Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 6: Ecuaciones de 2do. orden y sistemas de primer orden.

Ejercicio 1. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. ídem con t tendiendo a $-\infty$.

a) $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det|\lambda I - A| = \det\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-3) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Raíces $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\lambda_1 = 1$) $$V_1 = Nu\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$) $$V_2 = Nu\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sol

$$X(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot V_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot V_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{X(t) = C_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. ídem con t tendiendo a $-\infty$.

Si t -> inf entonces e^t tiende a inf siempre.
La única manera de que X(t) -> 0 cuando t -> inf es si c1=c2=0

Si t -> -inf entonces e^t -> 0 siempre.
Cualquier valor de c1 y c2 en R cumplen que X(t) -> 0 cuando t -> -inf

Obs:
Pensar en t -> inf es pensar qué pasa con el sistema en el futuro distante, en el límite.

Con t -> -inf es volver hacia atrás en el tiempo, ir a "los inicios" del sistema.

También lo puedo pensar de otra manera, pero no se si es necesario o solo se piden los c1, c2 que cumplan lo pedido.

Reescribiendo el dato inicial como una condición de t0 en el sistema del tipo:
    X(t0) = a0 con t0, a0 en R

Si t -> inf entonces e^t tiende a inf siempre.
Si lo escribo como un dato inicial de la forma que usualmente viene dado:
    X(t0) = 0 (con lo cual resuelvo y obtengo los c1 y c2 = 0 para cualquier t0 en R)

Si t -> -inf entonces e^t -> 0 siempre.
Cualquier valor de c1 y c2 en R cumplen que X(t) -> 0 cuando t -> -inf
Si lo escribo como un dato inicial de la forma que usualmente viene dado:
   X(t0) = ?? No puedo hacer lo mismo que arriba, porque para cualquier valor que elija de t0 y a0, voy a estar limitando los posibles valores de c1 y c2 que cumplen (que son todo R).

De ahora en más asumo que solo se piden c1 y c2 cuando se habla de "datos iniciales" en el ejercicio.

(b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$$X' = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} X$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 8 & 5 \\ -10 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+8)(\lambda-7) + 50$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 8\lambda - 56 + 50$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -3$$

$\lambda_1 = 2)$ $$Nu(2I - A) = Nu \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -3)$ $$V_2 = Nu(-3I - A) = Nu \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si $t \to \infty \Rightarrow e^{2t} \to \infty$ y $e^{-3t} \to 0$

$\Rightarrow C_1 = 0 \qquad \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}$

Datos iniciales $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Si $t \to -\infty \Rightarrow \begin{cases} C_1 \in \mathbb{R} \\ C_2 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-1) + 6$$

$$= \lambda^2 - \lambda + 4\lambda - 4 + 6$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = -1) \quad V_1 = Nu \begin{pmatrix} -1+4 & -3 \\ 2 & -1-1 \end{pmatrix}$$

$$= Nu \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2) \quad V_2 = Nu \begin{pmatrix} -2+4 & -3 \\ 2 & -2-1 \end{pmatrix}$$

$$= Nu \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Verifico porque nunca lo hice arriba

$$X' = -c_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 c_2 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} + 3 . c_2 . e^{-2t} \\ c_1 \cdot e^{-t} + 2 c_2 . e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 . c_1 . e^{-t} - 12 . c_2 . e^{-2t} + 3 c_1 \cdot e^{-t} + 6 c_2 . e^{-2t} \\ -2 c_1 \cdot e^{-t} - 6 . c_2 . e^{-2t} + c_1 . e^{-t} + 2 . c_2 . e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 . e^{-t} - 6 c_2 . e^{-2t} \\ -c_1 . e^{-t} - 4 c_2 . e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$= -c_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= X'(t)$$ ✓ verificado.

