Análisis II - V 2022
Nicolás Allo Gómez

Análisis asintótico de sistemas lineales de EDO's:

Diagrama de Fases

Repaso:

① Sistemas autónomos:

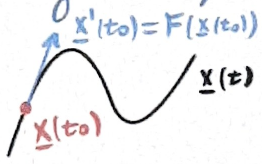
$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega)$, $\underline{X} = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

El sistema de EDO's $\underline{X}' = F(X(t))$ es autónomo si no depende de t en el sentido de que $F(t, \underline{X}) = F(\underline{X})$.

Para sistemas autónomos:

i) Una trayectoria $\underline{X} = \underline{X}(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema $\underline{X}' = F(\underline{X})$, donde I es un intervalo maximal de existencia.

Notar que si $\underline{X}$ es trayectoria, su vector tangente en $\underline{X}(t_0)$ es $\underline{X}'(t_0) = F(\underline{X}(t_0))$.



ii) $\underline{X}_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto de equilibrio si $F(\underline{X}_0) = \vec{0}$. En tal caso $\underline{X} \equiv \underline{X}_0$ es solución del sistema $\underline{X}' = F(\underline{X})$ y se dice una solución estacionaria (= trayectoria constante).

iii) Si $\underline{X}_1$ y $\underline{X}_2$ son dos trayectorias distintas del sistema $\underline{X}' = F(\underline{X})$, entonces sus gráficos no se intersecan.

② Caso particular de interés nuestro: sistema lineal a coeficientes constantes de 2×2.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

Sistema : $\underline{X}' = A \cdot \underline{X} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ es autónomo!

② La clase pasada vieron cómo resolver estos sistemas a partir de los autovalores de la matriz A:

Autovalores de A:

Son las raíces del polinomio característico

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$

A es de 2×2 ($\Rightarrow \chi_A$ tiene grado 2)

λ_1, λ_2 dos autovalores

Caso 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Caso 2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 = \lambda_2$.

- **Caso 2a):** La matriz A es diagonalizable.
- **Caso 2b):** La matriz A no es diagonalizable.

Caso 3: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(siempre: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$)

Obs:

Dado un sistema $\underline{X}' = A \cdot \underline{X}$, los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema homogéneo $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego, si la matriz A es inversible, entonces el único punto de equilibrio es $\underline{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es importante recordar que A es inversible si y sólo si $\lambda = 0$ NO es autovalor de A.

3 En esta clase estudiaremos el comportamiento asintótico (o sea, cuando $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$) de las soluciones (trayectorias) de estos sistemas. Haremos esto mediante el esbozo de un gráfico aproximado en $\mathbb{R}^2$ de las trayectorias: el diagrama de fases.

Análisis asintótico: estabilidad/inestabilidad.

Intuición:

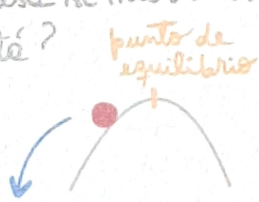
Imaginemos las siguientes situaciones:

Un objeto apoyado "perfectamente" en la cima de una colina:

Un objeto apoyado "perfectamente" en el fondo de un valle:

En ambos casos, los objetos están quietos, o sea, en equilibrio.

¿Qué pasa si movemos el objeto "un poco" del lugar de equilibrio en el que está?



el objeto se alejará del equilibrio cada vez más a lo largo del tiempo.

el equilibrio es inestable.

el objeto irá aproximándose cada vez más al equilibrio a lo largo del tiempo.

el equilibrio es estable.

Diagrama de Fases: clasificación.

Dado un sistema $X' = A \cdot X$ procederemos a esbozar el diagrama de fases del sistema a partir de cómo sean los autovalores λ_1 y λ_2 de A.

Para ello, siempre resolveremos primero el sistema en cuestión y luego nos concentraremos en el comportamiento de las soluciones y estudiaremos la estabilidad / inestabilidad de los puntos de equilibrio.

Resumen: $\underline{x}' = A \cdot \underline{x}$ con $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ no es autovalor.

