Práctica 2 (Área de superficies)

- Área: Sea S una superficie y supongamos que $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización (C^1 e inyectiva de S, (a trozos))

entonces

$$\boxed{\text{Área}(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv}$$

1) Hallar el área del plano $2x+y+2z=16$ limitado por $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=3$

Consideramos

$$T(x,y) = \left(x, y, \frac{16-2x-y}{2}\right) \quad (x,y) \in \underbrace{[0,2]\times[0,3]}_{D}$$

$$= \left(x, y, 8-x-\frac{y}{2}\right)$$

$T_x = (1,0,-1)$

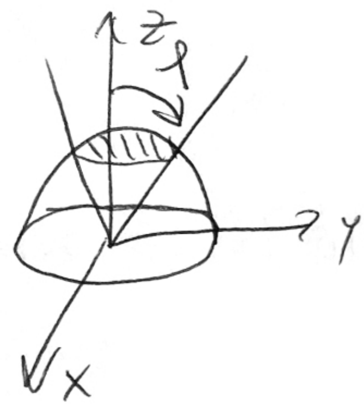
$T_y = (0,1,-\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow T_x \times T_y = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \quad (\neq (0,0,0) \text{ en } D ✓)$$

$$\Rightarrow \|T_x \times T_y\| = \sqrt{1+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$\Rightarrow \text{Área}(S) = \int_0^2 \int_0^3 \frac{3}{2}\, dy\, dx = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{9}$.

2) Calcular el área del casquete esférico $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ limitado por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$



Parametricemos:

1º) Usando esféricas:

$$T: \begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\varphi \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi/4]$$

$$T_\varphi(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\varphi)$$

$$T_\theta(\varphi,\theta) = (-\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, 0)$$

$$T_\varphi \times T_\theta(\varphi,\theta) = \cdots = (\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \|T_\varphi \times T_\theta\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi} = |\operatorname{sen}\varphi| \underset{\substack{\operatorname{sen}\varphi > 0 \\ \text{en } [0,\pi/4]}}{=} \operatorname{sen}\varphi$$

$$\Rightarrow \text{Área}(S) = \iint_D \|T_\varphi \times T_\theta\|\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4} = 2\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = 2\pi \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \boxed{\pi \cdot (2-\sqrt{2})}$$

2º) Usando coordenadas cartesianas:
(Ejercicio)

$T(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$, $(x,y) \in \{x^2+y^2 \leq 1/2\}$.

3) Dada la superficie

$$S = \{(x,y,z) \mid z = x+y^2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$$

a) Calcular el área de S

b) Integrar la función $g(x,y,z) = z - x$ sobre S.

a) Obs: Si $S = \text{Graf}(f) = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ con $f \in C^1$, entonces:

$T(x,y) = (x,y,f(x,y))$ es una parametrización inyectiva, C^1

$T_x = (1, 0, f_x(x,y))$
$T_y = (0, 1, f_y(x,y))$ $\Rightarrow$ $T_x \times T_y = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$

Sea $f(x,y) = x + y^2$ ($\in C^1$ ✓)

y $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$

$\Rightarrow S = \text{Graf}(f)$.

$\Rightarrow T(x,y) = (x, y, x+y^2)$ es parametrización de S ✓

$T_x \times T_y(x,y) = (-1, -2y, 1)$

$$\Rightarrow \text{Área}(S) = \iint_D \|(-1,-2y,1)\| \, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2+4y^2} \, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 y \cdot \sqrt{2+4y^2} \, dy$$

$$\underset{\substack{u = 4y^2+2 \\ du = 8y\,dy}}{=} \frac{1}{8} \int_2^6 \sqrt{u} \, du = \frac{1}{8} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_2^6$$

$$= \boxed{\frac{1}{12}\left(6^{3/2} - 2^{3/2}\right)}$$

III

b) Recordar (teórica): La integral de una función $g(x,y,z)$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Sobre una superficie S, parametrizada por:

$T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se define:

$$\boxed{\int_S g\, dS = \iint_D g \circ T(x,y) \cdot \|T_x \times T_y\|\, dx\, dy.}$$

$$\Rightarrow \int_S g\, dS = \iint_D g \circ T(x,y) \cdot \|T_x \times T_y\|\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y (\cancel{x} + y^2 \cancel{-x}) \cdot \sqrt{2+4y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 y^3 \cdot \sqrt{2+4y^2}\, dy$$

$$\left(\begin{array}{l} u = 4y^2+2 \\ du = 8y\, dy \\ \frac{1}{4}(u-2) = y^2 \end{array} \right) = \frac{1}{32}\int_2^6 (u-2)\sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_2^6$$

$$= \ldots = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{30}}$$