**FINAL M3**



1 – (a) Enuncie y demuestre el teorema de Green para una región elemental de tipo III

OBS: Una región de tipo III se puede describir como una región de tipo II y I simultaneamente.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ es de tipo I si

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b , \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}$$

- $D \subset \mathbb{R}^2$ es de tipo II si

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : c \leq y \leq d , \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y)\}$$

TEOREMA DE GREEN:

Hipótesis

- sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano, simple y suave a trozos que encierra a una región de tipo III
- sea $\bar{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial $C^1$ definido en un abierto $\Omega$, tal que $D \subset \Omega$.

$$\Longrightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{\sigma} = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy.$$

$\mathcal{C}^+ \downarrow$ $\mathcal{C}$ recorrida de forma positiva (antihoraria)

Demostración:

IDEA: como $\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{F} \cdot d\bar{\sigma} = \oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy$,
me alcanza con probar las siguientes igualdades:

$$\rightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} P \, dx = -\iint P_y \, dx\,dy$$

$$\rightarrow \oint_{\mathcal{C}^+} Q \, dy = \iint Q_x \, dx\,dy.$$

Hay dos lemas que me aseguran que son ciertas para regiones de tipo III así que demostrandolos termino esta demostración

**LEMA 1:** sea $\mathcal{C}$ una curva que encierra a una región de tipo I y $\bar{F} = (P,0)$ un campo de clase $C^1$ sobre esta región $D$. Entonces

$$\oint_{\mathcal{C}^+} \underbrace{(P,0)\cdot(dx,dy)}_{= P\,dx} = -\iint_D P_y \, dx\, dy.$$

**Demostración:**

1 – Desarrollo la integral doble sobre $D$.
Como $\bar{F}$ es $C^1$, $P$ es $C^1 \rightarrow P_y$ es continua y puedo aplicar Fubini.

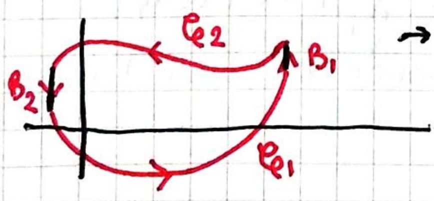
$$-\iint_D P_y \, dx\, dy = -\iint_D P_y \, dy\, dx \qquad \text{(uso que } D \text{ es de tipo I)}$$

$$= -\int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} P_y(x,y)\, dy\, dx \qquad \text{(uso el teorema fundamental del cálculo)}$$

$$= -\int_a^b P(x,\Phi_2(x)) - P(x,\Phi_1(x)) \, dx$$

$$= \int_a^b P(x,\Phi_1(x)) - P(x,\Phi_2(x)) \, dx. \quad *$$

2 – Desarrollo la integral de circulación sobre $\mathcal{C}$




→ región de tipo I encerrada por $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup B_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup B_2^- .$$

Entonces, la integral sobre $\mathcal{C}^+$ es equivalente a

$$\oint_{\mathcal{C}^+} (P,0)\cdot(dx,dy) = \oint_{\mathcal{C}^+} P \, dx$$

estas no son integrales cerradas, la notación esta mal. (8)

$$= \oint_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx + \oint_{B_1^+} P\,dx + \oint_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx + \oint_{B_2^-} P\,dx$$

como las parametrizaciones de $B_1$ y $B_2$ no varían ~~con~~ en $x$, se anulan las integrales en $B_1$ y $B_2$, ~~[illegible] parametrización~~

VEMOS ESTO:

si $\beta$ es una parametrización que no varía en $x$, entonces

$$\beta = (cte\ ,\ f(t))$$

$$\beta' = (0\ ,\ f_x(t)) \Rightarrow dx = 0 \cdot dt = 0.$$

Por lo tanto, continuando el desarrollo de la integral,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx$$

Parametrizando $\mathcal{C}_1^+$ como $(x, \Phi_1(x))$, $x \in [a,b]$ y $\mathcal{C}_2^+$ como $(x, \Phi_2(x))$, obtengo que

$$\oint_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx - \int_{\mathcal{C}_2^+} P\,dx$$

como la parametrización invierte la orientación, cambia el signo.

