Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2021 – Recuperatorio Primer Parcial – 25/03/21

1) Sea C la imagen de la parametrización $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(t^2, \sqrt{1-t^4}\right)$.
   a) ¿Es γ una parametrización regular de C? ¿Por qué? Si la respuesta es no, mostrar una parametrización regular de la curva.
   b) Calcular la longitud de la curva C.

a) Regular si:

- $\gamma \in \mathcal{C}^1$ pues componentes $\mathcal{C}^1$
- $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [-1,1]$?

$$\gamma'(t) = \left(2t, \frac{1}{2\sqrt{1-t^4}} \cdot -4t^3\right) = 0 \text{ si } t = 0$$

- $\gamma(t)$ <u>no</u> es inyectiva pues

$$\gamma(-1) = \gamma(1) = (1,0)$$

Como los valores entre $[-1,0]$ y $[0,1]$ varían solo en el signo, y además

$$\begin{cases} x^2 = (-x)^2 & \forall x \in [0,1] \\ x^4 = (-x)^4 & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Puedo usar un $t \in [0,1]$ y mantener la misma param.

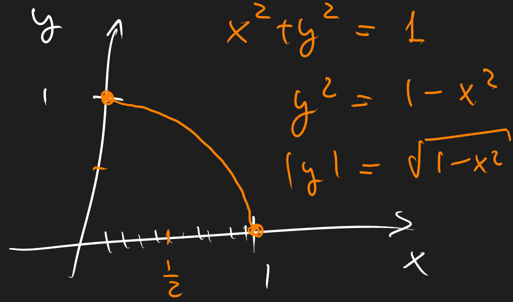
Propongo usar

t en vez de t^2

y t^2 en vez de t^4

De esta manera, mantengo el conjunto de valores en los que se mueve cada uno, y tamb. mantengo su relación.

$$\sigma(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \quad t \in [0,1]$$



Es regular pues

- es C^1 ✓
- $\sigma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [0,1]$
- es inyectiva pues su 1° coordenada es la identidad.

Veo si

$$\gamma \subseteq \sigma$$

Sea $t_0 \in [-1,1] \;/\; \gamma(t_0) \in \left\{ \left(t^2, \sqrt{1-t^4}\right) : t \in [-1,1] \right\}$

qvq $\sigma(t_0) \in \left\{ \sigma(t) : t \in [0,1] \right\}$

Tengo $\left(t_0^2, \sqrt{1-t_0^4}\right)$ con $t_0 \in [-1,1]$

Si $t = t_0^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)}_{=\sigma(t)} \quad \text{con } t \in [0,1]$$

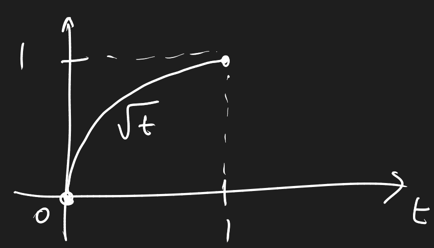
$\therefore \gamma(t) \subseteq \sigma(t)$

$\sigma(t) \subseteq \gamma(t)$

Sea $t_0 \in [0,1] \,/\, \sigma(t_0) = \left(t_0, \sqrt{1-t_0}\right)$

q.v.q. $\gamma(t_0) \in \{\gamma(t) : t \in [-1,1]\} = C$

Como $\sigma(t_0) = \left(t_0, \sqrt{1-t_0}\right)$ $\quad t_0 \in [0,1]$



Si $t^2 = t_0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(t^2, \sqrt{1-t^2}\right)}_{=\gamma(t)} \quad \text{con } t \in [-1,1]$$

pues $t^2 = t_0$

$|t| = \sqrt{t_0}$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} &\sigma(t_1) \subseteq \gamma(t_2) \\ y \quad &\gamma(t_2) \subseteq \sigma(t_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma(t_1) = \gamma(t_2)$$

$t_1 \in [0,1]$

$t_2 \in [-1,1]$

b) $\frac{1}{4} \cdot D_{r=1} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$ //

