FINAL M3

1 – Enuncie y demuestre el teorema de Green para
(a) una región elemental de tipo III

OBS: Una región de tipo III se puede describir como una región de tipo II y I simultáneamente.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ es de tipo I si

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \,,\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x) \}$$

- $D \subset \mathbb{R}^2$ es de tipo II si

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d \,,\ \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y) \}$$

TEOREMA DE GREEN:

Hipótesis

- sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano, simple y suave a trozos que encierra a una región de tipo III
- sea $\bar{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial C^1 definido en un abierto Ω, tal que $D \subset \Omega$.

$$\Longrightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{\sigma} = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy.$$

$\mathcal{C}^+$
↓
$\mathcal{C}$ recorrida de forma positiva (antihoraria)

Demostración:

IDEA: como $\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{\sigma} = \oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy$,
me alcanza con probar las siguientes igualdades:

→ $$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx = -\iint P_y \, dx\,dy$$

→ $$\oint_{\mathcal{C}^+} Q\,dy = \iint Q_x \, dx\,dy.$$

Hay dos lemas que me aseguran que son ciertas para regiones de tipo III así que demostrándolos termino esta demostración como las parametrizaciones de B_1 y B_2 no varian en x, se anulan las integrales en B_1 y B_2,

VEMOS ESTO:

si β es una parametrización que no varia en x, entonces

$$\beta = (cte\ ,\ f(t))$$

$$\beta' = (0\ ,\ f_x(t)) \Rightarrow dx = 0 \cdot dt = 0.$$

Por lo tanto, continuando el desarrollo de la integral,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx$$

Parametrizando $\mathcal{C}_1^+$ como $(x, \Phi_1(x))$, $x \in [a,b]$ y $\mathcal{C}_2^+$ como $(x, \Phi_2(x))$, obtengo que

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx - \int_{\mathcal{C}_2^+} P\,dx$$

como la parametrización invierte la orientación, cambia el signo.

$$= \int_a^b P(x, \Phi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \Phi_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, \Phi_1(x)) - P(x, \Phi_2(x))\,dx,$$

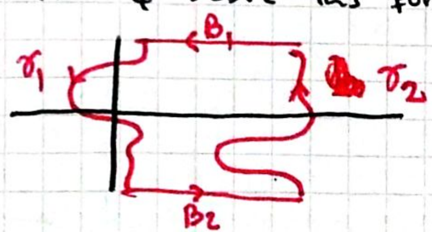
que es igual a la expresión $*$ a la cual habiamos llegado desarrollando la integral doble sobre D. ■

Lema 1

LEMA 2: sea $\mathcal{C}$ una curva que encierra a una región de tipo II y $\bar{F} = (0, Q)$ un campo de clase C^1 sobre la región. Entonces,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} (0, Q) \cdot d\bar{\sigma} = \iint_D Q\,dx\,dy.$$

Dem: su demostración es análoga a la del lema 1. Cambia el signo por la manera en la que se recorre $\mathcal{C}$ sobre las funciones γ_1 y γ_2



γ_2 se recorre positivamente y γ_1 negativamente (integral sobre B_1 y B_2) $= 0$

Antes: Φ_2 se recorría negativamente y Φ_1 positivamente.

LEMA 1: sea $\mathcal{C}$ una curva que encierra a una región de tipo I y $\bar{F} = (P,0)$ un campo de clase C^1 sobre esta región. Entonces ∂D

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \underbrace{(P,0)\cdot(dx,dy)}_{= P\,dx} = -\iint_D P_y \, dx\, dy.$$

Demostración:

1- Desarrollo la integral doble sobre D.
Como $\bar{F}$ es C^1, P es C^1 $\rightarrow$ P_y es continua y puedo aplicar Fubini.

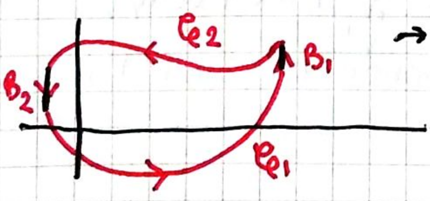
$$-\iint_D P_y \, dx\, dy = -\iint_D P_y \, dy\, dx \qquad \text{(uso que D es de tipo I)}$$

$$= -\int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} P_y(x,y)\, dy\, dx \qquad \text{(uso el teorema fundamental del cálculo)}$$

$$= -\int_a^b P(x,\Phi_2(x)) - P(x,\Phi_1(x))\, dx$$

$$= \int_a^b P(x,\Phi_1(x)) - P(x,\Phi_2(x))\, dx. \qquad *$$

2- Desarrollo la integral de circulación sobre $\mathcal{C}$



→ región de tipo I encerrada por $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup B_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup B_2^-.$$

Entonces, la integral sobre $\mathcal{C}^+$ es equivalente a

$$\oint_{\mathcal{C}^+} (P,0)\cdot(dx,dy) = \oint_{\mathcal{C}^+} P\, dx$$

estas no son integrales cerradas, la notación esta mal. (8)

$$= \oint_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx + \oint_{B_1^+} P\,dx + \oint_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx + \oint_{B_2^-} P\,dx$$

Entonces

$$\iint_D Q_x - P_y \, dx\, dy = \iint_D x^2+y^2 \, dx\, dy$$

→ hago el cambio de variables a polares $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

El jacobiano de esta transformación es

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\det = \rho \;\to\; \|J\| = \rho} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\theta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la integral queda

$$\int_0^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \cdot \rho \; d\rho\, d\theta$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right] = \boxed{\frac{15\pi}{4}}$$

~~Por~~
En conclusión, la integral de circulación de la F dada sobre el borde del anillo es 15/4 · π.

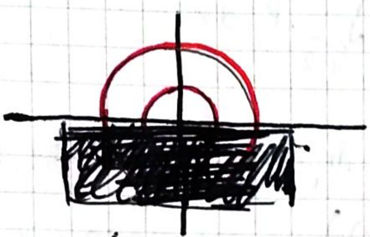
Con el Lema 1 y el Lema 2, queda comprobado el teorema de Green. ④

(b) Calcule la integral

$$\int_{\partial D} \left(\sin(x^2) - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(\cos(y^3) + \frac{x^3}{3}\right)dy$$

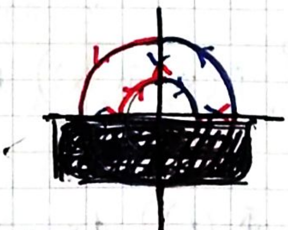
donde D es un anillo dado en coordenadas polares por $1 \leq \rho \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

¿D es una región de tipo III?



D no es una región de tipo III ya que no se puede expresar como una región de tipo II o I (no existen funciones γ_1, γ_2 que acoten x en función de y).

Sin embargo, se puede aplicar el teorema de Green, ya que se puede aplicar sobre las siguientes regiones:



que si son de tipo III. Por lo tanto se puede aplicar el teorema de Green, si $\vec{F}$ es C^1

→ $\vec{F}$ es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, ya que las funciones armónicas y los polinomios son de clase C^1 $\forall \mathbb{R}$.

Continuo aplicando el teorema de Green. La integral de circulación sobre ∂D será igual a la integral sobre D del rotor de F.

calculo el rotor de F:

$$Q_x = \left(\cos(y^3) + \frac{x^3}{3}\right)_x = x^2 \qquad \text{rot}(F) = x^2 + y^2$$

$$P_y = \left(\sin(x^2) - \frac{y^3}{3}\right)_y = -y^2$$