

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales.

**Ejercicio 1.** Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar  $x(t)$  la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a)  $x' - 2tx = t$ ,  $x(1) = 0$ ,      b)  $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$ ,  $x(1) = 0$ ,

c)  $x' = \frac{1+x}{1+t}$ ,  $x(0) = 1$ ,      d)  $x' = \frac{1+x}{1-t^2}$ ,  $x(0) = 1$ ,

e)  $x' - x^{1/3} = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,      f)  $x' = \frac{1+x}{1+t}$ ,  $x(0) = -1$ .

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

↓) a)  $x' - 2tx = t$   $(X = x(t))$

$$x' = t + 2tx$$

$$x' = 2t \left( \frac{1}{2} + x \right)$$

$$\int \frac{x'}{\frac{1}{2} + x} dt = \int 2t dt$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \left| \frac{1}{2} + x \right| = \frac{1}{\frac{1}{2} + x} \cdot x'$$

$$\ln \left| \frac{1}{2} + x \right| = t^2 + C$$

$$e^{\ln \left| \frac{1}{2} + x \right|} = e^{t^2 + C}$$

$$\left| \frac{1}{2} + x \right| = \underbrace{e^{t^2}}_{>0} \cdot \underbrace{e^C}_{>0}$$

$$\frac{1}{2} + x = e^{t^2} \cdot \tilde{C}$$

$$\boxed{x = e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2}} \text{ Sol. general}$$

Verifico

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow x' = \tilde{C} \cdot e^{t^2} \cdot 2t$$

Tenía como dato:

$$x' = t + 2tx$$

$$\begin{aligned} x' &= t + 2t(e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2}) \\ &= t + 2t \cdot e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2} \cdot 2t \end{aligned}$$

$$x = \tilde{C} \cdot 2t \cdot e^{t^2} \quad \checkmark$$

$\therefore$  verifiqué que  $x$  es solución.

Condición inicial:

$$t=1 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$\Rightarrow x(1) = e^{1^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2} = 0$$

$$e \cdot \tilde{C} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{2e}$$

Finalmente

Solución particular:

$$x = \frac{1}{2e} \cdot e^{t^2} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2-1} - \frac{1}{2}}$$

Verifico

$$\rightarrow x' = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot e^{t^2-1}$$

$$x' = t \cdot e^{t^2-1}$$

Dato:

$$x' = t + 2tx$$

$$x' = t + 2t \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot e^{t^2-1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$x' = t \cdot e^{t^2-1} \quad \checkmark \text{ Verificado}$$

• Intervalo maximal:  $\mathbb{R}$

• Solución única.

$$b) \quad x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$$

$$\frac{x'}{1+x^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\arctan(x) = \arctan(t) + C$$

$$x = \arctan^{-1}(\arctan(t) + C)$$

Sol. General

$$x = \tan(\arctan(t) + C)$$

Recover do:

variable t:

$$(\arctan(t))' = \frac{1}{1+t^2}$$

Función  $x(t)$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x'$$

Verifico

$$x' = \frac{1}{\cos^2(\arctan t + C)} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Debo

$$x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

$$x' = \frac{1 + \tan^2(\arctan t + C)}{1+t^2}$$

$$x' = \left( 1 + \frac{\sin^2(\arctan t + C)}{\cos^2(\arctan t + C)} \right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$x' = \left( \frac{\cos^2(\arctan t + C)}{\cos^2(\arctan t + C)} + \frac{\sin^2(\arctan t + C)}{\cos^2(\arctan t + C)} \right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$x' = \left( \frac{\cos^2(\arctan t + c) + \sin^2(\arctan t + c)}{\cos^2(\arctan t + c)} \right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

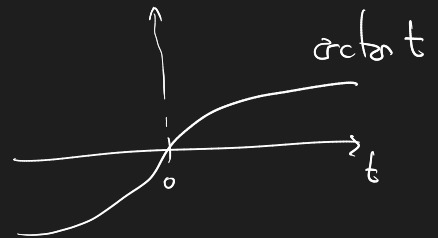
$$x' = \frac{1}{\cos^2(\arctan t + c)} \cdot \frac{1}{1+t^2} \quad \checkmark \quad \text{☺}$$

