Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

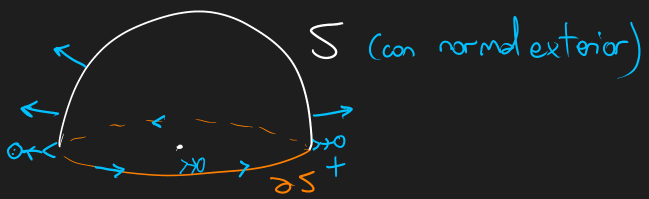
Segundo Cuatrimestre 2022

Práctica 4: Teoremas de Stokes y de Gauss. Campos conservativos. Aplicaciones.

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \underbrace{z \geq 0,}_{?}$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.



$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s} = \int_{t=0}^{2\pi} \langle F(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t . \cos t + \sin t . \cos t, 0 \; dt = 0$$

$$(\nabla \times F \cdot \eta)$$

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_S \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, dS$$

$$\nabla \times F = \begin{array}{c} \quad\; (-1) \quad\;\; \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (0, 0, 0)$$

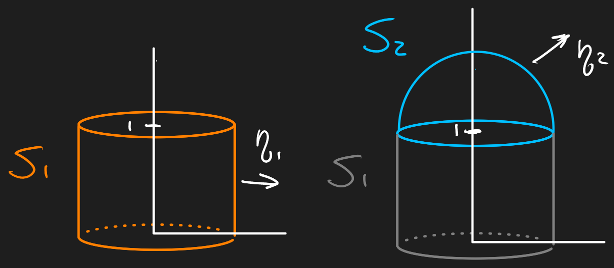
$$\iint_S \nabla \times F \cdot dS = \iint_{uv} \langle \underbrace{\nabla \times F(T(u,v))}_{\vec{0}}, T_u \times T_v \rangle \, du\,dv$$

$$= 0$$

Se verifica Stokes ✓

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$, orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

$(x, y, 0)$



$\partial(S_1 \cup S_2)^+$:

Stokes ($F \in \mathcal{C}^1$)

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS \overset{\downarrow}{=} \int_{\partial S} F \cdot ds$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \langle \underbrace{F(\cos t, \sin t, 0)}_{(\cos t,\ \sin t,\ 0)} , (-\sin t, \cos t, 0) \rangle \, dt$$

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = 0$$

//

Ejercicio 3.

(a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

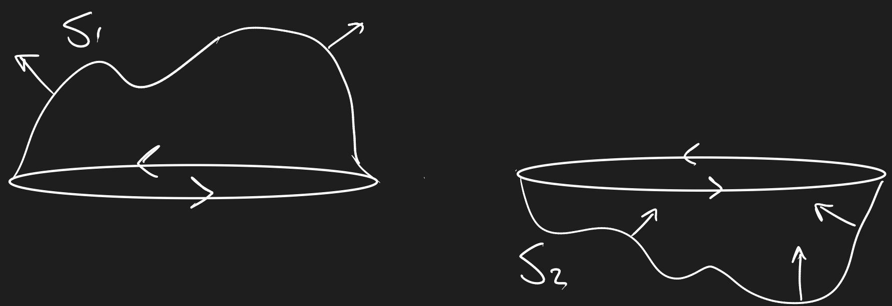
(b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

(c) Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

a)



b) $$\iint_S \nabla \times F \cdot dS = \underbrace{\int_{\partial S} F \cdot dS}_{=0 \text{ por } \partial S \text{ es un punto}}$$

c) Como el elipsoide es una sup. cerrada, y $F \in \mathcal{C}^1$

Stokes $\Rightarrow \iint_S \nabla \times F \cdot dS = 0$

//

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

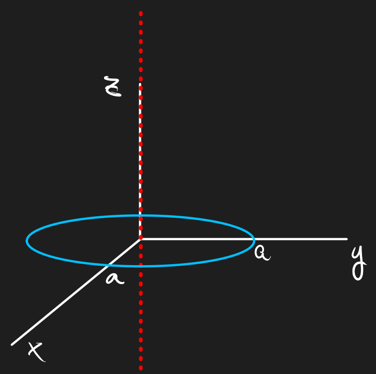
(a) S = círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
(b) S = región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

F no está bien definido en $(x,y,z) = (0,0,z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$

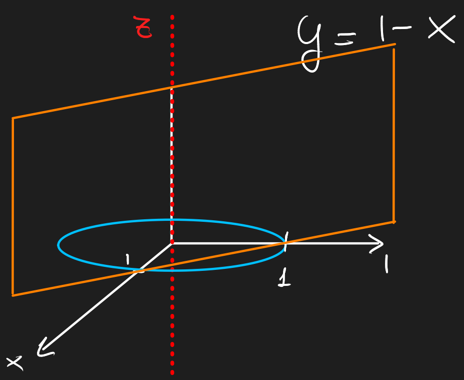
o sea, todo el eje z es problemático

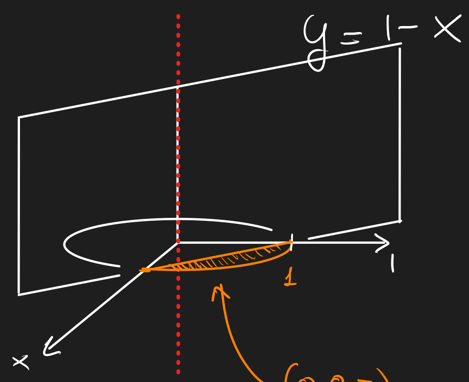
a) No hay manera de que S no pase por algún $(0,0,z)$

No se puede usar Stokes



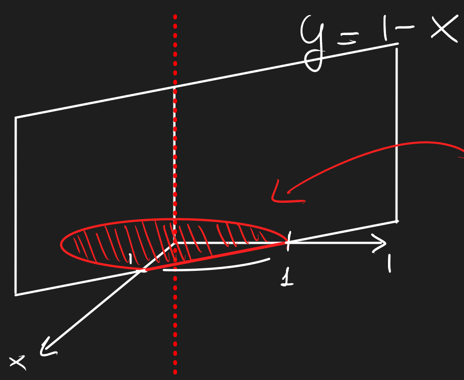
b)





$(0,0,z)$ no atraviesa esta región

$\therefore$ Puedo usar Stokes.



acá no puedo.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^3}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ a lo largo de

  (i) el segmento que une los dos puntos

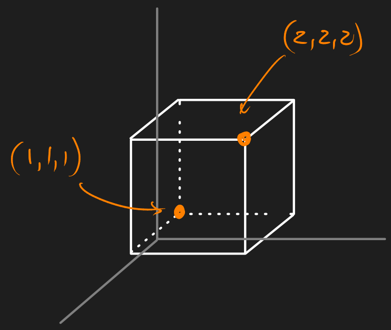
  (ii) una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

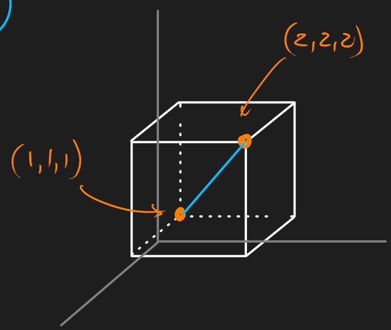
$A = G.m.M$

Primero: F es campo gradiente con $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot A$

$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2x \cdot A$

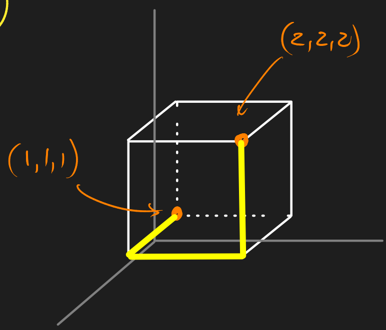


a)



$$P = \underbrace{-\frac{x}{\|(x,y,z)\|^3} \cdot A}_{\text{Componente } x \text{ del vector } F}$$

b)



$$Q = -\frac{y}{\|(x,y,z)\|^3} \cdot A$$

$$R = -\frac{z}{\|(x,y,z)\|^3} \cdot A$$

$$\therefore F = (P,Q,R) = \underbrace{-A \cdot \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x,y,z)}_{\in \mathbb{R}^3}$$

$$= -A \cdot \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^3} \quad \checkmark$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(2,2,2) - f(1,1,1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right) \cdot A = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot A \quad //$$

b) $\underset{\text{Campo Grad}}{\nabla \times F} = \nabla \times (\nabla f)$ si $\nabla f \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$

$$= \begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \left(f_{zy} - f_{yz} \, , \, -(f_{zx} - f_{xz}) \, , \, f_{yx} - f_{xy} \right)$$

Como $f \in C^2 \Rightarrow$ Derivadas segundas cruzadas son iguales

$$\nabla \times F = (0, 0, 0)$$

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy)$

a) si $f_x = x \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$

si $f_y = y \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \bar{\varphi}(x)$

Si $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow \nabla f = F$ ✓

b)

Veo si:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ P & Q \end{vmatrix} = Q_x - P_y \leftarrow \text{Como en Green!}$$

$$= 2y - 2y = 0 \Rightarrow$$ Puede ser! (no lo verifica!)

Si $f_x = x^2+y^2 \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x.y^2 + \varphi(y)$

Si $f_y = 2xy \Rightarrow f(x,y) = xy^2 + \bar{\varphi}(x)$

Junto:

Si $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x.y^2 \Rightarrow \nabla f = F$ ✓

c) $Q_x - P_y = 2 \cdot x \cdot \sin(xy) + x^2 \cdot \cos(xy) \cdot y \circledast$

$$\circledast - \Big(- \sin(xy) \cdot x - \big(x \cdot \sin(xy) + xy \cdot \cos xy \cdot x \big) \Big)$$

$$- \left(-2x \cdot \sin(xy) - x^2 y \cdot \cos xy \right)$$

$$2x \cdot \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot y \cdot \cos xy$$

$$= 4x \cdot \sin xy + 2x^2 \cdot y \cdot \cos xy$$

$\neq 0$ si $(x,y) = (1,1)$

$\therefore$ no es campo gradiente

Ejercicio 7. Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde

(a) $\mathbf{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2z, x^2y)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \le t \le \pi$.

