Ejercicio 8. Considere la ecuación lineal de primer orden

$$(*) \qquad y' + p(x)\,y = q(x).$$

(a) Busque una función $\mu(x)$ tal que

$$\mu(x)\big(y'(x) + p(x)\,y(x)\big) = \big(\mu(x)\,y(x)\big)'.$$

(b) Multiplique la ecuación $(*)$ por μ y halle su solución general. μ se denomina *factor integrante.*

$$\cancel{\mu \cdot y'} + \mu\, p \cdot y = \mu' \cdot y + \cancel{\mu \cdot y'}$$

$$\mu\, p \cdot \cancel{y} = \mu' \cdot \cancel{y} \qquad y \neq 0$$

$$\mu \cdot p = \mu'$$

$$p = \frac{\mu'}{\mu}$$

$$\int p\, dx = \int \frac{\mu'}{\mu}\, dx$$

$$\int p\, dx = \ln \mu$$

$$\boxed{e^{\int p\, dx} = \mu(x)}$$

b) $$\mu\,\underbrace{(y' + p \cdot y)}_{=q} \overset{(a)}{=} (\mu \cdot y)'$$

$$\int \mu \cdot q\, dx = \int (\mu \cdot y)'\, dx$$

$$= \mu \cdot y + C \qquad \text{elijo } C = 0$$

$$\mu \cdot y = \int \mu \cdot q\, dx$$

$$y = \frac{\int \mu \cdot q \, dx}{\mu} \qquad \mu \neq 0$$

$$\boxed{y = e^{-\int p\,dx} \cdot \int q \cdot e^{\int p\,dx} \, dx}$$

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de una curva tal que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es la mitad de la pendiente de la recta que une el punto con el origen.

$\sigma(t)$ curva

$\sigma'(t) = \frac{1}{2}$,

Revisar y hacer !

Ejercicio 10. Hallar la ecuación de las curvas tales que la normal en un punto cualquiera pasa por el origen.

Ejercicio 11. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto es una parábola.

Ejercicio 12. Hallar la ecuación de una curva del primer cuadrante tal que para cada punto (x_0, y_0) de la misma, la ordenada al origen de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) sea $2(x_0 + y_0)$.

Ejercicio 13.

1. Hallar las soluciones de:

$$\text{i)} \quad y' + y = \operatorname{sen}(x),$$
$$\text{ii)} \quad y' + y = 3\cos(2x).$$

2. Halle las soluciones de $y' + y = \operatorname{sen}(x) + 3\cos(2x)$ cuya gráfica pase por el origen (Piense, y no haga cuentas de más).