Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar $x(t)$ la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0,$ b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1,$ d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

e) $x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0,$ f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

1) a) $x' - 2tx = t$ $\qquad\left(x = x(t) \right)$

$$x' = t + 2tx$$

$$x' = 2t\left(\frac{1}{2} + x\right)$$

$$\int \frac{x'}{\frac{1}{2} + x}\, dt = \int 2t \, dt$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\left|\frac{1}{2} + x\right| = \frac{1}{\frac{1}{2} + x} \cdot x'$$

$$\ln\left|\frac{1}{2} + x\right| = t^2 + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln\left|\frac{1}{2} + x\right|} = e^{t^2 + C}$$

$$\left|\frac{1}{2} + x\right| = \underbrace{e^{t^2}}_{>0} \cdot \underbrace{e^{C}}_{>0}$$

$$\frac{1}{2} + x = e^{t^2} \cdot \tilde{C} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$\boxed{x = e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2}}$$ Sol. general

Verifico

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} x' = \tilde{C} \cdot e^{t^2} \cdot 2t$$

Tenía como dato:

$$x' = t + 2t\,\underset{\sim}{x}$$

$$x' = t + 2t\left(e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= t + 2t \cdot e^{t^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}t$$

$$x = \tilde{C} \cdot 2t \cdot e^{t^2} \checkmark$$

$\therefore$ verifiqué que x es solución.

Condición inicial:

$$t = 1 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$\Rightarrow x(1) = e^{1^2} \cdot \tilde{C} - \frac{1}{2} = 0$$

$$e \cdot \tilde{C} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{2e}$$

Finalmente $\boxed{x(1) = 2}$

Solución particular:

$$x = \frac{1}{2e} \cdot e^{t^2} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2 - 1} - \frac{1}{2}}$$

Verifico

$$\longrightarrow x' = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot e^{t^2-1}$$

$$x' = t \cdot e^{t^2 - 1}$$

Dato:

$$x' = t + 2t\,x$$

$$x' = t + 2t \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{t^2-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$x' = t \cdot e^{t^2-1}$$ ✓ Verificado

- Intervalo maximal: $\mathbb{R}$
- Solución única.

b) $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$, $x(1) = 0$,

$$\frac{x'}{1+x^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x^2}\,dt = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\arctan(x) = \arctan(t) + C$$

$$x = \arctan^{-1}\left(\arctan(t) + c\right)$$

Recuerdo:

Variable t:

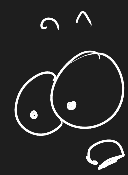
$$\left(\arctan(t)\right)' = \frac{1}{1+t^2}$$

Función x(t)

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x'$$

Sol. General

$$\boxed{x = \tan\left(\arctan(t) + c\right)}$$



Verifico

$$x' = \frac{1}{\cos^2(\arctan t + C)} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Dato

$$x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

$$x' = \frac{1 + \tan^2(\arctan t + c)}{1+t^2}$$

$$x' = \left(1 + \frac{\sin^2(\arctan t + c)}{\cos^2(\arctan t + c)}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$x' = \left(\frac{\cos^2(\arctan t + c)}{\cos^2(\arctan t + c)} + \frac{\sin^2(\arctan t + c)}{\cos^2(\arctan t + c)}\right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$x' = \left(\frac{\cos^2(\arctan t + c) + \sin^2(\arctan t + c)}{\cos^2(\arctan t + c)} \right) \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

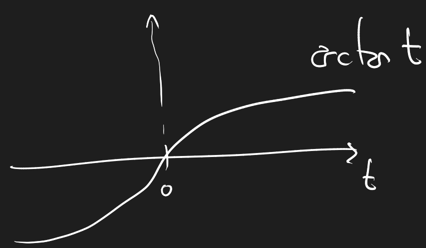
$$x' = \frac{1}{\cos^2(\arctan t + c)} \cdot \frac{1}{1+t^2} \quad \checkmark$$

Sol. Part.

$$t = 1 \Rightarrow x(1) = 0$$

$$\boxed{x = \tan\left(\arctan(t) + c\right)}$$

$$x(1) = \tan\big(\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} + c\big) = 0$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0$$

