RESOLUCIÓN DEL 1^{ER} PARCIAL

Ejercicio 1. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz) + y, xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(t) = \left(t, 3t^2 - 2t, \frac{1}{\ln 7} \ln\left(1 + 6t^8\right)\right).$$

¿POR DEFINICIÓN?

$$\int_C F = \int_0^1 e^{\overbrace{t}^{x}\overbrace{\frac{1}{\ln 7}\ln(1+6t^8)}^{z}}\left(\overbrace{t}^{x}\overbrace{(3t^2-2t)}^{y}\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{\ln 7}\ln(1+t^8)\right)}^{z}{}^2 + \dots\right)dt$$

$\rightsquigarrow$ INVIABLE.

CALCULAMOS:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^{xy}(xyz^2+yz)+y & xze^{xz} & e^{xz}(x^2yz+xy) \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, -1)$$

$\rightsquigarrow$ SI ESCRIBIMOS $F = G + H$, CON $H(x,y,z) = (y,0,0)$, SE TIENE QUE $\text{rot}\, G = 0$

¿¿ $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$?? $(\exists g)\ \nabla g = G$

(TAMBIÉN: $\int_C G = \int_{\tilde{C}} G$)

$$\rightsquigarrow \int_C F = \underbrace{\int_C \nabla g}_{\text{I}} + \underbrace{\int_C H}_{\text{II}}$$

¡AMBAS VIABLES!

I. $\int_C \nabla g \overset{TFC}{=} \underbrace{g(\sigma(1))}_{\text{PUNTO FINAL}} - \underbrace{g(\sigma(0))}_{\text{PUNTO INICIAL}}$

$= g(1,1,1) - g(0,0,0)$

$\rightsquigarrow$ BASTA CON OBTENER g. QUEREMOS:

$$\begin{cases} \partial g/\partial x = e^{xz}(xyz^2+yz) & (1) \\ \partial g/\partial y = xze^{xz} \xrightarrow[\text{FÁCIL}]{} g = yxze^{xz} + C(x,z) \\ \partial g/\partial z = e^{xz}(x^2yz+xy) & (3) \end{cases}$$

ASÍ,

(1) VALE (CUENTA) SII $\partial C(x,z)/\partial x = 0$

$\rightsquigarrow C(x,z) = C(z)$

(2) VALE (CUENTA) SII $\partial C(z)/\partial z = 0$

$\rightsquigarrow C(z) = C$

$\therefore$ PODEMOS TOMAR $g(x,y,z) = yxze^{xz}$;

ASÍ, $\int_C \nabla g = e - 0 = e$

II. AHORA SÍ POR DEFINICIÓN,

$$\int_C H = \int_0^1 \underbrace{(3t^2-2t,0,0)}_{H(\sigma(t))} \cdot \underbrace{(1,*,*)}_{\sigma'(t)} dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 - 2t \, dt = 1 - 1 = 0$$

CONCLUSIÓN: $\int_C F = e + 0 = e$

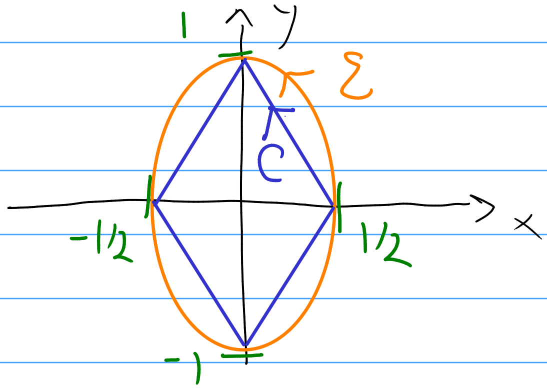
Ejercicio 2. Sean $\mathcal{C}$ la curva poligonal cerrada de vértices $(0,1), (0,-1), (1/2,0)$ y $(-1/2,0)$ y $\mathcal{E}$ la elipse $4x^2 + y^2 = 1$, ambas orientadas positivamente. Sean

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{4x^2+y^2}(-y,x), \quad \mathbf{G}(x,y) = \left(x, y\sqrt{4x^2+y^2}\right).$$

(a) Hallar $\int_{\mathcal{E}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

(b) Hallar $\int_{\mathcal{E}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$ y $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}$.

Sugerencia: integrar una función impar con respecto a x sobre un dominio simétrico con respecto a x da 0.



