

## ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

## Práctica 2: Integrales de superficie.

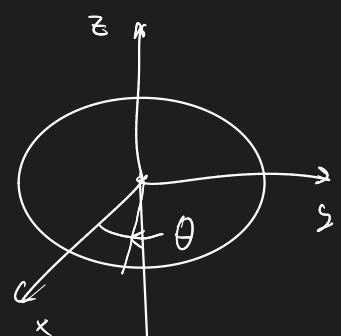
**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

- (a)  $r = k$  ( $k = \text{cte}$ ).
- (b)  $\varphi = k$ ,  $k \in (0, \pi/2]$  constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

a) Casos de una esfera

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & \theta \in [0, 2\pi) \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & \varphi \in [0, \pi) \\ z = r \cdot \cos \varphi & r \in \mathbb{R}_+^+ \end{cases}$$



$$\text{Ces Jacobiano} = |r^2 \cdot \sin \varphi|$$

Si  $r$  es libre

$$\Rightarrow T(r, \theta, \varphi) = (r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi, r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, r \cdot \cos \varphi)$$

Si  $r = k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow T(\theta, \varphi) = (k \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi, k \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, k \cdot \cos \varphi)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in [0, \pi)$$

Versor normal en cada punto

$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{\|T_\theta \times T_\varphi\|} = ?$$

$$\underbrace{T_\theta \times T_\psi}_{\in \mathbb{R}} = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ i & j & k \\ -k \cdot \sin \theta \cdot \sin \psi & k \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi & 0 \\ k \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi & k \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi & -k \cdot \sin \psi \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= i(-k^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \psi) - \\
 &\quad j(k^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin^2 \psi) + \\
 &\quad k \underbrace{(-k^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi - k^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi)}_{= -k^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi} \\
 &= -k^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi
 \end{aligned}$$

$$T_\theta \times T_\psi = \left( -k^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \psi, \quad k^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin^2 \psi, \quad -k^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \right)$$

$$\begin{aligned}
 \|T_\theta \times T_\psi\| &= \sqrt{k^4 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^4 \psi + k^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^4 \psi + k^4 \cdot \sin^2 \psi \cdot \cos^2 \psi} \\
 &= k^2 \cdot \sqrt{\underbrace{\cos^2 \theta \cdot \sin^4 \psi + \sin^2 \theta \cdot \sin^4 \psi}_{= \sin^4 \psi} + \underbrace{\sin^2 \psi \cdot \cos^2 \psi}_{= 1}} \\
 &= \sin^2 \psi \underbrace{\left( \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \right)}_{= 1} \\
 &= k^2 \cdot \sqrt{\sin^2 \psi}
 \end{aligned}$$

$$= k^2 \cdot |\sin \psi|$$

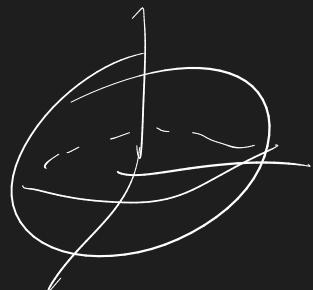
Como  $\varphi \in [0, \pi)$

$$= k^2 \cdot \sin \psi$$

Finalmente

$$\frac{\tau_\theta \times \tau_\psi}{\|\tau_\theta \times \tau_\psi\|} = \frac{(-k^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \psi, \ k^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin^2 \psi, \ -k^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi)}{k^2 \cdot \sin \psi}$$

$$\eta = (-\cos \theta \cdot \sin \psi, \ \sin \theta \cdot \sin \psi, \ -\cos \psi)$$



**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

- (a)  $r = k$  ( $k = \text{cte}$ ).  
 (b)  $\varphi = k$ ,  $k \in (0, \pi/2]$  constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin k \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin k \\ z = r \cdot \cos k \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ k \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ constante} \\ r \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{Car } J_{\text{desig}} = r^2 \cdot \sin k$$



$$\Rightarrow T(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta \cdot \sin k, r \cdot \sin \theta \cdot \sin k, r \cdot \cos k)$$

Versor normal

$$n = \frac{\overrightarrow{T_r} \times \overrightarrow{T_\theta}}{\|\overrightarrow{T_r} \times \overrightarrow{T_\theta}\|}$$

$$\overrightarrow{T_r} = (\cos \theta \cdot \sin k, \sin \theta \cdot \sin k, \cos k)$$

$$\overrightarrow{T_\theta} = (-r \cdot \sin \theta \cdot \sin k, r \cdot \cos \theta \cdot \sin k, 0)$$

$$\overrightarrow{T_r} \times \overrightarrow{T_\theta} = \begin{vmatrix} & & (-) \\ & i & j \\ \cos \theta \cdot \sin k & \sin \theta \cdot \sin k & \cos k \\ -r \cdot \sin \theta \cdot \sin k & r \cdot \cos \theta \cdot \sin k & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left( r \cdot \cos \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, -r \cdot \sin \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, \right. \\ \left. \underbrace{r \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 k + r \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 k}_{r \cdot \sin^2 k} \right)$$

$$= \left( r \cdot \cos \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, -r \cdot \sin \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, r \cdot \sin^2 k \right)$$

$$\|\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}\| = \sqrt{r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k + r^2 \cdot \sin^4 k}$$

$$= \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 k \cdot \cos^2 k}$$

$$= |r| \cdot \sin k \quad \left( k \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin k > 0 \right)$$

$r \neq 0$

$$\frac{\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}}{\|\overline{T_r} \times \overline{T_\theta}\|} = \frac{(r \cdot \cos \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, -r \cdot \sin \theta \cdot \sin k \cdot \cos k, r \cdot \sin^2 k)}{|r| \sin k}$$

$$\gamma = \begin{cases} (\cos \theta \cdot \cos k, -\sin \theta \cdot \cos k, \sin k) & k \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ & \text{if } r > 0 \\ (-\cos \theta \cdot \cos k, +\sin \theta \cdot \cos k, -\sin k) & \text{if } r < 0 \end{cases}$$

## Ejercicio 2.

(a) Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_1(u, v) &= (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}), \text{ con } a, b \text{ no nulos,} \\ \Phi_2(u, v) &= (au \cos(v), bu \sin(v), u^2),\end{aligned}$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

(b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

con  $0 < b < a$ , y  $u, v \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del **toro**.

