Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 7: Diagramas de fase.

Ejercicio 1. *Dinámica unidimensional.* En cada una de las siguientes ecuaciones para $x(t)$ de la forma $\dot{x} = f(x)$, realizar el gráfico de $f(x)$, hallar los puntos de equilibrio y realizar un bosquejo de la dinámica en el eje x. A partir de esto analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

(a) $\dot{x} = 1 - x^2$, (b) $\dot{x} = x^3 - x$, (c) $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$.

Ejercicio 2. Dibujar los campos vectoriales siguientes y tratar de deducir cuáles son las correspondientes líneas de flujo:

(a) $F(x, y) = (x, y)$, (b) $F(x, y) = (-y, x)$,

(c) $F(x, y) = (y, 0)$, (d) $F(x, y) = (-x + 2y, -2x - y)$.

Ejercicio 3. Considerar el sistema a un parámetro,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x, \\ \dot{y} &= \lambda y, \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinar todas las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

Ejercicio 4. Sea A una matiz diagonal de 2×2. Encontrar condiciones sobre A que garanticen que:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

para todas las soluciones de $\dot{x} = Ax$.

Ejercicio 5. Sea A una matriz de 2×2.

(a) ¿Cuál es la relación entre los campos $x \to Ax$ y $x \to (-A)x$?
(b) ¿Cuál es la relación geométrica entre la solución de $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = -Ax$?

Ejercicio 6. Determinar todas las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y hacer un bosquejo del diagrama de fases.

Ejercicio 7. Hallar las soluciones y realizar un bosquejo del diagrama de fases para los sistemas (b) y (d) del Ejercicio 2.

Ejercicio 8. Realizar un gráfico aproximado de las líneas de flujo de los siguientes campos vectoriales:

(a) $F(x, y) = (x^2, y^2)$ (b) $F(x, y) = (x, x^2)$ (c) $F(x, y) = (1, x + y)$

Ejercicio 9. Para los siguientes sistemas, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen} x + \cos y \\ \dot{y} = xy \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = (x+1)e^y - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$

Ejercicio 10. Para las siguientes ecuaciones, hallar los equilibrios y analizar su estabilidad:

(d) $\ddot{x} + c\dot{x} - x^3 = 1$, (e) $\ddot{x} + x^3 - x = 0$, (f) $\ddot{x} - x + \cos x = 0$.

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales hallar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos:

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = -1 + y + \operatorname{sen}(x) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = e^{x-y} - 1 \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} \dot{x} = x(y-1) - 4 \\ \dot{y} = x^2 - (y-1)^2 \end{cases}$$

Modelos de crecimiento poblacional.

Ejercicio 12. Dada una población $x(t)$ se denomina **tasa de crecimiento** a la razón $\frac{\dot{x}}{x}$.

Como se vió en la Práctica 5, un modelo que considera que hay una población límite K es el modelo logístico en el que la razón de crecimiento es de la forma $r\big(1 - \frac{x}{K}\big)$.

Cuando hay dos poblaciones que conviven, digamos x e y, las razones de crecimiento de éstas dependen de ambas poblaciones. El modelo más sencillo que considera una población de depredadores y y sus presas x es el de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}$$

con a, b, c, $d > 0$.

Si a este modelo se le agrega el hecho de que cada población tiene por si misma un límite para su supervivencia se obtiene el modelo

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - \delta x - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx - \gamma y) \end{cases}$$

con todas las constantes positivas.

Considerar los siguientes sistemas correspondientes a poblaciones de depredador–presa con crecimiento limitado:

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = x(2 - 3x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x - y) \end{cases}$$

Para cada uno de estos sistemas, encontrar los puntos de equilibrio y esbozar el diagrama de fases alrededor de cada uno de ellos. Observar que el comportamiento depende fuertemente de los valores de los parámetros.

Dinámica en un campo de fuerzas conservativo.

Dado $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

que toma la siguiente forma de sistema en el plano de fases

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x). \end{cases}$$

En mecánica $V(x)$ es el potencial y $-V'(x)$ es la fuerza.

Ejercicio 13. Demostrar que la energía

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

es una constante del movimiento. El primer término es el de la energía cinética y el segundo, la potencial.

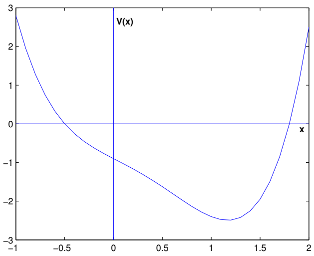
Ejercicio 14. Considerar $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes niveles de la energía $H(x,y)$. Verificar que todas las trayectorias son acotadas. Utilizar la cantidad conservada obtenida en el punto anterior para obtener la posición máxima en funcion del dato inicial. Este potencial es el del oscilador armónico, es decir un resorte sin la acción de fuerzas externas.

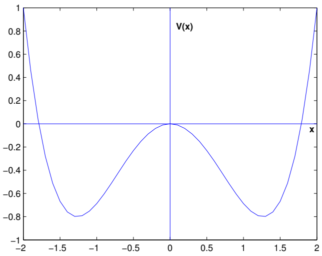
Ejercicio 15. $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ es el potencial que da origen a la fuerza a la que está sometida una masa m que cuelga de un resorte con costante k (llamamos x a la posición aunque el movimiento se desarrolla en sentido vertical para no confundir con la variable y del plano de fases que representa la velocidad). Compare este caso con el del ejercicio anterior.

Ejercicio 16. Considerar el potencial $V(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$, con $x > 0,\ a > 0$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes niveles de la energía. Describir cualitativamente el movimiento para valores iniciales tales que la energía sea positiva, negativa o nula. Se trata del movimiento radial (es decir, x representa la distancia al origen) de una partícula sometida a un campo gravitatorio, la cantidad $\frac{1}{x^2}$ suele interpretarse como un *potencial centrífugo*, y $V(x)$ es el *potencial eficaz.*

Ejercicio 17. Considerar el potencial del punto anterior. Fijado x_0 obtener el valor mínimo de $|y_0|$ para el cual la trayectoria cuyo nivel de energía es $H(x_0, y_0)$ es no acotada. (La cantidad y_0 es la *velocidad de escape.*)

Ejercicio 18. Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales:





Dinámica de un campo gradiente.

Ejercicio 19. Sea $V(x, y) = ax^2 + by^2 + x^2y$, con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Consideremos el sistema

$$\dot{X} = -\nabla V(X),$$

donde $X = (x(t), y(t))$.

(a) Verificar que el origen es un punto de equilibrio y clasificar su estabilidad en función de los parámetros a y b.
(b) Si a y b son no nulos, hallar los restantes puntos de equilibrio y analizar su estabilidad.
(c) Para una función $V(X)$ general, observar que los equilibrios son los puntos críticos de V. ¿De qué depende su estabilidad?

Campo central de fuerzas

Ejercicio 20. Considerar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central, esto es, se considera la ecuación

$$m\ddot{X} = -\nabla V(X), \qquad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\{0\}$$

donde $V(X) = V_0(|X|)$, con $V_0 \in C^2((0, \infty), \mathbb{R})$.

(a) Probar que el momento angular relativo al origen $M(X) = X \times m\dot{X}$ (producto vectorial) se conserva sobre las trayectorias. Es decir, $\frac{d}{dt}(M(X(t)) = 0$.
(b) Mostrar que las trayectorias son planares. Más específicalmente, si $X(t)$ es una trayectoria (solución) y $M_0 := M(X(t_0))$ para algún (cualquier) t_0, entonces $X(t)$ está contenida en el plano perpendicular a M_0.