GRILLA: R|R|R-|M|
NOTA: 2(dos)

1) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2+z^2, 1 \leq x \leq 4\}$

a) Probar que S es una superficie orientable ¿cuántas orientaciones distintas tiene?

S es orientable si ∃ dada $T_{(u,v)}$ parametrización de S

$T_{(u,v)} \begin{cases} C^1 \\ T_u \times T_v \neq (0,0,0) \\ T \text{ inyectiva} \end{cases}$

Busquemos T.

$x = y^2+z^2 \quad 1 \leq x \leq 4$

tomo $\left.\begin{matrix} y = \cos(u)\, v \\ z = \operatorname{sen}(u)\, v \end{matrix}\right\} x = \cos(u)^2 v^2 + \operatorname{sen}^2(u)\, v^2$

$x = v^2 \qquad 1 \leq v^2 \leq 4$

Como no hay restricciones en y y z tomo $u \in [0, 2\pi)$

$\boxed{1 \leq v \leq 2}$

$T = (v^2, \cos(u)v, \operatorname{sen}(u)v)$ ✓ con $1 \leq v \leq 2$ y $u \in [0, \pi]$

Con esto encontré $T \subset S$, veo si $S \subset T$

Para ello veo si con u y v arbitrarios se cumple

$x = y^2+z^2$

$v^2 = (\cos^2(u)\, v^2 + \operatorname{sen}(u)^2 v^2$

$v^2 = v^2 \underbrace{(\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u))}_{1}$

$v^2 = v^2$ ✓

verifique T parametriza S

Veo si T es C^1

$$T_u = (0, -v\,\cancel{\text{sen}}\ \text{sen}(u), v\ \cancel{\text{sen}}\cos(u))$$
$$T_v = (2v, \cancel{\text{sen}}\cos(u), \text{sen}(u))$$

T es C_1, cada coord lo es

Ver si $T_u \times T_v \neq (0,0,0)\ \forall (u, v)$

$$T_u \times T_v = (-v\,\text{sen}^2(u) + v\cos^2(u),\ 2v^2\cos(u),\ -2v^2\,\text{sen}(u))$$

Se puede ver que como ~~v=~~ $0 \notin \text{Dom}(v)$ $T_u \times T_v$ es dif del $(0,0,0)$

Se puede ver facilmente que T es inyectiva

$\therefore$ S es orientable y tiene 2 orientaciones posibles, una exterior y una interior, donde la parametrización T dada es la exterior

$$T_u \times T_v(1,0) = (a.1, 2, 0)$$ Apunta al exterior

Incompleto

2) Considerar el campo vectorial $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 dado por

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

a) Calcular $Q_x(x,y) - P_y(x,y)$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} =$$

CA

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = 2y$$

regla cadena

$$= \frac{-(x^2+y^2) + y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{+x}{x^2+y^2} \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} =$$

CA

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$$

regla cadena

$$= \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x(x,y) - P_y(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= -2\frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = \frac{-2}{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\cancel{Q(x,y) = \frac{-2}{x^2+y^2}}}$$

b)

$$\boxed{(Q_x - P_y)_{(x,y)} = \frac{-2}{x^2+y^2}}$$

Error de cuentas

b)
EN 2 Dimensiones, F es conservativo si

$$Q_x - P_y = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Y algo más sobre el dominio

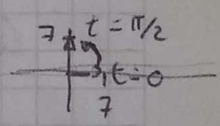
Pero en a obtube que $Q_x - P_y = \frac{2}{x^2+y^2}$, Que es Distinto de 0 $\therefore$ F No es conservativo

c) calcular $\int_C F\,ds$ donde C es la circunferencia centrada el origen con radio 7

d) Probar que para toda curva cerrada C con $(0,0) \notin int(C)$ Se tiene $\int_C F\,ds = 0$ pero $\int_C F\,ds \neq 0$ Si $(0,0) \in int(C)$. Revisar la respuesta dada en b)

c) $\int_C F\,ds$ = C. circunferencia $x^2+y^2 = 7^2$, que se puede Parametrizar con $\bar{\gamma}(t) = (7\cos(t), 7\,sen(t))$
$t \in [0, 2\pi)$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\gamma}(0) = (7, 0)\\ \bar{\gamma}(\pi/2) = (0, 7)\end{array}\right\}$$