Paraboloide elíptico:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right\} \quad a, b \neq 0$$

↑ Con un "-" es Parab. Hiperbólico

Para mostrar que cada parametrización se corresponde con un paraboloide helíptico, debo:

1a. Mostrar que todos los puntos de  $S$  están en la param  
1b. Mostrar que todos los puntos de la param están en  $S$

2. Mostrar que es  $C^1$

3. Mostrar que es inyectiva

1a.  $S \subset \text{Im } \phi_z$  ?

$$S \subset \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \middle/ \right.$$

$$\phi_z(u, v) = \left( a \cdot u \cdot \cos v, b \cdot u \cdot \sin v, u^2 \right)$$

Con

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad a, b \neq 0$$

Reemplazo en  $S$  con los valores de  $\phi_z$

$$\Rightarrow u^2 = \left(\frac{a \cdot u \cdot \cos v}{a}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot u \cdot \sin v}{b}\right)^2$$

$$u^2 = \underbrace{u^2 \cdot \cos^2 v + u^2 \cdot \sin^2 v}_{= u^2} \quad \checkmark$$

$$\therefore S \subset \operatorname{Im} \phi_2$$

Ahora  $\operatorname{Im} \phi_2 \subset S$  ?

$$\text{Sea } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad a, b \neq 0$$

$S \subset \operatorname{Im} (\phi_2)$  Ahora queremos probar que si agarras un  $(x_0, y_0) \in S$  dale  $\exists (u_0, v_0) \in \operatorname{Im} (\phi)$ .

Tomamos  $P_0 = (0, 0, 0)$

$0 = 0 + 0 \checkmark \Rightarrow (u_0, v_0) = (0, 0)$

$\phi_2(0, 0) = (a \cdot 0 \cdot \cos(0), b \cdot 0 \cdot \sin(0), 0) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \phi_2$  es una parám de  $S$  y como  $a, b \neq 0$

$\phi_2' \neq (0, 0, 0) \wedge (u, v) \Rightarrow$  es parám regular

$\phi_2'$  ? si es de 2 variables !

2.  $\phi_2 \in \mathcal{C}^1$  per svs componentes b son.

3. Inyectiva?

que  
Si  $\phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$

Si  $\phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2)$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 \cdot \cos v_1 = a \cdot u_2 \cdot \cos v_2 \\ b \cdot u_1 \cdot \sin v_1 = b \cdot u_2 \cdot \sin v_2 \\ u_1^2 = u_2^2 \end{cases} \xrightarrow{\substack{u \geq 0 \\ \text{Por definición}}} u_1 = u_2 =: u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot u \cdot \cos v_1 = a \cdot u \cdot \cos v_2 \\ b \cdot u \cdot \sin v_1 = b \cdot u \cdot \sin v_2 \end{cases}$$

$$a \cdot u \cdot \cos v_1 = a \cdot u \cdot \cos v_2 \Rightarrow a u (\cos v_1 - \cos v_2) = 0$$

$$b \cdot u \cdot \sin v_1 = b \cdot u \cdot \sin v_2 \Rightarrow b u (\sin v_1 - \sin v_2) = 0$$

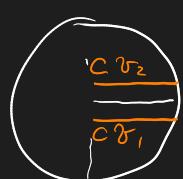
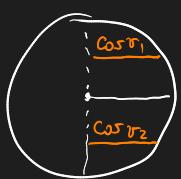
Si  $u \neq 0$  ( $a, b \neq 0$ ):

$$a u (\cos v_1 - \cos v_2) = 0 \Leftrightarrow \cos v_1 = \cos v_2$$

Como  $v \in [0, 2\pi)$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\delta v_1 = 2\pi - v_2$$



$$bu \cdot (\sin v_1 - \sin v_2) = 0 \Leftrightarrow \sin v_1 = \sin v_2$$

$$\text{Caso } v_1 = v_2$$

$$\Rightarrow \sin v_1 = \sin v_2 \quad \checkmark$$



$$\text{Caso } v_1 = 2\pi - v_2$$

$$\Rightarrow \sin(2\pi - v_2) \stackrel{?}{=} \sin v_2$$

$$\sin v_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - v_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3}{2}\pi \stackrel{?}{=} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-1 = 1 \quad \underline{\text{Abs}}$$

$$\therefore v_1 = v_2$$

Probé que

$$\text{Si } \phi_z(u_1, v_1) = \phi_z(u_2, v_2) \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

$\Rightarrow$  es inyectiva.

**Ejercicio 3.** Considerar la superficie dada por la parametrización:

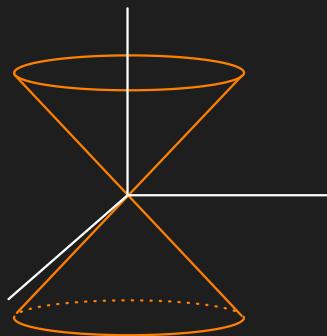
$$x = u \cos(v), \quad y = u \sin(v), \quad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

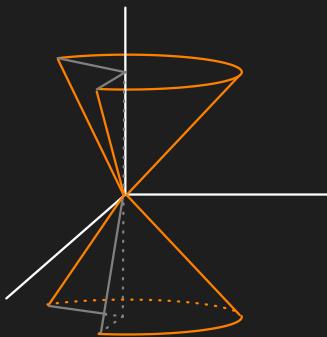
Si  $v \in [0, 2\pi)$   $\Rightarrow$  es un cono doble



- Si  $v > 2\pi$ : también



- Si  $v < 2\pi$ : no da la mitad



Param:

$$\mathbf{T}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

- Es dif pues  $\uparrow$   $\nearrow$  son dif.
- No es inyección pues

pues

$$\mathbf{T}(0, v_1) = \mathbf{T}(0, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in [0, 2\pi)$$

(0 en cada quinto dominio)

- sea, no cumple que

$$\text{Si } \mathbf{T}(u_1, v_1) = \mathbf{T}(u_2, v_2) \not\Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

y tan poco es suave pues

$$T_u \times T_v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \cdot \sin v & u \cdot \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

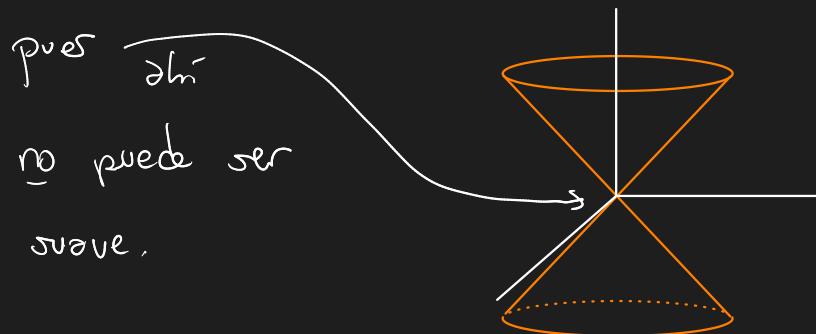
$$= (-u \cdot \cos v, -u \cdot \sin v, u)$$

Si venmos  $u=0$ :

$$T_u \times T_v (0, v) = (0, 0, 0) \quad \forall v \in [0, 2\pi)$$

$\therefore$  no es suave

Lo cual es lo que esperamos



Para ser suave:

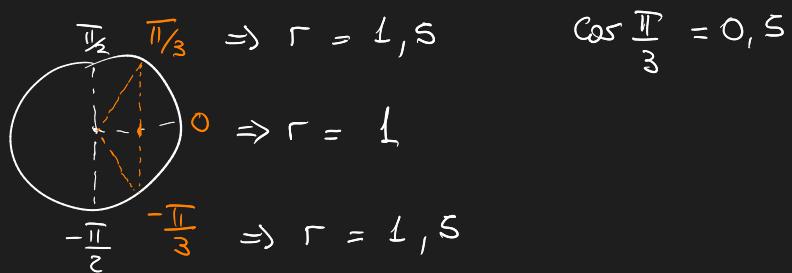
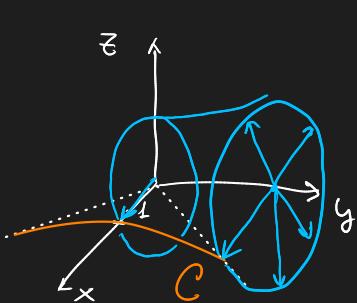
- Tiene plano tangente en todos sus puntos.
- La recta tangente al plano  $L(p)$  en el punto  $p$  varía con continuidad.