(b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2y \operatorname{sen} xy^2, 0)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \le t \le 0$.

Deben ser campos grad, sino es la muerte

a)

Si $f_x = 2xyz + \sin x \Rightarrow f(x,y,z) = \boxed{x^2\cdot y\cdot z - \cos x} + \varphi(y,z)$

$f_y = \quad \Rightarrow \quad = x^2yz + \bar{\varphi}(x,z)$

$f_z = \quad \Rightarrow \quad = x^2yz + \bar{\bar{\varphi}}(x,y)$

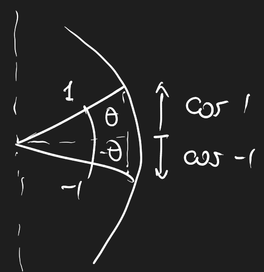
Es C. Grad:

$$\int_C F\cdot d\vec{s} = f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0))$$

$$= f(-1, 0, \pi^4) - f(1, 0, 0)$$

$$= -\cos(-1) - (-\cos(1))$$

$$= \cancel{2\cos(1)} \quad 0 \; //$$



b) Seguro es campo grad

calculo $\Rightarrow$ $f(\sigma(-1)) - f(\sigma(0)) =$

$$= f(e^{-1}, 1, 0) - f(1, e, 0)$$

Basta calcular $f(x,y,z) = x\cdot\cos(x\cdot y^2)$

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x)\, dx + \left(\tfrac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3\, dz,$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Sugerencia: Observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

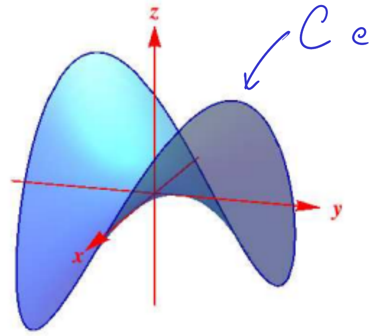
$$F = \left(y + \sin x \,,\; \frac{3}{2} z^2 + \cos y \,,\; 2x^3 \right)$$

No es campo grad pues no hay componentes cruzadas.

Express the graph of

$$z = 2xy, \quad x^2 + y^2 \le 4,$$

shown in

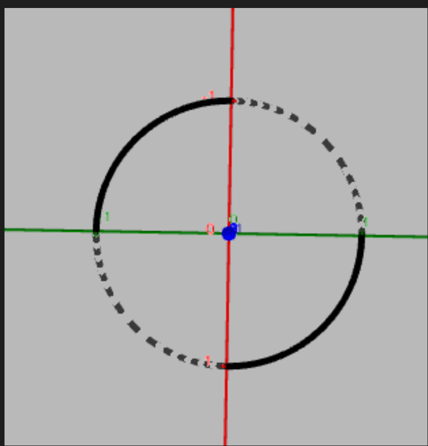


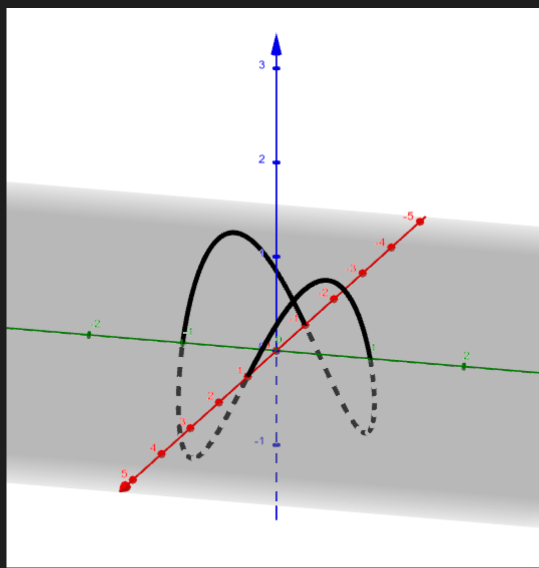
as a surface parametrized in terms of cylindrical polar coordinates.

$z = 2xy$ es como una hiperbola en 3D

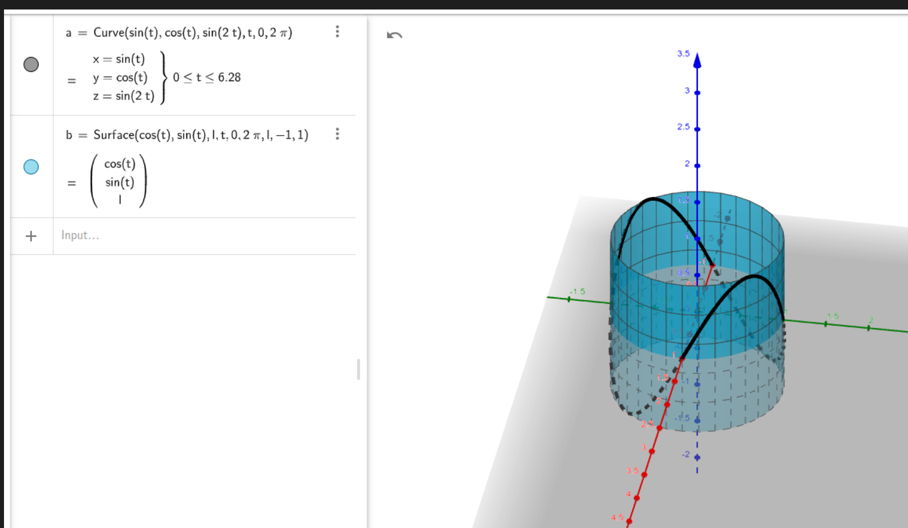
C es el borde de esta papa frita

De arriba:





Puedo cerrarla con un Cilindro y una tapa, pero mejor uso la sugerencia



La curva es

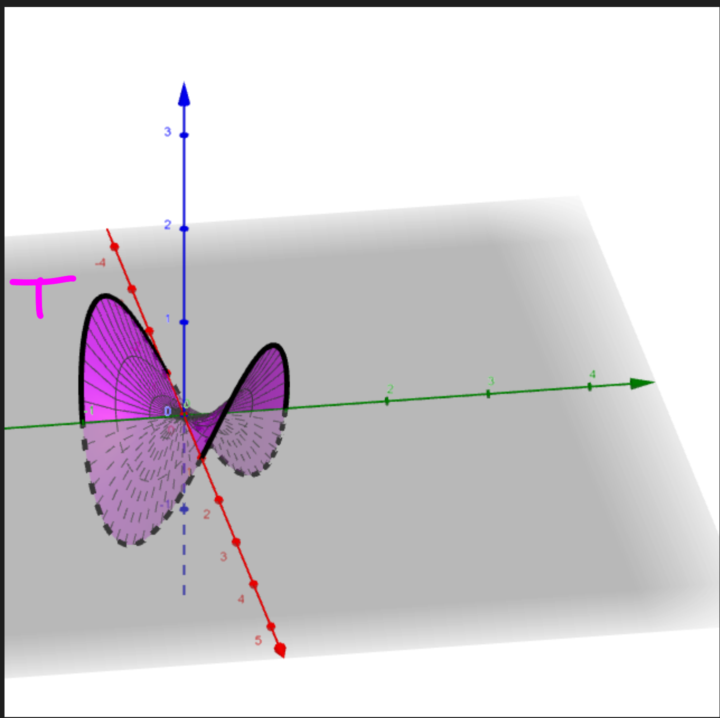
$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, \underbrace{\sin(2t)}^{= 2.\cos t . \sin t})$$

La param en cartesianas es

$$S(x,y) = (x, y, 2xy) \quad \text{con} \quad x^2+y^2 \leq 1$$

$\Rightarrow$ En Polares

$$T(r,\theta) = (\overbrace{r.\cos\theta}^{=x}, \overbrace{r.\sin\theta}^{=y}, \overbrace{r^2.\sin 2\theta}^{=2xy}) \qquad r \in [0,1] \quad \theta \in [0,2\pi)$$



Quiero usar Stokes

$$\int_{C=\partial S} F . d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F . d\vec{S}$$

Falta verificar orientación!

Calculo

$$F = \left(y + \sin x ,\ \frac{3}{2} z^2 + \cos y ,\ 2x^3 \right)$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+\sin x & \frac{3}{2}z^2 + \cos y & 2x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-3z ,\ -6x ,\ -1 \right)$$

$$T(r,\theta) = \left(r.\cos\theta ,\ r.\sin\theta ,\ r^2.\sin 2\theta \right)$$

$$T_r = \left(\cos\theta ,\ \sin\theta ,\ 2r.\sin 2\theta \right)$$

$$T_\theta = \left(-r.\sin\theta ,\ r.\cos\theta ,\ 2r^2.\cos 2\theta \right)$$

$$T_r \times T_\theta = \Big(2r^2.\sin\theta.\cos 2\theta ,\ -\left(2r^2.\cos\theta.\cos 2\theta + 2r^2.\sin\theta.\sin 2\theta \right),$$
$$\underbrace{r.\cos^2\theta + r.\sin^2\theta}_{=r} \Big)$$

$$= \left(2r^2.\sin\theta.\cos 2\theta ,\ 2r^2.\sin\theta.\sin 2\theta - 2r^2.\cos\theta.\cos 2\theta ,\ r \right)$$

$$\iint_S \nabla \times F \, ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left\langle \underbrace{\nabla \times F \left(T(r,\theta) \right)} ,\ T_r \times T_\theta \right\rangle dr\, d\theta$$

$$\nabla \times F = (-3z ,\ -6x ,\ -1)$$

$$\underbrace{\nabla \times F \left(r\cos\theta ,\ r\sin\theta ,\ r^2.\sin 2\theta \right)}$$
$$\left(-3.r^2.\sin 2\theta ,\ -6.r.\cos\theta ,\ -1 \right)$$

$$\underbrace{\langle \nabla\times F\,(T(r,\theta))\,,\; T_r\times T_\theta\rangle}$$

$$\underbrace{-6r^4\cdot\sin\theta\cdot\cos2\theta\cdot\sin2\theta-12r^3\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin2\theta+12\cdot r^3\cdot\cos^2\theta\cdot\cos2\theta\;-r}$$

La muerte misma!