Orientada Positivamente

~~Utilizando Green, ya que F toma todos los valores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$~~
~~excepto el 0, que es un valor donde F No es C_1~~

$$\int_{C^+} F\,ds = \int_C F_{(\bar{\gamma}(t))}\, \bar{\gamma}'(t)\, dt$$

~~$\bar{\gamma}'(t) = (-7\,sen(t), 7\cos(t))$~~
$\bar{\gamma}(t) = (-\,sen(t)\cdot 7, \cos(t))$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{-7\,sen(t)}{7^2(sen^2(t)+\cos^2(t))}, \frac{7\cos(t)}{7^2(sen^2(t)+\cos^2(t))} \right) \cdot (+7\,sen(t)\ \cancel{+} -7\cos(t))\, dt =$$

Escaneado con CamScanner

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\cancel{1}\ sen(t)}{7},\ \frac{cos(t)}{7} \right) \cdot \left(-7\, sen(t);\ +7\, cos(t) \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} + sen^2(t) + cos^2(t)\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = \cancel{2\pi}\ t \Big|_0^{2\pi} = \cancel{t}\, 2\pi$$

$$\cancel{-\int_0^{2\pi} sen^2(t)\ dt + \int_0^{2\pi} cos^2(t)\ dt}$$

$u = sen(t)$

$du =$

$$\cancel{\int_0^{2\pi} -sen^2(t) + cos^2(t)\ dt}$$

$\cancel{sen^2(t)}$

$$\int_C F\,ds = 2\pi$$

Muñó Vitel Facundo Nicolas
LU: 152/21 Carrera: Lic en Ciencias Físicas

3) Considerar la ecuación $x'(t) = A\,x(t)$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Hallar, si existen, todos los $a \in \mathbb{R}$ / todas las sol verifiquen $x(t) \to \vec{0}$ cuando $t \to +\infty$

Dado $x'(t) = A\,x(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} x(t)$

~~Vea~~ Su solución si existe es de la forma

$$x(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Si Quiero que $x(t) \to \vec{0}$ $t \to +\infty$ necesito

Que λ_1 y $\lambda_2 < 0$ y $\det\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} > 0$

o λ_1 y $\lambda_2 > 0$ y $\det\begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{v}_2 \end{pmatrix} < 0$

??

λ_1 y λ_2 ~~Se extraen~~ Son los Aval de A
$\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ los Auto vect de A asociados a λ_1 y λ_2

Busco λ_1 y λ_2 $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = 0$ $(a-\lambda)^2 + 1 = 0$

$$(a-\lambda)^2 + 1 < 0$$
$$(a-\lambda)^2 < -1$$

$|a-\lambda| < i$

$-i < a-\lambda < i$

$-i+\lambda < a < i+\lambda$

No tiene sentido plantear desigualdades con números complejos

$-i+a < -\lambda < i+a$

$\underbrace{i-a}_{1} > \lambda > -i-a$

extraigo los autovectores para λ $i-a > \lambda > -i-a$ con los casos límite

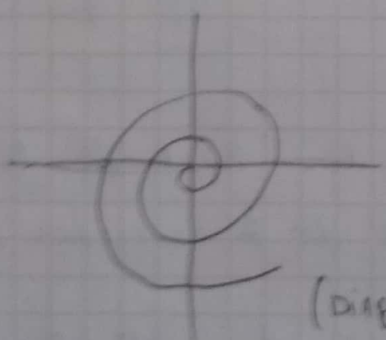
(1)

$$\left(\begin{array}{cc|c} a-i+a & 1 & 0 \\ -1 & a-i+a & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2a-i & 1 & 0 \\ -1 & 2a-i & 0 \end{array}\right)$$

~~$a \neq 0$~~ a debe ser $\neq 0$, porque si no $x(t)$ no tendería a 0 $t \to +\infty$

luego como veo que $a \in \mathbb{R}$ y λ es complejo y tengo que $\lambda = i-a$, ~~a debe ser~~ el ~~DF~~ Diagrama de fase tendrá la forma



(Diagrama sin Orientar)

Para que sea el que cumple ~~a~~ $x(t) \to 0$ con $t \to +\infty$. a debe ser mayor que 0

