Clase práctica (3/2)

Decimos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie si existe una función continua $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\text{Im}(T) = S$.

↳ dominio elemental

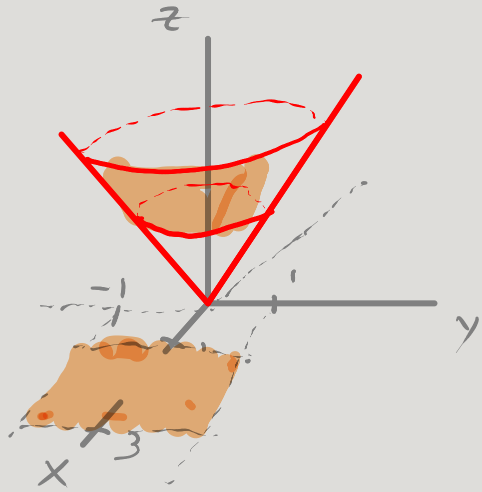
En ese caso decimos que T es una parametrización de S.

1) Dada la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0,\ 1 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1\}$$

a) Encontrar una parametrización de S.

Obs: S es un "pedazo" del cono



Como $z \geq 0$, ponemos $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y S resulta ser el gráfico de $f: D \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $D = [1,3] \times [-1,1]$.

Luego una parametrización será $T: D \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x, y, f(x,y)) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$$

b) ¿Es S suave?

Recuerdo: una sup es suave si admite una parametrización regular
- → iny
- → C^1
- → $T_u \times T_v (u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D$.

Forma 1: en la teórica vieron que el cono (entero) es suave en todos los puntos salvo el $(0,0,0)$. Como $(0,0,0) \notin S$, S resulta suave.

Forma 2: veamos que la T que propusimos es regular

- T es inyectiva: $T(x,y) = T(\bar{x},\bar{y})$

$$\Rightarrow (x, y, f(x,y)) = (\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x},\bar{y}))$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \end{array} \quad \checkmark$$

- T es C^1 pues sus coordenadas lo son (f lo es porque $(0,0) \notin D$!)

- $T_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$$T_y(x,y) = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow T_x \times T_y(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \neq (0,0,0)$$
$$\forall (x,y)$$

luego S es suave.

c) Calcular el plano tangente en $(2,0,2)$

Como S es un gráfico, sabemos que la ecuación del plano tg en $(2,0,2)$ será

$$z = f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot (x-2, y-0)$$

$$z = 2 + (1,0) \cdot (x-2, y-0)$$

$$z = 2 + x - 2$$

$$\boxed{z = x}$$ $\longrightarrow$ Interpretar en el gráfico por qué da esto!

2) Sea S la superficie dada por la param

$$T : \overbrace{[-1,1] \times [0,1]}^{D} \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = (u^2, v^2, u+v)$$

e) ¿Es S suave?

Veamos si T es regular

· <u>Iny</u>: $T(u,v) = T(\bar{u},\bar{v})$

$$\Rightarrow (u^2, \underline{v^2}, u+v) = (\bar{u}^2, \underline{\bar{v}^2}, \bar{u}+\bar{v})$$

Como $v, \bar{v} \in [0,1] \Rightarrow v = \bar{v}$

Sabiendo esto, mirando la 3ª coord $v = \bar{v}$.

Luego T es iny ✓.

· <u>C^1</u>: sus coordenadas lo son (polinomios) ✓

· $T_u(u,v) = (2u, 0, 1)$

$T_v(u,v) = (0, 2v, 1)$

$$\Rightarrow T_u \times T_v = (-2v, -2u, 4uv) \neq (0,0,0) \iff (u,v) \neq (0,0)$$

Luego T es regular en todo $D - \{0,0\}$

Es decir S es suave en $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, pero

todavía no sé si es suave o no en $(0,0,0)$

(Podría existir <u>otra</u> param que sea regular allí)

Para eso analicemos los versores normales

$$\tilde{n} = \frac{T_u \times T_v (u,v)}{\| T_u \times T_v (u,v) \|} = \frac{(-2v, -2u, 4uv)}{\sqrt{4v^2 + 4u^2 + 16u^2v^2}}$$

En la teórica vieron que si la superficie es suave, estos versores deben converger de forma continua al vector normal del plano tangente.

. $P = (0,0,0) \in S$

. $(u,v) = (0,0) \in D$, $T(0,0) = P$.

¿Existe $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \bar{n}$? (*)

Este lim no depende de la parametrización

Analicemos el límite por la recta $v = 0$, o sea

$$\lim_{(u,0)\to(0,0)} \frac{(-2.0, -2u, 4u.0)}{\underbrace{\sqrt{4.0^2 + 4u^2 + 16u^2.0^2}}_{\sqrt{4u^2} = 2|u|}}$$

$$= \lim_{(u,0)\to(0,0)} \left(0, \frac{u}{|u|}, 0\right)$$ y este límite no existe porque depende del signo de u.

Entonces menos aún va a existir el límite a secas $\circledast$ y S **NO** es suave en $(0,0,0)$

b) Calcular el plano tangente en $(1/2, 1/2, \sqrt{2})$

- Chequear que $(1/2, 1/2, \sqrt{2}) \in S$ ✓
  cuando $(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- La ecuación de un plano se puede dar mediante su normal y un punto de paso

producto interno de vectores

$$n \cdot (x - 1/2, y - 1/2, z - \sqrt{2}) = 0$$

Vimos que la normal está dada por $\tilde{n}$

O sea $\tilde{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)}{\sqrt{8}}$

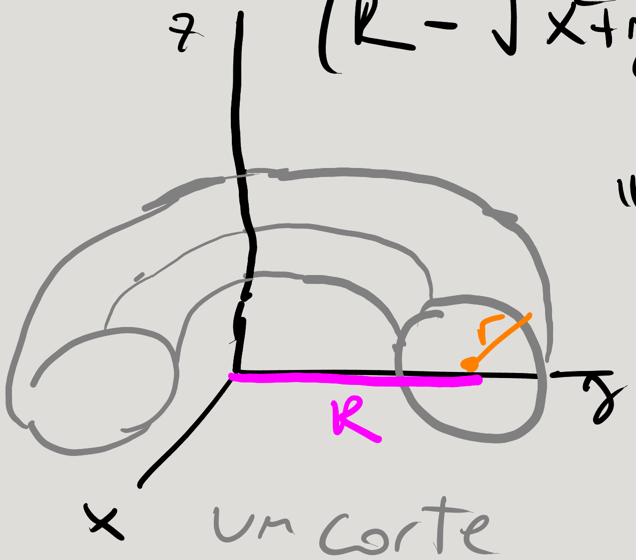
$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ el plano es

$$\left(-1/2, -1/2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (x - 1/2, y - 1/2, z - \sqrt{2}) = 0$$

3) Dados $0 < r < R$ definimos el <u>toro</u> como la superficie que cumple

$$\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$



"Dona"

Usar para el ej 2b de P2

Hablaremos más cuando veamos sup. de revolución.

Una circunf de radio r es girada alrededor del eje z. ¿Cuál es el área?

Área del toro = perímetro circunf chica . per circunf grande

$= 2\pi \cdot r \cdot 2\pi \cdot R$

$= 4\pi^2 r R$

Veremos que el área se puede calcular como $\iint_D \| T_u \times T_v \| \, du \, dv$ con D y T los del Ej 2b.