Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 6: Ecuaciones de 2do. orden y sistemas de primer orden.

Ejercicio 1. Hallar la solución general $(x_1(t), x_2(t))$ de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

a) $X' = A \quad X$

Coeficientes constantes

No hay termino independiente $(b) \Rightarrow$ Homogenea.

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cambia en cada ejercicio

Siempre iguales

Busco
1- Autovalores de A
2- Autovectores de A

1- Autovalores: Raíces del Polinomio Característico de A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\lambda(3-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \quad \leftarrow \text{Busco raíces con}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Caso $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$

2. Autovectores

$$A v = \lambda v \iff (A - \lambda I) v = 0$$

$\lambda_1 = 1$:

$$A v = 1 v \iff (A - 1 I) v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0-1 & -1 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Si } v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -1$$

$\therefore \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad$ con $\quad \lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$:

$$A\omega = 2\omega \iff (A - 2I)\,\omega = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0-2 & -1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\omega_1 - \omega_2 = 0 \\ 2\omega_1 + \omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{si } \omega_1 = 1 \Rightarrow \omega_2 = -2$$

$\therefore \quad \omega = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad$ con $\quad \lambda_2 = 2$

Obtuve

$$\left.\begin{aligned} X_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{t} \\ X_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} \end{aligned}\right\}$$

Soluciones li

Forman una base de soluciones

$\Rightarrow$ Con la base, armo sol. general

$$\boxed{X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{t} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} \qquad a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Si } t \to \infty : \quad \left.\begin{array}{l} e^{t} \to \infty \\ e^{2t} \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 0$$

$$\text{Si } t \to -\infty : \quad \left.\begin{array}{l} e^{t} \to 0 \\ e^{2t} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$$

(cualquier valor)

(b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Autovalores

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -8-\lambda & -5 \\ 10 & 7-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-8-\lambda)(7-\lambda) + 50 = 0$$

$$-56 + 8\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 50 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\text{calc}) \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -8-2 & -5 \\ 10 & 7-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -10v_1 - 5v_2 = 0 \\ 10v_1 + 5v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Si } v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -2$$

$$\therefore \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} -8+3 & -5 \\ 10 & 7+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Si } w_1 = 1 \Rightarrow w_2 = -1$$

$$\therefore \ w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obtuve

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Sol grd:

$$X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot e^{2t} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-3t} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A - \lambda I = \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (-4-\lambda)(1-\lambda) + 6$$

$$= -4 + 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 6$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$P(\lambda) = (A - \lambda I) . v = 0$$

Si $\lambda_1 = -1$

$$\begin{bmatrix} -4+1 & 3 \\ -2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -3v_1 + 3v_2 &= 0 \\ -2v_1 + 2v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Si } v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 1$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix} -4+2 & 3 \\ -2 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2\omega_1 + 3\omega_2 = 0 \Rightarrow \text{Si } \omega_1 = 3 \Rightarrow \omega_2 = 2$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obtuve

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot e^{-2t}$$

Sol grl

$$X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + b \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot e^{-2t} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & -3 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Jeje ... chau ♡

1.1. Autovalores

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & \boxed{3} \\ 2 & \lambda-1 & \boxed{0} \\ 2 & -3 & \boxed{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & \lambda-1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \cdot (\lambda+2) \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 \\ 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= 3[(-2\cdot 3) - (2(\lambda-1))] + (\lambda+2)[(\lambda+1)(\lambda-1) + 6]$$

$$= 3(-6 - 2\lambda + 2) + (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) + (\lambda+2)\cdot 6$$

$$= -18 - 6\lambda + 6 + (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) + (\lambda+2)\cdot 6$$

$$= \cancel{-12} \cancel{- 6\lambda} + \text{''} + \cancel{6\lambda} \cancel{+12}$$

