Examen FINAL

Análisis II - Matemática 3 - 3 de Agosto de 2021

Nombre: **L. U.:** **Carrera:**

---

1. Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, 1 \leq x \leq 4\}$.

   a) Probar que S es una superficie orientable. ¿Cuántas orientaciones distintas tiene?

   b) Supongamos que S está orientada con la normal apuntando en la dirección del vector $(-1, 4, 0)$ en el punto $(4, 2, 0)$. Hallar un campo vectorial $F(x, y, z)$ que cumpla las siguientes 2 condiciones:

   1) $\operatorname{div}(F)(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \in S$;
   2) $\int_S F \cdot d\mathbf{S} = 1$.

2. Considerar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 dado por

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

   a) Calcular $Q_x(x, y) - P_y(x, y)$

   b) ¿Es F un campo conservativo?

   c) Calcular $\int_C F.d\mathbf{s}$ donde C es la circunferencia unitaria centrada en el origen con radio 7.

   d) Probar que para toda curva cerrada C con $(0, 0) \notin Int(C)$ se tiene

$$\int_C F.\, d\mathbf{s} = 0, \qquad \text{pero} \qquad \int_C F.\, d\mathbf{s} \neq 0,$$

   si $(0, 0) \in Int(C)$. Revisar la respuesta dada en *b*).

3. Considerar la ecuación $X'(t) = AX(t)$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

   a) Hallar, si existen, todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones verifiquen que $X(t) \to \overrightarrow{0}$ cuando $t \to +\infty$.

   b) Hallar, si existen, todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que hay una solución $X(t) \neq 0$ tal que $X(t) \to \overrightarrow{0}$ cuando $t \to +\infty$ y otra $Y(t)$ tal que $Y(t) \not\to \overrightarrow{0}$ cuando $t \to +\infty$.

   c) Hallar, si existen, todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones $X(t)$ estén acotadas.

4. Hallar un $a \in \mathbb{R}$ tal que la función $x(t) = e^{2t}$ sea una solución de la ecuación

$$ax''(t) + 2x'(t) + x(t) = 9e^{2t}.$$

   Para el valor de a hallado, encontrar además la solución de la ecuación que verifica

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0.$$

   ¿Hay alguna solución tal que $x(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$? Si la hubiera, calcularlas todas.

Justifique todas sus respuestas