Análisis 2 / Análisis Matematico 2 / Matemática 3 - Resolución del Segundo Parcial

Segundo cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (y^3 - x^2y + x)\,dx + (-x^3 + xy^2 - y)\,dy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Sugerencia: la ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = f(x^2 - y^2)$ para alguna función derivable f.

Veo si es exacta:

$$M = y^3 - x^2 \cdot y + x$$

$$N = -x^3 + xy^2 - y$$

Derivo

M acompaña a $dx \Rightarrow$ busco $\frac{\partial}{\partial y} M$

$$M_y = 3y^2 - x^2$$

$$N_x = -3x^2 + y^2$$

Como $M_y \neq N_x \Rightarrow$ <u>no</u> es exacta.

Quiero usar factor integrante dado:

Qvq:

$$(\mu M)_y = (\mu \cdot N)_x$$

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

Como $\mu(x,y) = f(x^2 - y^2)$

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_y(x,y) = -2y \cdot f'(x^2-y^2) \\ \mu_x(x,y) = 2x \cdot f'(x^2-y^2) \end{cases}$$

Reemplazo:

$$\underbrace{-2y \cdot f'(x^2-y^2)}_{\mu_y} \cdot \underbrace{(y^3 - x^2y + x)}_{M} + \underbrace{f(x^2-y^2)}_{\mu} \cdot \underbrace{(3y^2 - x^2)}_{M_y} =$$

$$= \underbrace{2x \cdot f'(x^2-y^2)}_{\mu_x} \cdot \underbrace{(-x^3 + xy^2 - y)}_{N} + \underbrace{f(x^2-y^2)}_{\mu} \cdot \underbrace{(-3x^2 + y^2)}_{N_x}$$

$$-2y \cdot f'(x^2-y^2) \cdot (y^3 - x^2y + x) - 2x \cdot f'(x^2-y^2) \cdot (-x^3 + xy^2 - y)$$

$$= f(x^2-y^2) \cdot (-3x^2+y^2) - f(x^2-y^2) \cdot (3y^2 - x^2)$$

$$f'(x^2-y^2) \cdot \left(\left(-2y^4 \cancel{+ 2x^2y^2} \cancel{- 2xy}\right) + \left(2x^4 \cancel{- 2x^2y^2} \cancel{+ 2xy}\right) \right) =$$

$$= f'(x^2-y^2) \cdot (2x^4 - 2y^4) =$$

$$= f(x^2-y^2) \left((-3x^2+y^2) - (3y^2 - x^2) \right)$$

$$= f(x^2-y^2)(-2x^2 - 2y^2)$$

Obtuve

$$f'(x^2-y^2)\cdot(2x^4-2y^4) = f(x^2-y^2)\left(-2x^2-2y^2\right)$$

$\times\frac{1}{2}$

$$f'(x^2-y^2)\cdot(x^4-y^4) = f(x^2-y^2)\left(-x^2-y^2\right)$$

$$\frac{f'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)} = \frac{-x^2-y^2}{x^4-y^4} = \frac{-\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}(x^2-y^2)}$$

$$\frac{f'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)} = \frac{-1}{x^2-y^2}$$

$$\int\frac{f'(x^2-y^2)}{f(x^2-y^2)} = \int\frac{-1}{x^2-y^2}$$

$$z = x^2-y^2$$

$$\ln(f(x^2-y^2)) + C = -\int\frac{1}{z}$$

$$\ln(f(z)) = -\ln z + C$$

$e^\wedge$

$$f(z) = \underbrace{e^{-\ln z}}_{(e^{\ln z})^{-1}}\cdot e^C = z^{-1}\cdot\underbrace{e^C}_{C}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot C$$

$$f(x^2-y^2) = \frac{1}{x^2-y^2}$$

para $C = 1$

Revisar si vale elegir C de esta manera

Obtuve el factor integrante $\mu(x,y)$

$$\mu(x,y) = f(x^2-y^2)$$

$$= \frac{1}{x^2-y^2}$$

Reemplazo en

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

$$M = y^3 - x^2 \cdot y + x$$

$$N = -x^3 + xy^2 - y$$

$M \cdot \mu$:

