final 18/2/21

1) Sea el campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{xz}z + y, x, xe^{xz} + z)$$

¿Es $\mathbf{F}$ conservativo?.

Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$\sigma(t) = (\mathrm{sen}(2\pi b(t)), \cos(2\pi b(t)), t)\,,$$

con b una función C^1 tal que $b(0) = 0$ y $b(1) = 1$.

F es conservativo si es $\nabla f = F$

$f = e^{xz} + xy + \frac{z^2}{2}$ es tal que $\nabla f = \left(z e^{xz} + y, x, x e^{xz} + z\right) = F$

entonces F es conservativo.

$$\int F \cdot ds = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = f(\sigma(t))\Big|_0^1 = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$$

$\sigma(1) = (0,1,1)$ $\quad f(0,1,1) = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$

$\sigma(0) = (0,1,0)$ $\quad f(0,1,0) = 1$

$\Big\}\ \int F \cdot ds = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

2) Enunciar y demostrar el Teorema de Gauss.

Sea

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Probar que

$$\iint_S \nabla f ds = 0$$

para cualquier superficie suave que encierre un volumen Ω con $0 \notin \Omega$.

¿Qué sucede si $0 \in \Omega$?. Sea $S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r\}$ con normal exterior. ¿La integral

$$\iint_{S_r} \nabla f ds$$

se puede calcular?.

Teorema de Gauss (en $\mathbb{R}^2$)

Sea $\vec{F}$ C^1 y D una región donde vale Green

$$\Rightarrow \iint_D \nabla \cdot F\, dxdy = \int_{\partial D} F \cdot \nu^E\, d\ell$$

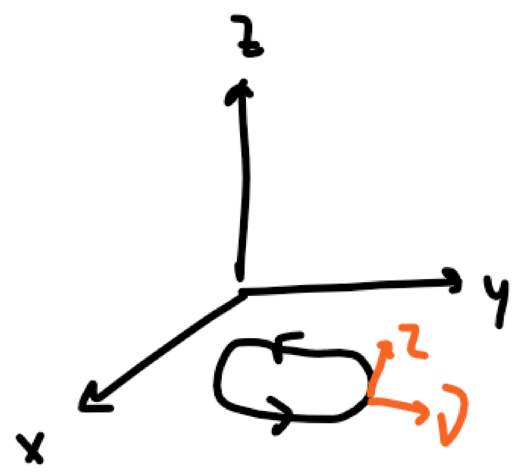
normal exterior

Demostración

parametrizo ∂D $\quad \sigma(t) = (x(t), y(t))$

$$\tau = \frac{(x'(t), y'(t))}{\|(x'(t), y'(t))\|}$$

$$\nu = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|(y'(t), -x'(t))\|} \to \text{compruebo que es la normal exterior}$$



$\to$ por regla de la mano derecha $\tau \times \nu < 0$.

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ y'(t) & -x'(t) \end{vmatrix} = -x'^2(t) - y'^2(t) = -(x'^2(t) + y'^2(t)) < 0 \Rightarrow \nu \text{ es la normal exterior.}$$

$$\nabla \cdot F = F_{1x} + F_{2y} = Q_x - P_y \Rightarrow F_1 = Q\,,\ -F_2 = P$$

$$\iint_D \nabla \cdot F\, dxdy \underset{\text{green}}{=} \int_{\partial D^+} -F_2 dx + F_1 dy = \int_{\partial D^+} (F_1, F_2)(y'(t), -x'(t))\, dt = \int_{\partial D^+} F \underbrace{\overbrace{\frac{(y'(t), -x'(t))}{\|(x'(t), y'(t))\|}}^{\nu^E}}\ \underbrace{\|(x'(t), y'(t))\|\, dt}_{d\ell}$$

$\Rightarrow \int_{\partial D^+} \vec{F}\, \nu^E\, d\ell$ el teorema queda demostrado.

En $\mathbb{R}^3$

Dada F C^1 $F=(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ y Ω tipo III $\Rightarrow \iiint_\Omega div(F)\,dV = \iint_S F\cdot\nu^E ds$

con $S=\partial\Omega$

Demostración.

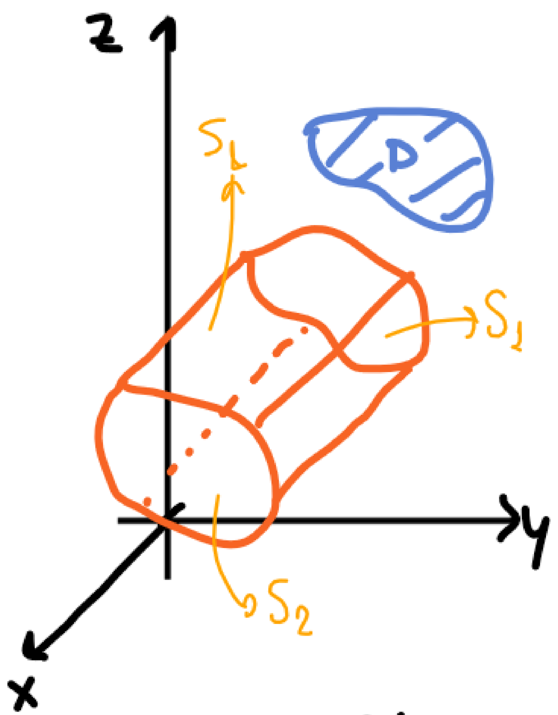
Notar que

$$\iiint_\Omega \nabla\cdot F\,dV = \iiint_\Omega F_{1x}\,dV + \iiint_\Omega F_{2y}\,dV + \iiint_\Omega F_{3z}\,dV$$

$$\iint_S F\cdot\nu^E ds = \iint_S (F_1,0,0)\cdot\nu^E ds + \iint_S (0,F_2,0)\cdot\nu^E ds + \iint_S (0,0,F_3)\cdot\nu^E ds$$

tengo que demostrar que se cumplen las igualdades en colores

(1) usando que Ω es de tipo III



$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (y,z)\in D,\ g_1(y,z)\le x\le g_2(y,z)\}$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dV = \iint_D\left(\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx\right)dy\,dz = \iint_D \left(F_1(g_2(y,z),y,z) - F_1(g_1(y,z),y,z)\right)dy\,dz$$

$$\iint_S (F_1,0,0)\cdot\nu^E ds = \iint_{S_1} F_1\,\nu_1^E ds + \iint_{S_L} F_1\cdot\underbrace{\nu_1^E}_{=0} ds + \iint_{S_2} F_1\cdot\nu_1^E ds$$

ν^E en S_L no tiene componente x

Parametrizo S_1

$$\phi(y,z)=(g_1(y,z),y,z) \qquad \phi_y(y,z)=(g_{1y}(y,z),1,0) \qquad \phi_z(y,z)=(g_{1z}(y,z),0,1)$$

$$\phi_y(y,z)\times\phi_z(y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ g_{1y} & 1 & 0 \\ g_{1z} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\underbrace{1}_{>0\ \Rightarrow\ \nu\ \text{interior}}, -g_{1y}(y,z), -g_{1z}(y,z))$$

$$\nu^E = \frac{(-1, g_{1y}(y,z), g_{1z}(y,z))}{\|(-1, g_{1y}(y,z), g_{1z}(y,z))\|}$$

analogamente para S_2 $\nu^E = \dfrac{(1,-g_{2y}(y,z),-g_{2z}(y,z))}{\|(1,-g_{2y}(y,z),-g_{2z}(y,z))\|}$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} F_1\cdot\frac{-1}{\|(-1,g_{1y}(y,z),g_{1z}(y,z))\|}ds + \iint_{S_2} F_1\frac{1}{\|(1,-g_{2y}(y,z),-g_{2z}(y,z))\|}ds =$$

$$-\iint_D F_1(g_1(y,z),y,z)\,dy\,dz + \iint_D F_1(g_2(y,z),y,z)\,dy\,dz$$ se demuestra la igualdad.

Analogamente para las otras igualdades se demuestra el teorema.

$$\iint_S \nabla f\, ds = 0 \qquad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + x\,\frac{3}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{-(x^2+y^2+z^2)+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)+3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)+3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\mathrm{div}(\nabla f) = \frac{-3(x^2+y^2+z^2)+3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow \iiint_\Omega \mathrm{div}(\nabla F)\,dV = 0.$$

Como ∇f es $\mathcal{C}^1$ en Ω por el teorema de Gauss $\iint_S \nabla f\, ds = 0$

Si $0 \in \Omega$ ∇f no es $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ no vale Gauss.

Habría que calcular la integral por otros métodos.

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Supongamos que dos soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de

$$x'(t) = f(x(t))$$

verifican

$$x_1(a) = x_2(b)$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$x_1(t) = x_2(t+b-a) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

¿Es cierto el resultado si f depende de t, es decir, para soluciones de $x'(t) = f(t, x(t))$?.

Propiedad $\{x_1(t) / t \in I\} \cap \{x_2(t)/t \in I\} = \emptyset$ o $\{x_1(t) / t \in I\} = \{x_2(t)/t \in I\}$

es consecuencia del principio de unicidad

Si $x_1(a) = x_2(b) = x_0 \Rightarrow$ puedo definir $\tilde{x} = x_2(t+b-a)$ solución de mi sistema

como $x_1(t)$ es solución de mi sistema tambien

por unicidad $x_1(t) = \tilde{x}(t) = x_2(t+b-a)$

No, necesito que $x'(t) = f(x(t))$ para que se cumpla la propiedad.

4) Hallar una base de soluciones de

$$X'(t) - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t) = 0,$$

y describir aquellas soluciones que verifican

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x' + 2x = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$$ con $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x' = \frac{dx}{dt}$ $y' = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x \\ x+y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x+y \end{cases} \longrightarrow y'' - y' = -2y' + 2y \longrightarrow y'' + y' - 2y = 0$$

$\longrightarrow x = y' - y$

$x' = y'' - y'$

$y = e^{rt}$ $\quad y' = re^{rt}$ $\quad y'' = r^2 e^{rt}$

$r^2 \cancel{e^{rt}} + r\cancel{e^{rt}} - 2\cancel{e^{rt}} = 0$

$r^2 + r - 2 = 0$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \to \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$ autovalores

$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$ es solución.

$y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

$x = y' - y$

$x = -2C_1 e^{-2t} + \cancel{C_2 e^{t}} - C_1 e^{-2t} - \cancel{C_2 e^{t}}$

$x = \underbrace{-3C_1}_{k_1} e^{-2t}$

$x = k_1 e^{-2t}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda = -2 \quad \lambda = 1$

autovalores.

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 + 3v_2 = 0$$

$v_1 = -3v_2 \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

autovectores asociados. (LI)

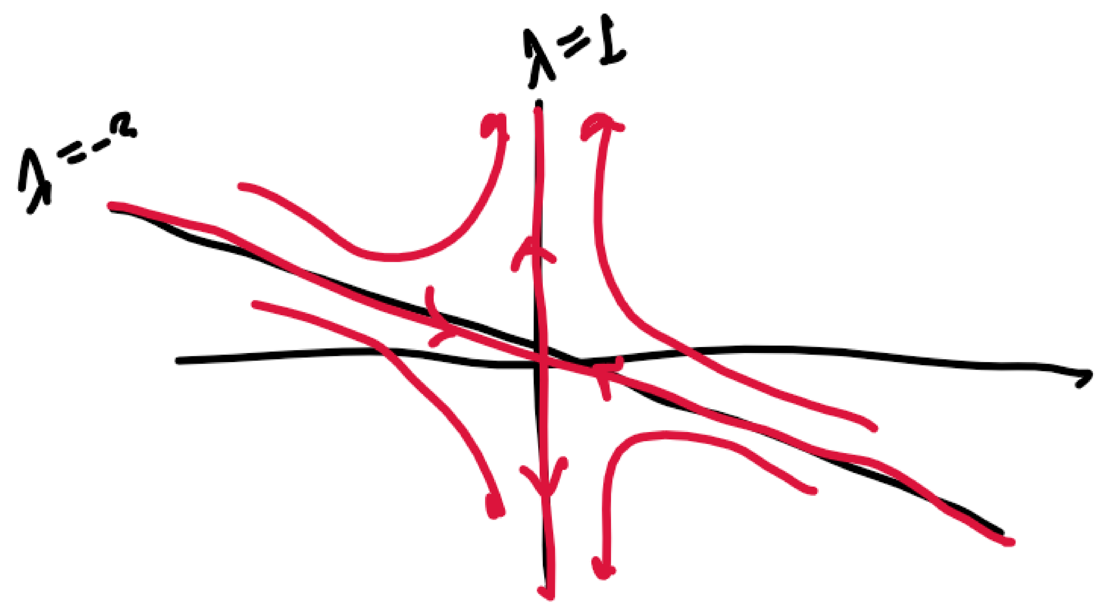
$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -3v_1^* = 0$$

$v_1^* = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix}$

$$X(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lim_{t\to+\infty} e^{t} = 0$$

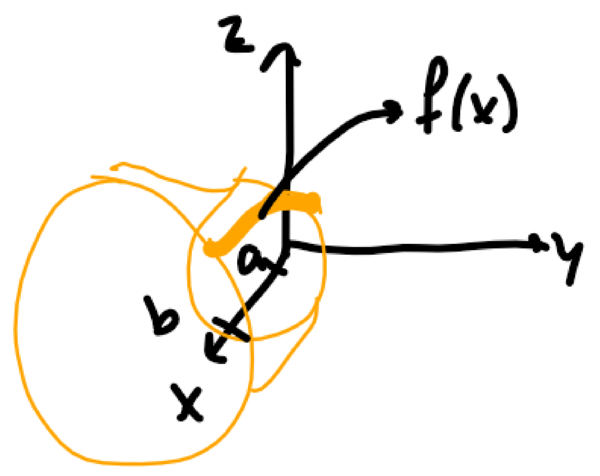


$\Longleftrightarrow C_2 = 0.$

23/4/21

1. Demostrar que el área de la superficie obtenida al girar la gráfica de una función derivable $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ alrededor del eje x está dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx$$



Parametrización

$$\gamma(x,\theta) = (x,\ f(x)\cos(\theta),\ f(x)\operatorname{sen}(\theta)) \qquad a \leq x \leq b \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$A = \iint_S 1 \, \|\gamma_x \times \gamma_\theta\| \, dx\, d\theta .$$

$$\gamma_x(x,\theta) = (1,\ f'(x)\cos(\theta),\ f'(x)\operatorname{sen}(\theta)) \qquad \gamma_\theta(x,\theta) = (0, -f(x)\operatorname{sen}(\theta),\ f(x)\cos(\theta))$$

$$\gamma_x(x,\theta) \times \gamma_\theta(x,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(x)\cos(\theta) & f'(x)\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & -f(x)\operatorname{sen}(\theta) & f(x)\cos(\theta) \end{vmatrix} = (f'(x)f(x)\cos^2(\theta) + f'(x)f(x)\operatorname{sen}^2(\theta),\ -f(x)\cos(\theta),\ -f(x)\operatorname{sen}(\theta))$$

$$\|\gamma_x \times \gamma_\theta\| = \sqrt{(f'(x)f(x))^2 + f(x)^2\cos^2(\theta) + f(x)^2\operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{f(x)^2((f'(x)^2)+1)} = |f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_a^b \underbrace{|f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}}_{\text{no depende de } \theta} \, dx\, d\theta = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}$$

tomando $\gamma_\theta \times \gamma_x$

$$\gamma_\theta \times \gamma_x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -f(x)\operatorname{sen}(\theta) & f(x)\cos(\theta) \\ 1 & f'(x)\cos(\theta) & f'(x)\operatorname{sen}(\theta) \end{vmatrix} = (-f(x)f'(x)\operatorname{sen}^2(\theta),\ f(x)\cos(\theta),\ f(x)\operatorname{sen}(\theta))$$

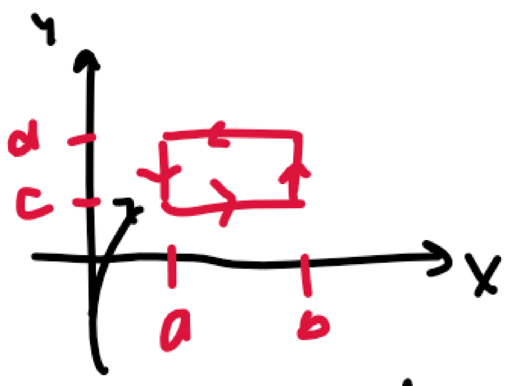
$$\|\gamma_\theta \times \gamma_x\| = \sqrt{f(x)^2 f'(x)^2 + f(x)^2} = |f(x)|\sqrt{1+|f'(x)|^2}$$

es lo mismo.
(no importa la orientación de la normal)

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1, tal que para todo rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ vale

$$\int_C F.\,ds = 0,$$

donde C es el borde de Q. Probar que F es conservativo.



curva cerrada, simple, suave a trozos.

teorema de las equivalencias.

