + 1) + c \cdot t^2 \right)$$

$$= t^2 \cdot \left(2 \cdot c \cdot t^2 + 1 \right)$$

$$\stackrel{?}{=}$$

$$2x^2 - t^2 =$$

$$2 \cdot t^2 \cdot (c \cdot t^2 + 1) - t^2 =$$

$$t^2 \left(2 \cdot c \cdot t^2 + 2 - 1 \right) =$$

$$t^2 \left(2 \cdot c\, t^2 + 1 \right) \quad \checkmark$$

c) $x' = \dfrac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0$

$$x' = F(x,t)$$

$$F(\lambda x, \lambda t) \overset{?}{=} \lambda^0 \cdot F(x,t) \ ?$$

$$= \frac{\cancel{\lambda}(x+t)}{\cancel{\lambda} t} = F(x,t) \ \checkmark$$

Es HdG Cero.

<u>Susti:</u>

$x = t\,u \qquad$ con $u = u(t)$

$\Rightarrow x' = u + t \cdot u'$

$$\underbrace{F(x,t)}_{=x'} = F(t \cdot u, t) \overset{\text{HdGC.}}{=} t^0 \cdot F(u, 1)$$

$$\cancel{u} + t \cdot u' = \frac{\cancel{u} + 1}{1}$$

$$t\,u' = 1$$

$$\int u' \, du = \int \frac{1}{t} \, dt$$

$$u = \ln t + C$$

$x = u \cdot t$

$$x = t(\ln t + C)$$

$$\boxed{x = t \cdot \ln t + C}$$

con $t \in [0, +\infty)$

Me dan

$x(1) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \ln 1 + C$

$C = 0$

$\therefore \quad \boxed{x = t \cdot \ln t}$

Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x' = (x+t)^2$ b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

Busco x'

$$y' = a + bx'$$

$$\frac{y' - a}{b} = x'$$

$$\frac{y' - a}{b} = f(at + bx + c)$$

$$= f(y)$$

$$\frac{y' - a}{f(y)} = b$$

?

a) $x' = (x+t)^2 = \dfrac{y' - a}{b}$

$$y' = b\underbrace{(x+t)^2}_{} + a$$

$= f(at + bx + c)$ con $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

Reemplazo $a = 1$

$b = 1$

$$y' = (x+t)^2 + 1$$

$$y' = y^2 + 1$$

$$y' = 1 \cdot (y^2 + 1) \quad !$$

$$\frac{y'}{y^2+1} = 1$$

$$\int \frac{y'}{y^2+1}\, dy = \int 1\, dt \qquad y^2+1 \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \ \checkmark$$

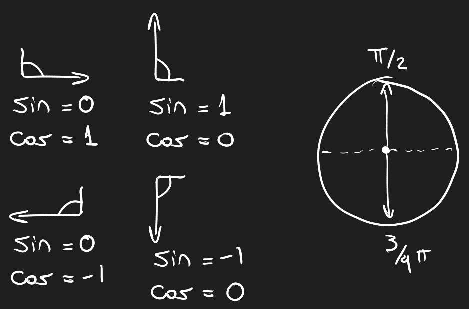
$$\arctan y = t + c$$

$$y = \tan(t+c)$$

$$x + t = \tan(t+c)$$

$$\boxed{x = \tan(t+c) - t}$$

Con $(t+c) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$ pues $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$



$\cos t \neq 0 \iff$

$$\Rightarrow \quad t \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi.k, \frac{3}{4}\pi + 2\pi.k\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) + 2\pi.k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como todos miden lo mismo,
elijo alguno:

$$(t+c) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$$

b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

Si $y = t - x + 1$ con $a = 1$ en $at + bx + c$
$b = -1$
$c = 0$

$$\Rightarrow y' = 1 - x'$$

$$x' = 1 - y'$$

$$\Rightarrow 1 - y' = \sin^2(y)$$

$$y' = 1 - \sin^2 y$$

$$\int \frac{y'}{\underbrace{1 - \sin^2 y}_{\cos^2 y}} = \int 1 \, dt$$

$$\operatorname{tg} y = t + C$$

$$y = \operatorname{arc\,tg}(t + c)$$

$$t - x + 1 = \operatorname{arc\,tg}(t + c)$$

$$x = 1 + t - \operatorname{arc\,tg}(t + c)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6.