Sol. Part.

$$t = 1 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$x = \tan(\arctan(t) + c)$$

$$x(1) = \tan\left(\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} + c\right) = 0$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + c = \underbrace{\arctan(0)}_{=0}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

Sol. Part,

$$x = \tan\left(\arctan(t) - \frac{\pi}{4}\right)$$

Verifico con Wolfram:

is  $\frac{d}{dt} (\tan(\arctan(t) - \pi/4))$  equal to  $(1/(1+t^2)) * (1+(\tan(\arctan(t)-\pi/4)^2))$

**NATURAL LANGUAGE** **MATH INPUT** **EXTENDED KEYBOARD** **EXAMPLES** **UPLOAD** **RANDOM**

Input interpretation

is  $\frac{\partial}{\partial t} \tan\left(\tan^{-1}(t) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{1+t^2} \left(1 + \tan^2\left(\tan^{-1}(t) - \frac{\pi}{4}\right)\right)$  always true?

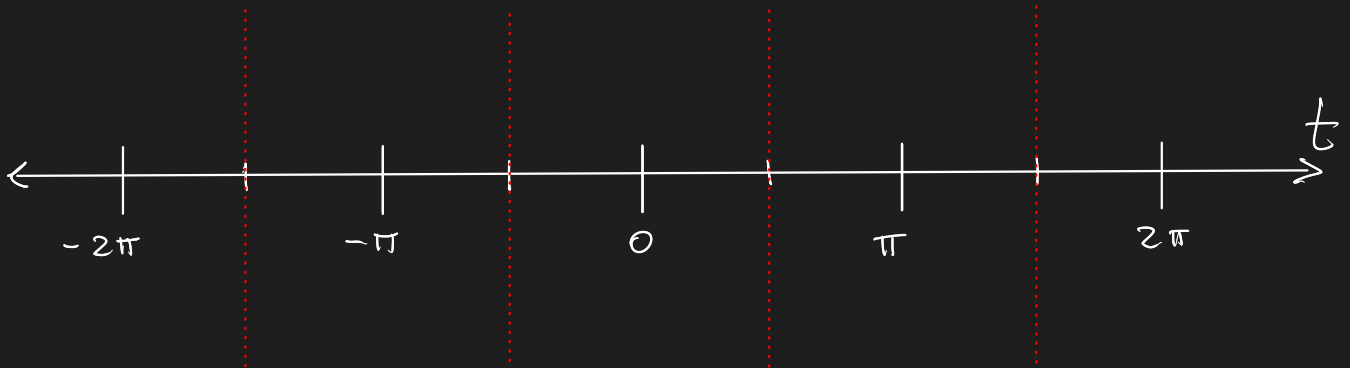
$\tan^{-1}(x)$  is the inverse tangent function

Result

$\frac{\partial}{\partial t} \tan\left(\tan^{-1}(t) - \frac{\pi}{4}\right)$  is always equal to  $\frac{1 + \tan^2\left(\tan^{-1}(t) - \frac{\pi}{4}\right)}{1+t^2}$  ✓ Verificado.

Intervalo maximal :

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$  es indefinido con  $k \in \mathbb{Z}$



• Como  $t = 1$  es dato,  $t$  debe estar en el intervalo



$$x = \tan\left(\arctan(t) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{4}\pi < \arctan t < \frac{3}{4}\pi$$

\_\_\_\_\_

$$t > -1$$

\_\_\_\_\_

$\arctan t$  es siempre  $< \frac{3}{4}\pi$

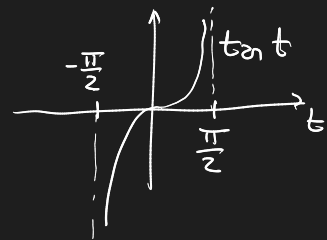
por tanto en  $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{4}\pi$

