Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$
ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$
iii) $y'' - y' - 2y = 0$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

i) Polin. caract.

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot t \cdot e^{4t}$$

Antes, para calcular la segunda componente de la base de soluciones,
debia calcular el W en
    (A - lambda I) W = V
con V el autovector asociado al autovalor lambda encontrado.

Ahora, la variable "y" es unidimensional, por lo que siempre puedo escribir
la segunda componente de la base como t * la_primera.

Ahora pide

Uso t en vez de x porque ya la nombré así
más arriba.

$$y'' - 8y' + 16y = t$$

Sol. es de la forma

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

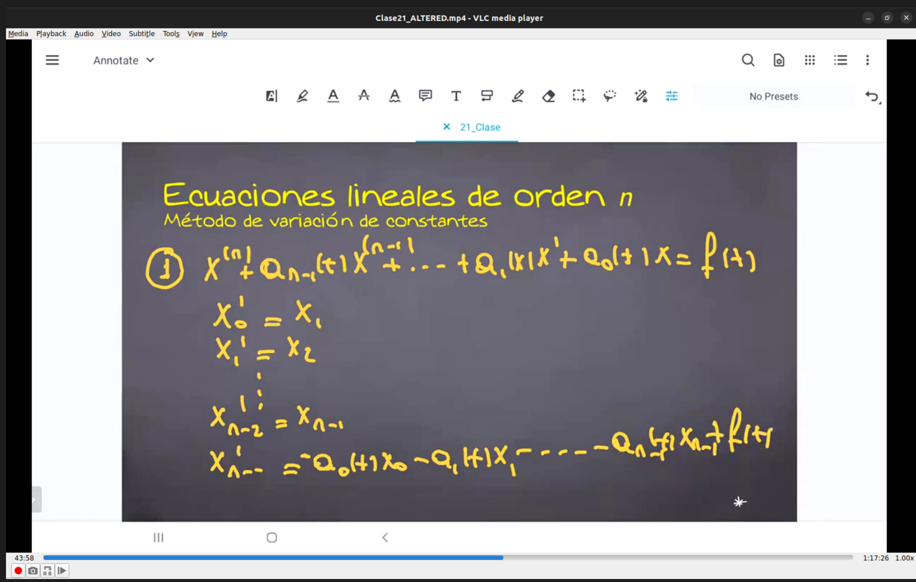
la calculé arriba

Para obtener $y_{Particular}$ uso Mét. de Var. de Ctes.

$$y_p(t) = C_1(t)\cdot e^{4t} + C_2(t)\cdot t\cdot e^{4t}$$

Acá es donde renombro variables para crear un nuevo sistema

$$\begin{aligned}
y &= y_0 \\
y_0' &= y_1 = y' \\
y_1' &= y_2 = y'' \\
&\vdots \\
y_{n-2}' &= y_{n-1} = y^{(n-1)}
\end{aligned}$$



$$y_{n-1}' = -a_0(t)\cdot y_0 - a_1(t)\cdot y_1 - \dots - a_{n-1}(t)\cdot y_{n-1} + f(t)$$

Para este ejercicio:

$$y'' - 8y' + 16y = t$$

$$\begin{cases}
y = y_0 \\
y_0' = y_1 \\
y_1' = -16\,y_0 + 8\,y_1 + t = y_2
\end{cases}$$

En este sistema tengo todas variables de primer grado

$$\Rightarrow (2)\quad \begin{pmatrix} x_0' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

Sabemos que $\exists \{X_1 \dots X_n\}$ base del conjunto de soluciones de

$$X' = A(t) X$$

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \{x_1 \dots x_n\}$$

Entonces

$$x_p(t) = c_1(t) x_1(t) + \dots + c_n(t) x_n(t)$$

es una solución (1)

Vimos que

$$\left(X_1 \,|\, \cdots \,|\, X_n(t) \right) \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1' & x_2' & & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' x_1 + \dots + c_n' x_n = 0 \\ c_1' x_1' + \dots + c_n' x_n' = 0 \\ c_1' x_1^{(n-1)} + \dots + c_n' x_n^{(n-1)} = f(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Puedo evitar pasar por el sistema}}$$

Ec. lineales homogéneas de orden n

Coeficientes constantes

La matriz asociada a nuestra ecuación es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

que es el polinomio que se obtiene cuando se reemplaza en la ecuación diferencial la derivación por la correspondiente potencia de λ. Llamaremos a este polinomio el polinomio característico de la ecuación.

Por lo tanto, la expresión de las soluciones dependerá de las raíces del polinomio característico de la ecuación.

Teniendo las soluciones del homogéneo y_H, necesito alguna solución particular y_P,
para sumar ambas y obtener la solución general y

Supongo que las constantes de la solución del homogéneo son ahora funciones de t
(de ahí el nombre del método de variación de constantes/de parámetros)

$$y_p(t) = c_1(t) \cdot \underbrace{e^{4t}}_{\phi_1(t)} + c_2(t) \cdot \underbrace{t \cdot e^{4t}}_{\phi_2(t)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \cdot \phi_i(t)$$

Además, estas funciones verifican que

$$W(t) \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

Donde W(t) es la matriz Wronskiana de la base de soluciones del homogéneo

en general $\left(\phi_i = \phi_i(t) \right)$

$$W(t) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \cdots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \cdots & \phi_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \cdots & \phi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

en este ejercicio:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & t \cdot e^{4t} \\ 4e^{4t} & e^{4t} + 4t \cdot e^{4t} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} e^{4t} & t.e^{4t} \\ 4e^{4t} & e^{4t}+4t.e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Calculo inversa de W

$$\det W = e^{8t} + 4t.e^{8t} - 4t.e^{8t}$$
$$= e^{8t}$$

$$\Rightarrow W^{-1}(t) = e^{-8t} \cdot \begin{bmatrix} e^{4t}+4t.e^{4t} & -t.e^{4t} \\ -4e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-8t} \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 1+4t & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} 1+4t & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} 1+4t & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} -t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1' = -t^2 \cdot e^{-4t} \\ c_2' = t \cdot e^{4t} \end{cases}$$

$$C_1(t) = \int c_1' \, dt = \int -t^2 \cdot e^{-4t} \, dt$$

$$u = t^2 \qquad du = 2t$$

$$v = \frac{1}{4} e^{-4t} \qquad dv = -e^{-4t}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} - \int \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \cdot 2t \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} - \frac{1}{2} \int t \cdot e^{-4t} \cdot dt$$

$$u = t \qquad du = 1$$

$$v = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \qquad dv = e^{-4t}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{-4t} - \int -\frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{-4t} - \int \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \, dt \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{8} \cdot t \cdot e^{-4t} - \frac{1}{8} \int e^{-4t} \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{8} \cdot t \cdot e^{-4t} - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} e^{-4t} \right)$$

$$C_1(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 \cdot e^{-4t} + \frac{1}{8} \cdot t \cdot e^{-4t} + \frac{1}{32} e^{-4t}$$

$$C_2(t) = \int t \cdot e^{-4t} \cdot dt$$ ← la calculo en paso intermedio de C_1

$$= -\frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{-4t} + \int \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \, dt$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot t \cdot e^{-4t} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} e^{-4t} \right)$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{4} t \cdot e^{-4t} - \frac{1}{16} \cdot e^{-4t}$$