Análisis II

Final

Justifique todas sus respuestas

1) Sea el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xz}z + y, x, xe^{xz} + z)$$

¿Es $\mathbf{F}$ conservativo?.

Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$\sigma(t) = (\operatorname{sen}(2\pi b(t)), \cos(2\pi b(t)), t)),$$

con b una función C^1 tal que $b(0) = 0$ y $b(1) = 1$.

2) Enunciar y demostrar el Teorema de Gauss.

Sea

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Probar que

$$\iint_S \nabla f ds = 0$$

para cualquier superficie suave que encierre un volumen Ω con $0 \notin \Omega$.

¿Qué sucede si $0 \in \Omega$?. Sea $S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r\}$ con normal exterior. ¿La integral

$$\iint_{S_r} \nabla f ds$$

se puede calcular?.

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Supongamos que dos soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de

$$x'(t) = f(x(t))$$

verifican

$$x_1(a) = x_2(b)$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$x_1(t) = x_2(t + b - a) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

¿Es cierto el resultado si f depende de t, es decir, para soluciones de $x'(t) = f(t, x(t)))$?.

4) Hallar una base de soluciones de

$$X'(t) - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t) = 0,$$

y describir aquellas soluciones que verifican

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0.$$