Si $t \to \infty \Rightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Si $t \to -\infty \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$$
\text{(d)} \begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}
$$

$$
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}
$$

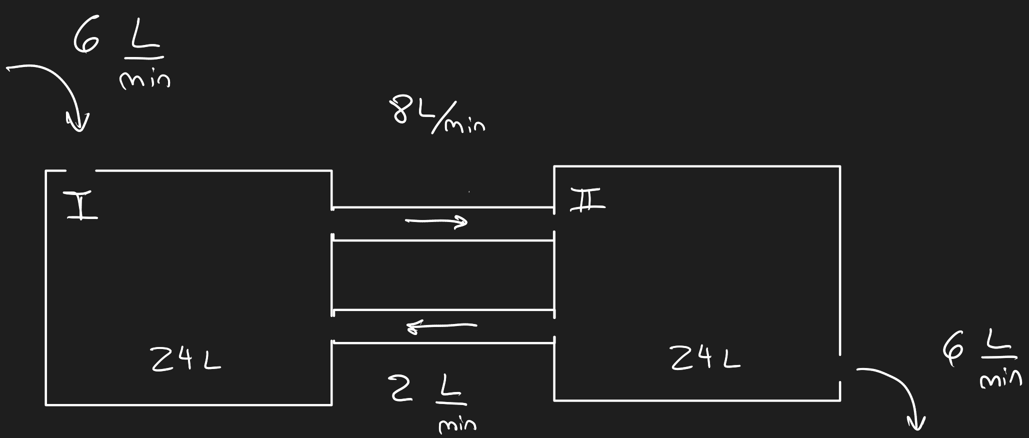
cambia signo!

$$
\det A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}
$$

```
El resto es igual a los 3 anteriores:
    Calculo TRES autovalores (supongo que son distintos)
    Calculo TRES autovectores
    Escribo solución y verifico derivando y comparando.
```

$$
X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot V_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot V_2 + c_3 \cdot e^{\lambda_3 t} \cdot V_3 \quad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}
$$

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 Kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque.?



en t_0 : x_0 kg sal

en t_0 : y_0 kg sal

Densidad de sol. de I :

$$\delta_I = \frac{\text{masa de sal}}{\text{Vol. de tanque}}$$

Sal en I :

$$\Delta x_I = \text{\# sal que entra} - \text{\# sal que sale}$$

$$\simeq \frac{x_{II}}{24L} \cdot 2\frac{L}{min} \cdot \Delta t - \frac{x_I}{24L} \cdot 8\frac{L}{min} \cdot \Delta t$$

Con $x_I = x_I(t) =$ sal en tanque I a tiempo t durante $\underbrace{\Delta t}_{\text{chiquito!}}$

$$\Delta x_{II} = \text{\# sal que entra} - \text{\# sal que sale}$$

$$\simeq \frac{x_I}{24L} \cdot 8\frac{L}{min} \cdot \Delta t - \frac{x_{II}}{24L} \cdot \left(2\frac{L}{min} + 6\frac{L}{min}\right) \cdot \Delta t$$

Vuelvo a I

$$\Delta X_I \simeq \frac{X_{II}}{24L} \cdot 2\frac{L}{min} \cdot \Delta t - \frac{X_I}{24L} \cdot 8\frac{L}{min} \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta X_I}{\Delta t} \simeq \frac{X_{II}}{24L} \cdot 2\frac{L}{min} - \frac{X_I}{24L} \cdot 8\frac{L}{min}$$

$$\frac{\Delta X_I}{\Delta t} \simeq \frac{X_{II}}{12} \cdot \frac{1}{min} - \frac{X_I}{3} \cdot \frac{1}{min}$$

$$\frac{\Delta X_I}{\Delta t} \simeq \frac{1}{12} \cdot X_{II} \cdot \frac{1}{min} - \frac{1}{3} X_I \cdot \frac{1}{min}$$

Si $\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta X_I}{\Delta t} = X_I'$

$$\Rightarrow \quad X_I'(t) = \frac{1}{12} \cdot X_{II} \cdot \frac{1}{min} - \frac{1}{3} X_I \cdot \frac{1}{min}$$

