Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 1: Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

1. Curvas

Ejercicio 1.

(a) Probar que

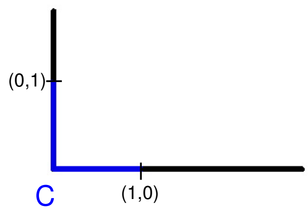
$$\begin{cases} x_1(t) = r\cos(2\pi t), \\ \\ y_1(t) = r\,\mathrm{sen}\,(2\pi t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x_2(t) = r\cos(4\pi t), \\ \\ y_2(t) = r\,\mathrm{sen}\,(4\pi t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,$$

son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r.

(b) Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

(c) Probar que $\sigma_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$, $t \in [0,1]$ no es una parametrización regular.

Ejercicio 2. Considerar la curva $\mathcal{C}$ formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} \big(0, (1-t)^2\big), & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ \big((t-1)^2, 0\big), & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva $\mathcal{C}$.

Observar que $\mathcal{C}$ no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

Ejercicio 3. Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \le t \le 1$.

Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \le x \le 1$ que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \le x \le 1$.

(a) Probar que $\mathcal{C}$ es una curva abierta, simple, suave

(b) Probar que $\bar{\sigma}(s) := \big(\bar{x}(s), \bar{y}(s)\big)$ dada por

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = e^s - 1 \\ \\ \bar{y}(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \qquad 0 \le s \le \ln 2$$

es una parametrizacíón regular de $\mathcal{C}$.

(c) Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ es otra parametrización regular.

(d) Hallar una función $g : [0,1] \to [0, \ln 2]$ tal que $\bar{\sigma}\big(g(t)\big) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Observar que g es biyectiva y C^1.

Definición. Sea $\sigma(t)$ la posición en el instante t de una partícula que se mueve en el espacio en forma continua. Esta partícula recorre una curva $\mathcal{C}$ y σ es una parametrización de $\mathcal{C}$.

En este contexto $\sigma'(t)$ es un vector cuya magnitud da la rapidez con la que se mueve la partícula al pasar por el punto $\sigma(t)$. Además, este vector da la dirección y sentido del movimiento. Por eso se lo denomina "vector velocidad".

Por un razonamiento análogo, al vector $\sigma''(t)$ se lo denomina "vector aceleración".

Conservaremos esta nomenclatura para estos vectores aún cuando la curva $\mathcal{C}$ y/o la parametrización σ no correspondan a la trayectoria de una partícula.

Ejercicio 5. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas cuyas parametrizaciones se dan a continuación, en el valor especificado de t:

(a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t = 0.$
(b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), \quad t = 0.$
(c) $\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}}), \quad t = 1.$
(d) $\sigma(t) = (0, 0, t), \quad t = 1.$

Ejercicio 6. ¿Qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m en el instante $t = 0$ si sigue la trayectoria dada por la función σ del Ejercicio 5.(b)?

Ejercicio 7. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que sale por una tangente en $t = 1$. Hallar la ubicación de la partícula en $t = 2$. Suponer que ninguna fuerza actúa sobre ella después del tiempo $t = 1$.

2. Integral de longitud de arco

Ejercicio 8. Considerar una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Hallar la velocidad, rapidez, y la longitud del arco descripto por la partícula entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observar que σ describe la función de posición de un punto en un círculo de radio 1, que va rodando. La curva que describe se conoce como cicloide.

Ejercicio 9. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a, b]$, siendo:

(a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.
(b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t + 1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de la misma. Para cada $t \in [a, b]$ sea $g(t)$ la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$. Sabemos que

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| \, d\tau.$$

La función $g(t)$ resulta ser continuamente diferenciable con derivada no nula para todo t. (En particular, se tiene que $\|\sigma'(t)\| = g'(t)$ es la variación instantánea de la longitud de arco en el punto $\sigma(t)$. Esto justifica que, cuando $\sigma(t)$ describe la posición de una partícula que se mueve sobre la curva $\mathcal{C}$, la magnitud $\|\sigma'(t)\|$ es la rapidez con que se mueve la partícula).

Por ser $g'(t) \neq 0$ para todo t, la función g admite una inversa continuamente diferenciable.

Sea $\tilde{\sigma}(s) = \sigma\big(g^{-1}(s)\big)$. Probar que $\tilde{\sigma} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, con ℓ la longitud de $\mathcal{C}$, es una parametrización regular de $\mathcal{C}$ tal que la longitud del arco que va de $\tilde{\sigma}(0)$ a $\tilde{\sigma}(s)$ es s.

