Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Primer cuatrimestre de 2020

Práctica 4: Teoremas de Stokes y de Gauss - Campos conservativos - Aplicaciones

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0,$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 dadas por

$$\begin{aligned} S_1: &\qquad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ S_2: &\qquad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad z \geq 1, \end{aligned}$$

orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2\right)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 3.

(a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) Deducir que si S es una superficie cerrada[1], entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(c) Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

(a) S : círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
(b) S : región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de:
   i. el segmento que une los dos puntos.
   ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy\right)$

[1] Una superficie *cerrada* es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada

Ejercicio 7. Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

(a) $\mathbf{F} = \big(2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y\big)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $\big(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4\big)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $\mathbf{F} = \big(\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2, 0\big)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\big(e^t, e^{t+1}, 0\big)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x)\, dx + \left(\frac{3}{2} z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3\, dz,$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2\big)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 17 de la práctica 2 usando el teorema de Gauss.

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x + y + z)\, dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$ considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = \big(x^3, y^3, z^3\big)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,(2 - \cos(2\theta))\,, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

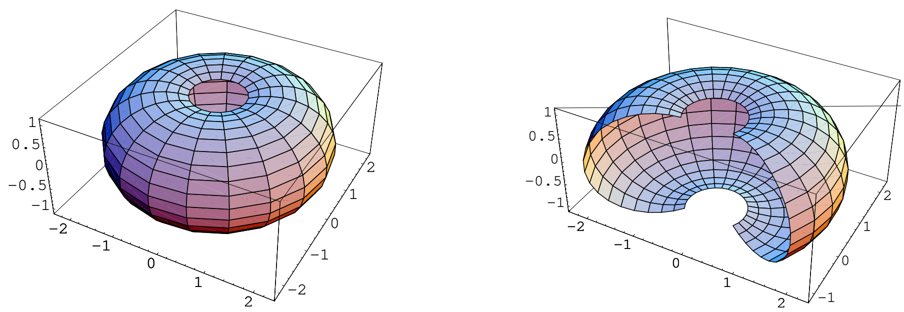


FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S; en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el flujo a través de S en el sentido “externo” del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,a^2-x^2-y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2+y^2 \le a^2$:

(a) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y+z=1$, de modo que la normal en el punto $(0,0,1)$ apunte en la dirección $(0,1,1)$.

(b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z=0$, de modo que la normal en el punto $(0,0,0)$ apunte en la dirección $(0,0,1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.

Ejercicio 17. Dada la función $f(z) = \frac{1}{2}ze^{2-2z}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \le z \le 1$.

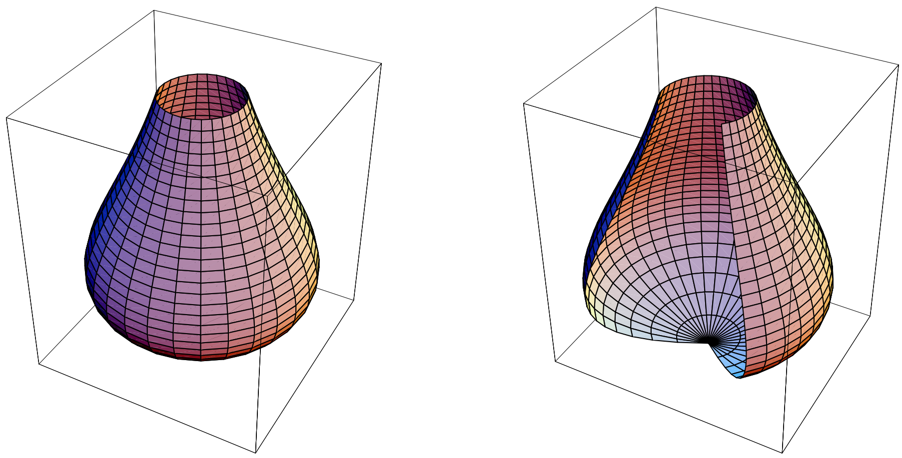


Figura 2

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right).$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Ejercicio 18. Se sabe que $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt,\\ G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt,\\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$?

Sugerencia: ver el ejercicio 13.

Ejercicio 19. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = (x,y,z)$.
(b) $\mathbf{F} = (x^2+1, x-2xy, y)$.

Ejercicio 20. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2\big).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.

Ejercicio 21. Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Ejercicio 22. Denotemos por $T(x, y, z, t)$ a la temperatura ambiente en el punto (x, y, z) en el instante t. La *Ley de Fourier* afirma que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$, donde K es la constante de conductividad térmica.

Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$ del espacio si la temperatura está dada por $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1.

Ejercicio 23. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy\, dz.$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u \in C^2(\Omega)$ el *laplaciano* de u es $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Ejercicio 24. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* del laplaciano Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \not\equiv 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω. En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ.

Utilizando las identidades de Green mostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f\, g\, dV = 0.$$

Es decir, f y g son *ortogonales*.

Ejercicio 25. Sea B una bola en $\mathbb{R}^3$. Ver que no puede haber una función $f \not\equiv 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \qquad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: utilizar las identidades de Green para deducir que $\nabla f = 0$ en B. A continuación utilizar el ejercicio 9 para deducir que f es constante.

Ejercicio 26. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \qquad \textit{(Ley de Faraday)}$$

donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es $\mathcal{C}$ y la circulación se da en el sentido de recorrido de $\mathcal{C}$ inducido por la normal elegida sobre S.

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: considerar un disco de radio r como superficie S. Aplicar el teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer r tender a 0 y posteriormente utilizar que el disco era arbitrario.

Ejercicio 27*. Sea ρ la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa ρ es $\rho_t = -\text{div}\,\big(\rho\mathbf{V}\big)$.

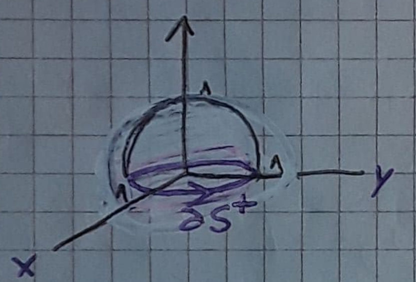
Práctica 4: Stokes.

Teorema de Stokes

1. F campo C^1 definido en S sup orientada.

$$\iint_S \underbrace{\nabla \times F}_{\text{rotor}} \, dS = \int_{\partial S^+} F \, ds$$

Las orientaciones deben coincidir.
"Camino con la cabeza apuntando para el mismo lado que la normal y S queda a mi izquierda".



Campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ z \geq 0 \}$

$\int_{\partial S^+} F \, ds$ El borde de S se puede parametrizar como $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

- recorre la curva en sentido antihorario ✓ • F es C^1 ✓
- $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$

$$\int_{\partial S^+} F \, ds = \int_{\partial S^+} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{-\operatorname{sen} t \cos t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + 0 \, dt = \boxed{0}$$

La integral sobre la curva da 0.

$$\iint_S \nabla \times F = \iint_D \nabla \times F\left(T(x,y)\right) \cdot T_x \times T_y \quad dx\,dy$$

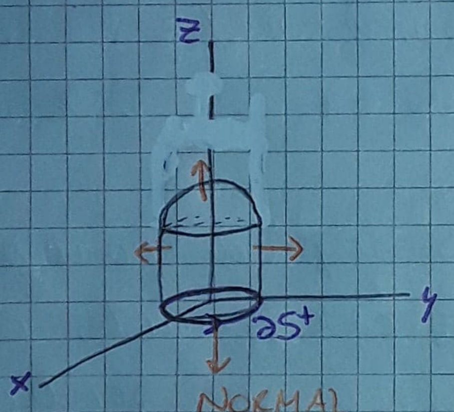
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)}$$

$$\nabla \times F = (0,0,0)$$

$\rightsquigarrow \int_{\partial S^+} F\,ds = \iint_S \nabla \times F = 0$ se cumple Stokes.

