Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3 - Segundo cuatrimestre 2022
Segundo Parcial - 30/11/2022

1. Resolver

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0,$$

Sugerencia: considere un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = f(x + y^2)$

Veo si es Exacta

$$\left.\begin{aligned} M &= 3x + 2y + y^2 \Rightarrow M_y = 2 + 2y \\ N &= x + 4xy + 5y^2 \Rightarrow N_x = 1 + 4y \end{aligned}\right\} \text{No es exacta}$$

Sea $\mu = x + y^2$

$$\mu M = 3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4 =: \tilde{M}$$

$$\mu N = x^2 + 4x^2y + 5xy^2 + xy^2 + 4xy^3 + 5y^4 =: \tilde{N}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{M}_y &= 2x + \overbrace{2xy + 6xy}^{=8xy} + 6y^2 + 4y^3 \\ \tilde{N}_x &= 2x + 8xy + \underbrace{5y^2 + y^2}_{6y^2} + 4y^3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\tilde{M}_y = \tilde{N}_x \\ &\therefore \text{es Exacta!} \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{M}dx + \tilde{N}dy = 0 \quad \text{es Exacta}$$

$$\Rightarrow \exists \ F(x,y) \,/\, \nabla F = (\tilde{M}, \tilde{N})$$

con $F = c$ $c \in \mathbb{R}$ sol de la ecuación

Si $F_x = \tilde{M} = 3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4$

$= 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4$

$\Rightarrow F = x^3 + x^2 y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \varphi(y)$

Si $F_y = \tilde{N} = x^2 + 4x^2y + 5xy^2 + xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$

$= x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$

$\Rightarrow F = x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + \tilde{\varphi}(x)$

$$\begin{cases} F = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \varphi(y) \\ F = x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

$\therefore$

$F(x,y) = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Sol}}: \\ x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C \quad C \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Verifico:

Como $y = y(x)$

Derivo de ambos lados

$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$

$$3x^2 + 2xy + x^2y' + 4xy^2 + 4x^2 \cdot y \cdot y' + 2y^3 + 6xy^2 \cdot y' + y^4 + 4xy^3 \cdot y' + 5y^4 \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 4xy^2 + 4x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2y^3 + 6xy^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^4 + 4xy^3 \cdot \frac{dy}{dx} + 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Multiplico ambos lados por dx

$$3x^2 dx + 2xy\,dx + x^2 dy + 4xy^2 dx + 4x^2 \cdot y\, dy + 2y^3 dx + 6xy^2 dy + y^4 dx + 4xy^3 dy + 5y^4 \cdot dy = 0$$

Reordeno:

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)\,dx + (x^2 + 4x^2 \cdot y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)\,dy = 0$$

Tenía:

$$\mu M = 3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4 =: \tilde{M} \quad \checkmark$$

$$\mu N = x^2 + 4x^2 y + 5xy^2 + xy^2 + 4xy^3 + 5y^4 =: \tilde{N} \quad \checkmark$$

Obtuve de nuevo

$$\tilde{M}\,dx + \tilde{N}\,dy = 0 \quad \checkmark$$ Verificado

2. Resolver

$$\begin{cases} 2y'' + y' - y = x + e^{-2x} \\ y(0) = \frac{1}{5};\ y'(0) = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(t + e^{-2t})$$

Llamo $t := x$ pues abajo me equivoco y sigo con t.

Resuelvo homogéneo

$$y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y'$$

$$\begin{cases} y_0 = y \\ y_1 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases}$$

$$Y' = A\,Y$$

$$\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Busco autovalores

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -1$$

Autovectores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2})$ $\quad (A - \lambda_1 I) \cdot v = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 - \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{2} v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2} v_1$$

Si $v_1 = 2$

$\Rightarrow v_2 = 1$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1)$ $\quad \begin{bmatrix} 0 + 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$

$$w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = -w_1$$

Si $w_1 = 1$

$\Rightarrow w_2 = -1$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sol Homogéneo del nuevo sistema

uso t en lugar de x

$$y = c_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como $y_0 = y$

$$\Rightarrow y = C_1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t}$$

Sol del Homogéneo:

$$\boxed{y_H = C_1 \, e^{\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Otra forma (mucho más corta. Usar ésta)