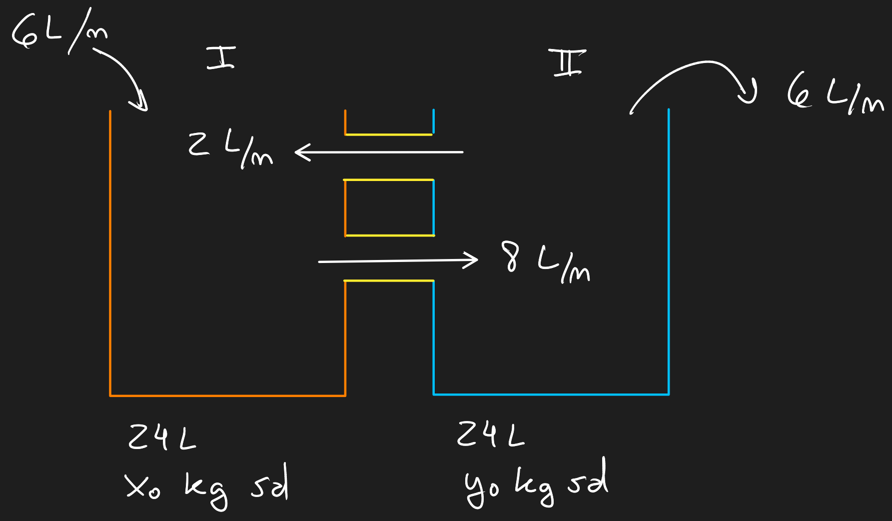
$$= (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

↳ $\lambda_1 = 1$

↳ $\lambda_2 = -1$

↳ $\lambda_3 = -2$

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 Kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque.?



Ver resuelto.

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i \end{cases} \in \mathbb{C} \text{ ¡!}$$ (notar que son conjugados)

Busco autovectores (también conjugados!)

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda I)v = 0$$

$\lambda_1 = 1+i$

$$\begin{bmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-i v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow$ si $v_1 = -1 \Rightarrow v_2 = i$

$i \cdot v_1 = -v_2$

$-i = -v_2$

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix}$$

Por propiedad de soluciones en $\mathbb{C}$

Si $\lambda_2 = 1-i$

$$w = \bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Nota que quedaría

$+i v_1 \quad - v_2 \quad = 0$

$i v_1 = v_2$

Obtuve una base de soluciones $\in \mathbb{C}$!

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} . e^{(1+i).t}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} . e^{(1-i).t} = t - it$$

$$t + i \cdot (-t$$

Busco base $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Elijo X_1 ó X_2 y separo en parte Re y parte Im

usando que

$$\boxed{\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i . \sin t \\ e^{it+c} &= e^{it} . e^{c} \\ e^{it+c} &= e^{c} . \left(\cos t + i . \sin t\right) \end{aligned}}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} . e^{(1+i).t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \cdot e^{t+it}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \cdot e^{t} \cdot \left(\cos t + i \cdot \sin t \right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} \cdot \cos t + i \cdot e^{t} \cdot \sin t \\ -i \cdot e^{t} \cdot \cos t - i^{2} \cdot e^{t} \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{t} \cdot \cos t + i \cdot e^{t} \cdot \sin t \\ -i \cdot e^{t} \cdot \cos t + e^{t} \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t} \cdot \cos t \\ e^{t} \cdot \sin t \end{bmatrix}}_{\substack{Re(X_1) \\ \| \\ \tilde{X}_1}} + i \underbrace{\begin{bmatrix} e^{t} \cdot \sin t \\ -e^{t} \cdot \cos t \end{bmatrix}}_{\substack{Im(X_1) \\ \| \\ \tilde{X}_2}}$$

Obtuve una base de soluciones en $\mathbb{R}$

$$\{ \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 \}$$

Sol. gral:

$$X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} e^{t} \cdot \cos t \\ e^{t} \cdot \sin t \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} e^{t} \cdot \sin t \\ -e^{t} \cdot \cos t \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \cdot e^{t} + b \cdot e^{t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 + 2i \\ \lambda_2 = 2 - 2i \end{cases}$$