Autovalores

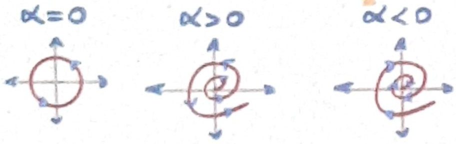
λ_1 y λ_2 ejes v_1 y v_2 (autovectores o base extendida)

Autovalores complejos no reales:

$\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $(\beta < 0)$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - \beta i$

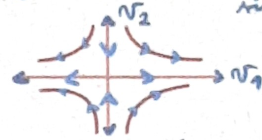
$\alpha = 0$ | $\alpha > 0$ | $\alpha < 0$



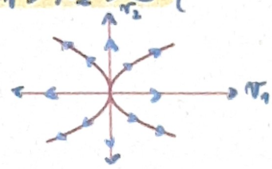
(ejes polares)

Autovalores reales.

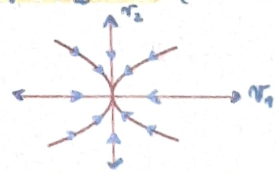
- Autovalores distintos
  - $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (distinto signo).



  - $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (ambos > 0).

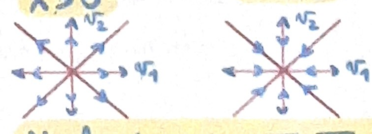


  - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (ambos < 0).



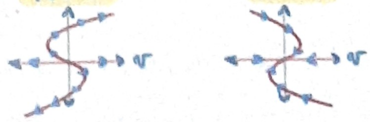
- Autovalor repetido $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
  - Hay base de autovectores.

$\lambda > 0$ | $\lambda < 0$



  - No hay base de autovectores.

$\lambda > 0$ | $\lambda < 0$



Ej:

Esbozar el diagrama de fases del sistema $\begin{cases} x' = 2x+2y \\ y' = -2x+7y \end{cases}$.

Solución:

$$\begin{cases} x' = 2x+2y \\ y' = -2x+7y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = 14+4 = 18 \neq 0$$

$\Rightarrow 0$ no es autovalor de A. Luego, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el único punto de equilibrio.

Tarea:

Resolver el sistema y concluir que la solución general es:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

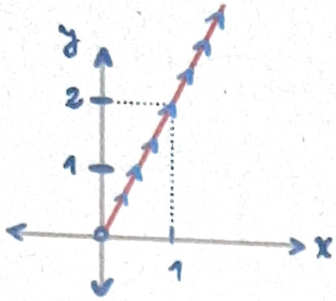
$$\left(\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18 \Rightarrow \text{Autovalores} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \rightsquigarrow S_{\lambda=3} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \lambda_2 = 6 \rightsquigarrow S_{\lambda=6} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{cases} \right)$$

1º) Si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall t$ solución estacionaria (con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ único punto de equilibrio).

2º) Si $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_2 \cdot \underbrace{e^{6t}}_{>0 \ \forall t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

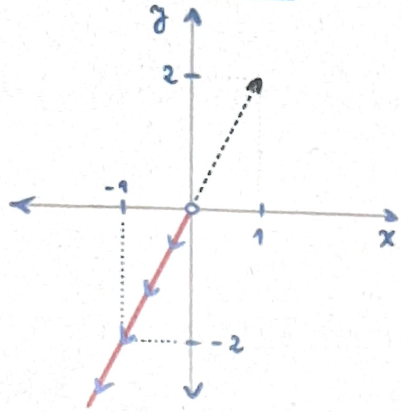
•) Si $C_2 > 0$: $X = \underbrace{C_2 \cdot e^{6t}}_{>0} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ múltiplos del $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ con su mismo sentido.



$$\lim_{t\to+\infty} C_2 e^{6t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lim_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}C_2 e^{6t}\cdot 1\\ C_2 e^{6t}\cdot 2\end{pmatrix} \begin{matrix}\to+\infty\\ \to+\infty\end{matrix}$$

$$\lim_{t\to-\infty} C_2 \underbrace{e^{6t}}_{\to 0}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

