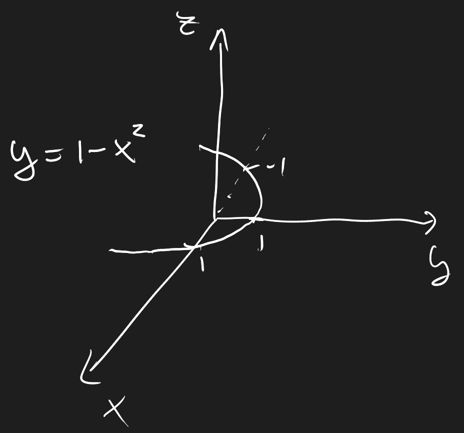
Análisis II-Análisis Matemático II-Matemática 3-Análisis II(LCD)
Recuperatorio del Primer Parcial (13/07/2022)

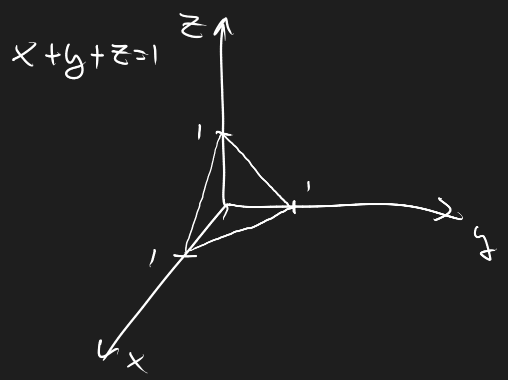
Ejercicio 1. (2 puntos) Sea

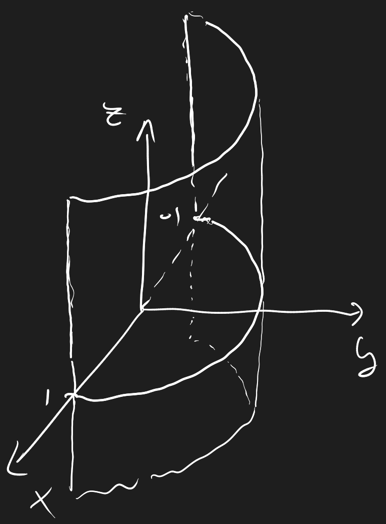
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - x^2, x + y + z = 1,\ y \geq 0\}.$$

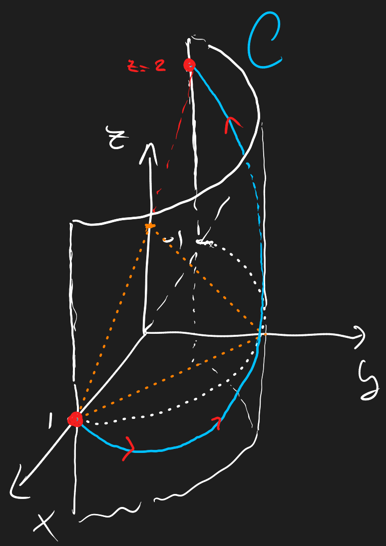
(a) Obtener una parametrización regular de C de manera tal que se la recorra desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(-1,0,2)$.

(b) Calcular $\int_C 2x dx + y dy - z dz$, con la orientación de C dada en el ítem (a)









$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x + \cancel{1} - x^2 + z = \cancel{1}$$

$$z = x^2 - x$$

Parametrizo C como:

$$\sigma(x) = (-x,\ 1 - x^2,\ x^2 + x) \qquad x \in [-1, 1]$$

Veo orientación

$\sigma(-1) = (1, 0, 0)$ ✓

Respeta orientación

$\sigma(1) = (-1, 0, 2)$ ✓

b) $F = (2x, y, -z)$

Si $f_x = 2x \Rightarrow f = x^2 + \varphi(y,z)$

Si $f_y = y \Rightarrow f = \frac{1}{2}y^2 + \tilde{\varphi}(x,z)$

Si $f_z = -z \Rightarrow f = -\frac{1}{2}z^2 + \hat{\varphi}(x,y)$

Como $F = \nabla f$ con $f_{(x,y,z)} = \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2\right)$

$\Rightarrow$ F es Campo Grad.

$$\therefore \int_C F\, d\vec{s} = f(\sigma(1)) - f(\sigma(-1))$$

$$= f(-1, 0, 2) - f(1, 0, 0)$$

$$= 1 - 2 - 1$$

$$\int_C F\, d\vec{s} = -2$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^3$ la curva dada en coordenadas cilíndricas como

$$r = \sin(\theta), \quad z = \theta \quad \text{con } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(a) Calcular la la longitud de la curva.

