1) $\mathscr{C}$: $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \,/\, \gamma(t) = (t^6, \sqrt{1-t^{12}})$

a) Para que γ sea reg., debe ser C^1, inyectiva y $\forall t \in [-1,1]: \gamma'(t) \neq \bar{0}$.

Con facilidad puedo ver que no es inyectiva (y eso es suficiente para inferir que no es reg.).

Inyectividad $\equiv \forall t, k \in [-1,1]: (\gamma(t) = \gamma(k) \Rightarrow t = k)$

Negar esto es:

$$\exists t, k \in [-1,1]: (\gamma(t) = \gamma(k) \wedge t \neq k).$$

Tomando $t = -k$, $t \neq 0$ vemos que

$\gamma(t) = \gamma(k)$ $\left(\underbrace{t^6 = (-k)^6}_{=(-t)^6} \right)$ ¿y la 2da coord?

y $t \neq k$ (obviamente vale si $t \neq 0$).

$\Rightarrow$ No es regular.

6) Proponga una parametrización alternativa y demuestre que describe la misma curva.

Sea $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ /

$$\sigma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \checkmark$$

Qvq: $Im(\sigma) = Im(\gamma)$.

$Im(\sigma) \subseteq Im\,\gamma$

Sea t / $\sigma(t) \in Im(\sigma)$. Luego

$\underbrace{t \in Dom(\sigma)}_{[0,1]}$ $\wedge$ $\sigma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$.

tenés que tomar $k = t^{1/6}$

Como $t \in [0,1]$ (fijo), sea k / $\gamma(k) = (k^6, \sqrt{1-k^{12}})$

(o sea, $k \in [-1,1]$ y $\gamma(k) \in Im(\gamma)$.).

Queremos ver que $\sigma(t) = \gamma(k)$,

(en otras palabras, $\forall t \in Dom(\sigma), \exists k \in Dom(\gamma)$:
$(\sigma(t) = \gamma(k))$)

$\Rightarrow \underbrace{t = k^6}$ $\wedge$ $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-k^{12}}$

t está fijo
k depende de t.

Como $t \in [0,1]$ y $k \in [-1,1]$, sabemos que ese k existe.

Ahora con ese k fijo, vemos que $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-(k^6)^2}$, como queríamos.

ACLARACIÓN: lo que hice recién fue probar que dado t que pertenece a $Dom(\sigma)$, existe un k tal que $k \in Dom(\gamma)$ y satisfacen $\sigma(t) = \gamma(k)$.

Esto es lo mismo que $Im(\sigma) \subseteq Im(\gamma)$.

Ahora vemos la vuelta:

$Im(\gamma) \subseteq Im(\sigma)$.

Qvq: $\forall\, k \in Dom(\gamma),\ \exists\, t \in Dom(\sigma) /$

$$\gamma(k) = \sigma(t)$$

Sea $k \in [-1,1]$. $\Rightarrow \gamma(k) = (k^6, \sqrt{1-k^{12}})$.

Sea $t \in [0,1]$. Como $k \in [-1,1]$, $k^6 \in [0,1]$. ✓ Luego puedo pedir que $t = k^6$ (ya que no había restricciones sobre t más allá de que $t \in [0,1]$.

$\Rightarrow$ Como $t = k^6$, $\underbrace{(t, \sqrt{1-t^2})}_{\sigma(t)} = \underbrace{(k^6, \sqrt{1-k^{12}})}_{\gamma(k)}$ ✓

como queríamos.

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Im}(\gamma)$.

Veamos ahora que $\mathcal{C}$ es suave.
Para ello queremos ver que existe una param. regular, i.e. C^1, inyectiva y con derivada no nula en el dominio.

Sea $\sigma : [0,1) \to \mathcal{C}$ / $\sigma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ mi candidato.

- C^1 ✓ (las ~~[illegible]~~ componentes son C^1 en ~~[illegible]~~ $(0,1)$)

los bordes no me importan.