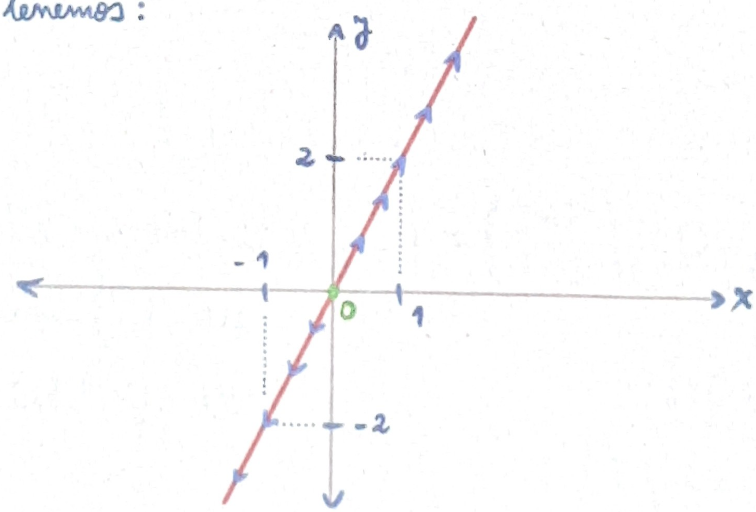
•) Si $C_2 < 0$: $X = \underbrace{C_2 \cdot e^{6t}}_{<0} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$ múltiplos del $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ con sentido contrario.



$$\lim_{t\to+\infty} C_2 e^{6t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lim_{t\to+\infty}\begin{pmatrix}\underbrace{C_2}_{<0} e^{6t}\cdot 1\\ \underbrace{C_2}_{<0} e^{6t}\cdot 2\end{pmatrix} \begin{matrix}\to-\infty\\ \to-\infty\end{matrix}$$

$$\lim_{t\to-\infty} C_2 \underbrace{e^{6t}}_{\to 0}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

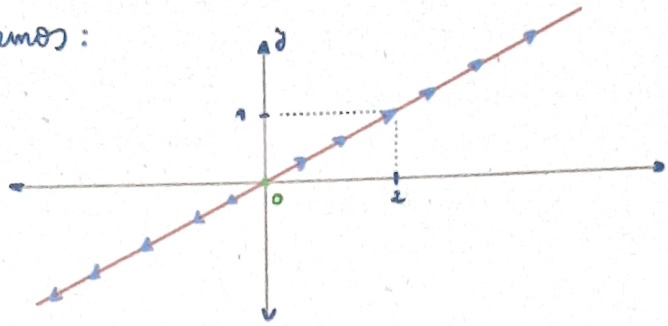
Si graficamos estas dos trayectorias juntas, y también la solución estacionaria $\underline{X} \equiv \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ tenemos:



3º) Hacemos el mismo análisis que recién pero ahora con $C_1 \neq 0$ y $C_2 = 0$:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos:



4º) $\underline{\text{Si } C_1 \neq 0 \text{ y } C_2 \neq 0}$:

Teníamos:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 \cdot e^{3t}}_{z} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{C_2 \cdot e^{6t}}_{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Llamemos:

- $z = C_1 e^{3t}$
- $w = C_2 e^{6t}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z \xrightarrow{t \to +\infty} \pm\infty \ (\text{según signo de } C_1) \\ z \xrightarrow{t \to -\infty} 0 \\ w \xrightarrow{t \to +\infty} \pm\infty \ (\text{según signo de } C_2) \\ w \xrightarrow{t \to -\infty} 0 \end{cases}$$

Despejemos w en función de z: (sin que quede t)

(1) $z = C_1 e^{3t}$ $\xrightarrow[\text{cuadrado}]{\text{elevo al}}$ $z^2 = (C_1 e^{3t})^2$

(2) $w = C_2 e^{6t}$ $\qquad z^2 = \underbrace{C_1^2}_{\neq 0} e^{6t} \Longrightarrow \boxed{e^{6t} = \frac{z^2}{C_1^2}}$ (3)

