

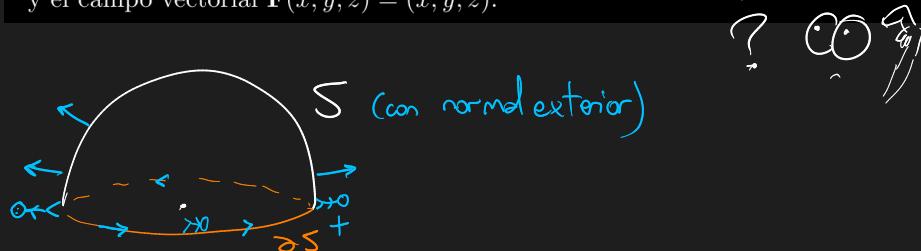
ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 4: Teoremas de Stokes y de Gauss. Campos conservativos. Aplicaciones.

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0,$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{t=0}^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t \cdot \cos t + \sin t \cdot \cos t, 0 dt = 0 \end{aligned}$$

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \langle \nabla \times \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

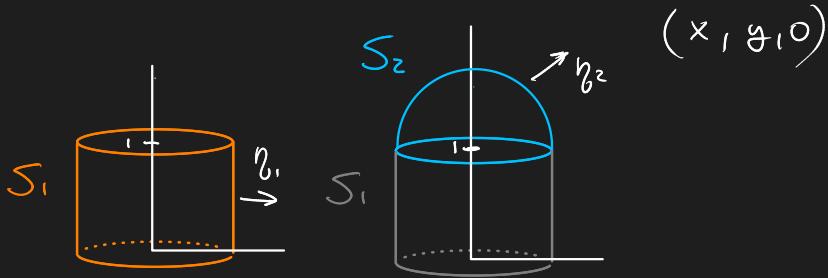
$$= (0, 0, 0)$$

$$\iint_S \nabla \times F \cdot dS = \iint_{\mu v} \underbrace{\left\langle \nabla \times F(T(u,v)), T_u \times T_v \right\rangle}_{\circlearrowright} du dv$$

= 0

Se verifica Stokes ✓

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 , donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$, orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.



$$\partial(S_1 \cup S_2)^+ :$$

Stokes ($F \in C^1$)

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\partial S} F \cdot dS$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\langle F(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle}_{(\cos t, \sin t, 0)} dt$$

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = 0$$

//

Ejercicio 3.

- (a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S . Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

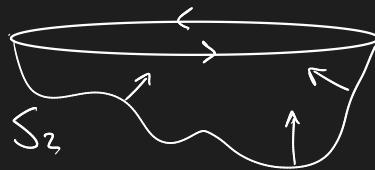
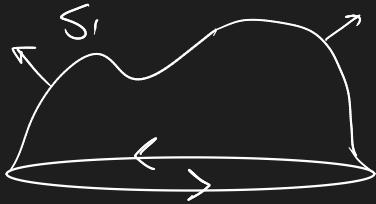
- (b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

- (c) Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

a)



b)
$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$d\mathbf{S}$

\Rightarrow Porque ∂S es un punto

c) Como el elipsoide es una sup. cerrada, y $\mathbf{F} \in C^1$

Stokes $\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S , en cada uno de los siguientes casos:

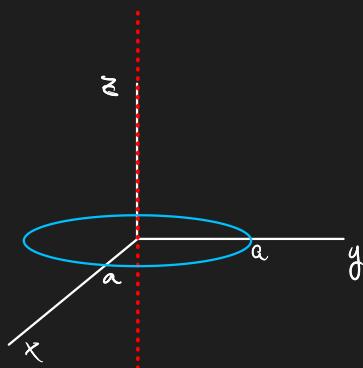
- (a) S = círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
- (b) S = región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

F no está bien definido en $(x, y, z) = (0, 0, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

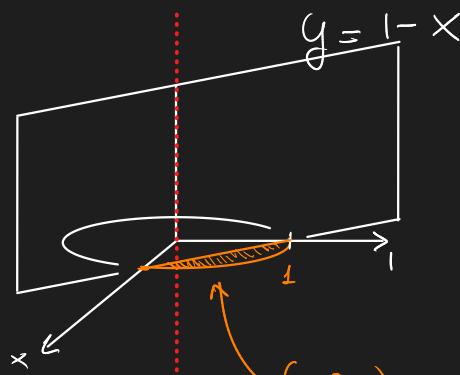
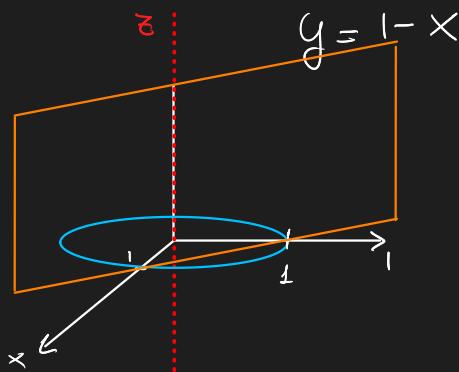
o sea, todo el eje z es problemático

a) No hay manera de que S no pase por algún $(0, 0, z)$

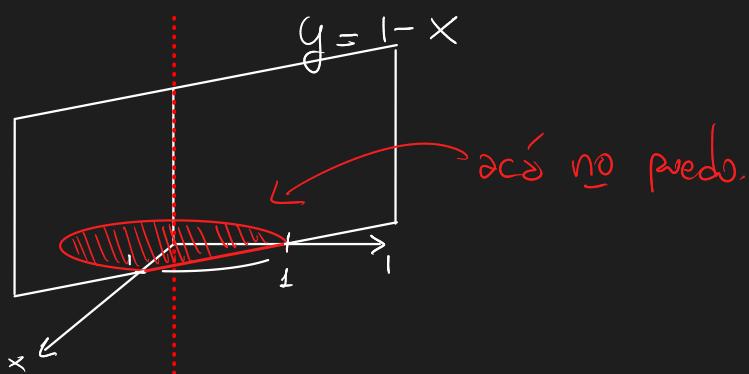
No se puede usar Stokes



b)



$(0, 0, z)$ no atraviesa
esta región
∴ Puedo usar Stokes.

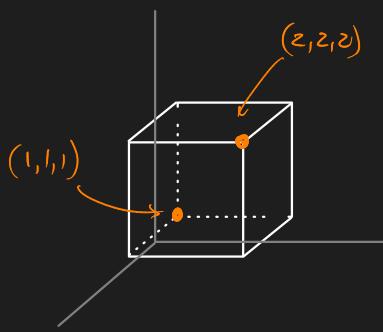


Ejercicio 5.

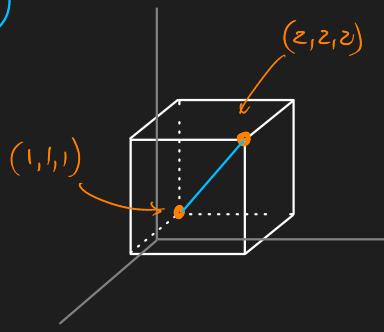
- (a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, cuando el punto de aplicación de \mathbf{F} se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de
- el segmento que une los dos puntos
 - una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonamente.
- (b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ para \mathbf{F} .

$A = G \cdot m \cdot M$

Primero: \mathbf{F} es campo gradiente con $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. A



a)

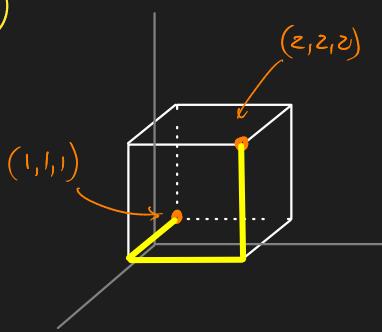


$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right) \cdot \hat{z} x \cdot A$$

$$P = -\frac{x}{\|(x, y, z)\|^3} \cdot A$$

Componente x
del vector F

b)



$$Q = -\frac{y}{\|(x, y, z)\|^3} \cdot A$$

$$R = -\frac{z}{\|(x, y, z)\|^3} \cdot A$$

$$\therefore \mathbf{F} = (P, Q, R) = -A \cdot \underbrace{\frac{1}{\|(x, y, z)\|^3}}_{\in \mathbb{R}} \cdot (x, y, z) \underbrace{\in \mathbb{R}^3}_{\in \mathbb{R}}$$

$$= -A \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \quad \checkmark$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(z, z, z) - f(1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + z^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) \cdot A = \left(\frac{1}{z\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot A$$

$$b) \nabla \times F = \nabla \times (\nabla f) \quad \text{if } \nabla f \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$$

Compo
Grad

$$= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$= (f_{zy} - f_{yz}, - (f_{zx} - f_{xz}), f_{yx} - f_{xy})$$

Como $f \in C^2 \Rightarrow$ Derivações segundas cruzadas
só n' iguais

$$\nabla \times F = (0, 0, 0)$$

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales \mathbf{F} en el plano es el gradiente de una función escalar f . Si existe dicha f , hallarla.