Otra forma

$$\sigma(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\sigma'(t) = \left(1, \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}\right) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

Uso Polares

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \|\varphi'(t)\| \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dt = \frac{\pi}{2} \; //$$

2) Sea C la curva plana definida y orientada por $\sigma(t) = (t, f(t))$ con $t \in [0,3]$, donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no negativa de clase C^1. Considerar el capo vectorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$. Sabiendo que $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s} = -4$ y que $f(3) = 1$, calcular

$$\int_0^3 f(x)dx$$

$$\int_{t=0}^{3} \langle \underbrace{F(t, f(t))}_{(-f(t),\, t)}, (1, f'(t)) \rangle \, dt = -4$$

$$\int_0^3 -f(t) + t \cdot f'(t) \, dt = -4$$

$$\int_0^3 -f(t) \, dt + \int_0^3 t \cdot f'(t) \, dt = -4$$

$$u = t \qquad du = 1 \cdot dt$$

$$v = f(t) \qquad dv = f'(t) \, dt$$

Partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int t \cdot f'(t) \, dt = t \cdot f(t) - \int f(t) \cdot dt$$

Volviendo

$$\int_0^3 -f(t) \, dt + \int_0^3 t \cdot f'(t) \, dt = -4$$

$$-2 \cdot \int_0^3 f(t) dt + \underbrace{t \cdot f(t) \Big|_0^3}_{} = -4$$

$= 3.1$

$$-2 \int_0^3 f(t)\,dt = -4 - 3 = -7$$

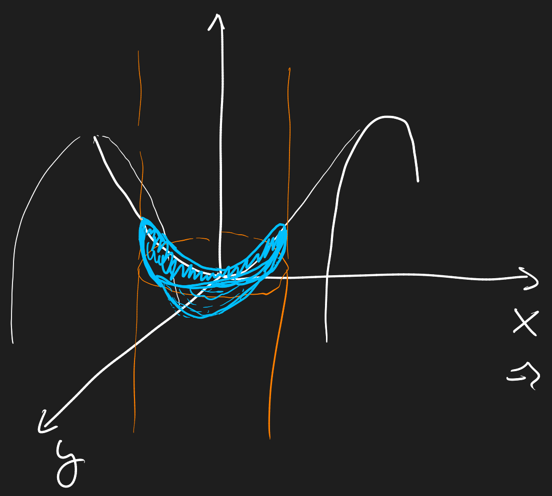
$$\int_0^3 f(t)\,dt = \frac{7}{2}$$

//

3) Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z negativa.

a) Hallar el área de S.

b) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de S.



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Extremos del Cilindro ∩ Parab. Hip.

$z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta \\ y^2 = r^2 \cdot \sin^2\theta \end{cases}$$

Cilindricas

$$x^2 + y^2 \overset{\downarrow}{=} r^2 \leq 1$$

Cil.

$$2z = x^2 - y^2 \overset{\downarrow}{\Rightarrow} 2z = r^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$z = \frac{r^2}{2} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$T(r, \theta) = \left(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, \frac{r^2}{2} \overbrace{\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}^{2\cos^2\theta - 1}\right)$$

$r \in [0, 1]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{array}{cccc} & i & \overset{(-)}{j} & k \\ T_r = & \cos\theta & \sin\theta & r \cdot (2\cos^2\theta - 1) \\ T_\theta = & -r \cdot \sin\theta & r \cdot \cos\theta & -4 \cdot r \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \end{array}$$

$$T_r \times T_\theta = \left(-4r \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\theta - r^2 \cdot (2 \cdot \cos^3\theta - \cos\theta)\right.,$$

$$-\left(-4\, r\cdot \cos^2\theta \cdot \sin\theta + r^2\cdot\left(2\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin\theta\right)\right),$$

$$r\;)$$

(Apunta hacia arriba pues $r > 0$

$\Rightarrow$ invierte la orientación.

$$\left(T_r \times T_\theta\right)^2 = \left(\quad r\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta + r^2\cdot\left(2\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin\theta\right)\right.$$

