Análisis 2 / Análisis Matematico 2 / Matemática 3 - Resolución del Segundo Parcial

Segundo cuatrimestre 2020

Ejercicio 1. Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (y^3 - x^2y + x)\,dx + (-x^3 + xy^2 - y)\,dy &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Sugerencia: la ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = f(x^2 - y^2)$ para alguna función derivable f.

Resolución

Llamemos $M = y^3 - x^2y + x$, $N = -x^3 + xy^2 - y$. Para que la ecuación sea exacta se debe cumplir que $M_y = N_x$. Sin embargo, si hacemos la cuenta obtenemos que

$$\begin{aligned} M_y &= 3y^2 - x^2, \\ N_x &= -3x^2 + y^2, \end{aligned}$$

por lo que la ecuación no es exacta.
El ejercicio nos dice que la ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = f(x^2 - y^2)$ para alguna función derivable f, por lo que intentemos encontrar dicha función f. Para que μ sea factor integrante debe cumplir que $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, es decir, que

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x.$$

Como $\mu(x,y) = f(x^2 - y^2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_x &= 2xf'(x^2 - y^2), \\ \mu_y &= -2yf'(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Reemplazando todo esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x \\ -2yf'(x^2 - y^2)(y^3 - x^2y + x) + f(x^2 - y^2)(3y^2 - x^2) &= 2xf'(x^2 - y^2)(-x^3 + xy^2 - y) + f(x^2 - y^2)(-3x^2 + y^2) \\ -2f'(x^2 - y^2)(y^4 - x^4) &= -2f(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ \frac{f'(x^2 - y^2)}{f(x^2 - y^2)} &= \frac{-1}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Como el término derecho depende solamente de la expresión $x^2 - y^2$, podemos sustituir $z = x^2 - y^2$, obtenemos la ecuación

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-1}{z}.$$

Integrando a ambos lados, obtenemos que

$$\begin{aligned} ln(f(z)) &= -ln(z) \\ f(x^2 - y^2) &= \frac{1}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, nuestro factor integrante es $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

Ahora debemos resolver la ecuación. Para ello la multiplicamos por el factor integrante, y queda

$$\left(-y+\frac{x}{x^2-y^2}\right)\,dx+\left(-x-\frac{y}{x^2-y^2}\right)\,dy=0.$$

Debemos encontrar una función F tal que

$$F_x=-y+\frac{x}{x^2-y^2},$$
$$F_y=-x-\frac{y}{x^2-y^2}.$$

Integrando F_x en función de la variable x obtenemos que

$$F(x,y)=-xy+ln|x^2-y^2|+\varphi(y)$$

para alguna función φ. Derivamos F en función de y y obtenemos que

$$F_y=-x-\frac{y}{x^2-y^2}+\varphi'(y).$$

Comparando con la expresión anterior obtenemos que φ debe ser constante. Luego, la solución a la ecuación es

$$-xy+ln|x^2-y^2|=c.$$

Para terminar de resolver el problema debemos considerar la condición inicial $y(0)=1$. Reemplazando en la solución obtenemos que

$$-0+ln|-1|=c$$
$$0=c.$$

Por lo tanto la solución al problema es

$$-xy+ln|x^2-y^2|=0.$$

Ejercicio 2. Encuentre la solución al siguiente sistema.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

cuya condición inicial es

$$X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolución

Primero encontramos la solución general al problema. Sabemos que toda solución es de la forma $X = X_h + X_p$, donde X_h son las soluciones del sistema homogéneo asociado, y X_p es alguna solución particular del problema.
Comencemos encontrando las soluciones del sistema homogéneo asociado. Para ello debemos encontrar los autovalores de la matriz. Planteamos el polinomio característico

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4.$$

Este polinomio tiene raices $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$.
El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$ es

$$Nu \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,1) \rangle.$$

El autoespacio asociado a $\lambda_2 = -1$ es

$$Nu \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \langle (-1,1) \rangle.$$

Asi, tenemos que

$$X_h = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución particular realizamos el método de variación de constantes. Dadas las soluciones obtenidas $X_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, planteamos

$$X_p = C_1 X_1 + C_2 X_2,$$

donde C_1, C_2 son funciones a encontrar. Reemplazando esto en la ecuación diferencial original obtenemos un sistema

$$\begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos encontrar la inversa de la matriz anterior, y obtenemos que

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-3t}t + e^{-3t} \\ -\frac{1}{2}e^{t}t + e^{t} \end{pmatrix}.$$

Integrando, obtenemos

$$C_1 = -\left(\frac{t}{6} + \frac{7}{18}\right) e^{-3t}$$

$$C_2 = -\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right) e^{t}.$$

Luego,

$$X_p = -\left(\frac{t}{6} + \frac{7}{18}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$

y la solución general al sistema es

$$X = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{6} + \frac{7}{18}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Si apricamos la condición inicial obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 - \frac{7}{18} - c_2 - \frac{3}{2} = 3 \\ c_1 - \frac{7}{18} + c_2 + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

Al resolverlo, obtenemos

$$c_1 = \frac{26}{9},$$
$$c_2 = -2.$$

Finalmente, la solución queda

$$X = \frac{26}{9} e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{6} + \frac{7}{18}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. La ecuación diferencial

$$2ty'' + (4t+1)y' + (2t+1)y = 0,$$

tiene una solución de la forma $y = e^{-t}$. Halle todas las soluciones de la ecuación tales que