$$\frac{y^3 - x^2 \cdot y + x}{x^2-y^2} = \frac{y(y^2-x^2)+x}{(x+y)\cdot(x-y)}$$

$$= -y + \frac{x}{x^2-y^2}$$

$N \cdot \mu$

$$\frac{-x^3 + xy^2 - y}{x^2-y^2} = \frac{-x(x^2-y^2)-y}{x^2-y^2}$$

$$= -x + \frac{-y}{x^2-y^2}$$

Quiero F tq:

$$\begin{cases} F_x \overset{\text{con } dx}{=} -y + \dfrac{x}{x^2-y^2} \\ F_y = -x - \dfrac{y}{x^2-y^2} \end{cases}$$

deriva wrt x $\quad \dfrac{1}{x^2-y^2} \cdot 2x$

$$\Rightarrow F = -xy + \frac{1}{2} \ln|x^2-y^2| + \varphi(y)$$

$$F = -xy + \frac{1}{2} \ln|x^2-y^2| + \varphi(x)$$

deriva wrt y $\quad \dfrac{1}{x^2-y^2} \cdot -2y$

$\therefore$

$$F = -xy + \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2-y^2| + C$$

$$\Rightarrow -xy + \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2-y^2| = C$$

Ahora:

esto es $x=0$?

$$y(0) = 1$$

Supongo que sí

$$F(0,1) = 0 + \frac{1}{2} \ln|0-1| = C$$

$$0 = C$$

Finalmente

$$-xy + \frac{1}{2} \ln|x^2-y^2| = 0 \quad //$$

Ejercicio 2. Encuentre la solución al siguiente sistema.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

cuya condición inicial es

$$X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sé que

$$X_S = X_H + X_P$$

Resuelvo X_H :

$$X' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} X$$

Calculo autovalores de A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_2 = -1 \\ \searrow \lambda_1 = 3 \end{matrix}$$

Busco Autovectores

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Nu\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -1$

$$Nu\left(A + 1 . I\right) = Nu\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ya tengo las soluciones del Homogéneo:

$$X_H = c_1 . e^{3t} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 . e^{-t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para $X_{Part.}$ uso método de var. de constantes

$$X_1 = e^{3t} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad X_2 = e^{-t} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_p = C_1 \cdot e^{3t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

funciones

$$= C_1 \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix}}_{X} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inversa de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$\det E = -e^{2t} - e^{2t} = -2e^{2t}$$

$$E^{-1} = -2e^{-2t} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 . \begin{bmatrix} t . e^{-3t} + 2 . e^{-3t} \\ t . e^{t} - 2 e^{t} \end{bmatrix}$$

$$= 2 . \begin{bmatrix} e^{-3t} . (t+2) \\ e^{t} . (t-2) \end{bmatrix}$$

$$C_1' = 2 . e^{-3t} . (t+2) = 2 . t . e^{-3t} + 4 e^{-3t} .$$

$$C_2' = 2 . e^{t} . (t-2) = 2 . t . e^{t} - 4 e^{t}$$

Integro obteniendo C_1 y C_2

$C_1 =$

⋮

Puedo reemplazar en

$$X_p = C_1\, X_1 + C_2 \cdot X_2$$

$\therefore$

$$X = X_H + X_p$$

Falta condición inicial

$$X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reemplazo $t=0$ en X e igualo a $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Obtengo c_1 y c_2 (Chiquitas, las constantes de X_H)

Finalmente obtengo solución general X.