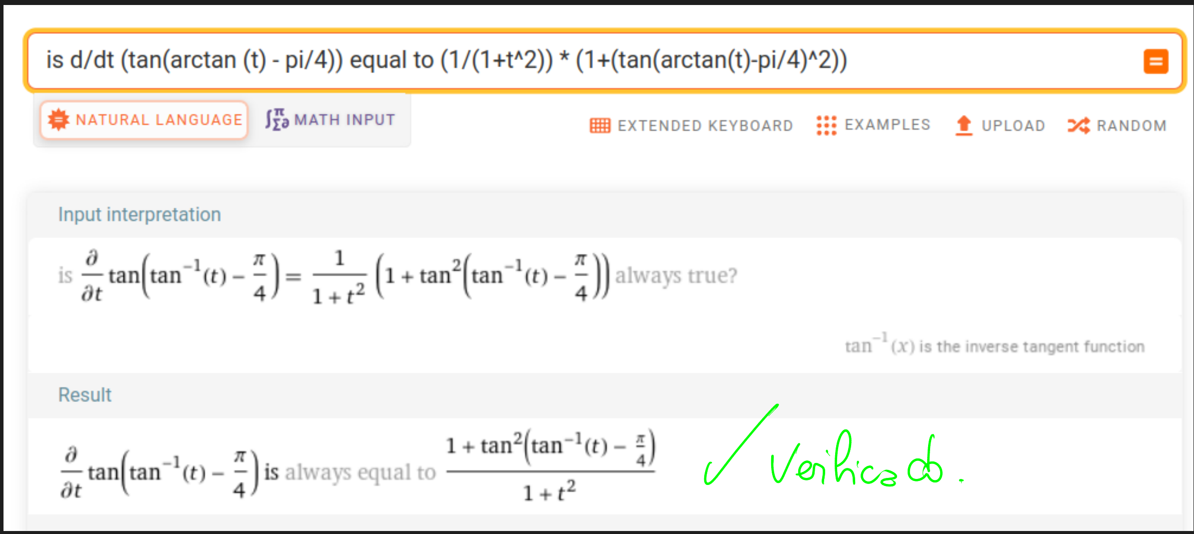
$$\frac{\pi}{4} + c = \underbrace{\arctan(0)}_{=0}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

Sol. Part.

$$x = \tan\left(\arctan(t) - \frac{\pi}{4}\right)$$

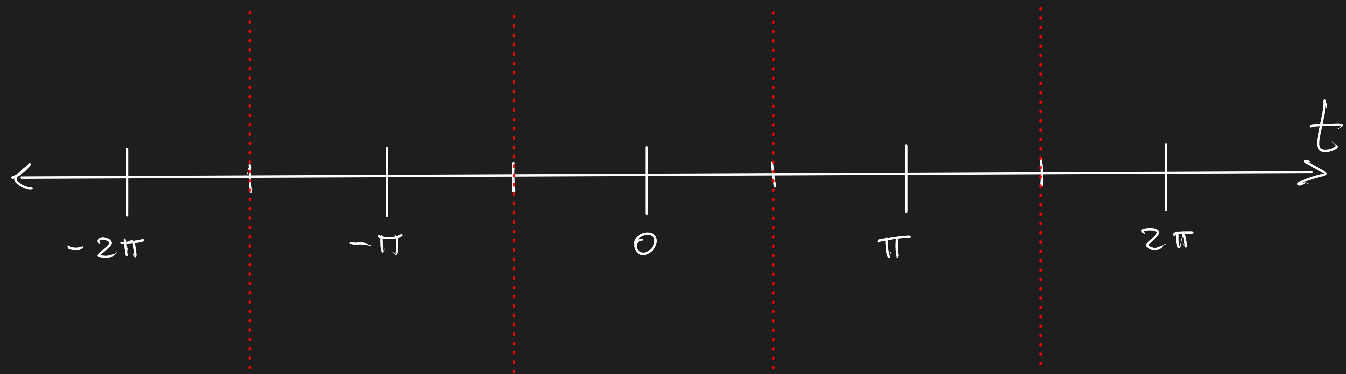
Verifico con Wolfram:



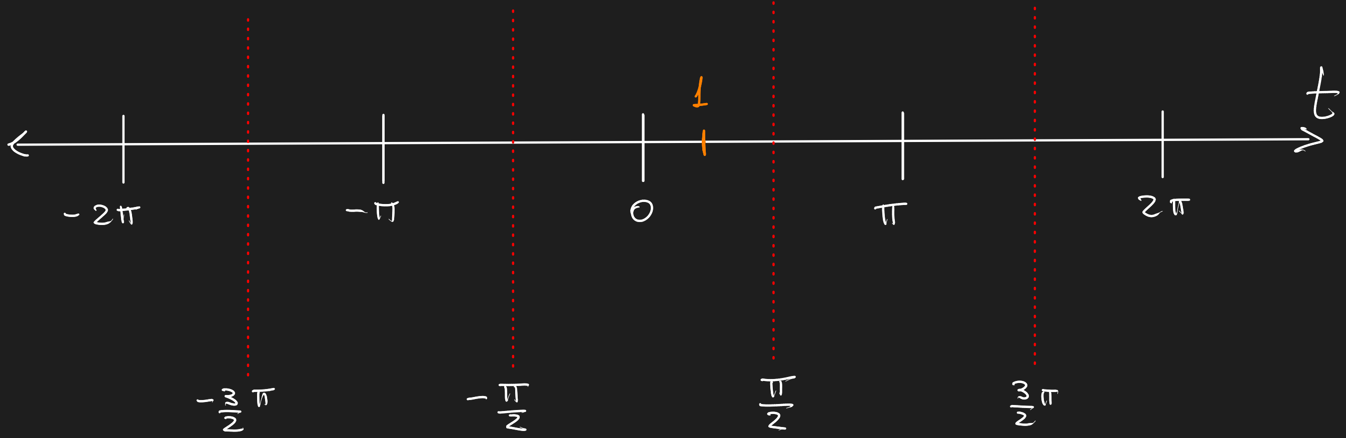
✓ Verificado.

Intervalo maximal:

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$ es indeterminado con $k \in \mathbb{Z}$



• Como $t = 1$ es dato, t debe estar en el intervalo



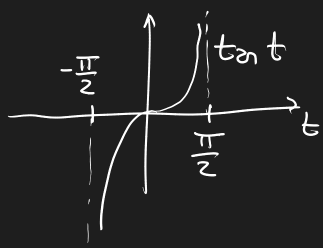
$$x = \tan\left(\arctan(t) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{4}\pi < \arctan t}_{t > -1} \; \underbrace{< \frac{3}{4}\pi}$$

$\arctan t$ es siempre $< \frac{3}{4}\pi$

pues tiene asíntota en $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{4}\pi$



$\therefore$

$$t \in (-1, +\infty)$$

$\uparrow$

Abierto pues $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ es indeterminado

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \qquad x(0) = 1,$

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt = \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$\ln|1+x| = \ln|1+t| + C$$

$e^{\square}$

$$|1+x| = \underbrace{e^{\ln|1+t|}}_{>0} \cdot \underbrace{e^{C}}_{>0}$$

$$1+x = |1+t| \cdot \tilde{C}$$

Sol General $\boxed{x = \tilde{C} \cdot |1+t| - 1}$

Verifico ?

Si $x(0) = 1$

$$\Rightarrow \tilde{C} \cdot |1+0| - 1 = 1$$

$$\tilde{C} - 1 = 1$$

$$\tilde{C} = 2$$

Sol. Part:

$$\boxed{x = 2|1+t| - 1}$$

$t \in \mathbb{R}$

Verifico

si $t \geq -1$

$\Rightarrow x = 2 + 2t - 1$

$\Rightarrow x' = 2$

si $t < -1$

$\Rightarrow x = -2 - 2t - 1$

$\Rightarrow x' = -2$

Dato

si $t \geq -1$

$$x' = \frac{1+x}{1+t} = \frac{\cancel{1} + 2 + 2t - \cancel{1}}{1+t}$$

$$= \frac{2(1+t)}{1+t} = 2 \checkmark$$

si $t < -1$:

$$x' = \frac{1+x}{1+t} = \frac{\cancel{1} + 2(-1-t) - \cancel{1}}{1+t}$$

$$= -2 \checkmark$$

Verificado

d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt}_{\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}}$$

$$\ln|1+x| = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$(e^{\square}$

$$|1+x| = e^{\frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|)} \cdot e^C$$

$$= \left(e^{\ln|t-1| - \ln|t+1|}\right)^{1/2} \cdot \tilde{c} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$= \left(\frac{e^{\ln|t-1|}}{e^{\ln|t+1|}}\right)^{1/2} \cdot \tilde{c}$$

$$|1+x| = \left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right)^{1/2} \cdot \tilde{c}$$

$$1+x = \begin{cases} -\tilde{c}\sqrt{\dfrac{|t-1|}{|t+1|}} \Rightarrow x = -\tilde{c}\sqrt{\dfrac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \\[2ex] +\tilde{c}\sqrt{\dfrac{|t-1|}{|t+1|}} \Rightarrow x = \tilde{c}\sqrt{\dfrac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$x(0) = 1$$

Ⓘ $x = -\tilde{c}\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \overset{t=0}{\Rightarrow} 1 = -\tilde{c}\sqrt{1} - 1$