WolframAlpha computational intelligence.

Integrate [-6r^4 sin t cos 2t sin 2t -12 r^3 cos t sin t sin 2t +12 r^3 cos^2 t cos 2t -r, {r,0,1},{t,0,2pi}]

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

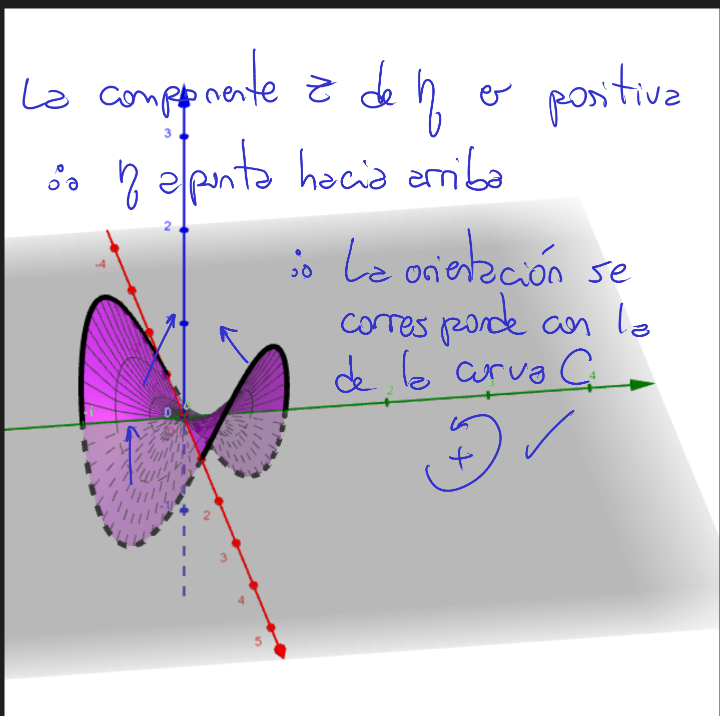
Definite integral | More digits | Step-by-step solution

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left((-6r^4)\sin(t)\cos(2t)\sin(2t)-12r^3\cos(t)\sin(t)\sin(2t)+12r^3\cos^2(t)\cos(2t)-r\right)dt\,dr=-\pi\approx-3.1416$$

PERO debo verificar orientación de T

Como $T_r\times T_\theta=(\dots,\dots,r)$ y $r\in[0,1]$

$\Rightarrow$



Finalmente

$$\int_{C=\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\int_C F \cdot d\vec{s} = -\pi}$$

n(t) - 2 r^2 cos(t) sin(2 t), -2 r^2 cos(t) cos(2 t) - 2 r^2 sin(t) sin(2 t), r cos^2(t) + r sin^2(t)}, {r,0,1}, {t,0,2pi}]

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Definite integral More digits Step-by-step solution

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \{-3(r^2 \sin(2t)), -6(r\cos(t)), -1\} . \{2r^2\cos(2t)\sin(t) - 2r^2\cos(t)\sin(2t), -2r^2\cos(t)\cos(2t) - 2r^2\sin(t)\sin(2t), r\cos^2(t) + r\sin^2(t)\}\, dt\, dr = 2\pi \approx 6.2832$$

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

Llamo F a ∇f

$\Rightarrow$ F es campo gradiente

$\Rightarrow$ La integral sobre cualquier curva $\mathcal{C}$ es

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(b) - f(a)$$

Como $F = 0$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(b) - f(a) = 0$$

$f(a) = f(b)$ para cualquier par de puntos en B

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano de ecuación $y=x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

Parece un campo gradiente

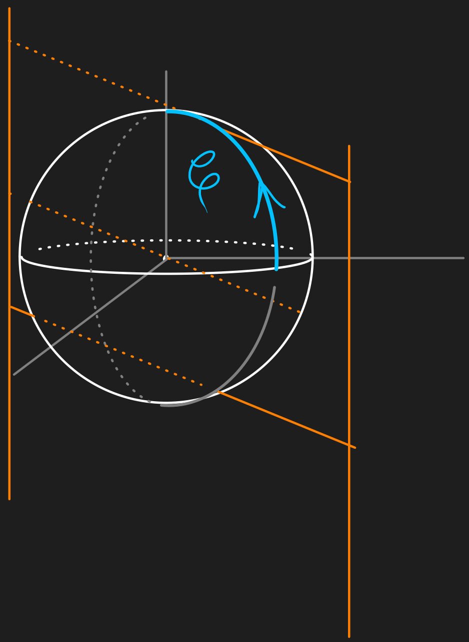
Si $f_x = 2xy + z^2 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 y + x\cdot z^2 + \varphi(y,z)$

y $\qquad f(x,y,z) = x^2 y - y^2 z + \bar{\varphi}(x,z)$

z $\qquad = x z^2 - y^2 z + \bar{\bar{\varphi}}(x,y)$

Si $f(x,y,z) = x^2\cdot y + x\cdot z^2 - y^2\cdot z$

$\Rightarrow \nabla f = F$ ✓ F es C. Grad.



$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds \overset{F=\nabla f}{=} \underbrace{f(0,0,1)}_{=0} - \underbrace{f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}_{=-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

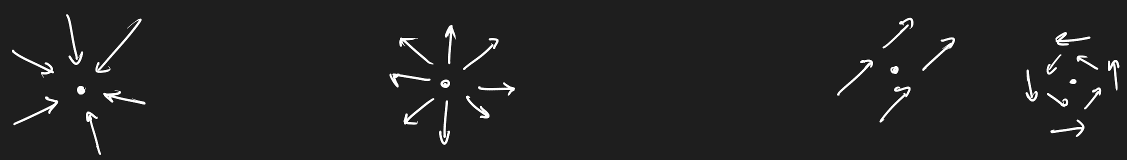
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio ~~16~~ 17) de la Práctica 2, usando el Teorema de Gauss.

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Teorema de Gauss / Divergencia

div $F < 0$ | div $F > 0$ | div $F = 0$



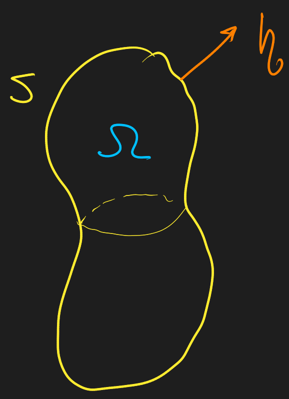
"se comprime / se encurre" | "Fuente de agua"

Super simple, $\in \mathbb{R}$!

$$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z$$

Teo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tipo IV (un volumen relleno con cáscara)
- $S = \partial \Omega$ ("Cáscara de Ω")
- S superficie cerrada
  orientada con normal η hacia afuera



- $F \in C^1(\Omega)$ (como en todos los teoremas)

$$\iint_S F\cdot\eta\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, dv$$

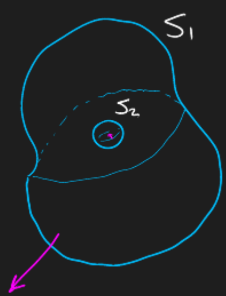
$$= \iint_{\partial\Omega_{ext}} F\cdot\eta_{ext}\, ds$$

$$= \int_{\partial\Omega_{ext}} F\cdot d\vec{S}$$

De las notas de Eze Rela:

Extensiones / observaciones

1) Regiones con huecos



$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2$$

S_1: hacia afuera de sí misma

S_2: hacia adentro de sí misma

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dV = \int_{S_1^{ext}} F\, d\vec{s} + \int_{S_2^{int}} F\, d\vec{s}$$

Notar:

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2$$

cuando la oriento:

$$(\partial\Omega)^{ext} = S_1^{ext} \cup S_2^{int}$$

$$\int_S \nabla \times F \, d\vec{S} = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla \times F)\, dV = 0$$

Puedo separarla en dos cáscaras con borde

S_2 S_1

Stokes

$$\int_{\mathcal{C}^-} F \, d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s} = 0$$

$\mathcal{C}^- = \partial S_1$ $\qquad \mathcal{C} = \partial S_2$

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

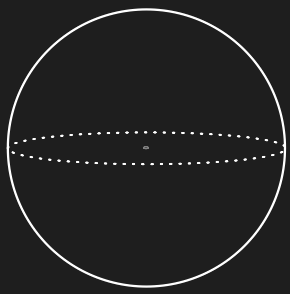
$$\operatorname{div} F = 3$$

$$\int_S F \cdot dS = \iint_{S = \partial \text{Cubo}} F \cdot \eta \, dS = \iiint_{\text{Cubo}} 3 \, dV$$

$$= 3 \operatorname{Vol}(\text{Cubo})$$

$$= 3 \, //$$

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x+y+z)\,dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir
$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2=1\}$$



$$\int_S f\,dS = \iint_{u\,v} f(T(u,v)) \cdot \|T_u \times T_v\|\,du\,dv$$

Pero quiero usar Gauss!

$$\nabla f = (1,1,1) =: F$$

Para la esfera unitaria

$$\Rightarrow \langle F, \eta \rangle = \langle (1,1,1), (x,y,z) \rangle$$

$$= x + y + z$$

$$\int_S (x+y+z)\,dS = \int_S \langle F, \eta \rangle\,dS$$

y ahora, por Gauss

$$= \iiint_\Omega \underbrace{\operatorname{div} F}_{=0}\,dv$$

$$= 0$$

Otra forma (a revisar, no me convence)

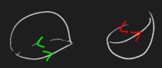
Como S es simétrica y f es impar $\left(f(-(x,y,z)) = -f(x,y,z) \right)$

$\Rightarrow$ La integral da cero

A revisar!