Como

$$y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -1$$

Sol. Homo:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Busco sol. Part. pues $y = y_H + y_P$

Método de Var. de ctes.

$$y_P = C_1(t)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}t}}_{=: y_1} + C_2(t)\cdot \underbrace{e^{-t}}_{=: y_2}$$

Llamo

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} | & | \\ Y_1 & Y_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Partiendo de que

$$Y' = A\,Y + \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}}{\overset{\shortparallel}{B}}$$

$$\Rightarrow \quad Q \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(t + e^{-2t}\right) \end{bmatrix}$$

Busco Q^{-1}:

$$\det Q = -e^{\frac{1}{2}t - t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t + \frac{1}{2}t}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$Q = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\det Q} = -\frac{2}{3} \cdot e^{\frac{1}{2}t}$$

$$Q^{-1} = -\frac{2}{3} \cdot e^{\frac{1}{2}t} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -e^{(\frac{1}{2}-1)t} & -e^{(-1+\frac{1}{2})t} \\ -\frac{1}{2} \cdot e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})t} & e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} +e^{-\frac{1}{2}t} & +e^{-\frac{1}{2}t} \\ +\frac{1}{2}e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}\cdot B = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2}e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\left(t+e^{-2t}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(t+e^{-2t}\right) \\ -\frac{1}{2}e^{t}\left(t+e^{-2t}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{3}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{5}{2}t} \\ C_2' = -\frac{1}{3}\cdot t\cdot e^{t} - \frac{1}{3}\cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$C_1 = \int C_1'\,dt = \int \frac{1}{3}\cdot \underbrace{t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}}_{} + \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{5}{2}t}\,dt$$

CA:

Como $\frac{d}{dt}\, t\cdot e^{-\frac{1}{2}t} = e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}t} + t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\, -2\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t} - 4\,e^{-\frac{1}{2}t} = -2\cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2}{2}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\frac{d}{dt}\, -2\,e^{-\frac{1}{2}t}\cdot(t+2) = t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\int \frac{1}{3}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = -\frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot(t+2) + c$$

$$\int \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{5}{2}t}\, dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot e^{-\frac{5}{2}t} + C$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot(t+2) - \frac{2}{15}\cdot e^{-\frac{5}{2}t}$$

$$C_2 = \int -\frac{1}{3}\left(t\,e^{t} + e^{-t}\right) dt = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{t}\,(t-1)\right) + \text{constant}$$

Reemplazando en :

$$y_p = C_1(t)\cdot e^{\frac{1}{2}t} + C_2(t)\cdot e^{-t}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot(t+2) - \frac{2}{15}\cdot e^{-\frac{5}{2}t}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{3}\cdot\left(e^{-t} - e^{t}\,(t-1)\right)\cdot e^{-t}$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 1\cdot(t+2) \underbrace{- \frac{2}{15}\cdot e^{-2t} + \frac{1}{3}\cdot e^{-2t}}_{-\frac{2}{15}+\frac{5}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}} - \frac{1}{3}\cdot 1\,(t-1)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot e^{-2t} \underbrace{- \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t}_{-t} \underbrace{- \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}_{-1}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot e^{-2t} - t - 1$$

Como $y = y_H + y_P$

Sol. general:

$$\Rightarrow y = C_1\, e^{\frac{1}{2}t} + C_2\cdot e^{-t} + \frac{1}{5}\cdot e^{-2t} - t - 1$$

Para verificar, calculo y'', y', y de la Homo. y de Part, y verifico por separado.

O uso wolfram:

y"+y'/2-y/2=1/2(t+E^(-2t))

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Input

$$y''(t)+\frac{y'(t)}{2}-\frac{y(t)}{2}=\frac{1}{2}\left(t+e^{-2t}\right)$$

Differential equation solution

$$y(t)=c_1\, e^{t/2}+c_2\, e^{-t}-t+\frac{e^{-2t}}{5}-1$$

✓ verificado.