(a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $t = s - h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

(b) Resuelva las ecuaciones:

a) $x' = \dfrac{2x - t + 4}{x + t - 1}$ b) $x' = \dfrac{x + t + 4}{t - x - 6}$

c) $x' = \dfrac{x + t + 4}{x + t - 6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

a) $$x' = F\left(\frac{a\cdot(s-h) + b(y-k) + c}{d\cdot(s-h) + e(y-k) + f}\right) \qquad x' = y'$$

constantes

funciones

$$as - ah + by - bk + c = as + by + (c - ah - bk)$$

$$ds - dh + ey - ek + f = ds + ey + (f - dh - ek)$$

Quiero:

$$c - ah - bk = 0$$

$$c = ah + bk$$

$$f - dh - ek = 0$$

$$f = dh + ek$$

tomo h y k que cumpla eso

Como $ae - bd \neq 0$

$$\det\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$$

mismo sistema

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Como h y k cumplen esas igualdades

$$\underbrace{x'}_{=y'} = F\left(\frac{as + by}{ds + ey}\right)$$

es homogénea !

una basta seguir esto !!

(b) Resuelva las ecuaciones:

$$\text{a) } x' = \frac{2x - t + 4}{x + t - 1} \qquad \text{b) } x' = \frac{x + t + 4}{t - x - 6}$$

$$\text{c) } x' = \frac{x + t + 4}{x + t - 6}, \quad x(0) = 2. \text{ ¿Se satisface } ae \neq bd \text{ en este caso?}$$

• Uso sustitución de (a) : $t = s - h$

$x = y - k$

Busco h y k

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -h + 2k = 4 \\ h + k = -1 \end{cases} \Rightarrow h = -1 - k \Rightarrow 2k = 4 - 1 - k$$

$3k = 3$

$k = 1$

$\hookrightarrow h = -2$

$$\begin{cases} t = s + \underbrace{2}_{-h} \\ x = y - \underbrace{1}_{-k} \end{cases}$$

Revisar de donde sale!

$$y' = x' = \frac{2 \cdot \frac{y}{s} - 1}{\frac{y}{s} + 1}$$

Si $u = \frac{y}{s} \Rightarrow y = us$

$y' = s \cdot u' + u$

$$\Rightarrow \quad s.u' + u = \frac{2.\frac{y}{s} - 1}{\frac{y}{s} + 1}$$

$$= \frac{2.\frac{u.s}{s} - 1}{\frac{u.s}{s} + 1}$$

$$s.u' + u = \frac{2.u - 1}{u + 1}$$

$$s\,u' = \frac{2u - 1 - u^2 - u}{u+1} = \frac{-u^2 - u - 1}{u+1}$$

$$= -1\,\frac{(u^2 + u + 1)}{u+1}$$

$$= \frac{-1\left(\left(u+1\right)^2 - u\right)}{u+1}$$

$$= \frac{-(u+1)^2 + u}{u+1}$$

$$= -\frac{(u+1)^2}{u+1} + \frac{u}{u+1}$$

$$= -(u+1) + \frac{u}{u+1}$$

$$s.u' = \frac{u}{u+1} - u - 1$$

... eterno :-(

Ejercicio 7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

(b) $\cos x \cos^2 y\, dx - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y\, dy = 0$

(c) $(3x^2 - y^2)\, dy - 2xy\, dx = 0$

(d) $x\, dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\, dx$

(e) $2(x + y) \operatorname{sen} y\, dx + \big(2(x + y) \operatorname{sen} y + \cos y\big)\, dy = 0$

f) $3y\, dx + x\, dy = 0$

(g) $\big(1 - y(x + y)\tan(xy)\big)\, dx + \big(1 - x(x + y)\tan(xy)\big)\, dy = 0.$

a) $M dx + N dy = 0$

Supongo que $\exists F : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^2$ /

$$\nabla F = (M, N)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} F(x, \overset{y = y(x)}{y}) = M(x,y) + N(x,y) \cdot y'(x) = 0$$

o también

$$\frac{\partial}{\partial y} F(\overset{x = x(y)}{x}, y) = M(x,y)\, x'(y) + N(x,y) = 0$$

F es cte sobre la curva (x, y(x)) o (x(y), y) respectivamente

$\Rightarrow$ $F(x,y) = C \in \mathbb{R}$ define implícitamente una solución

con $M = y - x^3$ $\qquad N = x + y^3$

$M_y = 1$ $\qquad N_x = 1$

Como $M_y = N_x \Leftrightarrow$ es exacta.

