2. Integral de longitud de arco

Ejercicio 8. Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como *cicloide*.

Velocidad : $\sigma'(t)$

Rapidez : $\|\sigma'(t)\|$

Long de Arco : $\displaystyle\int_{t=0}^{t=2\pi} \|\sigma'(t)\|\, dt$

Velocidad:

$$\sigma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

Rapidez :

L. de A:

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left((1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 \right)^{1/2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} \right)^{1/2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\underbrace{1 - \cos t}}\ dt$$

Identidad trigo:

$$= 2 \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}\ dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}}\ dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right|\ dt$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x < 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ como $t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \frac{t}{2} \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \sin \frac{t}{2} \geq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\ dt$$

CA:

$$\left(-2 \cdot \cos \frac{t}{2}\right)' = +2 \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sin \frac{t}{2}$$

$$= 2 \cdot \left(-2 \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} \right.$$

$$= 2 \cdot \left(2 - (-2)\right)$$

$$= 8$$

La longitud de arco es 8 //

Ejercicio 9. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

(a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.
(b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t+1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

a) $\sigma'(t) = (1, 2t)$

$$\|(1, 2t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

Malísimo que sea todo con identidades trigonométricas. Una poronga estos ejercicios.

b) $\sigma'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1, 1\right)$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4t} + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4t} + 2}$$

$$\int_{10}^{20} \sqrt{\frac{1}{4t} + 2}\, dt \underset{\substack{u = 4t \\ du = 4\,dt}}{=} \int_{10}^{20} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{u} + 2}} \cdot \frac{1}{4} \cdot du$$

sale como la anterior,
con identidades

Identidades hiperbólicas

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$$

$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) \qquad \operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$$

$$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$$

$$1 + tg^2 = sec^2$$

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, y sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \to [a, b]$ una biyección C^1 con $g'(s) \neq 0$ para todo $s \in (\bar{a}, \bar{b})$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma\big(g(s)\big)$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ.

(a) Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

Param. Regular: $\quad \sigma'(t) = (0,0,0) = \vec{0}$

- Es C^1: Sigma prima tiene componentes contínuas.
- Sigma prima es distinta del vector cero.
- ~~Es inyectiva: Sigma(x) es distinta para todo x en el dominio~~

(esto es para mostrar que es simple

a) $\bar{\sigma}$ es regular?

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\big(g(s)\big)$$

↳ es $\mathcal{C}^1$?

$$\big(\bar{\sigma}(s)\big)' = \underbrace{\sigma'\big(g(s)\big)}_{\substack{\sigma \text{ continua} \\ \text{pues } \sigma \text{ es } \mathcal{C}^1}} \cdot \underbrace{g'(s)}_{\substack{\text{es continua} \\ \text{pues } g \text{ es } \mathcal{C}^1}}$$

$\therefore \bar{\sigma}(s)$ es $\mathcal{C}^1$

↳ $\big(\bar{\sigma}(s)\big)' \overset{?}{=} (0,0)$

$$\big(\bar{\sigma}(s)\big)' = \underbrace{\sigma'\big(g(s)\big)}_{\substack{\neq (0,0) \text{ pues} \\ \sigma \text{ es regular}}} \cdot \underbrace{g'(s)}_{\neq 0 \text{ por definición}}$$

$\therefore \big(\bar{\sigma}(s)\big)' \neq (0,0,0)$

↳ $\bar{\sigma}(s)$ es inyectiva?

Acá uso que g es biyección

Como $\sigma(t)$ es inyectiva (regular) $\forall t \in [a,b]$

$\Rightarrow \sigma(g(s))$ es inyectiva pues

$g: [\bar{a},\bar{b}] \to [a,b]$ biyectiva

$\therefore$ $\bar{\sigma}(s)$ es inyectiva.

Finalmente $\bar{\sigma}(s)$ es una reparametrización regular de $\sigma(t)$

y por ende, es una parametrización regular de la curva $\mathcal{C}$.

¡Revisar def de Regular y Resolución!

(b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_C f\, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_{t=a}^{t=b} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|\, dt \underset{\uparrow}{=} \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f(\bar{\sigma}(s)) \cdot \|\bar{\sigma}'(s)\|$$

$\bar{\sigma}$ es reparam regular de σ

Pues

$$\int_{s=\tilde{a}}^{s=\tilde{b}} f(\tilde{\sigma}(s)) \cdot \|\tilde{\sigma}'(s)\| \, ds = \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f\left(\sigma(g(s))\right) \cdot \| \sigma'(g(s)) \cdot g'(s) \| ds$$

$$= \int_{s=\bar{a}}^{s=\bar{b}} f\left(\sigma(g(s))\right) \cdot \| \sigma'(g(s))\| \cdot |g'(s)| \, ds$$

Como $t = g(s)$

$$dt = |g'(s)| \, ds$$

Revisar. ?

