Integrales de Flujo

Definición .1. *Decimos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $\mathcal{S}$ resulte continua.*

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S}: \quad z = f(x,y)$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Proposición .1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \text{donde } (u,v) \text{ es tal que } P = T(u,v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $\mathcal{S}$. En este caso, decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Definición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$ a la integral*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

Ejercicio 15. Probar la Proposición .2.

Hecho en el pasado.

$\boxed{\text{Dem}}$ Si T preserva la orientación

$$V(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T(u,v) \times T_v(u,v)\|} \qquad P = T(u,v)$$

pero si T invierte la orientación $V(P)$ es el opuesto ya que sólo hay 2 orientaciones porque son 2 vectores unitarios perp al mismo plano tg (son múltiplos entre sí)

$$V(P) = -\frac{T_u \times T_v \,(u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} \qquad P = T(u,v)$$

Como T_1 es una reparam de T, existe G una biyección C^1 con jacobiano no nulo.

$$T_1(u_1, v_1) = T(G(u_1, v_1))$$

T_1 y T tienen la misma orientación si $JG(u_1, v_1) > 0$ $\forall (u_1, v_1) \Rightarrow$

$$V(P) = \frac{T_u \times T_v (u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} = \frac{T_{u_1} \times T_{v_1} (u_1, v_1)}{\|T_{u_1} \times T_{v_1}\|(u_1, v_1)}$$

si $JG(u_1, v_1) < 0 \Rightarrow$

$$v(P) = \frac{T_u \times T_v (u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} = (-) \frac{T_{u_1} \times T_{v_1} (u_1, v_1)}{\|T_{u_1} \times T_{v_1}\|(u_1, v_1)}$$

Entonces al evaluar la integral se tiene que si T y T_1 preservan la orientación:

$$\int_S F \, dS = \int_S \langle F \cdot v(P) \rangle \, dS$$

$$= \iint_D \left\langle F(T(u,v)) \cdot \frac{T_u \times T_v (u,v)}{\cancel{\|T_u \times T_v\|(u,v)}} \right\rangle \cdot \cancel{\|T_u \times T_v\|}(u,v) \, dv \, du$$

$$= \iint_D \langle F(T(G(u_1, v_1))) \cdot T_u \times T_v (G(u_1, v_1)) \rangle \, du \, dv$$

$$= \iint_D \langle F(T_1(u_1, v_1)) \cdot T_{u_1} \times T_{v_1} (u_1, v_1) \rangle \, du \, dv.$$

y si T_1 invierte la orientación

$$= \iint_D \langle F(T(G(u_1, v_1))) \cdot T_u \times T_v (G(u_1, v_1)) \rangle \, du \, dv.$$

$$= \iint_D \langle F(T_1(u_1, v_1)) \cdot (-) T_{u_1} \times T_{v_1} (u_1, v_1) \rangle \, du \, dv.$$

(El menos sale afuera)

$$= (-) \iint_D \langle F(T_1(u_1, v_1)) \, T_{u_1} \times T_{v_1} (u_1, v_1) \rangle \, du \, dv.$$

Queda probada la prop.

Ejercicio 16. Considerar la superficie dada en forma paramétrica por

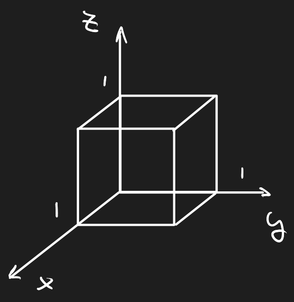
$$\begin{cases} x = t \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\theta \\ y = t \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\operatorname{sen}\theta \qquad t \in [-1,1], \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z = t\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

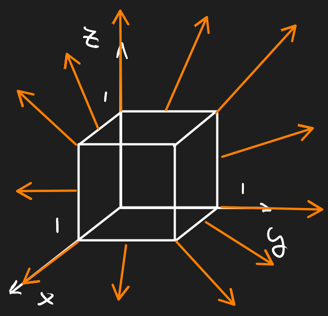
Probar que la superficie obtenida es suave. Observar que se trata de la cinta de Moebius que no es orientable.

- Sup Suave si admite param regular
- Param. regular
  - ⊕ Inyectiva
  - ⊕ $\mathcal{C}^1$
  - ⊕ $T_u \times T_v \neq \vec{0}$

Hacer o buscar hecho

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.