Lo mismo para X_{II}

$$X_{II}'(t) = \frac{1}{3} X_I \cdot \frac{1}{min} - \frac{1}{3} X_{II} \cdot \frac{1}{min}$$

Tengo el bendito sistema que buscaba :

$$\begin{cases} X_I'(t) = \frac{1}{12} \cdot X_{II} - \frac{1}{3} X_I \\ X_{II}'(t) = \frac{1}{3} X_I - \frac{1}{3} X_{II} \end{cases} \quad (\text{saco unidades})$$

$$X'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A} \cdot X$$

$$\det(\lambda . I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{3} & 0 - \frac{1}{12} \\ 0 - \frac{1}{3} & \lambda + \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{36}$$

$$= \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{36}}_{= \frac{4}{36}}$$

$$= \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{12}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$V_1 = Nu\left(-\frac{1}{2}I - A\right) = Nu\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} & 0 - \frac{1}{12} \\ 0 - \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= Nu\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = Nu\left(-\frac{1}{6}I - A\right) = Nu\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} & 0 - \frac{1}{12} \\ 0 - \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= Nu\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{6}t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si $t \to \infty \Rightarrow X(t) \to 0 \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Lo cual es esperable ya que siempre entra agua pura y sale agua con sal, vaciendo los tanques de sal y solo quedando agua pura.

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

Arrancan los autovalores complejos

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1 & +1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - i \\ \lambda_2 = 1 + i \end{cases}$$

$$V_1 = Nu \begin{pmatrix} 1-i-1 & 1 \\ -1 & 1-i-1 \end{pmatrix} = Nu \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{C}$:

$$X(t) = c_1 \cdot \overbrace{e^{\lambda_1 t}}^{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{V_1}_{\in \mathbb{C}^2} + c_2 \cdot \overbrace{e^{\lambda_2 t}}^{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{V_2}_{\in \mathbb{C}^2}$$

$$X_1(t) = c \cdot e^{(1-i).t} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

No se si hace falta agregar un c en estos pasos.

$$= c \cdot e^{t} \cdot e^{-it} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{t} \cdot \left(\cos(-t) + i \cdot \sin(-t) \right) \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c \cdot e^{t} \cdot \cos(-t) \cdot (-i) + c \cdot e^{t} \cdot i \cdot \sin(-t) \cdot (-i) \\ c \cdot e^{t} \cdot \cos(-t) \qquad + c \cdot e^{t} \cdot i \cdot \sin(-t) \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -i \cdot \cos(-t) \\ i \cdot \sin(-t) \end{pmatrix} + c \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix}$$

Base de sol. $= \left\{ e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} ; \quad e^{t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix} \right\}$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ \cos(-t) \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & +1 \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 + 2i \\ \lambda_2 = 2 - 2i \end{cases}$$

$$V_1 = N_u \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{C}$:

$$X_1(t) = C \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot V_1$$

Separo en parte $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

$$X_1(t) = C \cdot e^{2t} \cdot \underbrace{e^{2it}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$e^{2it} = \cos 2t + i \cdot \sin 2t$$

$$= C \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t + i \cdot \sin 2t \\ -2i \cdot \cos 2t - 2i \cdot i \cdot \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{2t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}}_{\text{parte } \mathbb{R}} + \underbrace{c \cdot e^{2t} \cdot i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2 \cos 2t \end{pmatrix}}_{\text{Parte im.}}$$

$\therefore$

$$\boxed{X(t) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2 \cos 2t \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$

Dos autovalores iguales!

