Resumen Análisis II - Matemática 3

Curvas y Superficies

	Curvas	Superficies
DEF	*Curva C:* Sea C conjunto $\subset \mathbb{R}^3$, C es *curva* si $\exists$ funciones $x(t), y(t), z(t)$ definidas en $[a,b]$ / $(x,y,z) \in C \Leftrightarrow \exists\ t \in [a,b]$ / $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$	*Superficie S:* Sea S conjunto $\subset \mathbb{R}^3$, S es *superficie* si $\exists$ funciones $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ definidas en dominio elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ / $(x,y,z) \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \exists\ (u,v) \in D$ / $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$
DEF	*Parametrización:* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $\sigma(t)=(x(t), y(t), z(t))$ *parametriza* $\boldsymbol{C}$	T:$D\to\mathbb{R}^3$, $T(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ *parametriza* $\boldsymbol{S}$
DEF	*Curva Simple*: No se corta a sí misma = admite param. inyectiva. *Abierta Simple*: No se cruza. *Cerrada Simple*: Se une en 1 punto	*Superficie Orientable*: Superficie S es *orientable* si $\forall\ P \in S$ hay una forma de elegir un único versor normal $v(P)$ continuo en S (sólo si tiene 2 caras diferentes). Ej. cinta de Moebius no es orientable
DEF	*Parametrización Regular*: Es una parametrización $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, biyectiva, ▯▯ con $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}\ \forall\ t \in [a,b]$. Si $\boldsymbol{C}$ cerrada, requiere inyectiva en $[a,b)$ y que $\gamma(a)=\gamma(b)$ y $\gamma'(a)=\gamma'(b)$	*Parametrización Regular*: Es una parametrización T: $D \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, inyectiva, ▯▯ con $T_u\times T_v \neq \mathbf{0}\ \forall\ (u,v) \in D$
DEF	*Recta Tangente L:* Sea C curva, $P_0 \in C$, L recta tangente a C en P_0 si pasa por P_0 y es el límite de las rectas secantes a C por P_0. *Recta secante:* recta que pasa por P y P_0 ($P \in C$). *Límite*: Ángulo entre L y secante por P y $P_0 \to 0$ cuando $P \to P_0$	*Plano Tangente Π_0*: Sea S superficie, $P_0 \in S$, Π_0 un plano que pasa por P_0 y v_0 vector $\perp$ a Π_0 de norma 1. Π_0 es *plano tangente a* $\boldsymbol{S}$ *en* P_0 si $\forall$ recta que pasa por P y P_0 con $P\in S$ tiende a ser $\perp$ a v_0 cuando $P \to P_0$, o si $\frac{P-P_0}{\lVert P-P_0\rVert}\cdot v_0 \to 0$ cuando $P\to P_0$, con $P \in S$.
DEF	*Ecuación Recta Tangente*: L$= \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0)$	*Ecuación Plano Tangente*.: Si $v_0 = (a,b,c)$, y $P_0=(x_0, y_0, z_0)$, Π_0: $a\,(x\text{-}x_0) + b\,(y\text{-}y_0) + c\,(z\text{-}z_0) = 0$
PROP	*Dirección de Recta Tangente es $\gamma'(t)$*: Si C curva que admite parametrización regular $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3 \Rightarrow C$ tiene recta tangente L en $P_0=\gamma(t_0)$ y L tiene dirección del vector $\gamma'(t_0)$	*Dirección $\perp$ a Plano Tangente es $T_u\times T_v$*: Sea S superficie. Si $\exists$ parametrización regular T:$D \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, el plano Π_0 que pasa por $P_0=T(u_0,v_0)$ determinado por T_u y T_v es tangente a $\boldsymbol{S}$ en P_0. Dirección del normal: $v_0=\dfrac{T_u(u_0,v_0)\times T_v(u_0,v_0)}{\lVert T_u(u_0,v_0)\times T_v(u_0,v_0)\rVert}$
DEF PROP	*Curva Suave*: Sea C una curva, C es *suave* si tiene recta tangente en todos sus puntos que varía con continuidad, $L_P \to L_{P0}$ cuando $P\to P_0$. Si C tiene parametrización regular $\Rightarrow C$ es una curva suave. Si C suave, tiene recta tangente en todos sus puntos.	*Superficie Suave S*: Sea S una superficie, S es *suave si* tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta $L(P) \perp$ al plano tangente varía continuamente con P. Si $\boldsymbol{S}$ tiene parametrización regular $\Rightarrow S$ es una superficie suave.
DEF	*Reparametrización*: Sea C curva abierta, simple, suave, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ parametrización regular de C, $h:[a,b]\to[c,d]$ una biyección ▯▯con $h'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [a,b]$. Sea $\sigma:[c,d]\to\mathbb{R}^3 = \sigma(r) = \gamma(h^{-1}(r)) \Rightarrow\ \sigma$ es una parametrización regular de C y una *reparametrización* de γ.	Sea S superficie suave, y T: $D \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ param. regular de S. Sea $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ dominio elemental y G: $D_1 \to D$ una biyección, ▯▯ con Jacobiano no nulo. Sea T_1: $D_1\to\mathbb{R}^3$, $T_1(r,t) = T(G(r,t)) \Rightarrow\ T_1$ es una parametrización regular de S, y es una *reparametrización* de T.
PROP	*Si σ y γ parametrizan C, γ reparametrización de σ*	*Si T_1 y T_2 parametrizan C, T_2 reparametrización de T_1*
PROP	*Long. de curva igual a integral de $\lVert\gamma'\rVert$*: C curva abierta, simple, suave. γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de $C \Rightarrow$ Long $(C) = \int_a^b \lVert\gamma'(t)\rVert\,dt$	*Área de superficie igual a integral de $T_u\times T_v$*: S superficie suave, T: $D \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ param. regular de $\boldsymbol{S} \Rightarrow$ Área $(S) = \iint_D \lVert T_u\times T_v\rVert\,du\,dv$
DEF	*Integral de longitud de arco*: Sea C curva abierta, simple, suave, γ: $[a,b]\to\mathbb{R}^3$ parametrización regular de C. f función continua sobre $C \Rightarrow$ $\exists\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k)\,\Delta l$ para cualquier elección de $\tilde{P}_k$ en el arco de curva entre P_k y P_{k+1} = $\boxed{\int_C f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\lVert\gamma'(t)\rVert\,dt}$.	*Integral de Superficie*: Sea S superficie suave que admite parametrización regular T: $D \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, f: $S\to\mathbb{R}$ función continua. *Integral de superficie de f en S* es $\boxed{\iint_S f\,dS = \iint_D f(T(u,v))\,\lVert (T_u\times T_v)_{(u,v)}\rVert\,du\,dv}$
PROP	*Integral de longitud de arco es independiente de la parametrización*	*Integral de superficie es independiente de la parametrización*
DEF	*Circulación o Integral Curvilínea*: Sea C curva abierta, simple, suave, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ parametrización regular de C que la orienta. Sea $\boldsymbol{F}$ campo vectorial continuo sobre C. *Integral curvilínea del campo* $\boldsymbol{F}$ *sobre la curva* $\boldsymbol{C}$ es $\boxed{\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt}$. *Notación*: $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\gamma}'(t)\ dt = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$. *Forma diferencial*: Si $F=(P,Q,R)$, $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt$	*Flujo*: Sea S superficie suave, orientada por el campo de versores normales $\boldsymbol{v}(P)$, $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial ▯▯sobre S, T:$D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ parametrización regular de S. *Flujo de* $\boldsymbol{F}$ *a través de S* es $\boxed{\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{S} = \iint_S (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,d\,S = \iint_D \boldsymbol{F}(T(u,v))\cdot(T_u\times T_v)_{(u,v)}\ du\,dv}$ es simplificación de $\iint_D (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})(T(u,v))\,\lVert (T_u\times T_v)_{(u,v)}\rVert\,du\,dv$. *Notación*: $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{v}\,dS$