Busco o autovector

$$(A - (2+2i)) \cdot v = 0$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{2-(2+2i)}^{-2i} & -1 \\ 4 & \underbrace{2-(2+2i)}_{-2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2i\, v_1 - v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2i\, v_1 = v_2$$

$$4 v_1 - 2i\, v_2 = 0$$

Si $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = -2i$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Obtuve un elemento de la base de soluciones en $\mathbb{C}$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot e^{(2+2i)t}$$

Busco $Re(X_1)$ e $Im(X_1)$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot e^{2t} \cdot e^{i \cdot 2t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot e^{2t} \cdot \left(\cos 2t + i \cdot \sin 2t \right)$$

$$= e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t + i \cdot \sin 2t \\ -2i \cdot \cos 2t + 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix}}_{\tilde{X}_1} + i \cdot \underbrace{e^{2t} \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}}_{\tilde{X}_2}$$

Sol. grl:

$$X(t) = a \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix} \cdot e^{2t} + b \cdot \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix} \cdot e^{2t}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 0 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Autovalor doble !

Autovector v

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A v = \lambda v$$

$$(A - \lambda I) v = 0$$

$$(A - 2I) v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = C_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para buscar $X_2(t)$, planteo

$$X_2(t) = C_2 \cdot e^{\lambda t} \cdot (w + t \cdot v)$$

lo único que no tengo

Busco w tal que

$$(A - \lambda I) \cdot w = v$$

$$(A - 2I) \cdot w = v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = 1$$

$$\therefore \; w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = C_2 \cdot e^{2t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Sol grl:

$$X(t) = C_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{2t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -4 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-5-\lambda)(7-\lambda) - (-36) = 0$$

$$-35 + 5\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Autovectores

$$A v = \lambda v \iff (A - \lambda I) v = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-6v_1 + 9v_2 = 0$$
$$-4v_1 + 6v_2 = 0$$

$\Rightarrow \quad 2v_1 = 3v_2$

Si $v_1 = 3 \Rightarrow v_2 = 2$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = C_1 . e^{t} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Para obtener X_2 :

Busco ω tal que

$$(A - \lambda I).\omega = v$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-6\omega_1 + 9\omega_2 = 3 \overset{*1/3}{\Rightarrow} -2\omega_1 + 3\omega_2 = 1$$

$$-4\omega_1 + 6\omega_2 = 2$$

Si $\omega_1 = 1$

$$3\omega_2 = 1 + 2$$

$$\omega_2 = 1$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = C_2 . e^{t} . \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$X(t) = C_1 . e^{t} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 . e^{t} . \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

a) Resuelvo Homogéneo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda \cdot (3-\lambda) + 2 = 0$$

$$-3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

Autovectores

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1)$

$$\left(A - 1 . I\right) . v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_1 = -v_2$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2)$ $\quad (A - 2.I)\, w = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2w_1 = w_2 \Rightarrow \text{Si } w_1 = 1 \Rightarrow w_2 = -2$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluciones del Homogéneo:

$$X_1(t) = C_1 . e^{t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$X_2(t) = C_2 . e^{2t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$X_H(t) = C_1 . e^{t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 . e^{2t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sabemos que

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$$

Busco Sol. Particular $X_p(t)$ con método de var. de ctes.

$$Q(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ X_1(t) & X_2(t) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$Q(t) \cdot \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = b(t)$$

$$\begin{bmatrix} e^{t} \cdot 1 & e^{2t} \cdot 1 \\ e^{t} \cdot (-1) & e^{2t} \cdot (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{X_1(t)} \qquad \underbrace{\qquad}_{X_2(t)}$$

$$\begin{bmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ -e^{t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{t} \cdot C_1' + e^{2t} \cdot C_2' = 2 \\ -e^{t} \cdot C_1' - 2e^{2t} \cdot C_2' = t \end{cases}$$