2.



$S = S_1 \cup S_2$

$S_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad 0 \leq z \leq 1$

Cilindro

$S_2 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad z \geq 1$

Esfera unitaria centrada en $(1,0,0)$

· S orientada con normal exterior.

$$F = \left(zx + z^2 y + x, \quad z^3 y x + y, \quad z^4 x^2\right)$$

$$\iint_S (\nabla \times F)\, ds$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^4 x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(zx + z^2 y + x), \frac{\partial}{\partial z}(zx + z^2 y + x) - \frac{\partial}{\partial x}(z^4 x^2), \frac{\partial}{\partial x}(z^3 y x + y) - \frac{\partial}{\partial y}(zx + z^2 y + x)\right)$$

$$\nabla \times F = \left(0 - x + 2zy,\ x + 2zy - z^4 2x,\ z^3 y - z^2\right)$$

Parametrizo S:

Despejo z de S_2

$$(z-1)^2 = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$\rightsquigarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 1$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad z = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ con } x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$T(x,y) = \left(x, y, 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\int_S \nabla \times F \, dS = \int_D \nabla \times F\left(T(x,y)\right) \cdot (T_x \times T_y) \, dx\, dy$$

$$T_x = (1, 0, ??) \quad T_y = (0, 1, ??)$$

Veamos si $\int_{\partial S^+} F\, ds$ es más fácil.

Como F es C^1 uso Stokes.

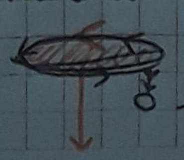
$$\iint_S \nabla \times F \, dS = \int_{\partial S^+} F \, ds$$

∂S^+ : parametrizo $x^2 + y^2 \leq 1$

$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ → todo lo que tenga z desaparece

• Respeta sentido antihorario ✓



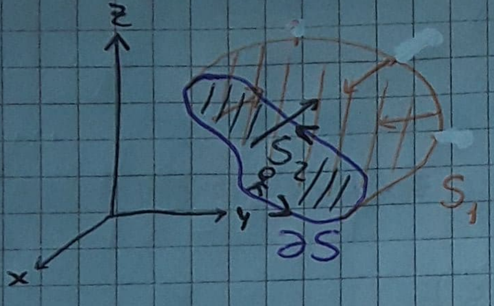
deja la sup a la izq.

$$\int_0^{2\pi} (0+0+\cos t,\ 0+\operatorname{sen} t,\ 0)(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \cdot \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t \ dt = \boxed{0}$$

$\overset{\text{stokes}}{\Longrightarrow} \int_{\partial S^+} F\, ds = \iint_S \nabla \times F \ ds = \boxed{0}$ → más fácil

3.



∂S está sobre un plano

S_2 es el relleno de ∂S sobre el plano

S_1 es la cosa que tiene como borde a ∂S

Cuando me pare en ∂S quiero dejar la sup a mi izquierda y para eso ambas sup deben tomar orientaciones que permitan que la cabeza de la persona apunte hacia el mismo lado (o sea si S_2 apunta para arriba, S_2 no puede apuntar para abajo).

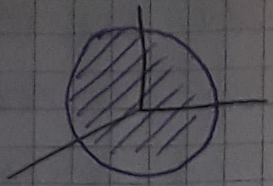
$\Rightarrow \int_{\partial S} F\, ds$ es la misma porque tienen el mismo borde con la misma orientación.

$$\int_{\partial S} F\, ds = \int_{S_1} \nabla \times F\, ds \qquad \text{stokes}$$

$$\int_{\partial S} F\, ds = \int_{S_2} \nabla \times F\, ds$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} \nabla \times F\, ds = \int_{S_2} \nabla \times F\, ds.$$

b.



La esfera no tiene borde porque es una superficie cerrada.

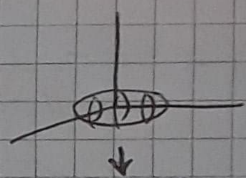
$$\Rightarrow \quad \partial S = 0$$

$$\int_S \nabla \times F \, dS = \int_{\underset{=0}{\partial S}} F \, dS = 0$$

c. $S = x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ Elipsoide

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{10} + \frac{\cancel{2}z^2}{\cancel{10}\,5} = \frac{10}{10}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$



$F = (\operatorname{sen} xy, e^x, -yz)$

Obs: El elipsoide es una superficie cerrada

$\rightarrow \int_{\partial S} F \, dS = 0$

y por stokes $\int_S \nabla \times F \, dS = 0$ ✓

4. $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$ clase C^1 ✓

$\downarrow$

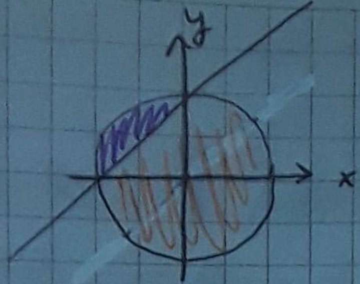
$x^2 + y^2 \neq 0$

a. S círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$

no vale stokes (ni Green) porque en el origen el campo F no está definido, mucho menos es C^1 en toda la región.

b. $z = 0$ entre $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

$z=0$



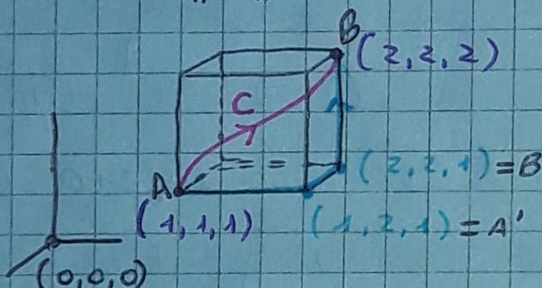
En [rayado naranja] no vale Stokes porque F no está definido en el origen. D tiene que ser una región donde vale Green para que valga Stokes (entre otras cosas).

En [rayado azul] está todo bien y vale Green y Stokes.

5.a. $F = -GmM \dfrac{x}{\|x\|^3}$ Campo gravitacional

$f(x) = \dfrac{1}{\|x\|}$ $\quad (GmM = 1)$

Sabemos que es un campo gradiente



(i) (ii) me piden el trabajo de F por dos caminos distintos, pero sabiendo que F es el campo gradiente de la función potencial f chiquita, podemos ver que sólo depende de A y B.

b. $\nabla \times F = 0$ porque $\nabla \times \nabla f$ y las derivadas cruzadas coinciden.

$$F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{rot}(F) = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

$= (0, 0, 0)$ (Que el rotor sea cero me dice que existe $f \,/\, \nabla f = F$

Como F es campo grad vale que (Ej 23 práctica 1)

$$\int_C F\, ds = \int_C \nabla f \cdot ds = f(B) - f(A) = \frac{1}{\|B\|} - \frac{1}{\|A\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{12}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

No estamos usando stokes porque

$$\int_{C} F\, ds \underset{NO}{\neq} \int_S \underbrace{\text{rot}(F)}_{=0} =$$

C no es el borde de una superficie

C es una curva abierta que no es el borde de ninguna superficie! ¡

6. a. $F(x,y) = (x,y)$ Es el gradiente de $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