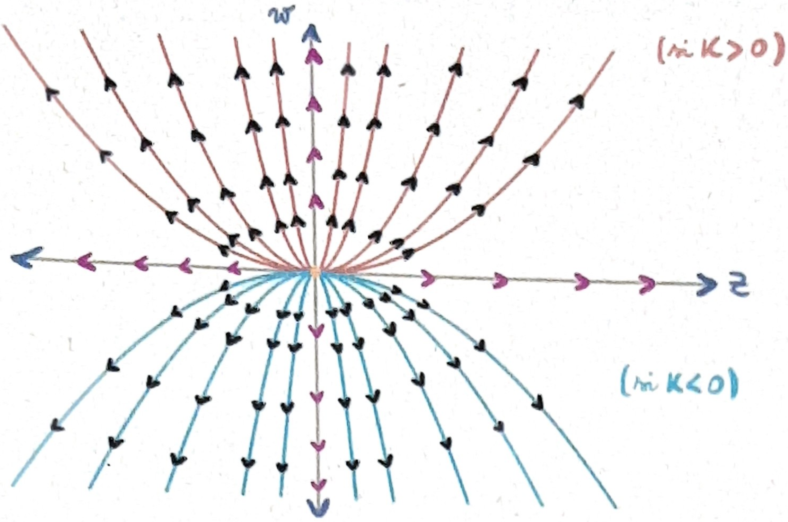
Sustituyo (3) en (2):

$$w = C_2 \cdot \frac{z^2}{C_1^2} \Longrightarrow w = \boxed{\frac{C_2}{C_1^2}} \cdot z^2$$

constante $\neq 0$: la llamo k.

$\therefore \boxed{w = k \cdot z^2}$

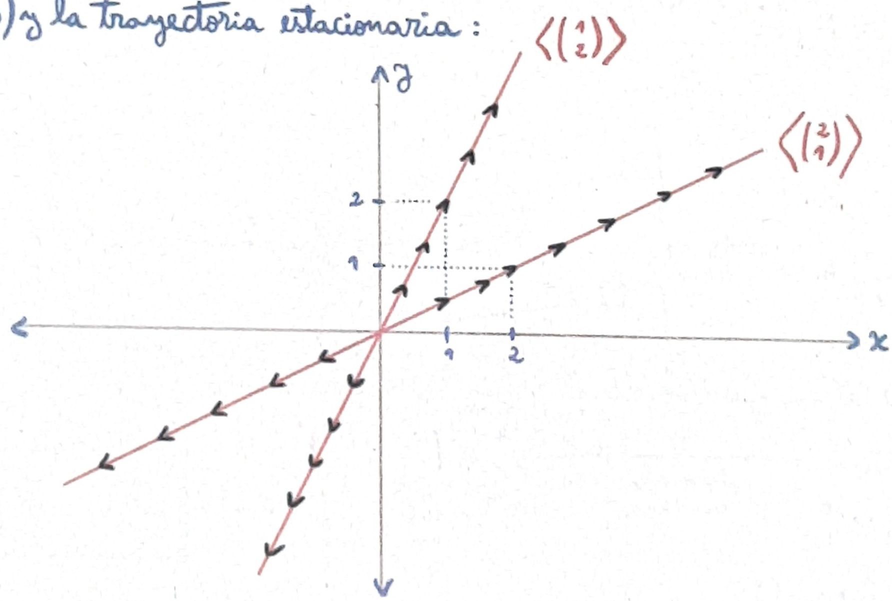
Si graficamos esto pensado en "los ejes z y w":



En estos ejes podemos graficar lo hallado! En este caso, $w = K \cdot z^2$ describe una parábola con vértice en $(0,0)$.

¿Cómo serían las trayectorias en los ejes x e y usuales?

Graficamos las trayectorias que eran semirrectas (correspondientes a los autovectores) y la trayectoria estacionaria:



Recordemos que:

$z = C_1 e^{3t} \longrightarrow$ corresponde al autovector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$w = C_2 e^{6t} \longrightarrow$ corresponde al autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A partir del gráfico en ejes z y w, vemos que las parábolas son tangentes al eje z y sus ramas se van curvando alejándose de este eje ("abrazando al eje w" 🙂).