Algunos Teoremas de Curvas y Superficies

Dirección de Recta Tangente es $\gamma'(t)$: ***Demo:*** Sea $P_n\to P_0$ con $P_n \in \boldsymbol{C}\ \forall\ n$. Llamo $S_{P_n P_0}$ a la recta secante que pasa por P_n y P_0. Para cada $n\ \exists\ !\ t_n\in [a,b]$ / $P_n = \gamma(t_n)$. Análogamente, $t_0 \in [a,b]$ es el único punto $t \in [a,b]$ /$P_0=\gamma(t_0)$. $S_{P_n P_0}$ tiene dirección $\gamma(t_n)$- $\gamma(t_0)$, que es igual a la del vector $\frac{1}{t_n-t_0}\gamma(t_n)-\gamma(t_0)$, que a su vez converge a $\gamma'(t_0)$.

Propiedades de long. de curva: $\gamma\in$▯▯ inyect. Llamo $\Lambda(a,b)$ longitud de la curva $\boldsymbol{C}=\gamma([a,b])\Rightarrow$ *i)* $\Lambda(a,b)>0$ si $a<b$ y *ii)* Si $a<c<b\Rightarrow\Lambda(a,b)=\Lambda(a,c)+\Lambda(c,b)$

Longitud de curva es igual a integral de $\lVert\gamma'\rVert$: ***Demo***: Quiero ver que $\Lambda(a,b) = \int_a^b \lVert\gamma'(t)\rVert\,dt$. Por prop. de long de curva, $\Lambda(a, t+h)$-$\Lambda(a,t) = \Lambda(t, t+h)$.

① $\underbrace{\lVert\gamma(t+h)-\gamma(t)\rVert}_{\text{Long. recta entre }\gamma(t+h)\text{ y }\gamma(t)} \leq \Lambda(t, t+h) \leq \underbrace{\int_t^{t+h}\lVert\gamma'(t)\rVert}_{\text{Cota superior de }\Lambda}$ ②. Divido por h y $h\to 0$, ①=② $\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\Lambda(a,t+h)-\Lambda(a,t)}{h} = \lVert\gamma'(t)\rVert$ $\Rightarrow$ la función $\Lambda(a,t)$ es una primitiva de $\lVert\gamma'(t)\rVert$. Como $\Lambda(a,a)=0$, $\Lambda(a,t)=\int_a^t \lVert\gamma'(s)\rVert\,ds$

Integral de Superficie Independiente de Parametrización. Sea S superficie suave que admite dos parametrizaciones regulares T:$D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y T_1:$D_1 \subset \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, f: $S\to\mathbb{R}$ continua $\Rightarrow \iint_D f(T(r,s))\,\lVert(T_r\times T_s)\rVert\,dr\,ds = \iint_{D_1} f(T_1(u,v))\,\lVert(T_{1u}\times T_{1v})\rVert\,du\,dv$. ***Demo***: Sea $T(r,s)=(x(r,s), y(r,s), z(r,s))$. Sabemos que $\exists$ biyección G:$D_1 \to D \in$ ▯▯con Jacobiano no nulo $G(u,v)=(r(u,v), s(u,v))$ /$T_1(u,v)=T(G(u,v))\ \forall(u,v)\in D_1$. Por regla de la cadena, D$T_1(u,v)$= D$T(G(u,v))$ D$G(u,v) \Rightarrow \overline{T}_{1u}= \overline{T}_r r_u + \overline{T}_s s_u$ y $\overline{T}_{2u}= \overline{T}_r r_v + \overline{T}_s s_v$. $\Rightarrow T_{1u}\times T_{1v} = (T_r\times T_s)$ det(D$G(u,v)$). Así, $\iint_{D_1} f(T_1(u,v))\,\lVert(T_{1u}\times T_{1v})\rVert\,du\,dv = \iint_{D_1} f(T(G(u,v)))\,\lVert(T_r(G(u,v))\times T_s(G(u,v)))\rVert\,\lvert DG(u,v)\rvert\,du\,dv$= (por teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}^2$) $\iint_D f(T(r,s))\,\lVert(T_r(r,s)\times T_s(r,s))\rVert\,dr\,ds$	DT_1 = $\overbrace{\begin{bmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \\ z_r & z_s \end{bmatrix}}^{DT(G(u,v))}\overbrace{\begin{bmatrix} r_u & r_v \\ s_u & s_v \end{bmatrix}}^{DG(u,v)}$

Teorema del Valor Medio en Superficies: Sea S superficie suave con parametrización regular, f: $S\to\mathbb{R}$ continua$\Rightarrow\exists\ P_0 \in S$ / $\iint_S f\,dS = f(P_0)\,Area(S)$

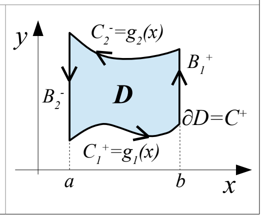
Teoremas del Cálculo Vectorial

Divergencia: div $\boldsymbol{F}$ o $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$. Si $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z$. Es el flujo por unidad de volumen

Rotor: rot $\boldsymbol{F}$ o $\nabla\times\boldsymbol{F}$. Si $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, $\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(R_y-Q_z\right)\hat{\boldsymbol{x}}+\left(P_z-R_x\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\left(Q_x-P_y\right)\hat{\boldsymbol{z}}$. Es la circulación por unidad de área

Teorema de Green. Sea $D\in\mathbb{R}^2$ región de tipo III (I y II al mismo tiempo). $\boldsymbol{F}:D\to\mathbb{R}^2$ campo vectorial □□ $\boldsymbol{F}=(P(x,y),Q(x,y))$. Si oriento positivamente (camino con D a la izquierda) $\partial D=C^+\Rightarrow$ $\boxed{\oint_{C^+}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dx\,dy}$.

Demo: Si $D:\{(x,y)\ /\ x\in[a,b],\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$, región de tipo I, y $\boldsymbol{P}=(P(x,y),0)$, $C^+=C_1^+ + B_1^+ + C_2^- + B_2^-$. $\int_{B1^+}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int_{B2^-}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=0$. Parametrizo C_1 con $\gamma_1=(x,g_1(x))$, $x\in[a,b]$. $\int_{C1^+}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int_a^b\boldsymbol{P}(\gamma_1(x))\cdot\gamma_1'(x)dx=\int_a^b P(x,g_1(x))\,dx$. Idem $C_2^-\Rightarrow\int_{C^+}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int_a^b\left[P(x,g_1(x))-P(x,g_2(x))\right]dx$. Por otro lado, $\iint_D P_y\,dx\,dy=\int_a^b\int_{g1(x)}^{g2(x)}P_y(x,y)\,dy\,dx$. Por TFCI, $=\int_a^b\left[P(x,g_2(x))-P(x,g_1(x))\right]dx$. $\Rightarrow\int_{C^+}\boldsymbol{P}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\iint_D -P_y\,dx\,dy$. De modo similar, usando que D es región de tipo II, con $\boldsymbol{Q}=(0,Q(x,y))$ pruebo que $\int_{C^+}\boldsymbol{Q}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\iint_D Q_x\,dx\,dy$. Defino $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$.



