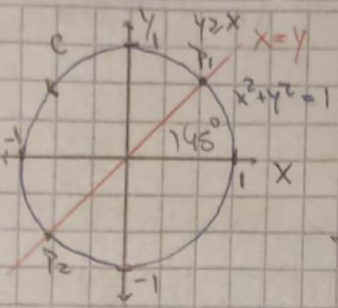
Elian Vetubey
L.U. 074/21
Lic. en Ciencias Físicas

HOJA N° 1

FECHA

1)



$P_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$

$P_2 = -P_1$

Puedo parametrizar a C por $\sigma(t) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $45° \leq \theta \leq 225°$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

Puedo pensar a $\vec{F}$ como 2 campos sumados:

$$\vec{F}(x,y) = \underbrace{\left(x^2 e^{x^3-y^3}, -y^2 e^{x^3-y^3}\right)}_{\vec{G}(x,y)} + \underbrace{(-2y, y^2)}_{\vec{H}(x,y)}$$

donde $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid \phi(x,y) = \frac{1}{3}e^{x^3-y^3}$ es tal que $\nabla\phi = \vec{G}(x,y)$.

Luego, $\int_C \vec{F}\cdot ds = \int_C (\vec{G}+\vec{H})\cdot ds = \int_C \nabla\phi\cdot ds + \int_C \vec{H}\cdot ds$

- $$\int_C \nabla\phi\cdot ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \nabla\phi(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial t}(\phi(\sigma(t)))\,dt = \phi(\sigma(\tfrac{5\pi}{4})) - \phi(\sigma(\tfrac{\pi}{4})) =$$

$$= \phi\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}; -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \phi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}} - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}e^0 - \frac{1}{3}e^0 = \underline{\underline{0}}$$

- $\int_C \vec{H}\cdot ds \longrightarrow$ como $\vec{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, puedo "cerrar" la curva y usar Green.

¿Y si no uso Green? $\sigma(t) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$\Rightarrow \int_C \vec{H}\cdot ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-2\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}^2\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

y, usando que $2\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos(2\theta)$, la integral queda

$t = \operatorname{sen}\theta$

$dt = \cos\theta\,d\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 1-\cos(2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\theta) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \left[\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] - \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\,dt = \pi - \frac{1}{2}\left[1-1\right] + \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \pi + \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \underline{\underline{\pi - \frac{\sqrt{2}}{6}}}$$

Luego, $\int_C \vec{F}\cdot ds = \pi - \frac{\sqrt{2}}{6}$

NOTA

Por las dudas, demuestro (de vuelta) el resultado que usé:

$$\int_C \nabla\varphi \cdot ds = \int_a^b \nabla\varphi(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(\sigma(t)))\, dt = \Big[\varphi(\sigma(t))\Big]_a^b =$$

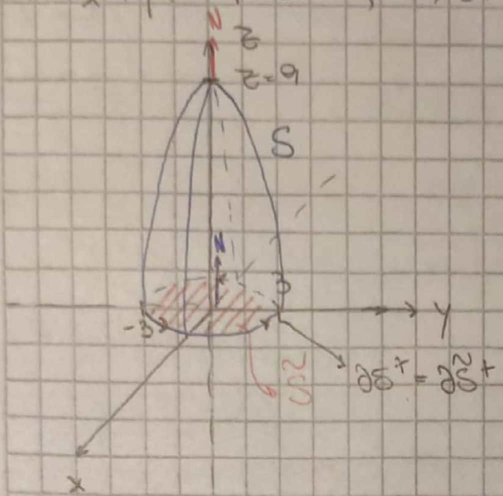
$$= \varphi(\sigma(b)) - \varphi(\sigma(a))$$

donde $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\sigma(t): [a,b] \to C$ parametriza C y es una parametrización regular.

NOTA

Brian Urtubey
L.U.: 274/21
Lic. en Ciencias Físicas

2) $x^2+y^2=9-z$, $z\geq 0$.



