CLASE ANÁLISIS II | (Curvas, 2^a parte).

EJ: Hallar los vectores velocidad y aceleración para la curva $\mathcal{C}$ que es imagen de:

$\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$

hélice

Ejercicio: ver que

$\operatorname{Im} \sigma = \mathcal{C}$ es una curva simple abierta y suave y σ es una paramet. regular para $\mathcal{C}$.

Nombres:
- $\sigma(t)$: posición (trayectoria de una partícula)
- $\sigma'(t)$: velocidad
- $\sigma''(t)$: aceleración
- $\|\sigma'(t)\|$ = rapidez (con la que se mueve la partícula)

$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \quad (\neq (0,0,0) \ \forall t)$

↑ velocidad

Rapidez: $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \boxed{\sqrt{2}}$

Aceleración: $\sigma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$

Longitud de arco:

Vieron en la teórica:

Def.: Sea $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ C^1 (a trozos). La longitud de $\underset{Im(\sigma)}{\underset{\shortparallel}{C}}$ está dada por

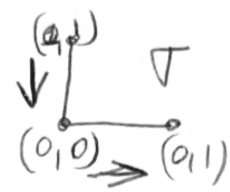
$$\boxed{long(C)=\int_a^b \|\sigma'(t)\|\,dt}$$

Obs: si la curva es C^1 a trozos

$\Rightarrow long(C)=\sum long(C_i)$ donde $C_i = Im(\underbrace{\sigma|_{[t_i,t_{i+1}]}}_{\text{regular}})$

Ejemplos:

1) $\sigma(t)=\begin{cases}(0,(1-t)^2) & ,\ 0\le t\le 1\\ ((t-1)^2,0) & ,\ 1\le t\le 2\end{cases}$



$\sigma'(t)=\begin{cases}(0,-2(1-t)) & 0\le t\le 1\\ (2(t-1),0) & ,\ 1\le t\le 2\end{cases}$

$$\Rightarrow \underset{Im(\sigma)}{\underset{\shortparallel}{\ell(C)}} = \int_0^1\sqrt{4(1-t)^2}\,dt+\int_1^2\sqrt{4(t-1)^2}\,dt$$

$$=2\int_0^1(1-t)\,dt+2\int_1^2(t-1)\,dt$$

$$=2\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1+2\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Big|_1^2$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\cancel{\frac{4}{2}}-\cancel{2}-\frac{1}{2}+1\right)=\boxed{2}$$

$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ hélice.

$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

$\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2} \Rightarrow \underset{\underset{Im(\sigma)}{\parallel}}{\ell(C)} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \boxed{2\pi\sqrt{2}}$

Def: Decimos que σ está parametrizada por longitud de arco

si $\|\sigma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in [a,b]$.

Ej: $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ está p.p.l.a.

Obs (ej. 10 de la guía ...): si $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ está p.p.l.a.

entonces $\operatorname{long}(\sigma) = b - a$

Obs: Supongamos que tenemos $\sigma / \sigma'(t) \neq 0 \ \forall t$ (es decir, una parametrización regular).

Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \int_a^t \|\sigma'(s)\| ds$

Entonces $\underset{(\overset{\parallel}{\|\sigma'(t)\|})}{g'(t)} > 0 \ \forall t$. Si $\ell = \operatorname{long}(\sigma)$, (o mejor dicho $\ell = \underset{\underset{Im(\sigma)}{\parallel}}{\ell(C)}$), tenemos que

$g : [a,b] \to [0, \ell]$ es biyectiva, C^1, estrictamente creciente.

Sea $\boxed{\alpha = g^{-1}}$, y sea $\boxed{\mu = \sigma \circ \alpha}$.

Afirmo que μ está p.p.l.a.

En efecto,

$$\|\mu'(s)\| = \overbrace{\|\sigma'(\alpha(s))\|}^{\neq 0 \checkmark\ (\text{x } g' \text{ es regular})} \cdot \|\alpha'(s)\|$$

Como $\alpha = g^{-1}$, entonces $s = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(s)$

$$\Rightarrow \alpha'(s) = (g^{-1})'(s) = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))} = \frac{1}{g'(t)}$$

$$y\ \sigma'(\alpha(s)) = g'(\underbrace{\alpha(s)}_{g^{-1}}) = g'(t)$$

$\Rightarrow \|\mu'(s)\| = 1$ ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Toda curva regular se puede (re)parametrizar por longitud de arco.}}$

Ej:

1) $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$.