**Ejercicio 4.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva en el plano  $xy$  dada en polares por:

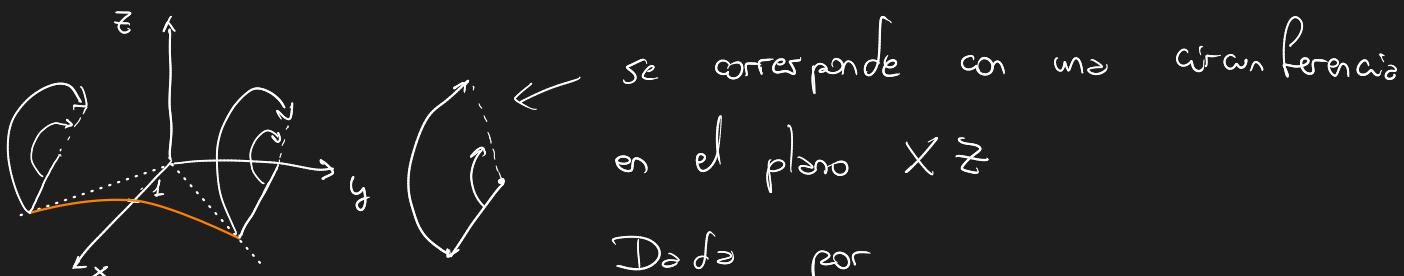
$$r = 2 - \cos \theta \quad \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea  $S$  la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje  $y$ .

- (a) Dar una parametrización de  $S$ .
- (b) ¿Es suave esta superficie?



- En  $\mathbb{R}^3$
- $\begin{cases} x = (2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ y = (2 - \cos \theta) \cdot \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$
- $x \approx r \cdot \cos \varphi \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$
- $z \approx r \cdot \sin \varphi$
- $(2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi, (2 - \cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, (2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$
- quiero "girar la curva" sobre el eje  $y$ .



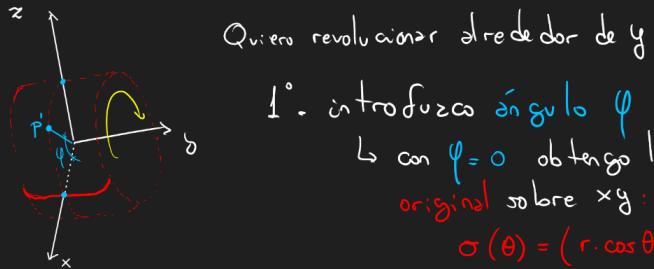
Dada por

$$\begin{cases} x = \tilde{r} \cdot \cos \varphi \\ z = \tilde{r} \cdot \sin \varphi \\ y \in [-a, a] \end{cases}$$

Vemos que

- $\tilde{r}$  debe depender del  $y$  original  
(para cada  $y$ , hay un radio dif.)
- $\varphi \in [0, 2\pi)$  pues quiero toda la mitad.

Como mostró Vicky (con  $\ell$  en  $xz$  y revol. en  $z$ )



Quiero rotar alrededor de  $y$

- 1º. introducir  $\phi$  (ángulo  $\phi$ )
  - con  $\phi = 0$  obtengo la curva original sobre  $xy$ :
$$\sigma(\theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

con  $r = 2 - \cos \theta$

2º. Quiero las coordenadas de cada  $P'$  para cada  $\phi$

$$P' = (x', y', z')$$

- Giro alrededor de  $y$ 
  - $\Rightarrow y'$  no cambia con  $\phi$
  - $y'$  solo depende de  $\theta$  (como en  $\ell_2$ )

$$\Rightarrow y' = r \cdot \sin \theta$$

$$= (2 - \cos \theta) \cdot \sin \theta$$

$$= \beta(\theta)$$

$\curvearrowleft$  lunes

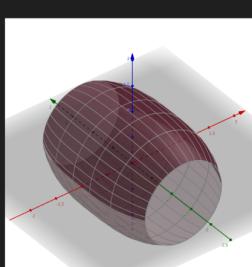
• Para  $x$  y  $z$  hay que calcular cómo varían

Tip: imaginarse desde abajo, arriba, ver qué pasa en  $x$

- Sabemos que  $\alpha(\theta)$  (la distancia al eje de rotación)
- desde el eje  $x$   $\xrightarrow{r_z(\phi) = z'}$  no cambia (para un  $\theta$  fijo)
- desde el eje  $z$   $\xrightarrow{r_x(\phi) = x'}$   $\Rightarrow$  Calcular las componentes en ejes  $x$  y  $z$
- $\alpha(\theta) = (2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta$
- componente en  $x$  de  $\ell_2$   $\cos \phi = \frac{x'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow x' = \alpha(\theta) \cdot \cos \phi$
- curva original  $\sigma(\theta)$   $\sin \phi = \frac{z'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow z' = \alpha(\theta) \cdot \sin \phi$

Finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \alpha(\theta) \cdot \cos \phi \\ y' = \beta(\theta) \\ z' = \alpha(\theta) \cdot \sin \phi \end{array} \right. = \begin{array}{l} (2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi \\ (2 - \cos \theta) \cdot \sin \theta \\ (2 - \cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \end{array}$$



b) es suave !

$$T_\theta \times T_\varphi = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dots & \dots & \dots \\ -(z - \cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & 0 & (z - \cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$$

• Resuelvo

seguramente sea  $\neq (0,0,0)$  siempre

**Ejercicio 5.** Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio  $a$  y centro en el origen en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  genérico de la esfera.

en general, escribir

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & \theta \in [0, 2\pi) \\ y = a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & \varphi \in [0, \pi) \\ z = a \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Calcular  $\vec{n} = \frac{\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi}{\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi\|}$

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & a \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & 0 \\ a \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi & a \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi & -a \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left( -a^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \varphi, -a^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin^2 \varphi, \right. \\ &\quad \left. -a^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi, \cos \varphi - a^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right) \\ &= -a^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi\| &= \sqrt{a^4 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^4 \varphi + a^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^4 \varphi + a^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi} \\ &= \underbrace{a^4 \cdot \sin^4 \varphi}_{\varphi \in [0, \pi)} \\ &= a^2 \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