Sea $\vec{F}$ un campo C^1 son equivalentes:

① $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0 \quad \forall\, \mathcal{C}$ cerrada, simple y orientable.

② $\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_{\mathcal{C}} F\, ds \quad \forall\, \mathcal{C}$ abierto, simples, con la misma orientación y los mismos extremos.

③ $\vec{F} = \nabla f$.

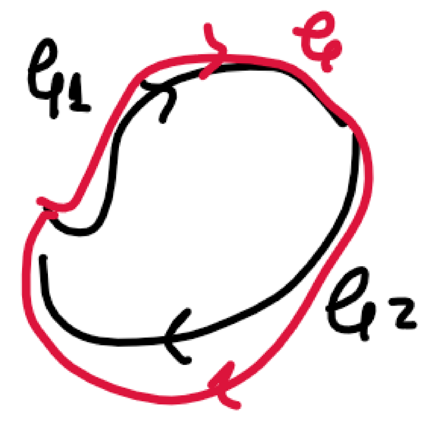
↳ si se cumple esto $\vec{F}$ es conservativo.

① ⇒ ②

$\mathcal{C}_1^+$ curva abierta suave
$\mathcal{C}_2^-$ curva abierta suave

} los mismos extremos y distinta orientación

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^+ - \mathcal{C}_2^-$

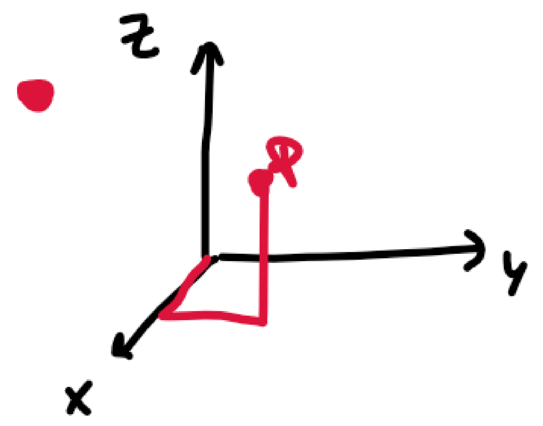


Como $\int_{\mathcal{C}} F\,ds = 0 = \int_{\mathcal{C}_1} F\,ds - \int_{\mathcal{C}_2} F\,ds \Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} F\,ds.$

$\boxtimes$

② ⇒ ③

tomamos $f = \int_{\mathcal{C}} F\,ds$ con $\mathcal{C}$ una curva de $(0,0,0)$ a (x,y,z)



$\sigma_1(t) = (t, 0, 0) \quad t \in [0, x] \quad \sigma_1'(t) = (1, 0, 0)$

$\sigma_2(t) = (x, t, 0) \quad t \in [0, y] \quad \sigma_2'(t) = (0, 1, 0)$

$\sigma_3(t) = (x, y, t) \quad t \in [0, z] \quad \sigma_3'(t) = (0, 0, 1)$

$$f = \int_{\mathcal{C}} F\,ds = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt$$

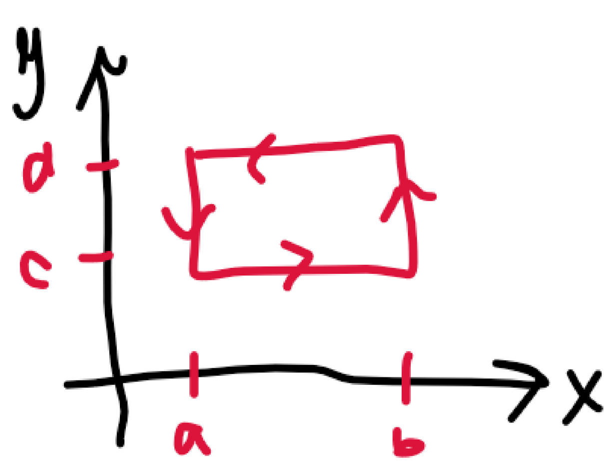
$\frac{\partial f}{\partial z} = F_3(x,y,z)$

analogamente para las otras componentes se llega a que

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (F_1, F_2, F_3)$

$\boxtimes$

Entonces $\vec{F} = \nabla f \Rightarrow F$ es conservativo.



$\sigma_1^+(t) = (t, c) \quad a \leq t \leq b$

$\sigma_2^+(t) = (b, t) \quad c \leq t \leq d$

$\sigma_3^-(t) = (t, d) \quad a \leq t \leq b$

$\sigma_4^-(t) = (a, t) \quad c \leq t \leq d$

$\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada, suave a trozos y orientable.

3. Considerar la ecuación $y'' + \alpha y' + y = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Encontrar todos los valores de α que hacen que todas las soluciones de la ecuación tengan infinitas raíces. ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que haga que todas las soluciones de la ecuación sean funciones acotadas? $\alpha = 0$, ¿$\alpha = 2, -2$?

b) Elegir uno de los valores de α del punto anterior y resolver el problema

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

$y'' + \alpha y' + y = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Polinomio característico.

$\hookrightarrow \lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \end{cases}$$

$\alpha^2 - 4 < 0 \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{C}$

$\alpha^2 < 4$

$|\alpha| < 2$

$-2 < \alpha < 2$ → para que haya infinitas soluciones

Si λ es $\mathbb{R} \Rightarrow$ mis soluciones son de la forma $e^{\lambda t}$ (inyectiva)

$\leq 1 + i1$

Si λ es $\mathbb{C} \Rightarrow$ mis soluciones son $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt))$ que tiene infinitas raíces.

(*)

$\alpha\,(-2, 2)$, $\quad \alpha = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lim_{t \to \pm\infty} e^{at}$ converge $\iff a = 0 \iff \alpha = 0$

Planteo

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. y $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$.

$\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$

$t \to +\infty$.

$\lambda_1 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \leq 0 \rightsquigarrow \sqrt{\alpha^2 - 4} \leq \alpha \to |\alpha^2 - 4| \leq \alpha^2 \Rightarrow 4 - \alpha^2 \leq \alpha^2 \leq \alpha^2 - 4$

$4 - 2\alpha^2 \leq 0$

$\lambda_2 = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2-4}}{2} \leq 0 \to$ se cumple $\forall \alpha \in (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$

$4 \leq 2\alpha^2$

$2 \leq \alpha^2$

$\forall \alpha \in (-\infty, -2] \cup [2; +\infty)$

$\sqrt{2} \leq \alpha \qquad \alpha \leq -\sqrt{2}$

Como $|\sqrt{2}| < 2 \Rightarrow \lambda_1 \leq 0$
$\forall \alpha \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$

$t \to -\infty$

$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0 \iff \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 = \sqrt{\alpha^2 - 4} = -\sqrt{\alpha^2 - 4} \iff \alpha^2 - 4 = 0$

$\alpha = 2 \quad \alpha = -2$ para que la función converja.

$$\alpha=0 \begin{cases} y''+y=x^2 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

Homogenea.

$\lambda^2+1=0$

$\lambda^2=-1$

$|\lambda|=\sqrt{-1}$

$\lambda = i$

$\quad \hookrightarrow -i$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x)=e^{ix}\ C_1 \\ y_2(x)=e^{-ix}\ C_2 \end{array}\right\} \text{soluciones del homogénea}$$

$y_1(x) = C_1(\cos(x)+i\,\text{sen}(x))$

$y_2(x)=C_2(\cos(x)-i\,\text{sen}(x))$

Comb. lineales de las soluciones deben ser soluciones.

$$y_1^* = \frac{y_1(x)-\frac{C_1}{C_2}y_2(x)}{2i} = \frac{C_1\ 2i\,\text{sen}(x)}{2i} = C_1\ \text{sen}(x)$$

$$y_H = C_1\ \text{sen}(x)+C_2\cos(x)$$

$$y_2^* = \frac{\frac{C_2}{C_1}y_1(x)+y_2(x)}{2} = \frac{C_2\ 2\cos(x)}{2} = C_2\ \cos(x)$$

particular

propongo

$$\left.\begin{array}{l} y_p(x)=ax^2+bx+c \\ y'_p(x)=2ax+b \\ y''_p(x)=2a \end{array}\right\} 2a+ax^2+bx+c=x^2$$

$a=1$

$b=0$

$2a+c=0 \Rightarrow c=-2$

$y_p(x)=x^2-2$

$y(x)=C_1\ \text{sen}(x)+C_2\cos(x)+x^2-2$

$y(0)=C_2-2=1 \rightarrow C_2=3$

$y'(x)=C_1\cos(x)-C_2\,\text{sen}(x)+2x$

$y'(0)= C_1=2$

$y(x)=2\,\text{sen}(x)+3\cos(x)+x^2-2$

9/2/21

1) Calcular $a(y)$ tal que el campo $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(a(y)e^{xz}z+y,x+2ye^{xz},a(y)xe^{xz})$$

sea conservativo. ¿Es única $a(y)$?. Para la funcion $a(y)$ hallada calcular la integral de línea del campo dado por

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\mathbf{F}(x,y,z)-(0,y,0)$$

a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, donde

$$\sigma(t)=\left(b(t),t^2,\operatorname{sen}(b^2(t))\right),$$

y $b:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $b(0)-b(1)=0$.

$f = a(y)e^{xz} + xy + k$ es tal que $\nabla f = F$ → por equivalencias $\operatorname{rot}(F)=0$

$a'(y) = 2y \Rightarrow a(y) = y^2 + c$ → no es única.

tomo $a(y)=y^2$: $\quad G(x,y,z) = (y^2e^{xz}z + y,\ x + 2ye^{xz} - y,\ y^2xe^{xz})$

$$\underbrace{\int_0^1 F(\sigma(\tau))\cdot\sigma'(\tau)\,d\tau}_{\text{como } \operatorname{rot}(F)=0 \text{, } F \text{ conservativo}} + \underbrace{\int_0^1 -2t^3\,dt}_{1/2}$$

$\sigma'(t) = (b'(t),\ 2t,\ \cos(b^2(t))\,2b(t)\,b'(t))$

$$\int_0^1 F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) =$$

$$\operatorname{rot}(G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2e^{xz}z+y & x+2ye^{xz}-y & y^2x\,e^{xz} \end{vmatrix} = \left(\cancel{2yxe^{xz}} - \cancel{x2ye^{xz}},\ -\cancel{y^2e^{xz}} - \cancel{xzy^2e^{xz}} + \cancel{y^2xe^{xz}z} + \cancel{y^2e^{xz}},\ \cancel{1} + \cancel{2yze^{xz}} - \cancel{2ye^{xz}z} - \cancel{1}\right) = 0$$

$\sigma(1) = (b(1),\ 1,\ \operatorname{sen}(b^2(1)))$

$\sigma(0) = (b(0),\ 0,\ \operatorname{sen}(b^2(0)))$

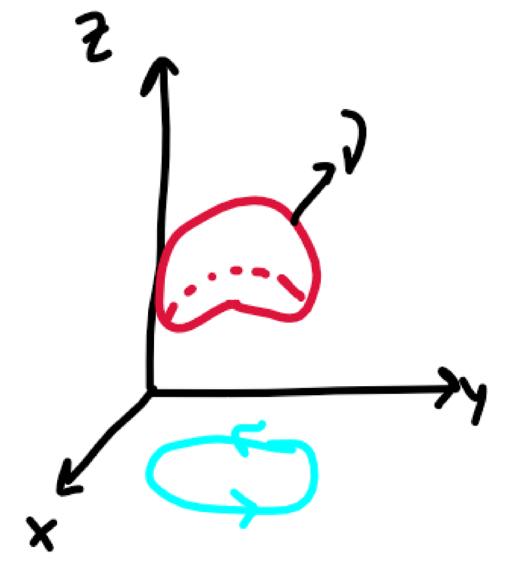
$$g = y^2e^{xz} + xy - \frac{y^2}{2}$$

$$\int_0^1 G(\sigma(t))\,\sigma'(t)\,dt = g(\sigma(1)) - g(\sigma(0)) = e^{b(1)\operatorname{sen}(b^2(1))} + b(1) - \frac{1}{2}$$

2) Enunciar y demostrar el Teorema de Stokes para gráficas.

El teorema de Stokes para gráficas dice que sea S una superficie que es gráfico de una función en D un dominio elemental F C^1 en D:

$$\iint_S (\nabla \times F)\, d\vec{S} = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot ds$$



parametrizo S $\quad \gamma(x,y) = (x, y, f(x,y)) \quad (x,y) \in D$.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_x(x,y) &= (1, 0, f_x(x,y)) \\ \gamma_y(x,y) &= (0, 1, f_y(x,y)) \end{aligned}\right\} \gamma_x \times \gamma_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), \underbrace{1}_{>0})$$

$\partial D^+ \quad \sigma_1(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b]$

$\partial S^+ \quad \sigma_2(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \qquad t \in [a,b]$

$$\sigma_2'(t) = (x'(t), y'(t), f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))\,y'(t))$$

$$(F_1, F_2, F_3) \circ \sigma_2(t) \cdot (\sigma_2'(t)) = F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 f_x x'(t) + F_3 f_y y'(t)$$

$$\int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot ds = \iint_S \underbrace{(F_1 + F_3 f_x)}_{P} dx + \underbrace{(F_2 + F_3 f_y)}_{Q} dy \overset{\text{Green}}{=} \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$$

$$Q = F_2(x, y, f(x,y)) + F_3(x, y, f(x,y))\, f_y$$

$$Q_x = F_{2x}(x,y,f(x,y)) + F_{2z}(x,y,f(x,y)) \cdot f_x(x,y) + (F_{3x}(x,y,f(x,y)) + F_{3z}(x,y,\cancel{f(x,y)}) \cdot f_x(x,y))\, f_y + F_3(x,y,\cancel{f(x,y)})\, f_{yx}$$

$$P = F_1(x, y, f(x,y)) + F_3(x, y, f(x,y))\, f_x$$

$$P_y = F_{1y}(x,y,f(x,y)) + F_{1z}(x,y,f(x,y))\, f_y(x,y) + (F_{3y}(x,y,f(x,y)) + F_{3z}(x,y,\cancel{f(x,y)})\, f_y(x,y))\, f_x + F_3(x,y,\cancel{f(x,y)})\, f_{xy}$$

$$Q_x - P_y = F_{2x} - F_{1y} + f_x(x,y)(F_{2z} - F_{3y}) + f_y(x,y)(F_{3x} - F_{1z})$$

$$\iint_D (F_{2x} - F_{1y} + f_x(F_{2z} - F_{3y}) + f_y(F_{3x} - F_{1z}))\, dx\,dy$$ (compuestas por $\sigma_2(t)$)

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y})$$

$$\iint_S \nabla \times F\, d\vec{S} = \iint_D (F_{3y} - F_{2z}, F_{1z} - F_{3x}, F_{2x} - F_{1y}) \circ \gamma(x,y) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dx\,dy$$

$$= \iint_D (F_{2x} - F_{1y} + f_x(F_{2z} - F_{3y}) + f_y(F_{3x} - F_{1z}))\, dx\,dy$$

equivalente $\Rightarrow$ queda demostrado Stokes.