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
- (b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
- (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy)$

$$a) \text{ si } f_x = x \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$$

$$\text{y } f_y = y \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \bar{\varphi}(x)$$

$$\text{Si } f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F} \quad \checkmark$$

b)

Veo si:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = Q_x - P_y \leftarrow \text{Como en Green!}$$

$$= 2y - 2y = 0 \Rightarrow \text{Puede ser! (no bivectorial)}$$

$$\text{Si } f_x = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 + \varphi(y)$$

$$\text{Si } f_y = 2xy \Rightarrow f(x, y) = x \cdot y^2 + \bar{\varphi}(x)$$

Junto:

$$\text{Si } f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x \cdot y^2 \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F} \quad \checkmark$$

$$c) Q_x - P_y = 2 \cdot x \cdot \sin(xy) + x^2 \cdot \cos(xy) \cdot y$$

$$\textcircled{2} = \underbrace{\left(-\sin(xy) \cdot x - \left(x \cdot \sin(xy) + xy \cdot \cos xy \cdot x \right) \right)}_{- \left(-2x \cdot \sin(xy) - x^2 \cdot \cos xy \right)}$$

$$2x \cdot \sin(xy) + x^2 \cdot y \cdot \cos xy$$

$$= 4x \cdot \sin xy + 2x^2 \cdot y \cdot \cos xy$$

$$f \circ \vartheta(x,y) = (1,1)$$

\therefore no es campo gradiente

Ejercicio 7. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

- (a) $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
 (b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$, y C es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Deben ser campo grad, no es lo mismo

a) Si $f_x = 2xyz + \sin x \Rightarrow f(x, y, z) = \underbrace{x^2yz - \cos x}_f \varphi(y, z)$

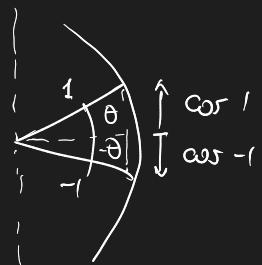
$$f_y = \Rightarrow = x^2yz + \bar{\varphi}(x, z)$$

$$f_z = \Rightarrow = x^2yz + \bar{\varphi}(x, y)$$

Es C. Grad:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0)) \\ &= f(-1, 0, \pi^4) - f(1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\cos(-1) - (-\cos(1)) \\ &= 2\cos(1) \quad \text{, } \end{aligned}$$



b) Seguro es campo grad

entonces $\Rightarrow f(\sigma(-1)) - f(\sigma(0)) =$

$$= f(e^{-1}, 1, 0) - f(1, e, 0)$$

Basta calcular $f(x, y, z) = x \cdot \cos(xy^2)$

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \sin x) dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y \right) dy + 2x^3 dz,$$

donde \mathcal{C} es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: Observar que \mathcal{C} se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

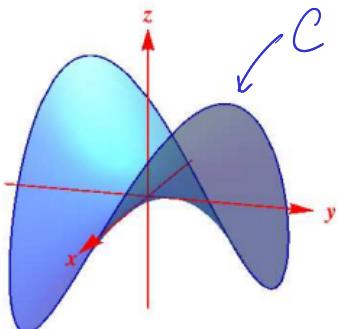
$$F = \left(y + \sin x, \frac{3}{2}z^2 + \cos y, 2x^3 \right)$$

No es campo grad pero no hay componentes cruzadas.

Express the graph of

$$z = 2xy, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

shown in

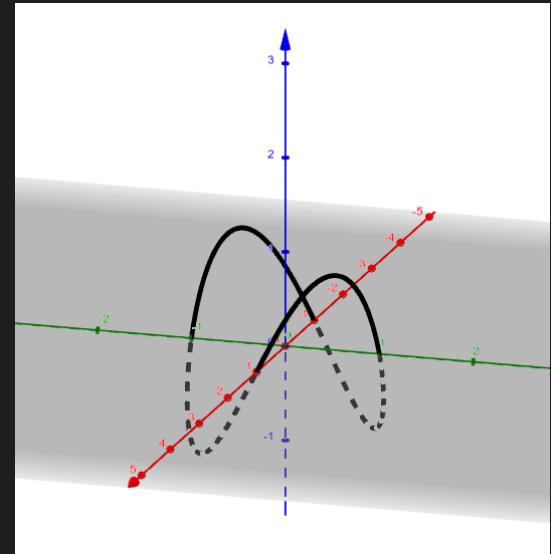
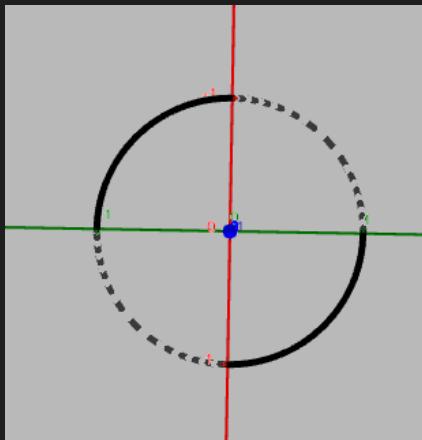


as a surface parametrized in terms of cylindrical polar coordinates.

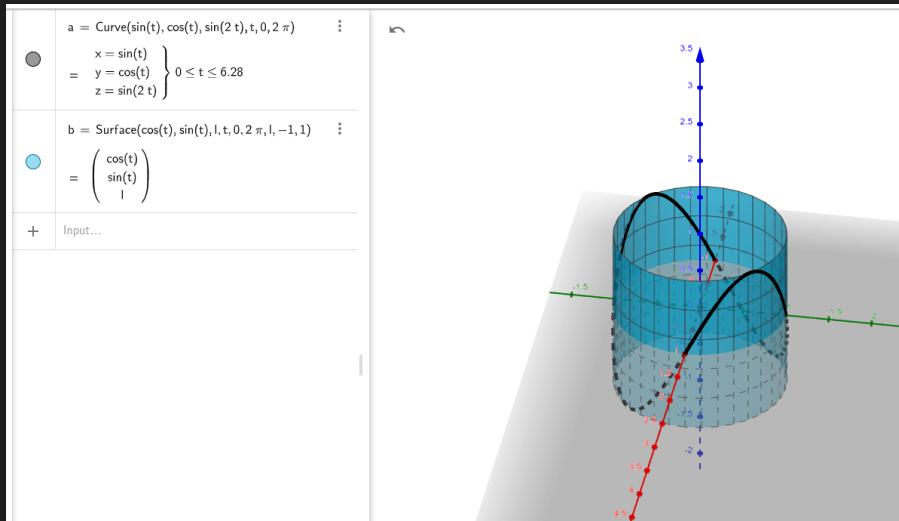
$z = 2xy$ es como una hipérbola en 3D

C es el borde de esta parabola

De donde:



Puedo correrla con un Cilindro y una tapa, pero mejor uso la sugerencia



La curva es

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, \sin(2t))$$

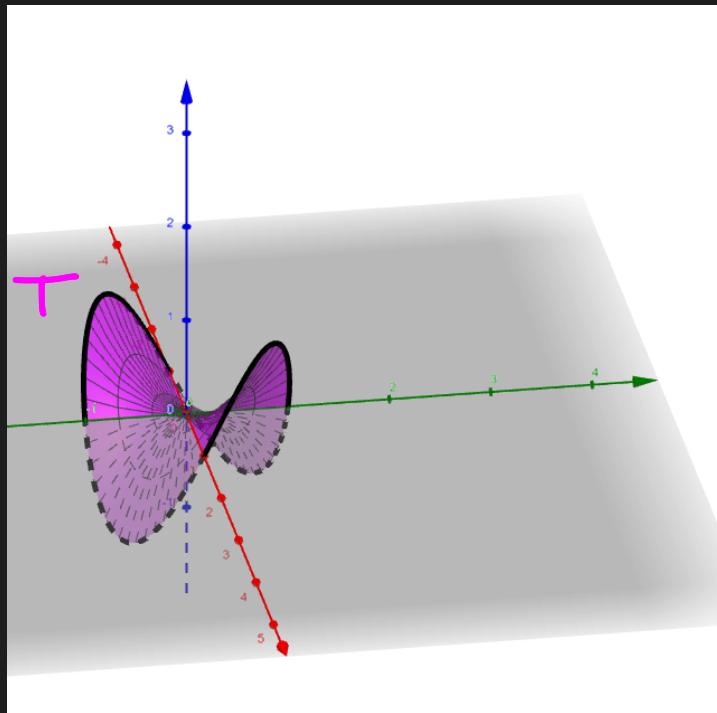
$\overset{=}{\text{Cart. int}}$

La parametrización es

$$S(x,y) = (x, y, 2xy) \quad \text{con} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

\Rightarrow En Polares

$$T(r, \theta) = \left(\begin{array}{l} \overset{=x}{r \cdot \cos \theta} \\ \overset{=y}{r \cdot \sin \theta} \\ \overset{=2xy}{r^2 \cdot \sin 2\theta} \end{array} \right) \quad r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi)$$



Quiero usar Stokes

$$\int_{C=\partial S} F \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

Falte verificar orientación !

$$\text{Calculus}$$

$$\nabla_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + \sin x & \frac{3}{2}z^2 + \cos y & 2x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3z, -6x, -1 \end{pmatrix}$$

$$T(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r^2 \cdot \sin 2\theta)$$

$$T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 2r \cdot \sin 2\theta)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 2r^2 \cdot \cos 2\theta)$$

$$T_r \times T_\theta = \left(2r^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\theta, -\left(2r^2 \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta + 2r^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin 2\theta \right), \underbrace{r \cdot \cos^2 \theta + r \cdot \sin^2 \theta}_{=r} \right)$$

$$= \left(2r^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\theta, 2r^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin 2\theta - 2r^2 \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta, r \right)$$

$$\iint_S \nabla_x F \, dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \underbrace{\langle \nabla_x F(T(r, \theta)), T_r \times T_\theta \rangle}_{\nabla_x F(T(r, \theta))} \, dr \, d\theta$$

$$\nabla_x F = (-3z, -6x, -1)$$

$$\underbrace{\nabla_x F(T(r, \theta))}_{(-3r^2 \cdot \sin 2\theta, -6r \cdot \cos \theta, -1)} =$$

$$\underbrace{\langle \nabla_{\mathbf{x}} F(\tau_{(r,\theta)}), \tau_r \times \tau_\theta \rangle}_{\text{La muerte misma!}}$$

$-6r^4 \cdot \sin \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \sin 2\theta - 12r^3 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin 2\theta + 12 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos 2\theta - r$

La muerte misma!

