F(X) Maths

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

PRIMEROS PARCIALES

Temas del Programa que entran para el Primer Parcial

cms.dm.uba.ar/academico/lic/programas/Analisis_II_Analisis_Matematico_II_Matematica_3

Integrales sobre curvas y superficies.

- La integral de línea.
- Superficies parametrizadas.
- Área de una superficie.
- Integrales de funciones escalares sobre superficies.
- Integrales de campos vectoriales sobre superficies.
- Aplicaciones.

Los teoremas del cálculo vectorial.

- El Teorema de Green.

Régimen de Aprobación

Para firmar trabajos prácticos se deben aprobar dos exámenes parciales, el primero a mediados y el segundo a fines del cuatrimestre. Habrá una fecha de recuperación por parcial al finalizar la cursada.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- Marsden, J., Tromba, A. "Vector Calculus". Freeman and Company, New York 1988.
- Apostol, T. "Análisis Matemático". Ed. Reverté, 1960 y "Calculus", Vol. II, Ed. Reverté, 1960.
- Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. "Análisis Matemático" Vol. II., Ed. Kapelusz. 1961.
- N. Wolanski. "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias", disponible en mate.dm.uba.ar/~wolanski/ode.pdf
- Coddington, E.A. & Levinson, N. "Theory of ordinary differential equations", Mc-Graw Hill, 1955.
- Birkhoff, G. And Rota, G.C. "Ordinary Differential equations", Ginn & Company, 1962.
- G. Acosta y N. Wolanski Curvas, superficies e integrales mate.dm.uba.ar/~wolanski/apunte%20curvas.pdf

Correlatividades

Para cursar esta materia se deben tener aprobados los trabajos prácticos de Análisis I.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2021 – Recuperatorio Primer Parcial – 25/03/21

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la imagen de la parametrización $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = \left(t^2, \sqrt{1-t^4}\right)$.
   a) ¿Es γ una parametrización regular de C? ¿Por qué? Si la respuesta es no, mostrar una parametrización regular de la curva.
   b) Calcular la longitud de la curva C.

2) Sea C la curva plana definida y orientada por $\sigma(t) = \big(t, f(t)\big)$ con $t \in [0,3]$, donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no negativa de clase C^1. Considerar el capo vectorial $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$. Sabiendo que $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s} = -4$ y que $f(3) = 1$, calcular
$$\int_0^3 f(x)dx$$

3) Consideremos la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z negativa.
   a) Hallar el área de S.
   b) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, 1)$ a través de S.

4) Considerar la curva C parametrizada por $\sigma(t) = (0, t^2, t)$ con $t \in [0,1]$. Sea S la superficie obtenida al rotar la curva C alrededor del eje z.
   a) Dar una parametrización de S.
   b) Considere el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ y la superficie S orientada con normal de coordenada z siempre positiva. Calcular
$$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er Cuatrimestre 2021 – Primer Parcial – 12/05/21

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Llamamos catenoide a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.
   a) Probar que el trozo del catenoide con $-2 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$ es una superficie suave. *Sugerencia:* Considerar la función $\Psi(u,v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\operatorname{sen}(v), u)$.
   b) Sea S la superficie dada por el trozo de catenoide
   $$x^2 + y^2 = \cosh^2(z), -2 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$$
   Si la densidad de masa de la superficie es $\rho(x,y,z) = xy|\operatorname{senh}(z)|$, calcular la masa total de la superficie.

   Ayuda: Recordar que $\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = 1$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

2) Calcular la integral sobre la línea de campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{\cos(y)}\right)$$
sobre la curva dada por $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ orientada de manera tal que empiece en el $(1,0)$ y termine en el $(-1,0)$.

3) Consideremos el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ orientado de tal manera que la norma en el punto $(0,1,0)$ sea igual a $(0,1,0)$. Observar que el hiperboloide es una superficie de revolución alrededor del eje z de la curva
$$\sigma(\theta) = (\cosh(\theta), 0, \operatorname{senh}(\theta))$$
Sea S el trozo de hiperboloide obtenido al acotar $\operatorname{senh}(-1) \leq z \leq \operatorname{senh}(1), y \geq 0$.
   a) Parametrizar S preservando la orientación. Parametrizar el borde de S, ∂S^+, de forma compatible con la orientación de S.
   b) Calcular $\int_{\partial S^+} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$, donde
   $$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xe^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{2ye^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{2ze^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

4) Sea S el cono de ecuación $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ con $-1 \leq z \leq 0$ orientado de tal manera que la tercera coordenada de la normal sea negativa en todo punto. Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$ donde el campo $\mathbf{F}$ está dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{y+z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-x-z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-x+y}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er Cuatrimestre 2021 – Recuperatorio Primer Parcial – 19/07/21

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 0, z \geq 0\}$.
   a) Dar una parametrización regular de C que empiece en $(0,-1,0)$ y termine en $(0,1,0)$.
   b) Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ orientada como en el ítem anterior, donde
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

2) Sea C una curva suave en $\mathbb{R}^2$ que va desde $Q = (-1,1)$ hacia $P = (1,-1)$, tal que para todo punto (x,y) de la curva se cumple que $y \geq -x$.
   Dado el campo $\mathbf{F}(x,y) = (x + y + e^{x+y}, e^{x+y})$, sabemos que $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s} = 10$. Calcular el área de la región R comprendida entre la curva C y la recta de ecuación $x + y = 0$, si suponemos que R es una región de tipo III.

3) Sea S el paraboloide de ecuación $4 - z = x^2 + y^2$ con $z \geq 0$, orientado de tal manera que la normal en el punto $(0,0,4)$ es igual a $(0,0-1)$. Consideremos el campo
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + \operatorname{sen}(z^2), y^2 + ze^z, x^2 + y^2 + z^2)$$
   a) Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$.
   b) Calcular $\int_S (2y - e^z(1+z), -2x + 2z\cos(z^2), 0).\,d\mathbf{S}$.

4) Sea S_λ la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por
$$S_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq \lambda, y \geq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x^2 + y^2 \leq z \leq \lambda\}$$
   y $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{z^2} + z, e^{x^2} + x, z\right)$$
   Hallar el valor de $\lambda > 0$ tal que $\iint_{S_\lambda} \mathbf{F}.d\mathbf{S} = 6$, donde S_λ está orientada de manera tal que en el punto $\left(0,0,\frac{\lambda}{2}\right)$ la normal tenga coordenada y positiva.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2020 – Primer Parcial – 19/02/20

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva suave que se obtiene de la intersección de las superficies $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ y $x + z = 2$, recorrida desde el punto $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ al punto $\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.
   a) Encontrar una parametrización regular de C y calcular Long(C).
   b) Hallar la masa total de un alambre que sigue la trayectoria de C, si su densidad de masa está dada por la función $\rho = xy$.

2) Sea C la curva dada en polares por $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ con $\theta \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$. Calcular la circulación del campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(x^4 + y + 2xy\cos(x^2y)\,, x^2\cos(x^2y) + \frac{y^5}{7}\right)$$
a lo largo de C recorrida desde el punto $(0,-1)$ hasta el punto $(0,0)$.

3) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{yz}{1+x^2} + x + z^2, z\arctan(x) + xy, y\arctan(x) - y + 1\right)$$
   a) Hallar $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ donde C es la curva parametrizada por $\sigma(t) = \left(\sqrt{t^3}, 1{,}2\sqrt{t^3}\right)$ con $t \in [0,1]$.
   b) Calcular el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la superficie dada por el triángulo de vértices $(0,1,0)$, $(1,1,2)$ y $(1,0,0)$ de forma que la normal tenga componente $y \geq 0$.