Final 7/10/16

1

(a) Mostrar que la longitud de una curva $\mathcal{C}$ dada por la parametrización $\sigma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\operatorname{sen}(t), z(t))$ con $\theta_1 \le t \le \theta_2$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ y $r > 0$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r'^2_{(t)} + r^2(t) + z'(t)^2}$$

(b) Hallar la long($\mathcal{C}$) con $r(t) = 3$ y $z(t) = 2$ $\quad t \in [0, \pi]$

a- $\operatorname{long}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt$

$$\sigma' = (r'(t)\cos(t) - r(t)\operatorname{sen}(t), \; r'(t)\operatorname{sen}(t) + r(t)\cos(t), \; z'(t))$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(r'(t)\cos(t) - r(t)\operatorname{sen}(t))^2 + (r'(t)\operatorname{sen}(t) + r(t)\cos(t))^2 + z'(t)^2} =$$

$$= \sqrt{r'^2\cos^2 - \cancel{2r'r\cos\operatorname{sen}} + r^2\operatorname{sen}^2 + r'^2\operatorname{sen}^2 + \cancel{2rr'\operatorname{sen}\cos} + r^2\cos^2 + z'^2} =$$

$$= \sqrt{r'^2_{(t)} + r^2_{(t)} + z'^2_{(t)}}$$

$$\operatorname{long}(\mathcal{C}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r'^2_{(t)} + r^2(t) + z'(t)^2} \, dt \qquad \text{porque} \qquad t \in [\theta_1, \theta_2]$$

(b) $r(t) = 3 \Rightarrow r'(t) = 0 \qquad z(t) = 2 \Rightarrow z'(t) = 0$

$$\operatorname{long}(\mathcal{C}) = \int_0^{\pi} 3 \, dt = 3\pi$$

Propiedad Dada $\mathcal{C}$ descripta por $\sigma(t)$ inyectiva y C^1.

$$\operatorname{long}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

$\sigma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\operatorname{sen}(t), z(t)) \rightarrow$ Si $z(t)$ y $r(t)$ son $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \sigma(t)$ es $\mathcal{C}^1$.

inyectivas: $\sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow a = b$

$$\begin{cases} (1)\; r(a)\cos(a) = r(b)\cos(b) \\ (2)\; r(a)\operatorname{sen}(a) = r(b)\operatorname{sen}(b) \\ z(a) = z(b) \rightarrow \text{Si } z(t) \text{ es inyectiva } a = b \end{cases}$$

Como $r > 0$:

(2):(1) $\operatorname{tang}(a) = \operatorname{tang}(b)$

con $0 \le a \le b < 2\pi$.

$a = b$

$\Rightarrow \sigma(t)$ es inyectiva en $[0, 2\pi)$.

② Demostrar las 4 condiciones de los campos conservativos

① Sea $\mathcal{C}$ suave simple cerrada $\Rightarrow$

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = 0.$$

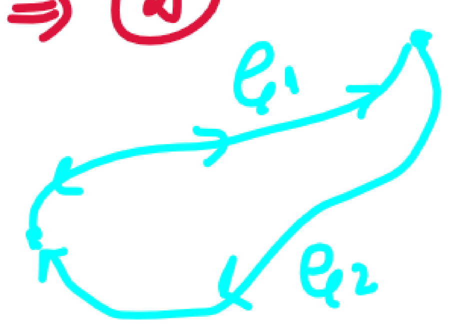
② Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ suaves, simples abiertos, con los mismos extremos y la misma orientación

$$\int_{\mathcal{C}_1} F\cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} F\cdot ds$$

③ $F = \nabla f.$

④ $\mathrm{rot}(F) = 0.$

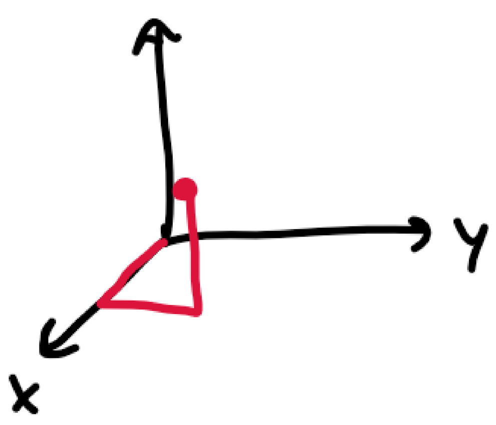
① $\Rightarrow$ ②



$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_{\mathcal{C}_1} F ds - \int_{\mathcal{C}_2} F ds = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} F\cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} F\cdot ds.$$

② $\Rightarrow$ ③. la integral solo depende de los extremos $\Rightarrow$



$\mathcal{C} : (0,0,0) \to (x,y,z)$

$\sigma_1(t) = (t,0,0)$	$t\in[0,x]$	$\sigma'(t) = (1,0,0)$
$\sigma_2(t) = (x,t,0)$	$t\in[0,y]$	$\sigma'(t) = (0,1,0)$
$\sigma_3(t) = (x,y,t)$	$t\in[0,z]$	$\sigma'(t) = (0,0,1)$

llamo $f = \int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_a^b (F_1,F_2,F_3)\circ\sigma(t)\cdot(\sigma'(t))\,dt = \int_0^x F_1(t,0,0)dt + \int_0^y F_2(x,t,0)dt + \int_0^z F_3(x,y,t)dt$

$\frac{df}{dz} = F_3(x,y,z)$ análogo para x e y $\Rightarrow \nabla f = F.$

③ $\Rightarrow$ ④.

$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\qquad f\in\mathcal{C}^2$

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y\partial x}\right) \overset{f\in\mathcal{C}^2}{=} (0,0,0)$$

④ $\Rightarrow$ ① Stokes. Sea S una superficie / $\partial S = \mathcal{C}.$

$$\iint_S \mathrm{rot}(F)\, ds = \int_{\partial S} F\cdot ds = 0.$$

TM

③ Sean X_1, X_2 soluciones del sistema $X' = A(t)X$ y sea $\tau \in I$ cualquiera (I intervalo)
Entonces X_1, X_2 son LI como funciones de t en I $\Leftrightarrow$ los vectores $X_1(\tau), X_2(\tau)$ son LI en $\mathbb{R}^2$

($\Rightarrow$) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 X_1(\tau) + \alpha_2 X_2(\tau) = 0$

es combinación lineal de soluciones

$y(t) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ es solución de $\begin{cases} X' = AX \\ X'(\tau) = 0 \end{cases}$

como $y^{*}(t) = 0$ es solución $\Rightarrow$ por unicidad de soluciones $\boxed{y(t) = 0}$.

$\boxed{\text{como } X_1 \text{ y } X_2 \text{ son LI}}$ $y(t) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

($\Leftarrow$) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) = 0$

evaluo en $t = \tau$ $\alpha_1 X_1(\tau) + \alpha_2 X_2(\tau) = 0$ como $X_1(\tau)$ y $X_2(\tau)$ son LI $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow$ $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son LI.

④ Sea el sistema $\begin{cases} x' = x e^{(y-1)} \\ y' = 2\operatorname{sen}(x) + 1 - y \end{cases}$ Hallar todos los puntos de equilibrio y esbozar un diagrama de fases alrededor de ellos

$$\begin{cases} x e^{(y-1)} = 0 & \rightarrow x = 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + 1 - y = 0 & \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Ptos de equilibrio: $(0,1)$

$F_1(x,y) = x e^{(y-1)}$

$F_2(x,y) = 2\operatorname{sen}(x) + 1 - y$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} e^{(y-1)} & x e^{(y-1)} \\ 2\cos(x) & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}^{A}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = -1$$

autovectores asocidos

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2v_1 - 2v_2 = 0$, $v_1 = v_2$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $2v_1 = 0$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Son LI.

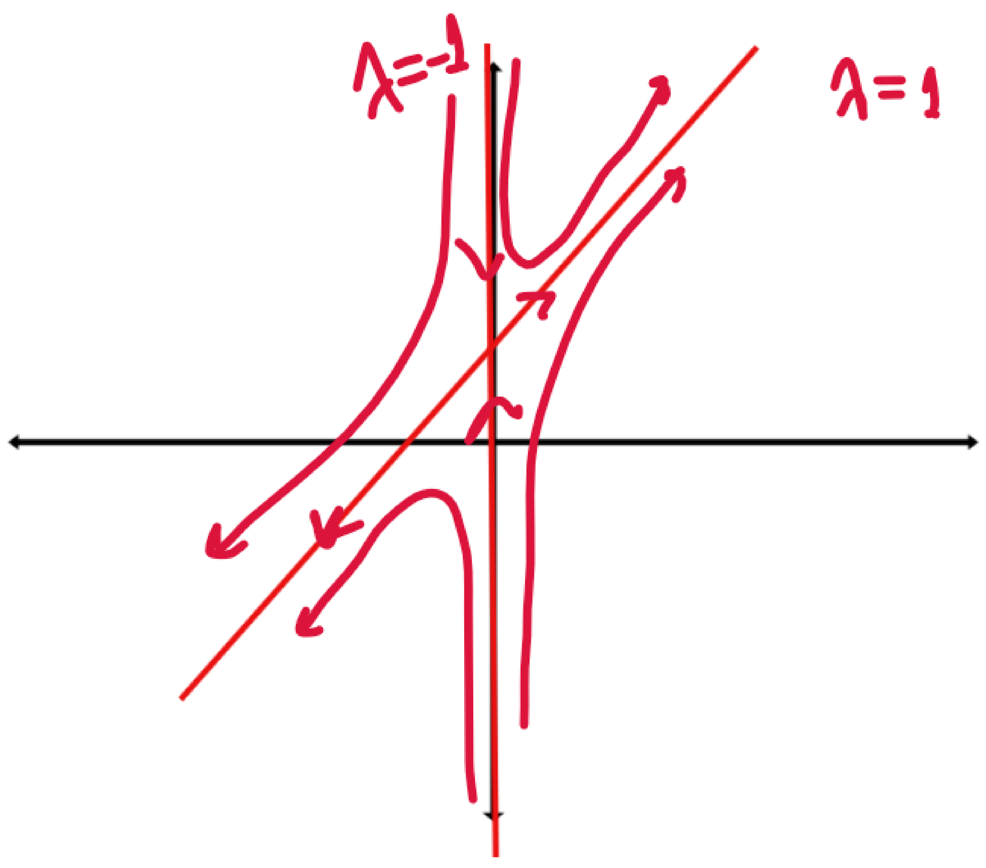
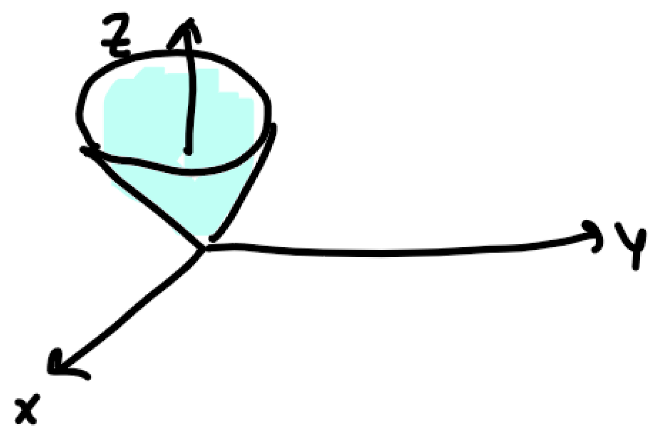


diagrama de fases

final 22/10/18

1. Sea $a > 0$ y $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Considerar la superficie de revolución obtenida al girar el gráfico de la función $f(x) = z$ alrededor del eje z. Dar una fórmula expresada en términos de f para el área de esta superficie.



$$\gamma(x,\theta) = (f(x)\cos(\theta),\ f(x)\,\mathrm{sen}(\theta),\ f(x)) \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ a < x < b \end{array}$$

$$\gamma_x(x,\theta) = (f'(x)\cos(\theta),\ f'(x)\,\mathrm{sen}(\theta),\ f'(x))$$

$$\gamma_\theta(x,\theta) = (-f(x)\,\mathrm{sen}(\theta),\ f(x)\cos(\theta),\ 0)$$

$$\gamma_x \times \gamma_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f'\cos & f'\mathrm{sen} & f' \\ -f\,\mathrm{sen} & f\cos & 0 \end{vmatrix} = (-f'(x)f(x)\cos(\theta),\ -f'(x)f(x)\,\mathrm{sen}(\theta),$$
$$f'(x)f(x)\cancel{\cos^2(\theta)} + f'(x)f(x)\cancel{\mathrm{sen}^2(\theta)})$$

$$\|\gamma_x \times \gamma_\theta\| = \sqrt{f'(x)^2 f(x)^2 + f'(x)^2 f(x)^2} = \sqrt{2}\, f'(x) f(x)$$

$$\mathrm{area}(S) = \int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{2}\, f'(x) f(x)\, dx\, d\theta = 2\pi\sqrt{2}\int_a^b f(x) f'(x)\, dx$$

2. Enunciar y demostrar el *Teorema de Green.*

D Región de tipo III , $F=(P,Q)\in \mathcal{C}^1$ en Ω Ω abierto / $D\subseteq\Omega$ $\partial D=\mathcal{C}^+$

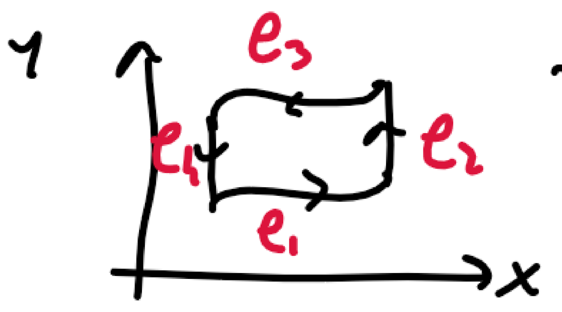
$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy.$$

Demo:

Lema 1. $F=(P,0)$

$$\int_{\mathcal{C}} F\,dx=\iint_D -P_y\,dx\,dy$$

$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3+\mathcal{C}_4$



D de tipo I.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/ a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

$\mathcal{C}_1^+=(t,g_1(t))$ $t\in[a,b]$

$\mathcal{C}_2^+=(b,t)$ $t\in[g_1(b),g_2(b)]$

$\mathcal{C}_3^-=(t,g_2(t))$ $t\in[a,b]$

$\mathcal{C}_4^-=(a,t)$ $t\in[g_1(a),g_2(a)]$

(puse t en vez de x en todos lados)

$$\int_{\mathcal{C}_1^+} F\,dt=\int_a^b (P(t,g_1(t));0)(t,g_1(t))\cdot(1,g_1'(t))\,dt=\int_a^b P(t,g_1(t))\,dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds=\int_a^b P(t,g_1(t))\,dt-\int_a^b P(t,g_2(t))\,dt=\int_a^b P(t,g_1(t))-P(t,g_2(t))\,dt.$$

$$\iint_D -P_x\,dx\,dy=\int_a^b\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} -P_x\,dy\,dx=\int_a^b P(t,g_1(t))-P(t,g_2(t))\,dt$$

