NICOLÁS YANOVSKY

393/19 MC. EN CIENCIAS DE DATOS
TEMA 1

Aprobado

1)

muy buen parcial!

HALLAR $a \in \mathbb{R}$ / $M(x,y) = xy$ SEA FACTOR INTEGRANTE DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

Grilla
Ej1 B
Ej2 B
Ej3 B
Ej4 B

$$\underbrace{(3xy+2y)}_{M}dx + \underbrace{(ax^2+ax)}_{N}dy = 0$$

RESOLVER PARA ESE VALOR DE a.

QUEREMOS QUE $(xy\,M)_y = (xy\,N)_x$

ES DECIR, QUE $(xy(3xy+2y))_y = (xy(ax^2+ax))_x$

ENTONCES $(3x^2y^2+2xy^2)_y = (ax^3y+ax^2y)_x$

$\Rightarrow 6x^2y+4xy = 3ax^2y + 2axy$

Y NOTAMOS QUE LA IGUALDAD SE CUMPLE PARA $a=2$

AHORA, SEA LA ECUACIÓN $\underbrace{(3x^2y^2+2xy^2)}_{M_0}dx + \underbrace{(2x^3y+2x^2y)}_{N_0}dy = 0$

LAS SOLUCIONES SON DE LA FORMA $F(x,y) = C$

CON $F_x = M_0$ Y $F_y = N_0$.

$\Rightarrow F(x,y) = \int 3x^2y^2+2xy^2\,dx = x^3y^2+x^2y^2 + c(y)$

$\Rightarrow F_y = 2x^3y+2x^2y + c'(y) = N_0 = 2x^3y+2x^2y \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c = cte$

ENTONCES $F(x,y) = x^3y^2+x^2y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

COMO QUEREMOS UNA SOLA FUNCIÓN, TOMAMOS $c=0$, ENTONCES TODAS LAS SOLUCIONES SON DE LA FORMA:

$x^3y^2+x^2y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Bien

NOTA

NICOLÁS YANOVSKY 393/19

EJERCICIO 2

HALLAR LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON CONDICIONES INICIALES

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -e^x + 12x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

LA ECUACIÓN ES LINEAL NO HOMOGENEA DE ORDEN 2 POR LO QUE SABEMOS QUE LA SOLUCIÓN ES $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ CON $y_h(x)$ LAS SOLUCIONES ~~DE~~ DEL HOMOGENEO Y $y_p(x)$ UNA SOLUCIÓN PARTICULAR PARA EL NO HOMOGENEO.

1. ~~RESOLVEMOS EL HOMOGENEO~~

RESOLVEMOS EL HOMOGENEO:

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$, BUSCAMOS $\lambda / P(\lambda) = 0$

VEMOS QUE $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

SABEMOS QUE UNA BASE DE SOLUCIONES DEL HOMOGENEO ES $\{e^{3x}, e^{-2x}\}$ POR LO QUE $y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$.

AHORA, ~~[illegible]~~

PROPONEMOS $y_p(x) = ae^x + bx + c$

$\Rightarrow y_p' = ae^x + b$, $y_p'' = ae^x$.

COMO TIENE QUE SATISFACER LA ECUACIÓN:

$ae^x - (ae^x + b) - 6(ae^x + bx + c) = -e^x + 12x$

$\Rightarrow -6ae^x - 6bx - 6c - b = -e^x + 12x$

Y VEMOS A OJO QUE $a = \frac{1}{6}$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$ CUMPLEN.

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{6}e^x - 2x + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}e^x - 2x + \frac{1}{3}$

ENTONCES $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x - 2x + \frac{1}{3}$

Y BUSCAMOS $c_1, c_2 \;/\; y(0) = 1, \; y'(0) = -2$

$y(0) = 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} - c_1$

$y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x - 2$

$y'(0) = -2 = 3c_1 - 2c_2 + \frac{1}{6} - 2 \Rightarrow 3c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow 3c_1 - 2\left(\frac{1}{2} - c_1\right) = -\frac{1}{6} \Rightarrow 5c_1 - 1 = -\frac{1}{6} \Rightarrow 5c_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{6}}$

ENTONCES $\boxed{c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{6} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x - 2x + \frac{1}{3}}$$

CHEQUEO SI CUMPLE:

$y'(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - \frac{2}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x - 2$

$y''(x) = \frac{3}{2} e^{3x} + \frac{4}{3} e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x$

$6y(x) = e^{3x} + 2e^{-2x} + e^x - 12x + 2$

$y''(x) - y'(x) = e^{3x} + 2e^{-2x} + 2$

$\Rightarrow y''(x) - y'(x) - 6y(x) = -e^x + 12x$ ✓

$y(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$ ✓

$y'(0) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 2 = -2$ ✓

muy bien!