4) Sea S la superficie del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ con $z \geq 1$ orientada de forma que la normal en el punto $(0,0,3)$ sea $(0,0,-1)$- Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy + \cos(e^z)\,, 9\ln(1+z^2)\,, z - yz)$$
Calcular $\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er Cuatrimestre 2020 – Primer Parcial – 08/06/20

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz) + y, xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$
a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$,
$$\sigma(t) = \left(t, 3t^2 - 2t, \frac{1}{\ln(7)}\ln(1 + 6t^8)\right)$$

2) Sea $\mathcal{C}$ la curva poligonal cerrada de vértices $(0,1)$, $(0,-1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ y $\mathcal{E}$ la elipse $4x^2 + y^2 = 1$, ambas orientadas positivamente. Sean
$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{4x^2 + y^2}(-y,x), \qquad \mathbf{G}(x,y) = \left(x, y\sqrt{4x^2 + y^2}\right)$$
   a) Hallar $\int_{\mathcal{E}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.
   b) Hallar $\int_{\mathcal{E}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ y $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

   Sugerencia: integrar una función impar con respecto a x sobre un dominio simétrico con respecto al eje x da 0.

3) Consideremos el cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-1)^2 + z^2 = 4, 1 \leq x \leq 3\}$.
   a) Probar que S es orientable. ¿Cuántas orientaciones posibles admite?
   b) Para cada orientación posible, dar una parametrización del borde de S tal que se satisfaga la hipótesis del teorema de Stokes.

4) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, y sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f > 0$ en el interior de D y $f = 0$ en el borde de D. Para cada $t \in [0,1]$ consideremos la superficie S_t parametrizada regularmente por $S_t: D \to \mathbb{R}^3$,
$$S_t(u,v) = \left(u, v, tf(u,v)\right)$$
Orientemos estas superficies con la normal que apunta hacia arriba. Probar que
$$\iint_{S_t} (2x, 3y, -5z + 5).d\mathbf{S} = 5\,\text{Área}(D)$$
para cualquier $t \in [0,1]$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2do Cuatrimestre 2020 – Primer Parcial – 21/10/20

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea S una superficie con parametrización $T(\theta,\varphi)=(\cosh(\theta)\cos(\varphi),\cosh(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\operatorname{senh}(\theta))$, con $-1\le\theta\le 1$ y $0\le\varphi\le\pi$.
   a) Probar que T es una parametrización regular. Calcular el plano tangente a S em el punto $(1,0,0)$.
   Sugerencia: Probar que $f(x)=\operatorname{senh}(x)$ es una función inyectiva.
   b) Si $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la función densidad de masa, calcular la masa total de S.

2) Sea $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ una función C^1 y positiva tal que $r\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ y $r\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$ y sea C la curva parametrizada y orientada por $\sigma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\operatorname{sen}(t))$, con $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3}{2}\pi$. Calcular el área de la región encerrada por C y el eje y si se sabe que
$$\int_C \left(\frac{1}{2}e^{y^2}+\cos(x^3)\right)dx+\left(x+e^{y^2}y(x+1)\right)dy=\frac{e}{2}$$

3) Sea S la porción del cono $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(z+1)^2=x^2+y^2, 0\le z\le 1, y\ge 0\}$ orientado de forma tal que la normal en el punto $(0,1,0)$ sea $(0,1,-1)$.
   a) Parametrice el borde de S respetando la orientación de S.
   b) Sea $\mathbf{F}$ el campo
$$\mathbf{F}(x,y,z)=-\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}+\left(e^{(x+y)^3},x+e^{(x+y)^3},e^{z^4}\right)$$
   Calcular $\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\mathbf{s}$, donde el borde de S está orientado como se pide en el ítem anterior.

4) Sea $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\le z\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ orientada con la normal interior y consideremos el campo vectorial
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{xz^2}{x^2+y^2},\frac{yz^2}{x^2+y^2},e^{x^2y}\cos(x^2+y)\right)$$
Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2do Cuatrimestre 2020 – Recuperatorio Primer Parcial – 23/12/20

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

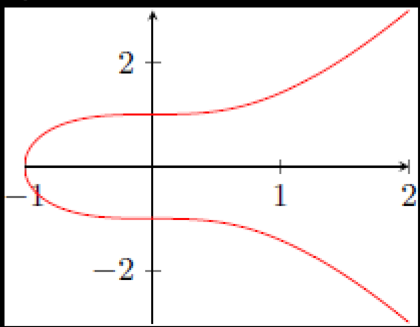
Nombre: Carrera: L.U.:

1) Considere un alambre cuya forma se puede describir como la curva C que es intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+z=0$.
   a) De una parametrización regular de la curva C. Justifique que es parametrización regular.
   b) Si la densidad del alambre es $\rho(x,y,z)=x^2|y|$, halle la longitud del alambre y su masa.

2) Sea $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^3-y^2+1=0, x\leq 2\}$ recorrida desde $(2,-3)$ hacia $(2,3)$. Calcule el valor de la integral

$$\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Un gráfico aproximado de C es el siguiente:



3) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z)=\left((x+y)e^{z^2},(y+z)e^{x^2},(x+z)e^{y^2}\right)$ y sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}\cap[0,1]^3$ orientada de tal forma que la normal en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ tiene componente z positiva. Calcule $\int_S (\nabla\times\mathbf{F}).d\mathbf{S}$.

4) Sean las superficies $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 4z^2=x^2+y^2, 1\leq z\leq 2, y\geq 0\}$, $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=4, 1\leq z\leq 2, y\geq 0\}$, $S_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0, 2\leq x\leq 2z, 1\leq z\leq 2\}$ y $S_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0, -2z\leq x\leq -2, 1\leq z\leq 2\}$.
Sea S la unión de estas cuatro superfices orientada de forma tal que la normal en $(0,2,2)$ es igual a $(0,-1,0)$. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(x)f'(x)=e^{x^2}$, consideremos el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(xf(z), zf^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-yf(z), z\right)$$

Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2019 – Primer Parcial – 18/02/19

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 9\}$.
   a) Probar que la curva C es suave a trozos.
   b) Hallar la longitud de la curva C.

2) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x + \cos(y^3 z^3), e^{x^3}, 0\right)$ y sea S el cilindro sin tapa ni piso cuya base es la curva dada en polares por $r(\theta) = 3\,\mathrm{sen}(2\theta)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, y altura $-1 \leq z \leq 1$, orientado de manera que la norma en $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$ es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

3) Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + yz, \frac{x}{x^2+y^2} + xz, xy\right)$ y C la circunferencia unitaria centrada en el origen y contenida en el plano xy, recorrida en sentido antihorario.
   a) Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de C.
   b) Encontrar un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y $f: U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ en U. ¿Es cierto que $\mathbf{F}$ es el gradiente de algún potencial con el mismo dominio que $\mathbf{F}$?

4) Sea C la curva en el plano xy dada en coordenadas polares por $r(t) = t$, con $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Sea S la superficie de revolución que se obtiene al rotar C alrededor del eje y con $z > 0$.
   a) Hallar una parametrización de S y verificar que S es suave.
   b) Calcular el flujo a través de S del campo $\mathbf{G}(x, y, z) = (\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) + \left(0, 0, \frac{1}{z}\right)$, si $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ y S está orientada de forma tal que en todo punto (x, y, z) con $z > 0$, la normal tenga componente $N_z > 0$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2019 – Recuperatorio Primer Parcial – 18/03/19

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Calcular el trabajo neto que necesita una partícula para recorrer la curva
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} = 1\}$$
recorrida en sentido positivo, si el campo de fuerzas está dado por
$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{2xy^2}{x^4 + y^4}, \frac{2x^2y}{x^4 + y^4}\right)$$

2) Consideremos $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y la curva dada por el gráfico de f en $\mathbb{R}^2$, orientada en sentido positivo. Si
$$\mathbf{G}(x, y) = (e^y \cos(x + y) - y, e^y(\cos(x + y) + \text{sen}(x + y)) + x)$$
y el área encerrada por el gráfico de f es 4, calcular la integral $\int_C \mathbf{G}.d\mathbf{s}$.