Sale con integrales

Busco $f \,/\, \frac{\partial f}{\partial x} = x \,,\, \frac{\partial f}{\partial y} = y$

Condición 1) $\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{Llamo}} + \underbrace{C(y)}_{\text{depende de } y}$

$\Rightarrow f(x,y) = h(x) + C(y)$ $\quad h(x) \to$ no depende de y

Condición 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \frac{\partial C}{\partial y} = y$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = y$$

$$\Rightarrow \int \frac{\partial C}{\partial y}\,dy = \int y\,dy$$

$$C = \frac{y^2}{2} + C'$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C}$$

b. $F(x,y) = (x^2 + y^2,\ 2xy)$ $\quad f \,/\, \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \,,\, \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$

Condición 1) $f = \int_0^y 2xt\,dt = \cancel{2}x \cdot \frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^y = \boxed{xy^2 + C(x)}$

Condición 2) $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2 = y^2 + \frac{\partial C}{\partial x}$

$$x^2 + \cancel{y^2} - y^2 = \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\int x^2\,dx = \int \frac{\partial C}{\partial x}\,dx$$

$$\frac{x^3}{3} + C' = C$$

$$\frac{x^3}{3} + C' = C$$

$\Rightarrow f = xy^2 + \frac{x^3}{3} + C$

$\nabla f = \left(y^2 + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} , \quad 2yx \right)$ F es ∇f ✓

c. $F(x,y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen}(xy), \quad x^2 \operatorname{sen} xy)$

Condición 1) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen} xy$

$$f = \int_0^y x^2 \operatorname{sen}(xt)\, dt \underset{\substack{\downarrow \\ u = xt \\ du = x\,dt}}{=} x^2 \int \operatorname{sen}(u) \frac{du}{x}$$

$$= x(-\cos(u)) = x\left(-\cos(xt)\right)\Big|_0^y = \boxed{-x\cos(xy) + C(x)}$$

Obs: si $f = -x\cos(xy) + C \rightsquigarrow \nabla f = (-\cos(xy) + yx \operatorname{sen}(xy), x^2 \operatorname{sen}(xy))$

si $f = +x\cos(xy) + C \rightsquigarrow \nabla f = (\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy), -x^2 \operatorname{sen}(xy))$

Como los signos siempre quedan opuestos, $F \neq \nabla f$

$\rightsquigarrow$ F <u>no</u> es campo gradiente.

7.a $C: (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4) \qquad 0 \leq t \leq \pi$

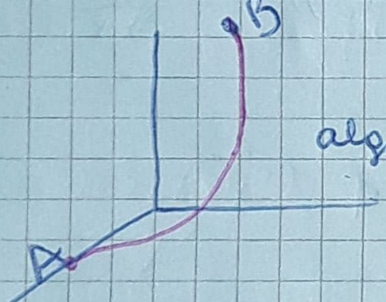
$$F = (\underbrace{2xyz + \operatorname{sen} x}_{F_1}, \underbrace{x^2 z}_{F_2}, \underbrace{x^2 y}_{F_3})$$

$$\int_C F\, ds = \int_C F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 \cdot \cos^5 t \cdot \operatorname{sen}^3 t \cdot t^4 + \operatorname{sen}(\cos^5 t), \cos^{10} t\, t^4, \cos^{10} t \operatorname{sen}^3 t)\, \sigma'(t)\, dt$$

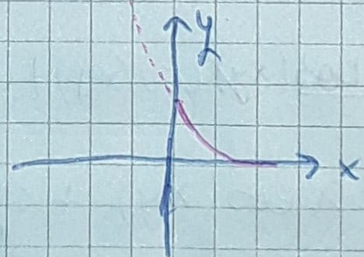
no quiero integrar esto.

¿Quién es C?



algo así, solo toca al eje x en $(1,0,0)$

visto desde arriba



$\sigma(0) = (1, 0, 0)$

$\sigma(\pi) = (-1, 0, \pi^4)$

$$\boxed{\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}$$

$$= (x^2 - x^2, -2xy + 2xy, 2xz - 2xz)$$

$\nabla \times F = (0,0,0) \rightsquigarrow$ Es campo gradiente.

$\rightsquigarrow \int_C F\,ds = f(B) - f(A)$.

¿Quién es f? Sale a ojo.

$f = x^2 y z - \cos(x)$

$\nabla f = (2xyz + \operatorname{sen}(x),\ x^2 z,\ x^2 y) = F$ ✓

$$\int_C F\,ds = f(1,0,0) - f(-1,0,\pi)$$
$$= \underbrace{-\cos(1)}_{\approx -0{,}540} - (\underbrace{-\cos(-1)}_{\approx -0{,}540}) = \boxed{0}$$

b. $C: \sigma(t) = (e^t, e^{t+1}, 0) \qquad -1 \le t \le 0$

$\sigma(-1) = (e^{-1}, 1, 0)$

$\sigma(0) = (1, e, 0)$

$F = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2,\ -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2,\ 0)$

$(\nabla \times F) = (0, 0, -4xy \operatorname{sen}(xy^2) + (-2x^2y)\cdot\cos(xy^2)\cdot y^2$

$+ \operatorname{sen}(xy^2)\cdot x + \cancel{2}yx \cdot \operatorname{sen} xy^2 + xy^2\cdot\cos(xy^2)\cdot x)$

$= (0, 0, -4xy\ \cancel{\operatorname{sen}}\ (xy^2) - 2x^2y^3\cos(xy^2)$

$+ 4\cancel{yx}\ \cancel{\operatorname{sen}}(xy^2) + 2x^2y^3\cos(xy^2)\ )$

CA $\dfrac{\partial\left[-2y\left(x^2\cdot\operatorname{sen}(xy^2)\right)\right]}{\partial x} = -2y\left(2x\cdot\operatorname{sen}(xy^2) + x^2\cdot\cos(xy^2)\cdot y^2\right)$

$= -4xy \operatorname{sen}(xy^2) - 2x^2y^3\cos(xy^2)$

$\dfrac{\partial(\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2)}{\partial y} = -\operatorname{sen}(xy^2)\cdot 2xy - \left(yx2 \operatorname{sen}(xy^2) + (xy^2)\cdot\right.$
$\left.(\cos(xy^2)\cdot 2xy)\right) =$

$-4\operatorname{sen}(xy^2)\ xy - 2x^2y^3\cos(xy^2)$

Como el rotor es $(0,0,0)$ F es campo gradiente. $\exists f \,/\, \nabla f = F$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen} xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Condición 1) $f = \int_0^x \cos(ty^2) - ty^2 \operatorname{sen}(ty^2)\, dt$

$$= \frac{\operatorname{sen}(ty^2)}{y^2}\Big|_0^x - \int s \cdot \operatorname{sen}(s) \frac{ds}{y^2}$$

$s = ty^2$

$ds = y^2 dt$

uso partes

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$u = s$

$dv = \operatorname{sen}(s)$

$$= \frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{y^2} - \left(-s\cos(s) - \int -\cos(s)\, ds\right)\frac{1}{y^2}$$

$$= \;\;'' \;\; - \left(-t \cos(ty^2) + \frac{\operatorname{sen}(ty^2)}{y^2}\right)\Big|_0^x$$

$$f = \cancel{\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{y^2}} + x\cos(xy^2) - \cancel{\frac{\operatorname{sen}(xy^2)}{y^2}} + C(y,z)$$

- $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 = 0 + \frac{\partial C(y,z)}{\partial z}$

$\rightsquigarrow \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \to$ no depende de z.