Trasladamos esto pensando: eje $z \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

eje $w \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Así:

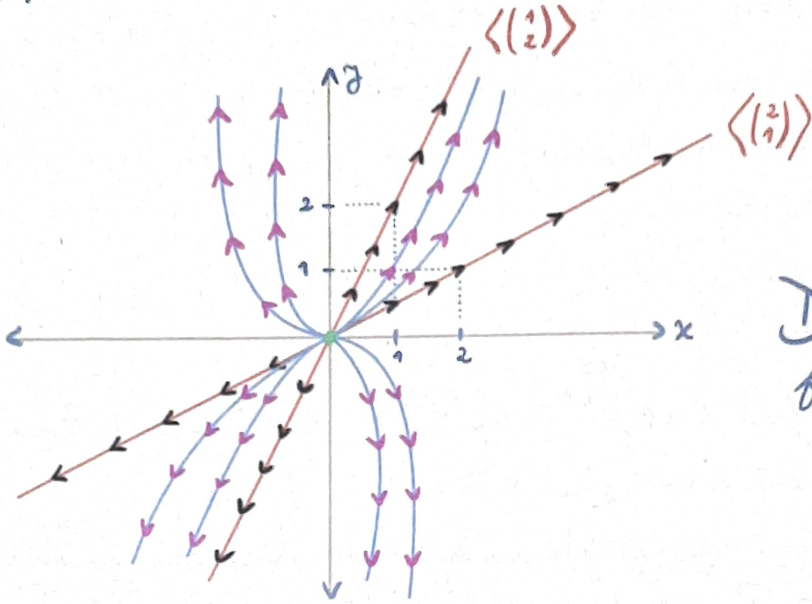


Diagrama de fases del sistema.

El punto de equilibrio $(0,0)$ es inestable (todas las trayectorias no estacionarias se alejan del $(0,0)$, tanto hacia el futuro como hacia el pasado).

Ej: (parcial)

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + a x_2 \\ x_2' = a x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$. Esbozar el diagrama de fases para $a = 2$ y para $a = 3$.

Solución:

Sistema $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} -3 & a \\ a & -3 \end{pmatrix}$

v) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & a \\ a & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)^2 - a^2 = (\lambda+3)^2 - a^2$

Luego:

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff (\lambda+3)^2 - a^2 = 0$$
$$\iff (\lambda+3)^2 = a^2$$
$$\iff \lambda+3 = a \quad \text{ó} \quad \lambda+3 = -a$$
$$\iff \lambda = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} - 3 \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \lambda = -\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} - 3 \in \mathbb{R}$$

Así, A siempre tiene autovalores en $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = a-3$ y $\lambda_2 = -a-3$.

1º) Caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$: dos autovalores reales distintos.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \iff a-3 \neq -a-3$$
$$\iff a \neq 0.$$

¿Qué ocurre en este caso?

Las soluciones son de la forma $\underline{x}' = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v} + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{w}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, donde $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente.

Para que las soluciones permanezcan acotadas cuando $t \to +\infty$ debe ocurrir que $\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_1 t} < \infty$ y que $\lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_2 t} < \infty$. Para ello, debe ser $\lambda_1 \leq 0 \wedge \lambda_2 \leq 0$.

Así:

$$\lambda_1 \leq 0 \wedge \lambda_2 \leq 0 \iff a-3 \leq 0 \wedge -a-3 \leq 0$$
$$\iff a \leq 3 \wedge -3 \leq a$$
$$\underset{a \neq 0}{\iff} a \in [-3;3] \setminus \{0\}$$

2º) Caso $\lambda_1 = \lambda_2$: un autovalor real doble.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a = 0$$

En este caso, con $a=0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ¿Hay base de autovectores?

$Nu(A - 3I_d) = Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,0); (0,1)\}$ base de autovectores.

Las soluciones son de la forma $\underline{x}' = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ las soluciones en este caso también son acotadas cuando $t \to +\infty$.