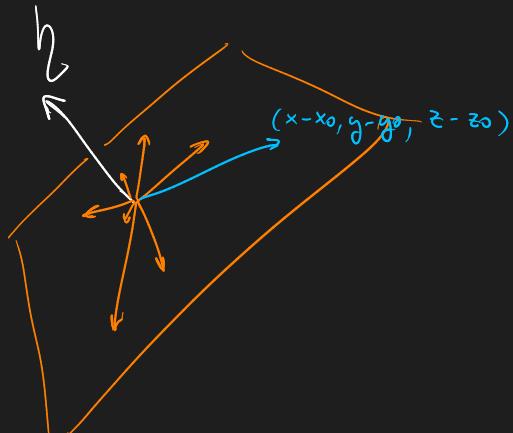
$$\frac{\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi}{\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi\|} = \frac{\left( -a^2 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \varphi, -a^2 \cdot \sin \theta \cdot \sin^2 \varphi, -a^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right)}{a^2 \cdot \sin \varphi}$$

$$n(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cdot \sin \varphi, -\sin \theta \cdot \sin \varphi, -\cos \varphi)$$

Para formar el plano, quiero todos los vectores perpendiculares a esta normal, que formarán el plano tangente:

$$TJ : \langle n_{(\theta, \varphi)}, (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

↑  
vectores perpendiculares



Notar que la segunda componente del producto está en función de  $x, y, z$ , pero la primera, en función de theta y phi.

Expreso todo en función de theta y phi sabiendo que:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi & \theta \in [0, 2\pi) \\ y = a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & \varphi \in [0, \pi) \\ z = a \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

$$TJ : \langle n_{(\theta, \varphi)}, (a \cos \theta \cdot \sin \varphi - x_0, a \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi - y_0, a \cdot \cos \varphi - z_0) \rangle = 0$$

con  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$

Como

$$\eta(\theta, \varphi) = (-\cos\theta \cdot \sin\varphi, -\sin\theta \cdot \sin\varphi, -\cos\varphi)$$

π:

$$-\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot (a \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi - x_0) - \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot (a \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi - y_0) - \cos\varphi \cdot (a \cdot \cos\varphi - z_0) = 0$$

$$-\underbrace{a \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + x_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi}_{= -a \cdot \sin^2\varphi} - \underbrace{a \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi + y_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi}_{= -a} - \underbrace{a \cdot \cos^2\varphi + z_0 \cdot \cos\varphi}_{= -a} = 0$$

$$-a + x_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi + y_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + z_0 \cdot \cos\varphi = 0$$

$$\pi: x_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi + y_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + z_0 \cdot \cos\varphi = a$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in E_a \subset \mathbb{R}^3$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

$$\varphi \in [0, \pi)$$

**Ejercicio 6.** Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto  $(0,1,1)$  a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2.$$

$$\mathbf{T}(u,v) = (2u, u^2+v, v^2)$$

$$\mathbf{T}_u(u,v) = (2, 2u, 0)$$

$$\mathbf{T}_v(u,v) = (0, 1, 2v)$$

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix}$$

$$= (4uv, -4v, 2)$$

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v(u,v)\| = \sqrt{16u^2v^2 + 16v^2 + 4}$$

↑  
No me hace falta normalizarlo

$$\Pi : \left\langle \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v, (x, y-1, z-1) \right\rangle = 0$$

No me hace falta normalizar  $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$  pues solo necesito cualquier vector que sea perpendicular a la superficie en el punto, lo que me permite definir un plano "encontrando" todos los vectores que sean perpendiculares a  $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$  en el punto  $(0, 1, 1)$ .

$$\left\langle (4uv, -4v, 2), (x, y-1, z-1) \right\rangle = 0$$

Necesito escribir todo en función de  $x$ ,  $y$ ,  $z$

Como

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = u^2 + v \\ z = v^2 \end{cases}$$

$$y \neq 0 = (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 2u \Rightarrow u = 0 \\ 1 = u^2 + v \Rightarrow v = 1 \\ 1 = v^2 \checkmark \end{cases}$$

Finalmente

$$\pi : \langle (0, -4, 2), (x, y-1, z-1) \rangle = 0$$

$$-4y + 4 + 2z - 2 = 0$$

$$\boxed{\pi : 4y - 2z = 2}$$

**Ejercicio 7.** Sea  $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

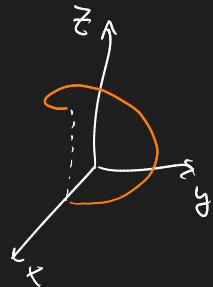
$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = \theta,$$

la parametrización de una superficie  $S$ . Graficar  $S$ , hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

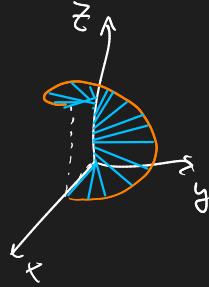
$x=r.\cos(t)$  con  $y=r.\sin(t)$  definen una circunferencia en el plano XY.

Agregando  $z=\theta$ , obtengo una espiral de altura  $2\pi$ .

Con  $r=1$



Con  $r \in [0, 1]$



$$\phi_r \times \phi_{\theta} = \begin{vmatrix} (-) & k \\ i & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ -r \sin \theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin \theta, -\cos \theta, r \cdot \cos^2 \theta + r \cdot \sin^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta, -\cos \theta, r)$$

$$\|\phi_r \times \phi_{\theta}\| = \sqrt{\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} + r^2}$$

$$= \sqrt{1 + r^2}$$

Vector normal en cada punto

$$\eta(r, \theta) = \frac{(\sin \theta, -\cos \theta, r)}{\sqrt{1 + r^2}}$$

Área :

$$\int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \|\phi_r \times \phi_{\theta}(r, \theta)\| dr d\theta =$$

$$= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1+r^2} dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr \quad \text{Otra vez estas identidades horribles! } \rightarrow$$

$$r = \sinh t$$

$$dr = \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\sinh^{-1} 1} \underbrace{\sqrt{1 + \sinh^2 t}}_{=\cosh^2 t} \cdot \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sinh^{-1} 1} \sqrt{\cosh^2 t} \cdot \cosh t dt$$

$$\cosh t > 0$$

$$= 2\pi \int_0^{\sinh^{-1} 1} \cosh t \cdot \cosh t \cdot dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\sinh^{-1} 1} \cosh^2 t \cdot dt$$

Wolfram porque me cansé

$$= \frac{1}{2}\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (t + \sinh t \cdot \cosh t) \right]_{\sinh^{-1} 1}$$

$$= \pi \cdot \left[ t + \sinh t \cdot \cosh t \right]_{\sinh^{-1} 1}$$

$$< \pi \left( \sinh^{-1} 1 + 1 \cdot \cosh(\sinh^{-1} 1) - 0 \right)$$

$$= \pi \left( \sinh^{-1} 1 + \cosh(\sinh^{-1} 1) \right)$$

que según wolfram es

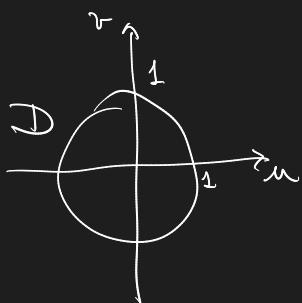
$$= \pi \cdot \left( \sinh^{-1} 1 + \sqrt{2} \right)$$