- $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2 = -x \operatorname{sen}(xy^2) \cdot 2xy + \frac{\partial C(y)}{\partial y}$

son iguales

$\rightsquigarrow 0 = \frac{\partial C(y)}{\partial y}$

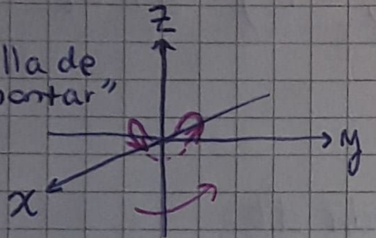
$\Rightarrow \boxed{f = x\cos(xy^2)}$

$$\int_C F\, ds = -f(e^{-1}, 1, 0) + f(1, e, 0)$$
$$= \cos(e^2) - e^{-1} \cdot \cos(e^{-1})$$
$$= \boxed{\cos(e^2) - \frac{\cos(e^{-1})}{e}}$$

8. $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

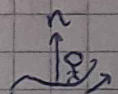
$$\left.\begin{array}{l} \sigma(0) = (0, 1, 0) \\ \sigma(2\pi) = (0, 1, 0) \end{array}\right\} \text{Es una curva cerrada}$$

"Silla de montar"



de costado

de arriba



$$F = \left(y + \operatorname{sen} x, \ \frac{3}{2} z^2 + \cos y, \ 2x^3\right)$$

$\nabla \times F = (-3z, -6x^2, -1) \neq \vec{0}$ entonces no es campo gradiente, qué mal

F es $C^1 \to$ vale stokes
$\downarrow$
necesito una superficie

Uso la sugerencia $z = 2xy \to$ gráfico de una función

$S: \phi(x, y) = (x, y, 2xy) \rightsquigarrow T(r, t) = (r \operatorname{sen} t, r\cos t, \operatorname{sen}(2t))$

$\phi: D \to \mathbb{R}^3$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightsquigarrow$ La puedo describir en polares

STOKES $\boxed{\iint_S \nabla \times F\, dS = \int_{\partial S^+} F\, ds}$

$$\iint_S (\nabla \times F)\, dS = \iint_D (\nabla \times F)(T(x, y)) \cdot (T_r \times T_t)\, dx\, dy$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-3 \cdot \operatorname{sen}(2t), -6(\operatorname{sen} t)^2, -1\right) \cdot (T_r \times T_t)\, dx\, dy$$

$\phi(x,y) = (x, y, z)$

$T(r,\theta) = (r\,\text{sen}\,t, r\cos t, \text{sen}(t\cdot 2))$

$T_r = (\text{sen}\,t, \cos t, 0)$

$T_t = (r\cos t, -r\,\text{sen}\,t, 2\cos(2t))$

$T_r \times T_t = (2\cos t\cdot\cos 2t, -2\,\text{sen}\,t\cdot\cos(2t), -r)$ yo quería la normal hacia arriba!

$$\ominus \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-3\cdot\text{sen}\,t2, -6\cdot\text{sen}^2 t, -1)\cdot (2\cos t\cdot\cos 2t, -2\,\text{sen}\,t\cdot\cos(2t), -r)\,dr\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 -6\,\text{sen}(2t)\cos t\cdot\cos 2t + 12\cdot\text{sen}^3 t\cdot\cos(2t) + r\;dr\,dt$$

CA $\int_0^{2\pi} \text{sen}(2t)\cdot\cos(t)\cdot\cos(2t)$

Identidad $\text{sen}(2t) = 2\,\text{sen}\,t\cdot\cos t$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t)$ $\quad \text{sen}^2+\cos^2 = 1$, $\text{sen}^2 = 1-\cos$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cdot\text{sen}\,t\cdot\cos^2 t\cdot(\cos^2 t - \text{sen}^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cdot\text{sen}\,t\cdot\cos^2 t\cdot(\cos^2 t - (1-\cos^2 t))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\,\text{sen}\,t\,\cos^2 t\cdot(2\cos^2 t - 1)\,dt$$

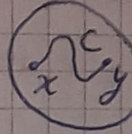
$$= \int_0^{2\pi} \Big(4\underbrace{\text{sen}\,t\cdot\cos^4 t}_{=0 \text{ entre } 0 \text{ y } 2\pi} - 2\underbrace{\text{sen}\,t\cdot\cos^2 t}_{=0}\Big)\,dt = 0$$

CA $\int_0^{2\pi} \text{sen}^3 t\cdot\cos(2t)\cdot dt = 0$ porque son funciones trigonométricas impares entre 0 y 2π.

$$\Rightarrow = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,dt = -2\pi\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = -\pi$$

9 Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$.
Si $\nabla f = 0$ en $B \Rightarrow f$ es cte en B.

Una bola es una región arcoconexa
Dados dos puntos x e $y \in B$ y C una curva C^1 que los une.



Considero $F = \nabla f \Rightarrow$ la integral sobre la curva sólo depende de los extremos

$$\int_C F\,ds = \int_x^y \nabla f\,ds = f(y) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = f(x)$$

$\Rightarrow f$ es constante para todos los puntos de la bola.

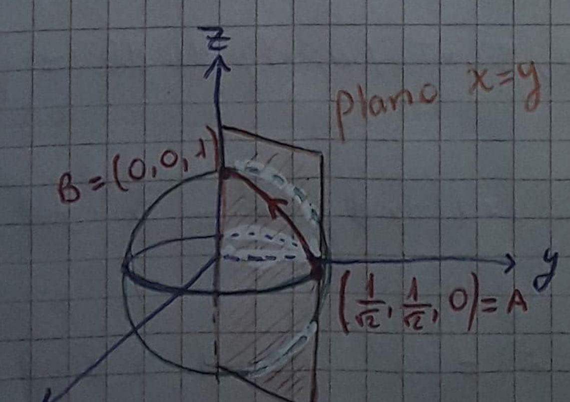
10. $F(x,y,z) = (2xy + z^2,\ x^2 - 2yz,\ 2xz - y^2)$

$$\nabla \times F = (-2y + 2y,\ 2z - 2z,\ 2x - 2x) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow F$ es campo gradiente. $\exists f \,/\, \nabla f = F$

$$\int_C F\,ds = \int_C \nabla f \cdot ds$$

C es la curva contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano de ecuación $y=x$ recorrida desde $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.



Como F es campo gradiente

$$\int_C F\,ds = \int_A^B \nabla f\,ds = f(B) - f(A)$$

3 condiciones 1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2$ 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2yz$ 3) $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz - y^2$

1) $f = \int_0^x 2ty + z^2\, dt = \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^x y + t\Big|_0^x z^2 = x^2y + xz^2 + C(y,z)$

2) $f = x^2y + xz^2 + C(y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{x^2} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \cancel{x^2} - 2yz$$

$$\int \frac{\partial C(y,z)}{\partial y}\, dy = \int -2yz\, dy$$

$$C(y,z) = -\cancel{2}z \cdot \frac{y^2}{\cancel{2}}$$

3) $\boxed{f = x^2y + xz^2 - zy^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz - y^2 = 2xz - y^2 \quad ✓$$

$$\Rightarrow \int_C F\, ds = f(0,0,1) - f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= 0 - \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} + 0 + 0 = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

11. (17 P2) $F(x,y,z) = (x,y,z)$ flujo saliente del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_{S=\partial\Omega} F\eta\, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz$$