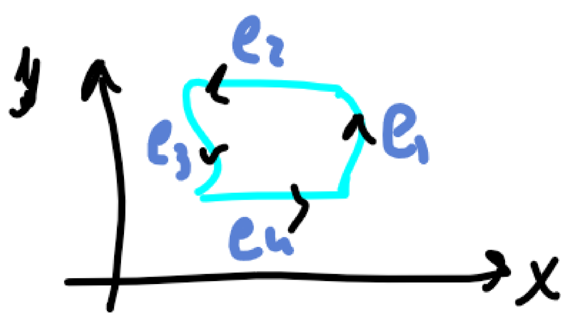
se cumple el lema 1

Lema 2

$$\int_{\mathcal{C}} (0,Q)\,dy=\iint_D Q_x\,dx\,dy$$

D de tipo II

$D: \{(x,y)\in\mathbb{R}/ a\le y\le b, g_1(y)\le x\le g_2(y)\}$



$\mathcal{C}_1^+ : \sigma_1(y)=(g_2(y),y)$ $y\in[a,b]$

$\mathcal{C}_2^- : \sigma_2(y)=(y,b)$ $y\in[g_1(b),g_2(b)]$

$\mathcal{C}_3^-$ $(g_1(y),y)$ $y\in[a,b]$

$\mathcal{C}_4$ (y,a) $y\in[g_1(a),g_2(a)]$

$$\int_{\mathcal{C}} (0,Q)\,dy=\int_a^b Q(g_2(y),y)\,dy-\int_a^b Q(g_1(y),y)\,dy=\int_a^b Q(g_2(y),y)-Q(g_1(y),y)\,dy$$

$$\int_a^b\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} Q_x^{(x,y)}\,dx\,dy=\int_a^b Q(g_2(y),y)-Q(g_1(y),y)\,dy \rightarrow$$ demostrado el lema 2.

$$\int_{\mathcal{C}} (P,0)\,dx+(0,Q)\,dy=\iint_D -P_y\,dx\,dy+Q_x\,dx\,dy.$$

$\boxtimes$

3. Sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{C}^1$.

a) Verifique que
$$\nabla\times(fF)=\nabla f\times F+f(\nabla\times F)$$

b) Suponga que $F=\nabla\phi$, con $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\phi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Pruebe que si fF es conservativo, entonces f es constante sobre las superficies de nivel de ϕ.

a) $F=(F_1,F_2,F_3)$ $\qquad f=f(x,y,z)$

$$\nabla\times(fF)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ fF_1 & fF_2 & fF_3\end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(fF_3)}{\partial y}-\frac{\partial(fF_2)}{\partial z}, \frac{\partial(fF_1)}{\partial z}-\frac{\partial(fF_3)}{\partial x}, \frac{\partial(fF_2)}{\partial x}-\frac{\partial(fF_1)}{\partial y}\right)$$

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ f_x & f_y & f_z\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}F_3-\frac{\partial f}{\partial z}F_2, \frac{\partial f}{\partial z}F_1-\frac{\partial f}{\partial x}F_3, \frac{\partial f}{\partial x}F_3-\frac{\partial f}{\partial y}F_1\right)$$

$$f(\nabla\times F)=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}f-\frac{\partial F_2}{\partial z}f, \frac{\partial F_1}{\partial z}f-\frac{\partial F_3}{\partial x}f, \frac{\partial F_2}{\partial x}f-\frac{\partial F_1}{\partial y}f\right)$$

$$+ \quad = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}F_3+\frac{\partial F_3}{\partial y}f}_{\frac{d(fF_3)}{\partial y}}-\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial z}F_2+\frac{\partial F_2}{\partial z}f\right)}_{\frac{d(fF_2)}{dz}}, \dots, \dots \text{ (análogo)}\right)$$

b) $F=\nabla\phi$ $\qquad$ si $f\cdot F$ es conservativo $\Leftrightarrow \nabla\times(f\cdot F)=0$

$$\operatorname{rot}(fF)=\left(\frac{\partial(fF_3)}{\partial y}-\frac{\partial(fF_2)}{\partial z}, \frac{\partial(fF_1)}{\partial z}-\frac{\partial(fF_3)}{\partial x}, \frac{\partial(fF_2)}{\partial x}-\frac{\partial(fF_1)}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(f_yF_3+fF_{3y}-f_zF_2-fF_{2z}, f_zF_1+fF_{1z}-f_xF_3-fF_{3x}, f_xF_2+fF_{2x}-f_yF_1-fF_{1y}\right)=$$

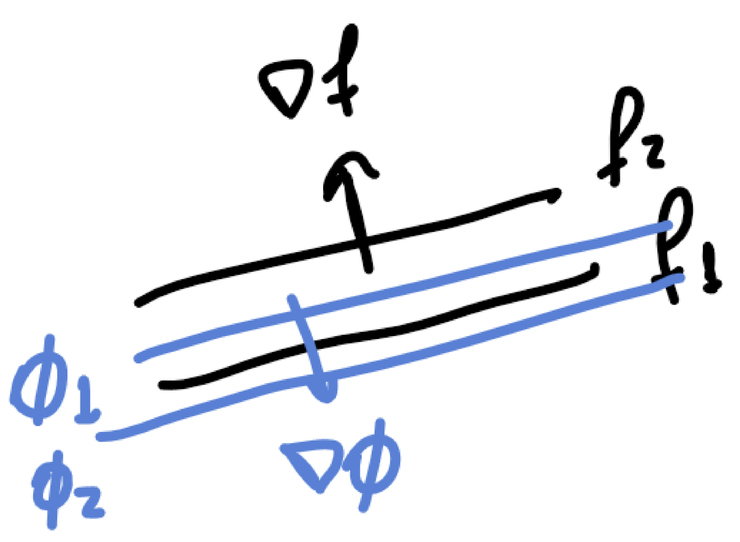
$F=\nabla\phi \Rightarrow F_1=\phi_x,\ F_2=\phi_y,\ F_3=\phi_z$.

$\phi\in C^2$

$$=\left(f_y\phi_z+\cancel{f\phi_{zy}}-f_z\phi_y-\cancel{f\phi_{yz}}, f_z\phi_x+\cancel{f\phi_{xz}}-f_x\phi_z-\cancel{f\phi_{zx}}, f_x\phi_y+\cancel{f\phi_{yx}}-f_y\phi_x-\cancel{f\phi_{xy}}\right)=$$

$$=\left(f_yF_3-f_zF_2, f_zF_1-f_xF_3, f_xF_2-f_yF_1\right)=\nabla f\times F=0$$

$F=\nabla\phi \Rightarrow \nabla f\times\nabla\phi=0 \Rightarrow \nabla f \parallel \nabla\phi \Rightarrow f$ es constante sobre las Sup. de nivel de ϕ



4. Sean $f, a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Describir todas las soluciones de la ecuación diferencial.

$$y' + a(x)y = f(x)$$

$y' + a(x)y = f(x) \longrightarrow$ Homogeneo. $y' + a(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \qquad \text{sea } A(x) \;/\; A'(x) = a(x)$$

$$\ln|y| = -A(x) + C$$

$$y = e^{-A(x)+C} = ke^{-A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ particular

propongo $\left.\begin{array}{l} y(x) = C(x) \\ y'(x) = C'(x) \end{array}\right\}$ $C(x) \;/\; C'(x) + a(x)\,C(x) = f(x)$

por teorema $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-A(x)} + C(x)$

20/9/17

1) Sea $\mathcal{C}$ una curva simple abierta suave, orientada por la parametrización regular $\sigma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ con $\sigma(0)=(0,1,0)$ y $\sigma(1)=(\pi,2,0)$

Calcular
$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot d\sigma$$

siendo $F(x,y,z)=\Big(\overbrace{\operatorname{sen}(x)+\frac{xz^2}{2}}^{F_1},\ \overbrace{\frac{\pi}{2}\cos(\pi y)+y}^{F_2},\ \overbrace{\frac{x^2z}{2}-(z+1)e^z}^{F_3}\Big)$

$$\operatorname{rot}(F(x,y,z))=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=(0-0,\ xz-xz,\ 0-0)=(0,0,0)$$

teorema de campo conserva:

como $\operatorname{rot}(F)=0$, $F=C^2$ $\Rightarrow$ por teo de equiv. $F=\nabla f$. $\int_{\mathcal{C}} F\,d\sigma=\int_{\mathcal{C}}\nabla f\,d\sigma=f(\sigma(1))-f(\sigma(0))$

$$f(x,y,z)=-\cos(x)+\frac{x^2z^2}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\pi y)+\frac{y^2}{2}-ze^z$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\,d\sigma=\int_0^1 F(\sigma(t))\,dt=f(\pi,2,0)-f(0,1,0)=1+2+1-\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{7}{2}}$$

② Demostrar la identidad de Green

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot n \, dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx\,dy\,dz$$

donde n es la normal unitaria exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f y g son funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y para una función C^2 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot n \, dS = \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} n_1 \, dS + \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} n_2 \, dS + \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \cdot n_3 \, dS$$

$$\int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega} (\underbrace{f g_{xx} + f_x g_x}_{\frac{\partial (f g_x)}{\partial x}} + \underbrace{f g_{yy} + f_y g_y}_{\frac{\partial (f g_y)}{\partial y}} + \underbrace{f g_{zz}\ f_z g_z}_{\frac{\partial (f g_z)}{\partial z}}) \, dx\,dy\,dz.$$

defino: $F(x,y,z) = f(x,y,z) \cdot \nabla g(x,y,z)$

$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

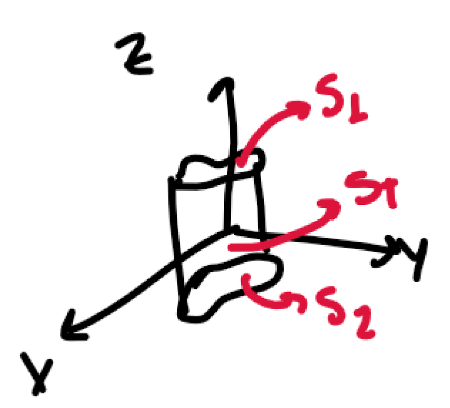
Entonces tengo:

$$\int_{\partial\Omega} P n_1 dS + Q n_2 dS + R n_3 dS = \int_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) \, dx\,dy\,dz.$$

<u>Lema 1</u> $\int_{\partial\Omega} R \, dz = \int_{\Omega} R_z \, dx\,dy\,dz$

$F = (0, 0, R)$ $\quad \Omega$ tipo I

$\Omega = \{(x,y,z) \,/\, (x,y) \in D \ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$



$\gamma(x,y) = (x, y, z(x,y))$

$\gamma_x = (1, 0, z_x)$

$\gamma_y = (0, 1, z_y)$ $\quad \gamma_x \times \gamma_y = (-z_x, -z_y, \underset{>0}{1})$

$$\int_{\partial\Omega} R n_3 \, dS = \int_{S_1} R n_3 \, dS + \int_{S_2} R n_3 \, dS + \cancel{\int_{S_T} R n_3 \, dS} \to 0$$

S_T no tiene componente normal en la dirección z.

Parametrizo:

$S_1: \sigma_1 = (x, y, g_2(x,y)) \quad (x,y) \in D$

$\sigma_{1x} = (1, 0, g_{2x})$

$\sigma_{1y} = (0, 1, g_{2y})$

$\sigma_{1x} \times \sigma_{1y} = (-g_{2x}, -g_{2y}, \underset{>0}{1})$ ✓

$S_2: \sigma_2 = (x, y, g_1(x,y)) \quad (x,y) \in D$

$\sigma_{2x} = (1, 0, g_{1x})$

$\sigma_{2y} = (0, 1, g_{1y})$

$\sigma_{2x} \times \sigma_{2y} = (-g_{1x}, -g_{1y}, \underset{>0}{1})$ ✗

Para que sea normal exterior $(g_{1x}, g_{2y}, -1)$

$$\int_{\partial\Omega} R n_3 \, dz = \iint_D R(x,y,g_2(x,y)) \, dA - \iint_D R(x,y,g_1(x,y)) \, dA$$

$$= \iint_D (R(\underbrace{x,y,g_2(x,y)}) - R(\underbrace{x,y,g_1(x,y)})) \, dx\,dy = \iint_D \left(\int_{g_1}^{g_2} R_z(x,y,z) \, dz \right) dA = \iiint_{\Omega} R_z \, dx\,dy\,dz.$$

analogamente para P y Q.

③ Para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 5x - xy \\ y' = 5y - xy \end{cases}$$

Hallar los puntos de equilibrio y decir si son estables. Para cada punto hallado, esbozar el diagrama de fases

$$\begin{cases} 5x - xy = 0 & ① \\ 5y - xy = 0 & ② \end{cases}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$y \neq 0 \quad 5 - x = 0$

$x = 5 \Rightarrow 25 - 5y = 0$

$25 = 5y$

$5 = y$

mis puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(5,5)$

$F_1(x,y) = 5x - xy$

$F_2(x,y) = 5y - xy$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 5-y & -x \\ -y & 5-x \end{pmatrix}$$

$$DF(0,0) = \overbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}^{A}$$

$$DF(5,5) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}}^{A}$$

para $(0,0)$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no hay condiciones para}$$

para $(5,5)$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -5 \\ -5 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 25$$

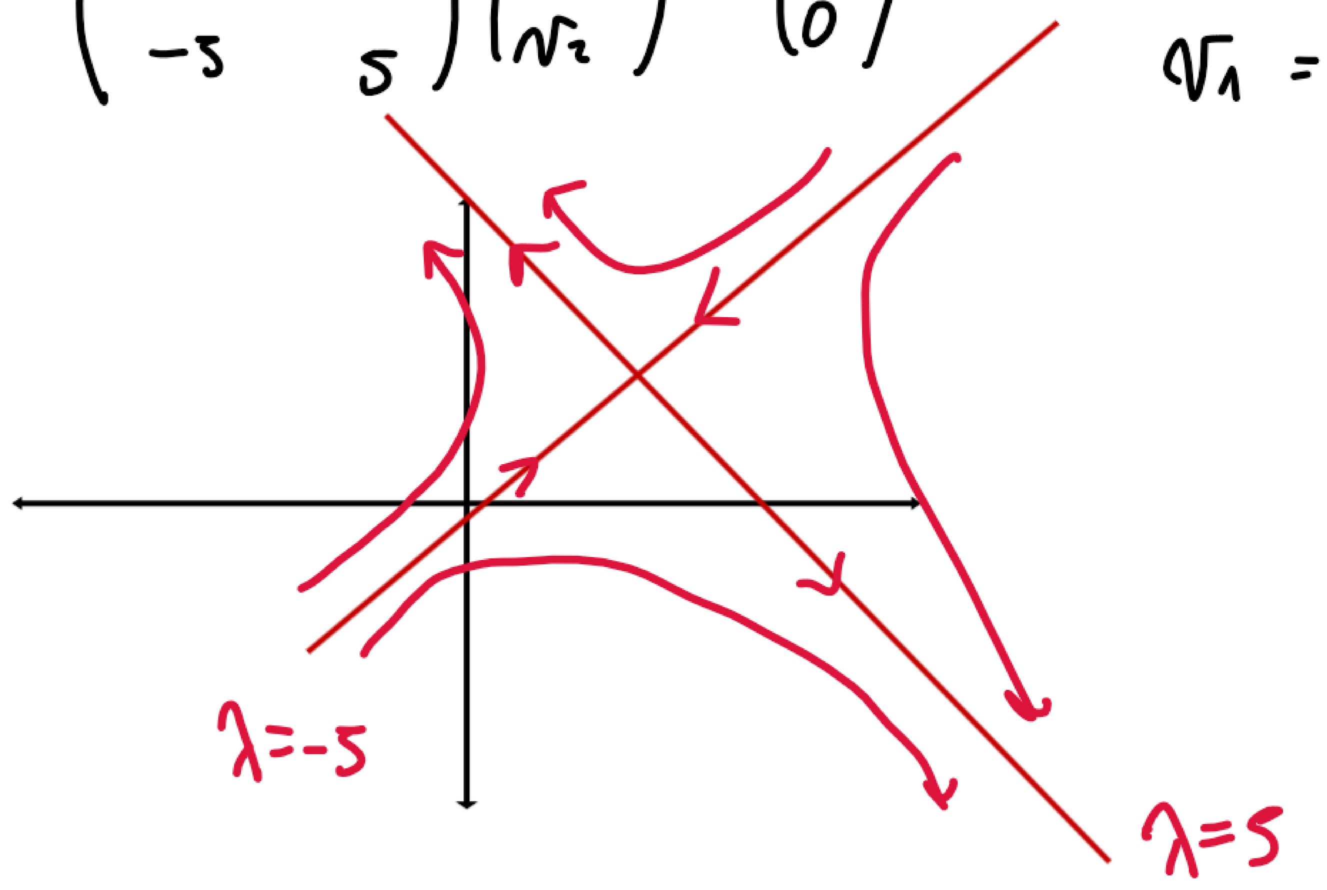
$\lambda = \pm 5$

para $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -5v_1 - 5v_2 &= 0 \\ -v_1 &= v_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 5v_1 - 5v_2 &= 0 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



④ Sean $a_{ij}(t)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$ y $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Demostrar que el conjunto de soluciones del sistema lineal homogeneo de 2 ecuaciones con 2 incognitas

$$X' = A(t)X$$

es un espacio vectorial de dimensión 2.