3) Sea C la curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $2x - z = -3$, recorrida en sentido antihorario si se la mira desde arriba. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x - 1, x)$, calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

4) Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x, y, \frac{-x^2-y^2}{z}\right)$ y la superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 2$. Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1er Cuatrimestre 2019 – Primer Parcial – 11/05/19

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Para $t \in [-1,1]$, considere la parametrización dada por
$$\sigma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$
   a) Pruebe que $\sigma(t)$ parametriza una semicircunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 que conecta los puntos $(0,-1)$ y $(0,1)$.
   Sugerencia: Puede resultar útil observar que $t(x+1) = y$.
   b) Determine si $\sigma(t)$ es una parametrización regular.
   c) Calcule $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ para el campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{(x+1)^2+y^2}{(x+1)^2}, \frac{y}{x+1}.\frac{(x+1)^2+y^2}{(x+1)^2-y^2}\right)$$

2) Considerar la curva $C = C_1 \cup C_2$, donde C_1 es la espiral de Arquímedes, parametrizada en polares por $r = \theta$ para $\theta \in [0,2\pi]$; y C_2 es la mitad del círculo de radio π y centro $(\pi, 0)$.
   a) Verificar que C es cerrada y simple.
   b) Calcular el área encerrada por C.

3) Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy+2z, x^2+y^2+z^2, 2yz+2x)$ y C la curva parametrizada por $\sigma(t) = \left(\cos(t), 1-\operatorname{sen}(t), \frac{2}{\pi}t\right)$, para $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

4) Sea S la superficie dada por $z = x^2+y^2$, con $0 \le z \le 1$. Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+\cos(y), y+e^{xz}, -z)$ que atraviesa S, orientada de modo tal que la tercer componente del vector normal en $(0,0,0)$ sea negativa.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2do Cuatrimestre 2019 – Primer Parcial – 5/10/19

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Hallar el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, e^{x^2+y^2}\right)$ sobre una partícula que se mueve desde el punto $\left(\sqrt{2\pi}, 0, 2\pi\right)$ hasta el origen de coordenadas por la intersección del paraboloide $S_1: z = x^2 + y^2$ y la superficie dada por

$$S_2: \begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= \theta \end{cases}$$

donde $r \geq 0$ y $\theta \geq 0$.

2) Calcular el trabajo del campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} + \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$$

a lo largo de la curva $\sigma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (\cos^3(t), \mathrm{sen}^3(t))$.

3) Sean $\mathbf{H}, \mathbf{G}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ los campos dados por

$$\mathbf{H}(x,y,z) = (ye^z + 2xz^3, xe^z + 2y, xye^z + 3x^2z^2)$$
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(2y, 0, -(1+2x)\right)$$

   a) Probar que existe una función escalar $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{H} = \nabla h$.
   b) Calcular la circulación total de $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ a lo largo de la curva que resulta de la intersección de la esfera unitaria y el plano $z = 0$ (orientada en sentido antihorario).

4) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^y + \cos(z) . e^x + \mathrm{sen}(z), x^2z^2)$ a través de la media esfera $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2, z \geq a\}$ con $a > 0$, cuya normal tiene componente $z \geq 0$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2018 – Primer Parcial – 20/02/18

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$.
   a) Hallar una parametrización de S de forma que la normal en el punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sea $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   b) Hallar el área de S.

2) Sea $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ con $(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$, y de forma tal que los n segmentos consecutivos que unen los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ forman un polígono en el plano. Suponiendo que $x_{i-1}y_i - x_i y_{i-1} = \frac{1}{2^i}$, para todo $i = 1, \ldots, n$, hallar el área de la región D que queda encerrada por dicho polígono.

3) Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ y C es la trayectoria intersección del plano de ecuación $x + y + z = \frac{3}{2}$ con la frontera del cubo unitario $[0,1]^3$, recorrida en sentido antihorario.

4) Sea V un sólido limitado por las superficies $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2)^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2)^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ y por la superficie S_0, tal que $\text{vol}(V) = 3\pi$. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - y, y + z, 5z - x)$. Hallar el flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_0.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2018 – Primer Parcial – 19/05/18 Tema A

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea la curva $\mathcal{C}: y = 1 + \sqrt{x}$, con $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}$.
   a) Obtener una parametrización regular de la superficie de revolución S que se obtiene al hacer girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje y.
   b) Calcular la masa total de S si la densidad en cada punto está dada por
   $$\rho(x, y, z) = 1 + 8\sqrt{x^2 + z^2}$$

2) Calcular el área encerrada por la curva $\Gamma: x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

3) Calcular el flujo del campo vectorial
$$\mathbf{G}(x, y, z) = (5xy^2 + \cos(z), 5x^2y, x^2 + y^2 + z^2)$$
A través de la superficie $S: x^2 + y^2 - z = 4$, con $-4 \leq z \leq 0$, si en todo punto el vector normal apunta hacia abajo.

4) Sean $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$ y el campo
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{xyz + z^2}{x}, \frac{xyz + z^2}{y}, xy + 2z\ln(xy)\right)$$
   a) Comprobar que $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω y obtener un potencial de $\mathbf{F}$ en Ω.
   b) Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva
   $$\mathcal{C}: \sigma(t) = \left(2 + t, 1 + \ln(1 + t^2), \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right), 0 \leq t \leq 1$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2018 – Recuperatorio Primer Parcial – 16/07/18 Tema A

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Considerar el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2x^3y^4z + x, 2x^\alpha y^3 z + 2yz, \frac{1}{2}x^4y^4 + y^2 + 1\right)$.
   a) Calcular α si se sabe que el campo $\mathbf{F}$ tiene circulación nula a lo largo de toda curva cerrada.
   b) Considerar la curva Cparametrizada por
   $$\sigma(t) = \left(\frac{\ln(t+1)}{\ln(2)}, \operatorname{sen}(\pi t) + t^2, t+3\right), t \in [0,1]$$
   Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

2) Sea C la curva del plano yz dada en coordenadas polares por $C: r(\theta) = e^\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ donde θ se mide desde $y \geq 0$ y sea S la superficie generada por C al rotar alrededor del eje y. Calcular la masa m de una lámina con la forma de S, de espesor despreciable, si su densidad superficial es
$$\rho(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{x^2+y^2+z^2}$$

3) Sean $z_0, R > 0$ y la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R^2, z = z_0\}$ recorrida en sentido antihorario cuando se considera su proyección sobre el plano xy. Sea el campo
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right), \qquad \forall (x,y,z) \neq (0,0,z)$$
   a) Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de C.
   b) Calcular el flujo saliente del campo $\mathbf{G} = \operatorname{rotor}(\mathbf{F})$ a través de la superficie $S: x^2+y^2 = R^2, 1 \leq z \leq 5$.

4) Calcular el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xz, xyz, 3z)$ a través de la superficie $S: x^2+y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 4$, orientada de modo que la normal apunte hacia abajo.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2018 – Primer Parcial – 06/10/18

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Considere la curva $\mathcal{C} = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - x^2, x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
   a) Obtenga una parametrización regular de $\mathcal{C}$ que comience en $(0,1,0)$ y termine en $(1,0,0)$.
   b) Calcular la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$ con $\mathcal{C}$ orientada como en a), donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, y, -x)$.

2) Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por la ecuación $x^2 + 3y^2 = 9$, con $x \geq 0$, recorrida en sentido antihorario. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$, siendo
$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\operatorname{sen}(x)\, y - \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \cos(x)\right)$$

3) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(xy), e^x + 2xy, -yz)$. Calcular el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10, y \geq 0\}$$
orientada de tal forma que en el punto $(0, \sqrt{5}, 0)$ el vector normal apunte como el vector $(0,1,0)$.

4) Sea $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, a \leq z \leq a + 1\right\}$ con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(ye^{-z^2}, z\ln(x^2 + 1), 1\right)$$
Considere la normal a S cuya tercer coordenada es positiva. Encuentre a de tal forma que $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S} = 3\pi$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2018 – Recuperatorio Primer Parcial – 03/12/18

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección de la esfera unitaria y el plano de ecuación $x - z = 0$.
   a) Dar una parametrización regular de $\mathcal{C}$.
   b) Si $f(x, y, z) = xz + y^2$, calcule $\int_{\mathcal{C}} f ds$.

2) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada en coordenadas polares por $r(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. Consideramos el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{y-\sqrt{3}x}(3x - \sqrt{3}y - \sqrt{3}) + \frac{y}{2}, e^{y-\sqrt{3}x}(1 + y - \sqrt{3}x) + \frac{x}{2}\right)$$
Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{s}$, donde la curva $\mathcal{C}$ se recorre del $(0,0)$ al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ no negativa y que cumple $f(x, y) = 0$ si y sólo si $x^2 + y^2 = 1$. Consideremos la superficie S dada por el gráfico de f orientada con normal hacia arriba. Calcular $\int_S \nabla \times \mathbf{F}.d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}$ es el campo dado por:
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(e^{x^2+y^2+z^2-1} + 2xyz, e^{x^2+y^2+z^2-1} + x^2z, e^{x^2+y^2+z^2-1} + x^2y\right)$$

4) Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, orientada de modo que la tercera coordenada de la normal (es decir la coordenada z) sea siempre positiva. Si
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz \operatorname{sen}(yz), \cos(yz), 3zy^2 - e^{x^2+y^2}\right)$$
Calcule $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2017 – Primer Parcial – 21/02/17

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea S la superficie del toro parametrizada
$$\phi(u,v)=\big((2+\cos(u))\cos(v)\,,(2+\cos(u))\operatorname{sen}(v)\,,\operatorname{sen}(u)\big),(u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$$
Calcular el área de S.

2) Sea C la curva parametrizada por $\alpha(t)=(\cos^3(t)+1,\operatorname{sen}^3(t)),t\in[0,\pi]$ que va desde el punto $(2,0)$ al punto $(0,0)$ y el campo definido por
$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^2},\frac{y}{((x-1)^2+y^2)^2}\right)$$
Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

3) Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1, z+y\geq 0\}$ la superficie orientada con la normal exterior unitaria y $\mathbf{F}(x,y,z)=(e^{xy},z,y+2)$.
Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

4) Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=x^2+y^2, z\leq 1\}$ orientada con la normal exterior unitaria y el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,z,x)$.
   a) Hallar los valores de a y b de forma tal que $\mathbf{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido
   $$\mathbf{G}(x,y,z)=\left(\frac{az^2}{2}-xy,-yz,by\right)$$
   satisfaga $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$.
   b) Usar el teorema de Stokes para calcular $\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2017 – Primer Parcial – 20/05/17 Tema A

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Consideremos el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{2xz^2-y}{x^2+y^2},\frac{2yz^2+x}{x^2+y^2},2z\ln(x^2+y^2)\right),\quad (x,y)\neq(0,0)$$

   a) Encontrar un conjunto maximal $A\subset\mathbb{R}^3$ en el que $\mathbf{F}$ sea un campo gradiente y un potencial f de $\mathbf{F}$ tal que $f(1,0,0)=0$. Probar que $\mathbf{F}$ no es un campo gradiente en $\mathbb{R}^3-\{(0,0,z):z\in\mathbb{R}\}$.
   b) Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\mathcal{C}:(x,y,z)=\left(1,t^2,\frac{t}{\sqrt{2}}\right),\quad t\in[0,1]$$

2) Dada $c\in\mathbb{R}$ una constante positiva, consideremos $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ definido por

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2+y^2-c^2}{c}\leq z\leq\sqrt{c^2-x^2-y^2}\right\}$$

y el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(2x+2y,2y+z,z+2x)$. Orientemos el borde de Ω de manera que el vector normal siempre apunte hacia afuera del cuerpo. Sean S_1 y S_2 los subconjuntos del borde de Ω para los cuales $z\geq0$ y $z\leq0$ respectivamente.
   a) Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_1.
   b) Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_2.

3) Sea $\mathcal{C}$ la curva del plano yz dada en coordenadas polares por

$$\mathcal{C}:r(\theta)=e^{\theta},0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$$

donde θ se mide desde $y\geq0$ y sea S la superficie generada por $\mathcal{C}$ al rotar alrededor del eje z. Calcular la masa m de una lámina con la forma de S, de espesor despreciable, si su densidad superficial es

$$\rho(x,y,z)=\frac{\sqrt{2}}{x^2+y^2+z^2}$$

4) Sea S la superficie de la porción del cono: $z^2=x^2+y^2$ que se encuentra entre el plano xy y el plano de ecuación $z=2$. Sea el campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(zy^4,y-x^3,z^2)$.
   a) Obtener una parametrización de S. Determinar el campo de vectores normales unitarios inducido por la parametrización.
   b) Con S orientada como en a), calcular $\iint_S rot(\mathbf{F}).d\boldsymbol{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2017 – Recuperatorio Primer Parcial – 25/07/17 Tema A

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Calcular la integral de línea del campo
$$\mathbf{F}(x,y)=\left(e^x+\arctan(y),\frac{x}{1+y^2}-3xy\right)$$
a lo largo de la curva $C: r=1+\cos(t)$, con $0\leq t\leq\pi$.

2) Calcular el trabajo neto que necesita una partícula para recorrer la curva $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \text{máx}\{|x|,|y|\}=1\}$ en sentido horario si el campo de fuerzas está dado por
$$\mathbf{F}(x,y)=\left(-\frac{2xy^2}{x^4+y^4},\frac{2yx^2}{x^4+y^4}\right),\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

3) Sea
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},z\right)$$
y sea la curva $C: |x|+|y|=2, y\geq 0, z=3$ empezando en $(-2,0,3)$ y terminando en $(2,0,3)$.
Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{s}$.

4) Sea a una constante positiva y sea Ω el sólido dado por $z\geq 0$, $a^2\leq x^2+y^2+z^2\leq 3a^2$.
Calcular el flujo saliente de $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^3-xz^2,-x^3+yz^2,z^3)$ a través del borde de Ω.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2017 – Primer Parcial – 07/10/17 Tema A

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea Γ la curva logarítmica (como torbellino ascendente) parametrizada por:

$$\Gamma: \gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \operatorname{sen}(t), \ln(t)), \qquad \frac{\pi}{2} \leq t \leq 6\pi$$

   a) Demostrar que Γ es simple, abierta y suave.
   b) Considere la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y + e^{-z}, x - y + e^{-z}, e^z - 2x)$. Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de Γ.

