Examen FINAL

Análisis II - Matemática 3 - 23 de Abril de 2021

Nombre: **L. U.:** **Carrera:**

1. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Para un punto $p \in \mathbb{R}^3$ y un número real $r > 0$, denotamos con $B(p,r)$ a la bola de centro p y radio r. Probar que si $\mathrm{div}F(p) > 0$, entonces existe una bola $B(p,r)$, con $r > 0$ tal que
$$\int_{\partial B(p,r)} F \cdot d\mathbf{S} > 0$$
donde la superficie $\partial B(p,r)$ tiene la orientación dada por la normal exterior.

2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por el gráfico de una función no negativa $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, orientada con normal de coordenada z positiva, con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que para el campo $F(x,y,z) = (zx, yz, 0)$, la integral
$$\int_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S}$$
es independiente de la superficie S.

3. Considerar la ecuación $y'' + 2y' + ay = 0$, con $a \in \mathbb{R}$.
   a) Encontrar, si es posible, todos los valores de a que hagan que la ecuación admita alguna solución acotada (no nula) y alguna solución no acotada.
   b) Encontrar, si es posible, todos los valores de a que hagan que la ecuación tenga todas su soluciones acotadas.
   c) Resolver
$$\begin{cases} y'' + 2y' = x^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

4. Hallar una matriz A de 2×2 tal que la función
$$X(t) = -e^{-3t}.(1,1)$$
sea una solución del sistema $X'(t) = AX(t)$ y tal que no todas las soluciones de $X'(t) = AX(t)$ tiendan a cero cuando t tiende a $+\infty$.

   Encontrar además todas las soluciones del sistema propuesto y esbozar su diagrama de fases.

Justifique todas sus respuestas