Falta usar valores iniciales:

2. Resolver

$$\begin{cases}2y''+y'-y=x+e^{-2x}\\ y(0)=\frac{1}{5};\ y'(0)=\frac{-2}{5}\end{cases}$$

$$y = C_1\, e^{\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{5}\cdot e^{-2t} - t - 1$$

$$y(0)=\frac{1}{5} = C_1 + C_2 + \frac{1}{5} - 1$$

$$\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \qquad \text{I}$$

$$y' = C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - C_2 \cdot e^{-t} - \frac{2}{5}\cdot e^{-2t} - 1$$

$$y'(0) = -\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\cdot C_1 - C_2 - \frac{2}{5} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} C_1 - C_2 = 1$$

$$C_1 - 2C_2 = 2$$

$$C_1 = 2C_2 + 2$$

Como I $\quad C_1 + C_2 = 1$

$$2C_2 + 2 + C_2 = 1$$

$$3C_2 = -1$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{3}}$$

$$C_1 = -\frac{2}{3} + 2$$

$$\boxed{C_1 = \frac{4}{3}}$$

Solución:

$$y = \frac{4}{3} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{5} \cdot e^{-2t} - t - 1$$

Verifico:

y"+y'/2-y/2=1/2(t+E^(-2t)) for y(0)=1/5, y'(0)=-2/5

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTEN

Input

$$\left\{y''(t) + \frac{y'(t)}{2} - \frac{y(t)}{2} = \frac{1}{2}\left(t + e^{-2t}\right),\ y(0) = \frac{1}{5},\ y'(0) = -\frac{2}{5}\right\}$$

Differential equation solution

$$y(t) = -t + \frac{e^{-2t}}{5} - \frac{e^{-t}}{3} + \frac{4\,e^{t/2}}{3} - 1$$

Verifico: con $C_1 = C_2 = 1$

$$y' = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} - e^{-t} + \frac{1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cdot t + \frac{1}{6} \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cdot 1 - \underbrace{\frac{1}{6} \frac{3}{2}}_{=\frac{1}{4}} e^{\frac{3}{2}t}$$

$$- \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{3}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{3}$$

$$y'' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} + e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t} - \underbrace{\frac{1}{\cancel{12}_4} \cdot \frac{\cancel{3}}{2}}_{\frac{1}{8}} \cdot e^{\frac{3}{2}t}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$y'' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{8} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$$

Quiero ver que:

$$y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}\left(t + e^{-2t}\right)$$

Error de Cuentas!

$$y'' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{3}{8} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t}$$

$$\frac{1}{2} y' = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{8} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t} - \frac{1}{24} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{2} y = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{12} e^{\frac{3}{2}t} \cdot (t-1) + \frac{1}{12} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{6} t - \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} y = -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}t} - e^{-t} + \frac{1}{24} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t} - \frac{1}{8} \cdot e^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}$$

$$y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} y = 0 + \frac{1}{12} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + 0 + \frac{5}{12} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t} - e^{-t} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{6} \cdot t \cdot e^{\frac{3}{2}t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} - 1\right)$$

3. Consideremos la ecuación

$$x'' - x^4 x' = \sin(x).$$

a) Transformar la ecuación en un sistema de orden 1.

b) Hallar **todos** los puntos de equilibrio del sistema hallado en (a) y analizar la estabilidad en el origen. Esbozar el diagrama de fase del sistema alrededor de dicho punto.

a) $$x'' = x^4 \cdot x' + \sin x$$

Si $\begin{cases} x_0 = x \\ x_1 = x' \end{cases}$

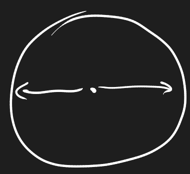
$$\Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_0^4 \cdot x_1 + \sin x_0 \end{cases}$$

b) Puntos de equilibrio

Sea $F(x_0, x_1) = \begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0^4 \cdot x_1 + \sin x_0 \end{bmatrix}$

$$F = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0^4 \cdot x_1 + \sin x_0 = 0 \end{cases}$$

