Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales $y = y(x)$ de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & y'' - 8y' + 16y = 0 \\ \text{ii)} & y'' - 2y' + 10y = 0 \\ \text{iii)} & y'' - y' - 2y = 0 \end{array}$$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$

Dos formas de resolverlo

1° Forma: Como antes: Sistemas

Llamo $y_0 = y$

$y_1 = y'$

Entonces tengo el sistema

$y_0 = y$

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -16 y_0 + 8 y_1 \end{cases}$$

$y_1 = y' \Rightarrow y_1' = y'' = 8y' - 16y$

Obtuve

$$Y' = A Y$$

con $Y' = \begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Resuelvo como antes

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -16 & 8-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\lambda).(8-\lambda) + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \leftarrow \text{Raíz doble}$$

Autovectores

$$A v = \lambda . v \iff (A - \lambda I) v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0-4 & 1 \\ -16 & 8-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$-4v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 4v_1$$

$$-16v_1 + 4v_2 = 0 \qquad \text{Si } v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 4$$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Busco w tal que

$$(A - \lambda I). w = v$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$-4w_1 + w_2 = 1 \Rightarrow w_2 = 1 + 4w_1$

$-16w_1 + 4w_2 = 4$

Si $w_1 = 1$

$w_2 = 5$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Obtuve una base de soluciones de y'

$$y_1(t) = c_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_2(t) = c_2 \cdot e^{4t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sol. general de y

$$y(t) = c_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{4t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

Pero yo no quería resolver todo $y' = Ay$ ¡!

Obtuve y a partir de

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

Pero sólo quiero la 1° coordenada, que se corresponde a $y(t)$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{4t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{4t} \cdot 1 + C_2 \cdot e^{4t} \cdot \left(1 + t \right)$$

$$= C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{4t} (1 + t)$$

Sol. general del ejercicio :

$$\boxed{y(t) = e^{4t} \cdot \left(C_1 + C_2 (1+t) \right) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Verificar calculando y' e y'' y reemplazar en

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Pero hacer todo eso es la muerte :

Método #2 :

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4$$

La solución es

$$y(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 . t . e^{4t}$$

$$\boxed{y(t) = e^{4t}\left(c_1 + c_2 . t\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Pues:

Si $\rightarrow y(x) = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ como $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ $\wedge$ $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

se tiene que:

$$\underbrace{\lambda^2 e^{\lambda x}}_{y''} + a\underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{y'} + b\underbrace{e^{\lambda x}}_{y} = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}_{p(\lambda)} \longrightarrow \text{polinomio característico de la ecuación.}$$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

$$y'' - 8y' + 16y = \cancel{0}\ t$$

Sabemos que

$$y = y_H + y_P$$

Sol General $\quad$ Sol Homogéneo $\quad$ Sol. Particular

Uso Método de var. de Ctes.

$$y_p(t) = e^{4t}\left(C_1(t) + C_2(t)\cdot t\right)$$

Acá es igual que con sistemas:

$$Q = \begin{bmatrix} | & | \\ Y_1 & Y_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

Pero nota que $\quad Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ 4.e^{4t} \end{bmatrix}$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t.e^{4t} \\ e^{4t} + 4.t.e^{4t} \end{bmatrix}$$

Osea que en vez de calcular Y_1 e Y_2 como al principio

$$\boxed{\begin{aligned} Y_1(t) &= C_1 \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ Y_2(t) &= C_2 \cdot e^{4t} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Uso mi solución general calculada con el método #2

$$y_H(t) = C_1 \cdot \underbrace{e^{4t}}_{y_1} + C_2 \cdot \underbrace{t \cdot e^{4t}}_{y_2}$$

Derivo y_1 e y_2 y obtengo

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ 4 \cdot e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \cdot e^{4t} \\ e^{4t} + 4 \cdot t \cdot e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} e^{4t} & t \cdot e^{4t} \\ 4 \cdot e^{4t} & e^{4t} + 4 \cdot t \cdot e^{4t} \end{bmatrix}$$

Todo esto vino de suponer que

$$\begin{cases} y_0 = y \\ y_1 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ \underset{\underset{y''}{\parallel}}{y_1'} = t - 16 y_0 + 8 y_1 \end{cases}$$

Lo que resulta en

$$Y' = A\,Y + B$$

$$\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Resuelvo

$$\begin{bmatrix} e^{4t} & t.e^{4t} \\ 4.e^{4t} & e^{4t} + 4.t.e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Puedo invertir Q $\left(\det Q \neq 0 \text{ siempre} \right)$ o resolver como está

$$\text{Si } Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \cdot \begin{bmatrix} e^{4t}(1+4t) & -t.e^{4t} \\ -4.e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\det Q = \left(e^{4t}\right)^2 + 4t.\left(e^{4t}\right)^2 - 4t.\left(e^{4t}\right)^2$$

$$= e^{8t}$$

$$Q^{-1} = e^{-8t} \cdot e^{4t} \cdot \begin{bmatrix} (1+4t) & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-4t} \begin{bmatrix} (1+4t) & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Q \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{Q^{-1} Q}_{I} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = e^{-4t} \begin{bmatrix} (1+4t) & -t \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = e^{-4t} \cdot \begin{bmatrix} -t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \int C_1' \, dt = \int -t^2 \cdot e^{-4t} \, dt$$

$$\int -t^2 e^{-4t} \, dt = \frac{1}{32} e^{-4t} (8t^2 + 4t + 1) + \text{constant}$$

$$C_1(t) = \frac{1}{32} \cdot e^{-4t} \left(8t^2 + 4t + 1\right)$$

$$C_2 = \int C_2' \, dt = \int t \cdot e^{-4t} \, dt$$

$$\int t\, e^{-4t} \, dt = -\frac{1}{16} e^{-4t} (4t+1) + \text{constant}$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{16} \cdot e^{-4t} (4t+1)$$