WolframAlpha computational intelligence.

Integrate $[-6r^4 \sin t \cos 2t \sin 2t - 12r^3 \cos t \sin t \sin 2t + 12r^3 \cos^2 t \cos 2t] dr, \{r, 0, 1\}, \{t, 0, 2\pi\}$

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Definite integral More digits Step-by-step solution

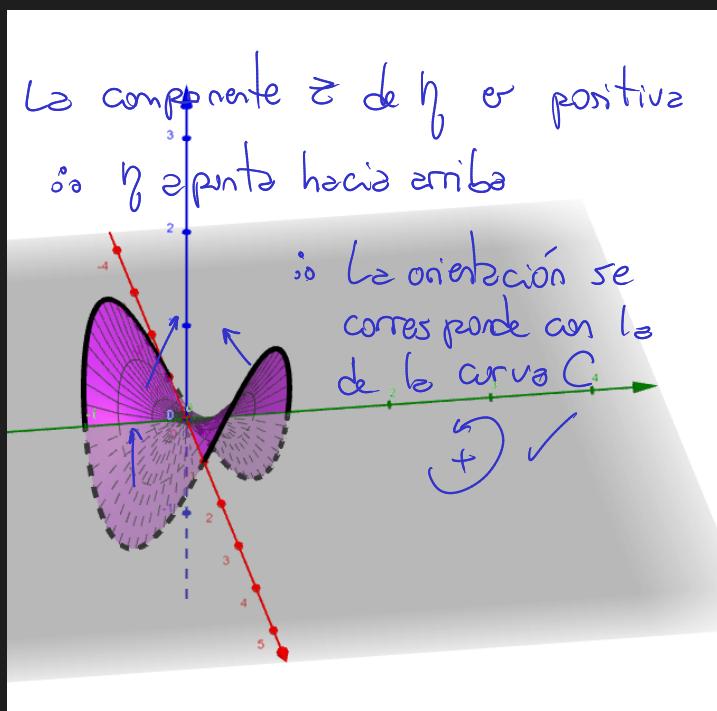
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} ((-6r^4) \sin(t) \cos(2t) \sin(2t) - 12r^3 \cos(t) \sin(t) \sin(2t) + 12r^3 \cos^2(t) \cos(2t) - r) dt dr = -\pi \approx -3.1416$$


PERO debo verificar orientación de τ

Como $\tau_r \times \tau_\theta = (\dots, \dots, r)$ y $r \in [0, 1]$

\Rightarrow

La componente z de η es positiva
∴ η apunta hacia arriba



Finalmente

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = -\pi$$

n(t) - 2 r^2 cos(t) sin(2 t), -2 r^2 cos(t) cos(2 t) - 2 r^2 sin(t) sin(2 t), r cos^2(t) + r sin^2(t), {r,0,1}, {t,0,2pi}] =

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Definite integral More digits Step-by-step solution

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \{-3(r^2 \sin(2t)), -6(r \cos(t)), -1\} \cdot \{2r^2 \cos(2t) \sin(t) - 2r^2 \cos(t) \sin(2t), -2r^2 \cos(t) \cos(2t) - 2r^2 \sin(t) \sin(2t), r \cos^2(t) + r \sin^2(t)\} dt dr = 2\pi \approx 6.2832$$

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en \mathbb{R}^3 . Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B .

Umo $F = a \nabla f$

$\Rightarrow F$ er campo gradiente

\Rightarrow La integral sobre cualquier curva C er

$$\int_C F \cdot ds = f(b) - f(a)$$

Como $F = 0$

$$\int_C F \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = 0$$

$f(a) = f(b)$ para cualquier par de puntos en B

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde \mathbf{F} es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y C es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

Parece un campo gradiente

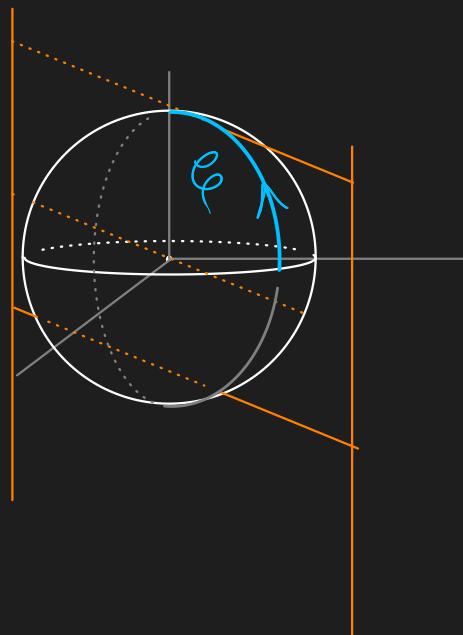
$$\text{Si } f_x = 2xy + z^2 \Rightarrow f(x, y, z) = x^2y + xz^2 + \varphi(y, z)$$

$$y \quad f(x, y, z) = x^2y - y^2z + \bar{\varphi}(x, z)$$

$$z \quad = xz^2 - y^2z + \bar{\varphi}(x, y)$$

$$\text{Si } f(x, y, z) = x^2y + xz^2 - y^2z$$

$$\Rightarrow \nabla f = \mathbf{F} \quad \checkmark \mathbf{F} \text{ es C. Grad.}$$



$$\mathbf{F} = \nabla f$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{?}{=} f(0, 0, 1) - \underbrace{f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}_{=0} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

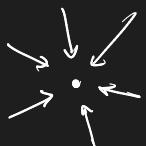
Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 16) de la Práctica 2, usando el Teorema de Gauss.

17

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

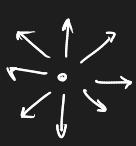
Teorema de Gauss / Divergencia

$$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$$



"Se comprime/
se escurre"

$$\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$$



"Fuente de agua"

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$



→ Super simple, $\in \mathbb{R}$!

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z$$

Teo :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tipo IV (un volumen relleno con cáscara)

- $S = \partial \Omega$ ("Cáscara de Ω ")

- S superficie cerrada

orientada con normal η hacia afuera



- $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ (como en todos los teoremas)

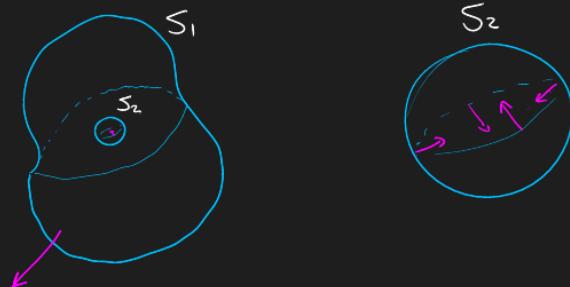
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv$$

$$= \iint_{\partial\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_{\text{ext}} \, dS$$

De las notas de Eze Reb:

Extensiones / observaciones

1) Regiones con huecos



$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2$$

\uparrow \uparrow
hacia afuera hacia adentro de S_1 misma
de S_1 misma

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \int_{S_1^{\text{ext}}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2^{\text{int}}} \mathbf{F} \cdot d\vec{s}$$

Notar:

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2$$

cuando la orientación:

$$(\partial\Omega)^{\text{ext}} = S_1^{\text{ext}} \cup S_2^{\text{int}}$$

$$\oint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \int_S \operatorname{div}(\nabla \times \mathbf{F}) dv = 0$$



Puedo separarla en dos cáscaras con borde



Stokes

$$\oint_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

\parallel \parallel
 ∂S_1 ∂S_2

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$$

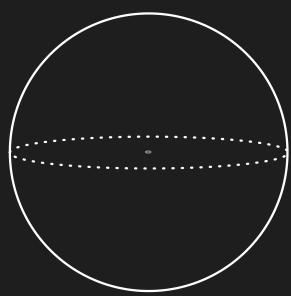
$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S=\partial \text{Cubo}} \mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_{\text{Cubo}} 3 dv$$

$$= 3 \operatorname{Vol}(\text{Cubo})$$

$$= 3 //$$

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x+y+z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$



$$\int_S f dS = \iint_{uv} f(T(u,v)) \cdot \|T_u \times T_v\| du dv$$

Pero quiero usar Gauss!

$$\nabla f = (1, 1, 1) =: F$$

Para la esfera unitaria

$$\Rightarrow \langle F, \eta \rangle = \langle (1, 1, 1), (x, y, z) \rangle$$

$$= x + y + z \quad \text{circular boundary}$$

$$\int_S (x+y+z) dS = \int_S \langle F, \eta \rangle dS$$

y ahora, por Gauss

$$= \iiint_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} F}_{=0} dv$$

$$= 0$$

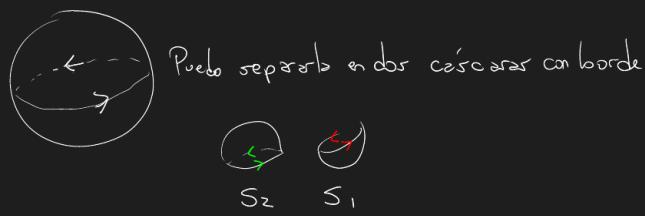
Otra forma (\geq revisar, no me convence)

Como S es simétrica y f es impar ($f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$)

\Rightarrow La integral da cero

A revisar!

Otras formas o usos de lo que Rela menciona arriba:



y por Stokes

$$\int_{\text{C}^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

\parallel \parallel
 ∂S_1 ∂S_2

$$= \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{s} = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} d\mathbf{s}$$

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del Teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ donde \mathbf{r} es el vector que apunta de la posición de la masa m a la M , r es su longitud y G es la constante gravitatoria, considerando como región Ω la bola unitaria en \mathbb{R}^3 .