Otra forma es usando lo que Rela menciona arriba:

Puedo separarla en dos cáscaras con borde



S_2 S_1

y por Stokes

$$\underbrace{\int_{\substack{\mathcal{C}^- \\ \| \\ \partial S_1}} F\, d\vec{s}}_{= \iint_{S_1} \nabla \times F\, ds} + \underbrace{\int_{\substack{\mathcal{C} \\ \| \\ \partial S_2}} F\, d\vec{s}}_{= \iint_{S_2} \nabla \times F\, ds} = 0$$

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del Teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector que apunta de la posición de la masa m a la M, r es su longitud y G es la constante gravitatoria, considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

Llamo $A = G.M.m$

$$\Rightarrow \quad F = -A \cdot \frac{(m_1 - M_1,\ m_2 - M_2,\ m_3 - M_3)}{\|(m_1, m_2, m_3) - (M_1, M_2, M_3)\|^3}$$

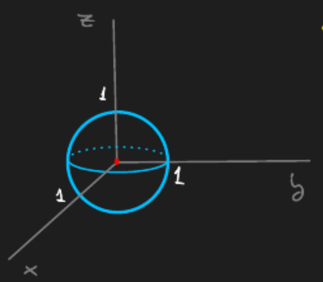
Hipótesis de Gauss

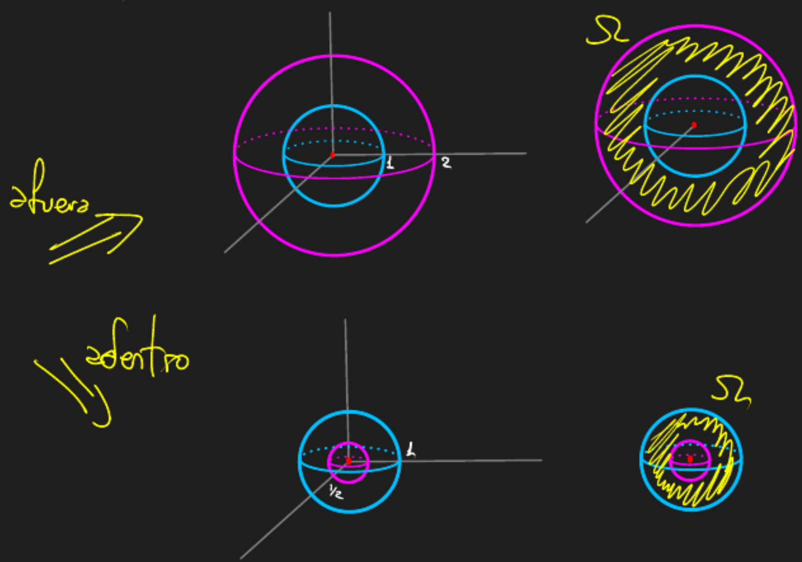
- $F \in C^1$ ✗ no en el $\vec{0}$ no está bien definido
- Ω una región de $\mathbb{R}^3$ ✓
- $S = \partial\Omega$ cerrada ✓

  orientada con η hacia afuera ? η es $\frac{r}{\|r\|}$?

Ambas cosas se pueden solucionar (creo)

Preguntar!





y si η apunta hacia adentro uso

$$\iint_S F \cdot \eta \, dS = -\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, ds$$

Ejercicio 14. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

$$\iint_S F \cdot dS = \overset{\eta_{int}}{-} \iiint_\Omega \underbrace{\operatorname{div} F}_{3x^2+3y^2+3z^2} \, dv$$

Con esféricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

$r \in [0, R]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi)$

Con Jacob $= r^2 \sin\varphi$

$$= -\int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} 3r^2 \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi}_{=\sin^2\varphi} + \cos^2\varphi\right)}_{=1} \cdot r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= -3 \int_0^R r^4 \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi}_{-\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2} \, d\theta \, dr$$

$$= -3 \cdot 4\pi \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^R$$

$$= -\frac{12}{5}\pi \cdot R^5$$

//

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(2 - \cos(2\varphi)\right) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6},$$

donde φ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

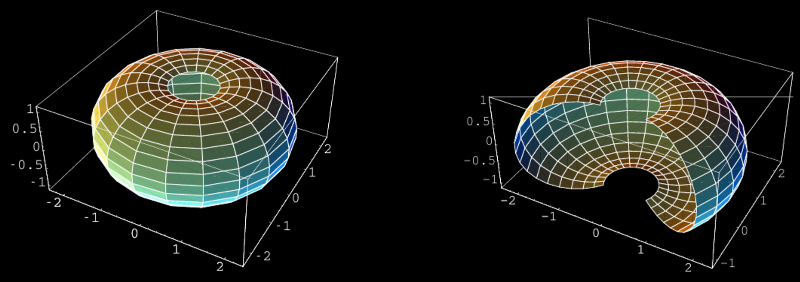
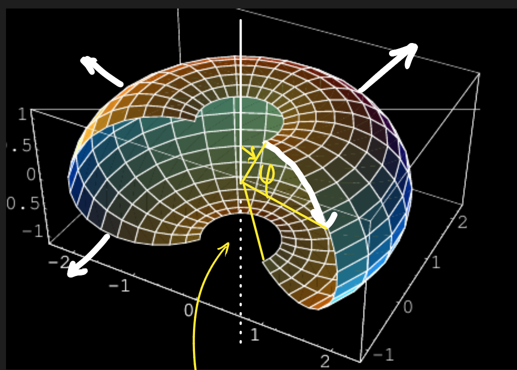


FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S, en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de S en el sentido "externo" del campo

$$F(x,y,z) = (x, y, -2z).$$



orientación correcta!

Quiero usar Stokes:

- el campo F es C^1 ✓
- la superficie no es cerrada!

⇒ La cierro. mis opciones son:

→ 2 tapas circulares

→ 1 cilindro

→ otra

Cómo elijo?

Necesito calcular

T es la sup que agrego

$$\iint_S \langle F, \eta\rangle\, ds - \iint_T \langle F, \eta\rangle\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, ds$$

Calculo lo que tengo para ver qué T me conviene

$$F = (x, y, -2z)$$

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, ds = 0$$

$$= \iint_{S} \langle F, \eta \rangle \, ds - \iint_{T} \langle F, \eta \rangle = 0$$

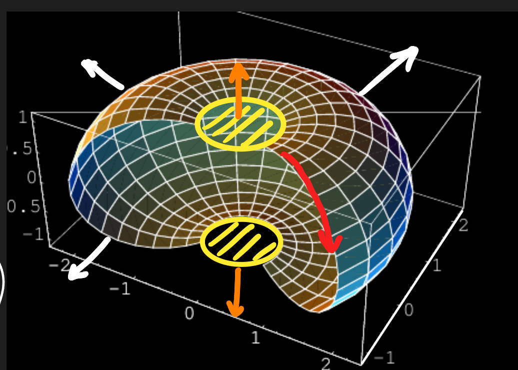
$$\iint_{S} \langle F, \eta \rangle \, ds = \underbrace{\iint_{T} \langle F, \eta \rangle \, ds}$$

Solo basta calcular esto.

Busco T que me simplifique la resolución

Elijo los dos discos como tapa pues $\eta = (0,0,1)$ ó $(0,0,-1)$

$$T(\theta) = T_{up}(\theta) \cup T_{down}(\theta)$$



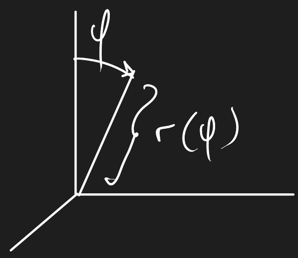
$$= (\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta, z_{up}) \cup (\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta, z_{down})$$

$\theta \in [0, 2\pi)$

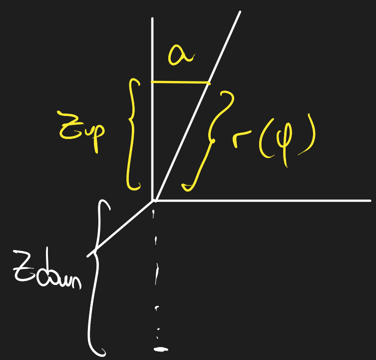
$r \in [0, a]$

Calculo a y z_{up}/z_{down}

$$r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(2 - \overbrace{\cos\left(\cancel{2}\,\frac{\pi}{\cancel{6}_{3}}\right)}^{0,5}\right)$$



$$= \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}55$$



SOH CAH TOA

- $$\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{} = \frac{a}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,a$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ (el radio de la tapita)

- $$\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{} = \frac{Z_{up}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot Z_{up}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot Z_{up}$$

$$Z_{up} = 1$$

Por simetría

$$Z_{down} = -1$$

Vuelvo a

$$T(\theta) = T_{up}(\theta) \cup T_{down}(\theta)$$

$$= \underbrace{(\tilde{r}\cos\theta,\ \tilde{r}\sin\theta,\ 1)}_{\eta \text{ apunta hacia arriba } ✓} \cup \underbrace{(\tilde{r}\cos\theta,\ \tilde{r}\sin\theta,\ -1)}_{\eta \text{ apunta hacia arriba!}}$$

quiero hacia abajo.