OJO: SI BIEN LOS CAMPOS SON CONT. SOBRE LAS CURVAS,

- $F = (-y, x) / 4x^2+y^2$ NO ESTÁ DEF EN $(0,0)$

DE HECHO, NI SIQUIERA SE PUEDE EXTENDER DE MANERA CONTINUA

- $G = \left(x, y\sqrt{4x^2+y^2}\right)$ NO TIENE POR QUÉ SER C^1 EN $(0,0)$ (LO ES, PERO PROBARLO LLEVA TRABAJO)

EJEMPLO: $g(t) = \sqrt{t^2}$ NO ES DERIV. EN 0

BUENA NOTICIA: SI $(x,y) \in \mathcal{E}$, ENTONCES

$$F(x,y) = (-y, x), \quad G(x,y) = (x,y)$$

$\rightsquigarrow$ EXPRESIONES MANEJABLES

(a) POR DEFINICIÓN. PARAMETRIZAMOS $\mathcal{E}$ POR

$$\sigma(t) = (1/2 \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$\rightsquigarrow$ DA LA ORIENT. CORRECTA

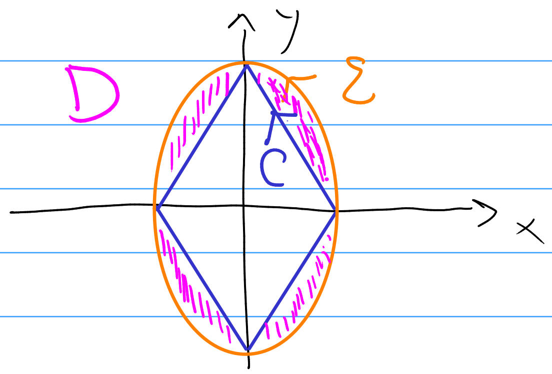
ASÍ,
$$\int_{\mathcal{E}} F = \int_0^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, 1/2 \cos t) \cdot (-1/2 \operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$
$$= 1/2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\, dt = \boxed{\pi}$$

(b) TAMBIÉN POR DEFINICIÓN, USANDO LA MISMA PARAMETRIZACIÓN,

$$\int_{\mathcal{E}} G = \int_0^{2\pi} (1/2 \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-1/2 \operatorname{sen} t, \cos t)\, dt$$
$$= 3/4 \int_0^{2\pi} \cos t \operatorname{sen} t\, dt = 3/4 \left. \operatorname{sen}^2(t)/2 \right|_0^{2\pi} = \boxed{0}$$

CALCULEMOS $\int_C G$.

- ¿POR DEFINICIÓN?
  - → INVOLUCRA CALCULAR CUATRO INTEGRALES
  - → INTEGRAR EXPRESIONES CON $\sqrt{}$
- ¿GREEN "HACIA ADENTRO"?
  - → REQUIERE PROBAR QUE G ES C^1 EN $(0,0)$
- GREEN HACIA AFUERA:



PARA GREEN, C LLEVA ORIENT. HORARIA

D ES UNIÓN DE REGIONES DE TIPO III

$$\int_\varepsilon G - \int_C G \overset{\text{GREEN}}{=} \iint_D Q_x - P_y$$

$$= 4\iint_D \underbrace{xy/\sqrt{4x^2-y^2}}_{=g}\,dx\,dy = \boxed{0},$$

PUES D ES SIMÉTRICA CON RESP A x, y $g(-x,y) = -g(x,y)$ (i.e., g ES IMPAR CON RESP A x)

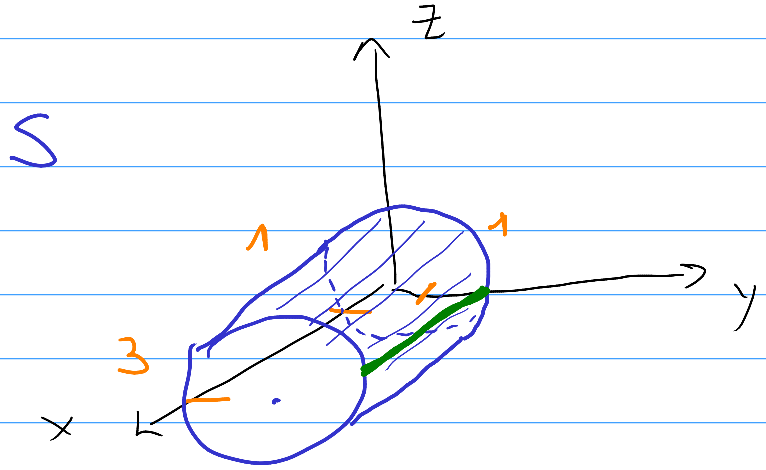
CONCLUSIÓN: $\int_C G = \int_\varepsilon G - \iint_D Q_x - P_y = 0 - 0 = \boxed{0}$

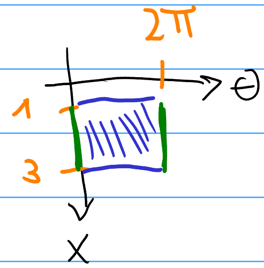
Ejercicio 3. Consideremos el cilindro

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (y-1)^2 + z^2 = 4,\, 1 \le x \le 3\}.$$

(a) Probar que S es orientable. ¿Cuántas orientaciones posibles admite?

