Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Práctica 6: Ecuaciones de 2do. orden y sistemas de primer orden.

Ejercicio 1. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. ídem con t tendiendo a $-\infty$.

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 Kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque.?

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & y'' - 8y' + 16y = 0 \\ \text{ii)} & y'' - 2y' + 10y = 0 \\ \text{iii)} & y'' - y' - 2y = 0 \end{array}$$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución exacta de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

(a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

Ejercicio 7. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

i)	$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$	ii)	$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
iii)	$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$	iv)	$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
v)	$y(0) = 1$	vi)	$y'(0) = 1$

Ejercicio 8. En el interior de la Tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?.

Ejercicio 9. La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina ecuación de Euler.

(a) Demuestre que el cambio de variables $x = \mathrm{e}^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.
(b) Aplique (a) para resolver en $\mathbf{R}_{>0}$ las ecuaciones:

i) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
ii) $x^2y'' - xy' + y = 2x$

Ejercicio 10. Vibraciones en sistemas mecánicos.

Una carreta de masa M está sujeta a una pared por medio de un resorte, que no ejerce fuerza cuando la carreta está en la posición de equilibrio $x = 0$. Si la carreta se desplaza a una distancia x, el resorte ejerce una fuerza de restauración igual a $-\kappa x$, donde κ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte. Por la segunda ley del movimiento de Newton, se tiene que:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x \quad \text{o bien } x'' + a^2x = 0, \quad a = \sqrt{\kappa/M} \tag{1}$$

(a) Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = 1/\tau$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

Si se produce una amortiguación que se opone al movimiento, y de magnitud proporcional a la velocidad ($= -c\frac{dx}{dt}$) debida al rozamiento, la ecuación (1) que describe el movimiento de la carreta en función del tiempo se convierte en:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0$$

o bien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, \tag{2}$$
$$b = \frac{c}{2M}, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}.$$

(b) Si $b > a$ (la fuerza de fricción debida al rozaminto es grande en comparación con la rigidez del resorte), encontrar la solución de (2) que verifique como antes $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$. Probar que no hay ninguna vibración y que la carreta vuelve simplemente a su posición de equilibrio. Se dice que el movimiento está sobreamortiguado.
(c) Si $b = a$, ver que tampoco hay vibración y que el comportamiento es similar al del caso anterior. Se dice que el movimiento es críticamente amortiguado.
(d) Si ahora $b < a$ (caso subamortiguado), probar que la solución de (2) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$ es:

$$x(t) = x_0\frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha}\mathrm{e}^{-bt}\cos(\alpha t - \theta) \tag{3}$$

donde $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, y $\tan\theta = b/\alpha$.

Esta función oscila con una amplitud que se reduce exponencialmente. Su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares, aunque no es periódica. Hacer un dibujo. Probar que el tiempo requerido para volver a la posición de equilibrio es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$$

y su "frecuencia" está dada por $f = 1/T$, llamada *frecuencia natural del sistema.* Notar que esta frecuencia disminuye al disminuir la constante de amortiguación c.

Hasta ahora hemos considerado vibraciones libres, porque sólo actúan fuerzas internas al sistema. Si una fuerza $F(t)$ actúa sobre la carreta, la ecuación será:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t) \tag{4}$$

(e) Si esta fuerza es periódica de la forma $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, con F_0, ω constantes, hallar $x(t)$. Al valor $\omega/2\pi$ se lo llama frecuencia impresa al sistema.

Si $\tan(\phi) = \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 M}$, probar que la solución general de (4), con $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ puede escribirse:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-bt}(C_1\cos(\alpha t) + C_2\mathrm{sen}(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \phi) \tag{5}$$

El primer término tiende a cero para $t \to +\infty$, luego es "transitorio", es decir, a medida que pasa el tiempo, la solución se parece más y más al segundo sumando. Notar que la frecuencia de esta función es la frecuencia impresa al sistema, y que la amplitud es el coeficiente $\dfrac{F_0}{\sqrt{(\kappa - \omega^2 M)^2 + \omega^2 c^2}}$. ¿Qué pasa cuando la frecuencia impresa se acerca a la frecuencia natural del sistema? (Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia).

(f) Si $b < a$ (caso subamortiguado) hallar la frecuencia impresa ω que provoca amplitud máxima. ¿Siempre existe este valor? Este valor de frecuencia impresa (cuando existe) se denomina frecuencia de resonancia. Demostrar que la frecuencia de resonancia es siempre menor que la frecuencia natural.

Ejercicio 11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

i)	$xy'' + 2y' + xy = 0,$	$I = \mathbf{R}_{>0},$	$y_1(x) = \frac{\mathrm{sen} x}{x}.$
ii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbf{R}_{>0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbf{R}_{<0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iv)	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$	$I = (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty),$	$y_1(x) = x.$

El último ítem es un caso especial de la ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$ (ecuación de Legendre), correspondiente al caso $p = 1$, en los intevalos en que la ecuación es normal.

Ejercicio 12. Sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$.

Ejercicio 13. Probar que las funciones

$$\phi_1(t) = \sin t \qquad \text{y} \qquad \phi_2(t) = \sin(2t)$$

son linealmente independientes en $\mathbf{R}$ pero que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$. ¿Existe algún sistema lineal normal de orden 2 definido en algún intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ que admita a $\{\phi_1, \phi_2\}$ como base de soluciones?