Quiero calcular (para cada cara)

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S \langle F, \eta \rangle \, dS$$

$$= \iint_D \langle F(T_i(u,v)), T_{iu} \times T_{iv} \rangle \, du\, dv$$

Obs:

- Las caras pegadas a los planos xy, xz, yz tienen:

$$\int_{\text{Cara}} F \cdot dS = 0$$

Pues el campo no es saliente en esas caras (los vectores se "apoyan" sobre la cara, no la atraviesan)

- Las otras 3 caras tienen el mismo valor de la integral, pues hay simetría.

$\therefore$ Sola basta parametrizar y calcular alguna de esas 3 caras, para luego multiplicar su valor por 3.

← Tapa / techo

$$T(x,y) = (x, y, 1) \qquad \begin{array}{l} x \in [0,1] \\ y \in [0,1] \end{array}$$

$$T_x \times T_y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & (-) & \quad \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\eta = (0, 0, 1)$$ ← apunta hacia arriba

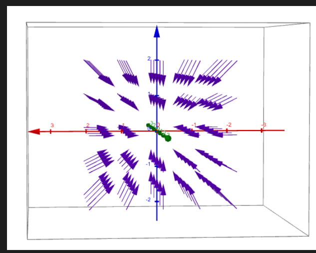
⇒ Preserva la orientación ✓

$$F(T(x,y)) = (x, y, 1)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\langle (x,y,1), (0,0,1) \rangle}_{=1} \, dy\, dx = 1$$

$$\therefore \boxed{\int_S F \cdot dS = 3}$$

Ejercicio 18. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

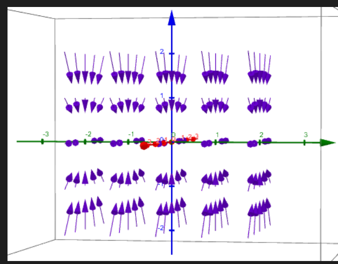


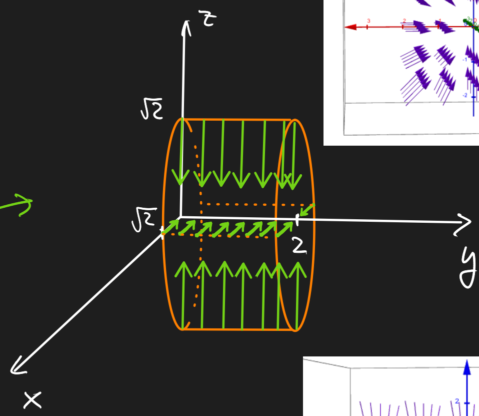
Campo :

$$F(x,y,z) = -\nabla T$$

$$= -(6x, 0, 6z)$$

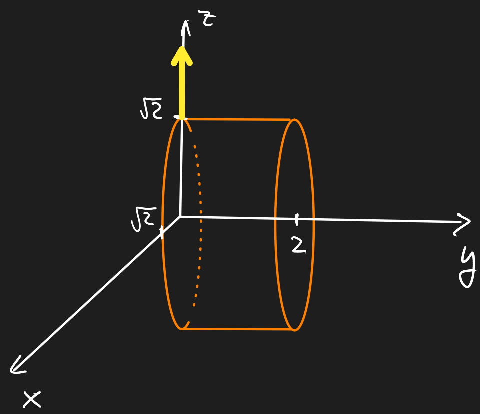
$$= (-6x, 0, -6z)$$





Param :

$$P(\theta, y) = (\sqrt{2}\cos\theta, \ y, \sqrt{2}\sin\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi) \quad y \in [0, 2]$$



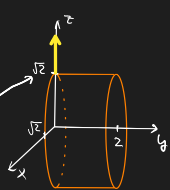
respeta orientación ?

$$P_\theta \times P_y = \begin{array}{ccc} & (-) & \\ \end{array}\left| \begin{matrix} i & j & k \\ -\sqrt{2}\cdot\sin\theta & 0 & \sqrt{2}\cdot\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right|$$

$$= (-\sqrt{2}\cdot\cos\theta, \ 0, \ -\sqrt{2}\cdot\sin\theta)$$

Calculo

ese punto



$$P_\theta \times P_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, -\sqrt{2})$$ Invierte la orientación !