¿cómo es $\nabla\times(F+G)$?

$$\nabla\times(F+G)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_1+G_1 & F_2+G_2 & F_3+G_3\end{vmatrix}=$$

$$=\Big(F_{3y}+G_{3y}-F_{2z}-G_{2z},\ F_{1z}+G_{1z}-F_{3x}-G_{3x},\ \underbrace{F_{2x}+G_{2x}-F_{1y}-G_{1y}}_{\text{lo puedo saber}}\Big)$$

Me conviene integrar sobre una superficie cuya normal sea (0,0,algo).

Como $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son C^1 en $\mathbb{R}^3$, puedo usar Stokes:

$$\iint_S \nabla\times(\vec{F}+\vec{G})\cdot dS=\int_{\partial S^+}(\vec{F}+\vec{G})\cdot ds=\int_{\partial\tilde{S}^+}(\vec{F}+\vec{G})\cdot ds=\iint_{\tilde{S}}\nabla\times(\vec{F}+\vec{G})\cdot dS$$

donde, para preservar la orientación, $\tilde{S}$ debe tener la normal con $z\geq 0$.

$\tilde{S}$ se parametriza por $T(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 0)$ $0\leq r\leq 3$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

y la normal es $T_r\times T_\theta=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0\\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=(0,0,r)=N$

donde, como $0\leq r\leq 3$, N es la normal con $z\geq 0$ que quería.

Luego, $$\iint_{\tilde{S}}\nabla\times(\vec{F}+\vec{G})\cdot dS=\int_0^{2\pi}\int_0^3\Big(---,---,\overbrace{F_{2x}}^{x+y}+\overbrace{G_{2x}}^{1}-\overbrace{F_{1y}}^{y+1}-\overbrace{G_{1y}}^{-1}\Big)\circ T(r,\theta)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3\Big([x+\cancel{y}+\cancel{1}-\cancel{y}-\cancel{1}+1]\circ T(r,\theta)\Big)\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\cos\theta+r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big[\tfrac{1}{3}r^3\cos\theta+\tfrac{1}{2}r^2\Big]_{r=0}^{r=3}d\theta=\int_0^{2\pi}9\cos\theta+\tfrac{9}{2}\,d\theta=\underbrace{\Big[9\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{2\pi}}_{=0}+\tfrac{9}{2}(2\pi-0)=\underline{\underline{9\pi}}$$

Luego, $$\iint_S\nabla\times(\vec{F}+\vec{G})\cdot dS=9\pi$$

Zhion Urtubey
L.U.: 274/21
Lic. en Ciencias Físicas

3) $\begin{cases} x' = xy + x \\ y' = 6y + 2xy - 2y^2 \end{cases}$ es de la forma $X' = \vec{F}(X)$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\vec{F}(X) = \vec{F}(x,y) = (xy + x\ ,\ 6y + 2xy - 2y^2)$

Los puntos de equilibrio son tales que $\vec{F}(x,y) = 0$:

$\begin{cases} 0 = xy + x \\ 0 = 6y + 2xy - 2y^2 \end{cases} \longrightarrow$ si $x = 0$, $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6y - 2y^2 = y(6-2y) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ y = 3 \end{matrix}$

$\rightarrow (0,0)$ y $(0,3)$ son puntos críticos.

si $y = 0$, $\begin{cases} 0 = x \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ es punto crítico

si $x, y \neq 0$,

$\begin{cases} 0 = \cancel{x}y + \cancel{x} \\ 0 = 6\cancel{y} + 2x\cancel{y} - 2y^{\cancel{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = y + 1 \\ 0 = 6 + 2x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = y - 3 \end{cases} \Rightarrow (-4,-1)$ es punto crítico.

