

ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

Práctica 1: Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

1. CURVAS

Para Preguntar

Sean $C \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) una curva simple abierta y $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una parametrización regular de C . Sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición π de $[a, b]$. Esto induce una partición \mathcal{P} de la curva C dada por los puntos $P_n = \sigma(t_n)$.

Podemos pensar a los puntos P_n como vértices de una poligonal. Cuantos más puntos tenga, más parecida será la poligonal a la curva C . La idea es que las longitudes de las poligonales tenderán a la longitud de C .

Si \mathcal{P}' es una partición más fina, es decir, si todos los puntos de \mathcal{P} están contenidos en \mathcal{P}' , la longitud $\mathcal{L}(\mathcal{P}')$ será mayor o igual a $\mathcal{L}(\mathcal{P})$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}') \geq \mathcal{L}(\mathcal{P}).$$

En efecto, si entre dos puntos consecutivos P_1 y P_2 de la partición \mathcal{P} tengo puntos S_1, S_2, \dots, S_k de la partición \mathcal{P}' , la longitud del segmento de extremos P_1 y P_2 verifica

$$\|P_1 - P_2\| \leq \|P_1 - S_1\| + \|S_1 - S_2\| + \dots + \|S_k - P_2\|$$

que es parte de la suma que da la longitud $\mathcal{L}(\mathcal{P}')$.

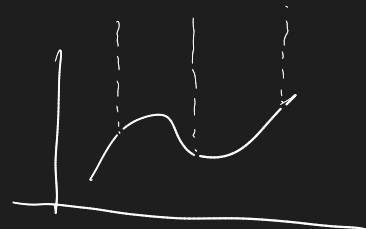
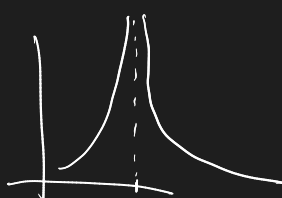
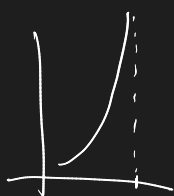
Definición

Si existe una cota superior finita para las longitudes de todas las poligonales con vértices en la curva C decimos que C es **rectificable** y definimos **la longitud de C** como la menor de esas cotas, es decir

$$\mathcal{L}(C) := \sup \{ \mathcal{L}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es una partición de } C \}.$$

Cuándo no existirá?

Supongo que cuando C se va a infinito



Pero por \mathcal{L}_H :

$\Rightarrow \mathcal{C}$ es suave ($\exists \sigma$ regular)
 σ es C^1 e injectiva

$\Rightarrow \forall t \in [a, b] \quad \exists \sigma(t) \in \mathcal{C}$
 \uparrow intervalo cerrado

\Rightarrow no puede tender a infinito

\Rightarrow Pregunta: ¿ Cuándo no es rectificable?

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_t \langle \vec{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt \\
&= \int_t \langle \lambda(t) \cdot \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt \\
&= \int_t \lambda(t) \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt \\
&= \int_t \lambda(t) \cdot \|\sigma'(t)\|^2 dt
\end{aligned}$$

Ejercicio 22. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) , a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

$$\text{Trabajo} = \int_{\ell \leftarrow \text{trayectoria}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot x, \dots, y, \dots, z \right)$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$f_x = -\frac{1}{z} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot \cancel{z}x$$

\Rightarrow Como $\mathbf{F} = \nabla f$, \mathbf{F} es C.C.

$$\therefore \int_{\ell} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(p_2) - f(p_1)$$

O sea, solo depende de $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y

$$p_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Pero como $f(x_1, y_1, z_1)$ se repite para distintos

valores de (x_i, y_i, z_i)

y como $f(x_1, y_1, z_1) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-1/2}$

$$y \quad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 > 0 \quad \forall x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow g(x, y, z) = \frac{1}{f(x, y, z)}$$

Llamo $R_1 = g(x_1, y_1, z_1)$

$$R_2 = g(x_2, y_2, z_2)$$

y así mostraré que el trabajo depende solo de R_1 y R_2 ,

que podemos pensar como el radio de una esfera,

pues raíz de una esfera, es una esfera de

radio $\sqrt{\Gamma_{\text{original}}}$.