Calculo el flujo de calor

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{2} \langle \underbrace{F(\sqrt{2}\cdot\cos\theta,\ y,\ \sqrt{2}\cdot\sin\theta)}, (-\sqrt{2}\cdot\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\cdot\sin\theta)\rangle\, dy\, d\theta$$

$$= \underbrace{(-6\sqrt{2}\cdot\cos\theta,\ 0,\ -6\sqrt{2}\cdot\sin\theta)}$$

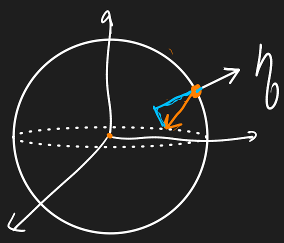
$$= 12\cdot\cos^2\theta + 12\cdot\sin^2\theta$$

$$= 12$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_S F\cdot d\vec{S} &= -4\pi\cdot 12\\ &= -48\pi\end{aligned}}$$

Ejercicio ~~10~~ 18. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta$$



$$F_r = \langle F, \eta \rangle$$

$$: \frac{\langle a, b\rangle}{\|b\|}$$

esféricas :

$$T(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cdot\sin\varphi,\ \sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \cos(\varphi)) \qquad \begin{array}{l}\theta\in[0,2\pi)\\ \varphi\in[0,\pi)\end{array}$$

hecho en ej 5

$$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\cdot\sin^2\varphi,\ -\sin\theta\cdot\sin^2\varphi,\ -\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$$

$$\|T_\theta\times T_\varphi\| = \sqrt{\sin^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}$$

$$= \sqrt{\sin^2\varphi} \underset{\varphi\in[0,\pi)}{=} \sin\varphi$$

$$F_r = \langle F, \eta \rangle$$ normal a la esfera en cada punto de la sup

$$= \left\langle F, \frac{T_\theta\times T_\varphi}{\|T_\theta\times T_\varphi\|}\right\rangle$$

$$= \left\langle F, \frac{T_\theta\times T_\varphi}{\sin\varphi}\right\rangle$$

$$\int_S F\cdot d\vec{S} = \int_S F\cdot\eta\, dS = \int_S \langle F,\eta\rangle\, dS$$

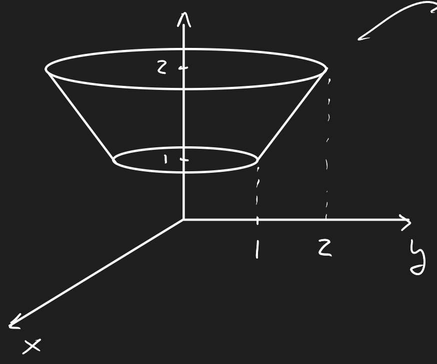
$$= \int_{\varphi}\int_{\theta} \left\langle F(T(\theta,\varphi)), \frac{T_\theta \times T_\varphi}{\|T_\theta \times T_\varphi\|} \right\rangle \cdot \|T_\theta \times T_\varphi\| \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi}\int_{\theta} \left\langle F(T(\theta,\varphi)), \quad \eta \quad \right\rangle \cdot \|T_\theta \times T_\varphi\| \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi}\int_{\theta} \qquad F_r \qquad \cdot \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$\boxtimes$

Ejercicio 20. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.



Como curva:

$$\sigma(x) = (x, x) \qquad x \in [1, 2]$$

Como sup de rev:

$$T(x, \theta) = (x \cdot \cos\theta,\ x \cdot \sin\theta,\ x)$$

$x \in [1, 2]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \int_{x=1}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle F(T(x, \theta)), T_x \times T_\theta \rangle \, d\theta \, dx$$

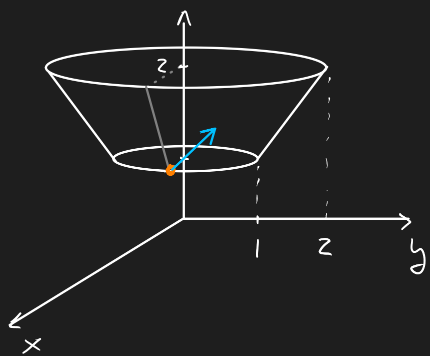
$$T_x \times T_\theta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & (-) & \quad \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -x \cdot \sin\theta & x \cdot \cos\theta & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \Big(-x \cdot \cos\theta,\ -x \cdot \sin\theta,\ \underbrace{x \cdot \cos^2\theta + x \cdot \sin^2\theta}_{= x}\Big)$$

Veo orientación:

Analizo $(x, \theta) = (1, 0)$

$$T_x \times T_\theta (1, 0) = (-1, 0, 1)$$



Invierte la orientación!