(b) Si C está recorrida desde el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ al $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$, calcular $\int_C x\,dx + \sqrt{y}\,dy + z^2\,dz$.

a) Cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases} \xRightarrow{\text{datos}} \begin{cases} x = \sin\theta \cdot \cos\theta \\ y = \sin\theta \cdot \sin\theta = \sin^2\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Parametrizo C como:

$$\sigma(\theta) = (\sin\theta \cdot \cos\theta, \sin^2\theta, \theta)$$

$$\sigma'(\theta) = (\underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{= \cos(2\theta)}, \underbrace{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}_{\sin(2\theta)}, 1)$$

$$\|\sigma'(\theta)\| = \left(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) + 1\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}$$

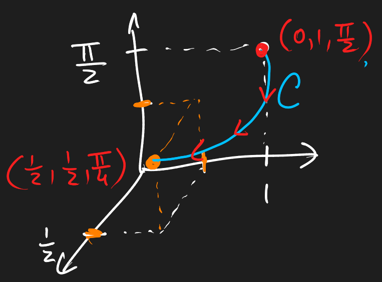
$$\text{Longitud}(C) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \|\sigma'(\theta)\|\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{2} \cdot \underbrace{\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{2}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi}$$

$$\text{Longitud}(C) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi \quad //$$

b)



$$\sigma(\theta) = \left(\sin\theta \cdot \cos\theta,\ \sin^2\theta,\ \theta\right)$$

Evalúo

$$\sigma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cdots,\ \cdots,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sigma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cdots,\ \cdots,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Invierte la orientación

$$F = (x, \sqrt{y}, z^2)$$

$$f_x = x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y,z)$$

$$f_y = y^{1/2} \Rightarrow \frac{2}{3}y^{3/2} + \tilde{\varphi}(x,z)$$

$$f_z = z^2 \Rightarrow \frac{1}{3}z^3 + \hat{\varphi}(x,y)$$

Como $F = \nabla f$ con $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}y^{3/2} + \frac{1}{3}z^3$

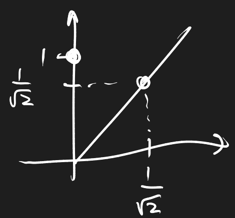
$\Rightarrow F$ es C. Grad.

$$\therefore \int_C F \cdot ds = -\int_{C^-} F \cdot ds$$

Curva parametrizada por σ

$$= -\left(f(\sigma(\tfrac{\pi}{2})) - f(\sigma(\tfrac{\pi}{4})) \right)$$

$$= f(\sigma(\tfrac{\pi}{4})) - f(\sigma(\tfrac{\pi}{2}))$$



$$= f\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \right) - f\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{4^3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} \cdot \pi^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{24} \cdot \pi^3$$

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{13}{24} - \frac{7}{192}\pi^3 \quad //$$

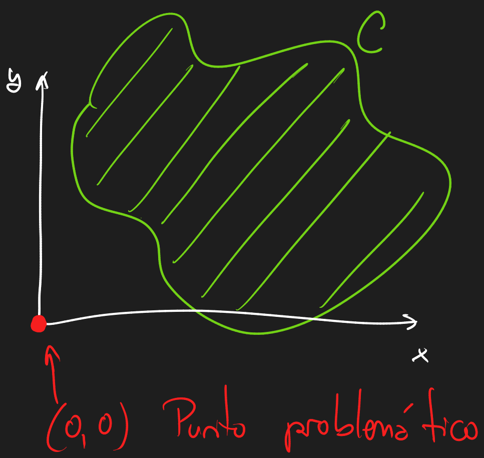
Recordar

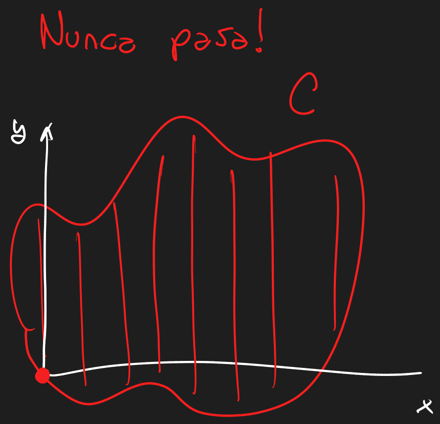
$$\underbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}_{= \cos(2\theta)} \qquad \underbrace{2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}_{\sin(2\theta)}$$