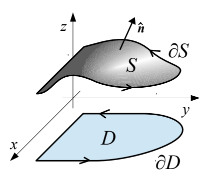
Teorema de Stokes. Sea $D\in\mathbb{R}^2$ región de tipo III, S superficie suave orientada por $T:D\to\mathbb{R}^3$ param. regular biyectiva en D (*Teorema de Stokes para gráficas*: S definida por $f:D\to\mathbb{R}\ /z=f(x,y)\subset$□□). Sea ∂S frontera orientada *de* S y $\boldsymbol{F}:S\to\mathbb{R}^3$ campo □□$\Rightarrow$ $\boxed{\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\,\boldsymbol{S}=\oint_{\partial S}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}}$.

Demo: *Para S gráfica de f:* $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, $T(x,y)=(x,y,f(x,y))\Rightarrow T_x\times T_y=(-f_x,-f_y,1)$. Parametrizo ∂D con $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2/\ \gamma(t)=(x(t),y(t))$, y $\partial\boldsymbol{S}$ con $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^3/\ \sigma(t)=(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))$. Expando rotor: $\iint_S\left(\nabla\times\boldsymbol{F}(x,y,f(x,y))\right)\cdot(-f_x,-f_y,1)\,dS=$

$\iint_D\left(-(R_y-Q_z)f_x-(P_z-R_x)f_y+(Q_x-P_y)\right)dA$ ①. Por otro lado, $\oint_{\partial S}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int_a^b P(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\underbrace{x'(t)}_{dx}+Q\underbrace{y'}_{dy}+R\underbrace{(f_x x'+f_y y')}_{dz}\,dt$

$=\int_a^b\left[(P+Rf_x)x'+(Q+Rf_y)y'\right]dt$. Defino $\tilde{P}=P+Rf_x$ y $\tilde{Q}=Q+Rf_y$. Por Green, = a $\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q+Rf_Y)-\frac{\partial}{\partial y}(P+Rf_x)\right]dA$.

Expandiendo y tomando en cuenta que $\frac{\partial}{\partial x}Q(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))=Q_x x'+Q_z f_x$ llego a ①. *Para S con parametrización general T*, si γ parametriza ∂D, defino $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^3/\ \sigma(t)=T(x(t),y(t))$, con la orientación de ∂S inducida por σ.



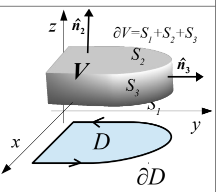
Teorema de Gauss. Sea V una región elemental simétrica, $\partial V=S$ superficie cerrada orientada, $\boldsymbol{F}:V\to\mathbb{R}^3$ campo vectorial □□ $\boldsymbol{n}$ normal exterior de S $\Rightarrow$ $\boxed{\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\,dV=\oiint_{\partial V=S}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS}$

Demo: $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{F}=P_x+Q_y+R_z$. $\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\,dV=\iiint_V(P_x+Q_y+R_z)\,dV$. $\oiint_{\partial V}\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=\oiint_{\partial V}(P\,\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}+Q\,\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}+R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\,dS$.

Pruebo que $\iiint_V R_z\,dV=\oiint_{\partial V}R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS$, las otras dos por analogía. V región elemental $\Rightarrow\exists\,f_1$ y $f_2\ /V: f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)$ con $(x,y)\in D\Rightarrow\iiint_V R_z\,dV=\iint_D\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}R_z\,dz\right)dx\,dy$. Por TFCI $=\iint_D\left[R(x,y,f_2(x,y))-R(x,y,f_1(x,y))\right]dx\,dy$ ①. $\partial V=S_1+S_2+S_3$.

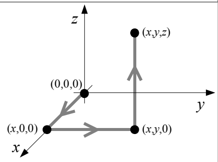
$S_3\perp\hat{\boldsymbol{z}}\Rightarrow\hat{\boldsymbol{n}}_3\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=0\Rightarrow\oiint_{\partial V}R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=\iint_{S_1}R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1\,dS+\iint_{S_2}R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2\,dS$. Parametrizo S_1 con $T_1:D\to\mathbb{R}^3\ /\ T_1(x,y)=(x,y,f_1(x,y))\Rightarrow$

$\iint_{S_1}R\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=\iint_D R(x,y,f_1(x,y))\,\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\underbrace{(f_{1x}\hat{\boldsymbol{x}}+f_{1y}\hat{\boldsymbol{y}}-\hat{\boldsymbol{z}})}_{-(T_{1x}\times T_{1y})(\text{apunta en }-\hat{z})}dA=\iint_D -R(x,y,f_1(x,y))\,dx\,dy$, ídem con S_2 (normal apunta $+z$) y llego a ①.



Teoremas de Campos Conservativos. Sea $\boldsymbol{F}$ campo vectorial □□(salvo en un número finito de puntos). Son equivalentes:	
i) Para cualquier curva orientada cerrada y simple C, $\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=0$	*ii*) Para 2 curvas con los mismos extremos C_1 y C_2 $\int_{C1}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}=\int_{C2}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}$
iii) $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de alguna función $f\subset$ □□ $\boldsymbol{F}=\nabla f$	*iv*) $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$

Demo: *i*) $\Rightarrow$*ii*). Sean γ_1 y γ_2 parametrizaciones de C_1 y C_2. Construyo curva cerrada C recorriendo C_1 y $-C_2$. Si C es simple, se verifica *i*). *ii*)$\Rightarrow$*iii*) Sea C curva que une 2 puntos cualesquiera, por ej. **0** con (x,y,z), $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$. Defino $f(x,y,z)=\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{s}$, independiente de C. Elegimos C trayectoria de la figura. $f(x,y,z)=\int_0^x P(t,0,0)\,dt+\int_0^y Q(x,t,0)\,dt+\int_0^z R(x,y,t)\,dt$. Por TFCI, $f_z=R$. Utilizando trayectorias $\neq$, llego a $f_x=P$ y $f_y=Q$. *iii*)$\Rightarrow$*iv*) Por propiedades del rotor, $\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\times(\nabla f)=0$. *iv*)$\Rightarrow$*i*) Por Stokes, $\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\,\boldsymbol{S}=0$.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Teorema de existencia y unicidad: Sea $F(t,X)$: $I\times\Omega\to\mathbb{R}$, con $I\in\mathbb{R}$ intervalo abierto y $\Omega\in\mathbb{R}^n$ conjunto abierto, F continua en t y localmente Lipschitz en variable X en $I\times\Omega\Rightarrow$ el sistema $\{X'=F(t,X)$ y $X(t_0)=X_0\}$ con $t_0\in I$ y $X_0\in\Omega$, admite siempre una solución □□ única en $[t_0-\delta,\ t_0+\delta]$

Función localmente Lipschitz: Continua en t y en X y $\exists$ cte. $L\ /\ \|F(t,X)-F(t,Y)\|\le L\,\|X-Y\|\ \forall\ t\in I,\ X,Y\in\Omega$