Luego, las soluciones son acotadas cuando $t \to +\infty$ si y sólo si $a \in [-3;3]$.

•) Diagrama de fases:

*) Con $a = 2$:

$A = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -5$ autovalores.

Busco autovectores:

•) $S_{-1} = Nu(A+I_d) = Nu\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} \underset{f_2+f_1\to f_2}{=} Nu\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \underset{(-\frac{1}{2})f_1\to f_1}{=} Nu\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ autovector de autovalor $\lambda_1 = -1$.

•) $S_{-5} = Nu(A+5I_d) = Nu\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \underset{f_2-f_1\to f_2}{=} Nu\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}f_1\to f_1}{=} Nu\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ autovector de autovalor $\lambda_2 = -5$.

Así, la solución general es:

$$\underline{x} = \underbrace{c_1 e^{-t}}_{z}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \underbrace{c_2 e^{-5t}}_{w}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para $c_1, c_2 \neq 0$:

$z = c_1 e^{-t} \longrightarrow e^{-t} = \frac{z}{c_1}$

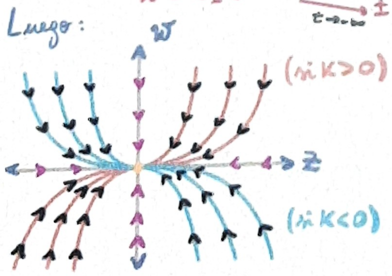
$w = c_2 e^{-5t} \longrightarrow w = c_2 e^{-5t} = c_2 (e^{-t})^5 = c_2\left(\frac{z}{c_1}\right)^5 = \overbrace{\boxed{\frac{c_2}{c_1^5}}}^{=k} z^5$

$\therefore w = k z^5$.

Además: $z = c_1 e^{-t}$ $\xrightarrow{t\to+\infty} 0$; $\xrightarrow{t\to-\infty} \pm\infty$ (según signo de c_1)

$w = c_2 e^{-5t}$ $\xrightarrow{t\to+\infty} 0$; $\xrightarrow{t\to-\infty} \pm\infty$ (según signo de c_2)

Luego:



En los ejes x_1 y x_2:

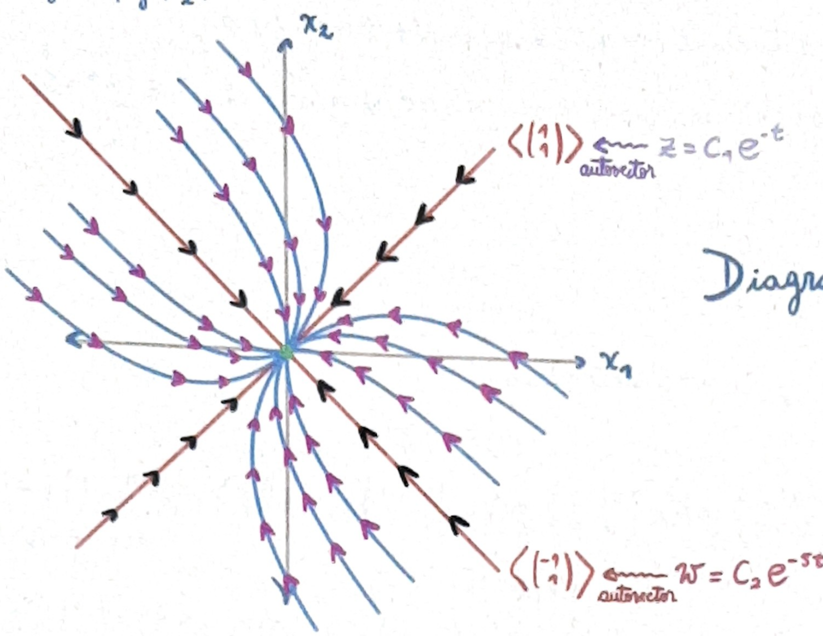


Diagrama de fases pedido.

*) Con $a = 3$:

$A = \begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -6$ autovalores.