$$\iint_T \langle F, \eta \rangle \, ds = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \langle F(T(\tilde{r},\theta)), T_{\tilde{r}} \times T_\theta \rangle \, ds - \iint_{T_{down}} F \cdot \eta \, ds$$

Calculo la 1° integral

$$T_{\tilde{r}} \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\cdot\sin\theta & r\cdot\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(0,\ 0,\ r)}_{\text{no es } (0,0,1) \text{ pues no está normalizado}}$$

$$F = (x, y, -2z)$$

$$F(T(\tilde{r},\theta)) = (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ -2)$$

$$\langle F(T(\tilde{r},\theta)), T_{\tilde{r}} \times T_\theta \rangle = -2\tilde{r}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -2\tilde{r} \, d\tilde{r}\, d\theta = -\cancel{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\cancel{2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 2\pi$$

$$= -\frac{2}{3}\pi$$

La 2° integral:

$$F = (x, y, -2z)$$

$$F(T(\tilde{r},\theta)) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta,\ +2)$$

$$\langle F(T(\tilde{r},\theta)),\ T_{\tilde{r}} \times T_{\theta} \rangle = 2\tilde{r}$$

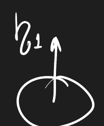
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\tilde{r}=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2\tilde{r}\, d\tilde{r}\, d\theta = \frac{2}{3}\pi$$

Finalmente

$$\iint_T \langle F, \eta \rangle\, ds = -\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$= -\frac{4}{3}\pi \quad //$$

Otra forma mucho más inteligente de habe hecho esto
era sin parametrizar cada disco, ya que sé cuál es la normal
sobre el disco, y también el area de un disco de radio 1/sqrt(3)



no compenso nada, es x, y, z en general

$$\int_{D_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{D_1} \langle F(x,y,z), \underbrace{(0,0,1)}_{\eta_1} \rangle\, ds$$

$$= \int_{D_1} \langle (x, y, -2z), (0,0,1) \rangle\, ds$$

$$= \int_{D_1} -2z \, ds$$

Sé que, sobre el disco D_1, $z = 1$ siempre

$$= \int_{D_1} -2 \cdot 1 \, ds$$

$$= -2 \cdot \text{Área}(D_1)$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= -\frac{2}{3}\pi \quad \checkmark$$

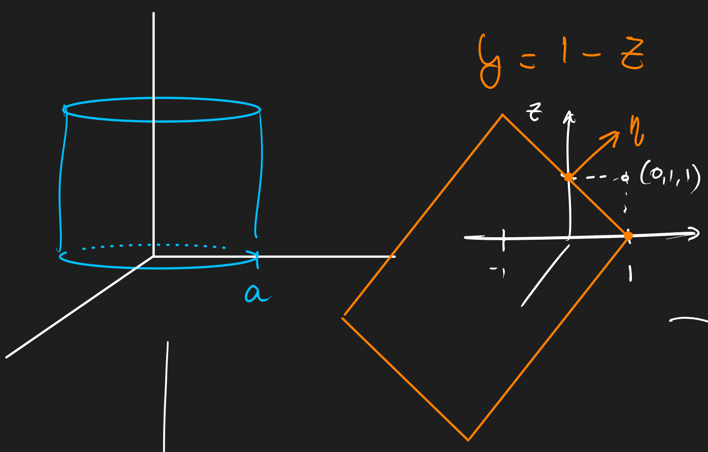
Esto me dice que no siempre debo apurarme a parametrizar todo,
sino que usando nociones más básicas de lo que estoy haciendo
en cada paso, puedo aprovechar y ahorrar cuentas innecesarias

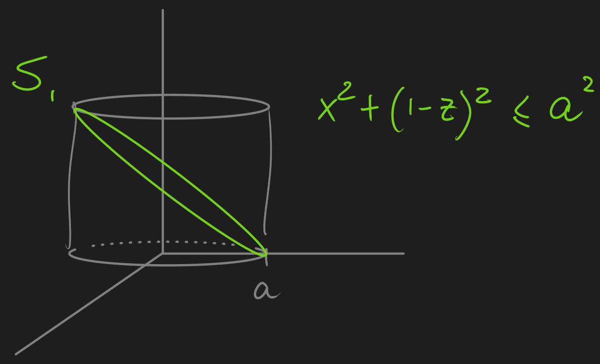
Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

(a) **S**ección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 1)$ apunte en la dirección $(0, 1, 1)$.

(b) **S**ección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección?. **J**ustifique.





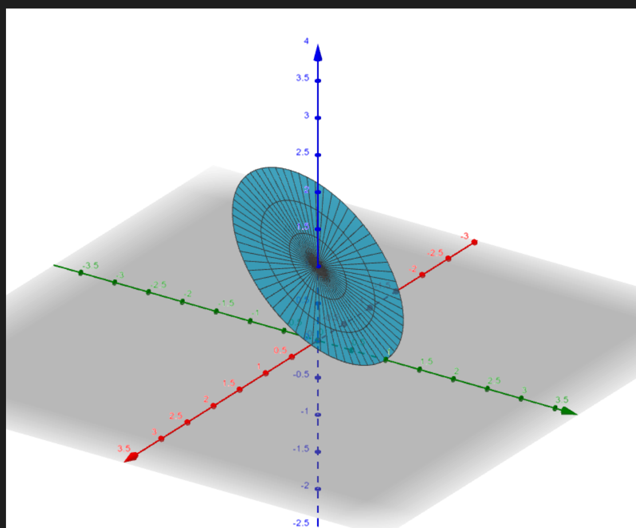
$(r\cdot\cos t,\ r\sin t,\ z)$ $\quad r \in [0, a]$

$t \in [0, 2\pi)$

$z \in [z_1, z_2]$

$z = 1 - y$

$\Rightarrow (r\cdot\cos t,\ r\sin t,\ 1 - r\cdot\sin t)$



$$\iint_{S_1} F\cdot\eta\, ds = \int_{r=0}^{a}\int_{t=0}^{2\pi} \langle F(T_1(r,t)),\ T_r \times T_t \rangle\, dt\, dr$$

$$T_r = (\cos t,\ \sin t,\ -\sin t)$$

$$T_t = (-r\cdot\sin t,\ r\cdot\cos t,\ -r\cdot\cos t)$$

$$T_r \times T_t = \left(-r.\cancel{\cos t.\sin t} + r.\cancel{\cos t.\sin t},\ -\left(-r.\cos^2 t - r.\sin^2 t\right),\ r.\cos^2 t + r.\sin^2 t\right)$$

$$= (0, r, r) \leftarrow \text{como } r \geq 0 \Rightarrow \text{Apunta como } (0,1,1) \checkmark$$

Calculo $F(T)$

$$F(T) = \left(0,\ 0,\ a^2 - r^2.\cos^2 t - r^2.\sin^2 t\right)$$

$$= \left(0,\ 0,\ a^2 - r^2\right)$$

$$\iint_{t\ r} r.a^2 - r^3 \, dr\, dt = \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\underbrace{\frac{r^2}{2} a^2 \Big|_0^a}_{\frac{a^4}{2}} - \underbrace{\frac{r^4}{4}\Big|_0^a}_{\frac{a^4}{4}}}_{\frac{1}{4}a^4} \, dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 \, dt$$

$$= \frac{1}{4} a^4 . 2\pi$$

$$= \frac{1}{2} a^4 . \pi \ //$$

Con Gauss era más complicado.

Si considero la superficie cerrada vale Gauss

$$S: \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ y+z \leq 1 \end{cases} \qquad 0 \leq z \leq 1-y$$

$$\iint_S F\, ds = \iiint_\Omega \underbrace{div(F)}_{=0}\, dx dy dz = 0$$

$$\iint_S F\, dS = \iint_{S_1} F\, dS + \iint_{S_2} F\, dS + \iint_{S_3} F\, dS = 0$$

S_1 ⇝ es la que quiero saber

S_2 ⇝ tapas laterales (cilindro)

S_3 ⇝ tapa de abajo

$$S_2(\theta, z) = (a\cos(\theta),\ a\,sen(\theta),\ z)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 1 - a\,sen(\theta)$$

$$S_{2\theta}(\theta,z) = (-a\,sen(\theta),\ a\cos(\theta),\ 0)$$

$$S_{2z}(\theta,z) = (0,\ 0,\ 1)$$

$S_{2\theta} \times S_{2z} = (0,\ a\,sen(\theta),\ 0)$ respeta orientación

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-sen(\theta)} (0, 0, *)\cdot(0, *, 0)\, dz\, d\theta = 0$$

$S_3(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,sen\,\theta,\ 0)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$S_{3r}(r,\theta) = (\cos\theta,\ sen\,\theta,\ 0)$ $\quad 0 \leq r \leq a$

$S_{3\theta}(r,\theta) = (-r\,sen\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$

$S_{3r} \times S_{3\theta} = (0,\ 0,\ r)$ → invierte orientación

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^a (0, 0, a^2 - r^2\cos^2\theta - r^2 sen\,\theta)(0, 0, r)\, dr\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^a [a^2 - r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)]\cdot r\, dr\, d\theta = -2\pi\cdot\left[\int_0^a r\cdot a^2 - r^3\, dr\right]$$

$$= -2\pi\left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^a a^2 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^a\right] = 2\pi\cdot\left[\frac{a^2}{2}a^2 - \frac{a^4}{4}\right] = 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \left|\frac{\pi\cdot a^4}{2}\right|$$