* Ecuación homogenea de dimension n.

$$S = \{(x,y) \ / \ X'(t) = A(t)X \quad \forall t\}$$

S espacio vectorial si $\begin{cases} ① \ X(t) = 0 \ \in S \ \forall t \\ ② \ \vec{v}(t) \text{ y } \vec{w}(t) \in S \Rightarrow (\vec{v}+\vec{w}) \in S \\ ③ \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{v} \in S \Rightarrow \alpha \vec{v} \in S \end{cases}$

Vemos si se cumple

① $X(t) = 0 \qquad X'(t) = 0 \qquad \vec{0} = A(t) \cdot \vec{0}$ ✓

② $(\vec{v}(t) + \vec{w}(t))' = v' + w' = Av + Aw = A(v+w)$ ✓

③ $(\alpha \vec{v})' = \alpha v' = \alpha A v = A(\alpha v)$ ✓

$\Big\}$ S es espacio vectorial

Para ver si es dimensión 2: (hay una base de S con 2 elementos)

Considera $\vec{x}_1(t)$ es solución de $\begin{cases} \vec{x}_1'(t) = A(t)\vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_1(t_0) = \binom{1}{0} \end{cases}$

$\vec{x}_2(t)$ es solucion de $\begin{cases} \vec{x}_2'(t) = A(t)\vec{x}_2(t) \\ \vec{x}_2(t_0) = \binom{0}{1} \end{cases}$

Son LI $\qquad C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0 \iff C_1 = C_2 = 0 \qquad \forall t \in I.$

En particular en t_0.

$$C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) = 0 = C_1 \binom{1}{0} + C_2 \binom{0}{1} = 0 \iff C_1 = C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Dim}(S) \geq 2.$$

Si x_1 y x_2 son generadores $\Rightarrow$ son base $\Rightarrow \dim(S) = 2$.

Propongo
$Z(t) \in S \qquad \vec{z}(t) = \alpha_1 \vec{x}_1(t) + \alpha_2 \vec{x}_2(t) \qquad \vec{z}(t_0) = \binom{z_{01}}{z_{02}} \qquad Z(t) = \begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) \\ z(t_0) = \binom{z_{01}}{z_{02}} \end{cases}$

Construyo $x^*(t) \in S$ porque comb. lineal

$$x^*(t) = z_{01} x_1(t) + z_{02} x_2(t)$$

$$x^*(t_0) = z_{01}\binom{1}{0} + z_{02}\binom{0}{1} = \binom{z_{01}}{z_{02}} = \vec{z}(t_0)$$

$\begin{cases} x^{*\prime}(t) = A(t)x^*(t) \\ x^*(t_0) = \binom{z_{01}}{z_{02}} \end{cases} \Rightarrow x^*(t) = z(t)$ <u>por unicidad</u>

$\Rightarrow x_1$ y x_2 son generadores, por lo tanto son base

▨

10/11/15

1. Enunciar y demostrar el teorema de Green

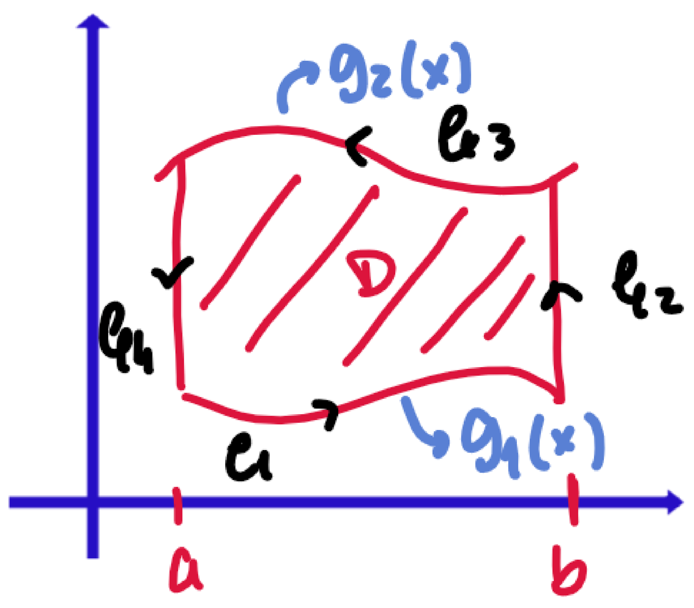
Sea D una región de tipo III, $F=(P,Q)$ C^1 $\partial D = \mathscr{C} \Rightarrow$

$$\int_{\mathscr{C}} F\, ds = \int_{\mathscr{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

Demostración:

Lema 1 Sea D de tipo I y $F=(P,0)$ $C^1 \Rightarrow$

$$\int_{\mathscr{C}} (P,0)\,ds = \iint_D -P_y\,dx\,dy.$$



parametrizo $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1^+ + \mathscr{C}_2^+ + \mathscr{C}_3^{-} + \mathscr{C}_4^{-}$

$\mathscr{C}_1^+$: $\sigma_1(t) = (t, g_1(t))$ $\quad t\in[a,b]$ $\quad \sigma_1'(t) = (1, g_1'(t))$

$\mathscr{C}_2^+$: $\sigma_2(t) = (b, t)$ $\quad t\in[g_1(b), g_2(b)]$ $\quad \sigma_2'(t) = (0, 1)$

$\mathscr{C}_3^-$: $\sigma_3(t) = (t, g_2(t))$ $\quad t\in[a,b]$ $\quad \sigma_3'(t) = (1, g_2'(t))$

$\mathscr{C}_4^-$: $\sigma_4(t) = (a, t)$ $\quad t\in[g_1(a), g_2(a)]$ $\quad \sigma_4'(t) = (0,1)$

$$\Rightarrow \int_{\mathscr{C}} (P,0)\cdot ds = \int_a^b P(t, g_1(t))\,dt - \int_a^b P(t, g_2(t))\,dt = \int_a^b (P(t,g_1(t)) - P(t, g_2(t)))\,dt$$

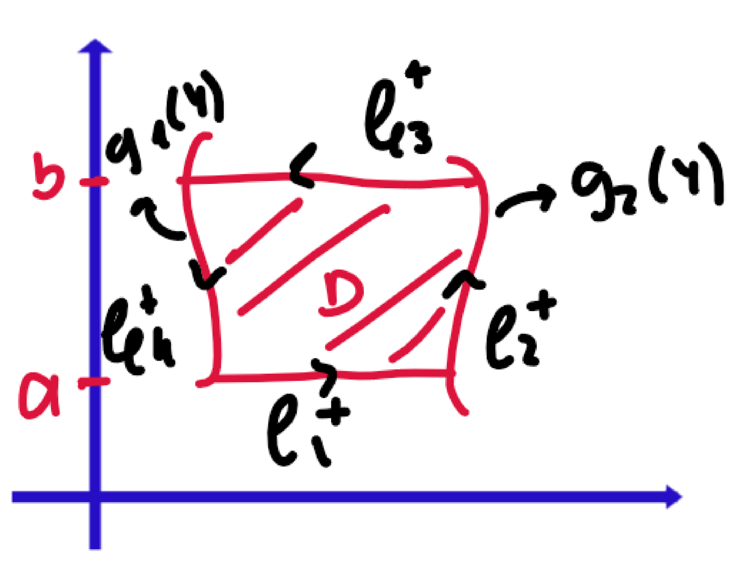
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

se cumple el lema 1

$$\iint_D -P_y(x,y)\,dx\,dy = -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y(x,y)\,dy\,dx = -\int_a^b (P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x)))\,dx = \int_a^b (P(x,g_1(x)) - P(x, g_2(x)))\,dx$$

Lema 2 Sea D de tipo 2 y $F=(0,Q)$ C^1

$$\int_{\mathscr{C}} (0,Q)\,ds = \iint_D Q_x\,dx\,dy$$



$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1^+ + \mathscr{C}_2^+ + \mathscr{C}_3^+ + \mathscr{C}_4^+$

Parametrizo $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}_1^+$: $\sigma_1(t) = (t, a)$ $\quad t\in[g_1(a), g_2(a)]$ $\quad \sigma_1'(t) = (1, 0)$

$\mathscr{C}_2^+$: $\sigma_2(t) = (g_2(t), t)$ $\quad t\in[a,b]$ $\quad \sigma_2'(t) = (g_2'(t), 1)$

$\mathscr{C}_3^-$: $\sigma_3(t) = (t, b)$ $\quad t\in[g_1(b), g_2(b)]$ $\quad \sigma_3'(t) = (1, 0)$

$\mathscr{C}_4^-$: $\sigma_4(t) = (g_1(t), t)$ $\quad t\in[a,b]$ $\quad \sigma_4'(t) = (g_1'(t), 1)$

$$\int_{\mathscr{C}} (0,Q)\cdot ds = \int_a^b Q(g_2(t), t)\,dt - \int_a^b Q(g_1(t), t)\,dt = \int_a^b (Q(g_2(t), t) - Q(g_1(t), t))\,dt$$

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, a\le y\le b,\ g_1(y)\le x\le g_2(y)\}$

Se cumple el lema 2.

$$\iint_D Q_x(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} Q_x(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b (Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y))\,dy$$

Volviendo a Green: $\displaystyle\int_{\partial D} (P,Q)\,ds = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$ $\qquad (P,Q) = (P,0) + (0,Q)$

$$= \underbrace{\int_{\partial D} (P,0)\,ds}_{\text{lema 1}} + \underbrace{\int_{\partial D} (0,Q)\,ds}_{\text{lema 2}} = \iint_D Q_x\,dx\,dy - \iint_D P_y\,dx\,dy$$

$\boxtimes$

2. Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ para el cual vale el teorema de Gauss. Verificar las siguientes identidades:

a) $\int_{\partial\Omega} uF.\nu dS = \int_{\Omega}(F.\nabla u + u.divF)dxdydz$

b) $\int_{\partial\Omega}(u\nabla v - v\nabla u).\nu dS = \int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dxdydz$

donde $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son campos escalares de clase C^2, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, ν es la normal unitaria exterior a Ω y, para una función $f \in C^2(\Omega)$, $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Gauss: sea F campo C^1: Ω tipo III

$$\iint_{\partial\Omega} F\nu ds = \iiint_{\Omega} div(F)\, dx\,dy\,dz$$

a) $$\int_{\partial\Omega} uF\cdot\nu ds = \int_{\Omega} (F\cdot\nabla u + u\cdot div(F))\, dxdydz.$$

$$\iint_{\partial\Omega} uF_1\nu_1 ds + \iint_{\partial\Omega} uF_2\nu_2 ds + \iint_{\partial\Omega} uF_3\nu_3 ds = \iiint_{\Omega}(F_1u_x + F_2u_y + F_3u_z + uF_{1x} + uF_{2y} + uF_{3z})\,dxdydz$$

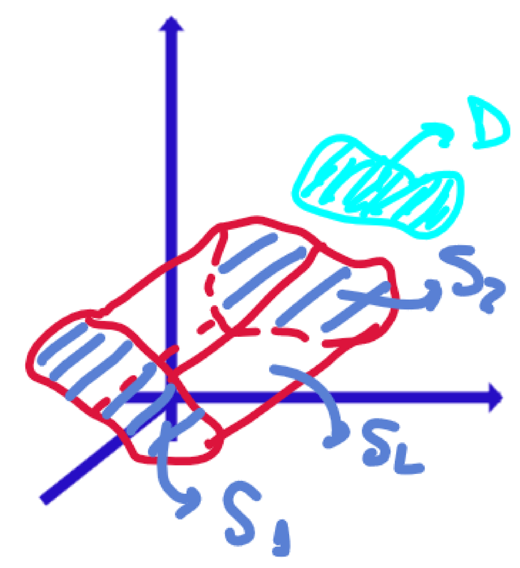
$$\iint_{\partial\Omega} uF_1\nu_1 ds + \iint_{\partial\Omega} uF_2\nu_2 ds + \iint_{\partial\Omega} uF_3\nu_3 ds = \iiint_{\Omega}(F_1u_x + uF_{1x})dV + \iiint_{\Omega}(F_2u_y + uF_{2y})dV + \iiint_{\Omega}(F_3u_z + uF_{3z})dV$$

llamo $uF = F^*$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\iint_{\partial\Omega} F^*\cdot\nu ds = \iiint_{\Omega} div(F^*)\, dV.}_{\text{gauss.}}$

demuestro

$$\iint_{\partial\Omega} F_1^*\nu_1 ds = \iiint_{\Omega} F^*_{1x}\, dxdydz \qquad \Omega \text{ tipo III}$$

$$\Omega = \{(y,z)\in D,\ g_1(y,z) \leq x \leq g_2(y,z)\}$$



$$\iint_{\partial\Omega} F_1^*\nu_1 ds = \iint_{S_1} F_1^*\nu_1 ds + \iint_{S_2} F_1^*\nu_1 ds + \underbrace{\iint_{S_L} F_1^*\nu_1 ds}_{=0}$$

=0 porque la normal a S_L no tiene componente en x.

parametrizo S_1 y S_2.

S_1: $\gamma(y,z) = (g_2(y,z), y, z)$ $(y,z)\in D$

$\gamma_y(y,z) = (g_{2y}(y,z), 1, 0)$

$\gamma_z(y,z) = (g_{2z}(y,z), 0, 1)$

$$(\gamma_y \times \gamma_z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ g_{2y} & 1 & 0 \\ g_{2z} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\underset{\geq 0}{1}, -g_{2y}, -g_{2z})$$

$\geq 0 \Rightarrow$ es la que corresponde a la normal exterior $\Rightarrow$ esta bien la orientación.

S_2: $\gamma(y,z) = (g_1(y,z), y, z)$ $(y,z)\in D$

$\gamma_z(y,z) = (g_{1z}(y,z), 0, 1)$

$\gamma_y(y,z) = (g_{1y}(y,z), 1, 0)$

$$(\gamma_z \times \gamma_y) = (\underset{\leq 0}{-1}, g_{1y}, g_{1z})$$

$\leq 0 \Rightarrow$ corresponde a la normal exterior.

$$\iint_{\partial\Omega} F_1^*\cdot\nu_1\cdot ds = \iint_D F_1^*(g_2(y,z), y, z)\cdot 1\, dzdy + \iint_D F_1^*(g_1(y,z), y, z)\cdot(-1)\, dzdy =$$

$$= \iint_D (F_1^*(g_2(y,z), y, z) - F_1^*(g_1(y,z), y, z))\, dydz$$

$$\iiint_{\Omega} F^*_{1x}\, dxdydz = \iint_D \left(\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} F^*_{1x}\, dx\right) dydz = \iint_D (F_1^*(g_2(y,z), y, z) - F_1^*(g_1(y,z), y, z))\, dydz$$

se cumple la 1° igualdad.
análogo para las demas igualdades.

b) $$\int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\nu ds = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdydz$$

$$\int_{\partial\Omega} (uv_x - vu_x,\ uv_y - vu_y,\ uv_z - vu_z)\cdot\nu ds = \int_{\Omega} (uv_{xx} - vu_{xx} + uv_{yy} - vu_{yy} + uv_{zz} - vu_{zz})\, dV$$

tomo $F = (P, Q, R) = (uv_x - vu_x,\ uv_y - vu_y,\ uv_z - vu_z)$

$\Rightarrow div(F) = (uv_{xx} - vu_{xx} + uv_{yy} - vu_{yy} + uv_{zz} - vu_{zz})$

vuelvo a tener Gauss.