En la práctica 2 calculamos

$$\iint_S F\cdot\eta\, ds = \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v(u,v)\rangle\, du\, dv = \boxed{3}$$

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega (1+1+1)\, dx\, dy\, dz = 3 \cdot \operatorname{vol}(\Omega)$$

El vol de un cubo es $\operatorname{vol}(\Omega) = a^3$ donde a representa cada lado (base · altura · profundidad) $a = 1 \Rightarrow 3\operatorname{vol}(\Omega) = \boxed{3}$

12 $\iint_S (x+y+z)\,dS$ donde $S=\partial\Omega$ borde de la bola unitaria

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$

$$x+y+z = F\cdot\eta = \underbrace{(1,1,1)}_{F(x,y,z)}\underbrace{(x,y,z)}_{\text{NORMAL UNITARIA EXTERIOR EN } (x,y,z)}$$

di

$$\iint_S x+y+z\,dA = \iint_{S=\partial\Omega} F\cdot\eta\,dS = \iiint_\Omega \underbrace{div(F)}_{=0} = 0$$

{ Otra manera: S es superficie simétrica y $f(x,y,z)=x+y+z$ es impar ya que $f(-x)=-f(x)$ $\Rightarrow$ La integral da cero.

13. $F=-G\cdot m\cdot M\cdot\frac{x}{\|x\|^3}$ Ω = Bola unitaria en $\mathbb{R}^3$

Gauss funciona para campos F C^1 y el campo gravitatorio no está definido en todo $\mathbb{R}^3$ sino en $\mathbb{R}^3\setminus\{\text{eje } z\}$. Si la bola unitaria está centrada en $(0,0,0)$ o contiene al eje z Gauss no se puede aplicar a F. (

14. $\iint_S F\,dS$ $F=(x^3,y^3,z^3)$ S esfera radio R con la normal hacia adentro.

- F es C^1 ✓
- S es sup cerrada ✓
- orientación η exterior ✗ Para aplicar Gauss quiero η exterior ⇝ S invierte orientación.

$$-\iint_S F\eta\,dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega div(F)\,dx\,dy\,dz$$

Puedo parametrizar S y calcular el flujo saliente :
o puedo integrar div(F) con esféricas ☺

$$\operatorname{div}(F) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

En esféricas
$$T(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\theta \,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\|J = r^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi\|} \ !$$

$$0 \leq r \leq R$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$3\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr \cdot r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$= 3\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2(\mathrm{sen}^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)}_{=1} + \cos^2\varphi)\cdot r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

(with $\underbrace{\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1}$)

$$= 3\int_0^R r^4\,dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi$$

$$\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \boxed{\frac{12}{5}R^5\cdot\pi} \Rightarrow \boxed{\iint_S F\,dS = -\frac{12}{5}R^5\pi}$$

15. $F(x,y,z) = (x, y, -2z)$

$\operatorname{div}(F) = 1+1-2 = 0$ F es C^1 sin divergencia

$\sigma(\theta) = (r(\theta)\cdot\mathrm{sen}\,\theta, 0, r(\theta)\cos(\theta))$ Plano xz (curva C)

donde $r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}(2-\cos(2\theta))$ $\quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

S no es cerrada:

revolución σ en eje z

$\iint_S F n\, ds = \iiint_\Omega \nabla F\, ds$ Vale cuando S es cerrada

Considero $S' = S \cup S_1$ / S' es cerrada ✓

¿Quién es S_1?

$$\sigma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}}_{r\left(\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{1}{2},\ 0,\ \underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}}_{r\left(\frac{\pi}{6}\right)}\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

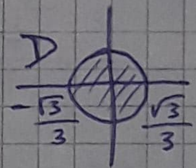
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 1\right)$$

$$\sigma\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

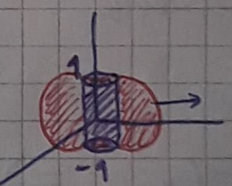
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ -1\right)$$

Quiero un cilindro de radio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ para que S sea sup. cerrada.

En el plano xy



$\Rightarrow$



$$S = \left(r(\theta)\cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi,\ r(\theta)\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi,\ r(\theta)\cos(\theta) \right)$$

$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$S_{1\,(\theta,z)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta,\ z \right)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$-1 \leq z \leq 1$

$S' = S \cup S_1$ vale Gauss

$$\Rightarrow \iint_{S'} F\, ds = \iiint_\Omega \underbrace{\operatorname{div}(F)}_{=0}\, ds = 0 \quad \Big\| \quad \iint_{S'} F\, ds = \iint_S F\, ds + \iint_{S_1} F\, ds$$

$$\Rightarrow \iint_S F\, ds = -\iint_{S_1} F\, ds.$$

$S_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta, z\right)$

$$\left.\begin{array}{l} S_{1\theta}(\theta,z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, 0\right) \\ S_{1z}(\theta,z) = (0, 0, 1) \end{array}\right\}$$

$$S_{1\theta} \times S_{1z}(\theta,z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta, 0\right) = n$$ invierte orientación $\ominus$

$$\Rightarrow \oplus \iint_{S_1} F\,n\,ds = \iint_{S_1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta, -2z\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\theta, 0\right) d\theta\, dz$$

los − se cancelan

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta\, dz$$

$$= \frac{3}{9}\int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot 2\pi = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

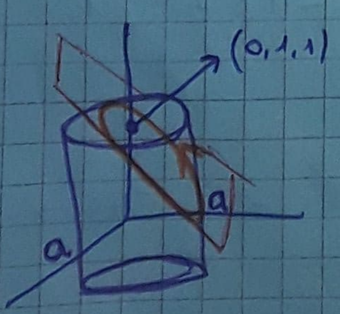
Finalmente $\boxed{\iint_S F\,ds = \frac{4\pi}{3}}$

16. $F(x,y,z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$

$\operatorname{div}(F) = 0$ sin divergencia

Cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$

a. $y + z = 1$



La intersección entre el cilindro y el plano me deja una circunferencia de radio a sobre el plano $y + z = 1$

La normal es exterior.

Si considero la superficie cerrada vale Gauss

$$S: \begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ y+z \leq 1 \end{cases} \qquad 0 \leq z \leq 1-y$$

$$\iint_S F\, ds = \iiint_\Omega \underbrace{div(F)}_{=0}\, dx\,dy\,dz = 0$$

$$\iint_S F\, dS = \iint_{S_1} F\, dS + \iint_{S_2} F\, dS + \iint_{S_3} F\, dS = 0$$

S_1 → es la que quiero saber

S_2 → tapas laterales (cilindro)

S_3 → tapa de abajo

$$S_2(\theta, z) = (a\cos(\theta),\ a\,sen(\theta),\ z)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 1 - a\,sen(\theta)$$

$$S_{2\theta}(\theta, z) = (-a\,sen(\theta),\ a\cos(\theta),\ 0)$$

$$S_{2z}(\theta, z) = (0,\ 0,\ 1)$$

$$S_{2\theta} \times S_{2z} = (0,\ a\,sen(\theta),\ 0) \quad \text{respeta orientación}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-sen(\theta)} (0, 0, *)\cdot(0, *, 0)\, dz\, d\theta = 0$$

$$S_3(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\,sen\,\theta,\ 0) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$S_{3r}(r, \theta) = (\cos\theta,\ sen\,\theta,\ 0) \qquad 0 \leq r \leq a$$

$$S_{3\theta}(r, \theta) = (-r\,sen\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$$

$$S_{3r} \times S_{3\theta} = (0,\ 0,\ r) \rightarrow \text{invierte orientación}$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^a (0,\ 0,\ a^2 - r^2\cos^2\theta - r^2\,sen\,\theta)(0, 0, r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[a^2 - r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)\right]\cdot r\, dr\, d\theta = -2\pi\cdot\left[\int_0^a r\cdot a^2 - r^3\, dr\right]$$

$$= -2\pi \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^a a^2 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^a \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{a^2}{\cancel{2}} a^2 - \frac{a^4}{4} \right] = -2\pi \cdot \frac{a^4}{4}$$