  
Área de 

**Ejercicio 8.** Sea  $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$  ( $D$  el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.



$$\phi_u = (1, 1, v)$$

$$\phi_v = (-1, 1, u)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} & & (-) \\ \vdots & & \downarrow \\ 1 & & 1 \\ -1 & & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ u \end{matrix}$$

$$= (u - v, -(u + v), 2)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{(u - v)^2 + (v + u)^2 + 4}$$

$$= \sqrt{u^2 - 2uv + v^2 + v^2 + 2uv + u^2 + 4}$$

$$= \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}$$

Necesito hacer un cambio de variables para pasar del "disco unitario"  $D$  a algo de la forma  $r, \theta$

Quiero que

$$(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases} \quad r \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4} =$$

$$= \sqrt{2r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta + 4}$$

$$= \sqrt{2r^2 + 4}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2 + 2}$$

$$A(S) = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv$$

$\nearrow$  Pero no se integrar ésto !  $\searrow$  no olvidar el Jacobiano

Cambio de variables

$$= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{2r^2 + 4} \cdot r \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2r^2 + 4} \cdot r \, dr$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 2} \cdot r \, dr$$

$$s = r^2 + 2$$

$$ds = 2r \cdot dr \Rightarrow \frac{1}{2} ds = r \cdot dr$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \int_2^3 \sqrt{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot ds$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \int_2^3 s^{1/2} ds$$

CA:

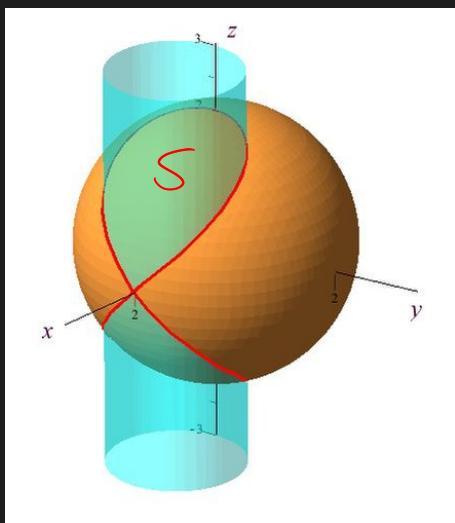
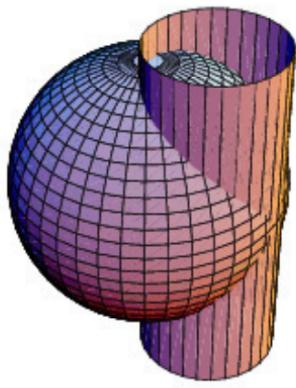
$$\frac{\partial}{\partial s} s^{3/2} = \frac{3}{2} \cdot s^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[ s^{3/2} \right]_2^3$$

**Área**

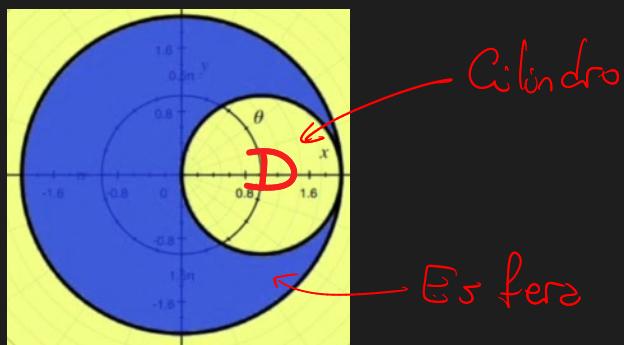
$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left( \sqrt{27} - \sqrt{8} \right)$$

**Ejercicio 9.** Calcular el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con  $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ . Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



Recomendación de un profe:  
No usar cilíndricas ni esféricas porque no sabemos cómo se mueven  $r$ , theta y phi.

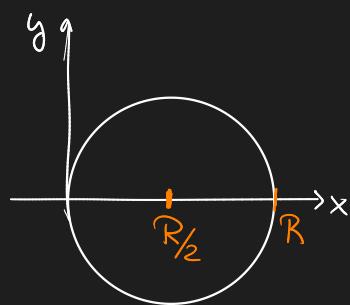
Si miro el plano XY desde arriba, voy a ver una circunferencia dentro de la esfera:



En XY :

Hacemos  $D$  al disco centrado en  $\left(\frac{R}{2}, 0\right)$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$



Por ejemplo si de

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Voy a usar solo la parte positiva de  $|z|$ , ya que es simétrica y luego solo tengo que multiplicar por 2 el resultado (para obtener el área total)

Defino  $T$  como

$$T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y) = \left( x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right)$$

$\uparrow$   
 los  $x, y$  del  
 disco  $\mathbb{D}$   
 $\uparrow$   
 los  $z$  de la esfera

Juntando ambos, estoy parametrizando la parte superior de la bóveda de Viviani.

Solo falta calcular

$$\iint_{\mathbb{D}} \|T_x \times T_y\| dx dy$$

Pero no calculo

$$\|T_x \times T_y\| = \dots = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

No sé integrar sobre  $\mathbb{D}$ !

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = ?$$

Propongo cambio de variables  $\Rightarrow$  polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$r \in [0, \frac{R}{2}]$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Reemplazo en el disco  $D$

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\left(r \cos \theta - \frac{R}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$r^2 \cos^2 \theta - R \cdot r \cdot \cos \theta + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$r^2 - R \cdot r \cdot \cos \theta \leq 0$$

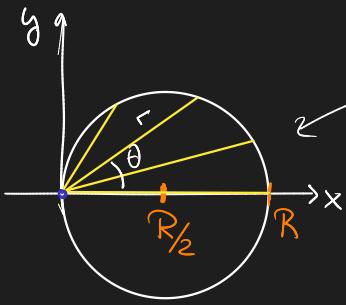
$$r^2 \leq R \cdot r \cdot \cos \theta$$

$r > 0$

$$r \leq R \cdot \cos \theta$$

Con esto puedo redefinir el disco  $D$  como  $D^*$  usando estas nuevas coordenadas:

$$D^* = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq R \cos \theta \quad \wedge \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



sob parte positiva, despues multiplico por 4

Y puedo decir que existe una transformación Tau que manda  $D^*$  a  $D$

$\mathcal{T}(D^*) = D \leftarrow$  solo la mitad de arriba !