   Sugerencia: para la primitiva, hallar $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int e^{2t} \cos(2t)\, dt = Ae^{2t} \cos(2t) + Be^{2t} \operatorname{sen}(2t)$$

2) Calcular el flujo saliente del campo vectorial $\mathbf{G}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie $S: y^2 = x^2 + z^2$, con $0 \leq y \leq 2$.

3) Consideremos la curva $\sigma(t) = (\cosh(t), \operatorname{senh}(t))$, $t \in [-\ln(4), \ln(4)]$, que parametriza un tramo de una hipérbola. Además denotemos por P y Q a sus puntos inicial y final, respectivamente. Calcular el área de la región delimitada por la curva cerrada que consiste de $\sigma(t)$ y dos segmentos rectos: el primero pasa por el origen y por P y el segundo, por el origen y por Q.

   Sugerencia: recordar que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

4) Sean $h, R > 0$ y la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z = h\}$ recorrida en sentido antihorario cuando se considera su proyección sobre el plano xy. Sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right), \qquad \forall (x,y,z) \neq (0,0,z)$$

   a) Calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de C.
   b) Calcular el flujo saliente del campo $\mathbf{G} = \operatorname{rotor}(\mathbf{F})$ a través de la superficie $S: x^2 + y^2 = R^2, 1 \leq z \leq 5$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2016 – Primer Parcial – 21/05/16 Tema 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva (epicicloide) parametrizada mediante $\alpha: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, regular a trozos definida
$$\alpha(t) := (5\cos(t) - \cos(5t), 5\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(5t)).$$
Hallar la longitud de la curva C.
Sugerencia: Se pueden usar las siguientes identidades trigonométricas:
$$\cos(4t) = \cos(t)\cos(5t) + \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(5t), \ \operatorname{sen}^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

2) Sea S la superficie formada por la unión de $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z = 4 - 3x^2 - 3y^2, 1 \le z \le 4\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$ orientada de tal forma que en el punto $(0,0,4)$ la normal apunte en el mismo sentido que el versor $\hat{k}$. Calcular $\int_S \mathbf{F}.d\boldsymbol{S}$ siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xy, -\frac{1}{2}y^2, z\right)$.

3) Sea C la curva (cardioide) cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 1 - \operatorname{sen}(\theta)$ con $\theta \in [0,2\pi]$. Sea
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x^2y + x^2}{(x^2 + (y+1)^2)^2}, \frac{-x^3}{(x^2 + (y+1)^2)^2}\right)$$
   a) Hallar el dominio de $\mathbf{F}$.
   b) Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$.

4) Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1\}$ orientada de forma tal que la normal unitaria en el punto $(0,0,0)$ es el vector $(0,0,-1)$. Calcular usando el teorema de Stokes el flujo del campo vectorial $\mathbf{G}(x,y,z) = (xz, -yz, 0)$ a través de la superficie S.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2016 – Recuperatorio Primer Parcial – 16/07/16

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva dada por la unión de las curvas $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y = 0\}$, $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ y $C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, x = 0\}$, orientada de manera antihoraria. Si

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1-y}{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)$$

Calcular $\int_C \mathbf{F} . d\boldsymbol{s}$.

2) Sea C la curva definida como la intersección de las superficies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\} \text{ y } S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$$

orientada de modo que en el punto $(1,0,1)$ su vector tangente es $(1,-1,0)$.

a) Dar una parametrización regular de C.

b) Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^1 y satisface $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z$. Calcular

$$\int_C f(x,y,z)dx + xydy + xzdz$$

3) Sea C el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano $z = 0$ que va desde el punto $(3,0,0)$ hasta el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Hallar el área de la superficie S generada por revolución haciendo girar C alrededor del eje x.

4) Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\}$ la superficie orientada de forma tal que la primera componente de la normal es siempre menor o igual a 0. Calcular el flujo sobre S del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + 1, \frac{1}{x^2+z^2+4} + y, e^{\cos(y)}\right)$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2016 – Primer Parcial – 15/10/16 $\boxed{\text{Tema 1}}$

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

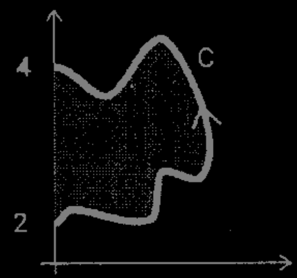
1) Sea C la curva

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

   a) Hallar la longitud de C.
   b) Supongamos que la curva está hecha de un alambre que tiene densidad de masa dada por $\rho(x,y) = 1 + y^{1/3}$. Hallar la masa total del alambre.

2) Sea C la curva abierta definida por la parametrización regular $\sigma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, donde $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. Consideremos en C la orientación dada por σ. Se sabe que:
   - $x(t) > 0, t \in (0,1)$.
   - $\sigma(0) = (0,2), \sigma(1) = (0,4)$.
   - $\int_C (e^{x^2} + 2y)dx + (y - x)dy = -16$.

   Hallar el área de la región encerrada por la curva C y el eje y.



3)
   a) Sean **F** y **G** los campos

$$\mathbf{F} = (3x^2, -6xy, 0), \mathbf{G} = (cxyz + x^2, -3x^2z, 0)$$

   Hallar $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.
   b) Sea $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)\, e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

   y sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie definida por el gráfico de f, dado por $z = f(x,y)$, orientada de manera que la normal apunte hacia arriba. Para **F** dado en a), calcular $\iint_S \mathbf{F} . d\mathbf{S}$.

4) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie definida por $x^2 + y^2 = 1$, con $1 \leq z \leq 2$. Orientamos a S de manera que la normal apunte hacia afuera. Sea **F** el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + e^{\cos(y)}, 6\operatorname{sen}(z^8 + 4), z\right)$$

   Calcular $\iint_S \mathbf{F} . d\mathbf{S}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2016 – Recuperatorio Primer Parcial – 12/12/16 Tema 2

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Consideremos la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
orientada de forma que la normal en todos sus puntos tiene coordenada z positiva.
   a) Hallar el área de S.
   b) Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 1)$ a través de S.

2) Sea C la curva que es la unión de los dos segmentos de recta
$$\begin{cases} y = x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ y = -x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
recorrida desde el punto $(-1,0)$ hasta el punto $(1,0)$. Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$, donde
$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

3) Sea $\mathbf{G}$ el campo vectorial definido por $\mathbf{G}(x, y, z) = (xy, 0, -yz)$.
Consideremos la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$
orientada de tal forma que en el punto $(0,0,8)$ el vector normal apunte como el vector $(0,0,1)$.
   a) Hallar un campo $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$.
   Sugerencia: $\mathbf{F}$ puede ser de la forma $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$.
   b) Calcular $\int_S \mathbf{G}.d\mathbf{S}$.