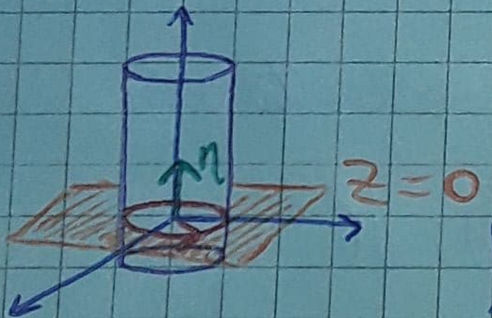
$$= \boxed{-\frac{\pi \cdot a^4}{2}}$$

Entonces $\iint_{S_1} F\,ds + \iint_{S_2} F\,ds + \iint_{S_3} F\,ds = 0$

$$\iint_{S_1} F\,ds + 0 - \frac{\pi \cdot a^4}{2} = 0$$

$$\boxed{\iint_{S_1} F\,ds = \frac{\pi \cdot a^4}{2}}$$

6.



$$\iint_S F\,dS = \iint_D F(T(r,\theta)) \cdot T_r \times T_\theta \, dr\, d\theta$$

$T(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 0)$ || $T_r \times T_\theta = (0, 0, r)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} (0, 0, a^2 - r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\theta)(0,0,r)\, dr\, d\theta \to \text{La hice antes}$$

$= \boxed{\dfrac{\pi \cdot a^4}{2}}$ El flujo del área no depende de la sección

17. $F(x,y,z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$

$\operatorname{div}(F) = 3$

$S = \left(f(z)\cos\varphi, f(z)\operatorname{sen}\varphi, z\right)$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq z \leq 1$

donde $f(z) = \frac{1}{2} z e^{2-2z}$

$\iint_S F\,ds$

$S \rightarrow$ no es cerrada

Tomo $S' = S \cup \underbrace{S_1}$ / S' es cerrada y vale Gauss

disco "tapita" de arriba en $z=1$

$\sigma(z) = \left(\frac{1}{2} z e^{2-2z}, 0, z\right)$ $\quad 0 \leq z \leq 1$

$\sigma(0) = (0,0,0)$

$\sigma(1) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

$S_1(\theta, r) = \left(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, 1\right)$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq \frac{1}{2}$

$\iint_{S'} F\,ds = \iiint_{\Omega} 3\,dx\,dy\,dz = 3\operatorname{vol}(\Omega)$

$\iint_{S'} F\,ds = \boxed{\iint_S F\,ds} + \iint_{S_1} F\,ds$

Es la que quiero averiguar

$\iint_{S'} F\,ds - \iint_{S_1} F\,ds = \iint_S F\,ds$

$\left.\begin{array}{l} S_{1\theta}(\theta,r) = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \\ S_{1r}(\theta,r) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \end{array}\right\} S_{1\theta} \times S_{1r} = (0, 0, -r)$ invierte orientación

$$-\iint_{S_1} F \cdot \eta \, ds = \iint_{S_1} \left(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \frac{1}{2}\right)(0,0,-r)\, dr\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} -\frac{r}{2}\, dr\, d\theta = +\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{1/2} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{+\frac{\pi}{8}}$$

$$\iint_{S'} F\, ds - \frac{\pi}{8} = \iint_S F ds$$

$$3\,\text{vol}(\Omega) - \frac{\pi}{8} = \iint_S F ds$$

Tengo que calcular $\text{vol}(\Omega)$ → sólido interior de una superficie de revolución

$$T(r,\theta,z) = (r\, f(z)\cos\theta,\ r\, f(z)\,\text{sen}\,\theta,\ z)$$

↓ relleno cada punto de Ω

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ salvo los bordes e biyec ✓

$0 \leq z \leq 1$

$$DT = \begin{pmatrix} f(z)\cos\theta & f(z)\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ -rf(z)\,\text{sen}\,\theta & rf(z)\cos\theta & 0 \\ rf'(z)\cos\theta & rf'(z)\,\text{sen}\,\theta & 1 \end{pmatrix}$$

lugar 3×3 ⇝ $(-1)^{3+3} = 1$

$$\rightsquigarrow \det(DT) = 1\cdot f^2(z)\cdot r + 0 + 0$$

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 = \int_\Theta \text{jacobiano}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 f^2(z)\cdot r\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^1 f^2(z)\, dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$$

$$= \cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 \frac{1}{4}\cdot z^2\cdot e^{(2-2z)\cdot 2}\, dz$$

CA $\int z^2 \cdot e^{4-4z}\, dz \underset{\downarrow}{=} z^2 \cdot \frac{e^{4-4z}}{-4} - \int \frac{e^{4-4z}}{-4} 2z$:(

$u = z^2 \longrightarrow du = z\,2$

$dv = e^{4-4z} \rightarrow v = \frac{e^{4-4z}}{-4}$

$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

CA $\int z^2 \cdot e^{4-4z}\, dz \underset{\downarrow}{=} \int \left(\frac{u-4}{-4}\right)^2 \cdot e^u \cdot \frac{du}{-4}$

$4 - 4z = u \Rightarrow z = \frac{u-4}{-4}$

$-4\,dz = du$

$= \int (u-4)^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot e^u \frac{du}{-4} = -\frac{1}{64} \int (u^2 - 8u + 16) e^u\, du$

$= -\frac{1}{64} \left[\underbrace{\int u^2 \cdot e^u\, du}_{1} - 8 \underbrace{\int u \cdot e^u\, du}_{2} + 16 \int e^u\, du \right]$

1 $\int u^2 \cdot e^u du \underset{\downarrow}{=} e^u \cdot u^2 - 2 \underbrace{\int e^u \cdot u\, du}_{2} = *$

$f = u^2 \rightarrow df = 2u\, du$

$dg = e^u du \rightarrow g = e^u$

2 $\int e^u\, u\, du \underset{\downarrow}{=} u \cdot e^u - \int e^u du = \boxed{u\, e^u - e^u + C}$

$f = u \rightarrow df = 1\, du$

$dg = e^u du \rightarrow g = e^u$

$\Rightarrow$ 1 $* = e^u \cdot u^2 - 2(u\, e^u - e^u) + C$

$= e^u \cdot u^2 - 2u e^u + 2e^u = \boxed{e^u(u^2 - 2u + 2)} + C$

Volviendo a la integral

$= -\frac{1}{64} \left[e^u(u^2 - 2u + 2) - 8 \cdot (u e^u - e^u) + 16 \cdot e^u \right]$

