/

1	2	3	4
B	B	B	R

Calificación
8 (ocho)

Análisis II-Análisis Matemático II-Matemática 3-Análisis II(LCD)
Primer Parcial (16/05/2022)

2/2 **Ejercicio 1.** (2 puntos) Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la porción de la circunsferencia de centro cero y radio 1 en el primer cuadrante, recorrida de manera antihoraria, y el campo vectorial $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2xy - 4 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2}, x^2 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\ell$.

2/2 **Ejercicio 2.** (2 puntos) Sean $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva dada por la parametrización $\sigma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (-6\cos(t), 6\sin(t))$ y el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y + x\sin(x^2), 3x - \cos\left(e^{y^2}\right)\right).$$

Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\ell$.

3/3 **Ejercicio 3.** (3 puntos) Sean S_1, y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies regulares orientadas tales que $\partial S_1 = \partial S_2 = C$, donde C es una curva suave. Probar que

$$\left(\iint_{S_1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\right)^2 - \left(\iint_{S_2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\right)^2 = 0$$

para todo vector $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$.

1/3 **Ejercicio 4.** (3 puntos) Sean

$$D_1 = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le 1, z = 2\}, \quad D_2 = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \le 1, z = -1\},$$

y $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable tal que

$$K = S \cup D_1 \cup D_2$$

es una superficie cerrada regular orientable que encierra una región acotada Ω de $\mathbb{R}^3$ (donde vale el teorema de la divergencia). Asumiendo que el volumen de Ω es 3π y que D_1, D_2 y S se orientan de manera que K quede orientada con la normal exterior, calcular todos los posibles valores de

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (e^z, -ye^z, x^2+y^2+z)$

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y escriba con claridad.

CamScanner

Ejercicio 1

~~escribo F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como suma de dos campos G : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y H : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$~~

$\cancel{G = \left(2xy - 4 - \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right), \ldots\right)}$

escribo F : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como suma de tres campos

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$G = (2xy, x^2) \longrightarrow G = (2xy - 4, x^2)$

$\cancel{\text{rot}(G) = 2x - 2x = 0}$

Te olvidaste el -4 y arrastraste error

~~Como~~

$\cancel{\int_C G \cdot dl =}$

Parametrizo la circunferencia en el primer cuadrante, con la orientación pedida

$\alpha : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (\cos t, \text{sen}\, t)$

$$\int_C G \cdot dl = \int_0^{\pi/2} G(\cos t, \text{sen}\, t) \cdot (-\text{sen}\, t, \cos t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} (2 \cos t\, \text{sen}\, t \overset{-4}{\wedge}, \text{sen}^2 t)(-\text{sen}\, t, \cos t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} -2 \cos t\, \text{sen}^2 t \overset{4\,\text{sen}\, t}{\wedge} + \text{sen}^2 t \cos t \quad dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} -\text{sen}^2 t \cos t\, dt = -\int_0^1 u^2\, du = -\frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \times$$

$u = \text{sen}\, t$
$du = \cos t\, dt$

$u(0) = 0$
$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

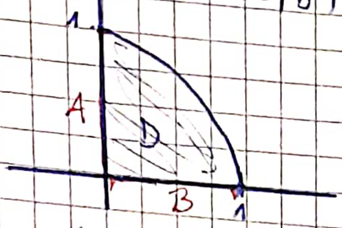
arrastra error

Asamblea

CamScanner

$H = \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) , \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)$

- H es un campo C^∞ en $\mathbb{R}^2$, entonces en particular es C^1 en D el siguiente dominio, encerrado por la circunferencia unitaria de centro $(0,0)$ en el primer cuadrante y los segmentos A y B



(No alcanza con el dibujo, hay que describir el dominio matemáticamente)

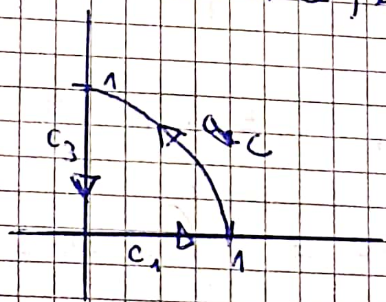
- D es una región de tipo 3

se cumplen los hipótesis del teorema de Green, por lo tanto

¿Cuáles? Falta decir que ∂D es una curva suave a trozos

$$\iint_D \text{rot}(H)\, dA = \int_{\partial D^+} H \cdot dl$$

considerando la frontera de D recorrida positivamente, según la regla del tornillo, es decir de la siguiente manera



calculo rot(H)

$$\text{rot}(H) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1^+} H \cdot dl + \int_{C^+} H \cdot dl + \int_{C_3^+} H \cdot dl = 0$$

Asamblea

Parametrizo C_1 con orientación positiva

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t, 0)$

$H(\alpha(t)) = \left(0, \frac{1}{2}\cos(0)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$= \left(0, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$

$\alpha'(t) = (1, 0)$ ✓

$\int_0^1 H(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt =$

$\int_0^1 \left(0, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cdot (1,0)\, dt = 0$ ✓

Parametrizo C_3 con orientación positiva

$\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\beta(t) = (0, 1-t)$

$H(\beta(t)) = \left(0, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1-t}{2}\right)\right)$

$\beta'(t) = (0, -1)$ ✓

$\int_0^1 H(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\, dt = \int_0^1 \left(0, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1-t}{2}\right)\right)(0,-1)\, dt =$