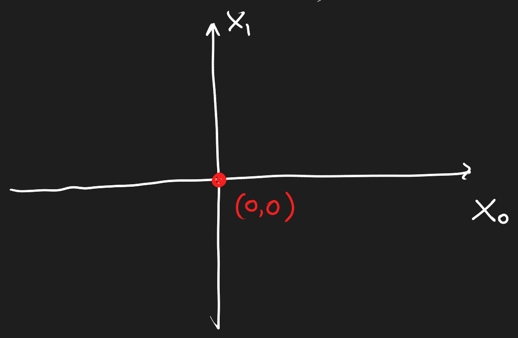
$$x_1 = 0 \Rightarrow \sin x_0 = 0$$



$$\iff x_0 = k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

P. de E: $\{(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Veo estabilidad en $(0,0)$



Busco linealizar.

Como $F \in C^\infty \Rightarrow$ Puedo usar Teo. de Linealización.

$$F(x_0, x_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0^4 . x_1 + \sin x_0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4x_0^3 . x_1 + \cos x_0 & x_0^4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

Como $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$

$\Rightarrow$ El punto es <u>Inestable</u>.

Veo Autovectores

$\lambda_1 = 1)$ $\begin{bmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$

$$v_1 = v_2$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1)$ $\begin{bmatrix} 0+1 & 1 \\ 1 & 0+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sea

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

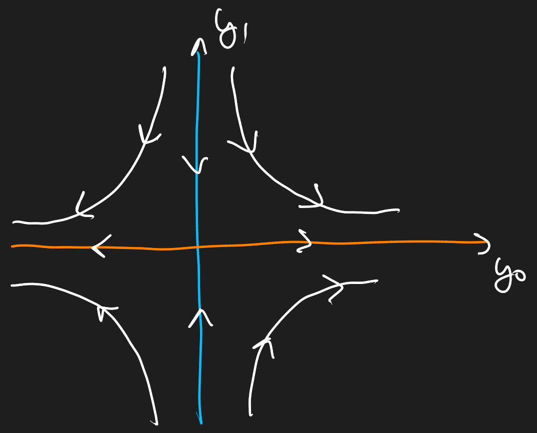
Llamo

$$y_0 = c_1 \cdot e^{t} \Rightarrow e^{t} = \frac{y_0}{c_1} \qquad c_1 \neq 0 \qquad \frac{y_0}{c_1} > 0$$

$$y_1 = c_2 \cdot e^{-t}$$

$$\hookrightarrow y_1 = c_2 \cdot \left(\frac{y_0}{c_1}\right)^{-1} \qquad y_0 \neq 0$$

$$y_1 = c_2 \cdot c_1 \cdot y_0^{-1}$$



Como $$y_0 = C_1 \cdot e^{t}$$ $$y_1 = C_2 \cdot e^{-t}$$

Si $t \to \infty \ \wedge \ C_1 > 0 \Rightarrow y_0 \to \infty$

$\wedge \ C_2 > 0 \Rightarrow y_1 \to 0$

Veo TL. de Autovectores sobre ejes y_0, y_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Rota los ejes } 45^\circ}$$