$$= \int_a^b P(x, \Phi_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, \Phi_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, \Phi_1(x)) - P(x, \Phi_2(x))\,dx,$$

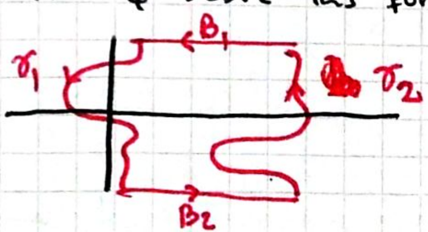
que es igual a la expresión $*$ a la cual habíamos llegado desarrollando la integral doble sobre D. ∎

Lema 1

LEMA 2: sea $\mathcal{C}$ una curva que encierra a una región de tipo II y $\bar{F} = (0, Q)$ un campo de clase $C^1$ sobre la región. Entonces,

$$\oint_{\mathcal{C}^+} (0, Q) \cdot d\bar{\sigma} = \iint_D Q\,dx\,dy.$$

Dem: su demostración es análoga a la del lema 1. Cambia el signo por la manera en la que se recorre $\mathcal{C}$ sobre las funciones $\gamma_1$ y $\gamma_2$




$\gamma_2$ se recorre positivamente y $\gamma_1$ negativamente (integral sobre $B_1$ y $B_2$) $= 0$

Antes: $\Phi_2$ se recorría negativamente y $\Phi_1$ positivamente.

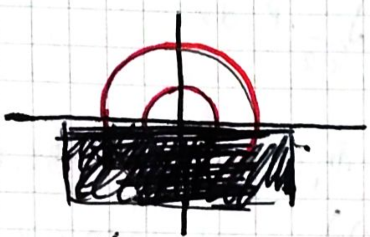
Con el Lema 1 y el Lema 2, queda comprobado el teorema de Green.

(b) Calcule la integral

$$\int_{\partial D} \left(\sin(x^2) - \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(\cos(y^3) + \frac{x^3}{3}\right) dy$$

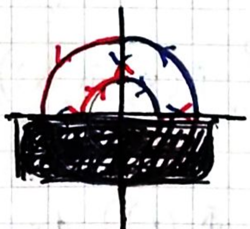
donde D es un anillo dado en coordenadas polares por $1 \leq \rho \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

¿ D es una región de tipo III ?



D no es una región de tipo III ya que no se puede expresar como una región de tipo II o I (no existen funciones $\gamma_1, \gamma_2$ que acoten $x$ en función de $y$).

Sin embargo, se puede aplicar el teorema de Green, ya que se puede aplicar sobre las siguientes regiones:



que si son de tipo III. Por lo tanto se puede aplicar el teorema de Green, si $\bar{F}$ es $C^1$

→ $\bar{F}$ es de clase $C^1$ en todo $\mathbb{R}^2$, ya que las funciones armónicas y los polinomios son de clase $C^1$ $\forall \mathbb{R}$.

Continuo aplicando el teorema de Green. La integral de circulación sobre $\partial D$ será igual a la integral sobre D del rotor de F.

calculo el rotor de F:

$$Q_x = \left(\cos(y^3) + \frac{x^3}{3}\right)_x = x^2$$

$$rot(F) = x^2 + y^2$$

$$P_y = \left(\sin(x^2) - \frac{y^3}{3}\right)_y = -y^2$$

Entonces

$$\iint_D Q_x - P_y \; dx\, dy = \iint_D x^2+y^2 \; dx\, dy$$

→ hago el cambio de variables a polares $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

El jacobiano de esta transformación es

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\det = \rho \;\to\; \|J\| = \rho} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\theta \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la integral queda

$$\int_0^{\pi} \int_1^{2} \rho^{\cancel{3}2} \cdot \rho \; d\rho\, d\theta$$

$$= \pi \cdot \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2$$

$$= \pi \cdot \left[ \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right] = \boxed{\frac{15\pi}{4}}$$

~~Por~~

En conclusión, la integral de circulación de la F dada sobre el borde del anillo es $15/4 \cdot \pi$.