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

Resolución

Encontremos la solución general de la ecuación. Sabemos que las soluciones forman un espacio vectorial de dimensión 2, por lo que solo necesitamos una solución que sea linealmente independiente con la que provee el ejercicio. Para ello usaremos el método de reducción de orden.
Dada $y_1 = e^{-t}$ solución, proponemos $y_2 = cy_1$ como segunda solución, donde c es una función a determinar. Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\begin{aligned} &2ty_2'' + (4t+1)y_2' + (2t+1)y_2 \\ &\quad = 2t(c''y_1 + 2c'y_1' + cy_1''0) + (4t+1)(c'y_1 + cy_1') + c(2t+1)y_1 \\ &\quad = c''(2ty_1) + c'(4ty_1' + (4t+1)y_1) = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z = c'$ y reemplazando por y_1 y si derivada, obtenemos la ecuación

$$\frac{z'}{z} = \frac{-1}{2t}. \tag{1}$$

Integrando a ambos lados,

$$\begin{aligned} ln(z) &= -\frac{1}{2}ln|t| \\ z &= |t|^{-1/2} \\ c' &= |t|^{-1/2}. \end{aligned}$$

Integrando nuevamente,

$$c = 2|t|^{1/2}.$$

Luego,

$$y_2 = cy_1 = 2|t|^{1/2}e^{-t}.$$

Notemos que esta solución no es derivable en $t = 0$. Pero como el ejercicio nos pide condiciones sobre el límite en $+\infty$, tomamos como dominio el intervalo $(0, +\infty)$.
La solución general será

$$y = c_1e^{-t} + c_2\sqrt{t}e^{-t}.$$

El ejercicio nos pide encontrar las soluciones que cumplan que $\lim_{t\to+\infty} y = 0$. Notemos que y_1 converge a 0, y aplicando L'Hopital para el límite de y_2 obtenemos

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{e^t} = 0.$$

Es decir que la solución y converge a 0 independientemente de c_1 y c_2.

Ejercicio 4. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = (a-1)sen(x) + 2y \\ y' = -x + (a+1)sen(y) \end{cases}$$

a. Halle **infinitos** valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema admita una solución no trivial que converge al punto $(0,0)$ cuando t tiende a $+\infty$.

b. Para los valores hallados en el item anterior, esboce un diagrama de fases de las trayectorias del sistema en un entorno del origen.

Resolución

a. Vamos a intentar usar el teorema de linealización en el $(0,0)$. Debemos chequear que se cumplan las hipótesis del mismo. Es obvio que el campo F es C^1 y que $(0,0)$ es punto de equilibrio. Solo falta chequear que los autovalores de $DF(0,0)$ no tienen parte real nula.

   Tenemos que

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} (a-1)cos(x) & 2 \\ -1 & (a+1)cos(y) \end{pmatrix}$$

   y

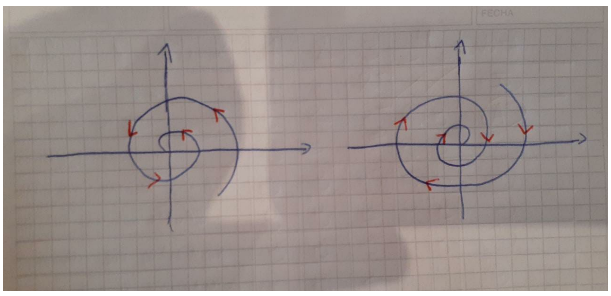
$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

   Calculamos su polinomio característico

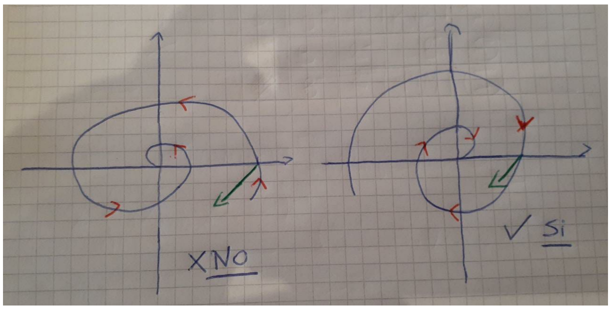
$$\det \begin{pmatrix} a-1-\lambda & 2 \\ -1 & a+1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2+1),$$

   cuyas raices son $\lambda = a \pm i$. Luego, si a es distinto de cero podemos aplicar el teorema de linealización. Particularmente, si $a < 0$ tenemos que los autovalores son complejos con parte real negativa y por lo tanto el $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable, y existe alguna solución (todas) que convergen a 0 si t tiende a $+\infty$.

b. Aplicando el teorema de linealización tenemos que el diagrama de fases del problema alrededor de $(0,0)$ es similar al diagrama de fases del problema $X' = DF(0,0)X$ alrededor de $(0,0)$. Por lo tanto, el diagrama alrededor de $(0,0)$ es similar a alguno de los siguientes diagramas.



   Como $DF(0,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$, tenemos que el diagrama es el siguiente.



X NO
✓ Si