

## Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs)

Método de Separación de Variables  
Busco llegar a algo de la forma:  
 $x'/x = t$

Variables Separables:  $y'(x) = f(y)g(x)$

Podemos integrar directamente.

Ejemplo: 
$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln |y(x)| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y(x)| = K e^{x^2/2} \rightarrow$$

$$y(x) = 3e^{x^2/2}$$

## Ecuaciones Homogéneas de Grado cero

Ec. homogénea de grado cero:

$$f(\lambda x, \lambda t) = \lambda^0 f(x, t) \quad \forall (x, t, \lambda)$$

**Ejercicio 4.** Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

a)  $tx' = x + 2t \exp(-x/t)$     b)  $txx' = 2x^2 - t^2$     c)  $x' = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0$

### Ecuaciones homogéneas

Def.  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se dice HOMOGÉNEA de grado 0 si:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo:  $F(x, y) = \frac{x+y}{x+y}$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x+y}{x+y}$$

¿Por qué?

Proposición: Si  $y' = F(x, y)$  con  $F$  hom. gr. 0, el cambio de variables  $y = xu$  lo convierte en una ecuación de variables separables.

$$y' = F(x, y) \text{ se convierte en:}$$

$$u + xu' = F(x, xu) = F(1, u)$$

$$u' = \frac{F(1, u) - u}{x}$$



$$a) \quad M dx + N dy = 0$$

Supongamos que  $\exists F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathcal{C}^2 /$

$$\nabla F = (M, N)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = M(x, y) + N(x, y) \cdot y'(x) = 0 \\ \text{o también} \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = M(x, y) x'(y) + N(x, y) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F \text{ es cte sobre} \\ \text{la curva } (x, y(x)) \\ \text{o } (x(y), y) \\ \text{respectivamente} \end{array}$$

$\Rightarrow F(x, y) = C \in \mathbb{R}$  define implícitamente una solución

$$M_y = N_x \Leftrightarrow \text{es exacta.}$$

Llamo

$$\tilde{M} = \mu \cdot M$$

$$\tilde{N} = \mu \cdot N$$

$$\Rightarrow \tilde{M} dx + \tilde{N} dy = 0 \quad \text{es exacta}$$

$$(c) \underbrace{(3x^2 - y^2)}_N dy - \underbrace{2xy}_{M} dx = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} M_y = -2x \\ N_x = 6x \end{array} \right\} \text{Queremos } M_y = N_x$$

$$\Rightarrow \mu \cdot M = \mu \cdot N$$

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu_y \cdot M - \mu_x \cdot N = \mu N_x - \mu M_y$$

$$\frac{\mu_y \cdot M - \mu_x \cdot N}{N_x - M_y} = \mu$$

$x' - x = 0 \gg$  Multiplico por  $e^t$  en ambos lados























