

2. INTEGRAL DE LONGITUD DE ARCO

Ejercicio 8. Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descrito por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como *cicloide*.

Velocidad : $\sigma'(t)$

Rapidez : $\|\sigma'(t)\|$

Long de Arco : $\int_{t=0}^{t=2\pi} \|\sigma'(t)\| dt$

Velocidad:

$$\sigma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

Rapidez :

L. de A:

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \left((1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} \right)^{1/2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - \cos t}} \, dt$$

Identidad trigo:

$$= 2 \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \, dt$$



$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x < 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

⇒ como $t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \sin \frac{t}{2} \geq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt$$

CA:

$$\left(-2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right)' = +2 \cdot \sin \frac{t}{2}, \quad \frac{1}{2} = \sin \frac{t}{2}$$

$$= 2 \cdot \left(-2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2 \cdot (2 - (-2))$$

$$= 8$$

La longitud de arco es 8 //

Ejercicio 9. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

(a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.

(b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

a) $\sigma'(t) = (1, 2t)$

$$\| (1, 2t) \| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt$$

Malísimo que sea todo con identidades trigonométricas. Una poronga estos ejercicios.

b) $\sigma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1, 1 \right)$

$$\| \sigma'(t) \| = \sqrt{\frac{1}{4t} + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4t} + 2}$$

$$\int_{10}^{20} \sqrt{\frac{1}{4t} + 2} \, dt = \int_{10}^{20} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{u} + 2}}_{\substack{u = 4t \\ du = 4 \, dt}} \cdot \frac{1}{4} \cdot du$$

↓
Sale como la anterior,
con identidades —

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\text{—} \circ$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 = \sec^2$$

Ejercicio 10. Sea \mathcal{C} una curva suave, y sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$ una biyección C^1 con $g'(s) \neq 0$ para todo $s \in (\bar{a}, \bar{b})$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ .

(a) Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de \mathcal{C} .

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

Param. Regular:

$$\sigma'(t) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

- Es C^1 : Sigma prima tiene componentes continuas.
- Sigma prima es distinta del vector cero.
- ~~Es inyectiva: Sigma(x) es distinta para todo x en el dominio~~

↑ esto es para mostrar que es simple

a) $\bar{\sigma}$ es regular?

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s))$$

$$\hookrightarrow \text{¿ es } \mathcal{C}^1 ?$$

$$\left(\bar{\sigma}(s) \right)' = \underbrace{\sigma'(g(s))}_{\substack{\sigma \text{ continua} \\ \text{por } \sigma \text{ es } \mathcal{C}^1}} \cdot \underbrace{g'(s)}_{\substack{\text{es continua} \\ \text{por } g \text{ es } \mathcal{C}^1}}$$

$$\therefore \bar{\sigma}(s) \text{ es } \mathcal{C}^1$$

$$\hookrightarrow \left(\bar{\sigma}(s) \right)' \stackrel{?}{=} (0, 0)$$

$$\left(\bar{\sigma}(s) \right)' = \underbrace{\sigma'(g(s))}_{\substack{\neq (0,0) \text{ por} \\ \sigma \text{ es regular}}} \cdot \underbrace{g'(s)}_{\neq 0 \text{ por definición}}$$

$$\therefore \left(\bar{\sigma}(s) \right)' \neq (0, 0, 0)$$

¿ $\bar{\sigma}(s)$ es inyectiva?

Acá uso que g es biyección

Como $\sigma(t)$ es inyectiva (regular) $\forall t \in [a, b]$

$\Rightarrow \sigma(g(s))$ es inyectiva por

$g: [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow [a, b]$ biyectiva

o sea $\bar{\sigma}(s)$ es inyectiva.

Finalmente $\bar{\sigma}(s)$ es una reparametrización regular de $\sigma(t)$
y por ende, es una parametrización regular de la curva C .

Revisar def de
Regular y
Re solución

(b) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_C f ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

$$\int_C f ds = \int_{t=a}^{t=b} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f(\bar{\sigma}(s)) \cdot \|\bar{\sigma}'(s)\| ds$$

\uparrow
 $\bar{\sigma}$ es reparam regular
de σ

Pues

$$\begin{aligned}\int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f(\bar{\sigma}(s)) \cdot \|\bar{\sigma}'(s)\| \, ds &= \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f(\sigma(g(s))) \cdot \|\sigma'(g(s)) \cdot g'(s)\| \, ds \\ &= \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f(\sigma(g(s))) \cdot \|\sigma'(g(s))\| \cdot |g'(s)| \, ds\end{aligned}$$

Como $t = g(s)$

$$dt = |g'(s)| \, ds$$

Revisa.