Volviendo a la integral:

Jacobiano

$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = \iint_{D^*} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r dr d\theta$$

$$= R \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{R \cos \theta} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\theta$$

CA:

$$= R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^{R \cos \theta} dr d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \sqrt{r^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2}}$$

$$= -R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta}}_{R^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta)} - \sqrt{R^2} \right) dr d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= -R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( R \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 \sin^2 \theta}}_{\sin \theta \geq 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} - R \right) d\theta$$

$$= -R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( R \cdot \sin \theta - R \right) d\theta$$

$$= -R^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \right)$$

$$= -R^2 \left[ \underbrace{-\cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{(0 - (-1))} + R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

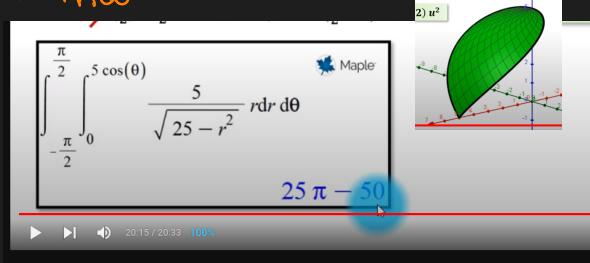
$$= -R^2 + R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad \text{Área de } \frac{1}{4} \text{ la bóveda}$$

$$\text{Área de la bóveda} = 4R^2 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$R^2 \cdot \boxed{2\pi - 4}$$

Vérif.:



$$\text{Si } R = 5 \Rightarrow 25 \cdot (2\pi - 4)$$

$$50\pi - 100$$

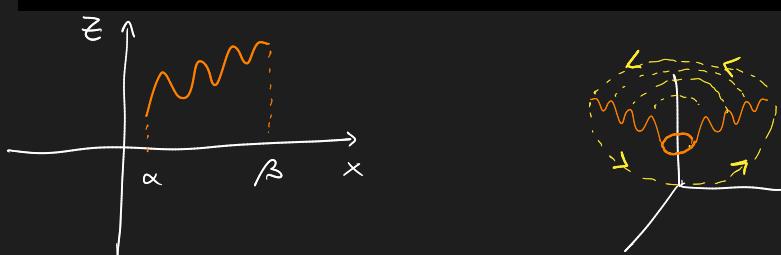
2 veces ésto ✓



**Ejercicio 10.** Sea la curva  $z = f(x)$   $x \in [\alpha, \beta]$  con  $f$  y  $\alpha$  positivos, girada alrededor del eje  $z$ . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .



Curvas en  $XZ$ :

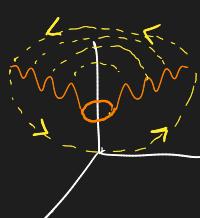
$$\sigma(x) = (x, f(x)) \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Curvas en  $XYZ$

$$\tilde{\sigma}(x) = (x, 0, f(x))$$

Sup. de Rotación

$$\tau(x, \theta) = (x, \cos \theta, x \sin \theta, f(x)) \quad \begin{array}{l} \text{agrega variable: ángulo de giro} \\ \text{agrega } x \end{array} \quad \begin{array}{l} x \in [\alpha, \beta] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$



Si miro la superficie desde arriba (plano XY) veo una circunferencia en el centro, y una circunferencia por afuera.  
El valor de  $Z$  no cambia a pesar de que la curva gire.

Notar que con  $\theta = 0$ , obtengo la curva original sobre el plano XZ positivo.

Quiero calcular:

$$A(S) = \iint_D \|\tau_x \times \tau_\theta\| ds$$

$$T_x = (\cos \theta, \sin \theta, f'(x))$$

$$T_\theta = (-x \cdot \sin \theta, x \cdot \cos \theta, 0)$$

$$T_x \times T_\theta = \begin{pmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \cos \theta & \sin \theta & f'(x) \\ -x \cdot \sin \theta & x \cdot \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( -x f'(x) \cdot \cos \theta, -x \cdot f'(x) \cdot \sin \theta, \underbrace{x \cos^2 \theta + x \sin^2 \theta}_{= x} \right)$$

$$\|T_x \times T_\theta\| = \sqrt{\underbrace{x^2 f'^2(x) \cdot \cos^2 \theta + x^2 \cdot f'^2(x) \cdot \sin^2 \theta + x^2}_{= x^2 \cdot f'^2(x)}}$$

$$= \sqrt{x^2 \cdot (f'^2(x) + 1)}$$

$$x > 0 \quad = \quad x \cdot \sqrt{f'^2(x) + 1}$$

$$A(s) = \int_{x=\alpha}^{\beta} \int_{\theta=0}^{2\pi} x \cdot \sqrt{f'^2(x) + 1} \cdot d\theta dx$$

$$A(s) = 2\pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \sqrt{f'^2(x) + 1} dx$$



Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .

**Ejercicio 2.**

(a) Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\Phi_1(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}), \text{ con } a, b \text{ no nulos,}$$

$$\Phi_2(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

**TODO: Hacer!**

No es tan complicado:

Primero notar que un paraboloide elíptico es una función cuadrática en el plano XZ de la forma:

$$z = c * x^2$$

girada sobre el eje Z.

Como  $a = b = 1$ , entonces  $c=1$ , entonces  $z=x^2$

Entonces  $z=f(x)=x^2$  con  $z$  entre 1 y 2.

$$1 \leq x^2 \leq 2$$

$$1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$A(S) = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{(2x)^2 + 1} dx$$

$$\mu = 4x^2 + 1$$

$$du = 8x dx$$

$$\frac{1}{8} dw = x dx$$

$$= 2\pi \int_S^9 \sqrt{\mu} \cdot \frac{1}{8} du \quad \left( \frac{2}{3} \mu^{3/2} \right)' = \mu^{1/2}$$

$$= \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{2}{3} \left[ \mu^{3/2} \right]_S^9$$

$$= \frac{1}{6} \pi \cdot \left( q^{3/2} - s^{3/2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \pi \cdot \left( 27 - 5\sqrt{5} \right) //$$

Input
$\frac{1}{6} \pi (27 - 5\sqrt{5})$
Decimal approximation
8.28315466528679757

## Paraboloid Surface Area and Volume Calculator

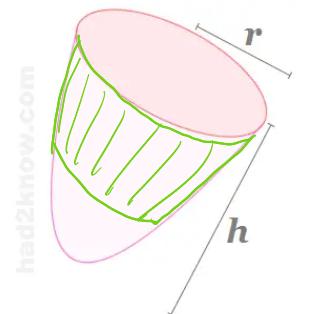
Paraboloid Calculator

Height = <input type="text" value="2"/>
Radius = <input type="text" value="1.41421"/>
<input type="button" value="Get Paraboloid Volume &amp; S.A."/> <input type="button" value="Clear"/>
Volume: 6.28319 Surface Area: 13.61357 S.A. w/ Base: 19.89675

Paraboloid Calculator

Height = <input type="text" value="1"/>
Radius = <input type="text" value="1"/>
<input type="button" value="Get Paraboloid Volume &amp; S.A."/> <input type="button" value="Clear"/>
Volume: 1.5708 Surface Area: 5.33041 S.A. w/ Base: 8.47201

A paraboloid is a solid of revolution that results from rotating a parabola around its axis of symmetry. If you know the height and radius of a paraboloid, you can compute its volume and surface area with simple geometry formulas. You can also use the calculator on the left.