OK

- Inyectiva: Sean $t, k \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Sup: $\sigma(t) = \sigma(k)$

$\Rightarrow (t, \sqrt{1-t^2}) = (k, \sqrt{1-k^2})$

$\Rightarrow t = k$. ✓

- $\sigma'(t) = \left(1, \frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2t)\right)$

$\sigma'(t) = \left(1, -\frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}\right) \neq \bar{0} \quad \forall t \in [0,1)$.

✓

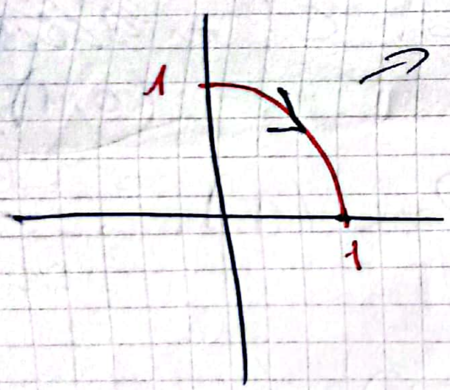
$\Rightarrow \sigma$ es parametrización regular. → entonces es suave y simple (admite par. reg. inyectiva)

Notemos que $\sigma(0) = (0,1)$,

$\sigma(1) = (1,0)$.

$\Rightarrow$ Es abierta. ✓

c) Antes de continuar, notemos que σ define la curva $\mathcal{C}$ del ejercicio, que es un arco de circunferencia así:



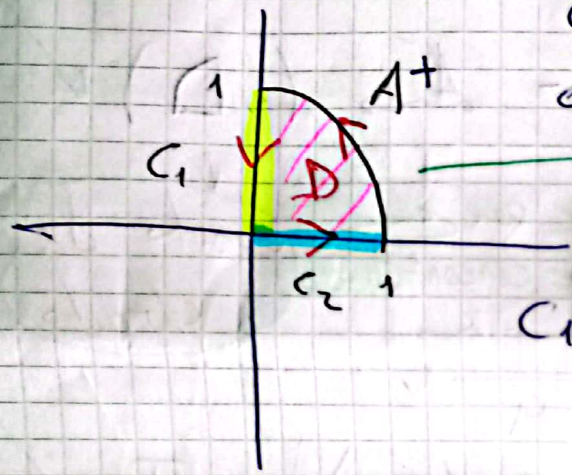
→ da esta orientación la parametrización que elegí.

Importante: en el enunciado me indican que comienza en el punto $(1,0)$, de manera que esta parametrización invierte la orientación que me piden.

* ¡No lo usé al final! OK

Por tanto, voy a agregarle un signo $-$ a lo que calcule.

Ahora voy a usar Green después de cerrar la curva:



Cerramos la curva como muestro.

¿Por qué C es así? Como mínimo tenés que probar que está contenida en el 1er cuadrante

$C_1: \quad c_1(t) = (0, 1-t),$ ✓
$t \in [0,1]$

$C_2: \quad C_2(t) = (t, 0)$ ✓
$t \in [0,1]$

Borde orientado positivamente ✓

F es C^1 ✓ (funciones elementales con composiciones).

D es área de tipo III ✓ ✓

$\Rightarrow$ Puedo usar Green. ✓

$F = (P, Q)$.

$$\int_{A^+ \cup C_1 \cup C_2} F \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$ ✓

Green

Calculo $\iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy$.

$Q_x = 2y \cdot 4x \cdot e^{2x^2+y^2} + 3x^2$ ✓

$P_y = 4x \cdot 2y \cdot e^{2x^2+y^2} + 3x^2 + 1$ ✓

$\Rightarrow Q_x - P_y = -1$ ✓

$\Rightarrow \iint_D -1\, dx\, dy = -$ Área (D) ✓

No probaste que es un arco de circunferencia

cuarto de círculo

$\frac{\pi \cdot r^2}{4}$, =

Pero $r = 1$, $\Rightarrow$ Área $(D) = \frac{\pi}{4}$ ✓

$\Rightarrow \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy = -\frac{\pi}{4}$ ✓

$\Rightarrow \int_{A' \cup C_1 \cup C_2} F \cdot ds = -\frac{\pi}{4}$ ✓

$\int_{A'} F \cdot ds + \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds = -\frac{\pi}{4}$

✓

Calculo las curvilíneas sobre C_1 y C_2.