Reemplazo en

$$y_p(t) = e^{4t} \left(C_1(t) + C_2(t) \cdot t \right)$$

$$y_p(t) = e^{4t} \left(\frac{1}{32} \cdot e^{-4t} (8t^2 + 4t + 1) - \frac{1}{16} \cdot e^{-4t} (4t+1) \cdot t \right)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot (8t^2 + 4t + 1) - \frac{1}{16} \cdot (4t^2 + t)$$

$$y_p(t) = \frac{1}{32} \cdot (2t+1)$$

Finalmente

$$\boxed{y(t) = \underbrace{e^{4t} \left(C_1 + C_2 \cdot t \right)}_{y_H} + \underbrace{\frac{1}{32} \cdot (2t+1)}_{y_P} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$\lambda_1 = 1 + 3i$

$\lambda_2 = 1 - 3i$

Si $y(t)$ es de la forma

$y(t) = e^{\lambda t} = e^{(1+3i).t}$

$= e^t . e^{3ti}$

$= e^t . (\cos 3t + i . \sin 3t)$

Tomo Re e Im

$y_1(t) = C_1 . e^t . \cos 3t$

$y_2(t) = C_2 . e^t . \sin 3t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Sol. general

$y(t) = C_1 . e^t . \cos 3t + C_2 . e^t . \sin 3t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Si $b = t$

ii) $y'' - 2y' + 10y = \cancel{0}\, t$

Uso M. de V. de Ctes.

$$y_p = C_1(t) \cdot e^{t} \cdot \cos 3t + C_2(t)\, e^{t} \cdot \sin 3t$$

Con $Q = \begin{bmatrix} e^{t} \cdot \cos 3t & e^{t} \cdot \sin 3t \\ e^{t} \cdot \cos 3t - e^{t} \cdot \sin 3t & e^{t} \cdot \sin 3t + e^{t} \cdot \cos 3t \end{bmatrix}$

Calculo Q^{-1}

$$\det Q = e^{2t} \cdot \left(\cos 3t \cdot \sin 3t + \cos^2 3t \right) - e^{2t} \left(\cos 3t \cdot \sin 3t - \sin^2 3t \right)$$

$$\det Q = e^{2t}$$

$$Q^{-1} = e^{-2t} \cdot e^{t} \cdot \begin{bmatrix} \sin 3t + \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \sin 3t + \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t & \cos 3t \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \sin 3t + \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t & \cos 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} -t \cdot \sin 3t \\ t \cdot \cos 3t \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \int C_1' \, dt = \int -e^{-t}\, t \sin(3t)\, dt = \frac{1}{50} e^{-t} ((5t-4)\sin(3t) + 3(5t+1)\cos(3t)) + \text{constant}$$

$$C_2 = \int C_2' \, dt = \int e^{-t}\, t \cos(3t)\, dt = \frac{1}{50} e^{-t} (3(5t+1)\sin(3t) + (4-5t)\cos(3t)) + \text{constant}$$

Volviendo a

$$y_P = C_1(t) \cdot e^{t} \cdot \cos 3t + C_2(t)\, e^{t} \cdot \sin 3t$$

$$\left(\int -e^{-t}\, t \sin(3t)\, dt\right) e^{t} \cos(3t) + \left(\int e^{-t}\, t \cos(3t)\, dt\right) e^{t} \sin(3t)$$

Result

$$\frac{1}{50} \sin(3t)(3(5t+1)\sin(3t) + (4-5t)\cos(3t)) - \frac{1}{50}\cos(3t)((4-5t)\sin(3t) - 3(5t+1)\cos(3t))$$

$$y_P = \frac{3}{10} t + \frac{3}{50}$$

Finalmente

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{t} \cos 3t + C_2 e^{t} \cdot \sin 3t + \frac{3}{10} t + \frac{3}{50} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

iii) $y'' - y' - 2y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 2$$

Base de sol: $\{ e^{-t}, e^{2t} \}$

$$\boxed{y(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{2t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Si iii) $y'' - y' - 2y = \cancel{0}\ t$

$\Rightarrow$ Uso M. de V. d C.

$$y_p(t) = C_1(t) \cdot e^{-t} + C_2(t) \cdot e^{2t}$$

con $Q = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2 \cdot e^{2t} \end{bmatrix}$

$$\det Q = 2 \cdot e^{t} + e^{t}$$
$$= 3 e^{t}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{2t} & -e^{2t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{t} & -e^{t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$Q \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}}^{B(t)}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{t} & -e^{t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -t \cdot e^{t} \\ t \cdot e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \int C_1' \, dt = \int -\frac{t\, e^{t}}{3} \, dt = -\frac{1}{3} e^{t} (t-1) + \text{constant}$$

$$C_2 = \int C_2' \, dt = \int \frac{1}{3} t\, e^{-2t} \, dt = -\frac{1}{12} e^{-2t} (2t+1) + \text{constant}$$

$$y_p(t) = C_1(t) \cdot e^{-t} + C_2(t) \cdot e^{2t}$$

$$y_p(t) = \left(\int \frac{1}{3} (-t)\, e^{t} \, dt \right) e^{-t} + \left(\int \frac{1}{3} t\, e^{-2t} \, dt \right) e^{2t}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{4} - \frac{t}{2}$$

Finalmente

$$\boxed{y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{4} - \frac{t}{2} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1-a_2}{\pi}$ no es un número entero.

(a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.