$\tilde{c} = -2$

Ⓘⓘ $x = \tilde{c}\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1 \Rightarrow 1 = \tilde{c} - 1$

$\tilde{c} = 2$

Obs

Para cada solución Ⓘ y Ⓘⓘ, obtuve un $\tilde{c}$ distinto

Sol. Part Ⓘ

$$x = \underbrace{2}_{-\tilde{c}_1}\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1$$

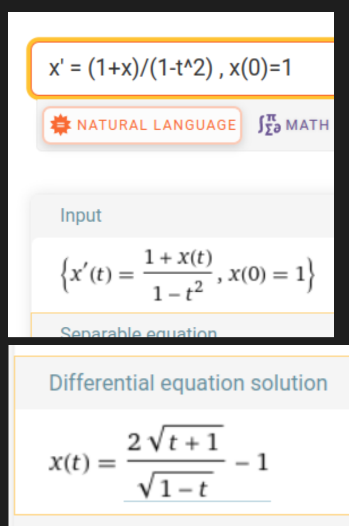
Sol. Part. Ⓘⓘ

$$x = \underbrace{2}_{\tilde{c}_2}\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1$$

Son la misma solución!

Sol. Part

$$\boxed{x = 2\sqrt{\frac{|t-1|}{|t+1|}} - 1} \quad t \in \mathbb{R}$$



e) $x' - x^{1/3} = 0, \qquad x(0) = 0,$

$X \equiv 0$ es sol.

Otra

$$X' = X^{1/3}$$

$$\frac{X'}{X^{1/3}} = 1 \qquad X \neq 0$$

$$\int \frac{X'}{X^{1/3}}\, dt = \int 1\, dt$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2} X^{2/3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot X^{-1/3} \cdot X'$$

$$\frac{3}{2} \cdot X^{2/3} = t + C$$

$$X^{2/3} = \frac{2}{3} \cdot t + C$$

Sol. general:

$$\boxed{X = \left(\frac{2}{3} \cdot t + C\right)^{3/2}}$$

Si $X(0) = 0$

$$X(0) = \left(0 + C\right)^{3/2} = 0$$

$$C^{3/2} = 0$$

$$C = 0$$

∴ sol. Particular:

$$\boxed{X = \left(\frac{2}{3} t\right)^{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{6} \cdot t^{3/2}}$$

Verifico

$$x' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}} \sqrt{6} \cdot t^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6} \cdot t^{1/2}$$

$$x^{1/3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{1/2}$$

Dato

$$x' - x^{1/3} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\sqrt{6}}\cdot t^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t^{1/2} = 0 \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Verificada.

$t \in \mathbb{R}$

f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt \overset{\substack{x\neq -1\\ t\neq -1}}{=} \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$\ln|1+x| = \ln|1+t| + C$$

$(e^{\square})$

$$|1+x| = |1+t|\cdot\tilde{C}$$

Paso a Sol. Part. de una, para no tener que separar en casos

$$x(0) = -1$$

$$|1-1| = |1+0|\cdot\tilde{C}$$

$$0 = \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad |1+x| = 0$$

$$\boxed{x \equiv -1}$$ Sol Particular.

$\hookrightarrow \quad \underbrace{x'}_{=0} = \dfrac{1+x}{1+t} \}=0$ ✓ Verificado

Como $t \neq -1$

$\Rightarrow$ Los intervalos son $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$

Como $t=0$ debe estar en el inter. $\Rightarrow t \in (-1, +\infty)$

Ejercicio 2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina tasa de crecimiento de la población a la función definida como el cociente y'/y.

(a) Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.
(b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.
(c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?
(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.
(e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t $(at + b)$.
(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

a) $\frac{y'}{y} = a$ con $a \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int a\,dt$$

$$\ln|y| = at + C$$

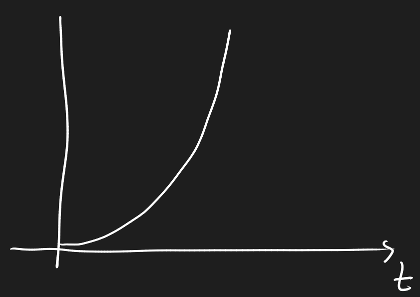
$(e^{\square}$

$$|y| = e^{a.t} \cdot \tilde{C} \quad \} > 0$$

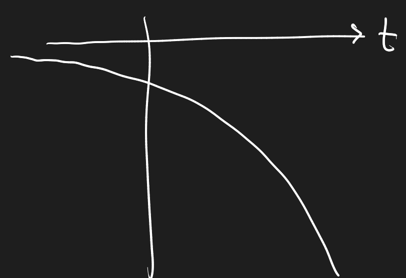
$$\boxed{y = \tilde{C} \cdot e^{at} \quad \text{con } a \in \mathbb{R},\ \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0} \ \left(\text{pues } \tilde{C} = e^{C}\right)}$$

b)

