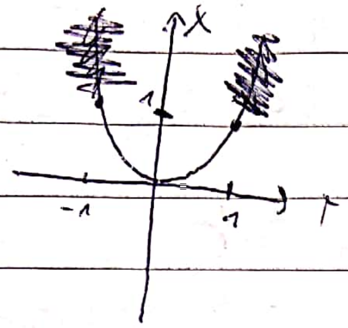
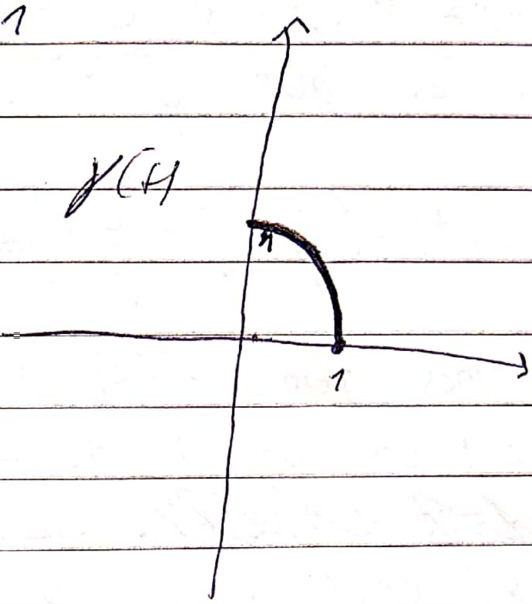
1) a) $\gamma(t) = \left(t^6, \sqrt{1-t^{12}}\right), \; -1 \leq t \leq 1$

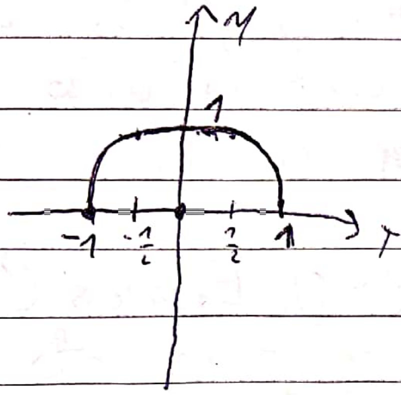
$x(t) \rightarrow$



$\gamma(t)$



$y(t) \rightarrow$



$$\boxed{\begin{aligned} \gamma(-1) &= \gamma(1) \\ \gamma(-\tfrac{1}{2}) &= \gamma(\tfrac{1}{2}) \\ \gamma(0) &= \gamma(0) \\ \gamma(\tfrac{1}{2}) &= \gamma(\tfrac{1}{2}) \\ \gamma(1) &= \gamma(1) \end{aligned}}$$

$\gamma(t)$ parametriza a la curva C "dos veces". Los gráficos de $x(t)$ y $y(t)$ son simétricos respecto al eje de las ordenadas, y son funciones no inyectivas. ✓ Debido a esto, $\gamma(t)$ no es inyectivo, y recorre a la curva desde $t=1$ a $t=0$, y desde $t=0$ a $t=1$, haciendo el mismo recorrido pero a la inversa. Debido a esto, $\gamma(t)$ no es una parametrización regular. ✓

b) Una parametrización regular de C sería, por ejemplo, $\varphi(t) = \left(t^6, \sqrt{1-t^{12}}\right)$, con $t \in [-1, 0]$. C es una curva simple, ya que se puede definir mediante una sola parametrización.

¿Por qué? Deberías chequear lo necesario (solo viste la inyectividad)

STAPLES

Scanned with CamScanner

Para saber si C es suave, analizo los puntos en los que $\varphi'(t)$ se anula o no es continua.

una curva es suave si admite una param regular.

$$\varphi'(t) = \left(6t^5, -\frac{6t^{11}}{\sqrt{1-t^{12}}}\right), \quad t \in [-1,0]$$