$\vdots$

$$= \int_{t=a}^{t=b} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, y sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Para cada $t \in [a, b]$ sea $h(t)$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sabemos que

$$h(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| \, d\tau.$$

La función $h(t)$ resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo t, por lo que admite una inversa continuamente diferenciable. A la reparametrización de σ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma\big(h^{-1}(s)\big)$ la llamamos *reparametrización por longitud de arco*. Probar que $\bar{\sigma}$ es tal que la longitud del arco que va de $\bar{\sigma}(0)$ a $\bar{\sigma}(s)$ es igual a s.

?

Ejercicio 12. Reparametrizar las siguientes curvas por longitud de arco.

(a) $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $\quad a = 0$, $b = 1$.

(b) $\sigma(t) = (2e^t, 3e^t + 1, -6e^t)$, $\quad a = 0$, $b = \ln 3$.

a) Calculo

$$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{2}$$

Defino h como

$$h : [0,1] \to [0, \mathcal{L}(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^t \|\sigma'(t)\| \, . dt$$

$$= \int_0^t \sqrt{2} \, . \, dt$$

$$= \sqrt{2} \, . \, t \Big|_0^t$$

$$h(t) = \sqrt{2} \, . \, t \quad \Rightarrow \quad h(1) = \sqrt{2} = \mathcal{L}(\sigma)$$

Llamo $s := h(t)$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{2} \, . \, t$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Defino $\bar{\sigma}(s)$ como $\mathcal{L}(\sigma)$

$$\bar{\sigma}(s) : [0, \sqrt{2}] \to [0, 1]$$

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{\sigma}(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) $\sigma(t) = (2e^t, 3e^t + 1, -6e^t), \quad a = 0, b = \ln 3.$

$$\sigma'(t) = (2e^t, 3e^t, -6e^t)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \left(4 \cdot e^{2t} + 9 \cdot e^{2t} + 36 \cdot e^{2t}\right)^{1/2}$$

$$= \left(49 e^{2t}\right)^{1/2}$$

$$= 7 \cdot e^t$$

Defino h como

$$h : [0, \ln 3] \to [0, \mathcal{L}(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^t 7 \cdot e^t \, dt$$

$$h(t) = 7 \cdot e^t \Rightarrow h(\ln 3) = 7 \cdot e^{\ln 3} = 21$$

llamo

$$s = 7 \cdot e^t \Rightarrow \frac{s}{7} = e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{7}\right)$$

Ahora defino

$$\bar{\sigma} : [0, 21] \to [0, \ln 3]$$

Mal no puede ser ln o

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\left(\ln \frac{s}{7}\right)$$

$$= \left(2 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}}, 3 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}} + 1, -6 \cdot e^{\ln \frac{s}{7}}\right)$$

$$\bar{\sigma}(s) = \left(\frac{2s}{7}, \frac{3s}{7} + 1, -\frac{6s}{7} \right)$$ Mal

Repito con otro límite en h

$$h : [0, 3] \to [0, \mathcal{L}(\sigma)]$$

$$h(t) = \int_0^{\ln t} 7 \cdot e^t \, dt$$ ← no se si puedo hacer eso!

$$h(t) = 7 \cdot e^{\ln t} \Rightarrow h(\ln 3) = 7 \cdot e^{\ln 3} = 21$$

$$= 7t \Rightarrow h(3) = 21 \quad \text{es lo mismo}$$

llamo

$$s = 7 \cdot e^t \Rightarrow \frac{s}{7} = e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{7}\right)$$

$$s = 7 \cdot t \Rightarrow \frac{s}{7} = t$$ ← salio del logo ! ¡!

Defino

$$\bar{\sigma} : [0, 21] \to [0, \ln 3]$$

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma\left(\frac{s}{7}\right)$$

$$= \left(2 \cdot e^{\frac{s}{7}}, 3 \cdot e^{\frac{s}{7}} + 1, -6e^{\frac{s}{7}} \right)$$

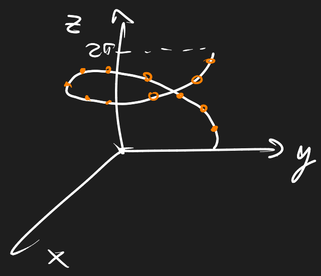
Mal también !