∴

$$t \in (-1, +\infty)$$

↑

Abierto por  $\tan(-\frac{\pi}{2})$  es indeterminado



$$c) \quad x' = \frac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1,$$

$$\int \frac{x'}{1+x} dt = \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$\ln|1+x| = \ln|1+t| + C$$

$e^{\square}$

$$|1+x| = \underbrace{e^{\ln|1+t|}}_{>0} \cdot \underbrace{e^C}_{>0}$$

$$1+x = |1+t| \cdot \tilde{C}$$

Sol  
General

$$x = \tilde{C} \cdot |1+t| - 1$$

Verifias ?

$$\text{So } x(0) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{C} \cdot |1+0| - 1 = 1$$

$$\tilde{C} - 1 = 1$$

$$\tilde{C} = 2$$

Sol. Part:

$$x = 2|1+t| - 1$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Verifco

$$\text{or } t \geq -1$$

$$\Rightarrow x = 2 + 2t - 1$$

$$\Rightarrow x' = 2$$

Otra sol:

$$\boxed{x \equiv 0}$$

$$\text{si } t < -1$$

$$\Rightarrow x = -2 - 2t - 1$$

$$\Rightarrow x' = -2$$

De lo

$$\text{si } t \geq -1$$

$$x' = \frac{1+x}{1+t} = \frac{\cancel{1} + 2 + 2t - \cancel{1}}{1+t}$$

$$= \frac{2(1+t)}{1+t} = 2 \checkmark$$

$$\text{si } t < -1:$$

$$x' = \frac{1+x}{1+t} = \frac{\cancel{1} + 2(-1-t) - \cancel{1}}{1+t}$$

$$= -2 \checkmark$$

Verificado



$$d) \quad x' = \frac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$$

$$\int \frac{x'}{1+x} dt = \int \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t)(1-t)} dt$$

$$\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$$

$$\ln |1+x| = \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{2} \ln |t+1| + C$$

$$\stackrel{(\circ)}{e^{\circ}} \quad |1+x| = e^{\frac{1}{2}(\ln |t-1| - \ln |t+1|)} \cdot e^C$$

$$= \left( e^{\ln |t-1| - \ln |t+1|} \right)^{1/2} \cdot \tilde{C}$$

$$= \left( \frac{e^{\ln |t-1|}}{e^{\ln |t+1|}} \right)^{1/2} \cdot \tilde{C}$$

$$|1+x| = \left( \frac{|t-1|}{|t+1|} \right)^{1/2} \cdot \tilde{C}$$

$$1+x = \begin{cases} -\tilde{C} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} & \Rightarrow x = -\tilde{C} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \\ +\tilde{C} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} & \Rightarrow x = \tilde{C} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = 1$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad x = -\tilde{c} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \quad \xrightarrow{t=0} \quad 1 = -\tilde{c} \sqrt{1} - 1$$

$$\tilde{c} = -2$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad x = \tilde{c} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \tilde{c} - 1$$

$$\tilde{c} = 2$$

Obs

Para cada solución  $\textcircled{\text{I}}$  y  $\textcircled{\text{II}}$ , obtuve un  $\tilde{c}$  distinto

Sol. Part  $\textcircled{\text{I}}$

$$x = \underbrace{2}_{-\tilde{c}_1} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1$$

Sol. Part.  $\textcircled{\text{II}}$

$$x = \underbrace{2}_{\tilde{c}_2} \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1$$



Son la misma solución!

Sol. Part

$$x = 2 \sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$x' = (1+x)/(1-t^2), x(0)=1$