Norm [{cos t, sin t, r (2 cos^2 t - 1)}x{-r*sin t, r*cos t, -4r*cos t sin t}]

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPL

Input

$\|\{\{\cos(t), \sin(t), r\,(2\cos^2(t)-1)\}\; x\; \{-r\sin(t), r\cos(t), -4\, r\cos(t)\sin(t)\}\}\|$

||expr|| gives the norr

Result

$\sqrt{(16 r^2\, x\, (r^*)^2 \sin(t)\cos(t)\,(2\cos^2(t)-1)\,(2\,(\cos(t)^*)^2-1)\,(x\cos(t)\sin(t))^* + 2\, r\, x \sin(t)\cos(t)\,(r\, x\cos(t)\sin(t))^*)}$

Alternate form assuming r, t, and x are real

$|r|\,|x|\,\sqrt{r^2\sin^2(4\,t) + \sin(t)\sin(2\,t)\cos(t)}$

$$\int_{C=\partial S} F\cdot ds = \iint_S \operatorname{rot} F\, dS$$

$$\text{Si } \operatorname{rot} F = 1$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} F\, dS = \text{Área}(S)$$

$$\text{si } F = (-y, x, 0)$$

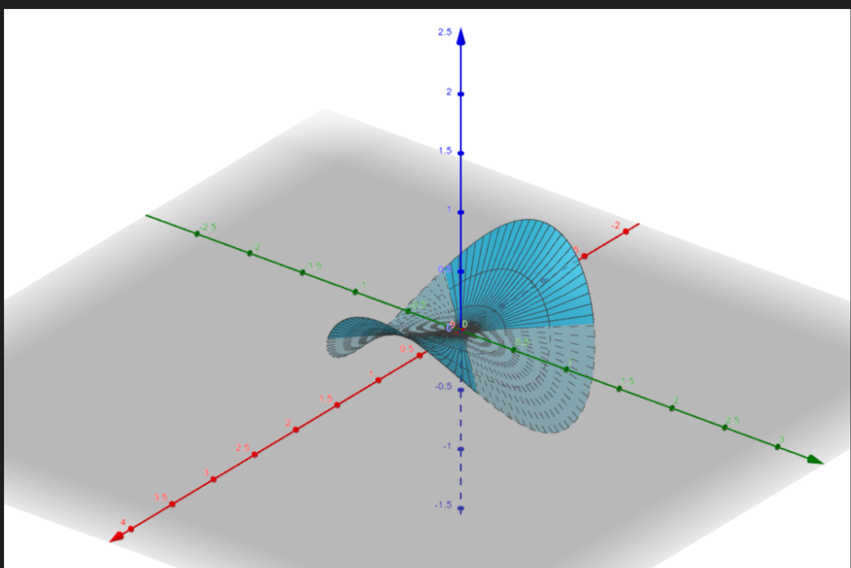
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0,\ 0,\ 1+1) = (0,0,2)$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} F\, dS = \int_\theta \int_r 2 \cdot r \cdot r \cdot dr\, d\theta$$

$$= 2 \int$$

Pruebo con otra param



Lo parametrizo como

3) Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z negativa.
   a) Hallar el área de S.
   b) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de S.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \cdot \sin^2\varphi \leq 1$$

$$2 \cdot \cancel{r} \cdot \cos\varphi = r^{\cancel{2}} \cdot \sin^2\varphi \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$2 \cos\varphi = r \cdot \sin^2\varphi \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$r \in [0, f(\theta) \text{ ó } f(\varphi)]$

$\sin^2\varphi \neq 0$

$\varphi \in [-g(\theta), g(\theta)]$

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$\frac{\cos\varphi}{1 - \cos^2\varphi} =$$

$$T(x, y) = \left(x, y, \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) \quad \text{con} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$x \in [-1, 1]$$