Ecuaciones de 1 Variable de 1er Orden

Forma Estándar: $x'=f(t,x)$, $x=x(t)$ (o $y'=f(x,y)$, $y=y(x)$)	*Forma Diferencial*: $P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0$ ($f(t,x)=-\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$)
Variables Separables: $P(t,x)=P(t)$, $Q(t,x)=Q(x)$: $f(t,x)=\frac{P(t)}{Q(x)}=x'\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{P(t)}{Q(x)}\Rightarrow\int Q(x)\,dx=\int P(t)\,dt$	
Homogénea de grado n: $x'=f(t,x)$, y $f(\lambda t,\lambda x)=\lambda^n f(t,x)\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$. Para ecuaciones homogéneas de grado 0, reemplazando $x(t)=z(t)\ t$ o $z(t)=x(t)\ t$ lleva a variables separadas.	Si $P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0$ con P y Q ambas homogéneas de grado $n\Rightarrow f(t,x)$ es homogénea de grado 0.
Tipo x'= f(at + bx +c): Reemplazo $z=at+bx+c$ y se convierte en ecuación de variables separables.	*Tipo* $x'=f\left(\frac{at+bx+c}{dt+ex+f}\right)$: Si $ae-bd\neq0$, reemplazo $x=z-k$ y $t=s-h$ y elijo k y h para que resuelvan $\{ah+bk=c,\ dh+ek=f\}\Rightarrow$ se convierte en ec. homogénea de gr. 0
Exactas: $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ y $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ (o $P_y=Q_x$) $\Rightarrow\exists\,f(x,y)\ /\ \frac{\partial f}{\partial x}=P$, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$ (o $(P,Q)=\nabla f(x,y)$). Solución implícita: $f(x,y)=0$. Si $P_y\neq Q_x$, uso *factor Integrante*: función $\mu(x,y)\ /\ (\mu P)_y=(\mu Q)_x$, y $\mu\,(P\,dx+Q\,dy)=0$ pasa a ser exacta. En ppio todas EDO se pueden hacer exactas. Si μ depende solo de x ó y: Si $\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)=g(x)$, μ depende de x y $\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$. Si $\frac{1}{P}(P_y-Q_x)=h(y)$, μ depende de y y $\mu(y)=e^{-\int h(y)dy}$.	
Lineales: $x'+a(t)\,x=q(t)$. Uso $\mu(t)=e^{\int a(t)dt}$	*De Bernoulli*: $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$. Uso $z=y^{1-n}\Rightarrow\frac{z'}{1-n}+P(x)z=Q(x)$

Sistemas Lineales de 1er Orden y Ecuaciones de Orden *n*

Sistemas Lineales de Ecuaciones de 1er Orden.

Forma general: $X'=A(t)\,X+F(t)$ con $X(t_0)=X_0$. X, $F:I\to\mathbb{R}^n$, I intervalo abierto $\in\mathbb{R}$, $a_{ij}(t)$ funciones continuas en I y $A(t)=(a_{ij}(t))$ matriz $\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Si $F(t)=0$ se llama *homogéneo*, caso contrario *no homogéneo*. Si $A(t)$ es cte, se llama *de coeficientes constantes*, si no de *coeficientes variables*.

Soluciones de un sistema lineal homogéneo son E.V.: El conj. □ de soluciones de un sistema lineal homogéneo de $n\times n$: $X'=A(t)X$ es un E.V. de dim n.

Demo:* (1)** *Es un subespacio*: *i) Cerrado en la suma:* Si X_1 y X_2 son dos soluciones y $X=X_1+X_2$ $(X:I\to\mathbb{R}^n \,/\, X=X_1+X_2) \Rightarrow X'=X_1'+X_2'=A\,X_1+A\,X_2=A(X_1+X_2)=A\,X$. *ii) Cerrado en mult. por escalar:* Si $X=c\,X_1$, $c\in\mathbb{R} \Rightarrow X'=cX_1'=c\,A\,X_1=A\,(cX_1)=AX$. ***(2) *Tiene dimensión n y genera. i) Dim n:* Construyo un conj. $C=\{X_1,\dots X_n\} \,/\, X_i(t_0)=e_i$ ($\{e_1,\dots e_n\}$ base canónica). Las funciones X_i son l.i. porque hay un punto (t_0) en las que son l.i. $\Rightarrow C$ es l.i.. *ii) Genera:* Sea $X\in$ □ una solución cualquiera con $X(t_0)=\xi\in\mathbb{R}^n$. ξ se puede escribir como combinación de vectores canónicos: $\xi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. Propongo $W(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i(t)$ con $X_i\in C$. $W(t)\in$ □ y como $W(t_0)=X(t_0)$, por unicidad $W(t)=X(t)\ \forall\, t\in I\Rightarrow C$ genera □

Soluciones de un sistema homogéneo son funciones l.i.⇔ evaluadas en un punto son l.i.: Sea $X'=A(t)X$ sistema de ecs. de $n\times n$, $t_0\in I$ cualquiera, $C=\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ un conjunto de n soluciones del sistema $\Rightarrow$ Funciones de C son l.i. $\Leftrightarrow$ vectores $\{X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_n(t_0)\}$ son l.i.

Demo: $\Leftarrow$**)** Por definición de indep. lineal de funciones, si son l.i. en un punto, son l.i.. Detalle: quiero ver que $c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)=\mathbf{0}$ implica $c_1=\dots=c_n=0$. Evalúo en $t=t_0$ y planteo $c_1X_1(t_0)+\dots+c_nX_n(t_0)=\mathbf{0}$, como por hipótesis estos vectores son l.i., $c_1=\dots=c_n=0\Rightarrow C$ es l.i. $\Rightarrow$**)** Planteo $c_1X_1(t_0)+\dots+c_nX_n(t_0)=\mathbf{0}$ quiero ver que $c_1=\dots=c_n=0$. Sea $W(t)=c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)$, $W(t)$ es una solución para datos iniciales $W(t_0)=\mathbf{0}\Rightarrow W'(t_0)=A(t_0)\,W(t_0)=\mathbf{0}\Rightarrow W(t)=\mathbf{0}\ \forall\ t$ y es ! por teorema unicidad. Esto es, $c_1X_1(t)+\dots+c_nX_n(t)=\mathbf{0}\ \forall\ t$. Como por hipótesis las funciones X_i son l.i., $c_1=\dots=c_n=0\Rightarrow$ vectores l.i.

Matriz fundamental Q(t):Tomo n soluciones del sistema de $n\times n$ $X'=A(t)X$: $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ y armo matriz $Q(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ con $X_i(t)$ como columnas de Q. Si $\det(Q(t_0))\neq 0$ para algún $t_0\in I\Rightarrow \det(Q(t))\neq 0\ \forall\ t\in I$ (esto no necesariamente vale siempre, sí con soluciones de un sist. homogéneo por teorema de ∃ y !). Si $\det(Q(t))=0$, las soluciones son l.i. y $Q(t)$ se llama una *matriz fundamental* del sistema. Se cumple $Q'(t)=A(t)\,Q(t)$

Método de reducción del orden. Sirve para encontrar una solución homogénea a una ecuación lineal de 2[do] orden con coeficientes variables si ya tengo una solución. Ej. $x''+p(t)x'+q(t)x=0$, con $x_1(t)$ solución. Propongo $x_2(t)=z(t)\,x_1(t)$ y reemplazo: $(z''x_1+2z'x_1'+z\,x_1'')+p(t)\,(z'x_1+z\,x_1')+q(t)\,(z\,x_1)=x_1z''+(2x_1'+p(t)\,x_1)\,z'+(\underline{x_1''+p(t)\,x_1'+q(t)\,x_1})=0$. $(\underline{\dots})=0$ por ser x_1 solución, $\Rightarrow$ resuelvo para $z(t)=\int x_1(t)^{-2}e^{-\int p(t)dt}\,dt$ y obtengo $x_2(t)$.