Antes notemos que

$$F = \underbrace{\left(4x e^{2x^2+y^2}, 2y e^{2x^2+y^2}\right)}_{G} + \underbrace{\left(3x^2y + 2x + y + 1, x^3+1\right)}_{H}.$$

Vemos que $G = \nabla f$, donde

$$f = e^{2x^2+y^2}. \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} = 4x e^{2x^2+y^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{2x^2+y^2} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} F \cdot ds = \int_{C_1} (G+H)\, ds = \int_{C_1} \nabla f\, ds + \int_{C_1} H\, ds$$

¿Qué usás acá?

$$= \underbrace{f(c_1(1))}_{f(0,0) = e^0 = 1} - \underbrace{f(c_1(0))}_{f(0,1) = e^1 = e} + \int_{C_1} H\, ds$$

¿De dónde sale?

$$= 1 - e + \int_0^1 H(\underbrace{c_1(t)}_{(0,1-t)}) \cdot (0,-1)\, dt$$

NO $H(c_1(t)) = (*, 1)$

$$= 1 - e + \int_0^1 -\left((1-t)^3 + 1\right) dt$$

$$= 1 - e - \left(\int_0^1 (1-t)^3 dt + \underbrace{\int_0^1 1\, dt}_{1}\right)$$

$$= \cancel{1} - e - \left(- \frac{(1-t)^4}{4} \Big|_0^1 \cancel{+1} \right)$$

$$= -e - \left(0 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - e.$$ Arrastrás el error.

Ahora calculo $\int_{C_2} F \cdot ds$, sabiendo que

$$\int_{C_2} F \cdot ds = \int_{C_2} \nabla f \, ds + \int_{C_2} \mu \, ds$$

¿qué usás?

$$= \underbrace{f(c_2(1))}_{f(1,0)} - \underbrace{f(c_2(0))}_{f(0,0)} + \int_{C_2} \mu \, ds$$

$$= e^2 - 1 + \int_{C_2} \mu \, ds$$

¿De dónde sale?

$$= e^2 - 1 + \int_0^1 \mu(\underbrace{c_2(t)}_{(t,0)}) \cdot (1,0) \, dt$$

$$\int_0^1 (\ldots + 2t + 1) \, dt$$

$$= e^2 - 1 + \underbrace{2\int_0^1 t \, dt}_{2 \frac{t^2}{2} \big|_0^1} + \underbrace{\int_0^1 1 \, dt}_{1}$$

$$= e^2 \cancel{-1} + \cancel{1} + 1 = e^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int_{A^+} F \cdot dS + \frac{1}{4} - e + e^2 + 1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{A^+} F \cdot dS = -\frac{\pi}{4} - \frac{5}{4} + e - e^2$$

(I A C)

2) $\xi : \begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ z = 6 - x^2 - y^2 \\ y \geq 0. \end{cases}$ copiaste mal

Calcular: $\int_{\xi} F \cdot ds$, $F = (2yxe^{x^2}, e^{x^2}, x)$ $\downarrow +z$

Notemos que $\text{rot}(F) = \nabla \times F$

$= (0 - 0, -1, 2xe^{x^2} - 2\ldots$

No lo ~~[illegible]~~ usaste. $\rightarrow$ $\text{rot}(F) = (0, -1, 0)$.

~~[illegible]~~

Notemos que $f = ye^{x^2}$ tiene gradiente: $\nabla f = (2yxe^{x^2}, e^{x^2}, 0)$

Puedo escribir $F = \nabla f + (0, 0, x)$.