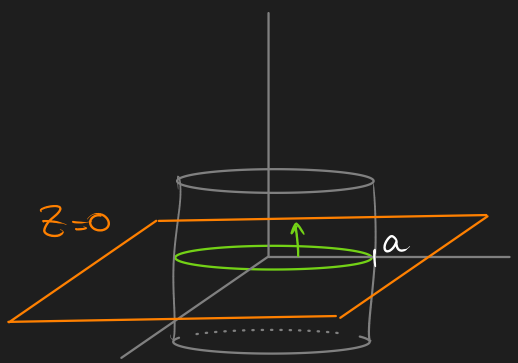
Entonces $\iint_{S_1} F\, ds + \iint_{S_2} F\, ds + \iint_{S_3} F\, ds = 0$

$$\iint_{S_1} F\, ds + 0 - \frac{\pi\cdot a^4}{2} = 0$$

$$\boxed{\iint_{S_1} F\, ds = \frac{\pi\cdot a^4}{2}}$$

(b) **S**ección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección?. **J**ustifique.



$$\iint_{S_2} \langle F, \eta \rangle\, ds =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \langle (0, 0, a^2 - r^2), (0, 0, r) \rangle\, dr\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \underbrace{r\cdot a^2 - r^3}_{\text{igual que antes}}\, dr\, dt$$

$$= \frac{1}{2} a^4\cdot\pi \quad //$$

```
Ya que la parametrización del disco siempre tiene las mismas componentes x,y, independientemente del plano
que lo corte (pues si z=0 => es un disco en el plano xy siempre),
y como F descarta la dimensión z de la parametrización al ser (0, 0, a^2 - x^2 -y^2)
Entonces puedo asegurar que la composición de F(T(r,t)) es siempre (0, 0, a^2-r^2)
para toda parametrización T que represente una sección oblicua del cilindro de radio a del enunciado.
Y como el producto punto entre F(T(r,t)) y (Tr x Tt) es siempre igual al producto de sus coordenadas
en z (pues x e y se descartan por ser cero), y como F(T(r,t)) es siempre igual,
basta ver que Tr x Tt, al ser siempre igual a r, la integral da siempre el mismo valor.

Para ver esto, vemos el plano inicial z = 1 - y

Para generalizar a todos los posibles planos, tenemos
z = c - d * y
```

Para cualquier plano

$$\Rightarrow T(r,t) = (r\cdot\cos t,\ r\cdot\sin t,\ c - d\cdot r\cdot\sin t)$$

Calculo $T_r \times T_t$

$$T_r = (\cos t,\ \sin t,\ -d\cdot\sin t)$$

$$T_t = (-r\cdot\sin t,\ r\cdot\cos t,\ -d\cdot r\cdot\cos t)$$

$$T_r \times T_t = \Big(-d\cdot r\cdot\cancel{\cos t}\cdot\sin t + d\cdot r\cdot\cancel{\cos t}\cdot\sin t,\ -(-d\cdot r\cdot\cos^2 t - d\cdot r\cdot\sin^2 t),\ r\cdot\cos^2 t + r\cdot\sin^2\Big)$$

$$= (0,\ d\cdot r,\ r)$$

esta dimensión se descarta en el producto y solo uso r, que es siempre igual

$\boxtimes$

Ejercicio 17. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-2x}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \leq z \leq 1$.

Para una idea gráfica ver la figura.

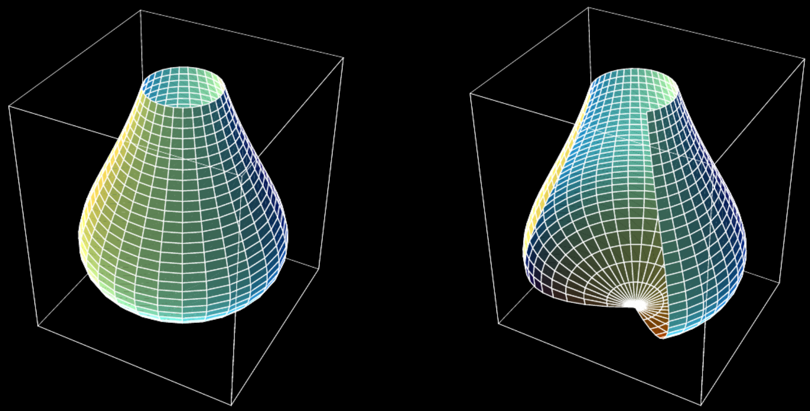


FIGURA 2

Cuando el mate se encuetra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$F(x, y, z) = \left(x, y, z - \tfrac{1}{2}\right)$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Disco Tapa

Gauss

$$\iint_S F\cdot\eta\, ds + \iint_D F\cdot\eta\, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, ds$$

Veo si me conviene Gauss o calcular $\iint_S F\cdot\eta$ directamente

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \operatorname{div} F\, ds = 3 \cdot \underbrace{\operatorname{Vol}(\text{Mate})}$$

Puedo usar Fubini:

Polares + Cortes horizontales del mate

Sale fácil ✓

$$\iint_D F \cdot \eta \, ds = \iint_D \langle F(x,y,z), (0,0,1) \rangle \, ds$$

η es igual en todo D

no parametrizo nada!

$$= \iint_D z - \frac{1}{2} \, ds$$

z mantiene el mismo valor en todo D

o sea: $z = 1$ (la altura de la tapa D)

$$= \iint_D \frac{1}{2} \, ds$$

$$= \frac{1}{2} \text{Área}(D)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_D^2$$

con r_D el radio de D

$r_D = f(1) = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{8} \pi$$

//

Salió rápido, sigo con Gauss:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, ds = 3 \cdot \text{Vol}(\text{Mate})$$

$$= 3 \cdot \int_{z=0}^{1} \text{Area}(\text{Disco de radio } f(z)) \, dz$$

$$= 3 \int_{z=0}^{1} \pi \cdot f(z)^2 \cdot dz$$

$$= 3\pi \int_{z=0}^{1} \left(\frac{1}{2} z \cdot e^{2-2z}\right)^2 \cdot dz$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \pi \underbrace{\int_0^1 z^2 \cdot e^{4-4z} \cdot dz}_{\mathrm{I}}$$

CA:

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{\varphi(z)} = \varphi'(z) e^{\varphi(z)}$$

Con $\varphi(z) = 4 - 4z$

$\varphi'(z) = -4$

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{\varphi(z)} = -4 \cdot e^{4-4z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} -\frac{1}{4} e^{\varphi(z)} = e^{4-4z}$$

Uso Partes

$u = z^2 \qquad du = 2z\, dz$

$v = -\frac{1}{4} e^{4-4z} \qquad dv = e^{4-4z}$

$$\underbrace{\int u \cdot dv}_{\mathrm{I}} = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$= -z^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4-4z} + \underbrace{\int + \frac{1}{4} \cdot e^{4-4z} \cdot 2z\, dz}_{+ \int \frac{1}{2} \cdot e^{4-4z} \cdot z\, dz}$$

wolfram

$$= -\frac{1}{4} \cdot z^2 \cdot e^{4-4z} - \frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (4z+1)$$

$$= -\frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (8z^2+4z+1)$$

$$-\frac{1}{32} \cdot e^{4-4z} \cdot (8z^2+4z+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{32} \cdot (e^4 - 13) \approx 1,3$$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, ds = \frac{3}{4}\pi \cdot \frac{1}{32} \cdot (e^4 - 13)$$

$$= \frac{3}{128} \cdot \pi (e^4 - 13) \approx 3,063$$

Finalmente

$$\iint_S F \cdot \eta \, ds + \iint_D F \cdot \eta \, ds = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, ds$$

$$\iint_S F \cdot \eta \, ds = \frac{3}{128} \cdot \pi (e^4 - 13) - \frac{1}{8}\pi \approx 2,67$$

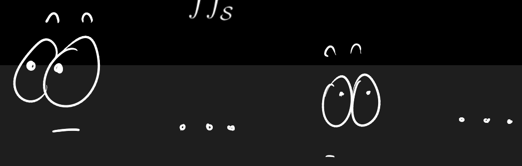
//

y queda así porque es horrible.

Ejercicio 18. Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por el gráfico de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ con $\|(x,y)\| \leq 1$ y sea $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{zx}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{zy}{x^2+y^2}\,,\ 0\right)$. Hallar

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Piense antes de actuar.



$\|(x,y)\| \leq 1$: Disco de radio 1

Si compongo F con la param. del Disco $\|(x,y)\| \leq 1$, se simplifica el denominador

$$T(r,t) = \Bigg(r.\cos t,\ r.\sin t,\ \overset{f(x,y)}{\frac{1}{\underbrace{1+r^2.\cos^2 t + r^2.\sin^2 t}_{1+r^2}}}\Bigg)$$

$$F(T(r,t)) = \left(\frac{\left(\frac{r.\cos t}{1+r^2}\right)}{r^2},\ \frac{\left(\frac{r.\sin t}{1+r^2}\right)}{r^2},\ 0\right)$$

$$= \left(\frac{\cos t}{r+r^3},\ \frac{\sin t}{r+r^3},\ 0\right)$$

CA:

$$\frac{1}{1+r^2} = (1+r^2)^{-1}$$

$$T_r = \quad \cos t \qquad \sin t \qquad -(1+r^2)^{-2}.\,2r$$

$$T_t = \quad -r.\sin t \qquad r.\cos t \qquad 0$$

$$T_r \times T_t = \left(\frac{2r^2.\cos t}{(1+r^2)^2},\ \cancel{-}\left(\cancel{-}\frac{2r^2.\sin t}{(1+r^2)^2}\right),\ r\right)$$

Creo que es por acá...

$$\langle F(T(r,t)), T_r \times T_t \rangle = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 t}{r \cdot (1+r^2) \cdot (1+r^2)^2} +$$

$$+ \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 t}{r \cdot (1+r^2) \cdot (1+r^2)^2} + 0$$

$$= \frac{2 r^2}{r \cdot (1+r^2)(1+r^2)^2}$$

$$= \frac{2r}{(1+r^2)^3}$$

no se simplificó mucho ... sigo igual

$$\int_{r=0}^{1} \int_{t=0}^{2\pi} \langle F(T(r,t)), T_r \times T_t \rangle \, dt\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r}{(1+r^2)^3} \, dt\, dr$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^3} \, dr$$

$$u = 1 + r^2$$

$$du = 2r\, dr \Rightarrow r \cdot dr = \frac{1}{2} du$$

$$= 4\pi \cdot \int_{u=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{1}{u^3} \, du$$