13,61357 - 5,33041

= 8,28316

$\sqrt{5}$

Input
$\frac{1}{6} \pi (27 - 5\sqrt{5})$
Decimal approximation
8.28315466528679757

✓  
Verification

### Surface Area Formula

The surface area of a paraboloid, not including its base, is given by the formula

$$SA = (\pi/6)(r/h^2)[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3]$$

**Ejercicio 11.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva

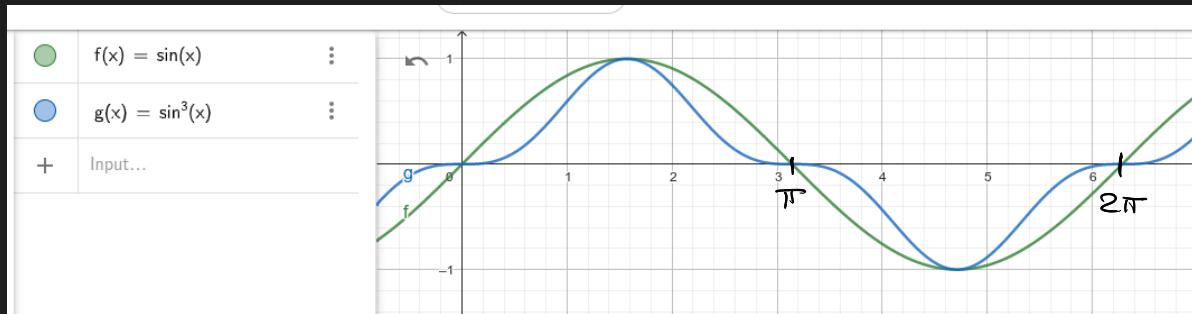
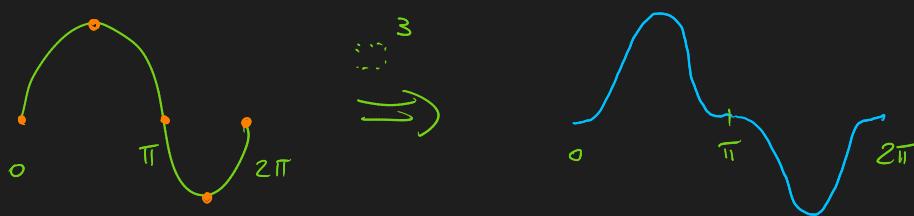
$$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases}$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  en el plano  $xy$ . Sea  $S$  la superficie que se obtiene al girar la curva  $\mathcal{C}$  alrededor del eje  $x$

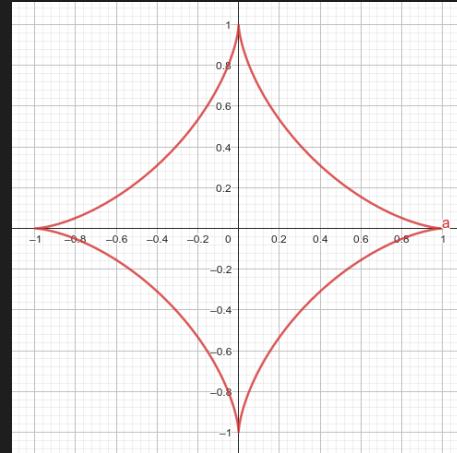
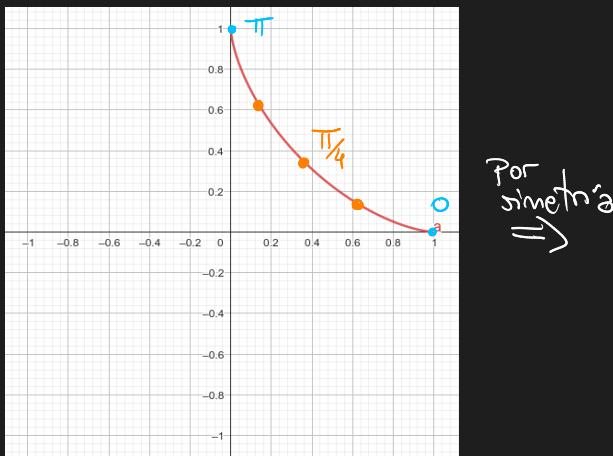
- (a) Hallar una parametrización de  $S$ .
- (b) Hallar el área de  $S$ .

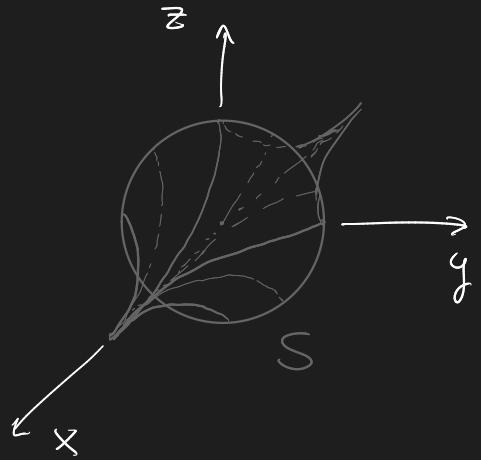
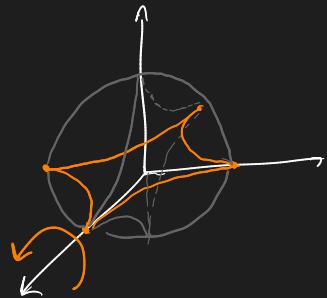
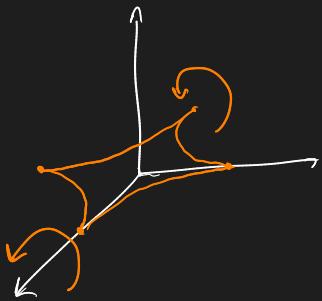
Idea sin usar geogebra para pensar la curva:

- Al elevar al cubo el cos/sin, obtengo valores entre los mismos extremos, pero que "se aplastan" cerca del cero, el -1 o el +1:



No se si sirve para imaginar la curva, pero sirve para saber que la curva será simétrica en los 4 cuadrantes, y para aproximar su forma basta con dibujar los puntos con theta = {0, pi/2}, y 2 o 3 puntos intermedios.