$-\int_0^1 \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1-t}{2}\right) dt = \int_{1/2}^{0} \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u)\Big|_{1/2}^{0}$

$= -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$ ✓

$u = \frac{1-t}{2}$

$du = -\frac{1}{2} dt$

$u(0) = \frac{1}{2}$

$u(1) = 0$

Asamblea

CamScanner

$$\int_{C_1^+} H \cdot dl + \int_{C^+} H \cdot dl + \int_{C_3^+} H \cdot dl =$$

$$\int_{C^+} H \cdot dl + 0 - \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{C^+} H \cdot dl = -\cancel{\text{sen}(8)} \, \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$I = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Parametrizo C en sentido antihorario

$\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t)$

$$\int_C I \cdot dl = \int_0^{\pi/2} I(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} (-\text{sen}\, t, \cos t)(-\text{sen}\, t, \cos t) \, dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 t + \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Juntando todo

$$\int_C F \cdot dl = \int_C G \cdot dl + \int_C H \cdot dl + \int_C I \cdot dl$$

$$\cancel{\Rightarrow} = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}$$

arrastra error

B

Ejercicio 2

$rot(F) = 3-1 = 2$

Escribo F como suma de dos campos, G y H

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$G(x,y) = (y, 3x)$

$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$H(x,y) = (x\sin(x^2), -\cos(e^{y^2}))$

$$\Longrightarrow \int_C F \cdot dl = \int_C G \cdot dl + \int_C H \cdot dl$$

-) calculo $\int_C G \cdot dl$

$$\int_0^{\pi} G(-6\cos t, 6\sin t) \cdot (6\sin t, 6\cos t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} (6\sin t, -18\cos t) \cdot (6\sin t, 6\cos t)\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} 36\sin^2 t \cancel{+} - 108\cos^2 t\, dt$$

---

cálculos auxiliares

$\int \sin^2 t\, dt$

$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$

$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t \quad -\sin^2 t - \cos^2 t + 1$

$\cos(2t) = -2\sin^2 t + 1$

$2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$

$\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

Asamblea

CamScanner

$$\int \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{2}\,dt - \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{sen(2t)}{4} + c$$

• $\int \cos^2 t\,dt$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - sen^2 t$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

$$\frac{\cos(2t)+1}{2} = \cos^2 t$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \frac{sen(2t)}{4} + \frac{1}{2}t + c$$

fin de calculos auxiliares

$$\int_0^{\pi} 36\,sen^2 t - 108\cos^2 t\,dt =$$

$$36\int_0^{\pi} sen^2 t\,dt - 108\int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt =$$

$$36\left(\frac{t}{2} - \frac{sen(2t)}{4}\right)\Big|_0^{\pi} - 108\left(\frac{sen(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$36\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{0}{2} + 0\right) - 108\left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 0\right) =$$

$$\frac{36\pi}{2} - 108\frac{\pi}{2} = -36\pi$$ ✓

Asamblea

·) $\int_C H \cdot dl$

(*) Por teorema de los campos conservativos

$H(x,y) = (x \sin(x^2), -\cos(e^{y^2}))$

$rot(H) = 0$

como H es C^1 y $rot(H) = 0$, (*) $\int_C H \cdot dl =$

$\int_{C'} H \cdot dl$, donde C' es otra curva con los mismos extremos que C

$\sigma(\pi) = (6, 0)$

$\sigma(0) = (-6, 0)$

considero el segmento de recta que une ambos puntos, y lo parametrizo

$\alpha : [-6, 6] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t, 0)$

$\int_{C'} H \cdot dl =$

$\int_{-6}^{6} H(t,0) \cdot (1,0)\, dt =$

$\int_{-6}^{6} (t \sin(t^2), 3t - \cos(1)) (1,0)\, dt =$

$\int_{-6}^{6} t \sin(t^2)\, dt = -\frac{\cos(t^2)}{2}\Big|_{-6}^{6} = -\frac{\cos(36)}{2} + \frac{\cos(36)}{2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\int_C F \cdot dl = \int_C G \cdot dl + \int_C H \cdot dl = -36\pi + 0 = -36\pi}$

B

Asamblea

CS CamScanner

independiente, $\int_{\partial S_2^+} G\cdot dl = \int_{C^+} G\cdot dl$ o bien $\int_{\partial S_2^+} G\cdot dl = \int_{C^-} G\cdot dl$

Pues $C = \partial S_2$ y la orientación del borde está ~~dada~~ determinado por la orientación de S_2

asimismo
$$\int_{C^+} G\cdot dl = -\int_{C^-} G\cdot dl$$

luego, al elevarse al cuadrado

$$\left(\int_{C^+} G\cdot dl\right)^2 = \left(\int_{C^-} G\cdot dl\right)^2 =$$

$$\left(\int_{\partial S_2^+} G\cdot dl\right)^2 = \left(\int_{\partial S_1^+} G\cdot dl\right)^2 =$$

$$\left(\iint_{S_1} B\cdot ds\right)^2 = \left(\iint_{S_2} B\cdot ds\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\iint_{S_1} B\cdot ds\right)^2 - \left(\iint_{S_2} B\cdot ds\right)^2 = 0$$

Y en los otros casos la igualdad es evidente $\boxtimes$

B