$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$

c) $\dfrac{y'}{y} = 0$

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int 0\,dt$$

$$\ln|y| = 0 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = 1 \cdot e^{c}$$

$$y = \tilde{C} \qquad \text{con } \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

(Notar que $y = \begin{cases} -e^{c} \\ +e^{c} \end{cases}$

Si y es cte $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = 0$

d)

4 meses, 120 días

01/01/2022 $\Rightarrow$ 1000 individuos

01/05/2022 $\Rightarrow$ 1020 individuos

+20

Uso

$$\boxed{y = \tilde{C} \cdot e^{at} \quad \text{con } a \in \mathbb{R},\ \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0} \ \left(\text{pues } \tilde{C} = e^{c}\right)}$$

$t = 0 \Rightarrow y(0) = 1000$

$t = 120 \Rightarrow y(120) = 1020$

$y(0) = 1000 = \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = 1000$

$y(120) = 1020 = 1000 \cdot e^{a \cdot 120}$

$$e^{120 \cdot a} = 1{,}02$$

$(\ln$

$$120 \cdot a = \ln(1{,}02)$$

$$a = \frac{\ln(1{,}02)}{120}$$

$$\boxed{y = 1000 \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{con} \quad a = \frac{\ln(1{,}02)}{120}}$$

e) $\frac{y}{y'} = at + b$

$$\int \frac{y}{y'}\,dt = \int at + b\,dt$$

$$\ln|y| = \frac{a}{2}.t^2 + b.t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{\frac{a}{2}.t^2 + b.t} . e^c$$

$$|y| = \tilde{C} . e^{\frac{a}{2}.t^2 + b.t} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{>0}$$

Como hay un módulo, podría juntar los casos con $\tilde{C}$ y $-\tilde{C}$ en $\bar{C}$

$$y = \bar{C} . e^{\frac{a}{2}.t^2 + b.t} \qquad \bar{C} \in \mathbb{R}$$

PERO !

Como y representa el tamaño de una población

$\Rightarrow$ $y \geq 0$ siempre

$\therefore$

$$y = \tilde{C} . e^{\frac{a}{2}.t^2 + b.t} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Caso borde:

Agrego el cero pues debe existir la posibilidad de una población nula que nunca cambia (es siempre cero)

(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado crecimiento logístico, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado crecimiento exponencial (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

$$\frac{y'}{y} = r - \underbrace{cy}_{} \qquad r, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Si y es pequeño, este término "desaparece" quedando

$$\boxed{\frac{y'}{y} \approx r}$$ Crecimiento exponencial

Para la parte de que tiende a y=r/c, ver resueltos. Yo no lo entiendos.

Ejercicio 3. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en 1 hora ¿Cuánto habrá aumentado en 2 horas?.

Datos

- $\frac{y'}{y} = a \cdot y$
- $y(t) = 2 \cdot y(t+1)$

$$\int \frac{y'}{y^2}\, dt = \int a \cdot dt$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial t} y^{-1} = -y^{-2} \cdot y'$$

$$= -\frac{y'}{y^2}$$

$$-y^{-1} = a \cdot t + C \qquad a, C \in \mathbb{R} \quad y \neq 0$$

Sol. general

$$\boxed{y = \frac{-1}{a \cdot t + C}} \qquad a \cdot t + C \neq 0$$

Busco relaciones usando:

$$y(t) = 2 \cdot y(t+1)$$

$$\frac{\cancel{-}1}{a \cdot t + C} = \frac{\cancel{-}2}{a(t+1) + C}$$

$$a \cdot t + a + C = 2at + 2C$$

$$0 = a \cdot t + C - a$$

$$t = \frac{a - C}{a} \qquad a \neq 0$$

Si $t=0$

$$\Rightarrow \quad a - c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = c$$

Sol. general

$$\boxed{y = \frac{-1}{a.t + c}}$$

en $t=0$

$$y(0) = \frac{-1}{c}$$

$$y(1) = 2 . y(0)$$

$$\underbrace{y(2) = 4 . y(0)}_{\text{esto ya lo sabía sin calcular } y(t) \ldots} = \frac{-4}{c} \quad ?$$