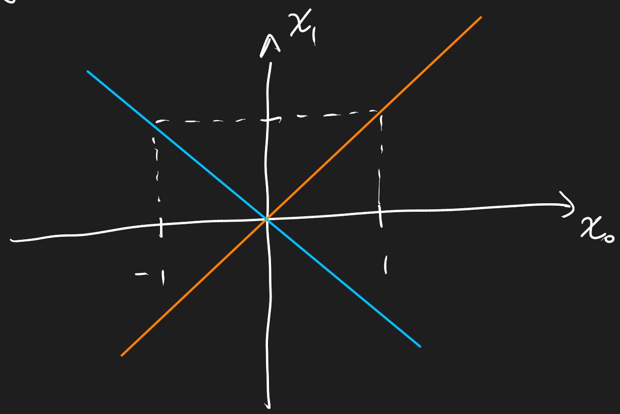
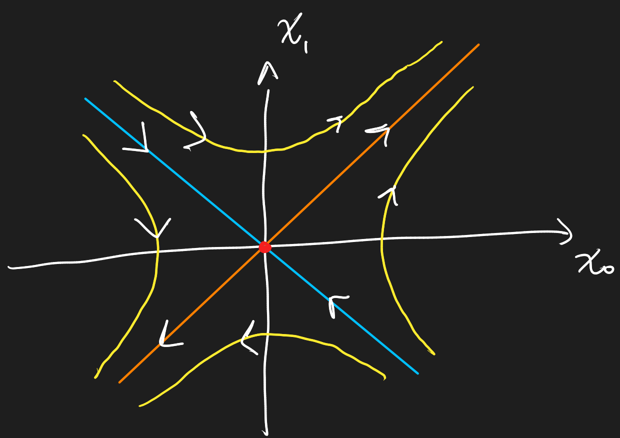
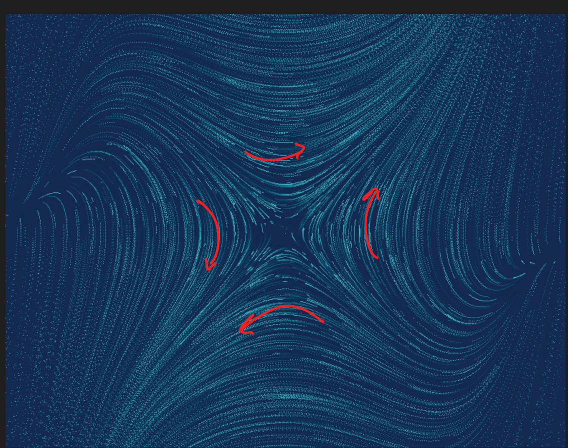


Diagrama de Fases





4. Considerar la ecuación

$$X'(t) = AX(t),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Decidir si es posible que exista $a \in \mathbb{R}$ (y de ser posible hallarlos todos) tal que:

a) Todas las soluciones verifiquen que $X(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

b) Hay una solución tal que $\|X(t)\| \to \infty$ cuando $t \to +\infty$ y otra $Y(t)$ tal que $Y(t) \neq 0$ $Y(t)$ esta acotada.

c) Todas las soluciones $X(t)$ estén acotadas.

$$X' = AX \qquad A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Autovalores de A

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & 3 \\ 0 & a-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2}}{2} =$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a$$

Las soluciones serán de la forma

$$X(t) = C_1 . e^{\lambda t} . v + C_2 . e^{\lambda t} . (\omega + t . v) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$= C_1 . e^{\lambda t} . v + C_2 . e^{\lambda t} . \omega + C_2 . e^{\lambda t} . t . v$$

Para que $X(t) \xrightarrow{t \to 0} 0$

debe darse que

$$\begin{cases} c_1 . e^{\lambda t} . v \xrightarrow{t\to\infty} 0 \\ c_2 . e^{\lambda t} . w \xrightarrow{t\to\infty} 0 \\ c_2 . e^{\lambda t} . t . v \xrightarrow{t\to\infty} 0 \end{cases}$$

Como c_1, c_2, v, w son valores fijos no nulos, basta con:

$$\begin{cases} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} . t \end{cases}$$

$$e^{\lambda t} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \iff \lambda < 0$$

$$e^{\lambda t} . t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \iff \lambda < 0 \quad \text{pues} \quad \lim_{\substack{t\to\infty \\ \lambda<0}} \frac{t}{e^{-\lambda t}} \overset{L'H}{=} \frac{1}{\underbrace{-\lambda e^{-\lambda t}}_{\to +\infty}} = 0$$

