Ejercicio 25. Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\iint_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{\Omega}(f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_{\Omega}(f\Delta g - g\Delta f)\,dx\,dy\,dz.$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u\in C^2(\Omega)$, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

Gauss

$$\iint_{S=\partial\Omega} \langle F, \eta\rangle\, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\, dV$$

$\boxed{1°}$ Si $F = f\nabla g$

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow f\nabla g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

con

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$\nabla g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = F_x + F_y + F_z$$

$$= \operatorname{div} f\nabla g = \operatorname{div}\left(f\cdot(g_x, g_y, g_z)\right)$$

$$= \operatorname{div}\left(f \cdot g_x ,\ f \cdot g_y ,\ f \cdot g_z\right)$$

$$= f_x \cdot g_x + f \cdot g_{xx} + f_y \cdot g_y + f \cdot g_{yy} + f_z \cdot g_z + f \cdot g_{zz}$$

$$\underbrace{f \cdot g_{xx} + f \cdot g_{yy} + f \cdot g_{zz}}_{= f \cdot \Delta g}$$

$$= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f , \nabla g \rangle$$

$\therefore$

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g , \eta \rangle \, ds = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \langle \nabla f , \nabla g \rangle \, dV \ \checkmark$$

$\boxed{2°}$ $$\iint_{\partial\Omega} \langle \underbrace{(f\nabla g - g \nabla f)}_{=: F} , \eta \rangle \, ds = \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dv$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \underbrace{\operatorname{div} f \nabla g}_{\text{Lo calculé en } \boxed{1°}} - \operatorname{div} g \nabla f$$

$$\operatorname{div} g \nabla f = \operatorname{div}\left(g \cdot f_x ,\ g \cdot f_y ,\ g \cdot f_z\right)$$

$$= g_x \cdot f_x + g \cdot f_{xx} + g_y \cdot f_y + g \cdot f_{yy} + g_z \cdot f_z + g f_{zz}$$

$$= g \cdot \Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle - g \cdot \Delta f - \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

$$= f \Delta g - g \cdot \Delta f$$

$$\iint_{\partial \Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dV \checkmark$$

Ejercicio 26. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor del operador Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \not\equiv 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω. En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ.

Utilizando las identidades de Green del Ejercicio 25, mostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_\Omega f\, g\, dV = 0$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \lambda . f$$

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = \mu . g$$

1° Identidad de Green

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g, \eta \rangle \, dS = \iiint_\Omega f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dV$$

2° Identidad de Green (fácil de acordarse $\langle f\nabla g - g \nabla f, \eta \rangle \to (f \Delta g - g \Delta f)$)

$$\iint_{\partial\Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle \, dS = \underbrace{\iiint_\Omega f \Delta g - g \Delta f \, dV}_{\text{Reemplazo con datos}}$$

$$\iiint_\Omega f \Delta g - g \Delta f \, dV = \iiint_\Omega f . \mu g - g . \lambda f \, dV$$

$$\iint_{\partial\Omega} \langle (f \nabla g - g \nabla f), \eta \rangle \, dS = \iiint_\Omega (\mu - \lambda) . f g \, dV$$

Sobre el borde!

↳ Como $f = 0$ sobre $\partial\Omega$
$g = 0$ sobre $\partial\Omega$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0} \cdot fg \, dV = 0$$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda) \iiint_{\Omega} fg \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} fg \, dV = 0$$

//

Ejercicio 27. Sea B una bola en $\mathbb{R}^3$. Ver que no puede haber una función $f \not\equiv 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \qquad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: Utilizar las identidades de Green del Ejercicio 25 para deducir que $\nabla f = 0$ en B. A continuación utilizar el Ejercicio 9 para deducir que f es constante.

1° Identidad de Green

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g, \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dV$$

2° Identidad de Green (fácil de acordarse $\langle f\nabla g - g\nabla f, \eta\rangle \to (f\Delta g - g\Delta f)$)

$$\iint_{\partial\Omega} \langle (f\nabla g - g\nabla f), \eta \rangle \, dS = \iiint_{\Omega} f\Delta g - g \Delta f \, dV$$

Arranco en el borde con 1° Identidad (con f y g iguales)

- Dato $f = 0$ en ∂B

$$\iint_{\partial B} \langle f \nabla f, \eta \rangle \, dS = \iint_{\partial B} \langle 0, \eta \rangle \, dS = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{B} f\Delta f + \langle \nabla f, \nabla f \rangle \, dV = 0$$

- Dato $\Delta f = 0$ en B

$$\Rightarrow \iiint_{B} \underbrace{f\Delta f}_{=0} + \langle \nabla f, \nabla f \rangle \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{B} \underbrace{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}_{= f_x \cdot f_x + f_y \cdot f_y + f_z \cdot f_z} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_B \underbrace{\underbrace{f_x^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_y^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_z^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \, dV = 0$$

$\therefore \nabla f = 0$

// Listo 1° Parte.

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

Resolú:

Llamo F a ∇f

$\Rightarrow F$ es campo gradiente

$\Rightarrow$ La integral sobre cualquier curva $\mathcal{C}$ es

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(b) - f(a)$$

Como $F = 0$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = 0$$

$f(a) = f(b)$ para cualquier par de puntos en B

Finalmente

Como f es constante en B y $f = 0$ en ∂B

$\Rightarrow f \equiv 0$ en B $\boxtimes$

Ejercicio 28. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \qquad (\textit{Ley de Faraday})$$

donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es $\mathcal{C}$ y la circulación se da en el sentido de recorrido de $\mathcal{C}$ inducido por la normal elegida sobre S.

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: Considerar un disco de radio ρ en un plano como superficie S. Aplicar el Teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer ρ tender a 0 y posteriormente utilizar que el plano era arbitrario.

Reordeno

$$\oint_{\mathcal{C}} E \cdot ds + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S H \cdot ds = 0$$

$$c \cdot \oint_{\mathcal{C}} E \cdot ds + \frac{d}{dt}\iint_S H \cdot ds = 0$$

Stokes

$$\int_{\mathcal{C} = \partial S} F \cdot ds = \iint_S \nabla \times F \, ds$$

$$\Rightarrow c \iint_S \nabla \times E \, ds + \iint_S \frac{d}{dt} H \cdot ds = 0$$

Asumo S como un disco D de radio r

$$c \iint_{D_r} \nabla \times E \, ds + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} H \cdot ds = 0$$

Divido por Área(D_r)

$$\frac{1}{\pi . r^2}\left(c \iint_{D_r} \nabla \times E \; ds + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} H \cdot ds \right) = 0$$

Tomo $\lim_{r \to 0}$

$$\underbrace{\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi . r^2}\left(c \iint_{D_r} \nabla \times E \; ds + \iint_{D_r} \frac{d}{dt} H \cdot ds \right) = 0}_{}$$

Obtengo

$c . \nabla \times E$ en el centro de D_r (lo llamo a)

$+$

$\frac{dH}{dt}$ en el centro de D_r

$$\Rightarrow c . \nabla \times E(a) + \frac{dH}{dt}(a) = 0$$

Como D_r fue arbitrario $\Rightarrow$ vale para cualquier S

$$\therefore \quad H_t + c . \nabla \times E = 0$$

$\blacksquare$