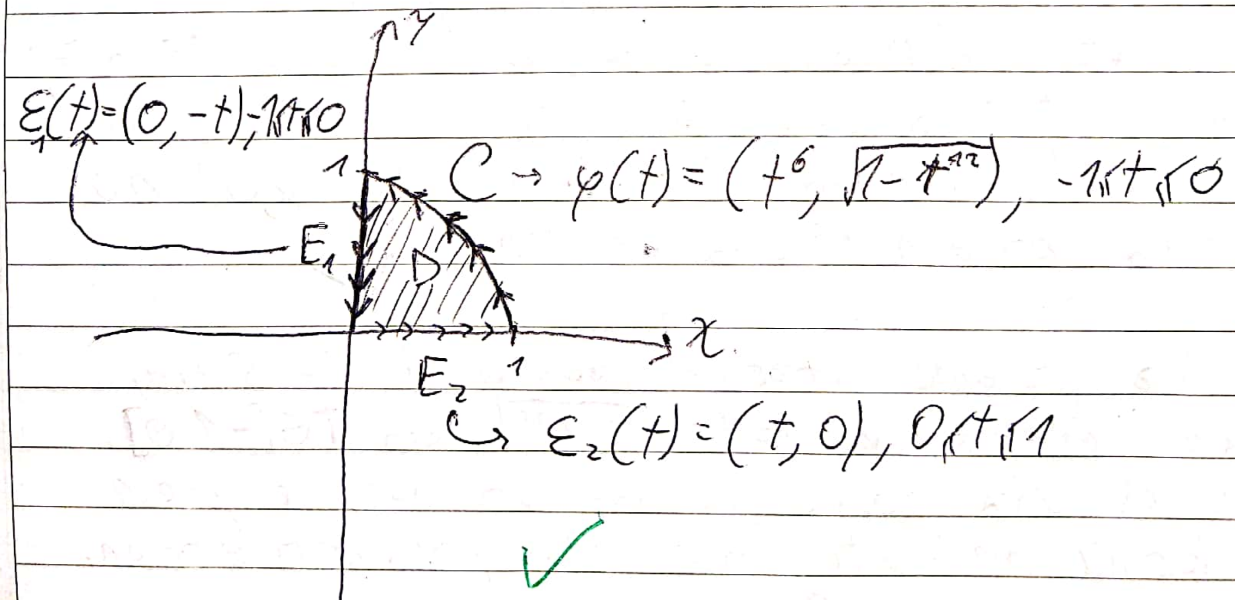
Vemos que $\varphi'(t)$ se anula en $t=0$, y no es continua en $t=-1$. ~~Como t=0 y t=-1 son los extremos de C~~. Como $\varphi(-1)$ y $\varphi(0)$ son los extremos de C, y $\varphi'(t)$ es continua y no nula en $t \in (-1,0)$, entonces C es suave.

$\varphi(0) = (0,1) \neq (1,0) = \varphi(-1)$. Entonces C es abierta.

OK. TODO esto es lo que prueba que φ es regular!!!

$$\text{c) } F(x,y) = \Big(\underbrace{4xe^{2x^2+y^2} + 3x^2y + 2x + y + 1}_{P},\ \underbrace{2ye^{2x^2+y^2} + x^3 + 1}_{Q}\Big)$$

Integral complicada, uso Green.



C, E_1 y E_2 están orientadas positivamente, así que puedo usar el Teorema de Green.

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C^+} F \cdot ds + \int_{E_1^+} F \cdot ds + \int_{E_2^+} F \cdot ds$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \cancel{2y e^{2x^2+y^2} \cdot 4x} + \cancel{3x^2} - \cancel{4x e^{2x^2+y^2} \cdot 2y} \cancel{- 3x^2} - 1$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -1$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = -\iint_D dA = -A(D)$$

otra prueba de que C es abierta

Si tomamos $t^6 = |x| \Rightarrow \sqrt{1 - t^{12}} = \sqrt{1 - x^2}$, por lo que C se ve como el gráfico de la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, con $x \in [0, 1]$. Entonces, el área de D es $\frac{1}{4}$ del área de un círculo de radio $= 1$.

$$\Rightarrow -A(D) = -\frac{1}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = -\frac{1}{4}\pi}$$

Ahora calculo $\int_{E_1^+} F\cdot ds$:

$\rightarrow \varepsilon_1'(t) = (0,-1)$ ✓

$$\int_{E_1^+} F\cdot ds = \int_{-1}^{0} \langle (\ldots, -2 + e^{t^2}+1), (0,-1)\rangle \, dt$$ ✓

$$= \int_{-1}^{0} 2 + e^{t^2}\, dt - \int_{-1}^{0} 1\, dt = e^{t^2}\Big|_{-1}^{0} - t\Big|_{-1}^{0} = \cancel{1} - e - 0 - \cancel{1}$$

$$\int_{E_1^+} F\cdot ds = -e$$

Bien.

