Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 2: Integrales de superficie.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

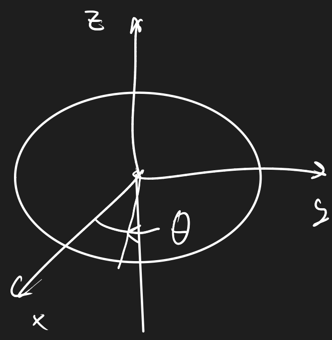
(a) $r = k \quad (k = cte)$.

(b) $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

a) Cáscara de una esfera

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi) \quad \varphi \in [0, \pi) \quad r \in \mathbb{R}_0^+$$



Con Jacobiano $= | r^2 \cdot \sin\varphi |$

Si r es libre

$$\Rightarrow T(r, \theta, \varphi) = (r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \,,\, r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \,,\, r \cdot \cos\varphi)$$

Si $r = k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{T(\theta, \varphi) = (k \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \,,\, k \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \,,\, k \cdot \cos\varphi) \qquad \theta \in [0, 2\pi) \quad \varphi \in [0, \pi)}$$

Versor normal en cada punto

$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{\| T_\theta \times T_\varphi \|} = \ ?$$

$$\underbrace{T_\theta \times T_\varphi}_{\in \mathbb{R}} = \begin{array}{ccc} (+) & (-) & (+) \\ \end{array}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -k.\sin\theta.\sin\varphi & k.\cos\theta.\sin\varphi & 0 \\ k.\cos\theta.\cos\varphi & k.\sin\theta.\cos\varphi & -k.\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-k^2.\cos\theta.\sin^2\varphi\right) +$$
$$j\left(-k^2.\sin\theta.\sin^2\varphi\right) +$$
$$k\left(\underbrace{-k^2.\sin^2\theta.\sin\varphi.\cos\varphi - k^2.\cos^2\theta.\sin\varphi.\cos\varphi}_{= -k^2.\sin\varphi.\cos\varphi}\right)$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \left(-k^2.\cos\theta.\sin^2\varphi, -k^2.\sin\theta.\sin^2\varphi, -k^2.\sin\varphi.\cos\varphi\right)$$

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = \sqrt{k^4.\cos^2\theta.\sin^4\varphi + k^4.\sin^2\theta.\sin^4\varphi + k^4.\sin^2\varphi.\cos^2\varphi}$$

$$= k^2.\sqrt{\underbrace{\underbrace{\cos^2\theta.\sin^4\varphi + \sin^2\theta.\sin^4\varphi}_{=\sin^4\varphi} + \sin^2\varphi.\cos^2\varphi}_{=\sin^2\varphi\left(\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}\right)}}$$

$$= k^2.\sqrt{\sin^2\varphi}$$

$$= k^2.|\sin\varphi|$$

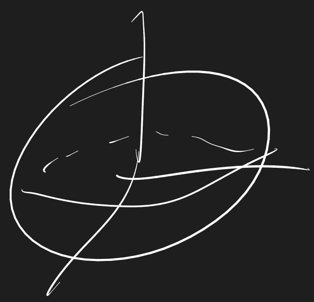
Como $\varphi \in [0, \pi)$

$$= k^2 \cdot \sin\varphi$$

Finalmente

$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{\| T_\theta \times T_\varphi \|} = \frac{\left(-k^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi \, , \, -k^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi \, , \, -k^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right)}{k^2 \cdot \sin\varphi}$$

$$\boxed{\eta = \left(-\cos\theta \cdot \sin\varphi \, , \, -\sin\theta \sin\varphi \, , \, -\cos\varphi\right)}$$



Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

(a) $r = k \quad (k = cte)$.

(b) $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

b)

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin k \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin k \\ z = r \cdot \cos k \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$k \in [0, \pi/2)$ constante

$r \in \mathbb{R}$

Con Jacobiano $= r^2 \cdot \sin k$

$$\Rightarrow T(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta \cdot \sin k, \; r \cdot \sin\theta \cdot \sin k, \; r \cdot \cos k)$$

Versor normal

$$\eta = \frac{T_r \times T_\theta}{\| T_r \times T_\theta \|}$$

$$T_r = (\cos\theta \cdot \sin k, \; \sin\theta \cdot \sin k, \; \cos k)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta \cdot \sin k, \; r \cdot \cos\theta \cdot \sin k, \; 0)$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (-) \\ T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta \cdot \sin k & \sin\theta \cdot \sin k & \cos k \\ -r \cdot \sin\theta \cdot \sin k & r \cdot \cos\theta \cdot \sin k & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \left(r \cdot \cos\theta \cdot \sin k \cdot \cos k, \; -r \cdot \sin\theta \cdot \sin k \cdot \cos k, \; \underbrace{r \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2 k + r \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2 k}_{r \cdot \sin^2 k} \right)$$

$$= \left(r \cdot \cos\theta \cdot \sin k \cdot \cos k ,\ - r \sin\theta \cdot \sin k \cdot \cos k ,\ r \cdot \sin^2 k \right)$$

$$\| T_r \times T_\theta \| = \sqrt{ \underbrace{ \underbrace{ r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k }_{r^2 \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k} + r^2 \cdot \sin^4 k }_{r^2 \cdot \sin^2 k} }$$

$$= \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 k}$$

$$= |r| \cdot \sin k \qquad \left(k \in [0, \pi/2) \Rightarrow \sin k > 0 \right)$$

$r \neq 0$

$$\frac{T_r \times T_\theta}{\| T_r \times T_\theta \|} = \frac{\left(r \cdot \cos\theta \cdot \sin k \cdot \cos k ,\ - r \sin\theta \cdot \sin k \cdot \cos k ,\ r \cdot \sin^2 k \right)}{|r| \sin k}$$

$$\boxed{ \eta = \begin{cases} \left(\cos\theta \cdot \cos k ,\ - \sin\theta \cdot \cos k ,\ \sin k \right) & k \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ si } r > 0 \\ \left(-\cos\theta \cdot \cos k ,\ + \sin\theta \cdot \cos k ,\ - \sin k \right) & \text{si } r < 0 \end{cases} }$$

Ejercicio 2.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u,v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}), \quad \text{con } a, b \text{ no nulos},$$
$$\Phi_2(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

(b) Mostrar que

$$\Phi(u,v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$

con $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro**.

Paraboloide elíptico:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right\} \qquad a,b \neq 0$$

Con un "−" es Parab. Hiperbólico.

```
Para mostrar que cada parametrización se corresponde con un paraboloide helípitico,
debo:

1a. Mostrar que todos los puntos de S están en la param
1b. Mostrar que todos los puntos de la param están en S

2. Mostrar que es C^1

3. Mostrar que es inyectiva
```

1a. $S \subset \operatorname{Im} \phi_2$?

Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/$

$$\phi_2(u,v) = (a \cdot u \cdot \cos v,\ b \cdot u \cdot \sin v,\ u^2)$$

Con

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \quad a,b \neq 0$$

Reemplazo en S con los valores de ϕ_2

$$\Rightarrow u^2 = \left(\frac{a \cdot u \cdot \cos v}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot u \cdot \sin v}{b}\right)^2$$

$$u^2 = \underbrace{u^2 \cdot \cos^2 v + u^2 \cdot \sin^2 v}_{= u^2} \quad \checkmark$$

$\therefore \; S \subset \operatorname{Im} \phi_2$

Ahora $\operatorname{Im} \phi_2 \subset S$?

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \qquad a, b \neq 0$

$S \subset \operatorname{Im}(\phi_2)$ Ahora quiero probar que si agarro un $(x_0, y_0) \in S$ debe $\exists\, (u_0, v_0) \in \operatorname{Im}(\phi)$.

$\exists \;\; z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

Tomo $P_0 = (0, 0, 0)$

$0 = 0 + 0 \checkmark \;\Rightarrow\; (u_0, v_0) = (0, v_0)$

$\phi_1(0, v_0) = (a\, 0 \cdot \cos(v_0),\, b \cdot 0\, \text{sen}(v),\, 0) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \phi_2$ es una param de S y como a y $b \neq 0$

$\phi'_1 \neq (0,0,0) \;\forall (u, v) \Rightarrow$ es param. regular

?

ϕ'_2 ? si es de 2 variables!

2. $\Phi_2 \in \mathcal{C}^1$ pues sus componentes lo son.

3. Inyectiva ?

qvq
Si $\Phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

Si $\Phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 \cdot \cos v_1 = a \cdot u_2 \cdot \cos v_2 \\ b \cdot u_1 \cdot \sin v_1 = b \cdot u_2 \cdot \sin v_2 \\ u_1^2 = u_2^2 \xrightarrow[\substack{u \geq 0 \\ \text{Por definición}}]{} u_1 = u_2 =: u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot u \cdot \cos v_1 = a \cdot u \cdot \cos v_2 \\ b \cdot u \cdot \sin v_1 = b \cdot u \cdot \sin v_2 \end{cases}$$

$$a \cdot u \cdot \cos v_1 = a \cdot u \cdot \cos v_2 \Rightarrow a u \cdot (\cos v_1 - \cos v_2) = 0$$

$$b \cdot u \cdot \sin v_1 = b \cdot u \cdot \sin v_2 \Rightarrow b u \cdot (\sin v_1 - \sin v_2) = 0$$

Si $u \neq 0$ $(y\ a, b \neq 0)$:

$$a u \cdot (\cos v_1 - \cos v_2) = 0 \Leftrightarrow \cos v_1 = \cos v_2$$

Como $v \in [0, 2\pi)$

$\Leftrightarrow \quad v_1 = v_2$

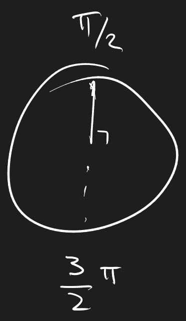
ó

$v_1 = 2\pi - v_2$

$$bu \cdot (\sin v_1 - \sin v_2) = 0 \iff \sin v_1 = \sin v_2$$

Caso $v_1 = v_2$

$$\Rightarrow \sin v_1 = \sin v_2 \quad \checkmark$$



Caso $v_1 = 2\pi - v_2$

$$\Rightarrow \sin(2\pi - v_2) \overset{?}{=} \sin v_2$$

Si $v_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - v_2 = \frac{3}{2}\pi$

$$\Rightarrow \sin \frac{3}{2}\pi \overset{?}{=} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-1 = 1$$

Abs!

$$\therefore v_1 = v_2$$

Probé que

Si $\phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

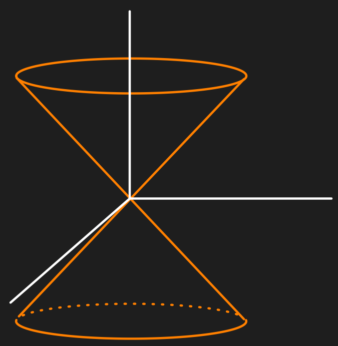
$\therefore$ es inyectiva.

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\mathrm{sen}(v), \qquad z = u.$$

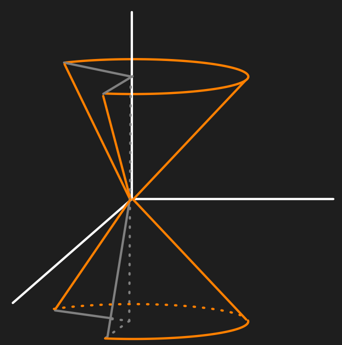
¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Si $\underbrace{v \in [0, 2\pi)}$ $\Rightarrow$ es un cono doble



- si es $>$ a 2π: también

- si es $<$ a 2π: no da la vuelta



Param:

$$T(u,v) = (u \cdot \cos v,\ u \cdot \sin v,\ u)$$

- Es dif pues ↑ ↑ ↑ son dif.

- <u>No</u> es inyectiva pues

pues

$$T(0, v_1) = T(0, v_2) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in [0, 2\pi)$$

(o en cualquier dominio)

o sea, <u>no</u> cumple que

$$\text{Si } T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2) \not\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

y tampoco es suave pues

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \cdot \sin v & u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-u \cdot \cos v, \ -u \cdot \sin v, \ u\right)$$

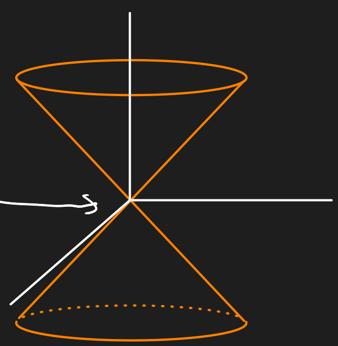
Si vemos $u = 0$:

$$T_u \times T_v (0, v) = (0, 0, 0) \quad \forall v \in [0, 2\pi)$$

$\therefore$ no es suave

Lo cual es lo que esperamos

pues ahí no puede ser suave.



Para ser suave :

- Tiene plano tangente en todos sus puntos.
- La recta tangente al plano $L(p)$ en el punto p varía con continuidad.

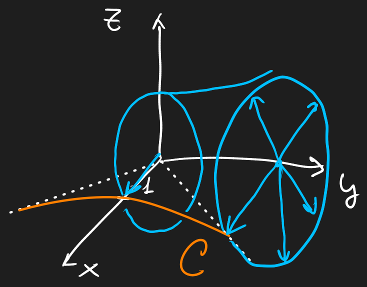
Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:

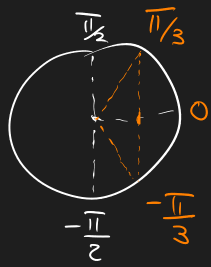
$$r = 2 - \cos\theta \quad \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?