La solución general de un sistema no homogéneo es $X(t)=X_H(t)+X_P(t)$: Sea $X'=A(t)\,X+F(t)$, si X es solución $\Rightarrow$ se puede escribir como $X=X_H+X_P$, con X_H es la solución general del sistema lineal homogéneo asociado y X_P una solución particular.

Demo: Sea X_P una solución particular y sea X otra solución. Sea $Y=X-X_P\Rightarrow Y'=X'-X_P'=A(t)X+F(t)-(A(t)X_P+F(t))=A(t)(X+X_P)=A(t)Y\Rightarrow Y$ es solución del sistema homogéneo asociado. Sea Y una solución del sistema homogéneo asociado, y sea $X=X_P+Y\Rightarrow X'=X_P'+Y'=A(t)X_P+F(t)+A(t)Y=A(t)(X_P+Y)+F(t)=A(t)X+F(t)\Rightarrow X$ es solución del sistema no homogéneo.

Métodos de obtención de Soluciones Particulares

1. Variación de las constantes o de los parámetros: Sirve para sistemas lineales con coeficientes variables tipo $X'=A(t)X+F(t)$. Sea $\{X_{H1}, X_{H2}, \dots, X_{Hn}\}$ base de soluciones homogéneas y Q matriz fundamental. Propongo $X_P=Q(t)\,C(t)=c_1(t)X_{H1}+c_2(t)X_{H2}+\dots+c_n(t)\,X_{Hn}$ con $C(t)=(c_1(t),\dots,c_n(t))\in\mathbb{R}^n$. Quiero $X_P'=A\,X_P+F\Rightarrow Q'C+Q\,C'=A\,Q\,C+F$. Pero $Q'=AQ\Rightarrow Q'C+Q\,C'=Q'C+F\Rightarrow Q\,C'=F$. Basta elegir $C\,/\,C'=Q^{-1}F\to$ integro $C'(t)$ (ignoro constantes de integración porque busco una sola solución particular) y $X_P=Q\,C$

Ej. 1. $x''+x=\sin t$ Paso a sistema y obtengo sols. homogéneas: $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sin t\end{pmatrix}$. $\begin{matrix}X_{H1}=(\cos t,-\sin t)\\X_{H2}=(\sin t,\cos t)\end{matrix}\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$. $C'=Q^{-1}F=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t^2\\\sin t\cos t\end{pmatrix}$.

$C=\int C'=\begin{pmatrix}\frac{\sin 2t}{4}-\frac{1}{2}t\\-\sin t\end{pmatrix}$. Así queda $X_P=Q\,C=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sin 2t}{4}-\frac{1}{2}t\\-\sin t\end{pmatrix}$ y la solución general: $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=d_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+X_P$

Ej. 2. $x''-x=t^2$ Resuelvo sin pasar a sistema. En gral si x_{H1} y x_{H2} son sols. hom. l.i. y $f(t)$ térm. indep., resuelvo c_1' y c_2' para $\begin{cases}c_1'x_{H1}+c_2'x_{H2}=0\\c_1'x_{H1}'+c_2'x_{H2}'=f(t)\end{cases}$ luego integro c_1' y c_2' y reemplazo en $x_P=c_1x_{H1}+c_2x_{H2}$.

En este caso $x_{H1}=e^t$, $x_{H2}=e^{-t}$ y $f(t)=t^2$. Propongo $x_P=c_1(t)\,e^t+c_2(t)\,e^{-t}$. Busco $c_1(t)$ y $c_2(t)$ / $\begin{cases}c_1'e^t+c_2'e^{-t}=0\\c_1'e^t-c_2'e^{-t}=t^2\end{cases}$. Integrando queda $\begin{matrix}c_1=-(t^2/2+t+1)e^{-t}\\c_2=-(t^2/2-t+1)e^t\end{matrix}$ y $x_P=-t^2-2$. La solución general: $x=x_H+x_P=d_1e^t+d_2e^{-t}-t^2-2$

2. Coeficientes Indeterminados: Sirve para sistemas lineales con coeficientes constantes tipo $X'=A\,X+F(t)$, cuando $F(t)$ es un polinomio, exponencial, seno, coseno ó alguna combinación lineal de éstos. Puedo analizar cada término separadamente. ① Si F no contiene términos de X_H (base de soluciones homogéneas), propongo X_P combinación lineal de los términos de F y sus derivadas l.i.. ② Si F contiene un término que es t^n veces algún término de X_H (ignorando constantes), propongo X_P combinación lineal de t^{n+1} veces ese término y sus derivadas l.i.. ③ Si el pol. caract. de A tiene una raíz r-múltiple y F contiene un término que es t^n veces un término de X_H obtenido de esa raíz, propongo X_P combinación lineal de t^{n+r} veces ese término y sus derivadas l.i.. En los tres casos, incorporo X_P propuesto en la ec. diferencial, derivo y resuelvo los coeficientes.

① $x''+4x'+4x=4t^2+6e^t$. $x_H=(c_1+c_2t)e^{-2t}$. Propongo $x_P=A\,t^2+B\,t+C+D\,e^t$. Incorporo en ecuación, derivo y resuelvo: $A=1$, $B=-2$, $C=3/2$, $D=2/3$

② $x''-3x'+2x=2t^2+3e^{2t}$. $x_H=c_1e^t+c_2e^{2t}$. e^{2t} en x_H y en F. Propongo $x_P=A\,t^2+B\,t+C+D\,t\,e^{2t}$. Resuelvo: $A=1$, $B=3$, $C=7/2$, $D=3$

③ $x''+4x'+4x=3te^{-2t}$. $x_H=c_1e^{-2t}+c_2\,t\,e^{-2t}$. te^{2t} surge de la raíz doble y está en F. Propongo $x_P=At^3e^{-2t}+Bt^2e^{-2t}$. Ignoro te^{-2t} y e^{-2t} que ya están en x_H. $A=1/2$, $B=0$

Resolución de sistemas lineales homogéneos de coeficientes constantes de 2×2

Sea $X'=AX$, con $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. Existen 3 casos posibles de solución, dependiendo de los autovalores de A:

① *Autovalores reales diferentes*. Diagonalizo A: $A=C.D.C^{-1}$, con D matriz diagonal de autovalores λ_1 y λ_2, y C matriz de cambio de base $\{V_1, V_2\}$ (vectores como columnas). $V_1=(v_{11}, v_{12})$ y $V_2=(v_{21}, v_{22})$ autovectores de A de autovalores λ_1 y λ_2 respectivamente.