4) Dado $R > 0$, sea S la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\}$$
orientada de tal forma que el vector normal en el punto $(0, R, 0)$ apunte como el vector $(0,1,0)$.
Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + z^3, x, (y + 1)^3 - z)$. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2015 – Primer Parcial – 19/02/15

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1)
   a) Obtener una parametrización de una espiral C que pase por los puntos $(0,0)$, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $(-\pi,0)$, $\left(0,-\frac{3}{2}\pi\right)$ y $(2\pi,0)$ en el orden dado.
   b) Calcular la masa total de la espiral sabiendo que la función densidad en cada punto es $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) Considerar la curva C parametrizada por $\sigma(t)=(0,t^2,t)$ con $t\in[-1,1]$. Sea S la superficie obtenida al rotar la curva C alrededor del eje z.
   a) Dar una parametrización de S.
   b) Si $\mathbf{F}$ es el campo dado por $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ y considerar la superficie S orientada con normal interior. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F}.d\boldsymbol{S}$$

3) Sea S la superficie dada por la sección del cono $z^2=x^2+y^2$ entre los planos $z=0$ y $z=2$ orientada con la normal exterior. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^2ye^{z^2},-xy^2e^{z^2},z\right)$. Calcular

$$\int_S \mathbf{F}.d\boldsymbol{S}$$

4) Sea C la curva plana definida y orientada por $\sigma(t)=\big(t,f(t)\big)$ con $t\in[0,3]$, donde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función no negativa de clase C^1. Considerar el campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$. Sabiendo que $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}=-4$ y que $f(3)=1$, calcular

$$\int_0^3 f(x)dx$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2015 – Primer Parcial – 17/09/15

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+xye^{xz^2}(2+xz^2),\frac{\partial f}{\partial y}+x^2e^{xz^2},\frac{\partial f}{\partial z}+2x^3yze^{xz^2}\right)$ donde $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^1$ tal que $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$. Calcular el trabajo realizado por el campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma:[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$\sigma(t)=\left(\operatorname{sen}(t)\left(1+e^{t^2}\right),\cos(t)\,,t(\pi-t)^{\frac{4}{3}}\right)$$

2) Sea $\mathbf{F}(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ un campo definido en $\mathbb{R}^2-\{(1,1)\}$ que verifica.
   - $Q_x-P_y=2$
   - $\int_{C_1}\mathbf{F}.d\boldsymbol{s}=-bL$ para todo segmento horizontal de longitud L y ordenada $y=b$ orientado tal que el versor tangente es $(1,0)$
   - $\int_{C_2}\mathbf{F}.d\boldsymbol{s}=aL$ para todo segmento vertical de longitud L y abscisa $x=a$ orientado tal que el versor tangente es $(0,1)$

   Sea C la semi circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ recorrida del $(1,2)$ al $(1,0)$ en el sentido positivo. Calcular

$$\int_C\mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$

3) Considere la superficie S intersección del plano $x+y+z=3$ con el cilindro $x^2+y^2\le 4$ tal que $y\ge x$, orientada de forma que la normal en el punto $(0,0,3)$ sea el vector $(1,1,1)$.
   Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\cos^2(x)+y+z,\operatorname{sen}^3(y)-xz,2e^{z^3}+x^2y\right)$. Calcule

$$\int_{\partial S}\mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$

4) Sea C la curva en el plano $z=0$ dada en coordenadas polares por $r(\theta)=\cos(\theta),\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ y S la superficie de revolución obtenida haciendo girar la curva C alrededor del eje x.
   Hallar el flujo saliente a través de S en la dirección del vector $(1,0,0)$ del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\big(x^2,y,-z(2x+1)\big)$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2013 – Primer Parcial – 11/05/13

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Considere la letra C que puede ser descripta aproximadamente por la espiral de Arquímedes dada en coordenadas polares por $r = \frac{\theta}{3\pi}$ con $\theta \in \left[0, \frac{7}{4}\pi\right]$.
   a) ¿La letra C representa una curva suave? Justifique.
   b) Calcule la integral de longitud de arco
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$$

2) Calcular la integral de línea
$$\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$
donde C se puede parametrizar por $\gamma: [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por la fórmula $\gamma(t) = (t, 1-\cos(t))$ y el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dado por:
   a) $\mathbf{F}(x,y) = (-\operatorname{sen}(x), 1)(xy)^3$.
   b) $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$.
En ambos casos considere que la curva tiene como punto inicial el origen en $(0,0)$.

3) Considere un recipiente con forma de paraboloide circular con tapa, de altura 10, que se puede describir por la ecuación $z = \frac{x^2+y^2}{4}$. Se supone que está lleno de un líquido a temperatura $T(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z$. Calcula el flujo de calor (o sea, el flujo del campo $-\nabla T$) a través del recipiente, orientado con la normal interior.

4) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una placa con densidad de masa constante igual a 1. Supongamos que D tiene masa m y que su centro de masa es el punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por la fórmula $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^2\right)$. Probar que
$$\int_{\partial D} \mathbf{F}.d\boldsymbol{s} = m(3+5a)$$
donde ∂D está orientada en el sentido positivo.
Recuerde que: Si una placa D tiene densidad ρ, la masa m está dada por $m = \iint_D \rho x dx dy$, y el centro de masa tiene coordenadas $C = (x_C, y_C)$ dadas por
$$x_C = \frac{1}{m}\iint_D \rho x dx dy \qquad y_C = \frac{1}{m}\iint_D \rho y dx dy$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2013 – Primer Parcial – 05/10/13 Tema 1

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $\sigma: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $\sigma(t) = 8\cos(t)\,(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$.
   a) Probar que σ parametriza una curva C abierta, suave y simple.
   b) Hallar la longitud de C.

2) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo definido por
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(xe^{x^2+y^2+6}, ye^{x^2+y^2+6}\right)$$
   a) Mostrar que $\mathbf{F}$ es una campo conservativo (es decir, que existe f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$).
   b) Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$, siendo C la curva parametrizada por $\sigma(t) = \left(e^{t^2-t}, (t+1)^2\right)$, con $t \in [0,1]$.

3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 + 7$. Calcular el área de la porción del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,2,12)$ que está sobre el triángulo de vértices $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ y $(0,0,0)$.

4) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo cuya matriz diferencial es
$$D\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) & x+y^3 \\ x^2+y^3 & g(x,y) \end{pmatrix}$$
con f y g funciones continuas. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \le y \le -x^2\}$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo del borde de D orientado en sentido horario.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2012 – Primer Parcial – 12/05/12

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva que es imagen de la función $\sigma: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(x) = \left(x, \sqrt{9 - 36x^2}\right)$.
   a) Esbozar un diagrama de C.
   b) Dar una parametrización regular de C.
   c) ¿Es suave C?

2) Considerar la siguiente curva C dada como intersección de superficies:
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$
orientada de modo que al ser vista desde arriba gire en sentido antihoraio o, equivalentemente, de modo que en el punto $(1,0,0)$ el vector tangente unitario sea $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Considerar los campos $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ y $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z) + \nabla\varphi(x, y, z)$$
   a) Dar una parametrización de C.
   b) Calcular $\int_C \mathbf{F}. d\boldsymbol{s}$.

3) Sea C la curva en el plano xy que es imagen de $\sigma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$. Considerar la superficie S que se obtiene al girar la curva C alrededor del eje x.
   a) Dar una parametrización de la superficie S.
   b) Calcular el área de la superficie S.
      Sugerencia: $1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$

4) Considerar la función $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - |x|$. Sea la curva C dada por el gráfico de f (en $\mathbb{R}^2$) orientada desde $(-1,0)$ a $(1,0)$. Calcular:
$$\int_C (xy^2 - y + 1)dx + \left(x^2y + e^{y^2}\right)dy$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2012 – Primer Parcial – 06/10/12

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) (2 pts.) Sea C la curva imagen de la función $\sigma: [0,10] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = \left(12t, 8t^{3/2}, 3t^2\right)$.
   a) Mostrar que C es una curva suave.
   b) Hallar un punto $P \in C$ de forma que el tramo de curva que comienza en el origen y termina en P tenga longitud igual a 96.

2) (3 pts.) Consideremos la curva plana C dada en coordenadas polares por
$$r(\theta) = \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$
y sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = \left(\operatorname{sen}(x) + 2xy - y, e^{y^2} + x^2\right)$.
Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$ orientado a C de manera que empiece en $(0,0)$ y termine en $(-\pi, 0)$.

3) (2,5 pts.) Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 1)$ a través de la superficie cilíndrica con tapa superior que es unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con $z \geq 1$, orientada con la normal exterior.