$\pi/3 \Rightarrow r = 1{,}5$ $\qquad \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$

$0 \Rightarrow r = 1$

$-\pi/3 \Rightarrow r = 1{,}5$

- En $\mathbb{R}^3$

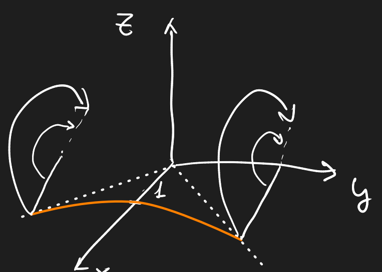
$$\begin{cases} x = \overbrace{(2-\cos\theta)}^{r} \cdot \cos\theta \\ y = (2-\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

$x \rightsquigarrow r\cdot\cos\varphi$ $\qquad \varphi \in [0, 2\pi)$

$z \rightsquigarrow r\cdot\sin\varphi$

$$\Big((2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi,\ (2-\cos\theta)\cdot\sin\theta,\ (2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \Big)$$

- quiero "girar la curva" sobre el eje y.



se corresponde con una circunferencia en el plano XZ

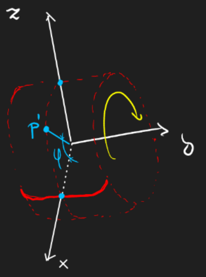
Dada por

$$\begin{cases} x = \tilde{r}\cdot\cos\varphi \\ z = \tilde{r}\cdot\sin\varphi \\ y \in [-a, a] \end{cases}$$

Vemos que

- $\tilde{r}$ debe depender del y original
  (para cada y, hay un radio dif.)
- $\varphi \in [0, 2\pi)$ pues quiero toda la vuelta.

Como mostró Vicky (con $\mathcal{C}$ en xz y revol. en z)



Quiero revolucionar alrededor de y

1°. introduzco ángulo φ

↳ con $\varphi = 0$ obtengo la curva original sobre xy:

$$\sigma(\theta) = (r.\cos\theta \,,\, r.\sin\theta)$$

con $r = 2 - \cos\theta$

2°. Quiero las coordenadas de cada p' para cada φ

$p' = (x', y', z')$

- Gira alrededor de y

$\Rightarrow y'$ no cambia con φ

y' solo depende de θ (como en la curva original)

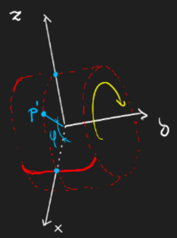
$$\Rightarrow y' = r.\sin\theta$$
$$= (2 - \cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$$= \beta(\theta)$$

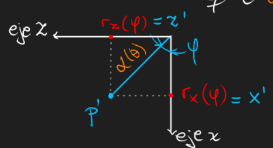
↳ llamo

- Para x y z hay que calcular cómo varían

Tip: imaginarse desde ↳ arriba, y ver qué pasa en x



- Sabemos que $\alpha(\theta)$ (la distancia al eje de revolución) nunca cambia (para un θ fijo)



$\Rightarrow$ Calculamos componentes en ejes x y z

$$\cos\varphi = \frac{x'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow x' = \alpha(\theta) \cdot \cos\varphi$$

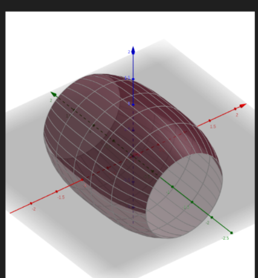
$$\alpha(\theta) = (2 - \cos\theta) \cdot \cos\theta$$

↳ componente en x de la curva original $\sigma(\theta)$

$$\sin\varphi = \frac{z'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow z' = \alpha(\theta) \cdot \sin\varphi$$

Finalmente

$$\begin{cases} x' = \alpha(\theta) \cdot \cos\varphi = (2-\cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ y' = \beta(\theta) = (2-\cos\theta) \cdot \sin\theta \\ z' = \alpha(\theta) \cdot \sin\varphi = (2-\cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \end{cases}$$



b) es suave !

$$T_\theta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -(2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi & 0 & (2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \end{vmatrix}$$

⋮ Resuelvo

seguramente sea $\neq (0,0,0)$ siempre

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

en general, esféricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \xrightarrow{\text{datos}} \begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & \theta \in [0, 2\pi) \\ y = a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & \varphi \in [0, \pi) \\ z = a \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Calculo $\eta = \dfrac{T_\theta \times T_\varphi}{\| T_\theta \times T_\varphi \|}$

$$T_\theta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & a \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & 0 \\ a \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi & a \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi & -a \cdot \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \Big(-a^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi,\ -a^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi,$$

$$\underbrace{-a^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - a^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{= -a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \Big)$$

$$\| T_\theta \times T_\varphi \| = \sqrt{\underbrace{\underbrace{a^4 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^4\varphi + a^4 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^4\varphi}_{a^4 \cdot \sin^4\varphi} + a^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}_{a^4 \cdot \sin^2\varphi}}$$

$\varphi \in [0, \pi)$

$$= a^2 \cdot \sin\varphi$$

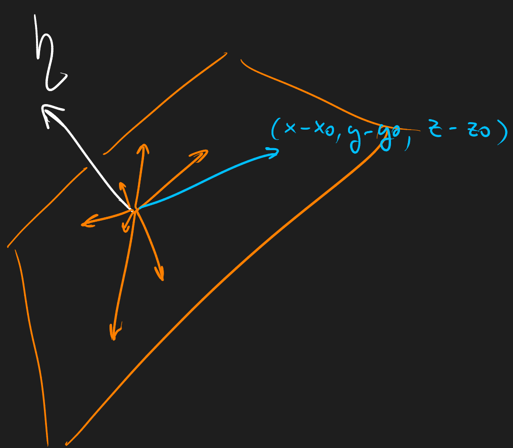
$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{\|T_\theta \times T_\varphi\|} = \left(\frac{-a^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi,\ -a^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi,\ -a^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{a^2 \cdot \sin\varphi}\right)$$

$$\eta(\theta,\varphi) = (-\cos\theta \cdot \sin\varphi,\ -\sin\theta \cdot \sin\varphi,\ -\cos\varphi)$$