$\therefore \lambda < 0 \Rightarrow a < 0$

a) Si $a \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ todas las soluciones verifican que

$$X(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

b) Como las únicas soluciones acotadas se dan si

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = b.i \\ \lambda_2 = -b.i \end{array}\right\} \text{Con parte real cero}$$

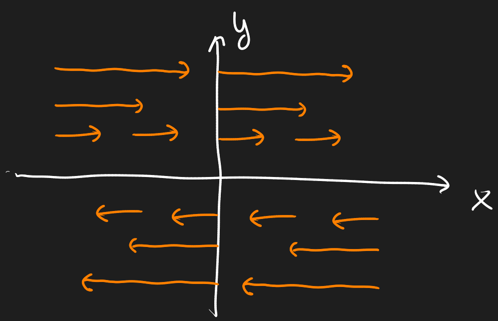
Pero $\lambda_1 = \lambda_2 = a \in \mathbb{R}$

$\therefore$ no existe a / $Y(t)$ esté acotada.

Veo el caso $a=0$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

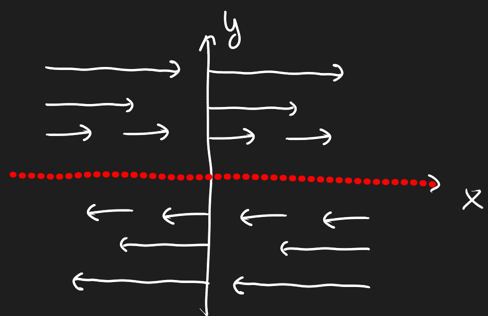
$$\begin{cases} x' = 3y \leftarrow \text{su velocidad horizontal crece linealmente con } y \\ y' = 0 \leftarrow \text{el campo es horizontal} \end{cases}$$



Las soluciones de este tipo no parecen estar acotadas.

Pero si $y=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ y' = 0 \end{cases}$$



En todo el eje horizontal hay un campo

$$F(x,0) = (0,0)$$

O sea que cada solución está acotada (pues es siempre cero)

Solo en este caso especial con $a=0$ e $y=0$ puedo decir que $Y(t)$ está acotada, y si $y \neq 0 \Rightarrow X(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

c) La única forma en que todas las soluciones estén acotadas es cuando $X(t) \equiv 0$, pues no hay casos posibles con autovalores en $\mathbb{C}$ y $Re(\lambda) = 0$.

Pero no alcanza con elegir a=0 para ésto, ya que siguen existiendo soluciones al sistema que son solución no nula.

Por lo tanto no existe a para este caso.

Cuando quiero que valga "para todas" las soluciones, pido que valga para todas las formas que tengo de verificar las condiciones

x'=3y
y'=0

Y para que la solución sea siempre cero, yo debería tener

x'=0
y'=0

para todo x,y en R.

Acá resolví MAL el polinomio característico (malísimo) y obtuve autovalores más generales que en el ejercicio resuelto arriba.

Dejo la resolución a modo de ejercicio por si pasara algo así, y cómo lo analizaría.

$$X' = AX \qquad A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Autovalores de A

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & 3 \\ 0 & a-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$$

Acá me equivoco, pero supongamos que ahora el polinomio que nos dan es:

$$\lambda^2 - 2a\lambda = 0$$

no se anula como antes.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2a) \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} =$$

$$= a \pm \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Obs: $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$

Las soluciones serán de la forma

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot w \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Busco que si

$$t \to \infty \Rightarrow X(t) \to 0 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

con $v \neq w$, $v \neq 0$ y $w \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\lambda_1 t} \to 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0 \\ e^{\lambda_2 t} \to 0 \Leftrightarrow \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \sqrt{a^2-1} < 0 \\ a - \sqrt{a^2-1} < 0 \end{cases}$$

si $\sqrt{a^2-1} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a^2-1 \geq 0$$

$$a^2 \geq 1$$

$$a \geq 1 \vee a \leq -1$$

$$\Rightarrow a + \underbrace{\sqrt{a^2-1}}_{\geq 0} < 0$$

$\Rightarrow a$ debe ser < -1 (para compensar $\sqrt{a^2-1}$)

$$a < -\sqrt{a^2-1}$$

$$a^2-1 > 0$$

$$\underbrace{-a}_{>0} > \underbrace{\sqrt{a^2-1}}_{\geq 0}$$

$$a^2 > a^2-1$$

$$0 > -1$$

$\Rightarrow a \leq -1$ cumple que $a + \sqrt{a^2-1} < 0$

$$\underset{a \leq -1}{\Rightarrow} \quad a - \underbrace{\sqrt{a^2-1}}_{\leq 0} < 0$$