Bien

NICOLÁS YANOVSKY 393/19

3)

ENCONTRAR TODOS LOS $K \in \mathbb{R}$ TALES QUE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$x^2 y'' + 2xy' + Ky = 0 \quad , \quad x > 0$$

CUMPLE QUE $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$

LA ECUACIÓN ES UNA ECUACIÓN DE EULER CUYA FORMA GENERAL ES $x^2 y'' + Pxy' + Qy = 0$, P, Q CONSTANTES.

SABEMOS QUE LA SUSTITUCIÓN $x = e^t$ (PRESERVA $x > 0$) TRANSFORMA A LA ECUACIÓN EN UNA LINEAL DE ORDEN 2 A COEFICIENTES CONSTANTES, DE LA FORMA:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}(P-1) + Qy = 0. \quad \text{AQUÍ, } P = 2, \ Q = K$$

ENTONCES $\dfrac{d^2y}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + Ky = 0 \ \therefore \Rightarrow P(\lambda) = x^2 + x + K$

Y BUSCAMOS $\lambda \,/\, P(\lambda) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$

SABEMOS QUE SI $\lambda_1 \in \mathbb{C} = a + bi$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ Y LAS SOLUCIONES SON DE LA FORMA $y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \operatorname{sen}(bt))$

Y COMO $t = \ln(x) \Rightarrow y(x) = x^a \left(C_1 \cos(b \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(b \ln(x)) \right)$

QUE ~~...~~ CUMPLE QUE $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$ ~~...~~ (*)

PARA $K > \frac{1}{4}$

~~...~~

AHORA, SUPONGAMOS $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4K}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4K}}{2}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL ES DE LA FORMA $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$$

(*) PUES $a = -\frac{1}{2}$ Y $|C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)| \leq |C_1| + |C_2|$

COMO ~~$\cdot$~~ BUSCAMOS $K \,/\, \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

NOTAMOS QUE SI $y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$, ESTO SOLO OCURRE PARA $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, POR LO QUE BUSCAMOS

$$K \,/\, \frac{-1-\sqrt{1-4K}}{2} < 0 \text{ y } \frac{-1+\sqrt{1-4K}}{2} < 0$$

POR LO QUE COMO $\sqrt{1-4K} > 0$ (EL CASO IGUAL A 0 LO TRATAMOS POR SEPARADO), NECESITAMOS $0 < \sqrt{1-4K} < 1$

$\Rightarrow$ ~~0~~ $0 < K < \frac{1}{4}$ ($K > 0$ PUES SI $K = 0$ $\lambda_2 = 0$ Y NO SE CUMPLE $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$)

AHORA, SI $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

Y LA SOLUCIÓN ES $y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 x^{-1/2} + c_2 \ln(x)\, x^{-1/2}$$

$$\text{y } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1/2}} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{1/2}}{x} = 0$$

POR LO QUE SI $K = \frac{1}{4}$ ENTONCES TAMBIÉN $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

Y POR LO TANTO TODOS LOS $K \in \mathbb{R}$ QUE CUMPLEN QUE $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ SON LOS $K \,/\, 0 < K \leq \frac{1}{4} \wedge K > \frac{1}{4}$

POR LO QUE TODO $K \in (0, +\infty)$ CUMPLE

perfecto!

Bien

NICOLÁS YANOUSKY

4)

DADO EL SISTEMA

$$\begin{cases} x' = x^2 + 5x - 2xy - 10y = F_1 \\ y' = x + y = F_2 \end{cases}$$

HALLAR LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO, ESTUDIAR EL SISTEMA LINEALIZADO Y ESBOZAR EL DIAGRAMA DE FASES CERCA DE ESOS PUNTOS.