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$V_1 = Nu\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

elijo $a = 1$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una componente de la Base de soluciones es

$$e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda es de la forma

$$e^{\lambda_1 t} \cdot (w + t \cdot V_1) =$$

$$= e^{2t} \cdot \left(w + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Falta obtener w

$$(A-\lambda I)\cdot w = v$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad w_2 = 1$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad e^{2t}\cdot\left(w + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{X(t) = c_1\cdot e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\cdot e^{2t}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda+5 & -9 \\ +4 & \lambda-7 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 35 + 36$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$V_1 = Nu \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una de las componentes de la base de soluciones es

$$e^t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La otra es de la forma

$$e^t \cdot \left(w - t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Calculo w:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot w = V_1$$

$$\begin{pmatrix} -5-1 & 9 \\ -4 & 7-1 \end{pmatrix} \cdot w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-6w_1 + 9w_2 = 3$$
$$-2w_1 + 3w_2 = 1$$

$$-4w_1 + 6w_2 = 2$$
$$-2w_1 + 3w_2 = 1$$

Iguales (como esperaba)

$$3w_2 = 1 + 2w_1$$
$$w_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}w_1$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\boxed{X(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{t} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - & - \\ - & \lambda - \end{pmatrix} \; ?$$ Tengo componentes que no son x_i

Debo usar el Método de Variación de Constantes
    1ero: Resuelvo Homogéneo asociado
    2do : Busco Solución particular

Homogéneo

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & +1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$

$$V_1 = Nu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = Nu \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Sol. Homog.

$$X_H(t) = c_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para la solución particular, asumo que c1 y c2 son c1(t) y c2(t)

$$X_p(t) = c_1(t) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2(t) \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

matricialmente

$$X_p(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ -e^{t} & -2e^{2t} \end{pmatrix}}_{Q(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}}_{C(t)}$$

Derivo

$$X_p'(t) = Q'(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

y tambien

$$X'_p(t) = A \cdot X_p(t) + b(t)$$

$$= A \cdot Q(t) \cdot C(t) + b(t)$$

Igualo ambas

$$A \cdot Q(t) \cdot C(t) + b(t) = Q'(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

A su vez, sé que

$$Q'(t) = A \cdot Q(t)$$

(pues las columnas de Q(t) son soluciones del homogéneo. O sea, es parte de un sistema sin las componentes independientes)

$$A \cdot Q(t) \cdot C(t) + b(t) = Q'(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

$$A \cdot Q(t) \cdot C(t) + b(t) = A\,Q(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

$$A \cdot Q(t) \cdot C(t) + b(t) = A\, Q(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

Simplifico

$$b(t) = Q(t) \cdot C'(t)$$

Solo basta resolver

$$Q(t)\, C'(t) = b(t)$$

o lo que es lo mismo, como $Q(t)$ es inversible

$$C'(t) = Q^{-1}(t) \cdot b(t)$$

Recuerdo: Inversa

Si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det Q}}_{\neq 0} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

```
Basta con calcular:
    Q^-1  >> Calculo la inversa
    b(t)  >> Son las componentes independientes
```

$$Q(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ -e^{t} & -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\det Q = -2e^{3t} + e^{3t} = -e^{3t}$$

$$Q^{-1} = -e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} -2e^{2t} & -e^{2t} \\ +e^{t} & e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +2e^{-t} & +e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

del enunciado.

$$\Rightarrow C'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$C_1'(t) = 4e^{-t} + t.e^{-t}$$

$$C_2'(t) = -2e^{-2t} - t.e^{-2t}$$

Integro c/u

$$\int u\,dv = u.v - \int v.du$$

$$\int C_1'(t)\,dt = \int 4e^{-t} + t.e^{-t}\,dt$$

$u = t \qquad du = 1$

$v = -e^{-t} \qquad dv = e^{-t}$

$$C_1(t) = -4e^{-t} - t.e^{-t} - \int -e^{-t}\,dt$$

$$= -4e^{-t} - t.e^{-t} - e^{-t}$$

elijo constante $= 0$

$$= -5e^{-t} - t.e^{-t}$$

$$C_1(t) = -e^{-t}(5+t)$$

Lo mismo con $C_2'(t)$

$$C_2'(t) = -2e^{-2t} - t.e^{-2t}$$

$$\int C_2'(t)\,dt = \int -2e^{-2t} - t.e^{-2t}\,dt$$

$\int u.\,dv = u.v - \int v.du$

$u = t \qquad du = 1$

$v = \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad dv = -e^{-2t}$

$$C_2(t) = e^{-2t} + \frac{1}{2}t.e^{-2t} - \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{-2t}\,dt}_{\frac{1}{4}e^{-2t}}$$

$$= e^{-2t} + \frac{1}{2}t.e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$$= \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}.t.e^{-2t}$$