$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y(x) \leq \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{array}{cccc} & i & \overset{(-)}{j} & k \\ T_x = & 1 & 0 & x \\ T_y = & 0 & 1 & -y \end{array}$$

$$T_x \times T_y = \left(-x, -(-y), 1\right)$$

$$= \left(-x, y, 1\right)$$

$$\|T_x \times T_y\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$$

$$\eta = \frac{(-x,\ y,\ 1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

Por Gauss

$$\int_{C=\partial S} F \cdot ds = \iint_S \nabla \times F \, dv$$

$$= \int_C F \cdot \eta \, ds$$

$$=$$

$$\iint_{D=\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{x^2+y^2+1} \; dx\,dy$$

Polares

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{r^2+1} \cdot r \, dr$$

$$u = r^2+1$$

$$\frac{1}{2} du = r\,dr$$

$$2\pi \cdot \int \sqrt{r^2+1} \cdot r \, dr$$

$$2\pi \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{u} \, . \, du$$

$$\pi \cdot \int_1^2 u^{1/2} \, du$$

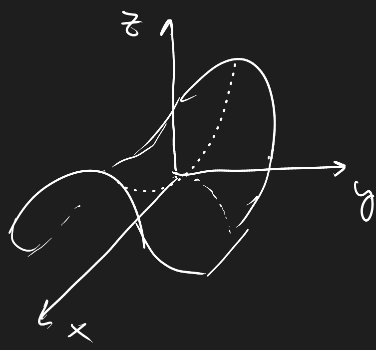
$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{3}\frac{3}{2} \cdot u^{1/2}$$

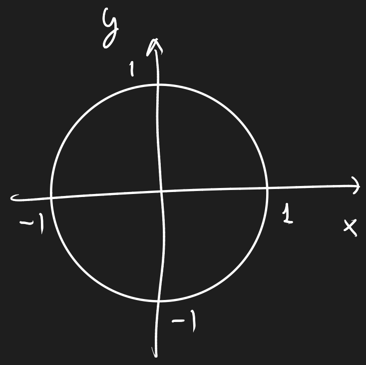
$$\pi \cdot \frac{2}{3} \underbrace{\left(u^{3/2} \Big|_1^2 \right.}_{\sqrt{8}-1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2} - 1)$$

$\approx 3{,}83 \leftarrow$ Cerca de $\pi \cdot r^2$ ✓

3) Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z negativa.
   a) Hallar el área de S.
   b) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de S.





Parametrizo <u>Todo</u> el paraboloide hiperbólico

$$T(x,y) = \left(x, \; y, \; \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Luego agregaré la restricción:

con $x^2 + y^2 \leq 1$

equivalentemente

$x \in [-1, 1]$

$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$

Calculo derivadas parciales

$$\begin{array}{cccc} & i & \overset{(-)}{j} & k \\ T_x = & (1, & 0, & x) \\ T_y = & (0, & 1, & -y) \end{array}$$

$$T_x \times T_y = (-x, -(-y), 1)$$
$$= (-x, y, 1) \quad \text{Invierte la orientación!}$$

$$\| T_x \times T_y \| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Integro agregando restricción $x^2+y^2 \leq 1$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2+1}\; dy\, dx =$$

Uso polares

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$$

con Jacobiano $= r$

$r \in [0,1]$

$\theta \in [0,2\pi)$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \sqrt{r^2+1}\,.\,r\,.\,dr\,d\theta =$$

$$u = r^2+1$$

$$du = 2r\,.\,dr \Rightarrow \frac{1}{2} du = r.dr$$

$$= \cancel{2}\pi . \int_{u=1}^{2} \sqrt{u}\; \frac{1}{\cancel{2}} . du$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{3}\frac{3}{2} . u^{1/2}$$

$$= u^{1/2}$$

$$= \pi . \frac{2}{3} . u^{3/2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\pi . \left(2\sqrt{2} - 1\right) = \text{Area}(S)$$

b)

3) Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z negativa.

a) Hallar el área de S.

b) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de S.

$$\iint_S F \cdot dS = -\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\langle \underbrace{F\left(x, y, \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{y^2}{2}\right)}_{(x,y,1)}, (-x, y, 1) \rangle}_{-x^2+y^2+1} \, dy\,dx$$

