

Ejercicio 25. Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz,$$

$$\iint_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz.$$

Aquí \mathbf{n} es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Gauss

$$\iint_{S=\partial\Omega} \langle F, \eta \rangle dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV$$

[1°] Si $F = f \nabla g$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow f \nabla g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

con

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = F_x + F_y + F_z$$

$$= \operatorname{div} f \nabla g = \operatorname{div} \left(f \cdot (g_x, g_y, g_z) \right)$$

$$= \operatorname{div} (f \cdot g_x, f \cdot g_y, f \cdot g_z)$$

$$= f_x \cdot g_x + \underbrace{f \cdot g_{xx} + f_y \cdot g_{xy} + f \cdot g_{yx} + f_z \cdot g_{yz} + f \cdot g_{zy} + f \cdot g_{zz}}_{= f \cdot \Delta g}$$

$$= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

∴

$$\iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g, \eta \rangle dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle dV \quad \checkmark$$

$$\boxed{2^\circ} \quad \iint_{\partial \Omega} \underbrace{\langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle}_{=: F} dS = \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \underbrace{\operatorname{div} f \nabla g}_{\text{Calculé en } \boxed{1^\circ}} - \operatorname{div} g \nabla f$$

$$\operatorname{div} g \nabla f = \operatorname{div} (g \cdot f_x, g \cdot f_y, g \cdot f_z)$$

$$\begin{aligned}
 &= g_x \cdot f_x + g \cdot f_{xx} + g_y \cdot f_y + g \cdot f_{yy} + g_z \cdot f_z + g \cdot f_{zz} \\
 &= g \cdot \Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \operatorname{div} F &= f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle - g \cdot \Delta f - \langle \nabla f, \nabla g \rangle \\
 &= f \Delta g - g \cdot \Delta f
 \end{aligned}$$

◦◦

$$\iint_{\partial \Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle dS = \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV \quad \checkmark$$

Ejercicio 26. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor del operador Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \neq 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω . En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ .

Utilizando las identidades de Green del Ejercicio 25, mostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f g \, dV = 0$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \lambda f$$

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = \mu g$$

1° Identidad de Green

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g, \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dV$$

2° Identidad de Green $\left(\begin{array}{l} \text{fácil de acordarse} \\ \langle f \nabla g - g \nabla f, \eta \rangle \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (f \Delta g - g \Delta f) \end{array} \right)$

$$\iint_{\partial\Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g - g \Delta f \, dV$$

Reemplazo con datos

$$\iiint_{\Omega} f \Delta g - g \Delta f \, dV = \iiint_{\Omega} f \cdot \mu g - g \cdot \lambda f \, dV$$

$$\iint_{\partial\Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} (\mu - \lambda) \cdot f g \, dV$$

← Sobre el borde!

↳ Como $f = 0$ sobre $\partial\Omega$
 $g = 0$ sobre $\partial\Omega$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \cdot f_g \, dv = 0$$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda) \iiint_{\Omega} f_g \, dv = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} f_g \, dv = 0 //$$

Ejercicio 27. Sea B una bola en \mathbb{R}^3 . Ver que no puede haber una función $f \neq 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \quad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: Utilizar las identidades de Green del Ejercicio 25 para deducir que $\nabla f = 0$ en B . A continuación utilizar el Ejercicio 9 para deducir que f es constante.

1° Identidad de Green

$$\iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g, \eta \rangle dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle dV$$

2° Identidad de Green $\left(\begin{array}{c} \text{fácil de acordarse} \\ \langle f \nabla g - g \nabla f, \eta \rangle \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (f \Delta g - g \Delta f) \end{array} \right)$

$$\iint_{\partial \Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g - g \Delta f dV$$

Arranco en el borde con 1° Identidad (con f y g iguales)

• Dato $f = 0$ en ∂B

$$\iint_{\partial B} \langle f \nabla f, \eta \rangle dS = \iint_{\partial B} \langle 0, \eta \rangle dS = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_B f \Delta f + \langle \nabla f, \nabla f \rangle dV = 0$$

• Dato $\Delta f = 0$ en B

$$\Rightarrow \iiint_B \underbrace{f \Delta f}_{=0} + \langle \nabla f, \nabla f \rangle dV = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_B \underbrace{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}_{= f_x \cdot f_x + f_y \cdot f_y + f_z \cdot f_z} dV = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_B \underbrace{f_x^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_y^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_z^2}_{\geq 0} dv = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

$$\therefore \nabla f = 0$$

// Listo 1° Parte.

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en \mathbb{R}^3 . Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B .

Resolví:

Llamo F a ∇f

$\Rightarrow F$ es campo gradiente

\Rightarrow La integral sobre cualquier curva C es

$$\int_C F \cdot ds = f(b) - f(a)$$

Como $F = 0$

$$\int_C F \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = 0$$

$f(a) = f(b)$ para cualquier par de puntos en B

Finalmente

Como f es constante en B y $f = 0$ en ∂B

$$\Rightarrow f \equiv 0 \text{ en } B \quad \square$$

Ejercicio 28. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es C y la circulación se da en el sentido de recorrido de C inducido por la normal elegida sobre S .

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: Considerar un disco de radio ρ en un plano como superficie S . Aplicar el Teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer ρ tender a 0 y posteriormente utilizar que el plano era arbitrario.

Reordenar

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$c \cdot \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Stokes

$$\int_{C=\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow c \iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \frac{d}{dt} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Asumo S como un disco D de radio r

$$c \iint_{D_r} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Divido por Área(D_r)

$$\frac{1}{\pi \cdot r^2} \left(c \iint_{D_r} \nabla \times E \, dS + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} H \cdot dS \right) = 0$$

Tomamos $\lim_{r \rightarrow 0}$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \cdot r^2} \left(c \iint_{D_r} \nabla \times E \, dS + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} H \cdot dS \right) = 0$$

Obtengo

$$c \cdot \nabla \times E \text{ en el centro de } D_r \text{ (lo llamo } a) \\ + \frac{dH}{dt} \text{ en el centro de } D_r$$

$$\Rightarrow c \cdot \nabla \times E(a) + \frac{dH}{dt}(a) = 0$$

Como D_r fue arbitrario \Rightarrow vde para cualquier S

$$\therefore H_t + c \cdot \nabla \times E = 0$$

□