Finalmente

$$C(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}(5+t) \\ e^{-2t}\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}.t\right) \end{pmatrix}$$

Reemplazando en

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ -e^{t} & -2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t} \cdot (-e^{-t}) \cdot (5+t) + e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} t \right) \\ -e^{t} \cdot (-e^{-t}) \cdot (5+t) - 2e^{2t} \cdot e^{-2t} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} t \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (5+t) + 1 \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} t \right) \\ 1 \cdot (5+t) - \cancel{2} \left(\frac{5}{\cancel{4}_{2}} + \frac{1}{\cancel{2}_{1}} t \right) \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} - \frac{1}{2} t \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$$

$$\boxed{X(t) = c_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} - \frac{1}{2} t \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sols. del homogéneo

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & +1 \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4$$

$$\lambda_1 = 2 + 2i$$

$$\lambda_2 = 2 - 2i$$

$$V_1 = \text{Nu} \begin{pmatrix} \cancel{2} + 2i - \cancel{2} & 1 \\ -4 & \cancel{2} + 2i - \cancel{2} \end{pmatrix}$$

$$= \text{Nu} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{C}$:

$$X(t) = c \cdot e^{(2+2i)t} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{2t} \cdot e^{2it} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{2t} \cdot \left(\cos 2t + i \cdot \sin 2t \right) \cdot \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} i \cdot \cos 2t - \sin 2t \\ 2i \cdot \sin 2t + 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$= c \cdot e^{2t} \cdot \left(i \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix} \right)$$

Tomo parte $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ como soluciones del Homogéneo:

$$\boxed{X_H(t) = c_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Busco sol. particular con método de var. de ctes.

Asumo c_1 y c_2 como funciones de t

$$X_p(t) = c_1(t) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} + c_2(t) \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{2t} \cdot \sin 2t & e^{2t} \cdot \cos 2t \\ e^{2t} \cdot 2\cos 2t & e^{2t} \cdot 2 \cdot \sin 2t \end{pmatrix}}_{Q(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}}_{C(t)}$$

$$X_p(t) = Q(t) \cdot C(t)$$

derivo

$$X_p'(t) = Q'(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

$\downarrow$ como Q contiene las soluciones del homogéneo, vale que

$$= A \cdot Q(t) \cdot C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

A su vez :

$$x'_p(t) = A \cdot \underbrace{X_p(t)}_{= Q(t) \cdot C(t)} + b(t)$$

Juntando ambas

$$\cancel{A \cdot Q(t) \cdot C(t)} + Q(t) \cdot C'(t) = \cancel{A \cdot Q(t) \cdot C(t)} + b(t)$$

$$Q(t) \cdot C'(t) = b(t)$$

$$C'(t) = Q^{-1}(t)\, b(t)$$

Calculo

$$Q^{-1}(t) = \frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \cdot \sin 2t & e^{2t} \cdot \cos 2t \\ e^{2t} \cdot 2\cos 2t & e^{2t} \cdot 2 \cdot \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\det Q(t) = -2e^{4t} \cdot \sin^2 2t - 2 \cdot e^{4t} \cdot \cos^2 2t$$

$$= -2 \cdot e^{4t} \left(\sin^2 2t + \cos^2 2t \right)$$

$$\det Q(t) = -2 \cdot e^{4t}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} e^{2t} \cdot 2 \cdot \sin 2t & -e^{2t} \cdot \cos 2t \\ -e^{2t} \cdot 2 \cdot \cos 2t & -e^{2t} \cdot \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -\sin 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \\ \cos 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}$$