Analicemos ξ:

$$\begin{cases} z = 2x^2 + y^2 & (1) \\ z = 6 - x^2 - y^2 & (2) \\ y \geq 0. & (3) \end{cases}$$

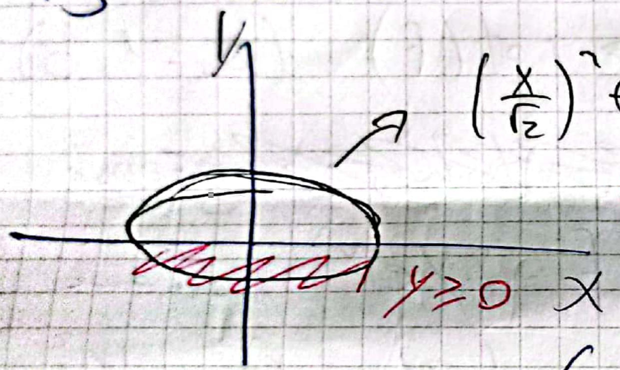
$\Longleftrightarrow \begin{cases} z - z = 2x^2 + y^2 - 6 + x^2 + y^2 \\ z = 6 - x^2 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (resto (2) a (1) y pasamos equivalencias)

Scanned with CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - x^2 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \} \; 1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \\ z = 6 - x^2 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si esto lo miramos en el plano xy, es algo como:

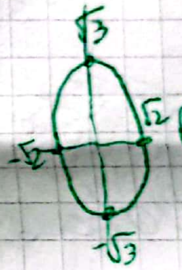


$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

$y \geq 0$

en realidad es

pero OK.



porque $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ (si $y \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ es una curva abierta que proyectada en xy es media elipse.

La parametrizo usando polares:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos\theta \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen}\theta \, ;$$

¿donde vive θ?

$$z = 6 - (\sqrt{2}\cos\theta)^2 - (\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$z = 6 - 2\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta$$

$$z = 6 - 2 - \operatorname{sen}^2\theta = 4 - \operatorname{sen}^2\theta$$

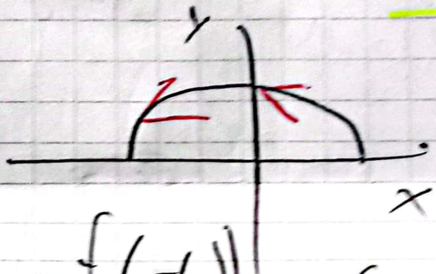
$\Rightarrow$ Sea $\sigma(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta, 4-\mathrm{sen}^2\theta)$,

con $3\,\mathrm{sen}\,\theta \geq 0$) $y \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. ✓

$$\Rightarrow \int_{C^+} F\cdot ds = \int_{C^+} (\nabla f + (0,0,x))\, ds$$

$\Rightarrow$ respetando la orientación de la parametrización ✓



$$= \int_{C^+} (0,0,x)\, ds + \underbrace{f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0))}_{\int_{C^+} \nabla f\, ds} \qquad f(x,y,z) = ye^{x^2}$$

$$\underbrace{f(-\sqrt{2},0,4)}_{0} - \underbrace{f(\sqrt{2},0,4)}_{0} \checkmark$$

$$= \int_0^{\pi} (0,0,\sqrt{2}\cos\theta)\cdot(*,*,-2\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\cos\theta)\, d\theta \checkmark$$

$$= \int_0^{\pi} -\sqrt{2}\cdot 2\cdot \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= -\sqrt{2}\cdot 2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta \checkmark$$

$$\int \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow -u^2 \, du = +\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3\theta}{3} + C$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F \cdot ds = -\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -2\sqrt{2}\left(-\frac{(-1)}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}$$

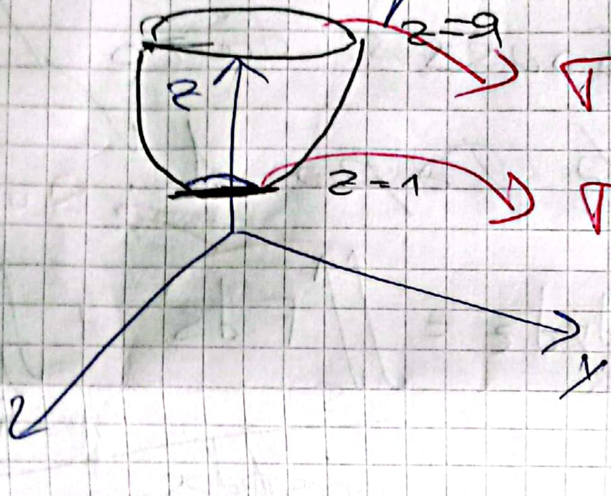
$$= \boxed{-\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