Ahora calculo $\int_{E_2^+} F\cdot ds$:

$$\int_{E_2^+} F\cdot ds = \int_{0}^{1} \langle (4te^{2t^2} + 2t + 1, \ldots), \underbrace{(1,0)}_{\varepsilon_2'(t)=(1,0)}\rangle \, dt$$ ✓

$$= \int_{0}^{1} 4te^{2t^2}\, dt + 2\int_{0}^{1} t\, dt + \int_{0}^{1} dt$$

$$= e^{2t^2}\Big|_{0}^{1} + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} t^2\Big|_{0}^{1} + t\Big|_{0}^{1} = e^2 - \cancel{1} + \cancel{1} + 1 =$$

$$\cancel{\int_{E_2^+} F\cdot ds = e^2 - e + 2}$$

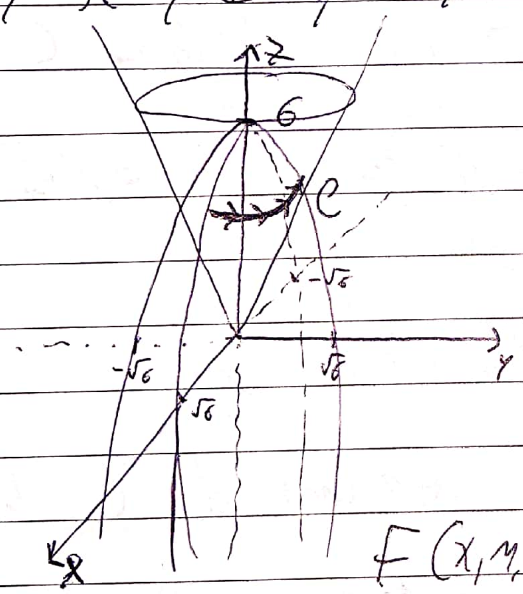
$$\int_{E_2^+} F\cdot ds = e^2 + 1$$ ✓

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C^+} F\cdot ds + \int_{E_1^+} F\cdot ds + \int_{E_2^+} F\cdot ds$$

$$-\frac{1}{4}\pi = \int_{C^+} F\cdot ds - e + e^2 + 1$$

$$\left[\int_{C^+} F\cdot ds = e - e^2 - 1 - \frac{1}{4}\pi \rightarrow \text{Trabajo de } F \text{ a lo largo de } C.\right]$$

2) $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z = 2x^2+y^2,\ z = 6-x^2-y^2\}$, y se pide que $y \geq 0$.



C: $2x^2+y^2 = 6-x^2-y^2$

$3x^2+2y^2=6$

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2=1$

con $z=2x^2+y^2$

$F(x,y,z) = (2yxe^{x^2}+z,\ e^{x^2},\ x)$

Veo si F es conservativo. es de clase C^1

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(0-0,\ 1-1,\ 2xe^{x^2}-2xe^{x^2}\right) = (0,0,0)$$

$\Rightarrow F$ es conservativo.

STAPLES
Scanned with CamScanner

Como F es conservativo, $\exists f / \nabla f = F$.
Trato de encontrar f.

$$\cancel{\int (2yxe^{x^2}+z)\,dx = ye^{x^2} + h(y,z)}$$

$$\int (2yxe^{x^2}+z)\,dx = ye^{x^2} + xz + h(y,z) + C$$

$$\to \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{x^2}+xz+h(y,z) \overset{+C}{\vee}\right) = e^{x^2} + 0 + h_y(z)$$

$$\to \frac{\partial}{\partial z}\left(ye^{x^2}+xz+h(z)+C\right) = 0 + x + \underbrace{h_z(z)}_{=0}$$

$$\to f(x,y,z) = ye^{x^2} + xz + C.$$ ~~Asu~~ Tomo $C=0$

Como F es conservativo y tengo una $f / \nabla f = F$, uso que:

$$\int_{C^*} F \cdot ds = f(b) - f(a)$$

, siendo b y a los puntos extremos de C, b el final y a el inicial.