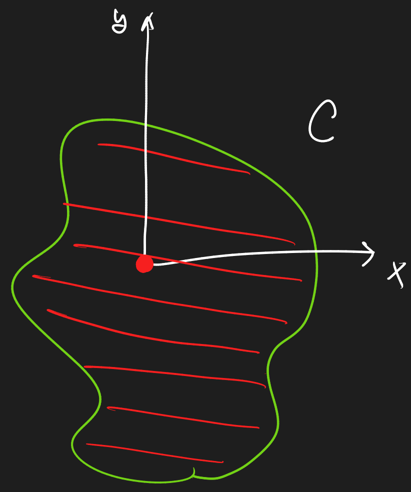
Ejercicio 3. (3 puntos) Sean

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-x^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

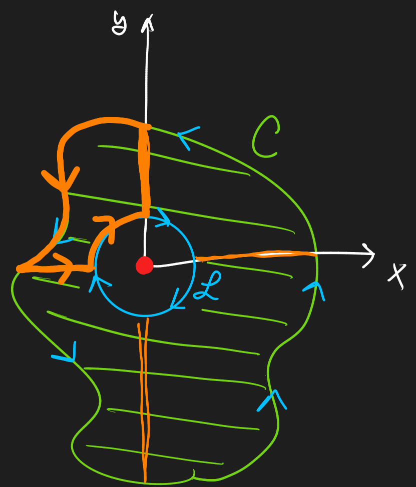
y $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una curva cerrada simple tal que exite una región acotada de tipo 3 que tiene a C como borde. ¿Cuáles son todos los posibles valores de $\int_{C+} \mathbf{F} \cdot d\ell$?







Si $(0,0) \in D \Rightarrow$ lo "esquivo"



Por Green

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\tilde{D}} Q_x - P_y \, dx\, dy$$

$$\tilde{D} = \{ \text{región entre } C \text{ y } \mathcal{L} \}$$

$$Q_x - P_y = 0 \quad (\text{Calculado abajo})$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

Parametrizo $\mathcal{L}^-$ con $\sigma = (\varepsilon . \cos t, \varepsilon . \sin t)$ para algún $\varepsilon > 0$ tal que σ esté contenido en C

$$- \int_{\mathcal{L}} F \cdot d\vec{s} = + \int_{\mathcal{L}^-} F \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \langle \underbrace{F(\varepsilon . \cos t, \varepsilon . \sin t)}_{\underbrace{\left(\frac{\varepsilon^3 . \sin t . \cos^2 t}{\varepsilon^4} , - \frac{\varepsilon^3 . \cos^3 t}{\varepsilon^4} \right)}_{\left(\frac{1}{\varepsilon} \sin t . \cos^2 t , - \frac{1}{\varepsilon} \cos^3 t \right)}}, (-\varepsilon . \sin t, \varepsilon . \cos t) \rangle \, dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} - \sin^2 t . \cos^2 t - \cos^4 t \, dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t . \cos^2 t + \cos^4 t}_{\underbrace{\cos^2 t}_{= \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2}} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}} \, dt$$

$$= - \frac{1}{2} \cdot (t + \sin t . \cos t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= - \pi$$

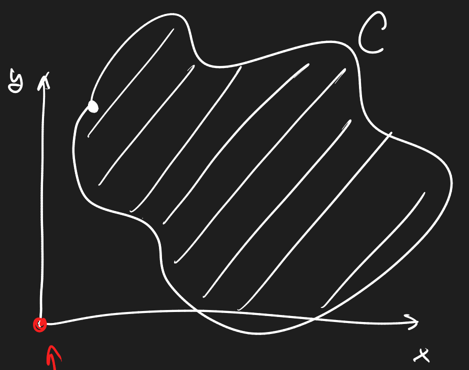
//

$$\boxed{\int_C F \cdot d\vec{s} = - \pi}$$

Ejercicio 3. (3 puntos) Sean

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-x^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

y $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ una curva cerrada simple tal que exite una región acotada de tipo 3 que tiene a C como borde. ¿Cuáles son todos los posibles valores de $\int_{C+} \mathbf{F} \cdot d\ell$?