 NATURAL LANGUAGE  MATH

Input

$\{x'(t) = \frac{1+x(t)}{1-t^2}, x(0) = 1\}$

Separable equation

Differential equation solution

$x(t) = \frac{2\sqrt{t+1}}{\sqrt{1-t}} - 1$

$$e) \quad x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0,$$

$$X \equiv 0 \text{ or sol.}$$

Ord

$$x' = x^{1/3}$$

$$\frac{x'}{x^{1/3}} = 1 \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{x'}{x^{1/3}} dt = \int 1 dt$$

$$\frac{3}{2} \cdot x^{2/3} = t + C$$

$$x^{2/3} = \frac{2}{3} \cdot t + C$$

Sol. general :

$$x = \left( \frac{2}{3} \cdot t + C \right)^{3/2}$$

$$\text{Si } x(0) = 0$$

$$x(0) = \left( 0 + C \right)^{3/2} = 0$$

$$C^{3/2} = 0$$

$$C = 0$$

so sol. Particular :

$$x = \left( \frac{2}{3} t \right)^{3/2} = \frac{2}{9} \sqrt{6} \cdot t^{3/2}$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} x^{2/3} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} \cdot x'$$

Verifico

$$x' = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \sqrt{6} \cdot t^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot t^{1/2}$$

$$x^{1/3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{1/2}$$

De to

$$x' - x^{1/3} = 0$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot t^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{1/2} = 0 \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Verificado.

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f) \quad x' = \frac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$$

$$\int \frac{x'}{1+x} dt = \int \frac{1}{1+t} dt \quad \begin{matrix} x \neq -1 \\ t \neq -1 \end{matrix}$$

$$\ln |1+x| = \ln |1+t| + C$$

$$\left( e^{\circ} \right) \Rightarrow |1+x| = |1+t| \cdot \tilde{C}$$

Paso = Sol. Part. de una, para no tener que separar en casos

$$x(0) = -1$$

$$|1-1| = |1+0| \cdot \tilde{C}$$

$$0 = \tilde{C}$$

$$\Rightarrow |1+x| = 0$$

$$\boxed{x \equiv -1} \quad \text{Sol. Particular.}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{x'}_{=0} = \frac{1+x}{1+t} \Big|_{x=-1} = 0 \quad \checkmark$$

Verificado

Como  $t \neq -1$

$\Rightarrow$  Los intervalos son  $(-\infty, -1)$  y  $(-1, +\infty)$

Como  $t=0$  debe estar en el inter.  $\Rightarrow t \in (-1, +\infty)$

**Ejercicio 2.** Si  $y = y(t)$  denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente  $y'/y$ .

- Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.
- Dibujar el gráfico de  $y(t)$  para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.
- ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?
- Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.
- Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de  $t$  ( $at + b$ ).
- Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a  $r - cy$ , donde  $r$  y  $c$  son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico  $y(t)$  tiende asintóticamente a la recta  $y = r/c$ .

$$a) \quad \frac{y'}{y} = a \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}$$

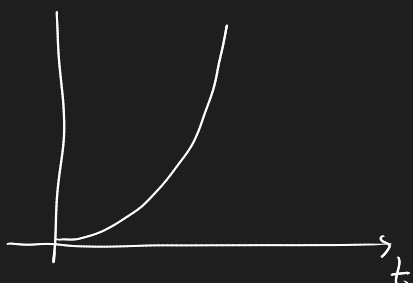
$$\int \frac{y'}{y} dt = \int a dt$$

$$\begin{aligned} \ln|y| &= at + C \\ \left\{ \begin{aligned} |y| &= e^{at} \cdot \tilde{C} \end{aligned} \right\} > 0 \end{aligned}$$

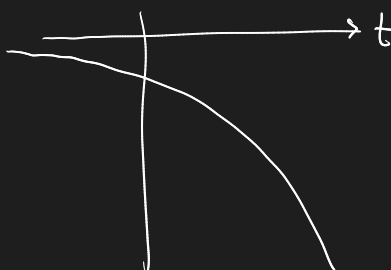
$$\begin{aligned} y &= \tilde{C} \cdot e^{at} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \\ \tilde{C} &\in \mathbb{R}_{>0} \quad \left( \text{por} \quad \tilde{C} = e^C \right) \end{aligned}$$

b)

$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$



$$c) \quad \frac{y'}{y} = 0$$

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int 0 dt$$

$$\ln |y| = 0 + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = 1 \cdot e^c$$

$$y = \tilde{c} \quad \text{con } \tilde{c} \in \mathbb{R} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Notar que} \\ y = \begin{cases} -e^c \\ +e^c \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\text{Si } y \text{ es cte} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 0$$

$$d) \quad \begin{array}{l} 4 \text{ meses} \\ 120 \text{ días} \end{array} \left( \begin{array}{l} 01/01/2022 \Rightarrow 1000 \text{ individuos} \\ 01/05/2022 \Rightarrow 1020 \text{ individuos} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +20 \end{array}$$