Para calcular esta integral, tomo la orientación antihoraria de C, si se la proyectase en el plano xy.

Cuando $y=0, \Rightarrow z=2x^2$, $z=6-x^2$

$$2x^2=6-x^2$$
$$3x^2=6$$
$$x^2=2 \rightarrow$$
$$\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$
$$\boxed{z=4}$$

~~Los puntos~~

El punto inicial de C es $a=(\sqrt{2},0,4)$, y el final es $b=(-\sqrt{2},0,4)$.

Entonces, $\displaystyle\int_{C^+} F\cdot ds = f(b)-f(a)$

$$= -4\sqrt{2}-4\sqrt{2} = -8\sqrt{2}$$

$$\boxed{\int_{C^+} F\cdot ds = -8\sqrt{2}}$$

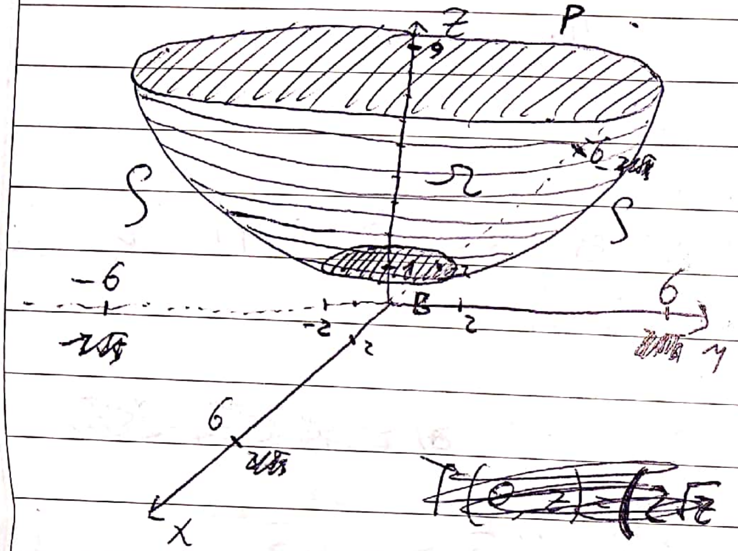
Scanned with CamScanner

3) $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2=4z,\ 1 \leq z \leq 9\}$

$$T(x,y,z) = 38 - xy - x^2 - y^2 + 4z$$

$+$ COPIASTE MAL

$$-\nabla T = F(x,y,z) = (2x + y,\ 2y + x,\ -4)$$



La pienso en polares →

$r = 2\sqrt{z}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$1 \leq z \leq 9$

¿De dónde sale?

¿Cómo orientás las superficies?

~~$T(\theta, z) = (2\sqrt{z}$~~

Uso Gauss → le agrego la tapa inferior, B, y la tapa superior, P.

F es C^1?

Se me pide calcular el flujo de calor saliente de $S \cup B$.

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F)\, dV = \underbrace{\iint_{S^+} F \cdot ds + \iint_{B^+} F \cdot ds}_{\text{lo que quiero calcular}} + \iint_{T^+} F \cdot ds$$

✓

$div(F) = 2+2+0 = 4$ ✓

$\cancel{\iiint_\Omega F \cdot dS}$ $\iiint_\Omega div(F) \cdot dV = 4 \iiint_\Omega dV = \boxed{4} V(\Omega)$

Ω de dónde sale? Woy que explicarlo!

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_1^9\int_0^{2\sqrt{z}} r \cdot dr\, dz\, d\theta = 2\pi \int_1^9 \left(\frac{1}{2}(2\sqrt{z})^2\right) dz$$

$$\cancel{2\pi \int_1^9 \left(\frac{1}{2}(2\sqrt{z})^2\right) dz = 2\pi \int_1^9 (2z)}$$

$$= 2\pi \int_1^9 2z\, dz = 4\pi \int_1^9 z\, dz = 4\pi \frac{1}{2}\left(z^2\Big|_1^9\right) = 160\pi$$ ✓

$$V(\Omega) = 160\pi = \iiint_\Omega div(F)\, dV$$ FALTA x4!