OK Arrastrás el error de copias mal el campo

3) Taza: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4z = x^2+y^2,\ 1\leq z\leq 9\}$

$T(x,y,z) = 38 + xy - x^2 - y^2 + 4z$.

Esto se ve aprox:



Tapa 1 = T1

Tapa 2 = T2

Quiero hallar $\iint_S -\nabla T \cdot dS$, donde

$S = T2 \cup$ Superficie(Taza).

Calculo $-\nabla T$.

$$-\nabla T = \left(-\frac{\partial T}{\partial x}, -\frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$-\nabla T = \left(-(y-2x), -(x-2y), -(4)\right)$$

$$-\nabla T = (-y+2x, -x+2y, -4) = F$$

$F \in C^1$ (componentes C^1) ✓

Mi taza es unión de regiones tipo IV si la parto con los ~~ejes~~ planos zx y zy. ✓

⇒ Puedo usar Gauss si cierro la superficie con la tapa 1. ✓

Quiero esto

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(F)\, dx\,dy\,dz = \underbrace{\iint_{S} F \cdot ds + \iint_{T1} F \cdot ds}_{\text{orientadas exteriormente}}$$ ✓

Ω es el interior de la taza (volumen).

Vemos que $\mathrm{div}(-\nabla T) = \mathrm{div}(F)$

$= 2 + 2 + 0$

$= 4.$ ✓

$$\Rightarrow 4 \cdot Vol(\Omega) = \underset{¿?}{\overbrace{ANS}^{\iint_S F \cdot dS}} + \iint_{T_1} F \cdot dS$$

Calculamos $Vol(\Omega)$. Para ello, uso Cavalieri. Notamos que, si $z = t$, $t \in [1, 9]$, el área al cortarlo ahora será $A(B) = \pi \cdot 4t$, ya que le corresponderá el círculo cuyo borde

$$4t = x^2 + y^2,$$

o sea que su radio al cuadrado será $4t$.

$$\Rightarrow Vol(\Omega) = \int_1^9 \pi \cdot 4t \, dt$$

$$= 4\pi \left. \frac{t^2}{2} \right|_1^9$$

$$= 4\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \underline{160\pi}.$$

Ahora calculamos $\iint_{T_1} F \cdot ds$.

T_1 podemos parametrizarlo en

$T_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 9)$,

$0 \leq r \leq 6$, ¿y θ?

ya que la tapa está en $z=9$,

y verifica su borde $4 \cdot 9 = x^2+y^2$

$36 = x^2+y^2$,

o sea que el radio es 6, pero como queremos la superficie, oscila entre 0 y 6, y θ entre 0 y 2π. Ok ✓

$$\Rightarrow \iint_{T_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^6 F(T_1(r,\theta)) \cdot T_{1_r} \times T_{1_\theta} \, dr\, d\theta,$$

$T_{1_r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$T_{1_\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

$\Rightarrow T_{1_r} \times T_{1_\theta} = (0, 0, r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)$

$= (0, 0, r)$

orienta bien ✓ ($r=1$ da normal $(0,0,1)$, hacia arriba)