Esto justifica la notación ds que muchas veces se da al diferencial de longitud de arco.

Ejercicio 11. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, ds$, donde σ es una parametrización de $\mathcal{C}$, en los casos siguientes:

(a) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\mathrm{sen} t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$.
(b) $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.
(c) $f(x,y,z) = x \cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1]$.

Ejercicio 12.

(a) Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 13. Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta), \qquad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

(a) ¿Cuál es la masa total del alambre?
(b) ¿Dónde está el centro de masa de esta configuración de alambre?
(c) Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x,y,z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

Ejercicio 14. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a,b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$.

(a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Ejercicio 15. *¿Cuánto se enangosta un resorte cuando se lo estira?* Sea $\mathcal{C}_1$ la curva imagen de la siguiente parametrización:

$$\sigma_1(t) = \left(R\cos(2\pi t), R\mathrm{sen}\,(2\pi t), \frac{L}{N}t\right) : \qquad t \in [0, N],$$

donde $R, L \in \mathbb{R}_{>0}$, $N \in \mathbb{N}$.

(a) Hacer un dibujo esquemático.
(b) ¿Cuántas vueltas da este resorte (visto desde arriba)?
(c) ¿Hasta qué altura llega?
(d) ¿Cuál es el radio "visto de arriba"?
(e) Calcular la longitud de esta curva $Long(\mathcal{C}_1) = \ell$ en función de los parámetros R, L, N.

Si a este resorte los "estiramos" hacia arriba, llegará más alto, dando la misma cantidad de vueltas. Supongamos que el material es flexible como para poder doblarse y así funcionar como resorte, pero que a su vez el material no es elástico asi que no se estira su longitud total (imaginemos por ejemplo un resorte de alambre de acero). Lo estiramos al doble de altura. Calcular la longitud de esta curva $Long(\mathcal{C}_1) = \ell$ en función de los parámetros R, L, N. ¿Se habrá achicado el "radio"? ¿Cuánto?

(f) Sea $\mathcal{C}_2$ la curva con parametrización

$$\sigma_2(t) = \left(\widetilde{R}\cos(2\pi t), \widetilde{R}\mathrm{sen}\,(2\pi t), \frac{2L}{N}t\right) : \qquad t \in [0, N]$$

Es decir, un resorte que da N vueltas pero con el doble de altura. ¿Cuánto tiene que valer $\widetilde{R}$ para que $Long(\mathcal{C}_1) = Long(\mathcal{C}_2)$?

3. Integrales curvilíneas

Ejercicio 16. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$. Evaluar la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathcal{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

(a) $\sigma(t)=(t,t,t), \quad 0\le t\le 1$.
(b) $\sigma(t)=(\sin t,0,\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi$.

Ejercicio 17. Para las curvas orientadas $\mathcal{C}$ parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

(a) $\int_{\mathcal{C}} x\,dy-y\,dx, \quad \sigma(t)=(\cos t,\sin t), \quad 0\le t\le 2\pi$.
(b) $\int_{\mathcal{C}} x\,dx+y\,dy, \quad \sigma(t)=(\cos(\pi t),\sin(\pi t)), \quad 0\le t\le 2$.

Ejercicio 18. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y=x^2$, $z=0$, de $x=-1$ a $x=2$.

Ejercicio 19. Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave parametrizada por σ.

(a) Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=0.$$
(b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t, mostrar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathcal{C}} \|\mathbf{F}\|\,ds.$$
(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}\big(\sigma(t)\big)=\lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t)>0$.)

Ejercicio 20. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C?

Ejercicio 21. Suponer que $\nabla f(x,y,z)=(2xyze^{x^2},ze^{x^2},ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0)=5$, hallar $f(1,1,2)$.

Ejercicio 22. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G=m=M=1$) definido (para $(x,y,z)\neq(0,0,0)$) por:
$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$
Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1,y_1,z_1) a (x_2,y_2,z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ y $R_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

Ejercicio 23. Sean $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F}=\nabla f+\mathbf{G}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}.$$

Ejercicio 24. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $g:[\bar{a},\bar{b}]\to[a,b]$ una biyección C^1 con $g'(\tau)\neq 0$ para todo $\tau\in[a,b]$. Sea $\bar{\sigma}:[\bar{a},\bar{b}]\to\mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s)=\sigma\big(g(s)\big)$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ.

(a) Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.
(b) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.
(c) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a $\mathcal{C}$ con la orientación dada por σ. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ, si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.