☑

3. a) Probar que la solución general de la ecuación

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

con a y b constantes, tiene la forma

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

donde y_p es una solucion particular y y_H es la solucion general de la ecuacion homogénea asociada.

b) Determinar ka solucion general de la ecuacion

$$y'' - 2y' + y = 1 \quad ?$$

ⓐ

$$\begin{cases} x' = -ax - by + f(x) \\ y' = x \end{cases}$$

$$X' = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} X + \underbrace{\begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

Sea X_p una solucion particular de $X' = AX + b(x)$ y X Solución de mi sistema. $\Rightarrow$ Busco X_H solución del homogeneo/ $X = X_H + X_p$.

Defino $Y = X - X_p$ $\quad (X - X_p)' = X' - X_p' = AX + b(x) - AX_p - b(x) = A(X - X_p)$

$Y = X - X_p$ es solución del homogeneo.

quiero ver que efectivamente X es solución.

$$X = X_H + X_p \Rightarrow (X_H + X_p)' = X_H' + X_p' = AX_H + AX_p + b(x) = A(X_H + X_p) + b(x)$$

X es solución de mi sistema.

$$X = X_H + X_p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

volviendo a mi sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H + y_p \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}'} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H + y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_H' = -a\,x_H - b\,(y_H + y_p) + f(x) \\ (y_H + y_p)' = x_H. \end{cases}$$

$x_H = x$ porque $y' = x$ es ec. Homog.

$\Rightarrow y = y_H + y_p$ cumple mi sistema ☒

ⓑ $y'' - 2y' + y = 1$ → Homogeneo.

Pol. caract.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

particular

propongo

$y_p(x) = ax^2 + bx + c$

$y_p'(x) = 2ax + b$

$y_p''(x) = 2a$

$$2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c = 1$$

$a = 0$

$-4a + b = 0 \Rightarrow b = 0$

$2a - 2b + c = 1 \Rightarrow c = 1$

la función constante $y(x) = 1$ cumple la ec. dif.

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 1$$

9/3/18

① (Teorema de Green) Se $F=(P,Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^2$ suave a trozos, cerrada y simple que encierra una región R que es de tipo III.

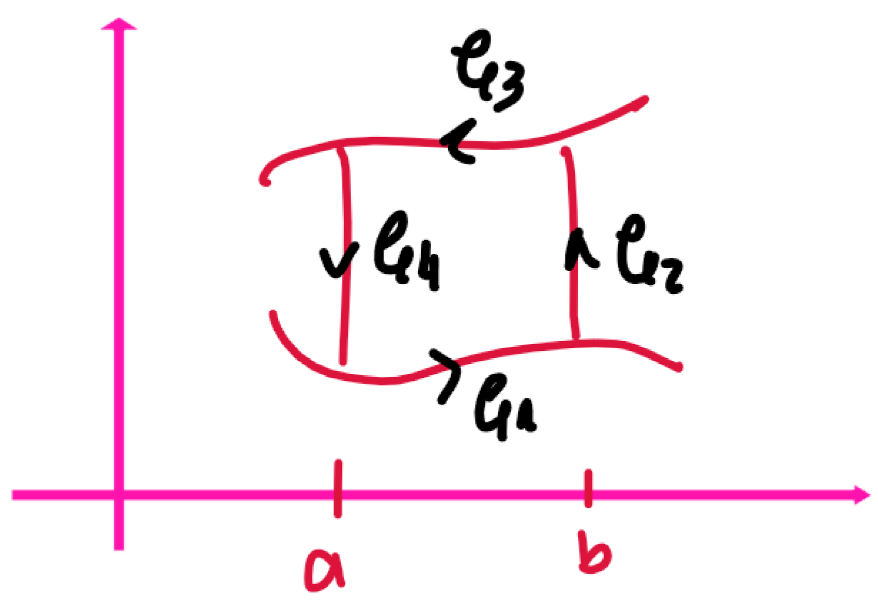
Probar que $$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy$$

donde $\mathcal{C}^+$ indica que $\mathcal{C}$ está orientada en sentido antihorario

Lema 1 Sea D región de tipo I, $F=(P,0)$ $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$

$$-\iint_D P_y \, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx$$

demostración:



parametrizo y calculo las integrales
(ya lo hice 84 veces)

demuestro el lema 2. D tipo II $F=(0,Q)$

$$\int_{\mathcal{C}} Q\,dy = \iint_D Q_x \, dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$ ☒

② Sea S una Superficie en $\mathbb{R}^3$ que encierra una region W de tipo IV y supongamos que $(0,0,0) \notin W$. Hallar el flujo saliente a traves de S del campo

$$F(x,y,z) = \phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot(x,y,z)$$

donde $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ es una función C^1 que verifica

$$3\phi(r) + r\phi'(r) = 0 \qquad \forall r \geq 0$$

Se cumplen las hipotesis del teorema de Gauss.

$$\iiint_W \operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{F}\cdot\nu^E\,ds$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F) = {} & \phi'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + \\ & + \phi'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) + \\ & + \phi'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot\frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \frac{\phi'(\|x,y,z\|)\,\|(x,y,z)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|(x,y,z)\|}} + 3\phi(\|(x,y,z)\|) \end{aligned}$$

$(r = \|(x,y,z)\|)$

$\Rightarrow \operatorname{div}(F) = 0.$

$$\Rightarrow \iiint_W 0\,dx\,dy\,dz = \iint_{S^+} \vec{F}\cdot\nu^E\,ds = 0.$$

③ Sea I un intervalo abierto de la recta, $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b: I \to \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Supongamos que $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ es una base de soluciones del sistema lineal homogéneo de n ecuaciones

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

Probar que existen funciones $c_1(t), \dots, C_n(t)$ definidas en I de clase C^1 tales que $X(t) = C_1(t)X_1(t) + \dots + C_n(t)X_n(t)$

es una solución del sistema lineal de n ecuaciones

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

$$\Big(\overbrace{C_1(t)X_1(t) + \dots + C_n(t)X_n(t)}^{X_i}\Big)' = C_1'(t)X_1(t) + C_1(t)X_1'(t) + \dots + C_n'(t)X_n(t) + C_n(t)X_n'(t)$$

$$= C_1'(t)X_1(t) + \dots + C_n'(t)X_n(t) + C_1(t)X_1'(t) + \dots + C_n(t)X_n'(t) =$$

como $X_n(t)$ son soluciones $X_n'(t) = A(t)X(t)$.

$$= \underbrace{C_1'(t)X_1(t) + \dots + C_n'(t)X_n(t)}_{b(t)} + A(t)\big(\underbrace{C_1(t)X_1(t) + \dots + C_n(t)X_n(t)}_{X_i}\big)$$

$$\Rightarrow X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

■

④ Considerar el sistema: $\begin{cases} x' = xe^y \\ y' = 2\operatorname{sen}(x) + 3 - y \end{cases}$

Cerca de cada punto de equilibrio esbozar el diagrama de fases correspondiente

Puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} xe^y = 0 & \rightarrow x = 0 \\ 2\operatorname{sen}(x) + 3 - y = 0 & \rightarrow y = 3 \end{cases} \qquad (0,3).$$

$F_1(x,y) = xe^y$

$F_2(x,y) = 2\operatorname{sen}(x) + 3 - y$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 2\cos(x) & -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,3)} = \overbrace{\begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}^{A}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} e^3 - \lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = (e^3 - \lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = e^3 \quad \lambda_2 = -1$$

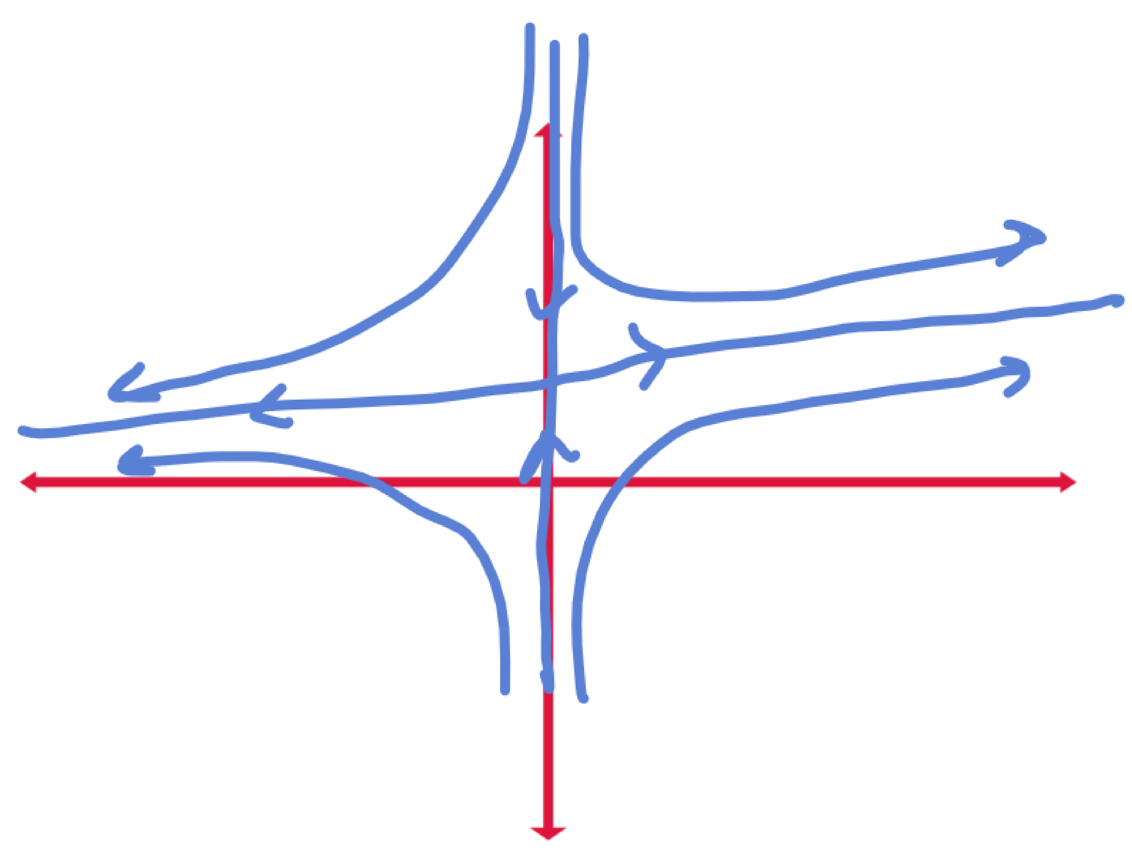
$\underline{\lambda_1 = e^3}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1-e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2v_1 - (1+e^3)v_2 = 0 \qquad v_1 = \frac{(1+e^3)}{2} v_2 \qquad \begin{pmatrix} \frac{1+e^3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

son LI.

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} e^3+1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} (e^3+1)v_1 = 0 \\ 2v_1 = 0 \end{array}\right\} v_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



7/12/17

① Sea F un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$, salvo quizás en finitos puntos. Probar que las siguientes definiciones de campos conservativos son equivalentes

i) $\int_{\mathscr{C}} F \cdot ds = 0$ para toda curva $\mathscr{C}$ suave, cerrada y simple de $\mathbb{R}^3$.

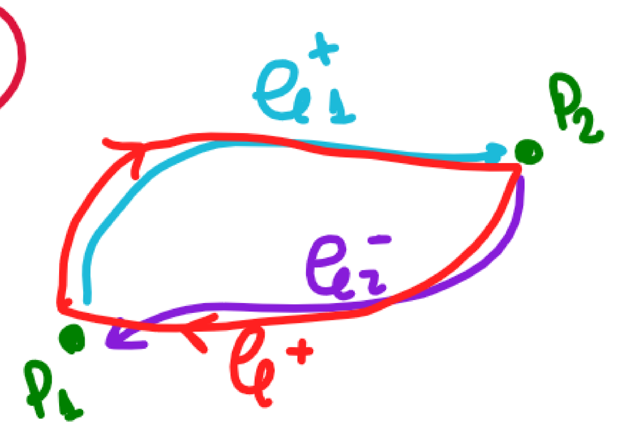
ii) $\int_{\mathscr{C}_1} F \cdot ds = \int_{\mathscr{C}_2} F \cdot ds$ para todo par de curvas C_1 y C_2 en $\mathbb{R}^3$ suaves a trozos, simples y que comienzan y terminan en los mismos puntos.

iii) F es un campo gradiente. Es decir, $F = \nabla \varphi$ para alguna φ de clase C^2.

iv) $\nabla \times F = 0$

Demostración:

(i) ⇒ (ii)



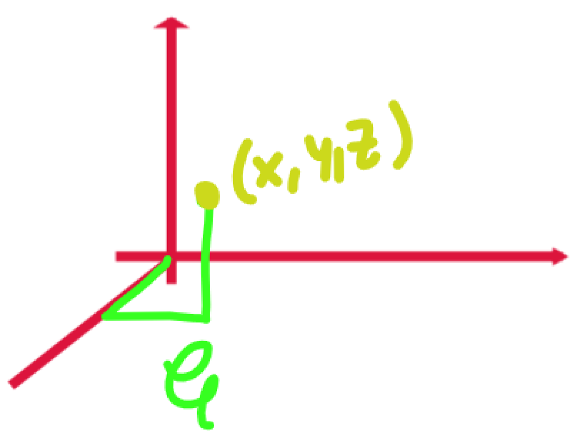
$\mathscr{C}^+ = \mathscr{C}_1^+ - \mathscr{C}_2^+$ ← orientación

$\mathscr{C}$ es suave, cerrada y simple

$\Rightarrow \int_{\mathscr{C}} F \cdot ds = 0 = \int_{\mathscr{C}_1^+} F \cdot ds - \int_{\mathscr{C}_2^+} F \cdot ds \Rightarrow \int_{\mathscr{C}_1^+} F \cdot ds = \int_{\mathscr{C}_2^+} F \cdot ds$ ✓

(ii) ⇒ (iii) (ii) dice que $\int_{\mathscr{C}} F \cdot ds$ es independiente de camino que se tome para unir 2 puntos.