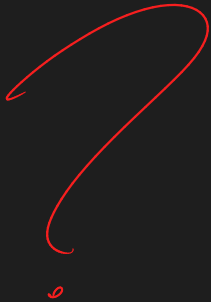


$$= \int_{t=a}^{t=b} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

Ejercicio 11. Sea \mathcal{C} una curva simple, y sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de \mathcal{C} . Para cada $t \in [a, b]$ sea $h(t)$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sabemos que

$$h(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau.$$

La función $h(t)$ resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo t , por lo que admite una inversa continuamente diferenciable. A la reparametrización de σ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma(h^{-1}(s))$ la llamamos *reparametrización por longitud de arco*. Probar que $\bar{\sigma}$ es tal que la longitud del arco que va de $\bar{\sigma}(0)$ a $\bar{\sigma}(s)$ es igual a s .



Ejercicio 12. Reparametrizar las siguientes curvas por longitud de arco.

(a) $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $a = 0$, $b = 1$.

(b) $\sigma(t) = (2e^t, 3e^t + 1, -6e^t)$, $a = 0$, $b = \ln 3$.

a) Calcular

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\begin{aligned}\|\sigma'(t)\| &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Defino h como

$$h : [0, 1] \rightarrow [0, L(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^t \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

$$= \int_0^t \sqrt{2} \cdot dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot t \Big|_0^t$$

$$h(t) = \sqrt{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad h(1) = \sqrt{2} = L(\sigma)$$

Llamo $s := h(t)$

$$\Rightarrow s = \sqrt{2} \cdot t$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Defino $\bar{\sigma}(s)$ como

$$\bar{\sigma}(s) : [0, \sqrt{2}] \rightarrow [0, 1]$$

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{\sigma}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(b) \sigma(t) = (2e^t, 3e^t + 1, -6e^t), \quad a = 0, b = \ln 3.$$

$$\sigma'(t) = (2e^t, 3e^t, -6e^t)$$

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \left(4 \cdot e^{2t} + 9 \cdot e^{2t} + 36 \cdot e^{2t} \right)^{1/2} \\ &= \left(49 e^{2t} \right)^{1/2} \\ &= 7 \cdot e^t \end{aligned}$$

Defino h como

$$h: [0, \ln 3] \rightarrow [0, \mathcal{L}(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^t 7 \cdot e^t \, dt$$

$$h(t) = 7 \cdot e^t \quad \Rightarrow \quad h(\ln 3) = 7 \cdot e^{\ln 3} = 21$$

llamo

$$s = 7 \cdot e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{7} = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln \left(\frac{s}{7} \right)$$

Ahora defino

$$\bar{\sigma}: [0, 21] \rightarrow [0, \ln 3]$$

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma \left(\ln \frac{s}{7} \right)$$

← Mod no puede ser $\ln 0$

$$= \left(2 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}}, 3 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}} + 1, -6 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}} \right)$$

$$\bar{\sigma}(s) = \left(\frac{2s}{7}, \frac{3s}{7} + 1, -\frac{6s}{7} \right) \quad \underline{\text{¡No!}}$$

Repto con otro límite en h

$$h: [0, 3] \rightarrow [0, 2(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^{ht} 7 \cdot e^t dt \quad \leftarrow \text{no se si puedo hacer eso!}$$

$$h(t) = 7 \cdot e^{\ln t} \Rightarrow h(\ln 3) = 7 \cdot e^{\ln 3} = 21$$

$$= 7t \Rightarrow h(3) = 21 \quad \text{es lo mismo}$$

llamo

$$s = 7 \cdot e^t \Rightarrow \frac{s}{7} = e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{7}\right)$$

$$s = 7 \cdot t \Rightarrow \frac{s}{7} = t \quad \leftarrow \text{sab del log!} \quad \text{¡¡}$$

De hno

$$\bar{\sigma}: [0, 21] \rightarrow [0, h3]$$

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\left(\frac{s}{7}\right)$$

$$= \left(2 \cdot e^{\frac{s}{7}}, 3 \cdot e^{\frac{s}{7}} + 1, -6e^{\frac{s}{7}} \right)$$

¡también!

