Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 2: Integrales de superficie.

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

(a) $r = k \quad (k = cte)$.

(b) $\varphi = k, \quad k \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

Ejercicio 2.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}), \text{ con } a, b \text{ no nulos,}$$
$$\Phi_2(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2),$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

(b) Mostrar que

$$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big)$$

con $0 < b < a$, y $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del **toro**.

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\mathrm{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xy dada en polares por:

$$r = 2 - \cos\theta \quad \text{para} \; -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

Ejercicio 7. Sea $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

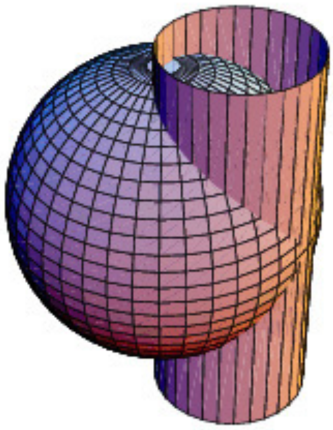
la parametrización de una superficie $\mathcal{S}$. Graficar $\mathcal{S}$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 8. Sea $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$ (D el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

Ejercicio 9. Calcular el área de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$. Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



Ejercicio 10. Sea la curva $z = f(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$ con f y α positivos, girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 11. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

(a) Hallar una parametrización de S.
(b) Hallar el área de S.

Ejercicio 12. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.

Ejercicio 13. Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Ejercicio 14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x, y, z) y el punto $(0, 0, r)$.

Definición .1. *Decimos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $\mathcal{S}$ resulte continua.*

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es un gráfico, $\mathcal{S}: \quad z = f(x, y)$, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Proposición .1. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $\mathcal{S}$. En este caso, decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Definición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$ a la integral*

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \ := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposición .2. *Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

Ejercicio 15. Probar la Proposición .2.

Ejercicio 16. Considerar la superficie dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = t \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos\theta \\ y = t \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \operatorname{sen}\theta \qquad t \in [-1, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z = t \cos \dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

Probar que la superficie obtenida es suave. Observar que se trata de la cinta de Moebius que no es orientable.

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la superficie del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 18. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 19. Sea S la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

Ejercicio 20. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 21. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\,\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

Ejercicio 22. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.