CA

$$\frac{1}{u^3} = u^{-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} u^{-2} = -2u^{-3}$$

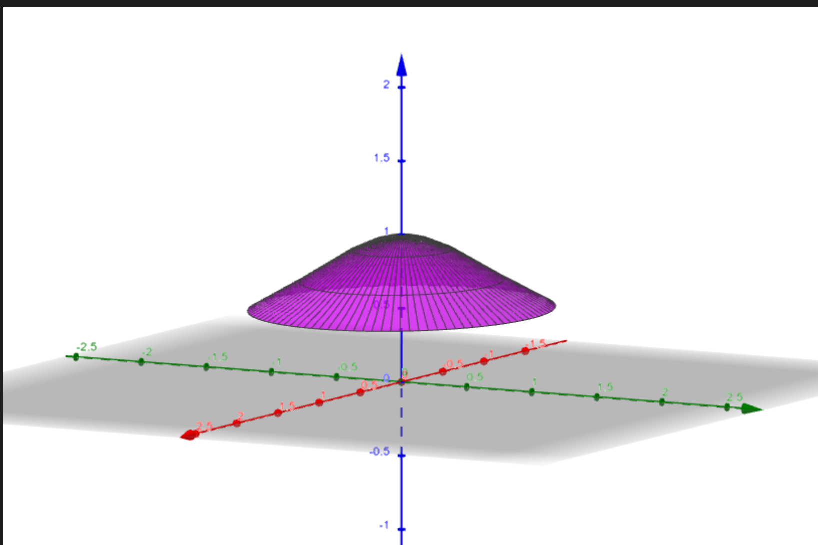
$$\frac{\partial}{\partial u} -\frac{1}{2}u^{-2} = u^{-3}$$

$$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}u^{-2}\right|_1^2$$

$$= -\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$\iint_S F\,ds = \frac{3}{4}\pi \quad //$$

Habrá otra forma? Grafico para ver



← se re podía cerrar!

Pero div F se ve fea!

$$\operatorname{div} F = \frac{z\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{z\cdot(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + 0$$

$$= 0$$

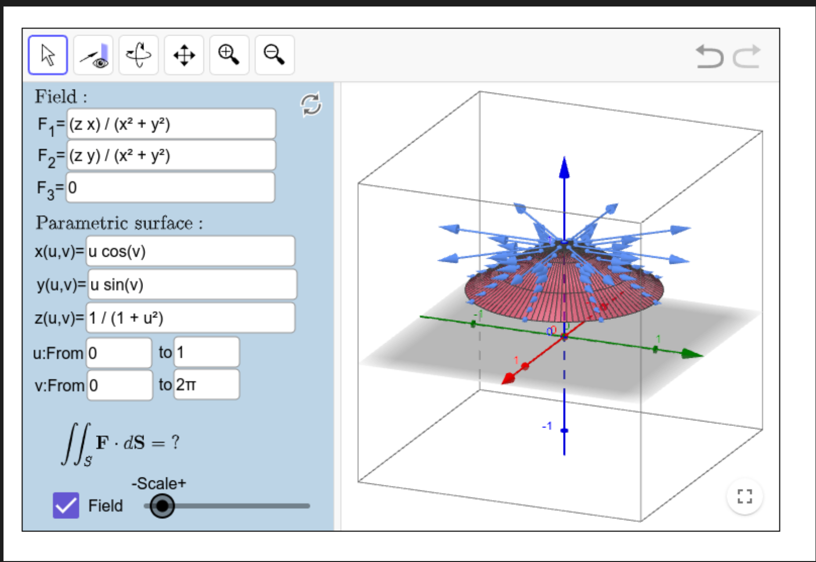
no te lo puedo creer...

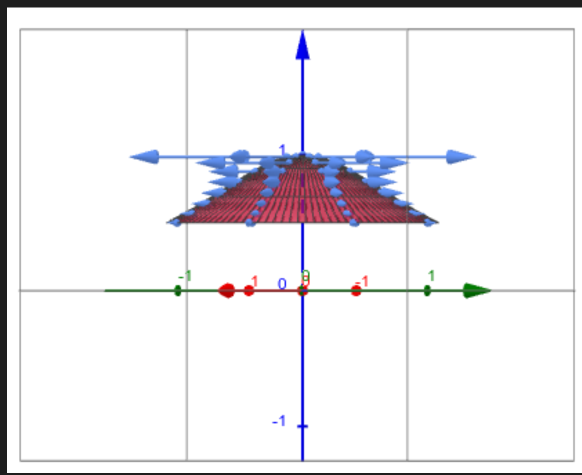
$$\Rightarrow \iiint_\Omega \operatorname{div} F = 0$$

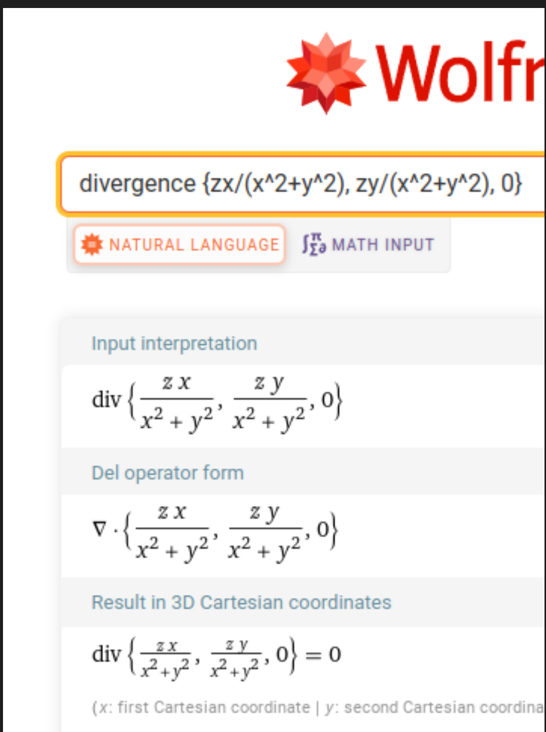
Tapa que cierra

$$\iint_D \underbrace{\langle F(x,y,z), (0,0,-1)\rangle \, ds}_{=0} =$$

esto debería darme $-\frac{3}{4}\pi$??







TODO ESTO ESTÁ MAL!:

El "piense antes de actuar" se refería a que como F no tiene componente en Z, entonces todos los vectores del campo vectorial F son horizontales con respecto al plano XY.

Ahora, graficando la superficie, podemos ver que los vectores sí atraviesan la superficie original S, pero no así la tapa de abajo (si es un disco paralelo al plano XY).

Entonces la integral del campo a través de la superficie orignal S debe ser la integral triple sobre el volumen de S con tapa (Por Gauss, porque F es C^1)

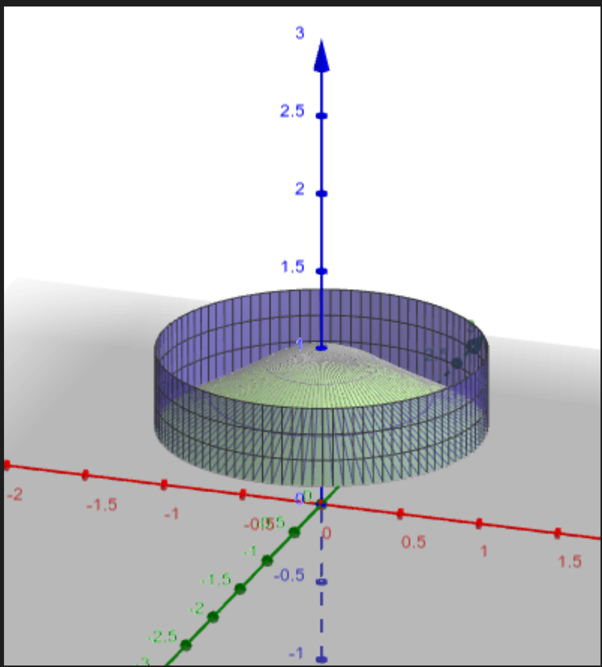
Y como la divergencia del campo es cero, entonces la integral del ejercicio debe ser cero.

F NO ES C^1!! Y por lo tanto, no puedo usar el teorema de Gauss de esa manera!

Todo el eje Z es problemático, y como S está centrado en ese eje, no puedo cerrarlo con una tapa sin que incluya alguna porción del eje Z!

Puedo cerrarla con un cilindro afuera
y una tapa arriba (que solo toca a Z en un punto)??

(Spoiler: NO!)



Cilindro T:

$$T(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$z \in [0{,}5, 1]$

$$F(T(\theta,z)) = \left(\frac{z \cdot \cos\theta}{1}, \frac{z \cdot \sin\theta}{1}, 0\right)$$

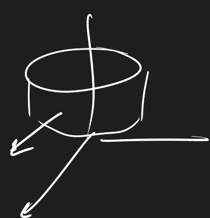
$$T_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$T_z = (0, 0, 1)$$

$$T_\theta \times T_z = (\cos\theta, +\sin\theta, 0)$$

$$T_\theta \times T_z(0, z) = (1, 0, 0)$$ ✓ apunta hacia afuera

Luego



$$\langle F(T(\theta,z)), (1,0,0)\rangle = z \cdot \cos\theta$$

$$\int_{z=\frac{1}{2}}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} z \cdot \cos\theta \, d\theta \, dz = \int_{\frac{1}{2}}^{1} z \cdot \left(\sin\theta \Big|_{0}^{2\pi} \right) = 0$$

$\therefore$

Tampoco puedo cerrar S de esa forma!

Ejercicio 19. Se sabe que $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt, \\ G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt, \\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$?