Busco autovectores:

-) $\mathcal{S}_0 = Nu(A + 0I_2) = Nu\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix} \underset{f_2+f_1\to f_2}{=} Nu\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \underset{(-\frac{1}{3})f_1\to f_1}{=} Nu\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rangle \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ autovector de autovalor $\lambda_1 = 0$.

-) $\mathcal{S}_{-6} = Nu(A + 6I_2) = Nu\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix} \underset{f_2-f_1\to f_2}{=} Nu\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}f_1\to f_1}{=} Nu\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ autovector de autovalor $\lambda_2 = -6$.

Así, la solución general es:

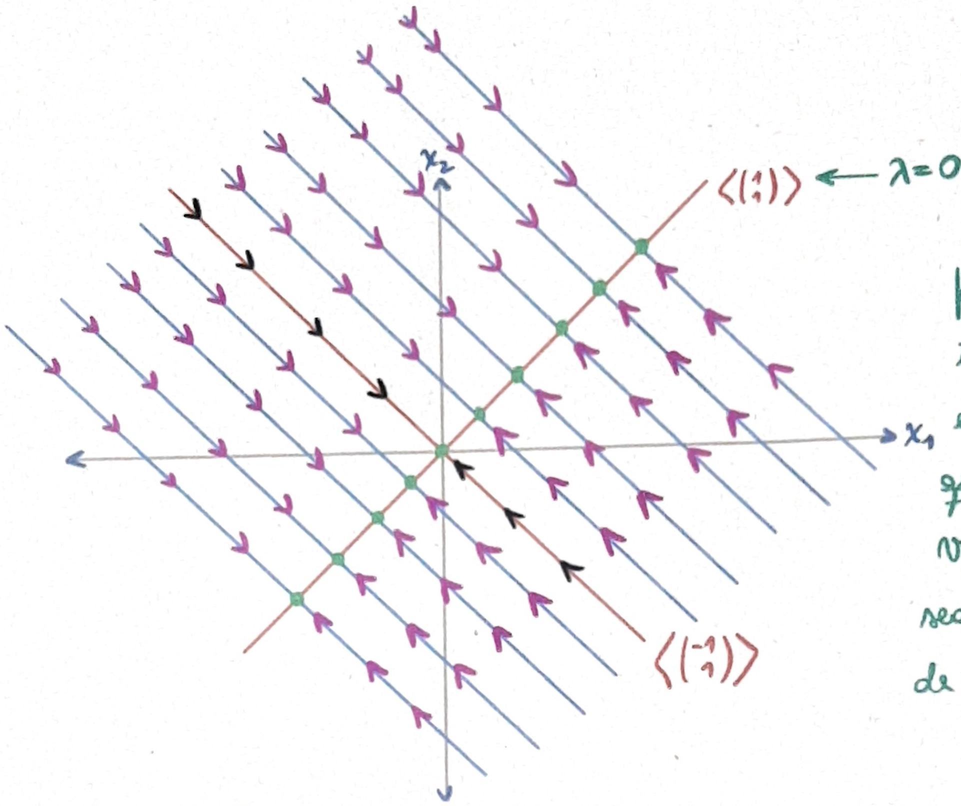
$$\underline{x} = C_1 e^{0\cdot t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-6t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{x} = \underbrace{C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{p} + C_2 e^{-6t}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si fijamos C_1 y C_2, nos queda una solución de la forma:

$\underline{x} = p + C_2 \underbrace{e^{-6t}}_{\substack{\in \mathbb{R}_{>0} \\ \text{(y va variando)}}} \vec{v} \rightsquigarrow$ ecuación paramétrica de una (semi)recta (con dirección $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$).

Notar que $\underline{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-6t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \xrightarrow[t\to+\infty]{} c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



Todos los puntos de la recta son de equilibrio (porque son los $v \in Nu(A)$, o sea, soluciones de $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$).

Diagrama de fases pedido.

(¡Ojo! No hay flechas sobre $\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$ porque allí "no hay movimiento": cualquier trayectoria que toque la recta debe ser estacionaria).