(b) Para cada orientación posible, dar una parametrización del borde de S tal que se satisfaga la hipótesis del teorema de Stokes.





(a) PODEMOS PARAMETRIZAR S CON

$$\Phi : [1,3] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(x,\theta) = (x,\, 1 + 2\cos\theta,\, 2\sin\theta)$$

$$= \underbrace{(x,0,0)}_{\text{PROFUNDIDAD DEL CILINDRO}} + \underbrace{(0,1,0)}_{\text{CENTRADO DE LA CIRC}} + \underbrace{2(0,\cos\theta,\sin\theta)}_{\text{CIRC DE RADIO 2 EN EL PLANO YZ}}$$

OJO: Φ ES PARAM C^1, PERO NO ES INY: $\Rightarrow$ NO ES REGULAR

$$\Phi(x,0) = \Phi(x,2\pi) = (x,3,0) \quad \forall x \qquad (*)$$

(Y NO HACE OTRAS IDENTIFICACIONES)

CALCULEMOS:

$$\Phi_x = (1,0,0) \qquad \Phi_\theta = (0, -2\sin\theta, 2\cos\theta)$$

$$\rightsquigarrow \Phi_x \times \Phi_\theta = (0, -2\cos\theta, -2\sin\theta) \quad (\neq 0)$$

PODEMOS DEFINIR

¡UNITARIO!

$$\eta(P) = (0, -\cos\theta, -\sin\theta),$$

PARA $P = \Phi(x,\theta)$. $\longrightarrow$ DEPENDE DE LOS PARÁMETROS (x,θ)

HAY QUE TENER (*) EN CUENTA: SEA

$$P = (x,1,0) = \Phi(x,0) = \Phi(x,2\pi)$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{(0, -\cos 0, -\sin 0)}_{\eta(P),\text{ SEGÚN LAS COORD } (x,0)} = \underbrace{(0, \cos 2\pi, \sin 2\pi)}_{\eta(P),\text{ SEGÚN LAS COORD } (x,2\pi)}$$

∴ η ESTÁ BIEN DEF EN LOS PUNTOS QUE Φ IDENTIFICA; ES CONTINUA PUES cos Y sen LO SON.

CONCLUSIÓN: S ES ORIENTABLE.

ADMITE DOS ORIENTACIONES: η, Y ν DADA POR $\nu(P) = -\eta(P)$

(b) ∂S CONSTA DE LAS CIRCUNF

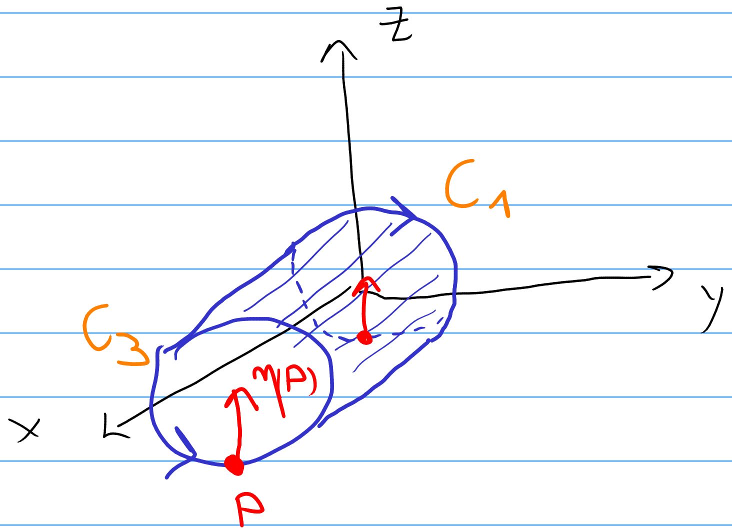
$$C_1: \quad x = 1, \quad (y-1)^2 + z^2 = 4$$

$$C_3: \quad x = 3, \quad (y-1)^2 + z^2 = 4$$

¿η ES LA INTERNA O LA EXTERNA?