Voy a ir de $(0,0,0)$ a (x,y,z)



parametrizo $\mathscr{C}$

$\sigma_1(t) = (t,0,0) \quad t \in [0,x] \quad \sigma_1'(t) = (1,0,0)$

$\sigma_2(t) = (x,t,0) \quad t \in [0,y] \quad \sigma_2'(t) = (0,1,0)$

$\sigma_3(t) = (x,y,t) \quad t \in [0,z] \quad \sigma_3'(t) = (0,0,1)$

llamo $f(x,y,z) = \int_{\mathscr{C}} F \cdot ds = \int_0^x F(t,0,0) \cdot (1,0,0)\,dt + \int_0^y F(x,t,0) \cdot (0,1,0)\,dt + \int_0^z F(x,y,t)(0,0,1)\,dt$

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = F_3(x,y,z)$ análogo para x e $y \Rightarrow \exists f \;/\; \nabla f = F$. ✓

(iii) ⇒ (iv) $F = \nabla f \Rightarrow rot(F) = rot(\nabla f)$. f es $\mathscr{C}^2$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0)$$ ✓

(iv) ⇒ (i) Sea $\mathscr{C}$ una curva cerrada que es borde de una superficie de un gráfico ⇒ vale Stokes

$\iint_S (\nabla \times F)\,dS = \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \cdot ds = 0$ ($\nabla \times F = 0$.) ✓

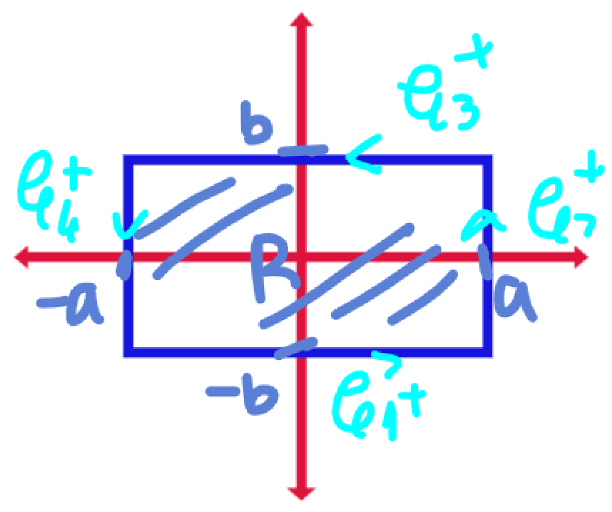
☒

② Sea $F=(P,Q)$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^2$ que verifica que:

$$P_y(x,y) = xy - 3x^3y^5 + Q_x(x,y)$$

si R es un rectángulo de lados paralelos a los ejes, centrado en el origen y $\mathcal{C}$ es el borde de R comprobar que:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0$$



R es de tipo III. $\Rightarrow$ vale Green.

parametrizo.

$\mathcal{C}_1^+$: $\sigma_1(t) = (t, -b)$ $\quad t \in [-a, a]$ $\quad \sigma_1'(t) = (1,0)$ Parametrizé al pedo.

$\mathcal{C}_2^+$: $\sigma_2(t) = (a, t)$ $\quad t \in [-b, b]$ $\quad \sigma_2'(t) = (0,1)$

$\mathcal{C}_3^-$: $\sigma_3(t) = (t, b)$ $\quad t \in [a, a]$ $\quad \sigma_3'(t) = (1,0)$

$\mathcal{C}_4^-$: $\sigma_4(t) = (-a, t)$ $\quad t \in [-b, b]$ $\quad \sigma_4'(t) = (0,1)$

$$\iint_R \underbrace{(Q_x - P_y)}_{\downarrow} \, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$$

$$Q_x - P_y = -xy + 3x^3y^5$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} (3x^3y^5 - xy)\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} \left(\frac{x^3y^6}{2} - \frac{xy^2}{2} \right)\Big|_{-b}^{b} dx = \int_{-a}^{a} \left(\frac{b^6 \cancel{x^3}}{2} - \frac{\cancel{b^6}x^3}{2} - \frac{x\cancel{b^2}}{2} + \frac{\cancel{x}b^2}{2} \right) dx$$

$$\int_{-a}^{a} 0\,dx = \boxed{0}$$

$\blacksquare$

③ Sea I un intervalo de la recta, $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz en la variable x, $\tau\in I$ y $\eta>0$ / $[\tau,\eta]\subseteq I$

i) Dado $\xi\in\mathbb{R}$, probar que $x:[\tau,\eta]\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ es solución de:

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad \forall t\in[\tau,\eta] \qquad x(\tau)=\xi$$

si y solo si

$$x(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x(s))\,ds \qquad \forall t\in[\tau,\eta]$$

ii) Dados $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ y $x_1,x_2\ [\tau,\eta]\to\mathbb{R}$ soluciones C^1 de

$$x'(t)=f(t,x(t)) \qquad \forall t\in[\tau,\eta] \qquad x_1(\tau)=\xi_1,\ x_2(\tau)=\xi_2$$

Probar, utilizando el lema de Gronwall que existe $c=c(\eta)>0$ tal que:

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le C|\xi_1-\xi_2| \qquad \forall t\in[\tau,\eta]$$

(i) $x'(t)=f(t,x(t)) \Rightarrow \int dx=\int_\tau^t f(t,x(t))\,dt \qquad t\in[\tau,\eta]$

$x(t)=\int_\tau^t f(t,x(t))\,dt+C$

teniendo en cuenta que $x(\tau)=\xi \Rightarrow x(t)=\xi+\int_\tau^t f(t,x(t))\,dt$

$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) & t\in[\tau,\eta] \\ x(\tau)=\xi \end{cases} \Rightarrow x(t)=\xi+\int_\tau^t f(t,x(t))\,dt$ es solución

(i) Armo una sucesión de funciones

$x_0(t)=\xi$

$x_1(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x_0(s))\,ds$

$x_2(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x_1(s))\,ds$

$\vdots$

$x_{n+1}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x_n(s))\,ds$

ver que la sucesión es uniformemente de Cauchy

(Dado $\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ / $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in I$, $\forall m,n\ge n_0$)

teo, si $f_n\rightrightarrows f \Rightarrow \{f_n\}$ es unif. de Cauchy

$|x_{n+1}(t)-x_n(t)|=\left|\int_\tau^t f(s,x_n(s))\,ds-\int_\tau^t f(s,x_{n-1}(s))\,ds\right|=$

$\int_\tau^t|f(s,x_n(s))-f(s,x_{n-1}(s))|\,ds\le L\int_\tau^t|x_n(s)-x_{n-1}(s)|\,ds\le L\max\{|x_n(s)-x_{n-1}(s)|\}\int_\tau^t ds=$

$=L\underbrace{\max\{|x(s)-x_{n-1}(s)|\}}_{M_n}(t-\tau)=LM_n(\tau-\tau)\le L\,h\,M_n<\frac{1}{2}M_n$

tomo $h<\frac{1}{2L}$ / $I_h=[\tau-h,\tau+h]\subseteq I$

$L\cdot h<\frac{1}{2}$

$\tau-h<t<\tau+h$

$-h<t-\tau<h$

$|x_{n+1}(t)-x_n(t)|<\frac{1}{2}M_n \quad \forall t\in I_h$

ahora tomo $m=n+k>n$

$|x_n(t)-x_m(t)|=|x_n(t)-x_{n+k}(t)|\le|x_n(t)-x_{n+k}(t)|+|x_{n+1}(t)-x_{n+2}(t)|+\dots+|x_{n+k-1}(t)-x_{n+k}(t)|$

$\le\left(\frac{1}{2}\right)^n M_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}M_1+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}M_1=M_1\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{j=k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j}_{<2}<\left(\frac{1}{2}\right)^n M_1 2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

$\{x_n(t)\}$ $\forall t\in I_h\subseteq I$ / $h\cdot L<1/2$

es uniform. de Cauchy $\Rightarrow \exists\ x:I_h\to\mathbb{R}$ / $x_n\rightrightarrows x$ por lema como x_n continuas x cont.

$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}(t)=\xi+\lim_{n\to\infty}\int_\tau^t f(s,x_n(s))\,ds$ por unicidad del límite

$x(t)=\xi+\int_\tau^t f(t,x(t))\,dt$

(ii) $|x_1(t) - x_2(t)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x_1(\tau) = \xi_1 \\ x_2(\tau) = \xi_2 \end{cases}$$

Lema de Gronwall.

Sea $g: I \to \mathbb{R}$ continua $g \geq 0$ en I y $g(t) \leq A + B\left|\int_\tau^t g(s)\,ds\right| \ \forall t \in I$ con A y $B \geq 0$. $\Rightarrow g(t) \leq A e^{B(t-\tau)}$

(teo. de cont. del dato)

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left|\xi_1 + \int_\tau^t f(s, x_1(s))\,ds - \xi_2 - \int_\tau^t f(s, x_2(s))\,ds\right| \leq$$

$$\leq |\xi_1 - \xi_2| + \int_\tau^t \left|\left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right)\right| ds \underset{\text{Lipschitz}}{\leq} \underbrace{|\xi_1 - \xi_2|}_{A} + \underbrace{L}_{B} \int_\tau^t \underbrace{|x_1(s) - x_2(s)|}_{g(s) \geq 0}\,ds \leq$$

gronwall

$$\leq |\xi_1 - \xi_2| e^{L(t-\tau)} \leq |\xi_1 - \xi_2| e^{Lh} \leq |\xi_1 - \xi_2| \underbrace{e^{1/2}}_{C.}$$

($hL < 1/2$ $\quad I_h = [\tau - h, \tau + h]$)

$\blacksquare$

4) Hallar las soluciones de f de la ecuación integral

No se que carajo hice acá.

$$f(x) + \int_0^x (x-y) f(y)dy = x^3$$

Supongo $F(x) / F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F'(x) + \overbrace{\int_0^x \underbrace{(x-y)}_{u} \cdot \underbrace{F'(y)\,dy}_{dv}}^{(*)} = x^3$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$du = -1dy \quad v = F(y)$

$$\boxed{F^*(x) / F^{*\prime}(x) = F(x)}$$

$(*)$ $$\int_0^x (x-y) \cdot F'(y)\,dy = (x-y)F(y)\Big|_{y=0}^{y=x} + \int_0^x F(y)\,dy = xF(0) + \int_0^x F(y)\,dy = xF(0) + F^*(x) - F^*(0)$$

$$\begin{cases} F'(x) + x\overbrace{F(0)}^{cte} + F^*(x) - \overbrace{F^*(0)}^{cte} = x^3 \\ F'(x) = f(x) \\ F^{*\prime}(x) = F(x) \end{cases}$$

$$F^{*\prime\prime}(x) + \ell x + F^*(x) - k = x^3$$

$$F^{*\prime\prime}(x) + F^*(x) = x^3 - \ell x + k$$

Homogeneo.

$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2+1) = 0 \rightarrow \lambda = 0$

$\rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 = -1$

$|\lambda| = i \rightarrow \lambda = i$

$\rightarrow \lambda = -i$

$$F_H^*(x) = \overbrace{C_1 e^{it}}^{F_1} + \overbrace{C_2 e^{-it}}^{F_2} + \overbrace{C_3 t e^{it}}^{F_3}$$

$$F_H^*(x) = (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t))(C_1 + C_3 t) + C_2(\cos(t) - i\,\mathrm{sen}(t))$$

$$\left(F_1 + \frac{C_1}{C_2}F_2\right) = \underbrace{2C_1}_{C_1^*}\cos(t) = F_{1\,H}^*(x)$$

$$\left(F_2 - \frac{C_2}{C_1}F_1\right)/i = \underbrace{-2C_2}_{C_2^*}\,\mathrm{sen}(t) = F_{2\,H}^*(x)$$

$$F_{3\,H}^*(x) = C_3^*\, t\cos(t)$$

Particular

Propongo $F_p^*(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$F_p^{*\prime}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$F_p^{*\prime\prime}(x) = 6ax + 2b$

$$6ax + 2b + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - \ell x + k$$

$a = 1$

$b = 0$

$6a + c = -\ell \Rightarrow c = -\ell - 6$

$2b + d = k \Rightarrow d = k$

$$F_p^*(x) = x^3 - (\ell+6)x + k$$

$(t=x)$

$$F^*(x) = \cos(t)(C_1^* + C_3^* t) + C_2^*\,\mathrm{sen}(t) + x^3 - (\ell+6)x + k$$

$$F^{*\prime}(x) = F(x) = -\mathrm{sen}(x)(C_1^* + C_3^* x) + \cos(x)C_3^* + C_2^*\cos(x) + 3x^2 - (\ell+6)$$

$$F'(x) = f(x) = -\cos(x)(C_1^* + C_3^* x) - \mathrm{sen}(x)C_3^* - \mathrm{sen}(x)C_3^* - C_2^*\,\mathrm{sen}(x) + 6x$$

$$f(x) = -\cos(x)(C_1^* + C_3^* x) - (2C_3^* + C_2^*)\,\mathrm{sen}(x) + 6x$$

11/12/17

① (Teorema de Green). Sea $F=(P,Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^2$ suave a trozos, cerrada y simple que encierra una región R de tipo III

Probar que
$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy$$
donde $\mathcal{C}^+$ indica que $\mathcal{C}$ esta orientada en sentido antihorario

Lema 1 $(P,0)$ R tipo I

Lema 2 $(0,Q)$ R tipo II.

Parametrizar y calcular las integrales
(lo hice 84 mil veces)

② Sean $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función escalar de clase $\mathcal{C}^2$ y $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$. Llamemos W al campo
$$W = \nabla\phi + \operatorname{rot}(F)$$
verificar que:

a) $\int_\Omega \Delta\phi\,dV = \int_{\partial\Omega} w\,ds$ para toda región $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, donde $\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

b) $\int_S \operatorname{rot}(w)\,ds = \int_{\mathcal{C}} \operatorname{rot}(F)$ donde $S\subset\mathbb{R}^3$ es una superficie orientable y $\mathcal{C}=\partial S$ su borde recorrido con la orientación inducida por la de S.

a) $F=(P,Q,R) \Rightarrow \operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

$$\iiint_\Omega (\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})\,dV = \iint_{\partial\Omega} (\phi_x + R_y - Q_z, \phi_y + P_z - R_x, \phi_z + Q_x - P_y)\,ds$$

$\boxed{\text{Gauss } (\Omega \text{ tipo IV}) \Rightarrow \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\,dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{s}}$

llamo $F^* = (\phi_x + R_y - Q_z, \phi_y + P_z - R_x, \phi_z + Q_x - P_y)$

porque F es $\mathcal{C}^2$

$\Rightarrow \operatorname{div}(F^*) = \phi_{xx} + \cancel{R_{yx}} - \cancel{Q_{zx}} + \phi_{yy} + \cancel{P_{zy}} - \cancel{R_{xy}} + \phi_{zz} + \cancel{Q_{xz}} - \cancel{P_{yz}}$

$\operatorname{div}(F^*) = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$

$\Rightarrow$ Si Ω tipo IV se cumplen las hipotesis de Gauss $\Rightarrow$ se cumple la igualdad.

b) $\operatorname{rot}(W) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \phi_x + R_y - Q_z & \phi_y + P_z - R_x & \phi_z + Q_x - P_y \end{vmatrix} =$

ϕ es C^2

$= (\cancel{\phi_{zy}} + Q_{xy} - P_{yy} - \cancel{\phi_{yz}} - P_{zz} + R_{xz}, \cancel{\phi_{xz}} + R_{yz} - Q_{zz} - \cancel{\phi_{zx}} - Q_{xx} + P_{yx}, \cancel{\phi_{yx}} + P_{zx} - R_{xx} - \cancel{\phi_{xy}} - R_{yy} + Q_{zy})$

$$\iint_S \operatorname{rot}(W)\,ds = \int_{\mathcal{C}} \operatorname{rot}(F)\,ds$$

$\boxed{\text{Stokes } \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot ds = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\,dS \quad S \text{ gráfico de una función en un } D \text{ en el que vale Green}}$

llamo $F' = \operatorname{rot}(F) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

$\operatorname{rot}(F') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ R_y - Q_z & P_z - R_x & Q_x - P_y \end{vmatrix} = (Q_{xy} - P_{yy} - P_{zz} + R_{xz}, R_{yz} - Q_{zz} - Q_{xx} + P_{yx}, P_{zx} - R_{xx} - R_{yy} + Q_{zy})$

$\operatorname{rot}(F') = \operatorname{rot}(W) \Rightarrow$ si estamos en condiciones de Stokes se cumple la igualdad.

③ Sea I un intervalo abierto de la recta y $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua a valores matriciales. Probar que las soluciones del sistema lineal homogeneo de n ecuaciones $X'(t) = A(t)X(t)$ forman un espacio vectorial de dimensión n

demostración.