Ejercicio 13. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds$, donde σ es una parametrización de $\mathcal{C}$, en los casos siguientes:

(a) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$

(b) $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en (a).

(c) $f(x,y,z) = x \cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1].$



a) $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}$

$$= \sqrt{2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{2}\, dt$$

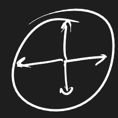
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin t + \cos t + t \, dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(-\cos t + \sin t + \frac{t^2}{2} \right|_0^{2\pi}$$

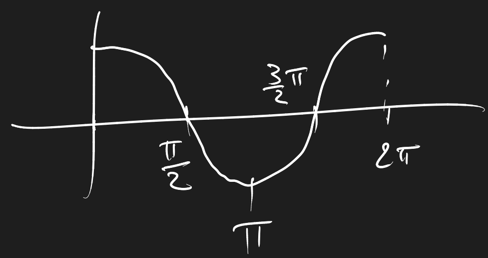
$$= \sqrt{2} \cdot \left(0 + 0 + \frac{4\pi^2}{2} \right)$$

(b) $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en (a).

(a) $f(x,y,z) = x + y + z$, $\quad \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$.
(b) $f(x,y,z) = \cos z$, $\quad \sigma$ como en (a).



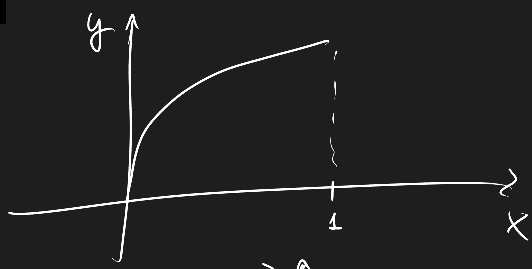
$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{2}\, dt$$

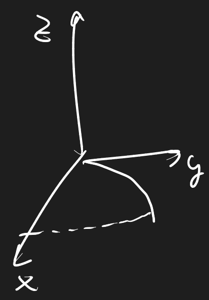


$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos t \, dt$$

$$= 0$$

(c) $f(x,y,z) = x\cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1].$





$$\sigma'(t) = (1, 2t, 0)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_0^1 f(\sigma(t)) \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot \sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$u = 4t^2 + 1$$

$$du = 8t \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot du = t \cdot dt$$

$$= \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{8} \cdot \sqrt{u} \cdot du$$

$$= \frac{1}{8} \int_1^5 \sqrt{u} \cdot du$$

CA:

$$\sqrt{u} = u^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left(u^{3/2}\right)' = \frac{3}{2} \cdot u^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}_{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot u^{3/2} \Big|_1^5$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \left(5^{3/2} - 1\right)$$

//

Ejercicio 14. (a) Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 15. Suponer que la semicircunferencia parametrizada por:

$$\sigma(\theta) = (0, a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta), \qquad \theta \in [0,\pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

(a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

(b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?

(c) Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x, y, z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

a) masa total $= \int_0^\pi \underbrace{\rho(\sigma(t))} \cdot \|\sigma'(t)\| \, d\theta$

$$= \int_0^\pi 2 \cdot \left(a^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta \right)^{1/2} d\theta$$

$$= 2 \cdot a \cdot \int_0^\pi 1 \cdot d\theta$$

$$= 2 \cdot a \cdot \pi$$

b) Centro de masa : ¿ Buscar !

era algo así como

$$¿\ \frac{\int_{\mathcal{C}} x \cdot \rho \, ds}{\int_{\mathcal{C}} \rho \, ds}\ ?$$

c) $f(x,y,z) = x + y - z$

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \int_0^{\pi} (0 + a.\sin\theta - a.\cos\theta) \cdot \underbrace{a}_{\|\sigma'\|} \cdot d\theta$$

$$= a^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta - \cos\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \cdot \left(-\cos\theta - \sin\theta \right|_0^{\pi}$$

$$= a^2 \cdot \left((1+1) - 0\right)$$

$$= 2a^2$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_0^{\pi} \|\sigma'\| \, ds \qquad \text{(Longitud de la curva)}$$

$$= a.\pi$$

$\therefore$ Temp promedio es

$$\boxed{T_P = \frac{\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds}{\mathcal{L}(\mathcal{C})} = \frac{2a^2}{2a} = a}$$

Ejercicio 16. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a, b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

(a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

a) $\sigma'(t) = (1, f'(t))$

$\|\sigma'(t)\| = \left(1^2 + (f'(t))^2\right)^{1/2}$

$\therefore \int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$

b) $\sigma(t) = (t, \ln(t))$ con $t \in [1, 2]$

$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt$

La muerte resolver esto!