Para armar el plano, quiero todos los vectores perpendiculares a esta normal, que formarán el plano tangente:

$$\Pi : \langle \eta_{(\theta,\varphi)},\ (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) \rangle = 0$$

vectores perpendiculares



Notar que la segunda componente del producto está en función de x, y, z, pero la primera, en función de theta y phi.
Expreso todo en función de theta y phi sabiendo que:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & \theta \in [0, 2\pi) \\ y = a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & \varphi \in [0, \pi) \\ z = a \cdot \cos\varphi & \end{cases}$$

$$\Pi : \langle \eta_{(\theta,\varphi)},\ (a\cos\theta \cdot \sin\varphi - x_0,\ a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi - y_0,\ a \cdot \cos\varphi - z_0) \rangle = 0$$

con $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$

Como

$$\eta(\theta,\varphi) = \left(-\cos\theta\cdot\sin\varphi\ ,\ -\sin\theta\cdot\sin\varphi\ ,\ -\cos\varphi\right)$$

Π :

$$-\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot(a\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi - x_0) - \sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot(a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi - y_0) - \cos\varphi\cdot(a\cdot\cos\varphi - z_0) = 0$$

$$-a\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^2\varphi + x_0\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi - a\cdot\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi + y_0\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi - a\cdot\cos^2\varphi + z_0\cdot\cos\varphi = 0$$

$$= -a\cdot\sin^2\varphi$$

$$= -a$$

$$-a + x_0\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi + y_0\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + z_0\cdot\cos\varphi = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Pi: \quad x_0\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi + y_0\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + z_0\cdot\cos\varphi = a \\ \qquad\qquad (x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{E}_a\subseteq\mathbb{R}^3 \\ \qquad\qquad \theta\in[0,2\pi) \\ \qquad\qquad \varphi\in[0,\pi) \end{array}}$$

con $\mathcal{E}_a$ la esfera de radio a.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

$$T(u,v) = (2u,\ u^2+v,\ v^2)$$

$$T_u(u,v) = (2,\ 2u,\ 0)$$

$$T_v(u,v) = (0,\ 1,\ 2v)$$

$$T_u \times T_v(u,v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (-) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (4uv,\ -4v,\ 2)$$

$$\| T_u \times T_v(u,v) \| = \sqrt{16u^2v^2 + 16v^2 + 4}$$

no me hace falta normalizarlo

$$\Pi : \langle T_u \times T_v,\ (x,\ y-1,\ z-1) \rangle = 0$$

No me hace falta normalizar Tu x Tv pues solo necesito cualquier vector que sea perpendicular a la superficie en el punto, lo que me permite definir un plano "encontrando" todos los vectores que sean perpendiculares a Tu x Tv en el punto (0, 1, 1).

$$\langle (4uv,\ 4v,\ 2),\ (x,\ y-1,\ z-1) \rangle = 0$$

Necesito escribir todo en función de x, y, z

Como

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = u^2 + v \\ z = v^2 \end{cases}$$

y $p_0 = (0, 1, 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2u \Rightarrow u = 0 \\ 1 = u^2 + v \Rightarrow v = 1 \\ 1 = v^2 \quad \checkmark \end{cases}$$

Finalmente

$$\Pi : \langle (0, -4, 2), (x, y-1, z-1) \rangle = 0$$

$$-4y + 4 + 2z - 2 = 0$$

$$\boxed{\Pi : \quad 4y - 2z = 2}$$

Ejercicio 7. Sea $\phi(r,\theta) : [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

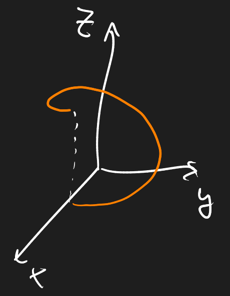
$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

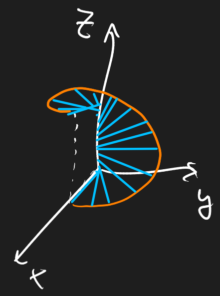
x=r.cos(t) con y=r.sin(t) definen una circunferencia en el plano XY.

Agregando z=theta, obtengo una espiral de altura 2pi.

Con $r=1$



Con $r \in [0,1]$



$$\phi_r \times \phi_\theta(r,\theta) = \begin{array}{ccc} & (-) & \\ \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$= (\sin\theta, -\cos\theta, r.\cos^2\theta + r.\sin^2\theta)$$

$$= (\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

$$\|\phi_r \times \phi_\theta(r,\theta)\| = \sqrt{\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1} + r^2}$$

$$= \sqrt{1+r^2}$$

Vector normal en cada punto

$$\eta(r,\theta) = \frac{(\sin\theta, -\cos\theta, r)}{\sqrt{1+r^2}}$$

Área :

$$\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \|\phi_r \times \phi_\theta(r,\theta)\| \, d\theta dr =$$

$$= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1+r^2} \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \, dr$$

Otra vez estas identidades horribles! ¬¬

$$r = \sinh t$$

$$dr = \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\sinh^{-1} 1} \sqrt{\underbrace{1+\sinh^2 t}_{=\cosh^2 t}} \cdot \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sinh^{-1} 1} \sqrt{\cosh^2 t} \cdot \cosh t \, dt$$

$$\overset{\cosh t > 0}{=} 2\pi \cdot \int_0^{\sinh^{-1} 1} \cosh t \cdot \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sinh^{-1} 1} \cosh^2 t \cdot dt$$

wolfram porque me cansé

$$= \cancel{2}\pi \cdot \left[\frac{1}{\cancel{2}} \cdot (t + \sinh t \cdot \cosh t) \right|_0^{\sinh^{-1} 1}$$

$$= \pi \cdot \Big[t + \sinh t \cdot \cosh t \Big]_0^{\sinh^{-1} 1}$$

$$= \pi \left(\sinh^{-1} 1 + 1 \cdot \cosh(\sinh^{-1} 1) - 0 \right)$$

$$= \pi \left(\sinh^{-1} 1 + \cosh(\sinh^{-1} 1) \right)$$

que según wolfram es

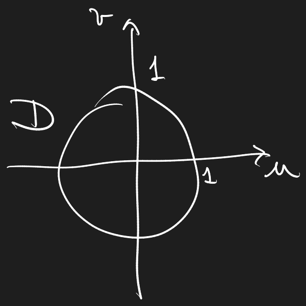
$$\underbrace{= \pi \cdot \left(\sinh^{-1} 1 + \sqrt{2} \right)}_{\text{Area de}} \;//$$

Area de 

Ejercicio 8. Sea $\phi(u,v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.



$$\phi_u = (1, 1, v)$$

$$\phi_v = (-1, 1, u)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & (-) & \quad \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \left(u - v, -(u+v), 2 \right)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{(u-v)^2 + (v+u)^2 + 4}$$

$$= \sqrt{u^2 - 2uv + v^2 + v^2 + 2uv + u^2 + 4}$$

$$= \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}$$

Necesito hacer un cambio de variables para pasar del "disco unitario" D a algo de la forma r,theta

Quiero que

$$(u, v) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

$$r \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos\theta \\ v = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4} =$$

$$= \sqrt{2r^2\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta + 4}$$

$$= \sqrt{2r^2 + 4}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2 + 2}$$

$$A(S) = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, du\, dv$$

Pero no sé integrar ésto!

no olvidar el Jacobiano !!