Curva inicial

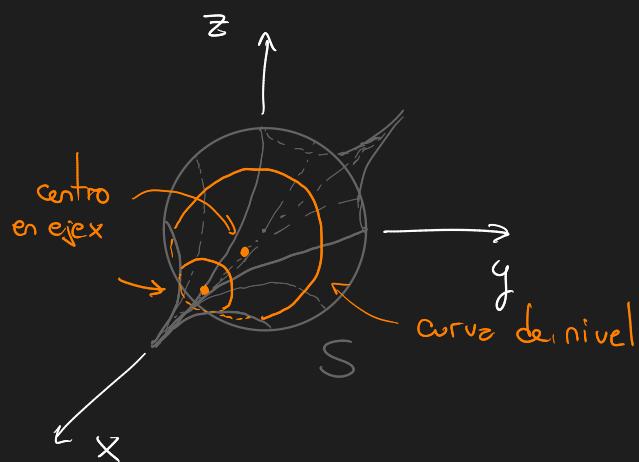
$$\sigma(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

La circunferencia que aparece al rotar la curva, aparece en el plano YZ

Param de S:  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(\theta, \varphi) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta \cdot \cos \varphi, \sin^3 \theta \cdot \sin \varphi) \quad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi)$$

Para un valor de theta fijo  
este valor no cambia con phi  
(es el valor del eje X donde se posiciona  
la circunferencia que es curva de nivel de S)



Notar que con  $\varphi = 0$

$$\Rightarrow T(\theta, 0) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, 0)$$

Curva original ✓

b) Área de S

Básic calculate

$$\| \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi \|$$

Para luego

$$A(s) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \| \vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi \| d\varphi d\theta$$

Solo uso octante positivo y multiplico por 8

cross product((-3cos^2 theta \* sin theta, 3sin^2 theta \* cos theta\*  
Assuming "phi" is a variable | Use as a mathematical constant instead  
Input interpretation  
 $(-3 \cos^2(\theta) \sin(\theta), 3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \cos(\phi), 3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(\phi)) \times (0, -\sin^3(\theta) \sin(\phi), \sin^3(\theta) \cos(\phi))$   
Result  
 $(3 \cos(\theta) \cos^2(\phi) \sin^5(\theta) + 3 \cos(\theta) \sin^5(\theta) \sin^2(\phi), 3 \cos^2(\theta) \cos(\phi) \sin^4(\theta), 3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) \sin(\phi))$   
3D plots

norm(cross product((-3cos^2 x \* sin x, 3sin^2 x \* cos x\*cos y, 3sin^2 x \*  
Input interpretation  
length  
vector  $3 \cos(x) \cos^2(y) \sin^5(x) + 3 \cos(x) \sin^5(x) \sin^2(y)$   
vector  $3 \cos^2(x) \cos(y) \sin^4(x)$   
vector  $3 \cos^2(x) \sin^4(x) \sin(y)$   
Result  
 $\sqrt{(9|\cos^2(x) \cos(y) \sin^4(x)|^2 + 9|\cos^2(x) \sin^4(x) \sin(y)|^2 + |3 \cos(x) \cos^2(y) \sin^5(x) + 3 \cos(x) \sin^2(y) \sin^5(x)|^2)}$

Puedo ignorar valores absolutos, copio y pego sin Abs[] para obtener expresión reducida:

$\sqrt{9 (\cos[x]^2 \cos[y] \sin[x]^4)^2 + 9 (\cos[x]^2 \sin[x]^4 \sin[y])^2 + (3 \cos[x] \cos[y]^2 \sin[x]^5 + 3 \cos[x] \sin[y]^2 \cos[x]^5)^2}$   
Input  
 $\sqrt{(9 \cos^2(x) \cos^4(y) \sin^4(x))^2 + 9 (\cos^2(x) \sin^4(y) \sin^4(x))^2 + (3 \cos(x) \cos^2(y) \sin^5(x) + 3 \cos(x) \sin^5(y) \sin^2(x))^2}$   
Result  
 $\sqrt{(9 \sin^8(x) \cos^4(x) \sin^2(y) + (3 \sin^5(x) \cos(x) \cos^2(y) + 3 \sin^5(x) \cos(x) \sin^2(y))^2 + 9 \sin^8(x) \cos^4(x) \cos^2(y)}$   
Alternate form assuming x and y are real  
 $3 \sin^4(x) |\cos(x)|$   
|z| is the absolute value of z  
Alternate forms  
 $3 \sqrt{\sin^8(x) \cos^2(x)}$   
More

Integro eso con:

Integrate[3 Sqrt[Cos[x]^2 Sin[x]^8], {x,0,pi/2}, {y,0,pi/2}]

NATURAL LANGUAGE  $\int_{\Sigma}^{\Omega}$  MATH INPUT

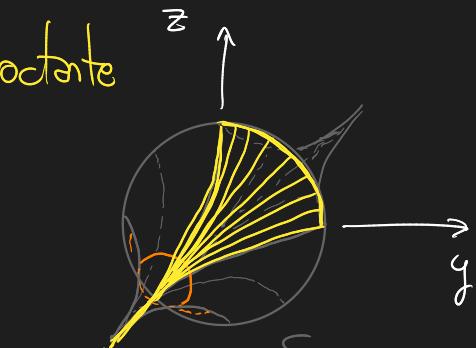
Definite integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sqrt{\cos^2(x) \sin^8(x)} \, dy \, dx = \frac{3\pi}{10} \approx 0.94248$$

Solo octante positivo!

$$A(S) = 8 \cdot \frac{3}{10} \pi$$

Área del 1º octante

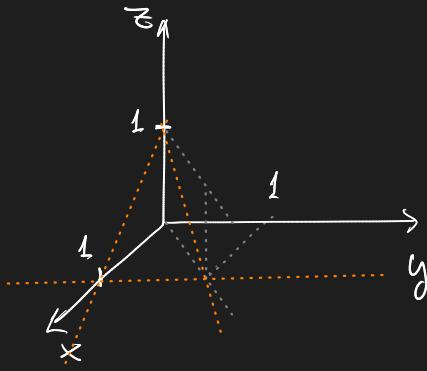


$$A_{re}(S) = \frac{12}{5} \pi$$

octante positivo

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 12.** Calcular  $\int_S xy \, dS$  donde  $S$  es el borde del tetraedro con lados  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + z = 1$  y  $x = y$ .



$$x + z = 1$$

$$z = 1 - x$$

- Integramos las 4 caras por separado

$$\mathbf{T}_1(x) = (x, 0, 1-x) \quad x \in [0, 1]$$

$$\mathbf{T}_2(y) = (y, y, 1-y)$$

$$\mathbf{T}_3(x, y) = (x, y, 0)$$

? Rehacer  
o

Param. de cada plano  
y luego cambio límite de  
integración? o param  
cada cara?

Ejercicio 13. Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$   
 rango  $= 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ \quad \downarrow r=1 \\ y = \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \quad \downarrow r=1 \\ z = \cos \varphi \end{array} \right.$$

$$\mathbf{T}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cdot \sin \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\int_S (x + y + z) dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{f(\mathbf{T}(\theta, \varphi)) \cdot \|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi\|}_{= \sin \varphi} d\varphi d\theta$$

y resuelvo ...

**Ejercicio 14.** Hallar la masa de una superficie esférica de radio  $r$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el punto  $(0, 0, r)$ .

$$\rho(x, y, z) = \| (x, y, z) - (0, 0, r) \|$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{\rho(\tau(\theta, \varphi)) \cdot \|T_\theta \times T_\varphi\|}_{r^2 \sin \varphi} d\varphi d\theta$$

$\underbrace{\phantom{...}}_{\text{Jacobiano de transformación.}}$

Resuelto