ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

Segundo cuatrimestre de 2020

Clase 7/12 - Repaso EDOs. Parcial del 2° cuatrimestre del 2015.

Ejercicio 1. Halle la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\left(e^{-x} + \frac{1}{y}\right) dy + dx = 0,$$

sabiendo que admite un factor integrante de la forma $e^x g(y)$, con g una función de clase C^1 a determinar.

Ejercicio 2. Sabiendo que $\frac{1}{x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \qquad x > 0.$$

Halle:

a) La solución general de la ecuación.

b) Una solución que satisfaga $y(1) = -2$ e $y'(1) = 6$.

$y_1 = \frac{1}{x^3}$ es sol de la ecuación

busco y_2 sol /

$$y_2 = \mu(x) \cdot y_1$$

$$y_2 = \mu \cdot \frac{1}{x^3}$$

Si y_2 es sol. entonces:

$$y_2' = \mu' \cdot x^{-3} - 3\mu \cdot x^{-4}$$

$$y_2'' = \mu'' \cdot x^{-3} - 3\mu' \cdot x^{-4} - 3\mu' \cdot x^{-4} + 12\mu \cdot x^{-5}$$

$$x^2 \cdot y_2'' = \mu'' \cdot x^{-1} - 6\mu' \cdot x^{-2} + 12\mu \cdot x^{-3}$$

$$3x y_2' = 3\mu' \cdot x^{-2} - 9\mu \cdot x^{-3}$$

$$-3y_2 = -3\mu \cdot x^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 y_2'' + 3xy_2' - 3y_2 = 0$$

$$\mu''\cdot x^{-1} - 6\mu'\cdot x^{-2} + 12\,\mu\cdot x^{-3} + 3\mu'\cdot x^{-2} - 9\mu\cdot x^{-3}$$

$$-3\,\mu\cdot x^{-3} = 0$$

$$\mu''\cdot x^{-1} - 3\,\mu'\cdot x^{-2} = 0$$

$\cdot x$

$$\mu'' - 3\,\mu'\cdot x^{-1} = 0$$

$$\mu'' = 3\mu'\cdot x^{-1}$$

$$\frac{\mu''}{\mu'} = 3\cdot\frac{1}{x}$$

$$\ln \mu' = 3\ln x + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\mu' = \left(e^{\ln x}\right)^3\cdot e^c$$

$$\mu' = x^3\cdot\tilde{c} \qquad \tilde{c}\in\mathbb{R}_{>0}$$

$$\mu = \frac{\tilde{c}}{4}\cdot x^4 + d \qquad d\in\mathbb{R}$$

Pruebo con $\mu(x) = x^4$

$$\Rightarrow y_2 = x^4\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$y_2 = x$$

$$\Rightarrow \quad y_2' = 1$$
$$y_2'' = 0$$

Reemplazo en:

$$x^2 y_2'' + 3\,x y_2' - 3 y_2 = 0$$

$$3x - 3x = 0 \quad \checkmark \quad \text{se verifica}$$

Como x^{-3} y x son li y son solución

$\Rightarrow \{x^{-3}, x\}$ es base de soluciones

$\therefore$ Sol general:

$$y = C_1 \cdot \frac{1}{x^3} + C_2 \cdot x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $y(1) = -2$

$y'(1) = 6$

Reemplazo y resuelvo.

Ejercicio 3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Halle algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tenga una solución que verifique simultáneamente

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Esboce el diagrama de fases alrededor del $(0,0)$ para el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' &= x_1^2 - \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{3}{2}x_2 \\ \\ x_2' &= x_2^3 - \dfrac{3}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$