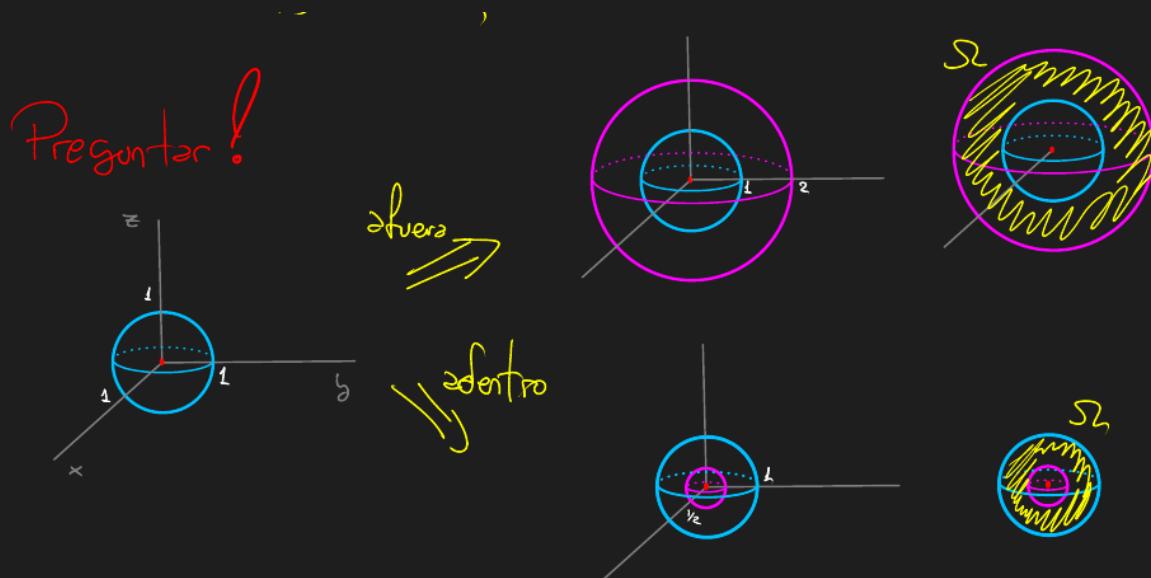
Llamo $A = G \cdot M \cdot m$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -A \cdot \frac{(m_1 - M_1, m_2 - M_2, m_3 - M_3)}{\|(m_1, m_2, m_3) - (M_1, M_2, M_3)\|^3}$$

Hipótesis de Gauss

- $\mathbf{F} \in C^1$ \times no en el $\vec{0}$ no está bien definido
- Ω una región de \mathbb{R}^3 ✓
- $S = \partial\Omega$ cerrada ✓
- orientada con η hacia afuera ? η es $\frac{r}{\|r\|}$?

Amber cosas se pueden solucionar (creo)



y si η apunta hacia adentro o no

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \eta \, dS = - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, ds$$

Ejercicio 14. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_D \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{F}}_{3x^2+3y^2+3z^2} dv$$

Con referencias

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in [0, R] \\ \theta \in [0, 2\pi) \\ \varphi \in [0, \pi) \end{array}$$

$$\text{Con Jacob} = r^2 \sin \varphi$$

$$= - \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} 3r^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right)}_{= \sin^2 \varphi} \cdot r^2 \sin \varphi \cdot dr d\theta d\varphi$$

$$= -3 \int_0^R r^4 \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi d\theta dr$$

$$\underbrace{-\cos \varphi}_{=1} \Big|_0^{\pi} = -(-1 - 1) = 2$$

$$= -3 \cdot 4\pi \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R$$

$$= -\frac{12}{5}\pi \cdot R^5$$

Ejercicio 15. Sea \mathcal{C} la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9} (2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde φ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z . Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z .

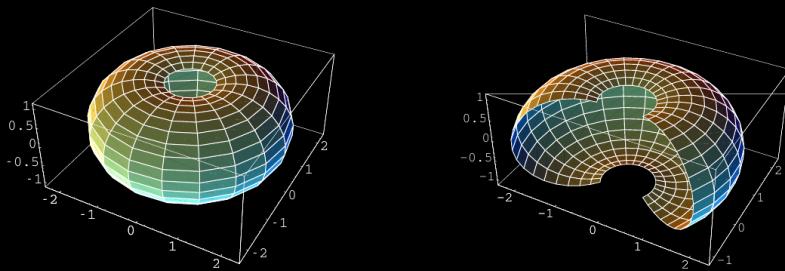


FIGURA 1

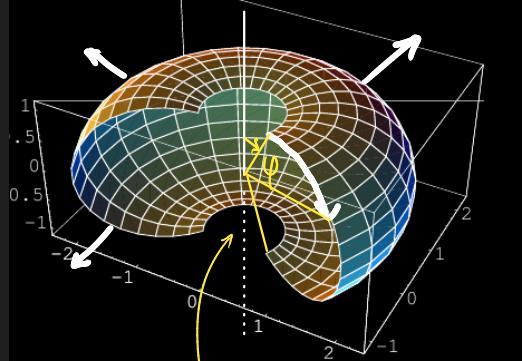
En el primer dibujo se muestra la superficie S , en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de S en el sentido "externo" del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, -2z).$$

Quiero usar Stokes :

- el campo F es C^1 ✓
 - la superficie no es cerrada !
- ⇒ La cierra. mis opciones son :



orientación correcta!

Como elijo ?

- 2 tapar los agujeros
- 1 cilindro
- otra

Necesito calcular

$$\iint_S \langle F, n \rangle ds - \iint_T \langle F, \gamma \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F ds$$

Claro lo que tengo para ver qué T me conviene

$$\mathbf{F} = (x, y, -2z)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_S \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\sigma = 0$$

$$= \iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma - \iint_T \langle \mathbf{F}, \mathbf{\gamma} \rangle \, d\sigma = 0$$

$$\iint_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \iint_T \langle \mathbf{F}, \mathbf{\gamma} \rangle \, d\sigma$$

Solo basta calcular ésto.

Busco $\mathbf{\gamma}$ que me simplifique la resolución

Elego los dos discos como tapas pues $\mathbf{\gamma} = (0, 0, 1) \circ (0, 0, -1)$

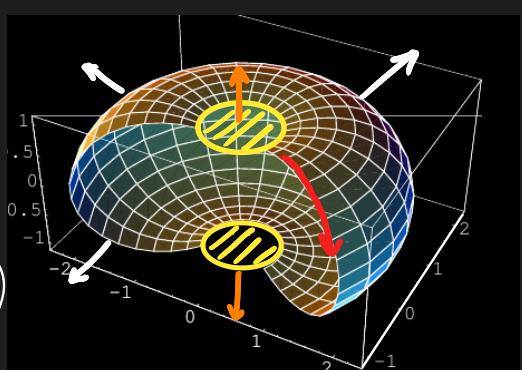
$$T(\theta) = T_{up}(\theta) \cup T_{down}(\theta)$$

$$= (\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta, z_{up}) \cup (\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta, z_{down})$$

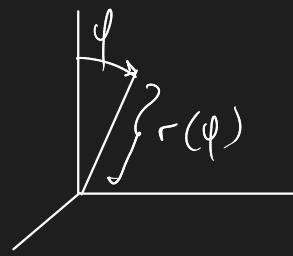
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$r \in [0, a]$$

Calcular z_{up}/z_{down}

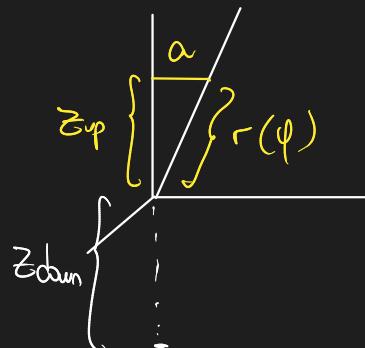


$$r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{9} \left(2 - \cos\left(2 \frac{\pi}{6}\right)\right)}_{0,5}$$



