Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 1: Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

1. Curvas

Para Preguntar

Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) una curva simple abierta y $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición π de $[a, b]$. Esto induce una partición $\mathcal{P}$ de la curva $\mathcal{C}$ dada por los puntos $P_n = \sigma(t_n)$.

Podemos pensar a los puntos P_n como vértices de una poligonal. Cuantos más puntos tenga, más parecida será la poligonal a la curva $\mathcal{C}$. La idea es que las longitudes de las poligonales tenderán a la longitud de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{P}'$ es una partición más fina, es decir, si todos los puntos de $\mathcal{P}$ están contenidos en $\mathcal{P}'$, la longitud $\mathcal{L}(\mathcal{P}')$ será mayor o igual a $\mathcal{L}(\mathcal{P})$,

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}') \geq \mathcal{L}(\mathcal{P}).$$

En efecto, si entre dos puntos consecutivos P_1 y P_2 de la partición $\mathcal{P}$ tengo puntos $S_1, S_2, \cdots, S_k$ de la partición $\mathcal{P}'$, la longitud del segmento de extremos P_1 y P_2 verifica

$$\|P_1 - P_2\| \leq \|P_1 - S_1\| + \|S_1 - S_2\| + \cdots + \|S_k - P_2\|$$

que es parte de la suma que da la longitud $\mathcal{L}(\mathcal{P}')$.

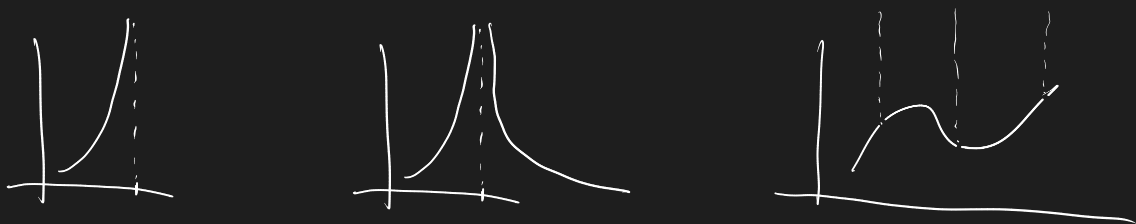
Definición

Si existe una cota superior finita para las longitudes de todas las poligonales con vértices en la curva $\mathcal{C}$ decimos que $\mathcal{C}$ es rectificable y definimos la longitud de $\mathcal{C}$ como la menor de esas cotas, es decir

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) := \sup \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{P}) \colon \mathcal{P} \text{ es una partición de } \mathcal{C} \right\}.$$

Cuándo no existiría?

Supongo que cuando $\mathcal{C}$ se va a infinito



Pero por Ile:

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ es suave ($\exists\ \sigma$ regular)

σ es C^1 e inyectiva

$\Rightarrow$ $\forall t \in [a,b]$ $\exists\ \sigma(t) \in \mathcal{C}$

intervalo cerrado

$\Rightarrow$ <u>no</u> puede tender a infinito

$\Rightarrow$ Pregunta: ¿Cuándo <u>no</u> es rectificable?

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_t \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_t \langle \lambda(t) \cdot \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_t \lambda(t) \langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_t \lambda(t) \cdot \| \sigma'(t) \|^2 dt$$

Ejercicio 22. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

$$\text{Trabajo} = \int_{\underset{\nwarrow \text{trayectoria}}{\mathcal{C}}} F \cdot dt$$

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot x, \; \ldots \cdot y, \; \ldots \cdot z \right)$$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial x}$$

$$f_x = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot \cancel{2}x$$

$\Rightarrow$ Como $F = \nabla f$, F es C.C.

$$\therefore \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(p_2) - f(p_1)$$

O sea, solo depende de $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y

$p_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Pero como $f(x_1, y_1, z_1)$ se repite para distintos valores de (x_i, y_i, z_i)

y como $f(x_1, y_1, z_1) = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{-1/2}$

y $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 > 0 \quad \forall\, x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad g(x,y,z) = \frac{1}{f(x,y,z)}$$

Llamo $R_1 = g(x_1, y_1, z_1)$

$R_2 = g(x_2, y_2, z_2)$

y así mostré que el trabajo depende solo de R_1 y R_2, que podemos pensar como el radio de una esfera, pues raíz de una esfera, es una esfera de radio $\sqrt{r_{original}}$.