Examen FINAL

Análisis II - Matemática 3 - 20 de julio de 2021

Nombre: **L. U.:** **Carrera:**

---

1. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva simple suave parametrizada por $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Considerar el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Probar que si $\|\sigma(t)\| = 1$ para todo $t \in [a,b]$ entonces
$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{s} = 0$$

2. Calcular $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$F(x,y,z) = (a(y)e^{xz}z + y, x + 2ye^{xz}, a(y)xe^{xz})$$
sea conservativo. ¿Es única $a(y)$?. Para la funcion $a(y)$ hallada calcular la integral de línea del campo dado por
$$G(x,y,z) = F(x,y,z) - (0,y,0)$$
a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, donde
$$\sigma(t) = \left(b(t), t^2, \operatorname{sen}(b^2(t))\right),$$
y $b : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $b(0) - b(1) = 0$.

3. Hallar las soluciones f de la ecuación integral
$$f(x) + \int_0^x (x-y)f(y)dy = x^3.$$

4. Considerar la ecuación
$$X'(t) = F(X(t)),$$
con F Lipschitz. Sea $X(t)$ es una solución para la cual existen dos tiempos $a \neq b$ tales que
$$X(a) = X(b).$$
Probar que $X(t)$ es periódica. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de la forma $X'(t) = AX(t)$ que tenga soluciones acotadas distintas de cero.

Justifique todas sus respuestas