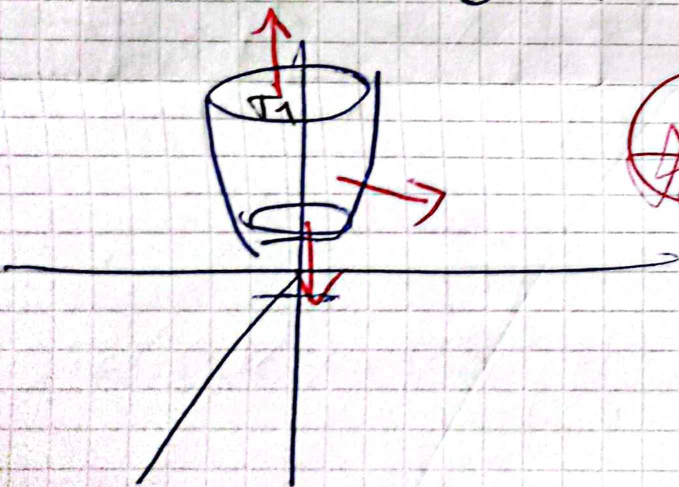
$$\Rightarrow \iint_{\Gamma_1} F \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{6} (\cancel{*}, *, -4)\cdot(0,0,r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{6} -4r \, dr\, d\theta$$

$$= -4 \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{6} r \, dr\right) d\theta$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} \frac{6^2}{2} \, d\theta$$

$$= -2 \cdot 6^2 \cdot 2\pi = -144\pi . \checkmark$$



$*$ (la orientación es correcta)

$$\Rightarrow ANS = 4 \cdot 160\pi - (-144\pi)$$

$$\boxed{ANS = 784\pi} \checkmark$$

4) Hallo la recta tg a $\frac{2}{3} = x^2 - \frac{1}{3}y^3$ en (1,1). Para ello, despejo y:

$$y = (3x^2 - 2)^{\frac{1}{3}}$$ (se verifica fácilmente)

$$y'(x) = \frac{1}{3}(3x^2-2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x$$

$$y'(1) = 2.$$

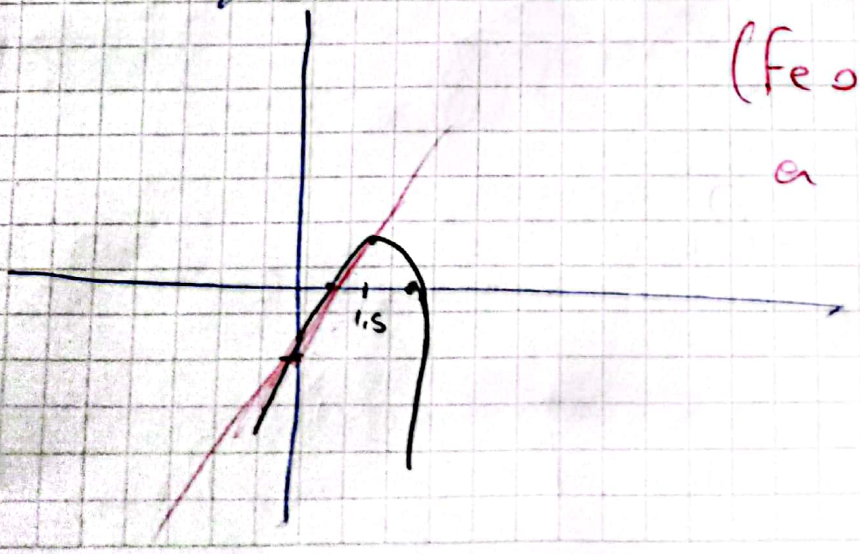
Además, la recta debe pasar por el (1,1).