Sugerencia: Ver Ejercicio 12.

Ejercicio 20. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = (x, y, z)$.
(b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

a) $\operatorname{div} F = 3 \Rightarrow$ No es rotor de nadie

b) $\operatorname{div} F = 2x - 2x + 0 = 0 \Rightarrow$ es rotor! (por ej 19)

$F = \operatorname{rot} G$ con $G = (P, Q, R)$

$= \nabla \times G$

$$= \begin{vmatrix} i & \overset{(-)}{j} & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(R_y - Q_z , P_z - R_x , Q_x - P_y \right)$$

$$\overset{\text{dato}}{=} \left(x^2+1 , x - 2xy , y \right)$$

Uso ej 19:

$$G_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt,$$
$$G_2(x,y,z) = -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt,$$
$$G_3(x,y,z) = 0.$$

$$P = \int_0^z \underbrace{F_2(x,y,t)}_{= x-2xy} dt - \int_0^y \underbrace{F_3(x,t,0)}_{= t} dt$$

$$= \int_0^z x - 2xy\,dt - \int_0^y t \cdot dt$$

$$= xz - 2xyz - \frac{y^2}{2}$$

$$Q = -\int_0^z \underbrace{F_1(x,y,t)}_{=x^2+1}\,dt$$

$$= -z.x^2 - z$$

$$R = 0$$

$\therefore$

$$G = \Big(\underbrace{xz - 2xyz - \frac{y^3}{2}}_{P},\ \underbrace{-zx^2 - z}_{Q},\ \underbrace{0}_{R}\Big)$$

Verifico

$$(\cancel{R_y} - Q_z,\ P_z - \cancel{R_x},\ Q_x - P_y) \overset{\text{dato}}{=} (x^2+1,\ x - 2xy,\ y)$$

$$-Q_z = x^2 + 1 \ \checkmark$$

$$P_z = x - 2xy \ \checkmark$$

$$Q_x - P_y = -2xz + 2xz + \frac{2y}{2} = y \ \checkmark$$

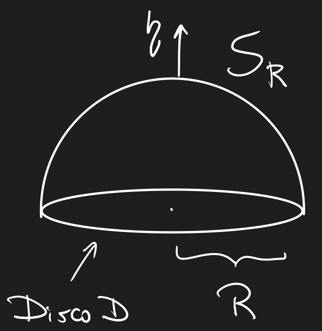
$\therefore$

$$\boxed{G = \left(xz - 2xyz - \frac{y^3}{2},\ -zx^2 - z,\ 0\right)}$$

Ejercicio 21. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.



Quiero R tq $\displaystyle\iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds$ sea máx

F es C^1

η hacia abajo

$$\Rightarrow \iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds + \iint_{D} \langle F, \eta \rangle \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV$$

$$\operatorname{div} F = \cancel{z} - \cancel{\cos} z - \cancel{z} + \cancel{\cos} z + 0$$

$$\operatorname{div} F = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds + \iint_{D} \langle F, \eta \rangle \, ds = 0$$

$$\iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds = -\iint_{D} \langle F, \eta \rangle \, ds$$

η hacia abajo

$$\iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle \, ds = \iint_{D^-} \langle F, \eta \rangle \, ds$$

η hacia arriba!

Debo parametrizar D^-

$$T(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ 0) \qquad \begin{array}{l} r\in[0,R] \\ \theta\in[0,2\pi) \end{array}$$

$$F(x,y,\underset{z=0}{0}) = (-x,\ y,\ 4-(x^2+y^2))$$

$$F(T(r,\theta)) = (-r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ 4-r^2)$$

$$T_r \times T_\theta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & (-) & \quad \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\cdot\sin\theta & r\cdot\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (2r^2\cdot\cos\theta,\ 2r^2\cdot\sin\theta,\ r) \leftarrow r>0 \Rightarrow \text{apunta hacia arriba} \checkmark$$

$$\Rightarrow \langle F(T(r,\theta)),\ (2r^2\cdot\cos\theta,\ 2r^2\cdot\sin\theta,\ r)\rangle =$$

$$= -2r^3\cdot\cos^2\theta + 2r^3\cdot\sin^2\theta + 4r - r^3$$

es re feo!

Pruebo simplificar antes de parametrizar:

$z=0$ y $\eta=(0,0,1)$ en todo D^-

$$\iint_{D^-} \langle F,\eta\rangle\, dS = \iint_{D^-} \underbrace{\langle F(x,y,0),(0,0,1)\rangle}_{4-(x^2+y^2)}\, dS$$

$$= \iint_{D^-} 4 - (x^2+y^2)\, ds$$

Uso Polares $\quad x = r.\cos\theta$

$y = r.\sin\theta$

No dudar!

Jacob $= r$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} (4 - r^2) \cdot r \quad dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left(2r^2 \Big|_0^R - \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right)$$

$$\iint_{S_R} \langle F, \eta \rangle\, ds = 2\pi \cdot \left(2R^2 - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$= 4\pi . R^2 - \frac{\pi}{2} R^4 =: f(R)$$

Quiero R / $f(R)$ sea máx

$$\Rightarrow f'(R) = 0$$

$$8.\pi . R - 2\pi . R^3 = 0$$

$R>0$

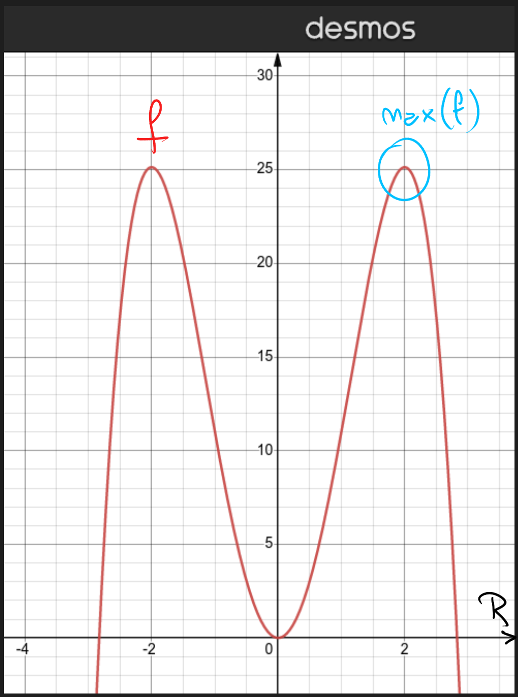
$$8.\pi - 2\pi . R^2 = 0$$

$$2\pi . R^2 = 8\pi$$

$$R^2 = 4$$

$$R \overset{R>0}{\downarrow}{=} 2$$

Rta : $R = 2$ maximiza la integral //



Ejercicio 22. Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Veo $\operatorname{div} V = 1 + 1 - 1 = 1 > 0 \therefore$ se expande!

Sea V = (x,y,xy-z) el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Para determinar si el fluido se está expandiendo, necesitamos calcular la divergencia del campo de velocidades V. La divergencia nos indica si el fluido está experimentando una expansión o una contracción en un punto dado.

La fórmula para calcular la divergencia de un campo vectorial V = (V1, V2, V3) es:

div(V) = ∂V1/∂x + ∂V2/∂y + ∂V3/∂z

En este caso, el campo de velocidades V = (x, y, xy-z), por lo que:

∂V1/∂x = 1
∂V2/∂y = 1
∂V3/∂z = -1

Por lo tanto, la divergencia del campo de velocidades V es:

div(V) = 1 + 1 - 1 = 1

Como la divergencia es positiva, el fluido está experimentando una expansión en todos los puntos del espacio.

Ejercicio 23. Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$ del espacio si la temperatura ambiente en el punto (x, y, z) en el instante t es $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. (Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1).

Sugerencia: Utilizar la Ley de Fourier que dice que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$ donde K es la conductividad térmica. Aquí, ∇T es el gradiente en las variables espaciales.

Soy de Boquita, paso el que sigue.

(22) $T(x,y,z,t)$ temperatura en $\underbrace{(x,y,z)}_{\bar{x}}$ en $t \Rightarrow T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow T : \mathbb{R}^3 \times (0,1) \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(\bar{x},t) = -K\nabla T(\bar{x},t) = -K(-2x, -2y, -2z)$$

$$\Rightarrow S = [0,4]\times[0,5]\times[0,3]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_S \langle F(\bar{x},s), n\rangle\, ds}_{\text{Flujo a traves de } S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}(F(\bar{x},s))\, d\bar{x}$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega u(\bar{x}, t_0+h)\, d\bar{x} - \iiint_\Omega u(\bar{x},t_0)\, d\bar{x} = \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega u(\bar{x},s)\, d\bar{x}\, ds = \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+h}\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},s)\, d\bar{x}\, ds}_{\text{Flujo de } u \text{ a traves de } \partial\Omega = S \text{ entre } t_0 \text{ y } t_0+h}$$

Nos interesa lo que entra en el cuerpo así que orientamos la superficie con la normal interior

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+h}\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},s)\, d\bar{x}\, ds = -\int_{t_0}^{t_0+h}\iiint_\Omega \operatorname{div}(F(\bar{x},s))\, d\bar{x}\, ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},t) = -\operatorname{div}(F(\bar{x},t))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x},t) = \operatorname{div}(\underbrace{K}_{1}\nabla T(\bar{x},t)) = (-2 + (-2) + (-2)) = -6$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^4\int_0^5\int_0^3 -6\, dx\, dy\, dz\, dt = \int_0^1\int_0^4\int_0^5 -6x\Big|_0^3\, dy\, dz\, dt = \int_0^1\int_0^4 -18y\Big|_0^5\, dz\, dt = \int_0^1 -90z\Big|_0^4\, dt = -360t\Big|_0^1 = -360$$

Ejercicio 24. Sea ρ la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa ρ es $\rho_t = -\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{V})$.

?