# Análisis II – Matemática 3
# Análisis Matemático II

Leandro M. Del Pezzo
ldpezzo@dm.uba.ar

Teóricas– Verano 2022

# Teorema de Stoke

# Teorema de Stoke
## Rotor

**Definición.**

Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. El *rotor de F* es el campo vectorial definido como

$$\operatorname{rot}(F) := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

# Teorema de Stoke

## Rotor

Una forma fácil calcular el rotor es mediante determinantes ya que

$$\mathrm{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Si notamos por $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ entonces

$$\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F$$

donde $\times$ denota el producto vectorial de $\mathbb{R}^3$.

# Teorema de Stoke

## Rotor

Comentario: Si $F(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$ entonces

$$\mathrm{rot}(F) := \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

**Teorema (Forma vectorial del Teorema de Green).**

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea $F = (P, Q, 0)$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$. Entonces

$$\iint_D \mathrm{rot}(F) dS = \iint_D \nabla \times F \cdot (0,0,1) dS = \int_{\partial D^+} (P, Q) d\sigma.$$

# Teorema de Stoke

## Orientación del borde se una superficie

Orientemos el borde de una superficie de $\mathbb{R}^3$. Al tener 3 dimensiones, la idea que usábamos en $\mathbb{R}^2$ de "caminando por el borde de la superficie, la dejamos a nuestra izquierda" depende ahora de "hacia dónde apunta nuestra cabeza".

# Teorema de Stoke

## Orientación del borde se una superficie

Vamos a considerar que si $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada con una cierta normal $\eta$, entonces la orientación positiva del borde $\partial\mathcal{S}$, que vamos a notar por $\partial\mathcal{S}^+$, es aquella que se obtiene si al caminar por $\partial\mathcal{S}$ con la cabeza apuntando en el mismo sentido que la normal $\eta$, dejamos la superficie $\mathcal{S}$ a nuestra izquierda.

# Teorema de Stoke

## Orientación del borde se una superficie

En términos de parametrizaciones: Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Consideremos la orientación que $T$ induce en $\mathcal{S}$ con su normal $\eta_T$. Supongamos además que $D$ es una región donde vale el Teorema de Green y que $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización regular a trozos de $\partial D^+$, es decir, con orientación positiva.
Luego, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma := T \circ \sigma$$

es una parametrización regular a trozos de $\partial \mathcal{S}$. Lo importante de esta parametrización es que da la orientación correcta a $\partial \mathcal{S}$. Es decir, $\gamma$ parametriza $\partial \mathcal{S}^+$, dándole la orientación positiva compatible con $\eta_T$.

# Teorema de Stoke

**Teorema.**

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$ donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región donde vale el Teorema de Green. Supongamos que $T$ es de clase $C^2$ y que $\partial S^+$ es la orientación del borde de $\mathcal{S}$ dada por $T(\partial D^+)$ que describimos arriba.
Si $F$ es un campo de clase $C^1$ definido en $\mathcal{S}$, entonces

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}(\mathbf{F}) dS = \iint_{\mathcal{S}} \langle \nabla \times \mathbf{F}, n \rangle \, dS = \int_{\partial \mathcal{S}^+} \mathbf{F} d\sigma.$$

# Teorema de Stoke
## Ejemplo

Ejemplo

*Calcular*

$$\int_{\mathcal{C}} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

*donde*

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x + y + z = 1\}$$

*orientada en el sentido contrario a la agujas del reloj en el plano $xy$.*

# Interpretación física del rotor

# Campos Conservativos

# Campos Conservativos

## Repaso

Un campo $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es un campo gradiente si existe $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que

$$F = \nabla f.$$

Vimos que si $F$ es un campo gradiente ($F = \nabla f$) y $\mathcal{C}$ es una curva orientada que empieza en un punto $p$ y termina en un punto $q$, etonces

$$\int_C F\, d\sigma = f(q) - f(p).$$

Además, si $F \in C^1$, tenemos que $\operatorname{rot}(F) = 0$.

# Campos Conservativos

## Teorema de Campos Conservativos

Sea $F$ un campo vectorial $C^1$ en $\mathbb{R}^3$ excepto tal vez en un número finito de puntos. Entonces la siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para cualquier curva cerrada simple y suave a trozos $\mathcal{C}$ se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\sigma = 0.$$

(ii) Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, con los mismos extremos y la misma orientación se tiene

$$\int_{\mathcal{C}_1} F\, d\sigma = \int_{\mathcal{C}_2} F\, d\sigma.$$

(iii) $F$ es el gradiente de una función $f$, es decir $F = \nabla F$ (Si $F$ tiene problemas en uno o mas puntos excepcionales donde no se puede definir, entonces $f$ tampoco estara definida en e ste o estos puntos).

(iv) $\nabla \times F = 0$

# Campos Conservativos

## Teorema de Campos Conservativos

**Definición.**

Un campo vectorial $C^1$ que staisface una de las cuatro condiciones del teorema anterior se denomina campo vectorial conservativo.

Comentario: En el plano el teorema también vale pero los puntos expcionales no están permitidos.

# Campos Conservativos
## Ejemplo

Ejemplo

*Consideremos*

$$F(x, y, z) = (y, x + z\cos(yz), y\cos(yz) + 2z)$$

*¿Existe una* $f$ *tal que* $\nabla f = F$*?*