$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1,55$$

SOTH CA + TOA



$$\circ \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

~~~~~

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} a$$

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (el radio de los triángulos)

$$\circ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{z_{up}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot z_{up}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot z_{up}$$

$$z_{up} = 1$$

Por simetría

$$z_{down} = -1$$

Vuelvo a

$$T(\theta) = T_{up}(\theta) \cup T_{down}(\theta)$$

$$= \underbrace{\left( \tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta, 1 \right)}_{\eta \text{ apunta hacia arriba}} \cup \underbrace{\left( \tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta, -1 \right)}_{\eta \text{ apunta hacia arriba}} \rightarrow \text{quiero hacia abajo.}$$

$$\iint_T \langle F, \eta \rangle d\sigma = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \langle F(T(\tilde{r}, \theta)), T_r \times T_\theta \rangle d\tilde{r} d\theta - \iint_{T_{\text{down}}} F \cdot \eta d\sigma$$

Celar el  $1^\circ$  integral

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \overset{i}{\uparrow} & \overset{j}{\searrow} & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \cdot \sin \theta & r \cdot \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left( 0, 0, r \right)}_{\text{no es } (0,0,1) \text{ por no estar normalized}} \quad \text{no es } (0,0,1) \text{ por no estar normalized}$$

$$F = (x, y, -2z)$$

$$F(T(\tilde{r}, \theta)) = (\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta, -2)$$

$$\langle F(T(\tilde{r}, \theta)), T_r \times T_\theta \rangle = -2\tilde{r}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -2\tilde{r} d\tilde{r} d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{r}^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{2}{3} \pi$$

↳ 2º integral:

$$\mathbf{F} = (x, y, -2z)$$

$$\mathbf{F}(T(\bar{r}, \theta)) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, +2)$$

$$\langle \mathbf{F}(T(\bar{r}, \theta)), T\bar{r} \times T\theta \rangle = 2\bar{r}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\bar{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2\bar{r} \, d\bar{r} d\theta = \frac{2}{3} \pi$$

Finalmente

$$\iint_Y \langle \mathbf{F}, \eta \rangle \, ds = -\frac{2}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi$$

$$= -\frac{4}{3} \pi$$

Otra forma mucho más inteligente de haber hecho esto era sin parametrizar cada disco, ya que sé cuál es la normal sobre el disco, y también el área de un disco de radio  $1/\sqrt{3}$



$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \int_{D_1} \langle \mathbf{F}(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle \, ds$$

↑ no compongo nada, er x, y, z en general  
↑ ↑ ↓ ↓  
n\_1

$$= \int_{D_1} \langle (x, y, -2z), (0, 0, 1) \rangle \, ds$$

$$= \int_{D_1} -2z \, ds$$

Sé que, sobre el disco  $D_1$ ,  $z = 1$  siempre

$$= \int_{D_1} -2 \cdot 1 \, ds$$

$$= -2 \cdot \text{Área}(D_1)$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

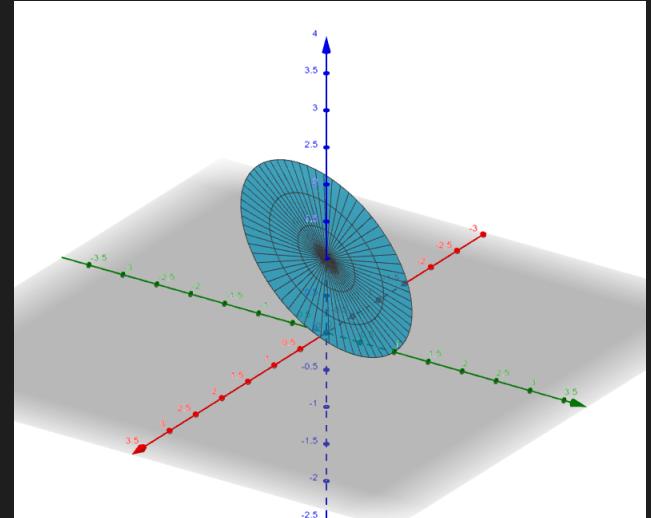
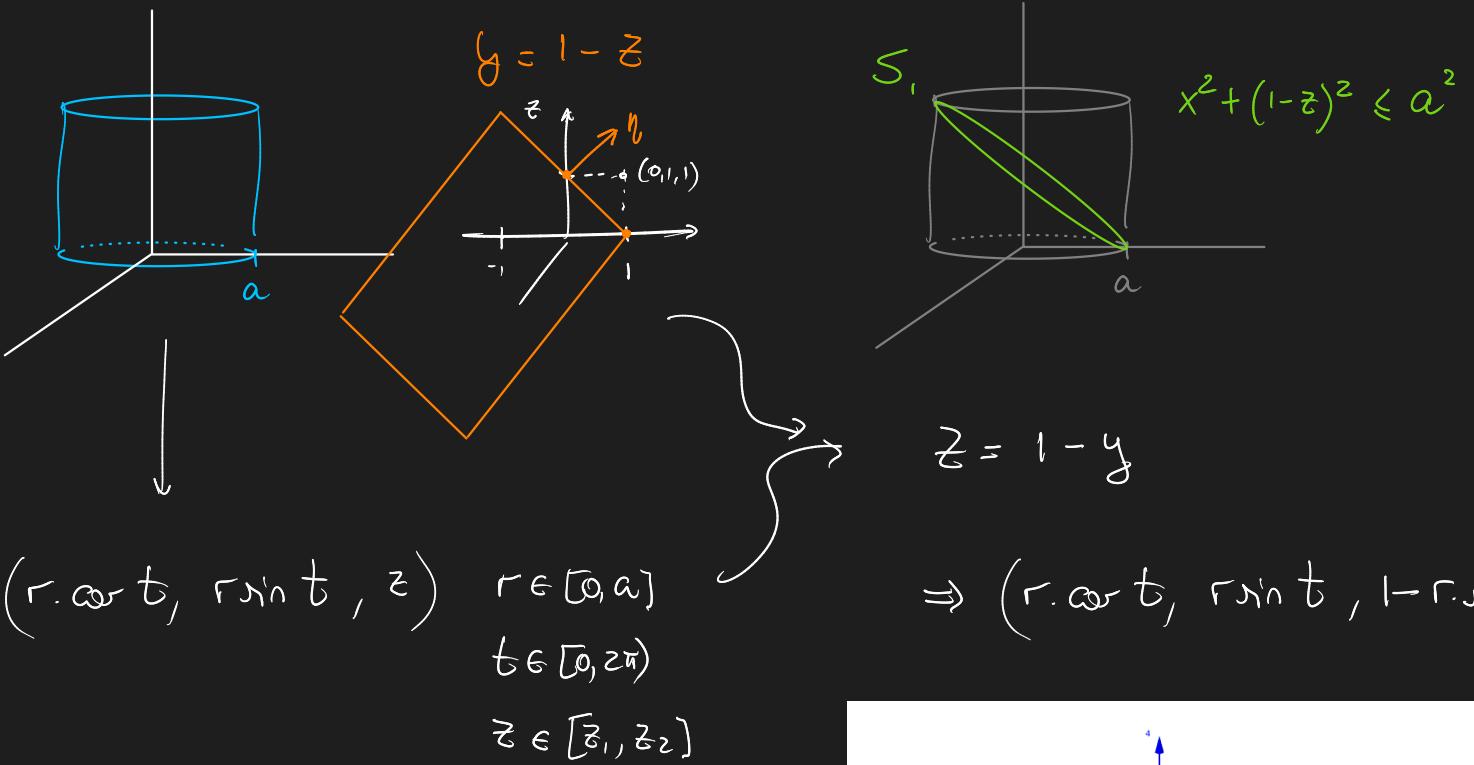
$$= -\frac{2}{3} \pi \quad \checkmark$$

Esto me dice que no siempre debo apurarme a parametrizar todo, sino que usando nociones más básicas de lo que estoy haciendo en cada paso, puedo aprovechar y ahorrar cuentas innecesarias

**Ejercicio 16.** Calcular el flujo del campo  $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$  a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro  $x^2 + y^2 \leq a^2$ :

- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $y + z = 1$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 1)$  apunte en la dirección  $(0, 1, 1)$ .
- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $z = 0$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 0)$  apunte en la dirección  $(0, 0, 1)$ .

¿Depende el flujo del área de la sección?. Justifique.



$$\iint_{S_1} F \cdot \eta \, dS = \int_{r=0}^a \int_{t=0}^{2\pi} \left\langle F(T_r(r, t)), T_r \times T_t \right\rangle dt dr$$

$$T_r = (\cos t, \sin t, -\sin t)$$

$$T_t = (-r \sin t, r \cos t, -r \cos t)$$

$$\overline{T_r} \times \overline{T_t} = \left( -r \cdot \cancel{\cos t \cdot \sin t} + r \cdot \cancel{\cos t \cdot \sin t}, -\left( -r \cdot \cos^2 t - r \cdot \sin^2 t \right), r \cdot \cos^2 t + r \cdot \sin^2 t \right)$$

$$= (0, r, r) \leftarrow \text{como } r \geq 0 \Rightarrow \text{Apunta como } (0, 1, 1) \checkmark$$

Calculo  $\mathcal{F}(T)$

$$\mathcal{F}(T) = (0, 0, a^2 - r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t)$$

$$= (0, 0, a^2 - r^2)$$

$$\iint_{t=r} \int \int r \cdot a^2 - r^3 \ dr dt = \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{r^2}{2} a^2}_{\frac{a^4}{2}} \Big|_0^a - \underbrace{\frac{r^4}{4} \Big|_0^a}_{\frac{a^4}{4}} dt$$

$$\frac{1}{4} a^4$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 dt$$

$$= \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} a^4 \cdot \pi$$



Con Gauss era más complicado.

Si considero la superficie cerrada vale Gauss

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ y + z \leq 1 \end{cases} \quad 0 \leq z \leq 1 - y$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_{\Omega} \underbrace{\text{div}(F)}_{=0} dx dy dz = 0$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS + \iint_{S_3} F \cdot dS = 0$$

$S_1$   $\rightarrow$  es la que quiero saber

$S_2$   $\rightarrow$  tapas laterales (cilindro)

$S_3$   $\rightarrow$  tapa de abajo

$$S_2(\theta, z) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), z) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 1 - a \sin(\theta)$$

$$S_{2\theta}(\theta, z) = (-a \sin(\theta), a \cos(\theta), 0)$$

$$S_{2z}(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

$$S_{2\theta} \times S_{2z} = (0, a \sin(\theta), 0) \quad \text{respetó orientación}$$

$$\int_0^{1-a \sin(\theta)} (0, 0, *) \cdot (0, *, 0) dz d\theta = 0$$

$$S_3(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$S_{3r}(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad 0 \leq r \leq a$$

$$S_{3\theta}(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$S_{3r} \times S_{3\theta} = (0, 0, r) \rightarrow$  invierte orientación

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^a (0, 0, a^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) (0, 0, r) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a [a^2 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \cdot r dr d\theta = -2\pi \cdot \int_0^a r \cdot a^2 - r^3 dr$$

$$= -2\pi \left[ \frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \frac{r^4}{4} \Big|_0^a \right] = 2\pi \left[ \frac{a^2}{2} a^2 - \frac{a^4}{4} \right] = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4}$$

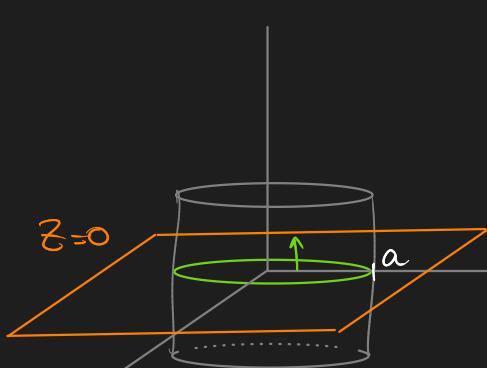
$$\text{Entonces } \iint_{S_1} F \cdot dS + \iint_{S_2} F \cdot dS + \iint_{S_3} F \cdot dS = 0 = \boxed{\frac{2\pi \cdot a^4}{2}}$$

$$\iint_{S_1} F \cdot dS + 0 - \frac{\pi \cdot a^4}{2} = 0$$

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \frac{\pi \cdot a^4}{2}$$

- (b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación  $z = 0$ , de modo que la normal en el punto  $(0, 0, 0)$  apunte en la dirección  $(0, 0, 1)$ .

¿Depende el flujo del área de la sección?. Justifique.



$$\iint_{S_2} \langle F, \eta \rangle dS =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \langle (0, 0, a^2 - r^2), (0, 0, r) \rangle dr dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a r \cdot a^2 - r^3 dr dt$$

igual que antes

$$= \frac{1}{2} a^4 \cdot \pi //$$

Ya que la parametrización del disco siempre tiene las mismas componentes  $x, y$ , independientemente del plano que lo corta (pues si  $z=0 \Rightarrow$  es un disco en el plano  $xy$  siempre), y como  $F$  descarta la dimensión  $z$  de la parametrización al ser  $(0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$  Entonces puedo asegurar que la composición de  $F(T(r,t))$  es siempre  $(0, 0, a^2 - r^2)$  para toda parametrización  $T$  que represente una sección oblicua del cilindro de radio  $a$  del enunciado. Y como el producto punto entre  $F(T(r,t))$  y  $(T_r \times T_t)$  es siempre igual al producto de sus coordenadas en  $z$  (pues  $x$  e  $y$  se descartan por ser cero), y como  $F(T(r,t))$  es siempre igual, basta ver que  $T_r \times T_t$ , al ser siempre igual a  $r$ , la integral da siempre el mismo valor.

Para ver esto, vemos el plano inicial  $z = 1 - y$

Para generalizar a todos los posibles planos, tenemos  
 $z = c - d \cdot y$

Para cualquier plano

$$\Rightarrow T(r,t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c - d \cdot r \cdot \sin t)$$

Cálculo  $T_r \times T_t$

$$T_r = (\cos t, \sin t, -d \cdot \sin t)$$

$$T_t = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t, -d \cdot r \cdot \cos t)$$

$$\begin{aligned} T_r \times T_t &= \left( -d \cdot r \cdot \cancel{\cos t \cdot \sin t} + d \cdot r \cdot \cancel{\cos t \cdot \sin t}, \right. \\ &\quad \left. - \left( -d \cdot r \cdot \cos^2 t - d \cdot r \cdot \sin^2 t \right), \right. \\ &\quad \left. r \cdot \cos^2 t + r \cdot \sin^2 t \right) \end{aligned}$$

$$= (0, d \cdot r, r)$$

esta dimensión se descarta en el producto  
y solo uso  $r$ , que es siempre igual

**Ejercicio 17.** Dada la función  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-x}$  podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje  $z$  de la curva  $x = f(z)$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Para una idea gráfica ver la figura.

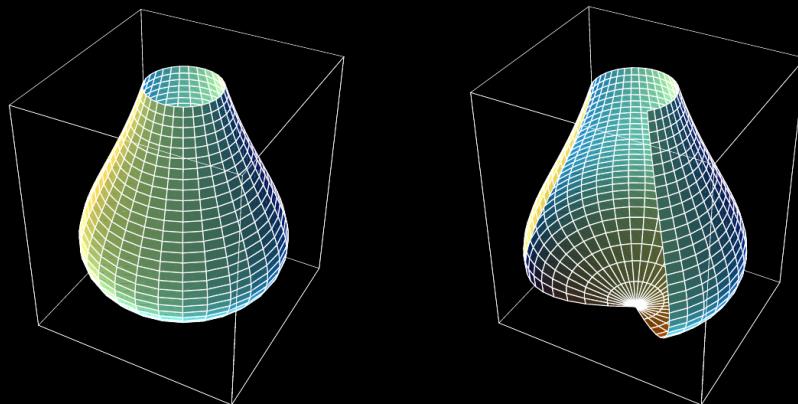


FIGURA 2

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z - \frac{1}{2})$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, ds$$

↗ Disco Tapa      ↗ Gaus

Veo si me conviene Gaus o calcular  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  directamente

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, ds = 3 \cdot \underbrace{\operatorname{Vol}(\text{Mate})}_{\text{Puedo usar Fubini:}}$$

Puedo usar Fubini:

Polares + Corte horizontal del mate

↑  
Sale fácil ✓

$$\iint_D F \cdot \vec{y} \, ds = \iint_D \left\langle \vec{F}(x, y, z), (0, 0, 1) \right\rangle \, ds$$

*z es igual en todo D  
no parametrizo nada!*

$$= \iint_D z - \frac{1}{2} \, ds$$

*z mantiene el mismo valor en todo D  
o sea:  $z = 1$  (la altura de la tapa D)*

$$= \iint_D \frac{1}{2} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Área}(D)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_D^2 \quad \text{con } r_D \text{ el radio de } D$$

$$r_D = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \pi$$

//

Salió rápido, sigue con Gauß:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, ds = 3 \cdot \operatorname{Vol}(\text{Hete})$$

$$= 3 \cdot \int_{z=0}^1 \text{Área}(\text{Disco de radio } f(z)) \, dz$$

$$= 3 \int_{z=0}^1 \pi \cdot f(z)^2 \cdot dz$$

$$= 3\pi \int_{z=0}^1 \left( \frac{1}{2} z \cdot e^{2-2z} \right)^2 \cdot dz$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \pi \int_0^1 z^2 \cdot e^{4-4z} \cdot dz$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{\varphi(z)} = \varphi'(z) e^{\varphi(z)}$$

$$\text{Con } \varphi(z) = 4 - 4z \\ \varphi'(z) = -4$$