$= -\frac{1}{64} \left[e^u \cdot u^2 - 2u e^u + 2e^u - 8u e^u + 8e^u + 16 e^u \right]$

$$= -\frac{1}{64}\left[e^{u}\cdot u^2 - 10\, u e^{u} + 26\, e^{u}\right]$$

$$= -\frac{1}{64}\left[e^{u}\left(u^2 - 10u + 26\right)\right]$$

$$u = 4 - 4z$$

$$= -\frac{1}{64}\cdot e^{4-4z}\left((4-4z)^2 - 10(4-4z) + 26\right)$$

$$= -\frac{1}{64}\cdot e^{4-4z}\left(16 - 32z + 16z^2 - 40 + 40z + 26\right)$$

$$= -\frac{e^{4-4z}}{64}\left(16z^2 + 8z + 2\right)$$

Ahora vuelvo al problema original

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{e^{4-4z}}{64}\left(16z^2 + 8z + 2\right)\right]_0^1 = \pi\left[-\frac{e^{4-4z}}{128}\left(8z^2 + 4z + 1\right)\right]_0^1$$

$$= -\frac{\pi}{128}\left[13 - e^4\right] = \boxed{\frac{\pi}{128}\left(e^4 - 13\right) = vol(\Omega)}$$

Finalmente: el flujo térmico saliente a través del mate:

$$\iint_S F\, dS = 3\, vol(\Omega) - \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{3\pi}{128}\left(e^4 - 13\right) - \frac{\pi}{8}}$$

18. Para probar que existe $G / F = \nabla \times G$ si $div(F) = 0$ usamos Gauss. Como $F = \frac{x}{\|x\|^3}$ no es C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ no se estaría cumpliendo una de las hipótesis.

19. $\nabla \times G = \left(G_{3y} - G_{2z},\ G_{1z} - G_{3x},\ G_{2x} - G_{1y} \right)$

$G = (G_1, G_2, G_3)$

¿$F = \nabla \times G$? Es equivalente a $div(F) = 0$

a. $F = (x, y, z) \Rightarrow div(F) = 3 \neq 0 \rightsquigarrow$ F no es el rotor de otro campo

b. $F = (\overbrace{x^2+1}^{F_1}, \overbrace{x - 2xy}^{F_2}, \overbrace{y}^{F_3})$

$div(F) = 2x - 2x + 0 = 0 \Rightarrow \exists\, G / F = \nabla \times G$

Tomo $G = (G_1, G_2, G_3)$ del ejercicio 18

$G_1 = \int_0^z F_2(x, y, t)\, dt - \int_0^y F_3(x, t, 0)\, dt$

$G_1 = \int_0^z x - 2xy\, dt - \int_0^y \cancel{t}\, dt$

$G_1 = xz - 2xyz - \frac{y^2}{2}$

$G_2 = - \int_0^z F_1(x, y, t)\, dt$

$G_2 = - \int_0^z x^2 + 1\, dt = - z x^2 - z$

$G_3 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{G = (xz - 2xyz,\ zx^2 - z,\ 0)}$

$\underset{\text{verifico}}{\nabla \times G =} (x^2 - 1,\ x - 2xy,\ - \cancel{2xz} + \cancel{2xz} + y) = F$ ✓

21. $V = (x, y, xy - z)$ campo v. de un fluido

$\text{div}(V) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$ El fluido se expande

la $\text{div} > 0$ tiene un significado físico.

18) $G \in C^1 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times G) = 0$

$F \in C^1 \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$ $\Rightarrow G \in C^2 / F = \nabla \times G$

$$\Rightarrow G_1 = \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt$$

$$G_2 = -\int_0^z F_1(x,y,z)\,dt$$

$$G_3 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times G = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)dt & -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^z F_1(x,y,t)dt\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_0^z F_1(x,y,t)dt\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^z F_2(x,y,t)dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt\right)\right)$$

$$= \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z) \right) = F$$

$$\Rightarrow \text{Si } F = -GmM \frac{x}{\|x\|^3} \Rightarrow \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-GmM\,x}{\|(x,y,z)\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-GmM\,y}{\|(x,y,z)\|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-GmM\,z}{\|(x,y,z)\|^3}\right)\right)$$

$$= -GmM\left(\frac{\cancel{-2x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + \cancel{x^2} - \cancel{2y^2} + \cancel{z^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = \Bigg(\underbrace{\int_0^z -GmM \frac{y}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,dt - \int_0^y -GmM \cdot \frac{z}{(x^2+t^2+0^2)^{3/2}}\,dt}_{G_1}, \underbrace{-\int_0^z -GmM \cdot \frac{x}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,dt}_{G_2}, 0 \Bigg)$$

Magia de Wolfram Alpha

$$G_1 = -GmM\,y\int_0^z \frac{1}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,dt + GmM\,z\int_0^y \frac{1}{(x^2+t^2+z^2)^{3/2}}\,dt = \dots = -GmMy\cdot\frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - GmMz\,\frac{3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$G_1 = \frac{-GmM\cdot yz\cdot\left((x^2+y^2)^{3/2}+3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2)^{5/2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$G_2 = GmM\,x\int_0^z \frac{1}{(x^2+y^2+t^2)^{3/2}}\,dt = \dots = \frac{GmM\,xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = \left(-\frac{GmM\,yz\left((x^2+y^2)^{3/2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{GmM\,xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ 0\right)$$

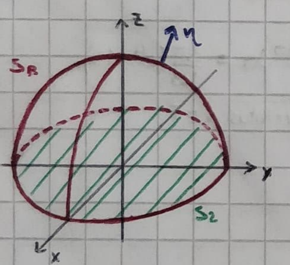
(19) a) $F=(x,y,z) \Rightarrow \nabla\cdot F = (1+1+1) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ No $\exists\, G \,/\, F = \nabla\times G$

b) $F=(x^2+1,\ x-2xy,\ y) \Rightarrow \nabla\cdot F = (2x-2x+0) = 0 \Rightarrow \exists\, G \,/\, F=\nabla\times G$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = \left(\int_0^z x-2xy\,dt - \int_0^y t\,dt,\ -\int_0^z (x^2+1)\,dt,\ 0\right) = \left(xz-2xyz-\frac{y^2}{2},\ x^2z+z,\ 0\right)$$

(20) $S_R = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z \geq 0\} \Rightarrow \phi(\varphi,\theta) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ R\cos\varphi)$ con $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$

$F(x,y,z) = (xz - x\cos z,\ -yz + y\cos z,\ 4-x^2-y^2) \Rightarrow \nabla\cdot F = (z-\cos z - z + \cos z + 0) = 0$



$$\Rightarrow \iiint_\Omega \nabla\cdot F\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega = S_R\cup S_2} F\,ds \Rightarrow \iint_{S_R} F\,ds = \iiint_\Omega 0\cdot dx\,dy\,dz - \iint_{S_2} F\,ds$$

$\Rightarrow S_2 = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2 \leq R^2,\ z=0\} \Rightarrow \phi_2(\theta,r) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$ con $r\in[0,R]$, $\theta\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \phi_{2r} = (\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$
$ \phi_{2\theta} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$
$\Rightarrow \phi_{2\theta}\times\phi_{2r} = (0,0,-r) \rightarrow$ Orientado "hacia afuera"

$$\Rightarrow \iint_{S_2} F\,ds = \int_0^R\int_0^{2\pi} \left(-r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 4-(r\cos\theta)^2-(r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right)(0,0,-r)\,d\theta\,dr = \int_0^R\int_0^{2\pi}(4-r^2)(-r)\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\int_0^R -4r\,dr + \int_0^R r^3\,dr\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{4r^2}{2}\Big|_0^R + \frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right) = 2\pi\left(\frac{R^4}{4} - 2R^2\right)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_R} F\,ds = -\iint_{S_2} F\,ds = 2\pi\left(2R^2 - \frac{R^4}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ Para que el flujo sea máximo: $\dfrac{d\left(2\pi(2R^2 - R^4/4)\right)}{dR} = 0 \Rightarrow 8\pi R - 2\pi R^3 = 0$