(no necesito buscar factor integrante)

Quiero $f(x,y)$:
$$\begin{cases} f_x(x,y) = y - x^3 \\ f_y(x,y) = x + y^3 \end{cases}$$

$$\int f_x(x,y)\,dx = \int y - x^3\,dx = xy - \frac{x^4}{4} + g(y)$$

$$\int f_y(x,y)\,dy = \int x + y^3\,dy = xy + \frac{y^4}{4} + h(x)$$

$$\text{Si } \begin{cases} g(y) = \frac{y^4}{4} \\ h(x) = -\frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x,y) = xy + \frac{y^4}{4} - \frac{x^4}{4}$$

$$\therefore \quad xy + \frac{y^4}{4} - \frac{x^4}{4} = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

es sol. implícita.

(b) $\underbrace{\cos x \cos^2 y}_{M}\, dx - \underbrace{2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y}_{N}\, dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = \cos x \cdot 2 \cdot \cos y \cdot (-\sin y) \\ \\ N_x = -2 \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y \end{array}\right\} \text{iguales} \therefore \text{es exacta.}$$

Quiero $f(x,y)$: $\quad f_x = \cos x \cdot \cos^2 y$

$\qquad\qquad\qquad\quad f_y = -2 \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y$

$$\int \cos x \cdot \cos^2 y \, dx = \cos^2 y \int \cos x \cdot dx$$

$$= \cos^2 y \cdot \sin x + g(y)$$

$$\int -2 \cdot \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y \, dy = -2 \cdot \sin x \cdot \int \sin y \cdot \cos y \, dy$$

$u = \cos y$

$du = -\sin y \cdot dy$

$$= 2 \cdot \sin x \int u \cdot du$$

$$= \sin x \cdot u^2 + h(x)$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 y + h(x)$$

Si $g(y) = h(x) = 0$

$\Rightarrow f(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y$

Sol: $\sin x \cdot \cos^2 y = C \qquad C \in \mathbb{R}$

(c) $\underbrace{(3x^2 - y^2)}_{N}\, dy - \underbrace{2xy}_{M}\, dx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -2x \\ N_x = 6x \end{array}\right\} \text{ Quiero } M_y = N_x$$

$$\Rightarrow \quad \mu . M = \mu . N$$

$$\mu_y . M + \mu . M_y = \mu_x . N + \mu . N_x$$

$$\mu_y . M - \mu_x N = \mu N_x - \mu M_y$$

$$\frac{\mu_y . M - \mu_x N}{N_x - M_y} = \mu$$

$$\frac{-\mu_y 2xy - \mu_x (3x^2 - y^2)}{6x + 2x} = \mu$$

$\mu_x = 0$

$$\frac{-\mu_y . 2xy}{8x} = \mu \qquad x \neq 0$$

$$\frac{-y}{4} = \frac{\mu}{\mu_y} \qquad \mu_y \neq 0$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{4}{y} \qquad \mu \neq 0$$

$$\ln \mu = \underbrace{-4 \ln y}_{= \ln y^{-4}} + C$$

$$\mu = C . y^{-4} \qquad \text{si } C = 1$$

$$\mu = y^{-4}$$

Verifico

$$(3x^2 - y^2) \cdot y^{-4} = 3x^2 y^{-4} - y^{-2} \xRightarrow{\text{derivo}} 6x \cdot y^{-4}$$

$$-2xy \cdot y^{-4} = -2xy^{-3} \Rightarrow +6x \cdot y^{-4}$$

$\checkmark$

Busco $f(x,y)$: $f_x = -2xy^{-3}$

$f_y = 3x^2 \cdot y^{-4} - y^{-2}$

$$\int f_x \, dx = -x^2 \cdot y^{-3} + g(y)$$

$$\int f_y \, dy = -x^2 \cdot y^{-3} + y^{-1} + h(x)$$

$$f(x,y) = -x^2 \cdot y^{-3} + y^{-1}$$

Sol : $-x^2 \cdot y^{-3} + y^{-1} = c \qquad c \in \mathbb{R}$.