~~~~~  
①

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{\varphi(z)} = -4 \cdot e^{4-4z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} -\frac{1}{4} e^{\varphi(z)} = e^{4-4z}$$

Use Partes

$$u = z^2 \quad du = 2z \, dz$$

$$v = -\frac{1}{4} e^{4-4z} \quad dv = e^{4-4z} \, dz$$

$$\underbrace{\int u \cdot dv}_{\textcircled{1}} = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= -z^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4-4z} + \underbrace{\int -\frac{1}{4} \cdot e^{4-4z} \cdot 2z \, dz}_{+ \int \frac{1}{2} \cdot e^{4-4z} \cdot z \, dz}$$

wolfram

$$= -\frac{1}{4} \cdot z^2 \cdot e^{4-4z} - \frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (4z+1)$$

$$= -\frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (8z^2 + 4z + 1)$$

$$-\frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (8z^2 + 4z + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{32} \cdot (e^4 - 13) \approx 1,3$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{F} \, ds = \frac{3}{4} \pi \cdot \frac{1}{32} \cdot (e^4 - 13)$$

$$= \frac{3}{128} \cdot \pi (e^4 - 13) \approx 3,063$$

Finalmente

$$\iint_S \mathcal{F} \cdot \eta \, ds + \iint_D \mathcal{F} \cdot \eta \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathcal{F} \, ds$$

$$\iint_S \mathcal{F} \cdot \eta \, ds = \frac{3}{128} \cdot \pi (e^4 - 13) - \frac{1}{8} \pi \approx 2,67$$

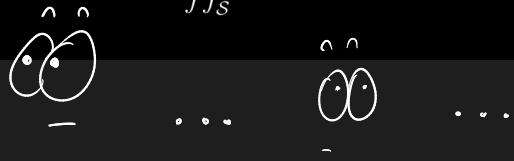
y queda así \uparrow porque es horrible.



Ejercicio 18. Sea \mathcal{S} la superficie dada por el gráfico de la función $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ con $\|(x, y)\| \leq 1$ y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{zx}{x^2+y^2}, \frac{zy}{x^2+y^2}, 0 \right)$. Hallar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Piense antes de actuar.