Busco despejar C_1' ó C_2'

Sumo ambas

$$\begin{array}{rl} & e^{t} \cdot C_1' + e^{2t} \cdot C_2' = 2 \\ + & -e^{t} \cdot C_1' - 2e^{2t} \cdot C_2' = t \\ \hline & 0 \quad - e^{2t} \cdot C_2' = 2 + t \end{array}$$

$$C_2' = -e^{-2t} \cdot (2 + t)$$

$$C_2' = -2e^{-2t} - t \cdot e^{-2t}$$

Integro

$$\int C_2' \, dt = C_2$$

$$\int -2e^{-2t} - t.e^{-2t}\, dt =$$

$\times 2$

CA

$$\frac{d}{dt}\, t.e^{-2t} = e^{-2t} + t.(-2).e^{-2t}$$

$$2.C_2 = \int -4e^{-2t} - 2t.e^{-2t}\, dt$$

$$= \int -5e^{-2t} + e^{-2t} - 2t.e^{-2t}\, dt$$

$$= \int -5e^{-2t}\, dt + \int e^{-2t} - 2t.e^{-2t}\, dt$$

$$= \frac{5}{2}.e^{-2t} + t.e^{-2t} + a$$

CA

$$\frac{d}{dt}\frac{5}{2}e^{-2t} = -\frac{5}{2}.2e^{-2t}$$

Si $a=0$

$$2.C_2(t) = \frac{5}{2}.e^{-2t} + t.e^{-2t}$$

$$\boxed{C_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}\left(\frac{5}{2} + t\right)}$$

Despejo C_1'

$$\begin{array}{rl} & 2.(e^{t}.C_1' + e^{2t}.C_2') = 2.2 \\ + & -e^{t}.C_1' - 2e^{2t}.C_2' = t \\ \hline & e^{t}.C_1' + 0 = 4+t \end{array}$$

$$C_1' = e^{-t}\cdot(4+t)$$

$$C_1' = 4e^{-t} + t\cdot e^{-t}$$

CA

$$\frac{d}{dt} -t.e^{-t} = -e^{-t} + te^{-t}$$

$$\int C_1' dt = C_1$$

$$= \int 5e^{-t} - e^{-t} + t.e^{-t} \, dt$$

CA

$$\frac{d}{dt} -5e^{-t} = +5e^{-t}$$

$$= -5e^{-t} - t.e^{-t} + d$$

si $d = 0$

$$C_1(t) = -e^{-t}\cdot(5+t)$$

6°

Como

$$X_H(t) = C_1 . e^{t}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + C_2 . e^{2t}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$X_p(t) = -e^{-t}\cdot(5+t) \cdot e^{t}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\left(\frac{5}{2}+t\right) . e^{2t}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$X_p(t) = -(5+t)\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+t\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5 - t + \frac{5}{4} + \frac{t}{2}\\ 5 + t - \frac{5}{2} - t\end{bmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{t}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} - \frac{t}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = X_H + X_p$$

$$\boxed{X(t) = C_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} - \frac{t}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resuelvo Homogéneo:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= 2 \pm \frac{4i}{2}$$

$$= 2 \pm 2i$$

Auto vectores

$\lambda_1 = 2 + 2i$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(A - (2+2i)I\right) v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-2-2i & -1 \\ 4 & 2-2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2i\,v_1 - v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2i \cdot v_1$$

$$4v_1 - 2i v_2 = 0 \qquad \text{Si } v_1 = 1$$

$$v_2 = -2i$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = C_1 \cdot e^{(2+2i)t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Lo descompongo en $Re(X_1)$ e $Im(X_1)$

$$e^{(2+2i)t} = e^{2} \cdot e^{2it}$$

$$= e^{2} \cdot \left(\cos(2t) + i \cdot \sin(2t) \right)$$

$$\Rightarrow e^{2} \cdot \left(\cos(2t) + i \cdot \sin(2t) \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos(2t) + i \cdot \sin(2t) \\ -2i \cdot \cos(2t) + 2 \cdot \sin(2t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{e^{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix}}_{Re} + i \cdot \underbrace{e^{2} \cdot \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}}_{Im}$$

$$X_H(t) = C_1 \cdot e^2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix}}_{\tilde{X}_{H1}} + C_2 \cdot e^2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}}_{\tilde{X}_{H2}} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Busco X_p con Método d. V. de Cte.