$D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}v_{11}&v_{21}\\v_{12}&v_{22}\end{bmatrix}$. Defino $Y=C^{-1}X\Rightarrow Y'=D.Y$ ó $\begin{cases}y_1'=\lambda_1y_1\\y_2'=\lambda_2y_2\end{cases}$ *Solución para Y* $\begin{cases}y_1=c_1e^{\lambda_1t}\\y_2=c_2e^{\lambda_2t}\end{cases}$ *Solución para X* $X=C.Y$ ó $[X]=c_1e^{\lambda_1t}[V_1]+c_2e^{\lambda_2t}[V_2]$

② *Único autovalor (doble)*: Paso A a forma de Jordan: $A=C.J.C^{-1}$, con J matriz de Jordan de autovalor λ, C matriz de cambio de base $\{W, V\}$ (vectores como columnas), V autovector de A, W autovector generalizado de A: cumple $(A-\lambda I)W=V$ (para encontrar componentes de W resuelvo este sistema).

$J=\begin{bmatrix}\lambda&0\\1&\lambda\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}w_1&v_1\\w_2&v_2\end{bmatrix}$. Defino $Y=C^{-1}X\Rightarrow Y'=J.Y$ ó $\begin{cases}y_1'=\lambda y_1\\y_2'=y_1+\lambda y_2\end{cases}$ *Solución para Y:* $\begin{cases}y_1=c_1e^{\lambda t}\\y_2=\underbrace{c_1te^{\lambda t}}_{Sol\ Part}+\underbrace{c_2e^{\lambda t}}_{Sol\ Homog}\end{cases}$ *Solución para X:* $X=C.Y$ ó $[X]=c_1e^{\lambda t}([W]+t[V])+c_2e^{\lambda t}[V]$

③ *Autovalores complejos diferentes*. $\lambda_1=a+\boldsymbol{i}b=\lambda$, $\lambda_2=\bar{\lambda}$. Tomo $\lambda=\lambda_1$. Paso A a forma matricial del número complejo λ: $A=C.M.C^{-1}$ con M forma matricial de λ, y C matriz de cambio de base $\{\mathrm{Im}[V],\mathrm{Re}[V]\}$ (vectores como columnas), $V=(v_1,v_2)$ autovector de λ.

$M=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}\mathrm{Im}(v_1)&\mathrm{Re}(v_1)\\\mathrm{Im}(v_2)&\mathrm{Re}(v_2)\end{bmatrix}$. Defino $Y=C^{-1}X\Rightarrow Y'=M.Y$ ó $\begin{cases}y_1'=a\,y_1-b\,y_2\\y_2'=b\,y_1+a\,y_2\end{cases}$ *Solución para Y:* $\begin{cases}y_1=e^{at}[c_1\cos(bt)-c_2\sin(bt)]=e^{at}\rho_0\cos(bt+\theta_0)\\y_2=e^{at}[c_1\sin(bt)+c_2\cos(bt)]=e^{at}\rho_0\sin(bt+\theta_0)\end{cases}$

Solución para X: $X=C.Y$ ó $[X]=c_1\ \mathrm{Re}[X_C]+c_2\ \mathrm{Im}[X_C]$ con $[X_C]=e^{\lambda t}[V]$. Expando $e^{\lambda t}=e^{(a+ib)t}$ como $e^a[\cos(bt)+\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}(bt)]$

Ecuaciones lineales de orden n

Forma general de ecuación de orden n: $x^{(n)}+a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}+a_{n-2}(t)\,x^{(n-2)}+\dots+a_1(t)\,x'+a_0(t)\,x=f(t)$.

Ecuaciones de orden n son equivalentes a sistemas de $n\times n$: Puedo transformar ecuación de orden n a sistema de $n\times n$ definiendo: $x_1(t)=x(t)$, $x_2=x'(t)=x_1'(t)$, $x_3=x''(t)=x_2'(t)$, …, $x_n(t)=x^{(n-1)}(t)\Rightarrow x_n'=-a_{n-1}(t)\,x_n-a_{n-2}(t)\,x_{n-1}-\dots-a_1(t)\,x_2-a_0(t)\,x_1+f(t)$.

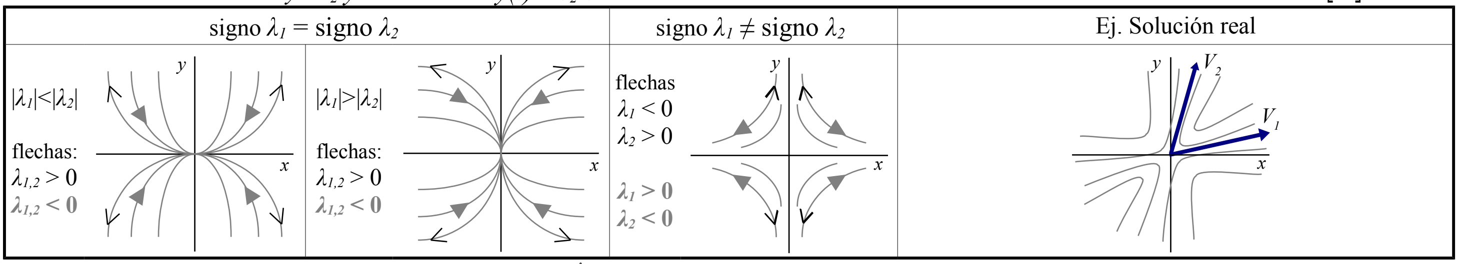
Ej. $x''+a\,x'+b\,x=f(t)$. Para pasar a sistema defino: $X(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\ \begin{matrix}x_1=x(t)\\x_2=x'(t)=x_1'(t)\end{matrix}$ y reescribo la ecuación como sistema: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}1&0\\-a&-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\f(t)\end{bmatrix}$ Así pruebo ∃ y !

Resolución de ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes de grado 2

$\ddot{x}+2b\,\dot{x}+\omega_0^2 x=F(t),\ x_h(t)=A e^{\lambda_1 t}+B e^{\lambda_2 t}$	$b>\omega_0$	*Sobreamortiguado*	$x_h(t)=e^{-bt}(A e^{\alpha t}+B e^{-\alpha t})$	*Antioscilador*
$\lambda_{1,2}=-b\pm\underbrace{\sqrt{b^2-\omega_0^2}}_{\alpha(\text{discriminante})},\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-b^2}$	$b<\omega_0$	*Subamortiguado*	$x_h(t)=e^{-bt}(A e^{i\omega t}+B e^{-i\omega t})=A_1 e^{-bt}\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\ddot{x}-\omega_0^2 x=F(t)$
	$b=\omega_0$	*Amortig. Crítico*	$x_h(t)=e^{-bt}(A+B\,t)$	$x_h(t)=Ae^{\omega_0 t}+Be^{\omega_0 t}$
	$b=0$	*Osc. Armónico*	$x_h(t)=A e^{i\omega_0 t}+B e^{-i\omega_0 t}=A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$	