Cambio de variables

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{2r^2 + 4} \cdot r \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2r^2 + 4} \cdot r \, dr$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 2} \cdot r \cdot dr$$

$$s = r^2 + 2$$

$$ds = 2r \cdot dr \Rightarrow \frac{1}{2} ds = r \cdot dr$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \int_2^3 \sqrt{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot ds$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \int_2^3 s^{1/2}\, ds$$

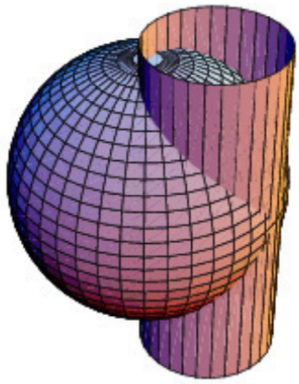
CA:

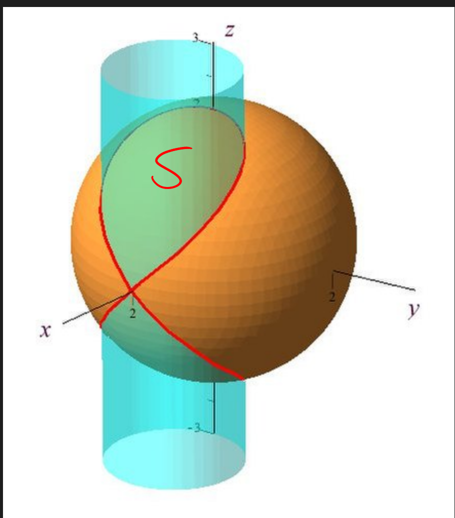
$$\frac{\partial}{\partial s} s^{3/2} = \frac{3}{2} \cdot s^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[s^{3/2} \right]_2^3$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{27} - \sqrt{8} \right)}$$

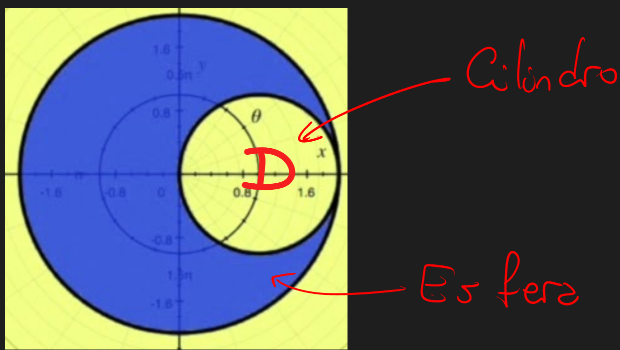
Ejercicio 9. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani.*





Recomendación de un profe:
No usar cilíndricas ni esféricas porque no sabemos cómo se mueven r, theta y phi.

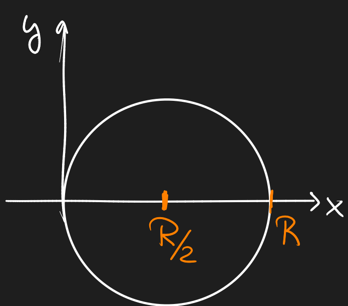
Si miro el plano XY desde arriba, voy a ver una circunferencia dentro de la esfera:



En XY:

Llamo **D** al disco centrado en $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$



Despejo z de

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Voy a usar solo la parte positiva de |z|, ya que es simétrica y luego solo tengo que multiplicar por 2 el resultado (para obtener el área total)

Defino T como

$$T : D \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y) = \underbrace{\left(\underset{\text{los } x,y \text{ del disco } D}{x,\ y}, \underset{\text{los } z \text{ de la esfera}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)}$$

Juntando ambos, estoy parametrizando la parte superior de la bóveda de Viviani.

Solo basta calcular

$$\iint_D \| T_x \times T_y \| \, dx\,dy$$

Pero si calculo

$$\| T_x \times T_y \| = \ldots = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}}$$

No sé integrar sobre D!

$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}} \, dx\,dy = \,?$$

Propongo cambio de variables a polares

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$r \in \left[0, \frac{R}{2}\right]$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Reemplazo en el disco D

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\left(r \cdot \cos\theta - \frac{R}{2}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\theta \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$r^2 \cdot \cos^2\theta - R \cdot r \cdot \cos\theta + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\theta \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

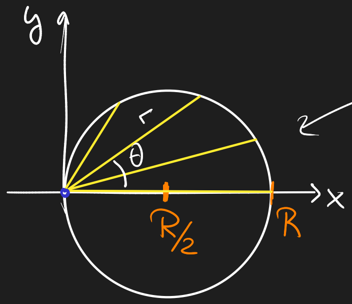
$$r^2 - R \cdot r \cdot \cos\theta \leq 0$$

$$r^2 \leq R \cdot r \cdot \cos\theta$$

$$r \underset{r>0}{\leq} R \cdot \cos\theta$$

Con esto puedo redefinir el disco D como D* usando estas nuevas coordenadas:

$$D^* = \left\{ (r,\theta) : 0 \leq r \leq R \cos\theta \ \wedge \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



solo parte positiva, después multiplico por 4

Y puedo decir que existe una transformación Tau que manda D* a D

$$T(D^*) = D$$ ← solo la mitad de arriba!

Jacobiano!

Volviendo a la integral:

$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy = \iint_{D^*} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= R\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R.\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\,d\theta$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{r^2} = \frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{R^2-r^2} = \frac{-\cancel{2}r}{\cancel{2}\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$= R.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{R.\cos\theta} d\theta$$

$$= -R.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\underbrace{\sqrt{R^2-R^2.\cos^2\theta}}_{R^2.(\underbrace{1-\cos^2\theta}_{\sin^2\theta})} - \sqrt{R^2}\right)\Big)\,d\theta$$

$$= -R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R\cdot\underbrace{\sqrt{\sin^2\theta}}_{\sin\theta\,\geq\,0 \text{ pues } 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}-R\right)d\theta$$

$$= -R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R\cdot\sin\theta-R\right)d\theta$$

$$= -R^2\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\pi/2}1\,d\theta\right)$$

$$= -R^2\underbrace{\left[-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.}_{(0-(-1))}+R^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

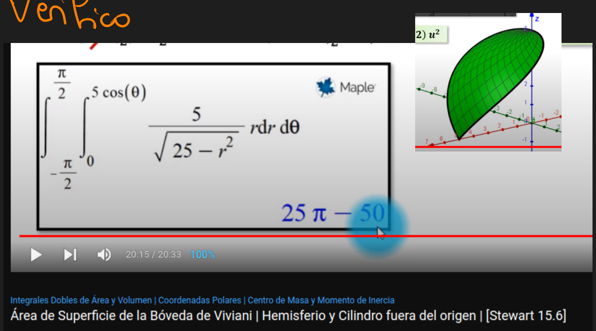
$$= -R^2+R^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$ Área de $\frac{1}{4}$ la bóveda !