Ejercicio 3. La ecuación diferencial

orden 2 $\Rightarrow$ 2 soluciones

$$2ty'' + (4t+1)y' + (2t+1)y = 0,$$

tiene una solución de la forma $y = e^{-t}$. Halle todas las soluciones de la ecuación tales que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Método de Reducción de Órden

Tengo $y_1 = e^{-t}$

busco $y_2 = c \cdot y_1$ con c una función

Reemplazando

$$2.t.\ y_2'' = 2t.\left(c'.y_1 + c.y_1' \right)'$$

$$= 2t\left(c''.y_1 + c'.y_1' + c'.y_1' + c.y_1''\right)$$

$$= 2t.\left(c''.y_1 + 2.c'.y_1' + c.y_1''\right)$$

Donde

$$y_1 = e^{-t}$$

$$y_1' = -1.\ e^{-t}$$

$$y_1'' = e^{-t}$$

Sigo

$$2t.y_2'' + (4t+1).y_2' + (2t+1)y_2 =$$

$$= 2t.\left(c''.y_1 + 2.c'.y_1' + c.y_1''\right) +$$

$$+ (4t+1) \cdot \left(c' \cdot y_1 + c \cdot y_1' \right) + (2t+1) \cdot c \cdot y_1$$

Agrupo por orden de c

$$= c'' (2t \cdot y_1) + c' \left(4t \cdot y_1' + (4t+1) \cdot y_1 \right) +$$

$$+ c \cdot \left(2t \cdot y_1'' + (4t+1) \cdot y_1' + (2t+1) \cdot y_1 \right)$$

es la ecuacion del otro lado del = !

$\therefore$

$$c'' (2t \cdot y_1) + c' \left(4t \cdot y_1' + (4t+1) \cdot y_1 \right) = 0$$

Puedo sustituir $z = c'$

$$\Rightarrow \quad z' (2t \cdot y_1) + z \left(4t \cdot y_1' + (4t+1) \cdot y_1 \right) = 0$$

$$z' (2t \cdot y_1) = -z \left(4t \cdot y_1' + (4t+1) \cdot y_1 \right)$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-\left(4t \cdot y_1' + (4t+1) \cdot y_1 \right)}{2t \cdot y_1}$$

$$= \frac{-4t \cdot y_1'}{2t \cdot y_1} - \frac{4t \cdot y_1}{2t \cdot y_1} - \frac{y_1}{2t \cdot y_1}$$

$$= -2 \frac{y_1'}{y_1} - 2 - \frac{1}{2t}$$

$$\frac{e^{-t}}{-e^{-t}} = -1$$

$$= 2 - 2 - \frac{1}{2t}$$

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{2t}$$

Integro

$$\ln|z| = -\frac{1}{2}\ln|t| + C$$

?

$$|z| = |t|^{-\frac{1}{2}}$$

?

$$z = |t|^{-\frac{1}{2}}$$

$$c' = |t|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|t|^{1/2}}$$

Integro

$t \neq 0$!

$$C = 2\sqrt{|t|}$$

Obtuve la función C, reemplazo en y_2

$$y_2 = c \cdot y_1$$

$$= 2\sqrt{|t|} \cdot y_1$$

$$= 2\sqrt{|t|} \cdot e^{-t}$$

Como me interesa $y \to \infty$, puedo descartar la solución en $t = 0$ y quedarme con $t \in (0, +\infty)$

$$\Rightarrow y_2 = 2\sqrt{t} \cdot e^{-t}$$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2$$

incluye el 2 de antes

$$y = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot \sqrt{t} \cdot e^{-t}$$

Quiero las soluciones tales que

$$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

Veo que

$$C_1 \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{t \to \infty} C_2 \cdot \sqrt{t} \cdot e^{-t} = \lim_{t \to \infty} C_2 \cdot \frac{\overset{\to \infty}{\sqrt{t}}}{\underset{\to \infty}{e^{t}}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{t \to \infty} C_2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{t}}}_{\to 0} = 0 \quad \checkmark$$

$\therefore$

y es solución independientemente de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = (a-1)sen(x) + 2y \\ y' = -x + (a+1)sen(y) \end{cases}$$

a. Halle **infinitos** valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema admita una solución no trivial que converge al punto $(0,0)$ cuando t tiende a $+\infty$.

b. Para los valores hallados en el item anterior, esboce un diagrama de fases de las trayectorias del sistema en un entorno del origen.

a) Teorema de Linealización

- Si $F = \Big(\underbrace{(a-1).\sin x + 2y}_{\mathcal{C}^1 \checkmark} \, , \, \underbrace{-x + (a+1).\sin y}_{\mathcal{C}^1 \checkmark} \Big)$

