Análisis II – Matemática 3
Análisis Matemático II

Leandro M. Del Pezzo
ldpezzo@dm.uba.ar

Teóricas– Verano 2022

Teorema de Gauss

Teorema de Gauss

Divergencia

Definición

Sea $F = (F_1, \ldots, F_N)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^N$. La divegencia de F se definido como

$$\mathrm{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_N}{\partial x_N}.$$

Notación $\mathrm{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle = \nabla \cdot F$.

Teorema de Gauss
Divergencia

Ejemplo

Calcular la divergencia de $F(x, y) = (\sin(xy), \cos(xy))$ *y* $G(x, y, z) = (y, x, e^{zy})$.

Teorema de Gauss

Divergencia

Proposición.

Sea F un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ definido $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\text{div}(\text{rot}(F)) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

Teorema de Gauss

Divergencia

Proposición.

Sea $F \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. Entonces $\text{div}(F) = 0$ si solo si exite $G \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ tal que $F = \text{rot}(G)$.

Teorema de Gauss

En el plano

Teorema (Teorema de Gauss en el plano).

Sean D una región de $\mathbb{R}^2$ donde vale el Teorema de Green y η la normal exterior al ∂D. Si $F = (P, Q)$ un campo vectorial C^1, entonces,

$$\int_{\partial D} F \cdot \eta dl = \iint_D \operatorname{div}(F) dxdy.$$

Teorema de Gauss

En el plano

Ejemplo

Calcular, usando el teorema de Gauss en el plano, el flujo de $F(x, y) = (x + e^x \sin(y), x + e^x \cos(y))$ *através del triángulo de vértices* $(1, 0), (0, 1)$ *y* $(-1, 0)$.

Teorema de Gauss

Regiones el espacio

Vamos a necesitar integrar sobre superficies cerradas en $\mathbb{R}^3$. Para formalizar este concepto, recordemos los siguientes tipos de regiones que tenemos en $\mathbb{R}^3$.

Definición.

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo I si se describe como

$$\Omega = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D,\ \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y)\},$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\varphi_1, \varphi_2 \colon D \to \mathbb{R}$.

Teorema de Gauss

Regiones el espacio

Definición.

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo II si se describe como

$$\Omega = \{(x, y, z) \colon (x, z) \in D, \;\; \phi_1(x, z) < y < \phi_2(x, z)\},$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\phi_1, \phi_2 \colon D \to \mathbb{R}$.

Teorema de Gauss

Regiones el espacio

Definición.

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo III si se describe como

$$\Omega = \{(x, y, z) \colon (y, z) \in D, \theta_1(y, z) < x < \theta_2(y, z)\},$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\theta_1, \theta_2 \colon D \to \mathbb{R}$.

Teorema de Gauss

Regiones el espacio

Definición.

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo IV si es de tipo I, II y III.

Teorema de Gauss

Superficies cerradas

Definición.

Una superficie S en $\mathbb{R}^3$ es cerrada si es el borde de una región Ω de tipo I, II o III. Es decir, que está formada por un número finito de superficies que pueden describirse como gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Vamos a notar $S = \partial\Omega$ y vamos a llamar caras las componentes $S_1, \ldots, S_N$ de S.

Importante: Las superficies cerradas pueden orientarse de dos maneras: con normal exterior o con normal interior.

Teorema de Gauss

Teorema.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región de tipo VI y con $S = \partial\Omega$ superficie cerrada, regular a trozos, y orientada con normal exterior η.
Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz.$$

donde el vector η es normal a la superficie y apunta hacia el exterior del volumen Ω.

Teorema de Gauss

Teorema.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región de tipo IV y con $S = \partial\Omega$ superficie cerrada, regular a trozos, y orientada con normal exterior η.
Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{F}) \, dxdydz.$$

donde el vector η es normal a la superficie y apunta hacia el exterior del volumen Ω.

Teorema de Gauss

Comentario

Observemos que, al igual que vimos en el Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede usar en cualquier dominio que se escriba como una unión finita de dominios de tipo IV, pero teniendo especial cuidado con el vector normalsobre el borde que siempre debe apuntar para afuera.

Ejercicio: Mostrar que se puede usar Gauss en el dominio

$$\Omega = \{(x, y, z) : 1 < \|(x, y, z)\| < 2\}\,.$$

Pensar como descomponer Ω como unión de dominios de tipo IV y como debe ser el vector normal a su borde.

Teorema de Gauss
Ejemplos

Ejemplo

Consideremos el campo $F(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$ *y* S *la esfera unitaria*

$$S = \left\{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

orientada con normal exterior. Calcular, usando el teorema de Gauss

$$\iint_S F \cdot \eta \, dS.$$

Teorema de Gauss
Ejemplos

Ejemplo

Calcular, usando el teorema de Gauss,

$$\iint_S x^2 + y + z \, dS$$

con S como en el ejemplo anterior.

Interpretación física de la divergencia

Identidades de Green

Identidades de Green
Primera identidad

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$ con $\partial\Omega$ suave y ν la normal exterior a $\partial\Omega$, entonces

$$\iiint_\Omega v\Delta u\, dV = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \iiint_\Omega \langle \nabla v, \nabla u\rangle\, dV.$$

Identidades de Green

Segunda identidad

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$ con $\partial\Omega$ suave y ν la normal exterior a $\partial\Omega$, entonces

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \iint_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS.$$

Leyes conservativas