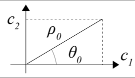
Diagramas de Fase

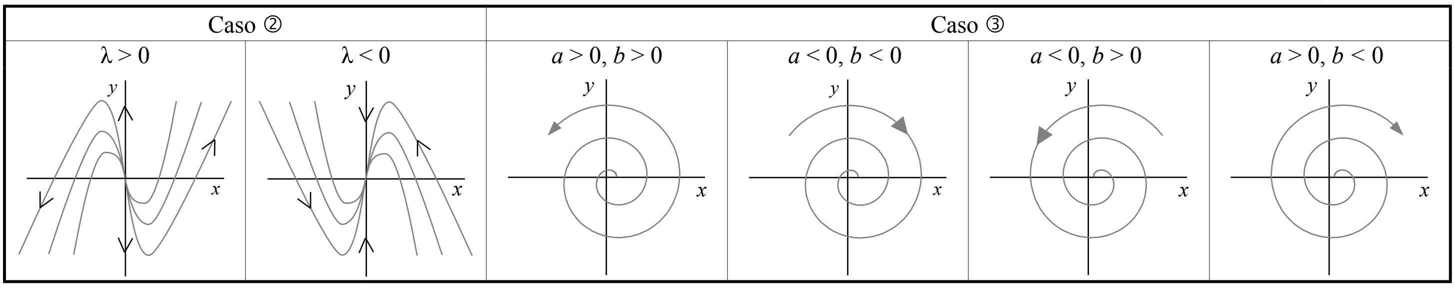
Caso ①: Uso base $\{V_1, V_2\}$ $\begin{cases} x'=\lambda_1 x \\ y'=\lambda_2 y \end{cases}$ ⇒solución $\begin{cases} x(t)=c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t)=c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ $y=c_2\,(x/c_1)^{(\lambda_2/\lambda_1)}$ Solución real $[X]=x(t)\,[V_1]+y(t)\,[V_2]$, con $[X]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



Caso ②: Uso base $\{W, V\}$ $\begin{cases} x'=\lambda x \\ y'=x+\lambda y \end{cases}$ ⇒solución $\begin{cases} x(t)=c_1 e^{\lambda t} \\ y(t)=c_1 t\, e^{\lambda t}+c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$ ⇒ $y=x\left(\frac{1}{\lambda}\ln(x/c_1)+\frac{c_2}{c_1}\right)$ Solución real $[X]=x(t)\,[W]+y(t)\,[V]$

Caso:③ Uso base $\{\mathrm{Im}(V), \mathrm{Re}(V)\}$. $\lambda=a+ib$ $\begin{cases} x'=ax-by \\ y'=bx+ay \end{cases}$ ⇒solución $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=e^{at}\rho_0\begin{bmatrix} \cos(bt+\theta_0) \\ \sin(bt+\theta_0) \end{bmatrix}$





Puntos de equilibrio y linearización de sistemas no lineales

Punto de equilibrio: Sea $X'=F(X)$ con $X(t_0)=X_0$, un punto de equilibrio es un cero de $F(X)$.

Teorema de estabilidad lineal: Sea F un campo en $\mathbb{R}^2$, y X_0 un cero de F. Si $Y=X-X_0$, $DF(X_0)$ no tiene autovalores con parte real 0, el diagrama de fases del sistema $X'=F(X)$ en un entorno de X_0 es "localmente igual" al del sistema $Y'=DF(X_0)\,Y$ cerca de $Y_0=0$. Si todos los autovalores de $DF(X_0)$ tienen parte real < 0, las trayectorias que pasan cerca de X_0 tienden a X_0 con $t\to+\infty$. Si todos tienen parte real > 0, se alejan de X_0. Si tiene un autovalor > 0 y otro < 0, por algunas trayectorias se acerca, y por otras se aleja.

Resumen Tipos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ecuaciones cotinuas y localmente Lipschitz Teorema de existencia y unicidad (Picard) (*Funciones Lipschitz y lema de Gronwall*)

Ecuaciones de 1 variable de 1^er orden

Lineales

Ecs. lineales $y'+h(x)\,y=g(x)$

ej:Bernouilli

Ecs. convertibles enlineales

No Lineales

Ecs. de variables separables $P(t)\,dt+Q(x)\,dx=0$

ej: $x'=f(at+bx+c)$

Ecs. convertibles en var. separables

Ecs. homogéneas de grado 0 $f(\lambda t, \lambda x)=f(t,x)$

Ecs. convertibles en hom. gr. 0

Ecuaciones exactas $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Factor integrante μ

Ecs. convertibles en exactas (en ppio todas)

Ecuaciones de varias variables y de orden > 1

Sistemas lineales de 1er orden de $n\times n$ y ecuaciones lineales de orden n

- Las soluciones son un espacio vectorial de dimensión n
- Ecuaciones de orden n se pueden representar como sistemas

Homogéneos

Coeficientes variables

- *M. fundamental* en sistemas
- *Wronskiano* en ecs. orden n

$X'=A(t).X$ / $x''+a(t)x'+b(t)x=0$

Coeficientes constantes $X'=A.X$ / $x''+ax'+bx=0$

De 2×2	**De orden 2**
Autovalores $\mathbb{R}$	Discrim. > 0
Autovalores $\mathbb{C}$	Discrim. < 0
Autovalor doble	Discrim. = 0
	• *Mét. reducción del orden*

De $n\times n$ (n > 2)

De orden > 2

No homogéneos

$X'=A(t).X+F(t)$/ $x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)$

- Las solución es la suma de una sol. particular y una homogénea
- Métodos para encontrar la solución particular:
  - *Variación de parámetros*
  - *Coeficientes indeterminados* $X'=A.X+F(t)$/$x''+ax'+bx=f(t)$

Sistemas no lineales de $n\times n$ y ecuaciones no lineales de orden n

- Puntos de equilibrio y linearización

Apédice Fórmulas

Integrales	De función escalar $f(\bar{r})$	De campo vectorial $\bar{F}(\bar{r})$
Simple	**Integral simple** = escalar $\int f(t)\,dt = k$	**Integral simple sobre un campo - vector por dt = vector** $\int \bar{F}(t)\,dt = \int F_1(t)\,dt\,\hat{x} + \int F_2(t)\,dt\,\hat{y} + \int F_3(t)\,dt\,\hat{z}$
Curva	**Integral de línea** = escalar $\int_C f(\bar{r})\,dl = \int_a^b f(\bar{\gamma}(t))\,\lVert\bar{\gamma}'(t)\rVert\,dt$ $\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{R}^3$ parametrización regular de C Si $f(\bar{r})\geqslant 0$ se puede interpretar como el "área de una valla"	**Circulación de un campo – vector dot $\bar{\mathbf{d}}\mathbf{l}$** = escalar $\int_C \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{l} = \int_a^b \bar{F}(\bar{\gamma}(t))\cdot\bar{\gamma}'(t)\,dt = \int_C F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$ **Integral de curva sobre un campo - vector por dl = vector** $\int_C \bar{F}(\bar{r})\,dl = \int_C F_1(\bar{r})\,dl\;\hat{x} + \int_C F_2(\bar{r})\,dl\;\hat{y} + \int_C F_3(\bar{r})\,dl\;\hat{z}$
Doble	**Integral doble / de área** = escalar $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$	**Integral doble sobre un campo = vector por dA = vector** $\iint_D \bar{F}(x,y)\,dA = \iint_D F_1(x,y)\,dx\,dy\,\hat{x} + \iint_D F_2(x,y)\,dx\,dy\,\hat{y}$
Superficie	**Integral de superficie** = escalar $\iint_S f(\bar{r})\,dS = \iint_D f(\bar{T}(u,v))\lVert\bar{T}_u\times\bar{T}_v\rVert\,du\,dv$	**Flujo de un campo – vector dot $\bar{\mathbf{d}}\mathbf{S}$** = escalar $\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F}(\bar{r})\cdot\hat{n}\;dS = \iint F_n\,dA$ **Integral de superficie sobre un campo - vector por dS = vector** $\iint_S \bar{F}(\bar{r})\,dS = \iint_S F_1(\bar{r})\,dS\;\hat{x} + \iint_S F_2(\bar{r})\,dS\;\hat{y} + \iint_S F_3(\bar{r})\,dS\,\hat{z}$
Volumen	**Integral triple / de volumen** = escalar $\iiint_V f(\bar{r})\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$	**Integral de volumen sobre un campo = vector** $\iiint_V \bar{F}(\bar{r})\,dt = \iiint_V F_1(\bar{r})\,dV\;\hat{x} + \iiint_V F_2(\bar{r})\,dV\;\hat{y} + \iiint_V F_3(\bar{r})\,dV\;\hat{z}$