T invierte la orientación

$$= -\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} -x^2 + y^2 + 1 \; dy\,dx$$

$$= -\int_{x=-1}^{1} \left(-x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} + y \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \right) - \frac{1}{3} \left((1-x^2)^{3/2} + (1-x^2)^{3/2} \right) - 2\sqrt{1-x^2} \cdot dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} - 2\sqrt{1-x^2} \; dx$$

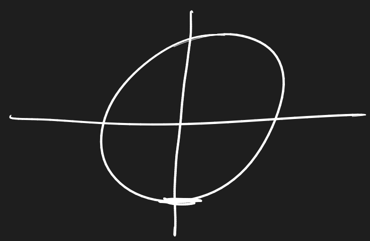
CA:

$$-2(1-x^2)^{1/2} \cdot (1-x^2) = -2(1-x^2)^{3/2}$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} - 2(1-x^2)^{3/2} \; dx$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{8}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} dx$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{3/2} dx$$



$$\begin{aligned} x &= \sin u \\ dx &= \cos u \, du \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x = -1 \Rightarrow \sin u = -1 \Rightarrow u = -\frac{\pi}{2} \\ \text{si } x = 1 \Rightarrow \sin u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(1-\sin^2 u\right)^{3/2}}_{} \cdot \cos u \, du$$

$$= \left(\cos^2 u\right)^{3/2} = \left(\cos u\right)^{2\cdot\frac{3}{2}} = \cos^3 u$$

$$= -\frac{8}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u \cdot \cos u \, du$$

$$= -\frac{8}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \cdot du$$

Recordar

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right)$$

CA:

$$\cos^4 u = \cos^2 u \cdot \cos^2 u$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right)\frac{1}{2}\left(1+\cos 2u\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 4u\right)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2u + \frac{1}{8} \cdot \cos 4u \, du$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{2} \sin 2u = \frac{2}{2} \cos 2u$$

$$= -\frac{8}{3} \left(\frac{3}{8} \cdot \pi + \underbrace{\frac{1}{4} \sin 2u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin 4u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right)$$

$$= -\pi$$

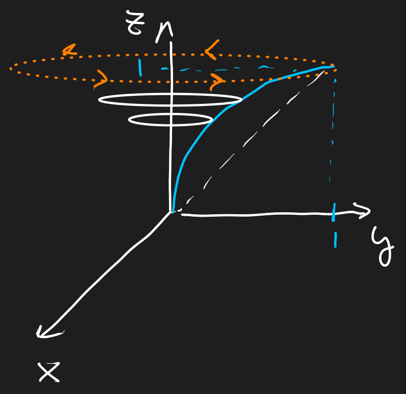
//

4) Considerar la curva C parametrizada por $\sigma(t) = (0, t^2, t)$ con $t \in [0,1]$. Sea S la superficie obtenida al rotar la curva C alrededor del eje z.

   a) Dar una parametrización de S.

   b) Considere el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cancel{x}, y, z)$ y la superficie S orientada con normal de coordenada z siempre positiva. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} . d\mathbf{S}$$



$$\sigma(t) = (0, t^2, t)$$

$$T(t, \theta) = (t^2 . \cos\theta, t^2 . \sin\theta, t)$$

$t \in [0,1]$
$\theta \in [0, 2\pi)$

Veo la orientación de T

$$T_t = (2t . \cos\theta, 2t . \sin\theta, 1)$$
$$T_\theta = (-t^2 . \sin\theta, t^2 . \cos\theta, 0)$$

$$T_t \times T_\theta = (-t^2 . \cos\theta, -t^2 . \sin\theta, 2t^3)$$

positivo ∴
respeta la orientación ✓

$T(t, \theta)$ es parametrización de S.

b) $$\iint_S F . dS = \int_{t=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle F(T(t,\theta)), T_t \times T_\theta \rangle \, d\theta \, dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} -t^4 + 2t^4 \, d\theta \, dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 t^4 \, dt$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} t^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{5}\pi$$

//