Área de la boveda $= 4R^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

$$\boxed{R^2\cdot\left(2\pi-4\right)}$$

Verifico



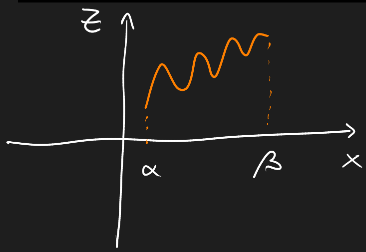
Si $R=5 \Rightarrow 25\cdot(2\pi-4)$

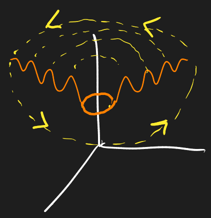
$$\underbrace{50\pi-100}_{2 \text{ veces ésto} ✓}$$

Ejercicio 10. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.





Curva en XZ :

$$\sigma(x) = (x, f(x)) \qquad x \in [\alpha, \beta]$$

Curva en XYZ

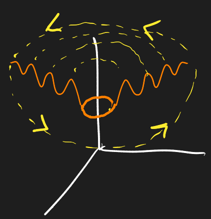
$$\tilde{\sigma}(x) = (x, 0, f(x))$$

Sup. de Revolución

agrega variable: ángulo de giro

agrego x

$$T(x, \theta) = (x \cdot \cos\theta,\ x \sin\theta,\ f(x)) \qquad x \in [\alpha, \beta] \quad \theta \in [0, 2\pi)$$



Si miro la superficie desde arriba (plano XY) veo una circunferencia en el centro, y una circunferencia por afuera.
El valor de Z no cambia a pesar de que la curva gire.

Notar que con theta = 0, obtengo la curva original sobre el plano XZ positivo.

Quiero calcular:

$$A(S) = \iint_D \| T_x \times T_\theta \|\, ds$$

$$T_x = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ f'(x))$$

$$T_\theta = (-x\cdot\sin\theta,\ x\cos\theta,\ 0)$$

$$T_x \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \cos\theta & \sin\theta & f'(x) \\ -x\cdot\sin\theta & x\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-xf'(x)\cdot\cos\theta,\ -x\cdot f'(x)\cdot\sin\theta,\ \underbrace{x\cos^2\theta + x\cdot\sin^2\theta}_{=x}\right)$$

$$\|T_x\times T_\theta\| = \sqrt{\underbrace{x^2 f'^2(x)\cdot\cos^2\theta + x^2\cdot f'^2(x)\cdot\sin^2\theta}_{=x^2\cdot f'^2(x)} + x^2}$$

$$= \sqrt{x^2\cdot(f'^2(x)+1)}$$

$$\overset{x>0}{=} x\cdot\sqrt{f'^2(x)+1}$$

$$A(S) = \int_{x=\alpha}^{\beta}\int_{\theta=0}^{2\pi} x\cdot\sqrt{f'^2(x)+1}\cdot d\theta\, dx$$

$$\boxed{A(S) = 2\pi\cdot\int_\alpha^\beta x\cdot\sqrt{f'^2(x)+1}\, dx}$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 2.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u,v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}), \text{ con } a, b \text{ no nulos,}$$
$$\Phi_2(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

TODO: Hacer!
No es tan complicado:
Primero notar que un paraboloide eliptico es una función cuadrática en el plano XZ de la forma:

z = c * x^2

girada sobre el eje Z.

Como a = b = 1, entonces c=1, entonces z=x^2

Entonces z=f(x)=x^2 con z entre 1 y 2.

$$1 \leq x^2 \leq 2$$
$$1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$A(S) = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{(2x)^2 + 1}\, dx$$

$$u = 4x^2 + 1$$
$$du = 8x\, dx$$
$$\frac{1}{8} du = x\, dx$$

$$= 2\pi \int_5^9 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8}\, du \qquad \left(\frac{2}{3} u^{3/2}\right)' = u^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \pi \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \left[u^{3/2}\right]_5^9$$

$$= \frac{1}{6}\pi \cdot \left(9^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\pi \cdot \left(27 - 5\sqrt{5}\right) \quad //$$

Input

$\frac{1}{6}\pi\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$

Decimal approximation

8.28315466528679757

Paraboloid Surface Area and Volume Calculator

Paraboloid Calculator

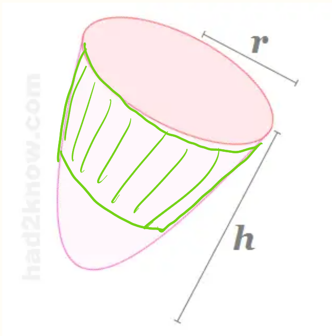
Height = 2

Radius = 1.41421

Get Paraboloid Volume & S.A. | Clear

```
Volume: 6.28319
Surface Area: 13.61357
S.A. w/ Base: 19.89675
```

A paraboloid is a solid of revolution that results from rotating a parabola around its axis of symmetry. If you know the height and radius of a paraboloid, you can compute its volume and surface area with simple geometry formulas. You can also use the calculator on the left.



Paraboloid Calculator

Height = 1

Radius = 1

Get Paraboloid Volume & S.A. | Clear

```
Volume: 1.5708
Surface Area: 5.33041
S.A. w/ Base: 8.47201
```

13,61357−5,33041 = **8,28316**

VS

Input

$\frac{1}{6}\pi\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$

Decimal approximation

8.28315466528679757

verificado

Surface Area Formula

The surface area of a paraboloid, not including its base, is given by the formula

$SA = (\pi/6)(r/h^2)[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3]$

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

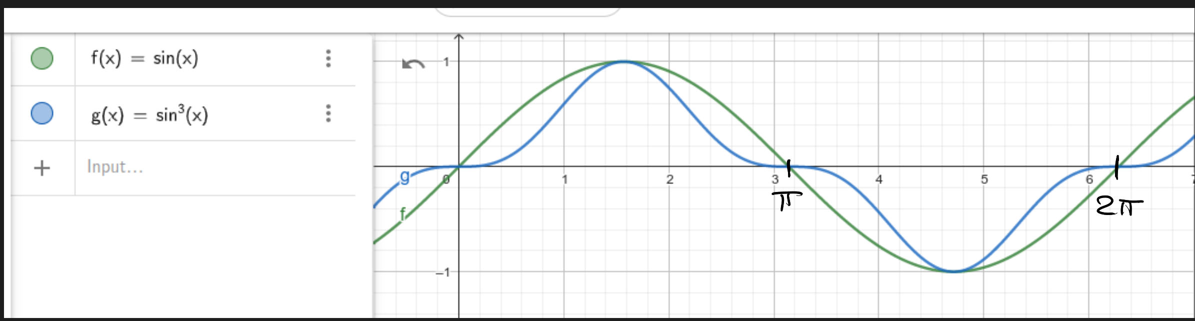
con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

(a) Hallar una parametrización de S.