Defino $S = \{ x(t) \;/\; x'(t) = A(t)x(t) \quad \forall t \in I \}$

espacio vectorial si: $\begin{cases} ① \; \vec{x} = 0 \text{ es solución} \\ ② \; \vec{v}, \vec{w} \in S \Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \in S \\ ③ \; \alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in S \Rightarrow (\alpha\vec{v}) \in S \end{cases}$

① $\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x}' = 0 \Rightarrow 0 = A(t)\,0$ ✓

② $(\vec{v} + \vec{w})' = \vec{v}' + \vec{w}' = A(t)\vec{v} + A(t)\vec{w} = A(t)(\vec{v} + \vec{w})$ ✓

③ $(\alpha\vec{v})' = \alpha\vec{v}' = \alpha A(t)\vec{v} = A(t)(\alpha\vec{v})$ ✓

dimensión n:

$\{x_1, \dots, x_n\} \in S$

considero x_1 solución de $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\vdots$

x_n solución de $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{tomo } \alpha_1, \dots, \alpha_n \;/ \\ X(t) = \alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n = 0 \\ \text{en particular} \\ X(t_0) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \\ \Rightarrow \text{son LI} \end{array}}$$

Construyo $z(t) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

$z(t) \in S$ xq' comb. lineal

$z(t_0) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$z(t)$ es sn de: $\begin{cases} z' = A(t)z \\ z(t_0) = \begin{pmatrix} z_{01} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{pmatrix} \end{cases}$

construyo $x^*(t) \in S$

$x^*(t) = z_{01} x_1 + \dots + z_{0n} x_n$

$x^*(t_0) = z_{01} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + z_{0n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$x^*(t)$ es sn de: $\begin{cases} x^{*\prime} = A(t)x^* \\ x^*(t_0) = \begin{pmatrix} z_{01} \\ \vdots \\ z_{0n} \end{pmatrix} \end{cases}$

por unicidad $x^*(t) = z(t) \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ son generadores $\Rightarrow$ son base

$\Rightarrow$ las soluciones del sistema lineal homogeneo $X'(t) = A(t)X(t)$ forman un espacio vectorial de dimensión n

$\blacksquare$

④ Considere el sistema $\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales todas las soluciones del sistema se mantienen acotadas

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} X$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = (a-\lambda)(a-\lambda) + b^2 = 0$$

$$(a-\lambda)^2 = -b^2$$

$$|a-\lambda| = bi \;\; \begin{cases} a-\lambda = bi \rightarrow \lambda = a-bi \\ a-\lambda = -bi \rightarrow \lambda = a+bi \end{cases}$$

$\lambda = a - ib$

$$\begin{pmatrix} ib & -b \\ b & ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} ibv_1 - bv_2 = 0 \\ bv_1 + ibv_2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = a + ib$

$$\begin{pmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -ibv_1 = bv_2 \\ bv_1 = ibv_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

propongo como soluciones:

$$x_1(t) = e^{(a-ib)t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{at}(\cos(bt) - i\,\mathrm{sen}(bt))$$

$$x_2(t) = e^{(a+ib)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}_{LD} e^{at}(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt))$$

$$\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = \begin{pmatrix} \cancel{-ie^{at}\cos(bt)} - e^{at}\mathrm{sen}(bt) + \cancel{ie^{at}\cos(bt)} - e^{at}\mathrm{sen}(bt) \\ e^{at}\cos(bt) - \cancel{ie^{at}\mathrm{sen}(bt)} + e^{at}\cos(bt) + \cancel{ie^{at}\mathrm{sen}(bt)} \end{pmatrix} : 2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) \\ e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix} = X(t) \text{ solución por ser comb. lineal.}$$

$$\frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = \begin{pmatrix} -ie^{at}\cos(bt) \cancel{- e^{at}\mathrm{sen}(bt)} - ie^{at}\cos(bt) + \cancel{e^{at}\mathrm{sen}(bt)} \\ e^{at}\cancel{\cos(bt)} - ie^{at}\mathrm{sen}(bt) - \cancel{e^{at}\cos(bt)} - ie^{at}\mathrm{sen}(bt) \end{pmatrix} : 2i$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{at}\cos(bt) \\ -e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) \end{pmatrix} = -e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \mathrm{sen}(bt) \end{pmatrix} = Y(t) \text{ solución por ser comb. lineal.}$$

mi solución general es:

$$X(t) = C_1 e^{at}\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix} - C_2 e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \mathrm{sen}(bt) \end{pmatrix}$$

para que $\lim_{t\to\infty} X(t)$ converja necesito $a \leq 0$

para que $\lim_{t\to-\infty} X(t)$ converja necesito $a \geq 0$

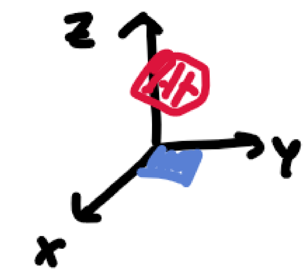
$\Big\}$ $\boxed{a = 0}$

21/12/17

1. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida como $S = Graf(f)$.

   a) Exhibir una parametrización regular (y probar que lo es) de S y un campo vectorial unitario normal a S.

   b) Dar la fórmula del área de S.



a) $T(x,y) = (x, y, f(x,y))$ $\quad x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$

parametrización regular $\iff$ ① $Im(T(x,y)) = S$

② $\|T_x \times T_y\| \neq 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

③ $T(x,y) \in C^1$

④ $T(x,y)$ inyectiva.

① Si $S = graf(f) \Rightarrow S$ va a tomar valores en x entre 0 y 1, valores en y entre 0 y 1 y en z será $f(x,y)$ $\forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

$\Rightarrow T(x,y) \; (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \; / \; Im(T(x,y)) = S$ ✓

② $T_x(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$

$T_y(x,y) = (0, 1, f_y(x,y))$

$T_x \times T_y = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1) \neq (0,0,0) \; \forall (x,y)$. ✓

③ $T(x,y) \in C^1$ porque sus 3 coordenadas $\in C^1$

④ $T(a,b) = T(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$

$T(a,b) = (a, b, f(a,b)) = (c, d, f(c,d)) = T(c,d) \iff (a,b) = (c,d)$ ✓

$$\begin{cases} a = c \\ b = d \\ f(a,b) = f(c,d) \end{cases}$$

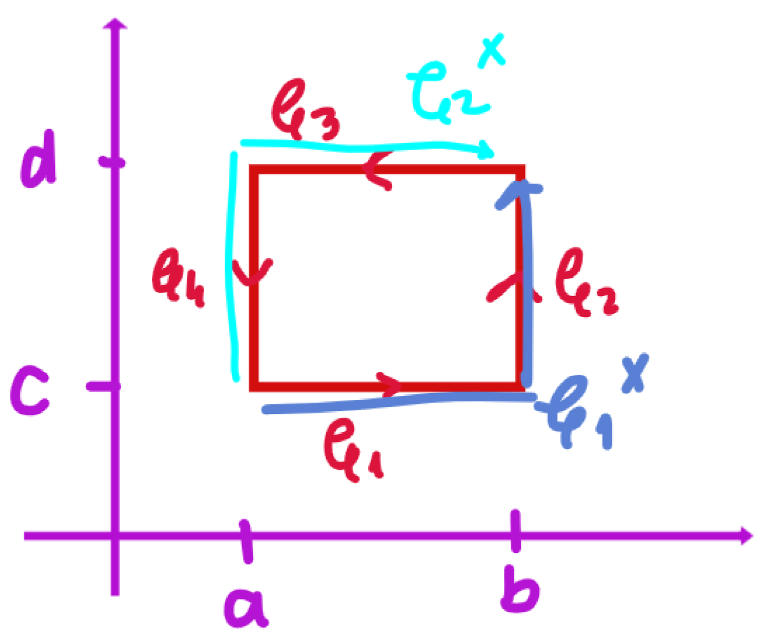
$$\nu^E = \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\|(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)\|}$$

b) por propiedad, como T es una parametrización regular:

$Area(S) = \iint_D \|T_x \times T_y\| \, dx\,dy \qquad D = [0,1]\times[0,1]$

$$Area(S) = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1} \; dx\,dy$$

2. Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1, tal que para todo rectángulo $Q=[a,b]\times[c,d]$ vale
$$\int_C F.ds=0,$$
donde C es el borde de Q. Probar que F es conservativo.



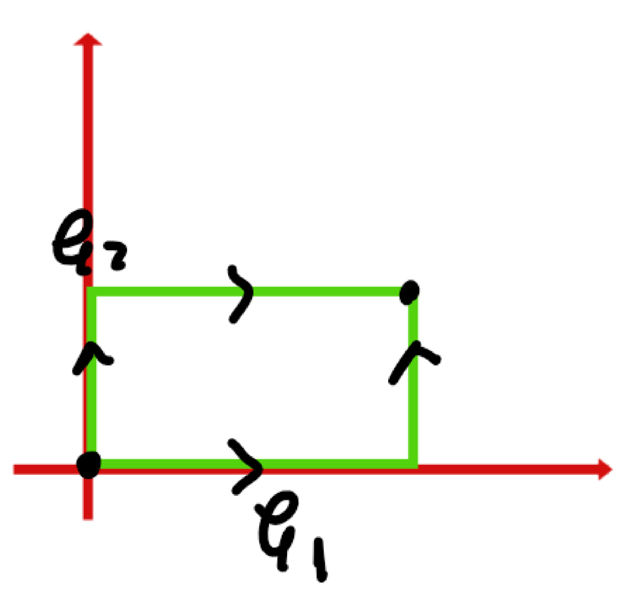
$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds=\int_{\mathcal{C}_1^+} F\cdot ds+\int_{\mathcal{C}_2^+} F\cdot ds-\int_{\mathcal{C}_3^-} F\cdot ds-\int_{\mathcal{C}_4^-} F\cdot ds=0$$

Con
$\mathcal{C}_1^+:\ \sigma_1(t)=(t,c)\quad t\in[a,b]\quad \sigma_1'(t)=(1,0)$
$\mathcal{C}_2^+:\ \sigma_2(t)=(b,t)\quad t\in[c,d]\quad \sigma_2'(t)=(0,1)$
$\mathcal{C}_3^-:\ \sigma_3(t)=(t,d)\quad t\in[a,b]\quad \sigma_3'(t)=(1,0)$
$\mathcal{C}_4^-:\ \sigma_4(t)=(a,t)\quad t\in[c,d]\quad \sigma_4'(t)=(0,1)$

$$\int_a^b F_1(t,c)\,dt+\int_c^d F_2(b,t)\,dt-\int_a^b F_1(t,d)\,dt-\int_c^d F_2(a,t)\,dt=0$$

$$\int_a^b F_1(t,c)\,dt+\int_c^d F_2(b,t)\,dt=\int_a^b F_1(t,d)\,dt+\int_c^d F_2(a,t)\,dt$$

$$\int_{\mathcal{C}_1^{+x}} F\,ds=\int_{\mathcal{C}_2^{+x}} F\,ds$$ con $\mathcal{C}_1^{+x}$ y $\mathcal{C}_2^{+x}$ orientando igual y con los mismos extremos.



como a,b,c,d son arbitrarios tomo curvas de $(0,0)$ a (x,y)

$$f=\int_{\mathcal{C}_1} F\cdot ds=\int_0^x F_1(t,0)\,dt+\int_0^y F_2(x,t)\,dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=F_2(x,y)$$

$$f=\int_{\mathcal{C}_2} F\cdot ds=\int_0^y F_2(0,t)\,dt+\int_0^x F_1(t,y)\,dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=F_1(x,y)$$

$\Rightarrow F=\nabla f\Rightarrow F$ es un campo conservativo.

3. Sea I un intervalo abierto de la recta, $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b :\to \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Supongamos que $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ es una base de soluciones del sistema lineal homogéneo de n ecuaciones

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Probar que existen funciones $c_1(t), \dots, c_n(t)$ definidas en I de clase C^1 tales que

$$X(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t)$$

es una solución del sistema lineal de n ecuaciones

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t).$$

$$(X(t))' = \overbrace{(c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t))'}^{X'(t)} =$$

$$= c_1'(t)X_1(t) + c_1(t)X_1'(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t) + c_n(t)X_n'(t) =$$

$$= c_1(t)X_1'(t) + \dots + c_n(t)X_n'(t) + c_1'(t)X_1(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t) =$$

$$= c_1(t)A(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)A(t)X_n(t) + c_1'(t)X_1(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t) =$$

$$= \underbrace{A(t)}_{A}\underbrace{(c_1(t)X(t) + \dots + c_n(t)X_n(t))}_{X(t)} + \underbrace{c_1'(t)X_1(t) + \dots + c_n'(t)X_n(t)}_{b(t)}$$

$\blacksquare$

4. Hallar una matriz A de 2×2 y un vector $b \in \mathbb{R}^2$ tales que la función

$$X(t) = 5e^{-2t}cos(t).(1,2) - 3e^{-2t}sen(t).(1,1)$$

sea la solución del sistema

$$X' = AX \quad \text{con} \quad X(0) = b.$$

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = b \end{cases}$$

$$X(0) = 5\cdot(1,2) = (5,10) = b$$

$$X'(t) = \left(-10e^{-2t}\cos(t) - 5e^{-2t}\text{sen}(t)\right)(1,2) + \left(6e^{-2t}\text{sen}(t) - 3e^{-2t}\cos(t)\right)(1,1)$$

$$X'(t) = \Big(-10e^{-2t}\cos(t) - 5e^{-2t}\text{sen}(t) + 6e^{-2t}\text{sen}(t) - 3e^{-2t}\cos(t),$$
$$-20e^{-2t}\cos(t) - 10e^{-2t}\text{sen}(t) + 6e^{-2t}\text{sen}(t) - 3e^{-2t}\cos(t)\Big) =$$
$$= \left(-13e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\text{sen}(t), -23e^{-2t}\cos(t) - 4e^{-2t}\text{sen}(t)\right)$$

$$\begin{pmatrix} -13e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\text{sen}(t) \\ -23e^{-2t}\cos(t) - 4e^{-2t}\text{sen}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\text{sen}(t) \\ 10e^{-2t}\cos(t) - 3e^{-2t}\text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

$$5A\cancel{e^{-2t}}\cos(t) - 3A\cancel{e^{-2t}}\text{sen}(t) + 10B\cancel{e^{-2t}}\cos(t) - 3B\cancel{e^{-2t}}\text{sen}(t) = -13\cancel{e^{-2t}}\cos(t) + \cancel{e^{-2t}}\text{sen}(t)$$

$$5A + 10B = -13 \longrightarrow 5A + 10\left(\tfrac{1}{3} - A\right) = -13 = 5A + \tfrac{10}{3} - 10A = -13$$
$$-3A - 3B = 1 \rightarrow \tfrac{1}{3} - A = B$$
$$-5A = -\tfrac{49}{3}$$
$$A = \tfrac{49}{15} \Rightarrow \tfrac{1}{3} - \tfrac{49}{15} = B = -\tfrac{44}{15}$$

$$5C\cos(t) - 3C\text{sen}(t) + 10D\cos(t) - 3D\text{sen}(t) = -23\cos(t) - 4\text{sen}(t)$$

$$5C + 10D = -23 \longrightarrow 5\left(\tfrac{4}{3} - D\right) + 10D = -23$$
$$-3C - 3D = -4 \rightarrow -4 + 3D = -3C \qquad \tfrac{20}{3} - 5D + 10D = -23$$
$$C = \tfrac{4}{3} - D$$
$$5D = -\tfrac{89}{3} \Rightarrow D = -\tfrac{89}{15} \Rightarrow C = \tfrac{109}{15}$$

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} \frac{49}{15} & -\frac{44}{15} \\ \frac{109}{15} & -\frac{89}{15} \end{pmatrix} X(t) \\ X(0) = (5,10) \end{cases}$$