(d) $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$

$$\underbrace{(x^5 + x^3 y^2 + y)}_{M}\,dx \underbrace{- x}_{N}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 2x^3 . y + 1 \\ N_x = -1 \end{array}\right\} \neq$$

Busco μ /

$$(\mu . M)_y = (\mu . N)_x$$

$$\mu_y . M + \mu . M_y = \mu_x N + \mu . N_x$$

$$\mu_y . M - \mu_x N = \mu (N_x - M_y)$$

Supongo $\mu_y = 0$

$$\Rightarrow -\mu_x N = \mu (N_x - M_y)$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

$$= \frac{2x^3 . y + 1 + 1}{-x}$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = -2x^2 y - \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{\mu_x}{\mu}\,dx = \int -2x^2 y - \frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln \mu = -\frac{2}{3}x^3 \cdot y - 2\ln x + C$$

$$\mu = C \cdot e^{-\frac{2}{3}x^3 y} \cdot \ldots$$

No puede depender de y, pues $\mu_y = 0$!

De nuevo:

$$\mu_y \cdot M - \mu_x N = \mu \left(N_x - M_y \right)$$

Supongo $\mu_x = 0$

$$\Rightarrow \quad \mu_y M = \mu \left(N_x - M_y \right)$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$$

$$= \frac{-1 - \left(2x^3 y + 1\right)}{x^5 + x^3 y^2 + y}$$

$$= \frac{-2x^3 y - 2}{x^5 + x^3 \cdot y^2 + y}$$

$M_y = 2x^3 y + 1$

$N_x = -1$

$M_y \neq N_x \rightarrow$ no es exacta

$$dy = \frac{x^5 + x^3 y^2 + y}{x} \, dx$$

$y = u \cdot x \qquad \underline{u = u(x)}$

$dy = du \cdot x + u \cdot dx$

$$du \cdot x + u \, dx = \frac{x^5 + x^3 (u^2 x^2) + u x}{x} \, dx$$

$$du \, x = \frac{x^5 + u^2 x^5 + \cancel{ux} - \cancel{ux}}{x} \, dx$$

$$du = \frac{x^{\cancel{5}\,3} (1 + u^2)}{\cancel{x^2}} \, dx$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} \, du = \int x^3 \, dx$$

$$\operatorname{arctg}(u) = \frac{x^4}{4} + C$$

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x^4}{4} + C\right)$$

$$x\, u = y \cdot \cancel{x} \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{y = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^4}{4} + C\right)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

(e) $2(x+y)\operatorname{sen} y\,dx + (2(x+y)\operatorname{sen} y + \cos y)\,dy = 0$

$$\underbrace{2(x+y)\operatorname{sen} y}_{M}\,dx + \underbrace{(2(x+y)\operatorname{sen} y + \cos y)}_{N}\,dy = 0$$

$$M = 2x\sin y + 2y.\sin y$$

$$M_y = 2x.\cos y + 2\sin y + 2y\cos y$$

$$N = 2x\sin y + 2y\sin y + \cos y$$

$$N_x = 2\sin y$$

Busco μ /

$$(\mu.M)_y = (\mu N)_x$$

$$\mu_y.M + \mu.M_y = \mu_x.N + \mu.N_x$$

$$\mu_y.M - \mu_x.N = \mu(N_x - M_y)$$

$$N_x - M_y = 2\sin y - (2x.\cos y + 2\sin y + 2y\cos y)$$

$$= -2x.\cos y - 2y\cos y$$

$$= -2\cos y\,(x+y)$$

Quiero dividir por $M = 2(x+y)\sin y$

$\Rightarrow$ Supongo $\mu_x = 0$

$$\Rightarrow \mu_y \cdot M - \mu_x \cdot N = \mu \left(N_x - M_y \right)$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{-2\cos y\,(x+y)}{2(x+y)\sin y}$$

$$\int \frac{\mu_y}{\mu}\,dy = \int -\frac{\cos y}{\sin y}\,dy$$

$$\ln \mu = -\ln \sin y + C \qquad e^{-\ln \sin y}$$

$$\mu = -\sin y \cdot C \qquad C = -1$$

Mal! arrastro error, abajo corrijo.