Sea $Q(t) = \begin{bmatrix} | & | \\ \tilde{X}_{H1} & \tilde{X}_{H2} \\ | & | \end{bmatrix}$

Si

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot e^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix} + C_2(t) \cdot e^2 \cdot \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}$$

y como $\det Q \neq 0$ (pues sus columnas son li)

$$\Rightarrow \quad Q \cdot \begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = b(t)$$

$$e^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ 2 \cdot \sin 2t & -2\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e^2 \cdot \cos 2t \cdot C_1' + e^2 \cdot \sin 2t \cdot C_2' = e^{2t} \\ 2 \cdot e^2 \cdot \sin 2t \cdot C_1' - 2 \cdot e^2 \cdot \cos 2t \cdot C_2' = 4 \end{cases}$$

Quiero despejar C_1' ó C_2'

$* \, 2.\sin 2t$

$$e^2 \cdot \cos 2t \cdot C_1' + e^2 \cdot \sin 2t \cdot C_2' = e^{2t}$$

$* \, \cos 2t$

$$2 \cdot e^2 \cdot \sin 2t \cdot C_1' - 2 \cdot e^2 \cdot \cos 2t \cdot C_2' = 4$$

$$\begin{cases} 2\, e^2 \cdot \sin 2t \, \cos 2t \cdot C_1' + 2e^2 \cdot \sin^2 2t \cdot C_2' = 2 e^{2t} \sin 2t \\ 2 \cdot e^2 \cdot \sin 2t \cdot \cos 2t \; C_1' - 2 \cdot e^2 \cdot \cos^2 2t \cdot C_2' = 4 \cdot \cos 2t \end{cases}$$

Resto

$$+ \, 2e^2 \cdot \sin^2 2t \cdot C_2' = 2 e^{2t} \sin 2t$$

$$- \quad - \, 2 \cdot e^2 \cdot \cos^2 2t \cdot C_2' = 4 \cdot \cos 2t$$

$$0 + 4 e^2 \cdot \left(\sin^2 2t + \cos^2 2t\right) \cdot C_2' = 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin 2t - 4 \cos 2t$$

$$4 \cdot e^2 \cdot C_2' = 2 \cdot e^{2t} \cdot \sin 2t - 4 \cos 2t$$

$$C_2' = \frac{1}{2} e^{-2} \cdot \left(e^{2t} \cdot \sin 2t - 2 \cdot \cos 2t\right)$$

$$C_2' = \frac{1}{2} e^{2t-2} \cdot \sin 2t - e^{-2} \cdot \cos 2t$$

Horrible!

$$\int C_2' \, dt = C_2 = \int \frac{1}{2} e^{2t-2} \cdot \sin 2t - e^{-2} \cdot \cos 2t \; dt$$

$$\int \left(\frac{1}{2} e^{2t-2} \sin(2t) - \frac{\cos(2t)}{e^2} \right) dt = \frac{\left(e^{2t} - 4\right) \sin(2t) - e^{2t} \cos(2t)}{8 e^2} + \text{constant}$$

elijo constante $=0$

$$C_2(t) = \frac{(e^{2t}-4)\sin(2t) - e^{2t}\cos(2t)}{8e^2}$$

$$C_1(t) = \ldots$$

$$\Rightarrow X_p(t) = C_1(t) \cdot e^2 \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cdot \sin 2t \end{bmatrix} + C_2(t) \cdot e^2 \cdot \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}$$

$\vdots$ Calculo

Sol general

$$X(t) = X_H + X_p$$