$(8\pi - 2\pi R^2)\cdot R = 0 \Rightarrow 8\pi - 2\pi R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$

$\Rightarrow$ El flujo es máximo en $R=2$

(21) $V = (x, y, xy - z) \Rightarrow \nabla . F = (1 + 1 - 1) = 1$

$\Rightarrow \iint_S F ds = \iiint_\Omega \nabla . F \, dx dy dz = \iiint_\Omega 1 . \, dx dy dz = Vol(\Omega) > 0 \Rightarrow$ El flujo será positivo por lo que se está expandiendo

(22) $T(x, y, z, t)$ temperatura en $\underbrace{(x, y, z)}_{\bar{x}}$ en $t \Rightarrow T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2 \Rightarrow T : \mathbb{R}^3 \times (0,1) \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(\bar{x}, t) = -K \nabla T(\bar{x}, t) = -K(-2x, -2y, -2z)$

$\Rightarrow S = [0,4] \times [0,5] \times [0,3]$

$\Rightarrow \underbrace{\iint_S \langle F(\bar{x}, s), n \rangle ds}_{\text{Flujo a traves de } S} = \iiint_\Omega div(F(\bar{x}, s)) d\bar{x}$

$\Rightarrow \iiint_\Omega u(\bar{x}, t_0 + h) d\bar{x} - \iiint_\Omega u(\bar{x}, t_0) d\bar{x} = \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_\Omega u(\bar{x}, s) d\bar{x} ds = \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, s) d\bar{x} ds}_{\text{Flujo de } u \text{ a traves de } \partial\Omega = S \text{ entre } t_0 \text{ y } t_0 + h}$

Nos interesa lo que entra en el cuerpo así que orientamos la superficie con la normal interior

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, s) d\bar{x} ds = -\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_\Omega div(F(\bar{x}, s)) d\bar{x} ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = -div(F(\bar{x}, t))$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{x}, t) = div(\underbrace{K}_{1} \nabla T(\bar{x}, t)) = (-2 + (-2) + (-2)) = -6$

$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^4 \int_0^5 \int_0^3 -6 \, dx dy dz dt = \int_0^1 \int_0^4 \int_0^5 -6x \Big|_0^3 dy dz dt = \int_0^1 \int_0^4 -18 y \Big|_0^5 dz dt = \int_0^1 -90 z \Big|_0^4 dt = -360 t \Big|_0^1 = -360$

(23)

<u>1° identidad</u>: $\iint_{\partial\Omega} f \nabla g . n \, ds = \iiint_\Omega (f \Delta g + \nabla f . \nabla g) \, dx dy dz$

$\Rightarrow$ Por Gauss $\iint_{\partial\Omega} F n \, dS = \iiint_\Omega \nabla . F \, dx dy dz \Rightarrow$ Si $F = f \nabla g \Rightarrow \nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial g}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial g}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(f \frac{\partial g}{\partial z}\right) \right)$

$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$

$= \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g$

$\Rightarrow$ Entonces: $\iint_{\partial\Omega} f \nabla g . n \, ds = \iiint_\Omega (\nabla f . \nabla g + f \Delta g) \, dx dy dz$

2° identidad: $\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f).n \, ds = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) \, dxdydz$

$\Rightarrow$ Por Gauss: $\iint_{\partial\Omega} F n \, ds = \iiint_{\Omega} \nabla . F \, dxdydz \Rightarrow$ Si $F = P - Q$ / $P = f\nabla g$, $Q = g\nabla f$: $\iint_{\partial\Omega} F n \, ds = \iint_{\partial\Omega} (P-Q) n \, ds = \iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) n \, ds$

Utilizando la 1° identidad

$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) n \, ds = \iiint_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f\nabla g - (g\Delta f + \nabla g\nabla f)) \, dxdydz = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) \, dxdydz$

(24) $f \in C^2(\Omega)$ y $C^1(\partial\Omega)$ con $f=0$ en $\partial\Omega$, $f \not\equiv 0 / \Delta f = \lambda f$ en $\Omega \Rightarrow \lambda$ autovalor de Δ

f autofunción asociada a λ

$\Rightarrow \lambda \neq \mu$ autovalores de Δ en Ω, f y g autofunciones asociadas $\Rightarrow \Delta f = \lambda f$

$\Delta g = \mu g$

$\Rightarrow$ 2° identidad de Green: $\int_\Omega (f \underbrace{\Delta g}_{\mu g} - g \underbrace{\Delta f}_{\lambda f})\, dv = \int_{\partial\Omega} (\underbrace{f}_{0} \nabla g - \underbrace{g}_{0} \nabla f)\, n\, ds = 0 \Rightarrow \int_\Omega (f\mu g - g\lambda f)\, dV = \int_\Omega \underbrace{(\mu-\lambda)}_{\neq 0} gf\, dV = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(\mu-\lambda)}_{\neq 0} \cdot \int_{\partial\Omega} gf\, dV = 0 \Rightarrow \iiint_\Omega fg\, dV = 0$

(25) Supongo $f \not\equiv 0 / \Delta f = 0$ en B y $f=0$ en ∂B

$\Rightarrow$ 1° identidad de Green: $\int_{\partial\Omega} \underbrace{f}_{0} \nabla f \cdot n\, ds = \int_\Omega (f \underbrace{\Delta f}_{0} + \nabla f \nabla f)\, dV \Rightarrow 0 = \int_\Omega \nabla f \nabla f\, dv = \int_\Omega (f_x, f_y, f_z)(f_x, f_y, f_z)\, dV$

$\Rightarrow 0 = \int_\Omega (\underbrace{f_x^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_y^2}_{\geq 0} + \underbrace{f_z^2}_{\geq 0})\, dV \Rightarrow \nabla f \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow \nabla f = 0$ en B

$\Rightarrow$ Por lo visto en (9), si $\nabla f = 0$ en $B \Rightarrow f = cte \Rightarrow$ Pero $f=0$ en $\partial\Omega$, por lo tanto $f \equiv 0$

(26) $\int_C E\, ds = \frac{-1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S H\, ds \Rightarrow \frac{d}{dt} \iint_S H\, ds + c \int_C E\, ds = 0 \overset{\text{Por Stokes}}{\Rightarrow} \iint_S \frac{\partial H}{\partial t} ds + c \iint_S \nabla \times E\, ds = 0$

$\Rightarrow$ Tomo S como un disco ~~D~~ de radio r (D_r): $\iint_{D_r} \frac{\partial H}{\partial t} ds + c \iint_S \nabla \times E\, ds = 0$

$\Rightarrow$ Divido ambos lados por el area del disco: $\frac{1}{Area(D_r)} \left(\iint_{D_r} \frac{\partial H}{\partial t} ds + c \iint_{D_r} \nabla \times E\, ds \right) = 0$

$\Rightarrow$ Si $r \to 0$: $\lim_{r \to 0} \frac{1}{Area(D_r)} \left(\iint_{D_r} \frac{\partial H}{\partial t} ds + c \iint_{D_r} \nabla \times E\, ds \right) = 0 \Rightarrow$ La integral converge a lo que vale la función en el centro del disco

$\Rightarrow H_t(P) + c\, \nabla \times E(P) = 0 \Rightarrow$ Como D_r era arbitrario, por lo que vale para cualquier otra superficie

$\Rightarrow H_t + c\, \nabla \times E = 0$