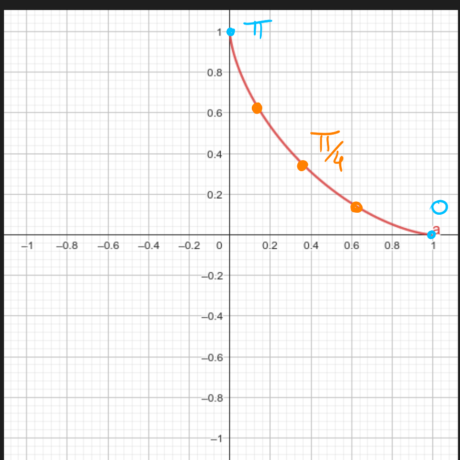
(b) Hallar el área de S.

Idea sin usar geogebra para pensar la curva:

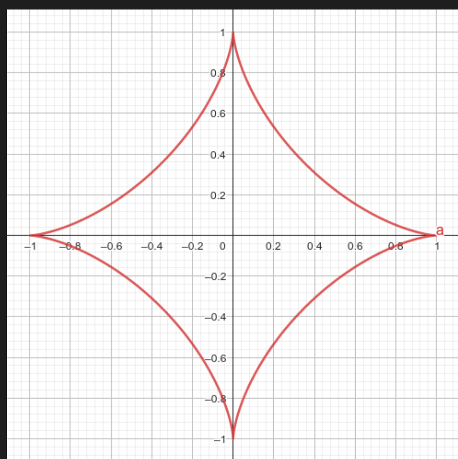
- Al elevar al cubo el cos/sin, obtengo valores entre los mismos extremos, pero que "se aplastan" cerca del cero, el -1 o el +1:

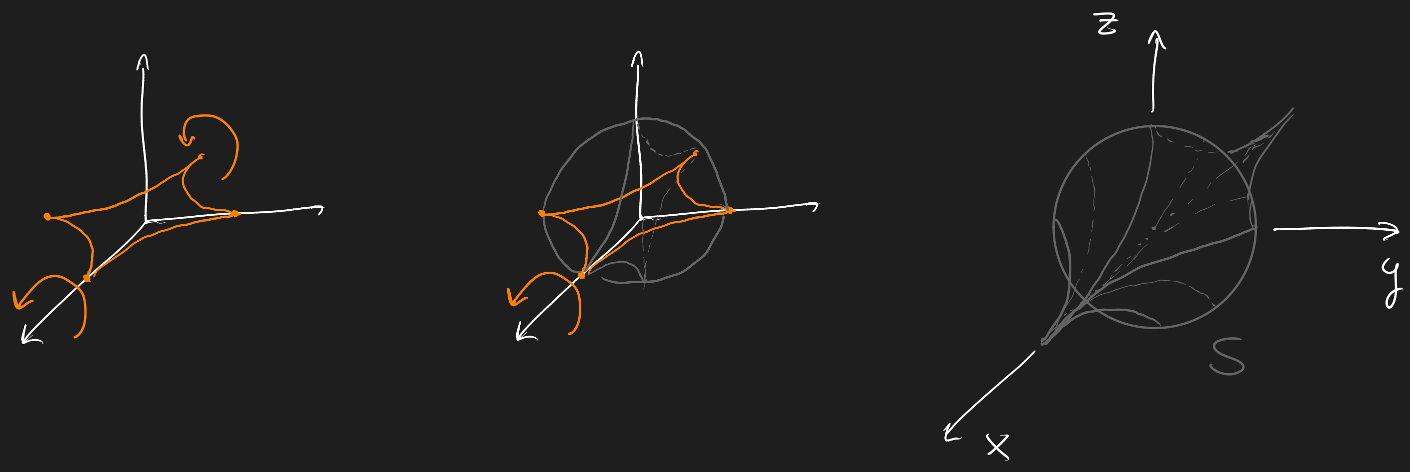


No se si sirve para imaginar la curva, pero sirve para saber que la curva será simétrica en los 4 cuadrantes, y para aproximar su forma basta con dibujar los puntos con theta = {0, pi/2}, y 2 o 3 puntos intermedios.



Por simetría ⇒





Curva inicial

$$\sigma(\theta) = (\cos^3\theta\,,\ \sin^3\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

La circunferencia que aparece al rotar la curva, aparece en el plano YZ

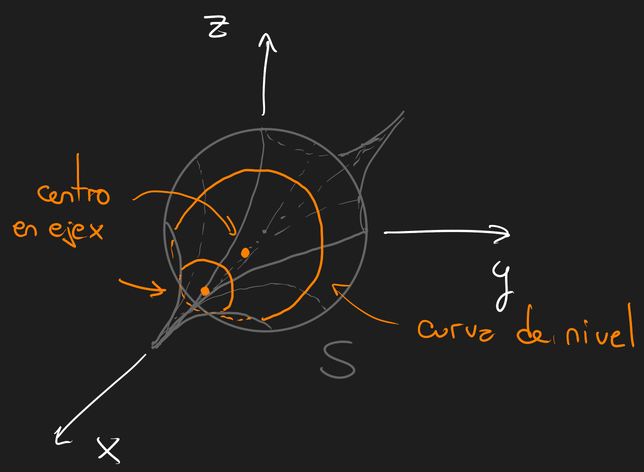
Param de S: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(\theta, \varphi) = (\cos^3\theta\,,\ \sin^3\theta \cdot \cos\varphi\,,\ \sin^3\theta \cdot \sin\varphi)$$

Para un valor de theta fijo
este valor no cambia con phi
(es el valor del eje X donde se posiciona
la circunferencia que es curva de nivel de S)

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi)$



Notar que con $\varphi = 0$

$$\Rightarrow T(\theta, 0) = (\cos^3\theta\,,\ \sin^3\theta\,,\ 0)$$

Curva original ✓

b) Area de S

Basta calcular

$$\| T_\theta \times T_\varphi \|$$

Para luego

$$A(S) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \| T_\theta \times T_\varphi \| \, d\varphi \, d\theta$$

Solo uso octante positivo y multiplico por 8

cross product((-3cos^2 theta * sin theta, 3sin^2 theta * cos theta*c

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEY

Assuming "phi" is a variable | Use as a mathematical constant instead

Input interpretation

$$(-3\cos^2(\theta)\sin(\theta),\ 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi),\ 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(\phi)) \times (0,\ -\sin^3(\theta)\sin(\phi),\ \sin^3(\theta)\cos(\phi))$$