BUSCAMOS $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 2xy - 10y = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \end{cases}$

DE (2): $x = -y$. EN (1): $x^2 + 5x + 2x^2 + 10x = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 15x = 3x(x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = -5 \Rightarrow y_2 = 5$

ENTONCES LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO SON $(0,0)$ Y $(-5,5)$

AHORA, $DF(x,y) = \begin{pmatrix} -\nabla F_1 - \\ -\nabla F_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5-2y & -2x-10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$DF(0,0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

ESTUDIAMOS EL SISTEMA LINEALIZADO $\vec{x}' = A\vec{x}$

$\det(A_1 - \lambda I) = (5-\lambda)(1-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 6\lambda + 15 = 0$

$\lambda_1 = 3 + \sqrt{6}i \quad , \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

$A_1 - ((3+\sqrt{6}i)I) = \begin{pmatrix} 5-3-\sqrt{6}i & -10 \\ 1 & 1-3-\sqrt{6}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{6}i & -10 \\ 1 & -2-\sqrt{6}i \end{pmatrix}$

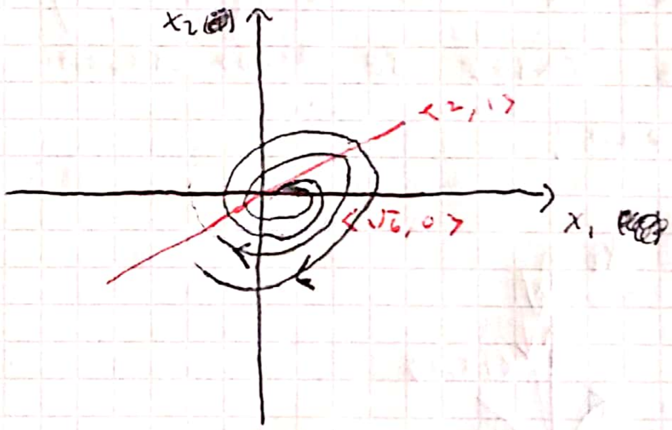
y $Nu(A_1 - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{6}i \\ 1 \end{pmatrix} = V$

$Re(V) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Im(V) = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

Entonces, las soluciones se pueden escribir como:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{6}\,t) & \operatorname{sen}(\sqrt{6}\,t) \\ -\operatorname{sen}(\sqrt{6}\,t) & \cos(\sqrt{6}\,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Como $a = 3 > 0$ y $b = \sqrt{6} > 0$, las soluciones describen espirales en sentido horario que se alejan del $(0,0)$ (equilibrio inestable) rotadas por la transformación que induce la matriz $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Para el $(-5,5) \to DF(-5,5) = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2}$

y ~~ahora~~ $\det(A_2 - \lambda I) = (-15-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 + 14\lambda - 15 = 0$

$\to \lambda_1 = -15,\ \lambda_2 = 1$

Como $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ las soluciones se alejan del equilibrio en el infinito por lo que es un equilibrio inestable

$$A_2 + 15I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow Nu(A_2+15I) = \langle 14, 1 \rangle$$

$$A_2 - I = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Nu(A_2 - I) = \langle 0, 1 \rangle$$

y las soluciones se pueden escribir como:

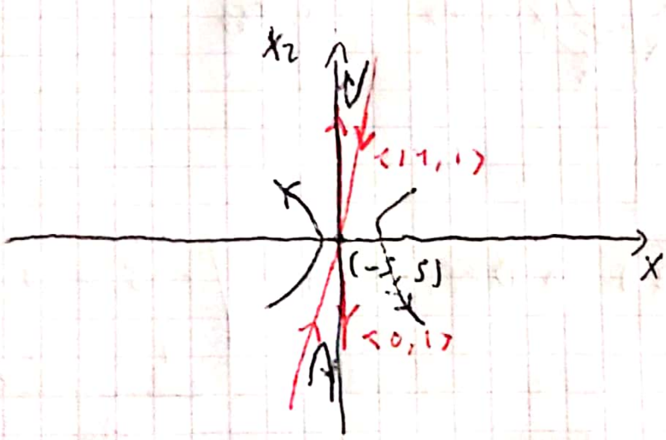
$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-15t} \\ c_2 e^{t} \end{pmatrix}$$

Si tomamos $y_1(t) = c_1 e^{-15t}$, $y_2(t) = c_2 e^{t}$

$$y_2 = \frac{c_2}{c_1^{-1/15}} \, y_1^{-1/15}$$

que describe ~~[illegible]~~ curvas de esa forma en el plano $y_1 - y_2$,

mientras que en el plano $x_1 - x_2$ son ~~[illegible]~~ transformadas por la matriz $\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el diagrama de fases se puede esbozar de la siguiente manera:



(*) Para que el diagrama de fases sea entendible dibujé los dos puntos de equilibrio por separado, y en el diagrama del $(-5, 5)$ tomé al equilibrio como origen de coordenadas, por prolijidad.

Bien