Volviendo

$$C'(t) = Q^{-1}(t) \cdot b(t)$$

donde $b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$

$$C'(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -\sin 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \\ \cos 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t}\begin{pmatrix} -e^{2t}\cdot \sin 2t + 2\cdot\cos 2t \\ e^{2t}\cdot\cos 2t + 2\cdot\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2t + 2\cdot e^{-2t}\cdot\cos 2t \\ \cos 2t + 2\cdot e^{-2t}\cdot\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,dt = \int \sin 2t\,dt + \int 2\cdot e^{-2t}\cdot\cos 2t\,dt$$

$u = \cos 2t \quad du = -2\sin 2t$

$v = -e^{-2t} \quad dv = 2e^{-2t}$

Partes

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t - e^{-2t}\cdot \cos 2t - \int +e^{-2t}\cdot 2\sin 2t$$

$u = \sin 2t \qquad du = 2\cos 2t$

$v = -e^{-2t} \qquad dv = 2e^{-2t}$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t - e^{-2t}\cdot \cos 2t - \left(-e^{-2t}\cdot \sin 2t - \int -2\cdot e^{-2t}\cdot \cos 2t\right)$$

Resumo

① $\int 2\cdot e^{-2t}\cdot \cos 2t \, dt = -e^{-2t}\cdot \cos 2t - \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt$

② $\int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt = -e^{-2t}\cdot \sin 2t + \int 2\cdot e^{-2t}\cdot \cos 2t \, dt$

$\hookrightarrow \int 2\cdot e^{-2t}\cdot \cos 2t \, dt = e^{-2t}\cdot \sin 2t + \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt$

①

$$-e^{-2t}\cdot \cos 2t - \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt = e^{-2t}\cdot \sin 2t + \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt$$

$$-e^{-2t}\cdot \cos 2t - e^{-2t}\cdot \sin 2t = 2\cdot \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\cos 2t + \sin 2t\right) = \int 2e^{-2t}\cdot \sin 2t \, dt$$

Volviendo arriba ☆

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t - e^{-2t}\cdot\cos 2t - \int +e^{-2t}\cdot 2\sin 2t$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t - e^{-2t}\cdot\cos 2t - \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(\cos 2t + \sin 2t\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t - e^{-2t}\cdot\cos 2t + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t}\cdot\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\sin 2t$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\sin 2t$$

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos 2t + e^{-2t}\cdot\cos 2t - e^{-2t}\cdot\sin 2t\right)$$

Falta $C_2(t)$ ⇒ uso wolfram:

$$C_2(t) = \frac{1}{2}\cdot\sin 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\sin 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\cdot\cos 2t$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-2t}\cdot\sin 2t + e^{-2t}\cdot\cos 2t - \sin 2t\right)$$

Finalmente, reemplazo C y calculo en:

$$X_p(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{2t}\cdot\sin 2t & e^{2t}\cdot\cos 2t \\ e^{2t}\cdot 2\cos 2t & e^{2t}\cdot 2\cdot\sin 2t \end{pmatrix}}_{Q(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}}_{C(t)}$$

$$X_p(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{2t}\cdot \sin 2t\cdot\left(\cos 2t + e^{-2t}\cdot \cos 2t - e^{-2t}\cdot \sin 2t\right) + e^{2t}\cdot \cos 2t\left(e^{-2t}\cdot \sin 2t + e^{-2t}\cdot \cos 2t - \sin 2t\right) \\ \\ e^{2t}\cdot 2\cos 2t \cdot C_1(t) \\ e^{2t}\cdot 2\cdot \sin 2t \cdot C_2(t) \end{pmatrix}$$

No hago la cuenta porque no gano nada.

$\therefore$

$$\boxed{X(t) = c_1\cdot e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\cdot e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} + X_p(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$