4) (2,5 pts.) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xze^{x^2y}, x^2ze^{x^2y}, e^{x^2y} + y\right)$ y sea E el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + z^2 = 1$. Hallar la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ en la curva $C = E \cap \{x = 0\}$. Orientar la curva C de modo que el recorrido desde el punto $(0,4,0)$ al punto $(0,0,1)$ sea lo más corto posible.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2012 – Recuperatorio Primer Parcial – 07/12/12

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva intersección entre el paraboloide S_1 y el plano S_2, donde
$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\} \qquad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 + 2x\}$$
y la orientación de C corresponde al sentido antihorario en el plano xy (es decir, la curva tiene orientación antihoraria “vista desde arriba”).
Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^2, x-1, x)$. Calcular la integral
$$\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$

2) Sea S la porción de cono definida como
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 \le z \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$$
   a) Probar que S es una superficie suave.
   b) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 z$. Calcular el promedio de f en S, es decir,
$$\frac{1}{\text{Área}(S)} \int_S f dS$$

3) Calcular por medio de una integral de línea la siguiente integral doble
$$\iint_D (y^2 e^{xy} - x^2 e^{xy}) dxdy$$
siendo D el disco unitario.

4) Dada la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 1\}$, orientada de forma tal que el recorrido desde (1,0,1) hasta el (1,1,0) sea el más corto posible, y el campo
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(y)\, e^{z^2} + xy, \cos(y)\, x e^{z^2}, 2\operatorname{sen}(y)\, zxe^{z^2} + 5z\right)$$
Calcular
$$\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curos de Verano 2011 – Primer Parcial – 28/02/11

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Calcular la longitud de arco de la curva dada en polares $r = 1 - \theta$, con $1 \leq \theta \leq 2$.

2) Dados la curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ recorrida desde $(0, -1)$ hasta $(0,1)$ y el campo $\mathbf{F}(x, y) = \left(e^{x^2}(2xy + 2x^2 + 1) - y, e^{x^2} + x\right)$, calcular la integral de $\mathbf{F}$ alrededor de C.

3)

a) Sea $\sigma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva $\mathcal{C}^1$ cerrada, simple y cuya imagen está en el plano xy con $x \geq 0$. Probar que el área de la superficie generada al rotar la imagen de σ alrededor del eje y es igual a

$$2\pi \int_a^b \sigma_1(t) \|\sigma'(t)\| dt$$

b) Calcular el área del toro generado por rotación alrededor del eje y de la circunferencia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$.

4) Dados el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x + \cos(y^2 z^3), e^{x^2} z, 0\right)$ y S el cilindro cuya base es la curva dada en polares

$$r = 3\,\mathrm{sen}(2\theta), \text{ con } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

y altura $z \in [-1,1]$, orientado con un campo de vectores normales N tal que $N\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de la superficie S.

5) Dados el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xe^{x^2}\ln(1 + y^2 + z^4) + z, \frac{e^{x^2}}{1+y^2+z^4} 2y, \frac{e^{x^2}}{1+y^2+z^4} 4z^3 + 2y\right)$ y la curva C dada por la intersección $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ recorrida desde $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ hacia $(0,0,-1)$. Calcular $\int_C \mathbf{F}.\,d\mathbf{s}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Curso de Verano 2011 – Recuperatorio Primer Parcial – 23/03/11

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ y la superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2}, \frac{z^3}{c^2}\right)$ a través de S.

2) Dada la curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ recorrida desde $(2,0)$ hasta $(-2,0)$. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que
$$\int_C (2x - x^3 + 3xy^2 + x^2y^2)dx + \left(3x^2y + \frac{2}{3}x^3y + ax\right)dy = 4\pi$$

3) Dada la curva $z = \sqrt{y}$ en el plano yz con $y \in [0,16]$, calcular el área de la superficie de revolución alrededor del eje z.

4) Dada la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$. Calcular el área de la superficie $S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

5) Dados el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + y + 2xe^{x^2}y^3z, 2x - z + 3e^{x^2}y^2z, y + z + e^{x^2}y^3\right)$ y C el triángulo que conecta a los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en ese orden. Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{l}$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2011 – Primer Parcial – 14/05/11

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva dada como intersección de superficies del siguiente modo:
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$
orientada positivamente. Sea el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$.

2) Sea S la superficie imagen de la parametrización:
$$T: [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ dada por } T(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta), r^2)$$
   a) Probar que S es una superficie suave.
   b) Calcular $\iint_S \sqrt{4z+1}\,dS$.

3) Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ y sea S una porción del cilindro: $x^2 + y^2 = 25$, tal que el área de S es igual a 2. Calcular el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S, considerando la normal saliente a la superficie.

4) Calcular el área de la región encerrada por la curva dada en coordenadas polares:
$$r = \text{sen}(2t), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2011 – Primer Parcial – 08/10/11

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C_a un cardioide dado en coordenadas polares por $r_a = a + \cos(\theta)$, con a un parámetro, y $\theta \in [0,2\pi]$.
   a) Probar que, para $a > 1$ la curva C_a es suave.
   b) Calcular la recta tangente a la curva C_a en el punto de coordenadas cartesianas $(x, y) = (0, a)$.

2) En Tecnópolis construyeron una carpa de base circular de radio 10 con un techo en forma de paraboloide hiperbólico dado por la función $102 + xy$ con (x, y) en la base circular que se considera centrada en $(0,0)$. Se pretende comprar una lona para tapar las paredes de esta carpa. Calcular, la cantidad (el área) de lona necesaria para las paredes.

3) Sea S la superficie con forma de volcán obtenida por revolución de la curva $z = \frac{3}{y}$ con $y \in [1,3]$ en torno del eje z, orientada de forma tal que la normal tiene la tercer coordenada positiva. Suponiendo que la temperatura está dada por $T(x, y, z) = 200 - (x^2 + y^2 + z^2)$, calcular el flujo de calor a través de S (o sea, el flujo del campo $-\nabla T$).

4) Dado el campo vectorial de $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{F}(x, y) = \left(-y, e^{\cos(y)}\right)$ y la curva C = a la semicircunferencia de radio 1, $y \geq 0$ y centro en el punto $(1,0)$ orientada desde el origen al punto $(2,0)$, calcular

$$\int_C \mathbf{F}.\,d\boldsymbol{s}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2010 – Recuperatorio Primer Parcial – 05/04/10 Tema 1

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por $x = z^{3/2}$ con $0 \leq y \leq 9$ y $0 \leq z \leq 4$.
   a) Calcular el plano tangente a S en el punto $(1,3,1)$.
   b) Hallar el área de S.

2) Dada la curva $C\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$ orientada de $(0,-2)$ a $(0,2)$, y el campo vectorial
$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2 + ye^x, x^2 + e^x)$$
calcular
$$\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$$

3) Sean $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2} + y, ye^{x^2} + z\right)$ y σ la curva dada por $\sigma(t) = (t, \operatorname{sen}(t), \cos(t))$, con $0 \leq t \leq \pi$. Calcular $\int_\sigma \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$.

4) Sea S la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con $3 \leq z$ orientada con un campo de normales N que verifica que $N(0,0,5) = (0,0,1)$. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + e^{y^2}, y + z^3, x^2 + y^2\right)$ sobre S.