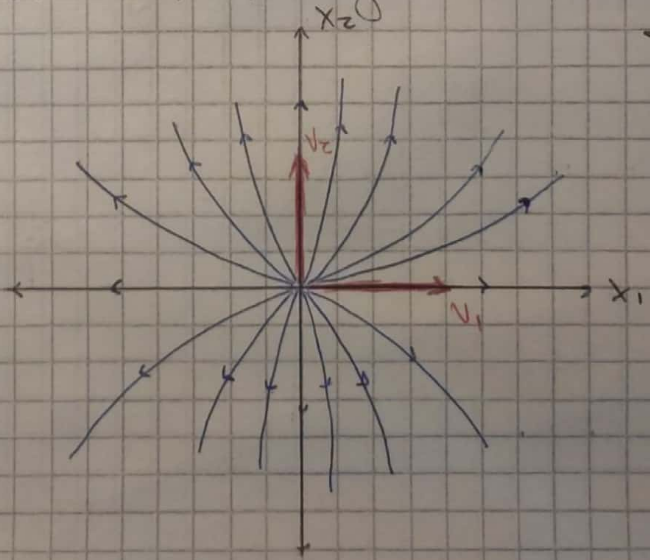
Luego, los puntos de equilibrio son $P_0 = (0,0)$, $P_3 = (0,3)$ y $P_- = (-4,-1)$

Para analizar la estabilidad, utilizo el Teorema de Estabilidad Lineal o de Linealización que dice que $X' = \vec{F}(X)$ es "muy similar" a $Y' = DF(P)\,Y$ cerca de los puntos de equilibrio P si $DF(P)$ no tiene autovalores con parte real nula.

$DF(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 & x \\ 2y & 6+2x-4y \end{pmatrix}$

- $DF(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ los autovalores son $\overbrace{1}^{\lambda_1}$ y $\overbrace{6}^{\lambda_2}$, los autovectores son $\underbrace{(1,0)}_{v_1}$ y $\underbrace{(0,1)}_{v_2}$ respectivamente. $\rightarrow$ como son $\neq 0$, vale el teorema.

Como ambos autovalores son reales y mayores a 0, el equilibrio es inestable. En torno a P_0, el diagrama de fases es



Donde $x_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$ y $x_2 = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$ y la sol. general es $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$

NOTA

$\bullet DF(P_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

como son $\neq 0$, vale el teorema

$\det(DF(P_3) - \lambda \mathbb{I}d) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 6 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+6) \Rightarrow \lambda_1 = 4 \; ; \; \lambda_2 = -6$

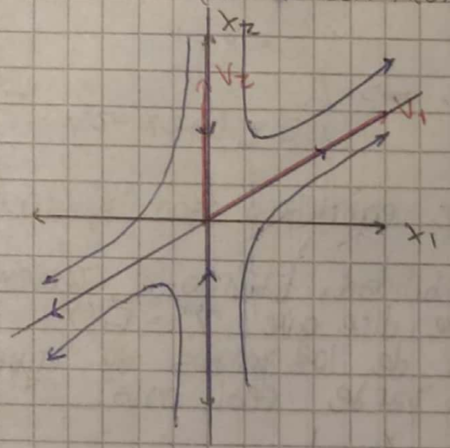
Como los autovalores son reales y de distinto signo, el equilibrio es inestable. Busco autovectores para el diagrama de fases:

$DF(P_3) \cdot V_1 = \lambda_1 V_1 \iff \begin{pmatrix} 4a \\ 6a - 6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix} \Rightarrow 6a = 10b \Rightarrow b = \frac{3}{5} a$

$\Rightarrow V_1 = (1, \frac{3}{5}) = (5, 3)$

$DF(P_3) \cdot V_2 = \lambda_2 V_2 \iff \begin{pmatrix} 4a \\ 6a - 6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6a \\ -6b \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow V_2 = (0, 1)$

Luego, el diagrama de fases es (con la sol. $X(t) = \underbrace{X_1(t)}_{c_1 V_1 e^{\lambda_1 t}} + \underbrace{X_2(t)}_{c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}}$)



$\bullet DF(P_-) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(DF(P_-) - \lambda \mathbb{I}d) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = -2$ $\longrightarrow$ como son $\neq 0$, vale el teorema

Como los autovalores son reales con distinto signo, el equilibrio es inestable.