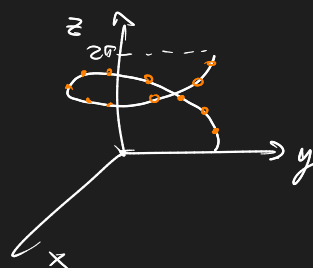
Ejercicio 13. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_C f(x, y, z) ds$, donde σ es una parametrización de C , en los casos siguientes:

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en (a).

(c) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} a) \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{2} dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin t + \cos t + t dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(-\cos t + \sin t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(0 + 0 + \frac{4\pi^2}{2} \right)$$

(b) $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en (a).

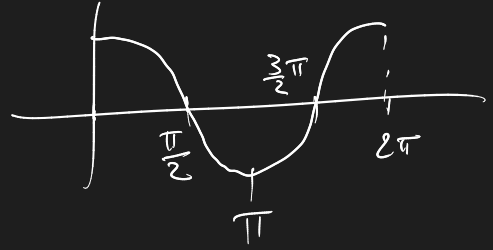
- (a) $f(x, y, z) = x + y + z$, $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 (b) $f(x, y, z) = \cos z$, σ como en (a).



$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{2} dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos t dt$$

$$= 0$$



(c) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

$$\sigma'(t) = (1, 2t, 0)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^1 f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \underbrace{\cos 0}_1 \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$u = 4t^2 + 1$$

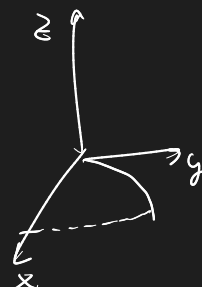
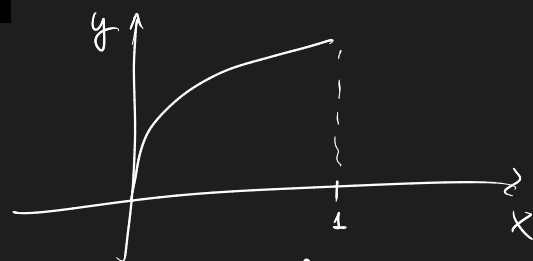
$$du = 8t dt \Rightarrow \frac{1}{8} du = t dt$$

$$= \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{u} \cdot du$$

$$= \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot du$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} \Big|_1^5$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (5^{3/2} - 1)$$



CA:

$$\sqrt{u} = u^{1/2}$$

$$\Rightarrow (u^{3/2})' = \frac{3}{2} \cdot u^{1/2}$$

Ejercicio 14. (a) Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x, y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 15. Suponer que la semicircunferencia parametrizada por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \sin \theta, a \cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

- (a) ¿Cuál es la masa total del alambre?
- (b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
- (c) Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z) , calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{masa total} &= \int_0^\pi \underbrace{\rho(\sigma(t))}_2 \cdot \|\sigma'(t)\| d\theta \\ &= \int_0^\pi 2 \cdot \left(a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \right)^{1/2} d\theta \\ &= 2 \cdot a \cdot \int_0^\pi 1 \cdot d\theta \\ &= 2 \cdot a \cdot \pi // \end{aligned}$$

b) Centro de masa : ? Buscar!

era algo así como

$$\frac{\int_C x \cdot \rho ds}{\int_C \rho ds} ?$$

$$c) f(x, y, z) = x + y - z$$

$$\int_C f \cdot ds = \int_0^\pi (0 + a \cdot \sin \theta - a \cdot \cos \theta) \cdot \overbrace{a}^{\|\sigma'\|} \cdot d\theta$$

$$= a^2 \cdot \int_0^\pi \sin \theta - \cos \theta \, d\theta$$

$$= a^2 \cdot \left(-\cos \theta - \sin \theta \right) \Big|_0^\pi$$

$$= a^2 \cdot ((1+1) - 0)$$

$$= 2a^2$$

$$L(C) = \int_0^\pi \|\sigma'\| \, ds \quad (\text{Longitud de la curva})$$

$$= a \cdot \pi$$

\therefore Temp promedio es

$$T_p = \frac{\int_C f \cdot ds}{L(C)} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

Ejercicio 16. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

(a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

$$a) \quad \sigma'(t) = (1, f'(t))$$

$$\|\sigma'(t)\| = \left(1^2 + (f'(t))^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_C f ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

$$b) \quad \sigma(t) = (t, \ln(t)) \quad \text{con } t \in [1, 2]$$

$$\Rightarrow \int_C f ds = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt$$

La muerte resolver esto!