$\Rightarrow R: \quad y = 2x + 6,$

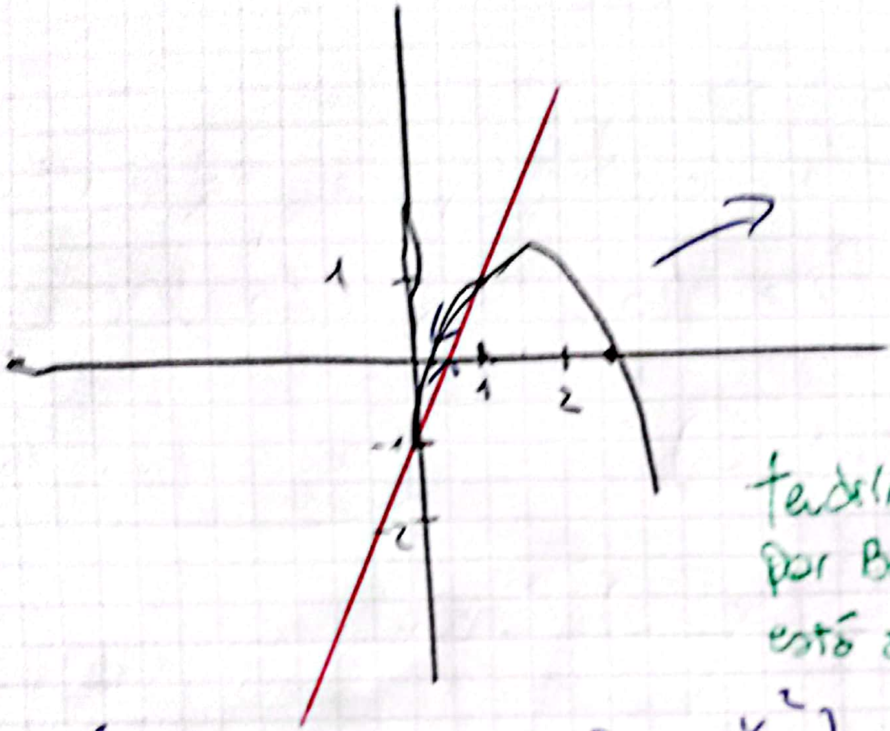
$1 = 2 \cdot 1 + 6 \Leftrightarrow -1 = 6.$

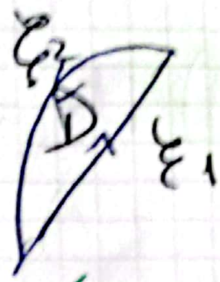
$\Rightarrow R: \quad y = 2x - 1.$

Gráfica para entender la situación:



(Feo. Hago zoom en la sig. hoja :)





tendrías que decir que por Bolzano la parábola está arriba.

$$G = (2xy + 3y,\ x^2 + e^{y^2})$$

Quiero hallar $\int_C G\,ds$. C orientada positivamente y $\partial D = C$

G es C^1 (sus componentes lo son)

D es una superficie de tipo III.

⇒ Puedo usar Green.

$$\underbrace{\int_C G\,ds}_{\text{Quiero}} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

Calculo $Q_x - P_y$:

$Q_x = 2x$ ✓

$P_y = 2x + 3$ ✓

$\Rightarrow Q_x - P_y = -3$ ✓

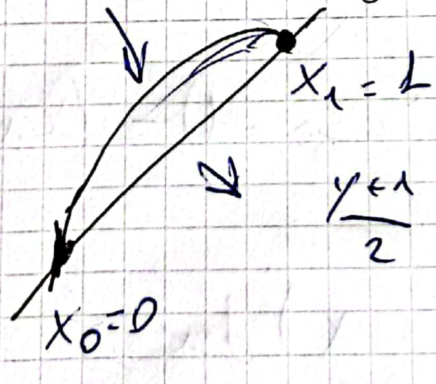
$$\Rightarrow \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_D (-3)\,dx\,dy$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \int_{\mathcal{C}} 6\,ds \end{array} \quad = -3\ \text{Área}(D).$$ ✓

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \cancel{\int_{\mathcal{C}} (x,0)\,ds}$$

green (áreas)

Esquema:



x_0 y x_1 son las intersecciones entre la recta y la parábola. ¿Cómo los encontraste?

$\Rightarrow$ (Los encuentro igualando) : OK

$$-x^2 + 3x - 1 = 2x - 1$$

$$-x^2 + x \cancel{\;2\;} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 0\,, \quad x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \iint_D 1 \, dx\, dy = \int_0^1 \int_{2x-1}^{-x^2+3x-1} 1 \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(-x^2 + 3x - 1\right) - \left(2x - 1\right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2 + x\right) dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$ ✓

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} 6\, ds = -3 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$