5) Sea S la porción de paraboloide, $S = \{(x,y,z)\colon z = x^2 + y^2, z \leq 2\}$, orientada de forma tal que la normal en $(0,0,0)$ sea $(0,0,1)$. Sea $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ un campo C^2 en $\mathbb{R}^3$ del cual se sabe que $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 8$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 5$.
   a) Mostrar una superficie orientada S_1 tal que $\partial S = \partial S_1$.
   b) Calcular
$$\int_S \operatorname{rot}(\mathbf{F})$$
   Sugerencia: Usar el ítem a).

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2010 – Primer Parcial – 09/10/10

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Considerar la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - x^2, x + y + z = 1, x, y \geq 0\}$.
   a) Obtener una parametrización regular de C que comience en $(0,1,0)$ y termine en $(1,0,0)$.
   b) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$ con C orientada como en a), donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y, -x)$.

2) Sea S la superficie dada por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $\phi(x,y,z) = (4z + 8y^2 + 1)^{3/2}$. Calcular
$$\iint_S \phi dS.$$

3) Consideremos S como el sector del paraboloide definido como $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y, y \leq 9\}$.
   a) Obtener el campo $\eta(x,y,z)$ normal unitario a S tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ apunta hacia adentro del paraboloide.
   b) Encontrar una ecuación del plano tangente a S en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   c) Calcular la integral
   $$\iint_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}$$
   con $\mathbf{F}(x,y,z) = (x - z, y, x + z)$ donde en S tomamos la normal que apunta en dirección de y positivo.

4) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$, donde la curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$ está recorrida en sentido antihorario y
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{x^2}(2x \operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y)) + xy, e^{x^2}\cos(x+y) - x\right)$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2009 – Primer Parcial – 09/05/09

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Dada $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(\frac{3}{8}xz^2y, z, -y\right)$ calcular el trabajo realizado por **F** al mover una partícula desde el polo norte al polo sur siguiendo la curva dada en coordenadas esféricas por:

$$\theta=\frac{\pi}{4}, r=2$$

2) Sea $C\subset\mathbb{R}^3$ la curva determinada por la intersección de las superficies $z=x^2+y^2$ y $z=x+y$. Evaluar

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{2-(2x-1)(2y-1)}}\,ds$$

3) Dada $\mathbf{F}(x,y,z)=(xe^z, ye^z, z)$ y el sólido Ω encerrado por los planos

$$z=1, z=3, x+y=1 \text{ con } x,y,z\geq 0.$$

Calcular el flujo de **F** sliente a través del $S=\partial\Omega$.

4) Si un budín circular está dado por la rotación alrededor del eje z de la curva C

$$C: z=\sqrt{1-(x-2)^2} \text{ con } z\geq 0$$

Suponiendo que todas las unidades de medición están dadas en cm., calcule la cantidad de chocolate que se necesita para cubrir la parte superior del budín sabiendo que cada cm² necesita 2 gr. de chocolate.

5) Sea C la curva contenida en la elipse de ecuación $4x^2+y^2=16$ recorrida desde $(0,-4)$ hasta $(2,0)$ en el sentido contrario a las agujas del reloj y $\mathbf{F}(x,y)=(2xy\,\mathrm{sen}(x^2y)-y, \mathrm{sen}(x^2y))$. Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2009 – Primer Parcial – 24/10/09

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Dar una parametrización de la curva dada en coordenadas polares como $r = \cos(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Mostrar que la curva es suave y hallar su longitud.

2) Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x, y, e^{x^2+y^2}\right)$ sobre una partícula que se mueve por la curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y la superficie S dada por
$$S = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = \theta \end{cases}$$
$z \geq 0, \theta \geq 0$, desde el punto $\left(\sqrt{2\pi}, 0{,}2\pi\right)$ al punto $(0{,}0{,}0)$.

3) Hallar el área de la porción de la superficie $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$ contenida en el sector $x \geq 0$, $y \geq 0, z \geq 0$.

4) Hallar la integral curvilínea del campo $\mathbf{F}(x, y) = \left(4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + x + y, 2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1\right)$ a lo largo de la circunferencia de radio 2 centrada en el origen, recorrida en sentido antihorario.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2008 – Primer Parcial – 10/05/08

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy - z, x + y^2, xyz)$ una fuerza que actúa sobre una partícula que sigue una trayectoria que es la intersección de los conos $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ y el semiespacio $\{y \geq 0\}$. Calcular el trabajo efectuado por $\mathbf{F}$ al moverse la partícula del punto $(-1,0,1)$ al punto $(1,0,1)$.

2) Hallar el área entre las curvas dadas en coordenadas polares por

$$r = 1 + \cos(\theta) \quad \text{con} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$
$$r = \sqrt{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)} \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

3) Calcular $\int_C f_1 dx + f_2 dy$ siendo

$$f_1(x,y) = \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_2(x,y) = \frac{y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

y

$$C = \begin{cases} y = x + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ y = 1 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

recorrida del $(-1,0)$ al $(1,0)$.

4) Sea C la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva C alrededor del eje x.
   a) Hallar una parametrización de S.
   b) Hallar el área de S.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

1° Cuatrimestre 2008 – Recuperatorio Primer Parcial – 21/07/08

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea C la curva dada por la parametrización
$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \cos(t) \end{cases} \text{con } 0 \leq t \leq \pi$$
   a) Verificar que C es una curva abierta, simple y suave.
   b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(e^{\pi/2} - 1{,}0\right)$.

2) Sea C una curva parametrizada por $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, con $0 \leq t \leq 4\pi$ y $\mathbf{F}$ el campo dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, Ae^z, \ln\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)\right)$$
donde A es una constante. Determine A sabiendo que
$$\int_C \mathbf{F}.\,d\boldsymbol{s} = e^{4\pi} - 1$$

3) Calcular la integral de superficie $\int_S \; yz^2 dS$, donde S es la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $1 \leq z \leq 2$ e $y \geq 0$.

4) Sea f una función positiva en $(-1{,}1)$ con $f(-1) = f(1) = 0$, $f \in C^1([-1{,}1])$ y tal que el gráfico de f, $C \coloneqq \{(x, f(x)) \text{ con } x \in [-1{,}1]\}$, está contenido en el semicírculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Sea
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} - y, \frac{x}{x^2+y^2} + x\right)$$
Sabiendo que el área entre el eje x y el gráfico de f es $\frac{\pi}{4}$, hallar
$$\int_C \mathbf{F}.\,d\boldsymbol{s}$$
si C se recorre del $(-1{,}0)$ al $(1{,}0)$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

2° Cuatrimestre 2005 – Recuperatorio Primer Parcial – 14/12/05

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $\sigma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(t) = \left(e^{t^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \operatorname{sen}(\pi t), t^2\right)$
   a) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xyz + 4x, x^2z + 2yz, x^2y + y^2 - 5)$. Calcular $\int_\sigma \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$.
   b) Sea $\mathbf{G}: \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^3$ definido por $\mathbf{G}(x,y,z) = (2xyz + 4x, x^2z + 2yz, x^2y + y^2 - 5 + 2z)$. Calcular $\int_\sigma \mathbf{G}.d\boldsymbol{s}$.

2) Hallar el centro de masa de la superficie
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
sabiendo que la densidad de masa está dada por $\rho(x,y,z) = 1 - z$.

3) Sea $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\frac{\partial P}{\partial y} = z$. Calcular la circulación del campo $\left(x^2, 2y^3, P(x,y,z)\right)$ a lo largo de la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + z = 2$ orientada de forma tal que el vector tangente unitario a la curva en el punto $(1,0,1)$ es $(0,1,0)$.

4) Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{y^2} + x^2, \cos(x) - y, 3z\right)$ y sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \leq 0\}$$
orientada de forma tal que la normal unitaria en $(0,0,-3)$ es $(0,0,1)$. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de la superficie S.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.