Result

$$(3\cos(\theta)\cos^2(\phi)\sin^5(\theta) + 3\cos(\theta)\sin^5(\theta)\sin^2(\phi),\ 3\cos^2(\theta)\cos(\phi)\sin^4(\theta),\ 3\cos^2(\theta)\sin^4(\theta)\sin(\phi))$$

3D plots

norm(cross product((-3cos^2 x * sin x, 3sin^2 x * cos x*cos y, 3sin^2 x

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOA

Input interpretation

length	vector $3\cos(x)\cos^2(y)\sin^5(x) + 3\cos(x)\sin^5(x)\sin^2(y)$
	vector $3\cos^2(x)\cos(y)\sin^4(x)$
	vector $3\cos^2(x)\sin^4(x)\sin(y)$

Result

$$\sqrt{9|\cos^2(x)\cos(y)\sin^4(x)|^2 + 9|\cos^2(x)\sin^4(x)\sin(y)|^2 + |3\cos(x)\cos^2(y)\sin^5(x) + 3\cos(x)\sin^2(y)\sin^5(x)|^2}$$

Puedo ignorar valores absolutos, copio y pego sin Abs[] para obtener expresión reducida:

Sqrt[9 (Cos[x]^2 Cos[y] Sin[x]^4)^2 + 9 (Cos[x]^2 Sin[x]^4 Sin[y])^2 + (3 Cos[x] Cos[y]^2 Sin[x]^5 + 3 Co

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input

$$\sqrt{9(\cos^2(x)\cos(y)\sin^4(x))^2 + 9(\cos^2(x)\sin^4(x)\sin(y))^2 + (3\cos(x)\cos^2(y)\sin^5(x) + 3\cos(x)\sin^5(x)\sin^2(y))^2}$$

Result

$$\sqrt{9\sin^8(x)\cos^4(x)\sin^2(y) + (3\sin^5(x)\cos(x)\cos^2(y) + 3\sin^5(x)\cos(x)\sin^2(y))^2 + 9\sin^8(x)\cos^4(x)\cos^2(y)}$$

Alternate form assuming x and y are real

$$3\sin^4(x)\,|\cos(x)|$$

$|z|$ is the absolute value of z

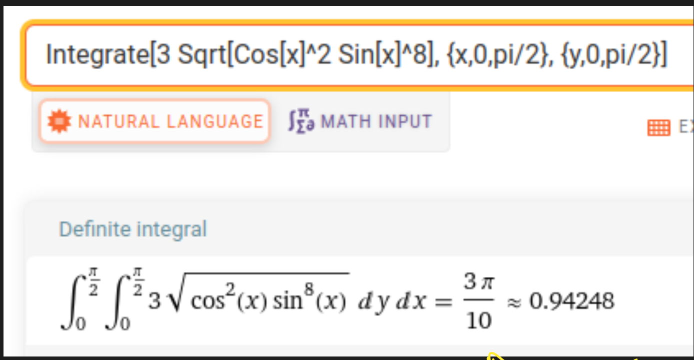
Alternate forms | More

$$3\sqrt{\sin^8(x)\cos^2(x)}$$

Integro eso con:

```
Integrate[3 Sqrt[Cos[x]^2 Sin[x]^8], {x,0,pi/2}, {y,0,pi/2}]
```

solo octante positivo!

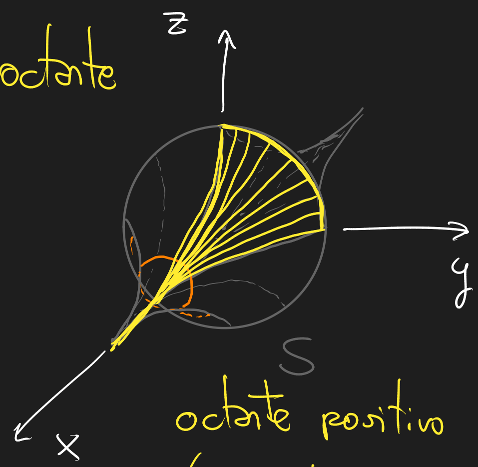

Integrate[3 Sqrt[Cos[x]^2 Sin[x]^8], {x,0,pi/2}, {y,0,pi/2}]

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Definite integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\cos^2(x)\sin^8(x)}\,dy\,dx = \frac{3\pi}{10} \approx 0.94248$$

Área de 1 octante



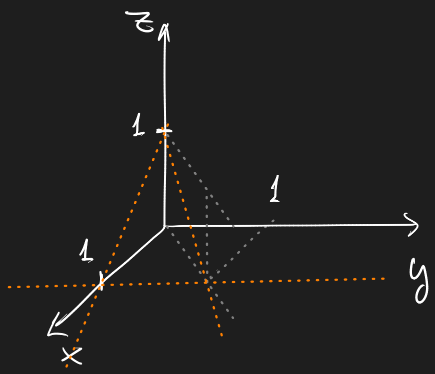
octante positivo

$$\left(\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \right)$$

$$A(S) = \cancel{8}^{\,4} \cdot \frac{3}{\cancel{10}_{\,5}}\pi$$

$$\boxed{\text{Area}(S) = \frac{12}{5}\pi}$$

Ejercicio 12. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.



$x + z = 1$
$z = 1 - x$

- Integro las 4 caras por separado

$T_1(x) = (x, 0, 1-x)$ $\quad x \in [0,1]$

$T_2(y) = (y, y, 1-y)$

$T_3(x,y) = (x, y$

? Rehacer

o

Param. de cada plano y luego cambio límites de integración? o param cada cara ?

Ejercicio 13. Calcular $\int_S (x+y+z)dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir
$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Cálculo usando

radio = 1

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot \sin\varphi & r=1 \\ y = \sin\theta \cdot \sin\varphi & r=1 \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

$$T(\theta,\varphi) = (\cos\theta \cdot \sin\varphi \,,\ \sin\theta \cdot \sin\varphi \,,\ \cos\varphi)$$

$$\int_S \underbrace{(x+y+z)}_{=: f(x,y,z)} dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} f(T(\theta,\varphi)) \cdot \underbrace{\|T_\theta \times T_\varphi\|}_{= \sin\varphi} \, d\varphi \, d\theta$$

$r=1$

y resuelvo ...

Ejercicio 14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

$$\rho(x,y,z) = \| (x,y,z) - (0,0,r) \|$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \rho(T(\theta,\varphi)) \cdot \underbrace{\| T_\theta \times T_\varphi \|}_{\underbrace{r^2 \cdot \sin\varphi}_{\text{Jacobiano de esféricas.}}} \, d\varphi \, d\theta$$

Resuelvo