$\|(x, y)\| \leq 1$: Disco de radio 1

Si compongo \mathbf{F} con la param. del Disco $\|(x, y)\| \leq 1$, se simplifican el denominadores

$$f(x, y)$$

$$\tau(r, t) = \left(r \cos t, r \sin t, \underbrace{\frac{1}{1+r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}}_{1+r^2} \right)$$

$$\mathbf{F}(\tau(r, t)) = \left(\underbrace{\frac{r \cos t}{1+r^2}}_{r^2}, \underbrace{\frac{r \sin t}{1+r^2}}_{r^2}, 0 \right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\cos t}{1+r^2}}_{r+r^3}, \underbrace{\frac{\sin t}{r+r^3}}, 0 \right)$$

CA:

$$\frac{1}{1+r^2} = (1+r^2)^{-1}$$

$$\tau_r = \cos t \quad \sin t \quad - (1+r^2)^{-2}, 2r$$



$$\tau_t = -r \sin t \quad r \cos t \quad 0$$

$$\tau_r \times \tau_t = \left(\frac{2r^2 \cos t}{(1+r^2)^2}, \frac{-2r^2 \sin t}{(1+r^2)^2}, r \right)$$

Creo que es por eso ...

$$\begin{aligned}\langle F(T(r,t)), T_r \times T_t \rangle &= \frac{2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 t}{r \cdot (1+r^2) \cdot (1+r^2)^2} + \\ &+ \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 t}{r \cdot (1+r^2) \cdot (1+r^2)^2} + 0\end{aligned}$$

$$= \frac{2r^2}{r \cdot (1+r^2) \cdot (1+r^2)^2}$$

$$= \frac{2r}{(1+r^2)^3}$$

No se simplifica mucho ... sigue igual

$$\int_{r=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \langle F(T(r,t)), T_r \times T_t \rangle dt dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r}{(1+r^2)^3} dt dr$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^3} dr$$

$$u = 1+r^2 \\ du = 2r dr \Rightarrow r dr = \frac{1}{2} du$$

$$= 4\pi \cdot \int_{u=1}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^3} du$$

CA

$$\frac{1}{\mu^3} = \mu^{-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mu^{-2} = -2\mu^{-3}$$

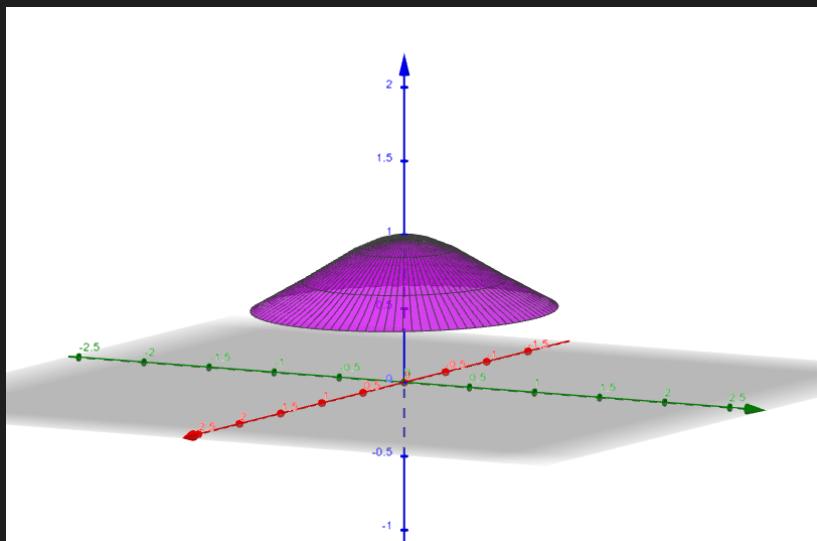
$$\frac{\partial}{\partial \mu} -\frac{1}{2}\mu^{-2} = \mu^{-3}$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\mu^{-2} \right) \Big|_1^z$$

$$= -\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right)$$

$$\iint_S F \, ds = \frac{3}{4}\pi //$$

Habrá otra forma? Gráfico para ver



se re podrá cerrar!

—

Pero $\operatorname{div} F$ se ve feal!

$$\operatorname{div} F = \frac{z \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{z \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 0$$



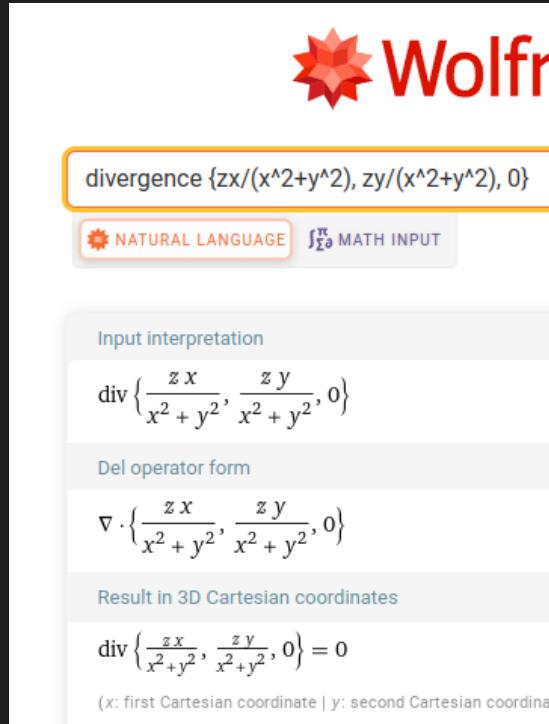
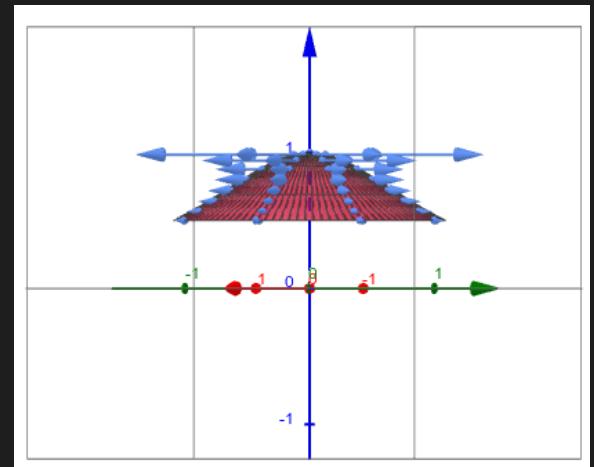
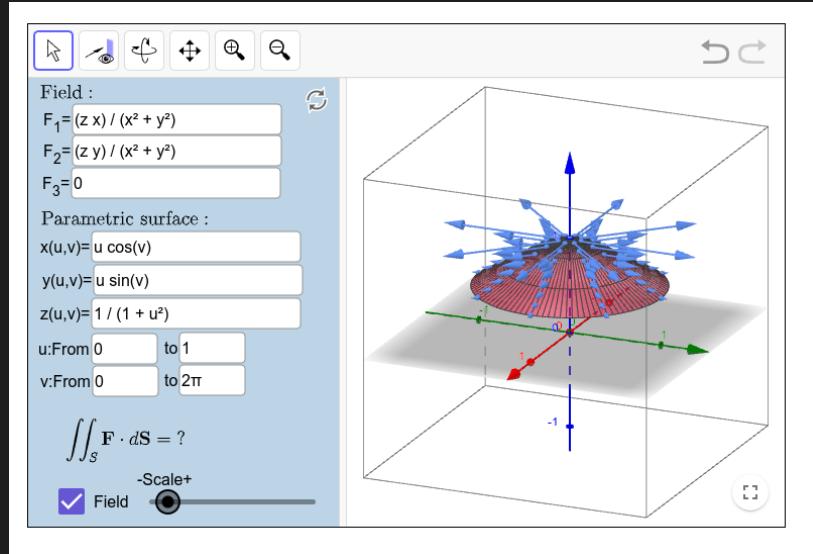
no te lo puedo creer --

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{div} F = 0$$

↑ Tapa que cierra

$$\iint_D \langle F(x, y, z), (0, 0, -1) \rangle dS = 0$$

← esto debería darme $-\frac{3\pi}{4}$??



TODO ESTO ESTÁ MAL!:

El "piense antes de actuar" se refería a que como F no tiene componente en Z , entonces todos los vectores del campo vectorial F son horizontales con respecto al plano XY.

Ahora, graficando la superficie, podemos ver que los vectores sí atraviesan la superficie original S , pero no así la tapa de abajo (si es un disco paralelo al plano XY).

Entonces la integral del campo a través de la superficie original S debe ser la integral triple sobre el volumen de S con tapa (Por Gauss, porque F es C^1)

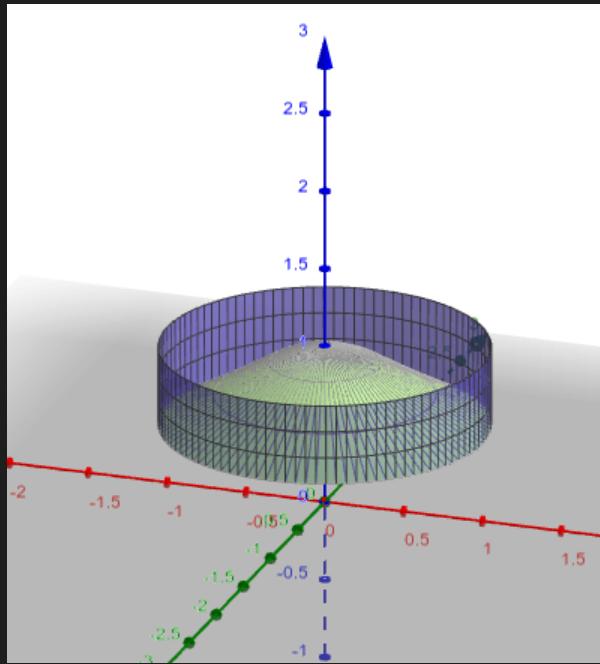
Y como la divergencia del campo es cero, entonces la integral del ejercicio debe ser cero.

F NO ES C^1 !! Y por lo tanto, no puedo usar el teorema de Gauss de esa manera!

Todo el eje Z es problemático, y como S está centrado en ese eje, no puedo cerrarlo con una tapa sin que incluya alguna porción del eje Z !

Puedo cerrarla con un cilindro afuera
y una tapa arriba (que solo toca a Z en un punto)??

(Síntesis: No!)