Parametrizo a la tapa superior como:

$\cancel{T(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta, 9), \ldots}$ ¿de dónde sale?

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 9)$, $0 \leq r \leq 6$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$
$T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$ $\rightarrow$ $T_r \times T_\theta = (0, 0, r)$ ✓

↳ orientada con normal exterior

¿y eso respeta lo que querés?

STAPLES

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \iint_{T^+} F \cdot dS = \int_0^6 \int_0^{2\pi} \langle (\cancel{\text{ecos}\theta} —, —, -4), (0, 0, r) \rangle \, d\theta \, dr$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} \int_0^6 r \, dr \, d\theta = -8\pi \int_0^6 r \, dr = -144\pi$$

$$\iint_{T^+} F \cdot dS = -144\pi$$

$$\iiint_{R} \operatorname{div}(F) \, dV = \iint_{S^+} F \cdot dS + \iint_{B^+} F \cdot dS + \iint_{T^+} F \cdot dS$$

4

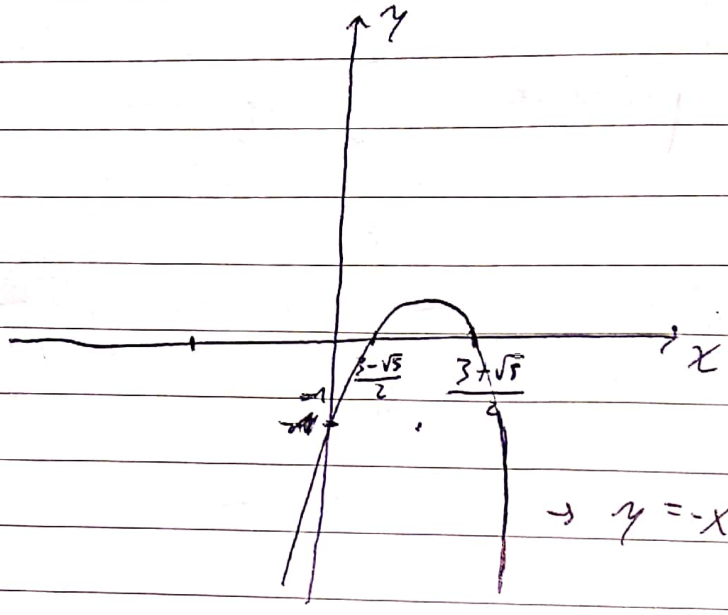
$$160\pi = \iint_{S^+} F \cdot dS + \iint_{B^+} F \cdot dS - 144\pi$$

$$\boxed{\iint_{S^+} F \cdot dS + \iint_{B^+} F \cdot dS = 304\pi \rightarrow \text{Flujo de calor saliente a través de la taza con base}}$$

OK acrastrás el error.

Tenés que explicar más cómo llegás a las cosas.

4)



$\rightarrow y = -x^2 + 3x - 1$

$$x^2 - \frac{1}{3}y^3 = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3}y^3 = x^2 - \frac{2}{3}$$

$$y^3 = 3x^2 - 2$$

$$y = \sqrt[3]{3x^2-2} = (3x^2-2)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(3x^2-2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x = 2x(3x^2-2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y(x=1) = 1 \quad , \quad y'(x=1) = 2$$