$$\mu = \sin y$$

Verifico

$$\underbrace{\mu_y \cdot M}_{} + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\cos y \cdot \left(2x \sin y + 2y \cdot \sin y\right) + \sin y \cdot \left(2x \cdot \cos y + 2\sin y + 2y\cos y\right) =$$

$$= 0 + \underbrace{\sin y \cdot \left(2 \sin y\right)}_{2\sin^2 y}$$

CA

$2x\cos y \cdot \sin y + 2y\cos y \cdot \sin y + 2x\cos y \cdot \sin y$ ⊛

⊛ $+ 2\sin^2 y + 2y \cdot \sin y \cdot \cos y$

Por qué ??

$$\mu \cdot M = \sin y \cdot (2x\sin y + 2y \cdot \sin y)$$

$$(\mu \cdot M)_y = \cos y \cdot 2x\sin y + \sin y \cdot 2x\cos y +$$

$$+ \cos y \cdot 2y \cdot \sin y + \sin y \cdot 2 \cdot \sin y + \sin y \cdot 2y \cdot \cos y$$

$$\mu \cdot N = \sin y \cdot (2x\sin y + 2y\sin y + \cos y)$$

$$(\mu \cdot N)_x = \sin y \cdot 2 \cdot \sin y + 0$$

Con $\mu = \dfrac{1}{\sin y}$ pues $e^{-\ln \sin y} = e^{\ln \sin^{-1} y}$

$$\neq \longrightarrow \sin^{-1} y$$

Acá está el error!

$$\mu \cdot M = \frac{1}{\cancel{\sin y}} \cdot (2x\cancel{\sin y} + 2y \cdot \cancel{\sin y})$$

$$\mu . M = 2x + 2y$$

$$(\mu . M)_y = 2$$

$$\mu N = \frac{1}{\sin y}\left(2x \cancel{\sin y} + 2y \cancel{\sin y} + \cos y\right)$$

(*)

$$= 2x + 2y + \frac{\cos y}{\sin y}$$

$(\mu N)_x = 2$ (*) son iguales!

es exacta!

Llamo

$$\tilde{M} = \mu . M$$
$$\tilde{N} = \mu . N$$

$$\Rightarrow \tilde{M}\, dx + \tilde{N}\, dy = 0 \quad \text{es exacta}$$

$$(2x+2y)\, dx + \left(2x + 2y + \frac{\cos y}{\sin y}\right) dy = 0$$

Como es exacta $\Rightarrow \exists\, f(x,y) = C$ solucion implícita.

tal que

$$f_x = 2x + 2y$$
$$f_y = 2x + 2y + \frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\Rightarrow \int f_x \, dx = x^2 + 2xy + g(y)$$

$$\int f_y \, dy = 2xy + y^2 + \ln(\sin y) + h(x)$$

Si $g(y) = y^2 + \ln(\sin y)$

$h(x) = x^2$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + \ln(\sin y)$$

Sol:

$$x^2 + y^2 + 2xy + \ln(\sin y) = C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

f) $3y\,dx + x\,dy = 0$

$$\underbrace{3y}_{M}\,dx + \underbrace{x}_{N}\,dy = 0$$

$M_y = 3$

$N_x = 1$

Busco $\mu /$

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu \cdot N_x - \mu M_y$$

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu \left(N_x - M_y\right)$$

$$\mu_y \cdot 3y - \mu_x \cdot x = \mu \cdot (-2)$$

Si $\mu_y = 0$

$$-\mu_x \cdot x = -2\mu$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{\mu_x}{\mu}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln \mu = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + C$$ elijo $C = 0$

$$\mu = x^2$$

Verifico

$$\mu_y \cdot 3y - \mu_x \cdot x = -\mu \cdot 2$$

$$0 \quad - 2x \cdot x = -2x^2 \quad \checkmark$$

es exacta!

Busco $f(x,y) \,/\, f_x = \tilde{M} = 3x^2 y$

$f_y = \tilde{N} = x^3$

$$\int 3x^2 y \, dx = x^3 \cdot y + g(y)$$

$$\int x^3 \, dy = x^3 \cdot y + h(x)$$

elijo $g(y) = h(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^3 \cdot y$$

$x^3 \cdot y = C \quad c \in \mathbb{R}$ es sol. implícita.

(g) $\left(1 - y(x+y)\tan(xy)\right)dx + \left(1 - x(x+y)\tan(xy)\right)dy = 0.$

Es re largo, ver resueltos.

---

fin.