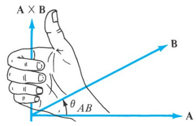
<u>**Cambio de Variable**</u>: $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ inyec. y C^1. $D^*\subset\mathbb{R}^2$ acotado y $f: D=T(D^*)\to\mathbb{R}$ integrable. Si D$\boldsymbol{T}$ inversible en $D^*\Rightarrow$
$\int_D f = \int_{D^*}(f\circ t)\,|det(\mathrm{D}\boldsymbol{T})|$. Ej. polares, **D** círculo r=R, **D*** r x θ: [0,R] x [0,2π], $T(r,\theta)=\{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D^*} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & \mathbf{D} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

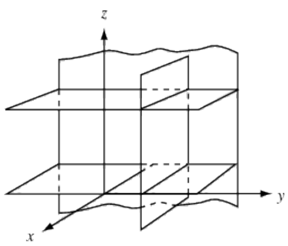
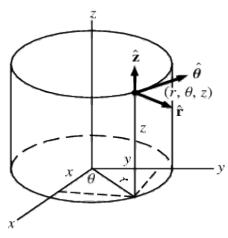
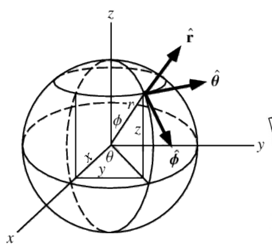
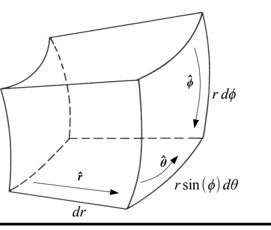
Productos Escalar y Vectorial

$$\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\bar{B}\times\bar{A} = |A||B|\sin\theta\;\hat{e},\quad \hat{e}\perp(\bar{A},\bar{B})$$

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = |A||B|\cos\theta$$



Regla de la mano derecha: Pulgar $\bar{A}$, Índice $\bar{B}$, del Medio $\bar{A}$ x $\bar{B}$

Coords.	Cartesianas $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$	Polares / Cilíndricas $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{z})$	Esféricas $(\hat{r},\hat{\phi},\hat{\theta})$ *ϕ cenital, θ azimutal*
Vectores	$\bar{F}=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$	$\bar{F}=F_r\hat{r}+F_\theta\hat{\theta}+F_z\hat{z}$	$\bar{F}=F_r\hat{r}+F_\phi\hat{\phi}+F_\theta\hat{\theta}$
Coorde-nadas	<u>Cart.:</u> $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}\quad\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}\quad\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ <u>Cilíndricas:</u> Notación alter: (ρ, θ o φ, z) $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}\quad\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}\quad\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$r=\sqrt{x^2+y^2}:[0,+\infty)$ $\theta=\tan^{-1}(y/x):[0,2\pi]$ $z=z(-\infty,+\infty)$ $x=r\cos(\theta)$ $y=r\sin(\theta)$ $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}:[0,+\infty)$ $\phi=\cos^{-1}(z/r):[0,\pi]$ $\theta=\tan^{-1}(y/x):[0,2\pi]$ $x=r\cos(\theta)\sin(\phi)$ $y=r\sin(\theta)\sin(\phi)$ $z=r\cos(\phi)$
Versores	<u>Esféricas:</u> Notación alternativa: (r, θ, φ o ϕ) (radial, cenital, azimutal) $\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{z}\quad\hat{\theta}\times\hat{z}=\hat{r}\quad\hat{z}\times\hat{r}=\hat{\theta}$	$\hat{r}=x/r\,\hat{x}+y/r\,\hat{y}$ $\hat{\theta}=-y/r\,\hat{x}+x/r\,\hat{y}$ $\hat{z}=\hat{z}$ $\hat{x}=\cos\theta\,\hat{r}-\sin\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\theta\,\hat{r}+\cos\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{z}=\hat{z}$	$\hat{r}=\sin\phi\cos\theta\,\hat{x}+\sin\phi\sin\theta\,\hat{y}+\cos\phi\,\hat{z}$ $\hat{\phi}=\cos\phi\cos\theta\,\hat{x}+\cos\phi\sin\theta\,\hat{y}-\sin\phi\,\hat{z}\quad\hat{\theta}=-\sin\theta\,\hat{x}+\cos\theta\,\hat{y}$ $\hat{x}=\sin\phi\cos\theta\,\hat{r}+\cos\phi\cos\theta\,\hat{\phi}-\sin\theta\,\hat{\theta}$ $\hat{y}=\sin\phi\sin\theta\,\hat{r}+\cos\phi\sin\theta\,\hat{\phi}+\cos\theta\,\hat{\theta}\quad\hat{z}=\cos\phi\,\hat{r}-\sin\phi\,\hat{\phi}$
Jacob.	1	r	$r^2\sin\phi$
$d\bar{l}$	$dx\,\hat{x}+dy\,\hat{y}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r\,d\theta\,\hat{\theta}+dz\,\hat{z}$	$dr\,\hat{r}+r\,d\phi\,\hat{\phi}+r\sin\phi\,d\theta\,\hat{\theta}$
$d\bar{S}$	$dy\,dz\,\hat{x}\qquad dx\,dz\,\hat{y}\qquad dx\,dy\,\hat{z}$	$r\,d\theta\,dz\,\hat{r}\qquad dr\,dz\,\hat{\theta}\qquad r\,dr\,d\theta\,\hat{z}$	$r^2\sin(\phi)\,d\phi\,d\theta\,\hat{r}\qquad r\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,\hat{\phi}\qquad r\,dr\,d\phi\,\hat{\theta}$
dV	$dx\,dy\,dz$	$r\,dr\,d\theta\,dz$	$r^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,dr$
$\bar{\nabla} f$	$\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}$
$\bar{\nabla}\cdot\bar{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r)+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\,F_\phi)+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}$
$\bar{\nabla}\times\bar{F}$	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y}+$ $+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}+$ $+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\,F_\theta)-\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right]\hat{r}+$ $+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)\right]\hat{\phi}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)-\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right]\hat{\theta}$
$\bar{\nabla}\times\bar{F}$ **Det.**	$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_r & rF_\theta & F_z\end{vmatrix}$	$\frac{1}{r^2\sin\phi}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\phi} & r\sin\phi\,\hat{\theta}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial\theta}\\ F_r & rF_\phi & r\sin\phi\,F_\theta\end{vmatrix}$
$\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\,\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$
			 

Este resumen no es oficial de la materia, puede haber temas que no estén incluídos. Si querés los archivos originales, tenés sugerencias o encontrás errores por favor escribime a alejandro.frenkel@yahoo.com. Realizado en LibreOffice (www.libreoffice.org). Ciertos gráficos de Wolfram Math World.