$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow g(t) = \int_0^t \|\sigma'(s)\| ds = \sqrt{2}\, t$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(s) = \sigma \circ \underbrace{g^{-1}(s)}_{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \sigma\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \quad 0 \leq s \leq 2\pi\sqrt{2}}$$

es la p.p.l.a. ✓ $\left(\|\mu'(s)\| = \|\sigma'(s/\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\| = \|\sigma'(s/\sqrt{2})\| \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ ✓)

Integral de longitud de arco o de trayectoria

Tenemos $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y t_g'

$t \mapsto f(\sigma(t))$ es continua en I
$(x(t), y(t), z(t))$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\sigma f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt}$$

integral de f en $Im(\sigma)$
resp. de la long. de arco

No depende de la paramet. $\Rightarrow$ notamos $\boxed{\int_C f \, d\sigma}$

Ej: $f(x,y,z) = x^2+y^2$

$\sigma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$

$$\Rightarrow \int_C f \, d\sigma = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \cdot \underbrace{\|\sigma'(t)\|}_{= \sqrt{2}} = \boxed{2\pi \cdot \sqrt{2}}$$

Integrales curvilíneas

Def.: C una curva abta. y simple con $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una paramet. regular que la orienta. Sea F un campo vectorial continuo definido sobre C.

$\Rightarrow$ La integral curvilínea de F sobre la curva orientada C

es $$\boxed{\int_C F \cdot d\sigma = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt}$$

Obs: Las de long de arco o de trayectoria no dependen de la parametrización. En este caso depende únicamente de la orientación

Obs: Si $C = Im(\sigma)$, $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ regular y quiero recorrer C en sentido contrario (i.e, arranco en $\sigma(b)$ y termino en $\sigma(a)$), reparametrizo vía: $\sigma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^3$,

$$\sigma^-(t) = \sigma(a+b-t) \Rightarrow (\sigma^-)'(t) = -\sigma'(a+b-t)$$

$\to$ cambio la orientación

Interpretación: Si tenemos una trayectoria sobre la actúa un campo de fuerza F

$\Rightarrow$ trabajo de F a lo largo de σ: $\int_\sigma F \cdot ds$.

Ejemplo: $F(x,y,z) = (0,0, x^2+2y^2)$

$\sigma(t) = (\sqrt{2\pi - t}, 0, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\mu(t) = (\sqrt{2\pi - t} \cdot \cos t, \sqrt{2\pi - t}\, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

¿Qué trabajo realiza F a lo largo de σ y μ?

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \underset{(0,0,2\pi-t)}{F(\sigma(t))} \cdot \underbrace{\sigma'(t)}_{(*,*,1)} dt = \int_0^{2\pi} (2\pi - t)\, dt$$

$=$

$$\int_\mu F ds = \int_0^{2\pi} (0,0,(2\pi-t)(\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t)) \cdot (*,*,1) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\pi - t)\,dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} (2\pi - t)\,\operatorname{sen} t\,dt}_{= 2\pi}$$

$\Rightarrow$ conviene subir por el camino μ, ya que el trabajo realizado por F es mayor.

Obs: Esto implica que $\nexists f \,/\, F = \nabla f$. pues sino daría igual.

Teo: Sea C una curva suave simple y orientada que comienza en p y termina en q.
Si F es un campo gradiente continuo definido en C ($\exists f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $C^1 \,/\, F = \nabla f$)

$$\Rightarrow \int_C F \cdot dJ = f(q) - f(p).$$

Ej: Si $F(x,y,z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$, hallar $\int_\mu F \cdot dJ$ con μ como antes. de $(\sqrt{2\pi},0,0)$ a $(0,0,2\pi)$

Como $F = \nabla f$, $f(x,y,z) = x^2 yz$

$$\Rightarrow \int_\mu F\,dJ = \int_{\substack{C \\ = \operatorname{Im}(\mu)}} F\,dJ = f(0,0,2\pi) - f(\sqrt{2\pi},0,0) = 0 - 0 = \boxed{0}$$