Como invierte la orientación

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = -\int_1^2 \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{(x^2 \cdot \cos^2\theta, x^2 \cdot \sin^2\theta, x^2), (-x \cdot \cos\theta, -x \cdot \sin\theta, x)}\rangle \, d\theta dx$$

$$= -x^3 \cdot \cos^3\theta - x^3 \cdot \sin^3\theta + x^3$$

$$= x^3 \cdot (1 - \cos^3\theta - \sin^3\theta)$$

$$= -\int_{x=1}^2 x^3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 - \cos^3\theta - \sin^3\theta}_{\text{separo en 3 integrales}}$$

$$= -\int_{x=1}^2 x^3 \cdot \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta}_{=2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{\mathrm{II}} \right)$$

I :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\theta) \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$$u = \sin\theta$$

$$du = \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \int_0^0 1-u^2 \cdot du$$

mismo punto

$$= 0$$

II $$\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$u = \cos\theta$$

$$du = -\sin\theta \, d\theta$$

$$= -\int_1^1 1-u^2 \cdot du$$

$$= 0$$

Finalmente

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -2\pi \int_{x=1}^{2} x^3 \cdot dx$$

CA

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{4} x^4 = \frac{4}{4} \cdot x^3$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[x^4 \right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}\pi \left(16 - 1 \right)$$

$$\boxed{\int_S F \cdot d\vec{S} = -\frac{15}{2}\pi}$$

Ejercicio 21. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Falta que $F \in \mathcal{C}^1$

Idea:
* Curva cerrada con campo gradiente da cero
* Derivadas dobles cruzadas de una función C^2 son iguales

$$\nabla \times F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (-) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \left(R_y - Q_z ,\ P_z - R_x ,\ Q_x - P_y \right)$$

Como

$$F = \nabla f \Rightarrow (P, Q, R) = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = f_x \\ Q = f_y \\ R = f_z \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^2$ pues $F \in \mathcal{C}^1$

$$\Rightarrow \quad R_y - Q_z = f_{zy} - f_{yz} = 0 \ \checkmark$$

$$P_z - R_x = f_{xz} - f_{zx} = 0 \ \checkmark$$

$$Q_x - P_y = f_{yx} - f_{xy} = 0 \ \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times F = (0, 0, 0)$$

$$\therefore \quad \int_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$$

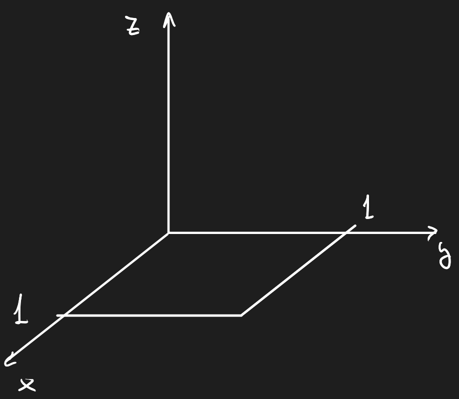
y como C es cerrada y F es campo grad.

$$\int_C F \cdot ds = 0$$

Finalmente

$$\boxed{\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_C F \cdot ds}$$

Ejercicio 22. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.



$$f_x = x \Rightarrow f = 2x^2 + \varphi(y,z)$$

$$f_y = x^2 \Rightarrow f = x^2 \cdot y + \tilde{\varphi}(x,z)$$

$$f_z = yx^2 \Rightarrow f = x^2 \cdot y \cdot z + \tilde{\tilde{\varphi}}(x,y)$$

No sé si es campo gradiente!

Parametrizo S (cuadrado en XY):

$$T(x,y) = (x, y, 0) \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} x \in [0,1] \\ y \in [0,1] \end{array}$$

Integro

$$\int_S F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^1 \langle F(T(x,y)), T_x \times T_y \rangle \, dy\, dx$$

$$T_x \times T_y = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$\int_S F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^1 \langle F(x,y,0), (0,0,1) \rangle \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \langle (x, x^2, yx^2), (0,0,1) \rangle \, dy\, dx$$

$$= \iint yx^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 y\, x^2 \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 y\, dy}_{\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$\therefore$

$$\boxed{\int_S F \cdot dS = \frac{1}{6}}$$

Circulan 1/6 metros cubicos de fluido por segundo a través de ese cuadrado