$$y' = 2x + b$$

$$1 = 2 \cdot 1 + b \rightarrow b = -1$$

$$y = 2x - 1$$

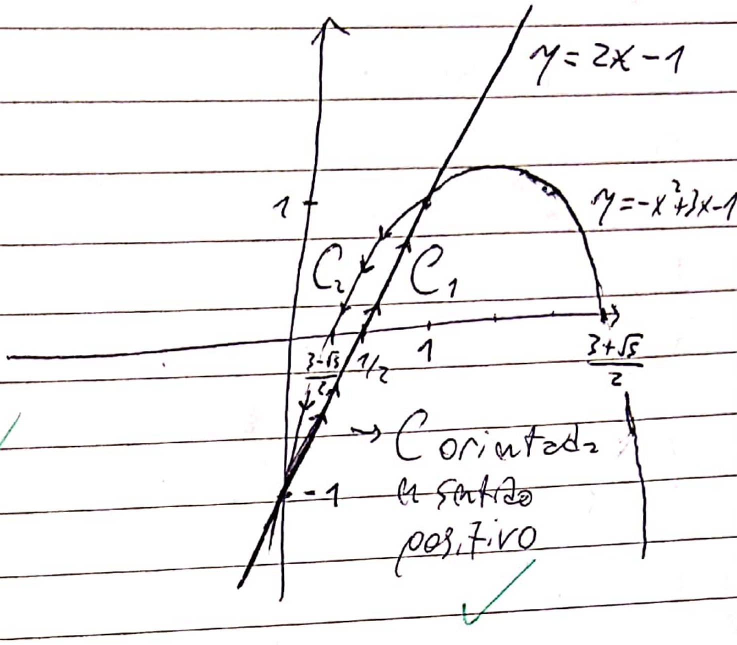
↳ recta tangente en (1,1) a la línea de nivel del campo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{3}y^3$

$2x-1=-x^2+3x-1$

$x^2-x=0$

$x_1=0 \qquad x_2=1$ ✓

$P_1=(0,-1)$ ✓ $P_2=(1,1)$



$$G(x,y)=(2xy+3y,\ x^2+e^{y^2})$$

Parametrizo C_1 y C_2 → $C=C_1\cup C_2$

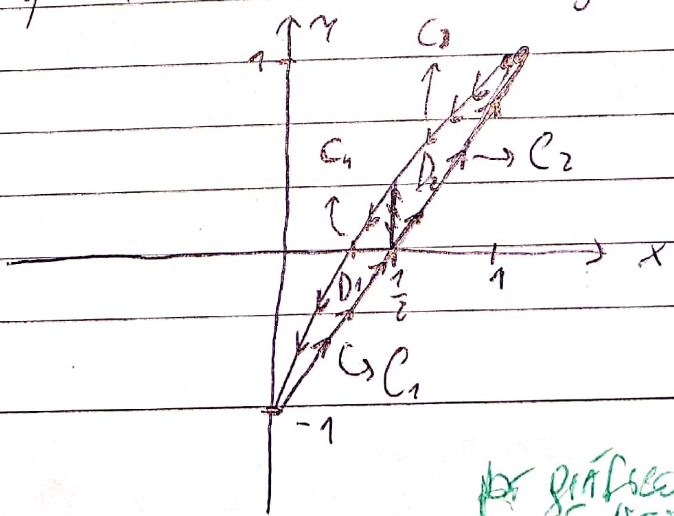
$\sigma_1(t)=(t,\ 2t-1),\ 0\leq t\leq 1$ → respeta la orientación

$\sigma_2(t)=(t,\ -t^2+3t-1),\ 0\leq t\leq 1$ → no respeta la orientación

Si resuelvo esto a mano me queda una integral impropia ⇒ uso Gauss.

↳ NO. QUEDA DIFÍCIL PERO NO ES IMPROPIA)

Tomo $D\,/\,\partial D=C$. D no es una región de tipo 3, así que la divido en dos regiones de tipo 3.



ojo Esa división tampoco es de tipo 3, pero vimos que green vale si D está encerrado por gráficos de funciones.

Scanned with CamScanner

Las integrales sobre la intersección de D_1 y D_2 se anulan, así que no hace falta calcularlas.

$$\iint_{D_1}(Q_x-P_y)\,dA + \iint_{D_2}(Q_x-P_y)\,dA = \iint_{D}(Q_x-P_y)\,dA = \int_C G\cdot ds$$

$$\boxed{\iint_{D_1}\underbrace{(Q_x-P_y)}_{-3}\,dA = -3\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{2x-1}^{-x^2+3x-1} dy\,dx = -3\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2-x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\iint_{D_2}(Q_x-P_y)\,dA = -3\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{2x-1}^{-x^2+3x-1} dy\,dx = 3\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^2+x)\,dx = 2}$$

$$\iint_{D}(Q_x-P_y)\,dA = \underbrace{\iint_{D_1}(Q_x-P_y)\,dA}_{1/2} + \underbrace{\iint_{D_2}(Q_x-P_y)\,dA}_{2} = \int_C G\cdot ds$$

$$\boxed{\int_C G\cdot ds = \frac{5}{2}}$$

error de cuentas.