$(0,0)$ Punto problemático!

- Asumo que $(0,0) \notin D$, siendo D la región que encierra C.

Si $(0,0) \in D \Rightarrow$ No puedo usar Green.

$$Q = -x^3 \cdot (x^2+y^2)^{-2}$$

$$Q_x = -3x^2 \cdot (x^2+y^2)^{-2} + (-x^3) \cdot (-2) \cdot (x^2+y^2)^{-3} \cdot 2x$$

$$= \frac{-3x^2 \cdot (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} + \frac{4 \cdot x^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$Q_x = \frac{-3x^4 - 3x^2y^2 + 4x^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$P = y \cdot x^2 \cdot (x^2+y^2)^{-2}$$

$$P_y = x^2 \cdot (x^2+y^2)^{-2} + y \cdot x^2 \cdot (-2)(x^2+y^2)^{-3} \cdot 2y$$

$$= \frac{x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} - \frac{4y^2 \cdot x^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$P_y = \frac{x^4 + x^2 y^2 - 4x^2 y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$Q_x - P_y = \frac{x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{x^4 - 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= 0$$

Como $F \in \mathcal{C}^1$ en D :

$\Rightarrow$ Por Green :

$$\int_{C^+} F \cdot d\vec{s} = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$\boxed{\int_{C^+} F \cdot d\vec{s} = 0}$$

El único posible valor es cero.

Otra forma : (Si $(0,0) \in D$, región que encierra C)

F es C.Grad y C es curva cerrada

Gradient f(x,y)= 1/2 (-(x y)/(x^2 + y^2) - tan^(-1)(y/x))

$$\Rightarrow \int_C F \cdot ds \overset{\downarrow}{=} 0$$

Result in 2D Cartesian coordinates

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{x\,y}{x^2+y^2} - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \left(\frac{x^2\,y}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

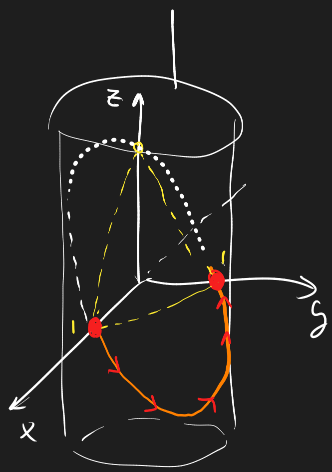
(x: first Cartesian coordinate | y: second Cartesian coordinate)

Ejercicio 4. (3 puntos) Sea $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular simple de

$$\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y + z = 1\}$$

de modo que recorre $\mathcal{C}$ de $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo definido por $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$. Calcular

$$\int_c F ds$$



$x \in [0,1)$

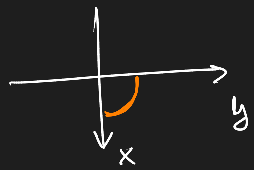
$y^2 = 1 - x^2$

$|y| = \sqrt{1-x^2}$

$y \geq 0$ para toda componente y de C

$y = \sqrt{1-x^2}$

$z = 1 - x - y$



$z = 1 - x - \sqrt{1-x^2}$

$$\sigma(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}, 1 - x - \sqrt{1-x^2}\right) \quad x \in [0,1]$$

Invierte la orientación

Veo si por 4° vez, el ej es con Campo Grad.