$\therefore$ F es $\mathcal{C}^1$ ✓

- Falta ver autovalores de DF en $\vec{O}$

$$DF = \begin{bmatrix} (a-1).\cos x & 2 \\ -1 & (a+1).\cos y \end{bmatrix}$$

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & a+1 \end{bmatrix}$$

Busco autovalores

$$\det\left(DF_{(0,0)} - \lambda.I\right) = \det\begin{vmatrix} a-1-\lambda & 2 \\ -1 & a+1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \cancel{+a} - \lambda a \cancel{-a} - 1 \cancel{+\lambda} - \lambda a \cancel{-\lambda} + \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2a) + (a^2+1)$$

$$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$\frac{2a \pm \sqrt{\cancel{4a^2} - \cancel{4 \cdot a^2} - 4}}{2} = a \pm \frac{2 \cdot i}{2}$$

$$= a \pm i$$

$\therefore \quad \lambda_1, \lambda_2 = a \pm i$

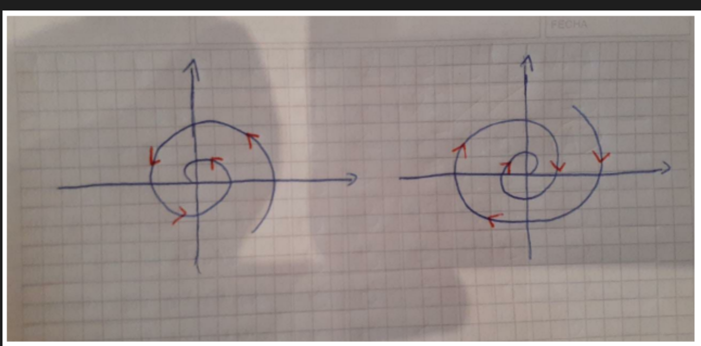
- Si $a \neq 0$ (Parte Real) $\Rightarrow$ Vale Teo. de Linealización

- Si $a < 0 \Rightarrow$ los autovalores son complejos con Parte Real negativa

  $\therefore$ $(0,0)$ es punto de equilibrio estable

  o sea: todas las soluciones convergen al $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$

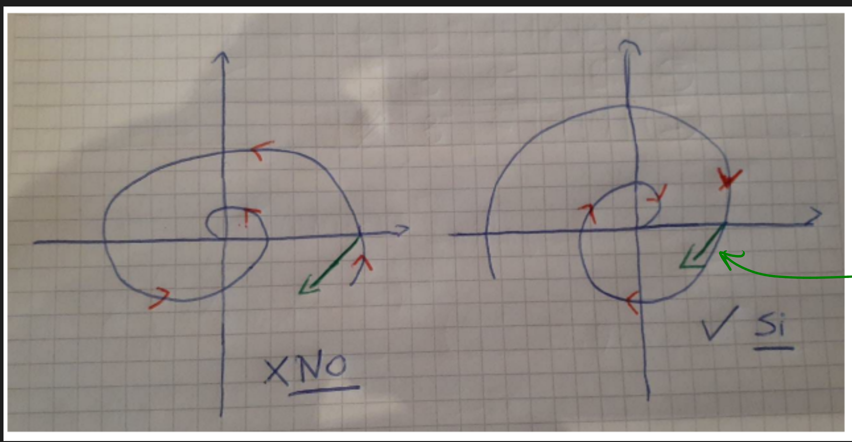
- b. Aplicando el teorema de linealización tenemos que el diagrama de fases del problema alrededor de $(0,0)$ es similar al diagrama de fases del problema $X' = DF(0,0)X$ alrededor de $(0,0)$. Por lo tanto, el diagrama alrededor de $(0,0)$ es similar a alguno de los siguientes diagramas.



Como $DF(0,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-1\\-1\end{pmatrix}$, tenemos que el diagrama es el siguiente.

¿ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ es el vector ?

Por qué?



$\begin{pmatrix}a-1\\-1\end{pmatrix}$

con $a<0$