Cilindro T :

$$T(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$z \in [0, 1]$$

$$\mathcal{F}(T(\theta, z)) = \left(\frac{z \cdot \cos \theta}{1}, \frac{z \cdot \sin \theta}{1}, 0 \right)$$

$$T_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

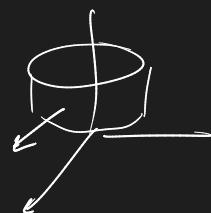
$$T_z = (0, 0, 1)$$

$$T_\theta \times T_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$T_\theta \times T_z (0, z) = (1, 0, 0) \quad \checkmark \text{ apunta hacia afuera}$$

Luego

$$\langle \mathcal{F}(T(\theta, z)), (1, 0, 0) \rangle = z \cdot \cos \theta$$



$$\int_{z=\frac{1}{2}}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} z \cdot \cos \theta \, d\theta dz = \int_{\frac{1}{2}}^1 z \cdot \left(\sin \theta \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

0 0

También puedo corregirlo de esa forma !

Ejercicio 19. Se sabe que $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en \mathbb{R}^3 , existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt,$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$?

Sugerencia: Ver Ejercicio 12.

Ejercicio 20. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial?
De ser así, hallar el campo vectorial.

- (a) $\mathbf{F} = (x, y, z)$.
- (b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3 \Rightarrow \underline{\text{No}} \text{ es rotor de nadie}$

b) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x - 2x + 0 = 0 \Rightarrow \text{es rotor! (por ej 19)}$

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathcal{G} \quad \text{con } \mathcal{G} = (P, Q, R)$$

$$= \nabla \times \mathcal{G}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

$$\stackrel{\text{dato}}{=} (x^2 + 1, x - 2xy, y)$$

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt,$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

Veo ej 19:

$$P = \int_0^z \underbrace{F_2(x, y, t)}_{= x - 2xy} dt - \int_0^y \underbrace{F_3(x, t, 0)}_{= t} dt$$

$$= \int_0^z x - 2xy dt - \int_0^y t dt$$

$$= xz - 2xyz - \frac{y^2}{2}$$

$$Q = - \int_0^z \underbrace{F_1(x, y, t) dt}_{= x^2 + 1}$$

$$= - z \cdot x^2 - z$$

$$R = 0$$

∴

$$G = \begin{pmatrix} xz - 2xyz - \frac{y^3}{z}, & -z x^2 - z, & 0 \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Veri h.ω

$$\left(\cancel{P_y - Q_z}, \cancel{P_z - Q_x}, Q_x - \cancel{P_y} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x^2 + 1, & x - 2xy, & y \end{pmatrix}$$

$$-Q_z = x^2 + 1 \quad \checkmark$$

$$P_z = x - 2xy \quad \checkmark$$

$$Q_x - P_y = -2xz + 2yz + \frac{2y}{z} = y \quad \checkmark$$

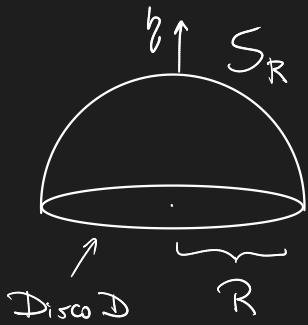
∴

$$G = \begin{pmatrix} xz - 2xyz - \frac{y^3}{z}, & -z x^2 - z, & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 21. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - x \cos z, -yz + y \cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo \mathbf{F} a través de S_R sea máximo.



Quiero R tq $\iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$ sea máx

\mathbf{F} es C^1 $\swarrow \mathbf{n}$ hacia abajo

$$\Rightarrow \iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS + \iint_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \cancel{x} - \cancel{\cos z} + \cancel{z} + \cancel{\cos z} + 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS + \iint_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = 0$$

$$\iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = - \iint_D \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$$

$\leftarrow \mathbf{n}$ hacia abajo

$$\iint_{S_R} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_{D^-} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle dS$$

$\leftarrow \mathbf{n}$ hacia arriba!

Debo parametrizar \mathcal{D}^-

$$\tau(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, 0) \quad r \in [0, R]$$

$$\begin{array}{c} z=0 \\ \downarrow \\ \mathcal{F}(x, y, 0) = (-x, y, 4 - (x^2 + y^2)) \end{array} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\mathcal{F}(\tau(r, \theta)) = (-r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, 4 - r^2)$$

$$\tau_r \times \tau_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ -r \cdot \sin \theta & r \cdot \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2r^2 \cdot \cos \theta, 2r^2 \cdot \sin \theta, r) \leftarrow r > 0 \Rightarrow \text{apunta hacia arriba} \checkmark$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{F}(\tau(r, \theta)), (2r^2 \cdot \cos \theta, 2r^2 \cdot \sin \theta, r) \rangle =$$

$$= -2r^3 \cdot \cos^2 \theta + 2r^3 \cdot \sin^2 \theta + 4r - r^3$$

es re los!



Pruebo simplificar antes de parametrizar:

$$z=0 \text{ y } \eta = (0, 0, 1) \text{ en todo } \mathcal{D}^-$$

$$\iint_{\mathcal{D}^-} \langle \mathcal{F}, \eta \rangle dS = \iint_{\mathcal{D}^-} \underbrace{\langle \mathcal{F}(x, y, 0), (0, 0, 1) \rangle}_{4 - (x^2 + y^2)} dS$$

$$= \iint_{D^-} 4 - (x^2 + y^2) \, ds$$

Use Polar $x = r \cdot \cos \theta$
 $y = r \cdot \sin \theta$

$|J_{\text{acob}}| = r$

No divisor!

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R (4 - r^2) \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left(2r^2 \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right)$$

$$\iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds = 2\pi \cdot \left(2R^2 - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$= 4\pi R^2 - \frac{\pi}{2} R^4 =: f(R)$$

Quiero R / $f(R)$ sea max

$$\Rightarrow f'(R) = 0$$

$$8\pi R - 2\pi R^3 = 0$$

$R > 0$

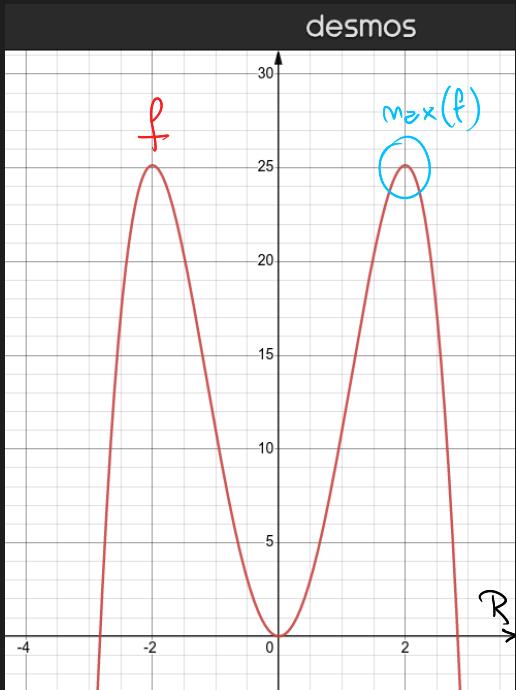
$$8\pi - 2\pi R^2 = 0$$

$$2\pi R^2 = 8\pi$$

$$R^2 = 4$$

$$\begin{matrix} R^{>0} \\ \downarrow \\ R = 2 \end{matrix}$$

Rto : $R = 2$ maximizes $\int_2 \text{integral}$



Ejercicio 22. Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Ves $\operatorname{div} \mathbf{V} = 1 + 1 - 1 = 1 > 0 \therefore$ se expande !



Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.



Para determinar si el fluido se está expandiendo, necesitamos calcular la divergencia del campo de velocidades \mathbf{V} . La divergencia nos indica si el fluido está experimentando una expansión o una contracción en un punto dado.

La fórmula para calcular la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ es:

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

En este caso, el campo de velocidades $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$, por lo que:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial z} = -1$$

Por lo tanto, la divergencia del campo de velocidades \mathbf{V} es:

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 1 + 1 - 1 = 1$$

Como la divergencia es positiva, el fluido está experimentando una expansión en todos los puntos del espacio.

Ejercicio 23. Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$ del espacio si la temperatura ambiente en el punto (x, y, z) en el instante t es $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. (Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1).

Sugerencia: Utilizar la Ley de Fourier que dice que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$ donde K es la conductividad térmica. Aquí, ∇T es el gradiente en las variables espaciales.

Soy de Boquita, peso el que sigue.

(21)

$$T(x, y, z, t) \text{ temperatura en } \underbrace{(x, y, z)}_{\bar{x}} \text{ en } t \Rightarrow T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow T: \mathbb{R}^3 \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F(\bar{x}, t) = -K \nabla T(\bar{x}, t) = -K(-2x, -2y, -2z)$$

$$\Rightarrow S = [0, 1] \times [0, 5] \times [0, 3]$$

$$\Rightarrow \iint_S (F(\bar{x}, s), n) ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F(\bar{x}, s)) d\bar{x}$$

Flujo a través de S

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} u(\bar{x}, t_0 + h) d\bar{x} - \iiint_{\Omega} u(\bar{x}, t_0) d\bar{x} = \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{\Omega} u(\bar{x}, s) d\bar{x} ds = \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, s) d\bar{x} ds$$

Nos interesa lo que entra en el cuarto
así que orientamos la superficie con la normal interior

Flujo de u a través de $\partial\Omega = S$ entre
 t_0 y t_0+h

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, s) d\bar{x} ds = - \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F(\bar{x}, s)) d\bar{x} ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = -\operatorname{div}(F(\bar{x}, t))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = \operatorname{div}\left(\frac{K \nabla T(\bar{x}, t)}{1}\right) = (-2 + (-2) + (-2)) = -6$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \iiint_{\Omega} -6 d\bar{x} dy dz dt = \int_0^1 \int_0^5 \int_0^3 -6x^2 dy dz dt = \int_0^1 \int_0^5 -18y^2 dz dt = \int_0^1 -90z^2 dt = -360 + \int_0^1 = -360$$

Ejercicio 24. Sea ρ la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades \mathbf{V} . Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa ρ es $\rho_t = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$.

?