Si $f_x = -y^3 \Rightarrow f = -x \cdot y^3 + \varphi(y,z)$ ✗

Si $f_y = x^3 \Rightarrow f = x^3 \cdot y + \tilde{\varphi}(x,z)$

Si $f_z = -z^3 \Rightarrow f = -\frac{1}{4} z^4 + \hat{\varphi}(x,y)$

Ejercicio 4. (3 puntos) Sea $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular simple de

$$\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{x + y + z = 1\}$$

de modo que recorre $\mathcal{C}$ de $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo definido por $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$. Calcular

$$\int_c F ds$$

$$\sigma(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}, 1-x-\sqrt{1-x^2}\right) \quad x \in [0,1]$$

Uso Polares

$$\begin{cases} x = 1.\cos\theta \\ y = 1.\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\theta \geq 0$

$$\tilde{\sigma}(\theta) = \left(\cos\theta, \underbrace{\sqrt{1-\cos^2}}_{\sin\theta}, \underbrace{1-\cos\theta}_{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \sin\theta\right)$$

Stokes?

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0, 0, \underbrace{3x^2 + 3y^2}_{3(x^2+y^2)}\right)$$

Sospechoso! 😳

Como F es C^1, uso Stokes

$$\int_C F \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{L}} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

$\partial S = C \cup \mathcal{L}$

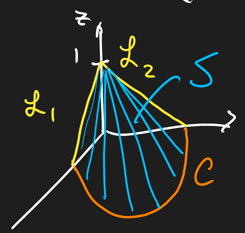
con $\mathcal{L}$ la curva que cierra C

Calculo

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} =$$

Parametrizo S como

$$T(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ 1 - r\cdot\cos\theta - r\sin\theta)$$



$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \langle \underbrace{\nabla \times F(T(r,\theta))}_{} , T_r \times T_\theta \rangle \, dr\, d\theta$$

$$\overset{(0,0,3(x^2+y^2))}{\downarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & \overset{(-)}{j} & k \\ T_r = & (\cos\theta, & \sin\theta, & 1 - \cos\theta - \sin\theta) \\ T_\theta = & (-r\cdot\sin\theta, & r\cdot\cos\theta, & 1 + r\cdot\sin\theta - r\cdot\cos\theta) \end{array}$$

$$\overline{T_r \times T_\theta} = (\ \text{----},\ \text{---},\ r\ )$$

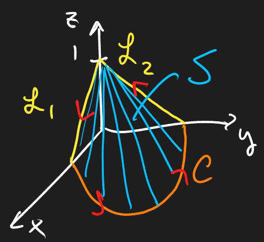
los ignoro

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \int_\theta \int_r \langle (0,0,3r^2), (\text{---}, \text{---}, r) \rangle \, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^1 r^3\,dr$$

$$= \frac{3\pi}{2}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1$$

$$\iint_S \nabla\times F\cdot d\vec{S} = \frac{3\pi}{8}$$



Llamo $\mathcal{L}$ a la unión de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_1$ se parametriza con:

$$\gamma_1(x) = (x, 0, 1-x) \qquad x\in[0,1]$$

Respeta orientación !

$\mathcal{L}_2^-$ se parametriza con:

$$\gamma_2(y) = (0, y, 1-y) \qquad y\in[0,1]$$

Invierte la orientación de $\mathcal{L}_2$

$$\int_{\mathcal{L}_1} F\cdot d\vec{s} = \int_{x=0}^{1} \langle \underbrace{F(x,0,1-x)}_{(0,\,x^3,\,-(1-x)^3)}, (1,0,-1)\rangle\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^3\, dx$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{aligned} u &= 1-x \\ du &= -dx \end{aligned}$$

$$= \int_1^0 -u^3 \, dx$$

$$= \int_0^1 u^3 \, dx = \frac{1}{4} u^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \quad //$$

$$\int_{\mathcal{L}_2} F \cdot d\vec{s} = -\int_{\mathcal{L}_2^-} F \cdot d\vec{s} = -\int_{y=0}^{1} \langle \underbrace{F(0, y, 1-y)}_{(-y^3,\, 0,\, -(1-y)^3)}, (0, 1, -1) \rangle dy$$

$$= -\int_0^1 (1-y)^3 \, dy$$

$$= -\frac{1}{4} \quad //$$

$$\int_{\mathcal{L}} F \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\mathcal{L}_1} F \cdot d\vec{s}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{\mathcal{L}_2} F \cdot d\vec{s}}_{\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= 0$$

$$\int_C F \cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_L F \cdot d\vec{s}}_{=0} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \frac{3}{8}\pi \quad //$$