$a \leq -1$ tambien la verifica.

$\therefore$

$$X(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \iff a \in (-\infty, -1]$$

Pero en el caso $a = -1$

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

- Lo veo aparte caso $\lambda_1 = \lambda_2$

$$X(t) = C_1 . e^{\lambda t} v + C_2 . e^{\lambda t} . (\omega + t . v)$$

$$X(t) = C_1 . e^{\lambda t} v + C_2 . e^{\lambda t} . \omega + C_2 . e^{\lambda t} . t . v$$

Si $t \to \infty$

$\Rightarrow$ Veo $e^{\lambda t} . t$

$\lambda < 0$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-\lambda t}} \overset{L'H}{=} \frac{1}{\underbrace{-\lambda}_{>0} . \underbrace{e^{-\lambda t}}_{\to\infty}} = 0 \ \checkmark$$

Con autovalores iguales tambien vale

$\Rightarrow a \in (-\infty, -1]$

Si $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, sol en $\mathbb{C}$ será:

$\lambda_1 = b + di$

$X_1(t) = C_1 \cdot e^{(b+di).t} \cdot v$

$e^{(b+di).t} = e^{bt} \cdot (\underbrace{\cos dt}_{\in[-1,1]} + i \cdot \underbrace{\sin dt}_{\in[-1,1]})$

Si $b < 0 \Rightarrow e^{bt} \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$e^{bt} \cdot \text{acotado} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow Re(\lambda_1) < 0$

Volviendo

Si $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow a \pm \sqrt{a^2-1} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2-1} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow a \in (-1, 1)$

y como $Re(a \pm \sqrt{a^2-1}) = a$

y necesito que $a < 0$

$$\Rightarrow a \in (-1, 0)$$

Obtuve

- Si $a \in (-\infty, -1] \Rightarrow$ Raices Reales con $X(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$
- Si $a \in (-1, 0) \Rightarrow$ Raices Complejas con $X(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$$\Rightarrow \quad X(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0 \iff a \in (-\infty, 0)$$

4. Considerar la ecuación

$$X'(t) = AX(t),$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Decidir si es posible que exista $a \in \mathbb{R}$ (y de ser posible hallarlos todos) tal que:

a) Todas las soluciones verifiquen que $X(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$.
b) Hay una solución tal que $\|X(t)\| \to \infty$ cuando $t \to +\infty$ y otra $Y(t)$ tal que $Y(t) \neq 0$ $Y(t)$ esta acotada.
c) Todas las soluciones $X(t)$ estén acotadas.

b) Con $a > 1$: $X(t) \to \infty \Rightarrow \|X(t)\| \to \infty$

Con $a \in (-1, 1)$: Raices complejas

Pero si $b = 0$

$$\Rightarrow e^{bt} = 1$$

Solo queda la parte imaginaria (acotada)

$\Rightarrow$ quiero que $Re(\lambda) = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$\therefore \quad a \geq 1 \ \wedge \ a = 0 \qquad \underline{\text{Abs}}$

este caso __no__ es posible.

c) Quiero Raices complejas con parte real

$$Re(\lambda) = e^{b.t}$$

Si $b = 0 \Rightarrow e^{bt} = 1$ ✓

$b < 0 \Rightarrow e^{bt} \xrightarrow{t \to \infty} 0$ ✓

$e^{bt} \xrightarrow{t \to -\infty} \infty$ ✗

$\Rightarrow \quad b = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{a = 0}$