Uso

$$y = \tilde{c} \cdot e^{at} \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \\ \tilde{c} \in \mathbb{R}_{>0} \quad \left( \text{por } \tilde{c} = e^c \right)$$

$$t = 0 \Rightarrow y(0) = 1000$$

$$t = 120 \Rightarrow y(120) = 1020$$

$$y(0) = 1000 = \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = 1000$$

$$y(120) = 1020 = 1000 \cdot e^{a \cdot 120}$$

$$e^{120 \cdot a} = 1,02$$

$$\ln 1,02$$
$$120 \cdot a = \ln(1,02)$$

$$a = \frac{\ln(1,02)}{120}$$

$$y = 1000 \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{con} \quad a = \frac{\ln(1,02)}{120}$$



$$e) \quad \frac{y}{y'} = at + b$$

$$\int \frac{y}{y'} dt = \int at + b dt$$

$$\ln|y| = \frac{a}{2}t^2 + b \cdot t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\frac{a}{2}t^2 + b \cdot t} \cdot e^C$$

$$|y| = \tilde{C} \cdot e^{\frac{a}{2}t^2 + b \cdot t} \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0}$$

Como hay un mó dub, podría juntar los casos con  $\tilde{C}$  y  $-\tilde{C}$  en  $\bar{C}$

$$y = \bar{C} \cdot e^{\frac{a}{2}t^2 + b \cdot t} \quad \bar{C} \in \mathbb{R}$$

PERO!

Como  $y$  representa el tamaño de una población

$\Rightarrow y \geq 0$  siempre

∴

$$y = \tilde{C} \cdot e^{\frac{a}{2}t^2 + b \cdot t}$$

$$\tilde{C} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Caso borde:

Agrego el cero pues debe existir la posibilidad de una población nula que nunca cambia (es siempre cero)

(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a  $r - cy$ , donde  $r$  y  $c$  son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico  $y(t)$  tiende asintóticamente a la recta  $y = r/c$ .

$$\frac{y'}{y} = r - cy$$

$$r, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Si  $y$  es pequeño, este término "desaparece" quedando

$$\left[ \frac{y'}{y} \approx r \right] \text{ Crecimiento exponencial}$$

Para la parte de que tiende a  $y=r/c$ , ver resueltos. Yo no lo entiendo.



**Ejercicio 3.** Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?.

Datos

$$\bullet \frac{y'}{y} = a \cdot y$$

$$\bullet y(t) = 2 \cdot y(t+1)$$

$$\int \frac{y'}{y^2} dt = \int a \cdot dt$$

$$-y^{-1} = a \cdot t + C \quad a, C \in \mathbb{R} \\ y \neq 0$$

Sol. general

$$y = \frac{-1}{a \cdot t + C}$$

$$a \cdot t + C \neq 0$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial t} y^{-1} = -y^{-2} \cdot y'$$

$$= -\frac{y'}{y^2}$$

Busco relaciones usando:

$$y(t) = 2 \cdot y(t+1)$$

$$\frac{\cancel{-1}}{a \cdot t + C} = \frac{\cancel{-2}}{a(t+1) + C}$$

$$a \cdot t + a + C = 2at + 2C$$

$$0 = a \cdot t + C - a$$

$$t = \frac{a - C}{a} \quad a \neq 0$$

$$\text{Si } t=0$$

$$\Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$$

Sol. general

$$y = \frac{-1}{a \cdot t + c}$$

en  $t=0$

$$y(0) = \frac{-1}{c}$$

$$y(1) = 2 \cdot y(0)$$

$$y(2) = 4 \cdot y(0) = \frac{-4}{c} \quad ?$$

esto  $y_2$  lo sabía

sin calcular  $y(t) \dots$