PARA $P = (3,-2,0) = \Phi(3,\pi)$, TENEMOS

$$\eta(P) = (0,1,0)$$



$\therefore$ ES LA ORIENT. INTERNA POR LO QUE, PARA QUE VALGA STOKES, HAY QUE ORIENTAR:

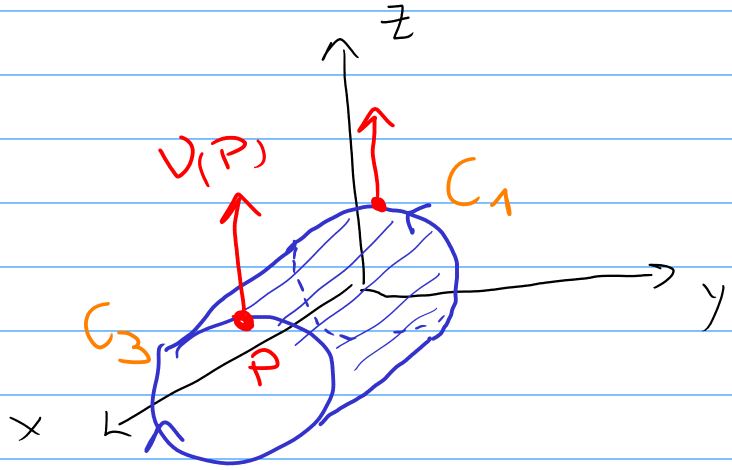
C_1: HORARIO, POR EJ CON

$$t \longmapsto (1, 1 + 2\cos t, -2\sin t)$$

C_3: ANTIHORARIO, POR EJ CON

$$t \longmapsto (3,\ 1+2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t) \quad ;$$

PARA LA ORIENTACIÓN ν (EXTERNA), HAY QUE ORIENTAR:



C_4: ANTIHORARIO, POR EJ CON

$$t \longmapsto (1,\ 1+2\cos t,\ 2\,\text{sen}\, t)$$

C_3: HORARIO, POR EJ CON

$$t \longmapsto (3,\ 1+2\cos t,\ -2\,\text{sen}\, t)$$

Ejercicio 4. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, y sea $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f > 0$ en el interior de D y $f = 0$ en el borde de D. Para cada $t \in [0,1]$ consideremos la superficie S_t parametrizada regularmente por

$$T_t : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad T_t(u,v) = (u, v, t \cdot f(u,v))\,.$$

Orientemos estas superficies con la normal que apunta hacia arriba. Probar que

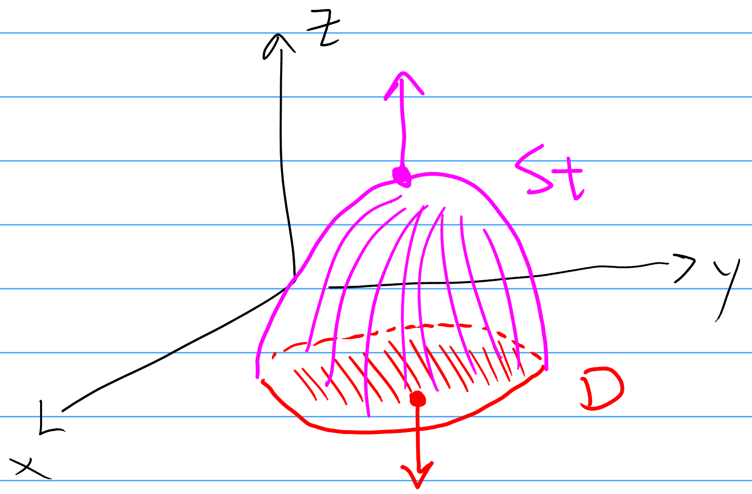
$$\iint_{S_t} (2x, 3y, -5z+5)\, dS = 5 \cdot \text{Área}(D)$$

para cualquier $t \in [0,1]$.

OBS: S_t ES EL GRÁFICO DE

$$f_t : D \to \mathbb{R}, \quad f_t(u,v) = t f(u,v)$$

"EL FACTOR $t \in [0,1]$ APLASTA EL GRÁFICO DE f"



S_t Y $S_0 = D \times \{0\}$ ENCIERRAN UNA REGIÓN Ω DE TIPO I (PUES $f \geq 0$)

SEA $F = (2x, 3y, 5-5z) \rightsquigarrow \operatorname{div} F = 0$

SI ORIENTAMOS S_t HACIA ARRIBA Y S_0 HACIA ABAJO, ENTONCES

$$\iint_{S_t} F + \iint_{S_0} F \overset{\text{GAUSS}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F = 0$$

ORIENTACIÓN EXTERNA DE $\partial\Omega$

ie, $\iint_{S_t} F = -\iint_{S_0} F$

AHORA, $\underbrace{\eta(P)}_{\text{NORMAL EXTERIOR UNIT}} = (0,0,-1) \quad \forall P \in S_0$;

ADEMÁS, $F(x,y,z) = (*,*,5)$ EN S_0

$$\therefore -\iint_{S_0} F \underset{\text{PARAM: } T_0}{=} -\iint_D (*,*,5)\cdot(0,0,-1)\,du\,dv$$

$$= 5\iint_D 1\,du\,dv = 5 \cdot \text{ÁREA}(D)$$