$\therefore \boxed{a \in \mathbb{R}^+}$

No

Escaneado con CamScanner

b) Hallar si existen todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que hay una solución $x(t) \neq 0$ tal que $x(t) \to \vec{0}$ cuando $t \to +\infty$ y otra $Y(t)$ / tal que $Y(t) \not\to \vec{0}$ cuando $t \to +\infty$

Esta situación pide un equilibrio inestable para

$$x'(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} x(t)$$

Los equilibrios inestables se dan con las raíces ~~del~~ $P(\lambda)$ asociadas a A / $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$

Hay que analizar la parte real de los autovalores

Como λ es de la forma $\lambda = -a + i$, a debe ~~ser~~ pertenecer a $\mathbb{C}$ y ser de la forma $a = b + i$ para que $\lambda = -b \pm \sqrt{i}$ y tenga parte imaginaria nula

$\Rightarrow$ ~~Veamos como debe ser b para que se obtengan λ_1 y λ_2 con diff signo~~

$$\cancel{\det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ -1 & b-\lambda \end{pmatrix}} \Rightarrow P(\lambda) = \cancel{(a-\lambda)^2 + 1 = 0}$$

$$\cancel{((b+i) - \lambda)^2 + 1 = 0}$$

$$\cancel{(b+i)^2 - 2\lambda(b+i) + \lambda^2 + 1}$$

$$\cancel{b^2 + 2bi - 1 - 2(-b) - 2i + b^2 + 1 = 0}$$

$$b^2 - 2i + b^2 = 0$$

$$\cancel{2b^2 = 2i}$$

$$\cancel{b = \sqrt{i}}$$

$$2b^2 \quad b - \sqrt{i} = 0$$

$$b = \sqrt{i}$$

$\therefore$ No existen $a \in \mathbb{R}$ que cumplan lo pedido

c) Hallar, si existen, todos los $a \in \mathbb{R}$ / todas las sol $x(t)$ estan acotadas. 9

En a) vimos que los $a > 0$ son no acotados, en b) se vio que para $a \in \mathbb{R}$ solo existen las soluciones de a, con $a \neq 0$, si ~~ob~~ utilizamos $a < 0$, las soluciones son las que a $t \to \infty$ $x(t) \to \infty$ ~~m~~. Entonces la unica solucion acotada son las de λ ~~co~~ imaginarios puros y se dan con $a = 0$ ✓

Muiño Vital Facundo Nicolas
LU: 152/21 Carrera Lic. en Ciencias Físicas

4) Halle $a \in \mathbb{R}$ tal que la función $x(t) = e^{2t}$ sea solución de la ecuación

$$a x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 4e^{2t}$$

Para el valor de a hallado, encontrar además la solución de la ecuación que verifica

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

¿Hay alguna solución tal que $x(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$? Si la hubiera, calcularlas todas

Busco $a \in \mathbb{R}$ / $x(t) = e^{2t}$ solución de la ecuación

$$a x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 4e^{2t}$$

~~Primero extraer~~ Observo que la Ecuación Diferencial es no homogenea, con coeficientes cst, por ello se que la solución estará dada por la forma $X(t) = \underbrace{x(t)_h}_{\text{Homogeneo}} + \underbrace{x(t)_p}_{\text{Particular}}$

Busco entonces la solución homogea, para ello planteo la ecuación homogenea asociada

$$a x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$$

Planteo la solución $x(t) = e^{\lambda t} \to a\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$
como quiero la sol $\forall t$, uso el pol caract $P(\lambda) = a\lambda^2 + 2\lambda + 1$

Busco las raices de

$$p(\lambda) = a\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

usando la formula de la "resolvente" $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lambda_{1,2}$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2 - 4a}}{2a} = \lambda_{1,2}$$

Busco que 1 solución almenos sea e^{2t}

$\Rightarrow$ almenos 1 λ debe ser $\lambda = 2$, Busco a que cumpla

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2 - 4a}}{2a} = 2$$

$$-2 \pm \sqrt{2 - 4a} = 4a$$

$$\pm\sqrt{2 - 4a} = 4a + 2$$

$$\left(\pm\sqrt{2 - 4a}\right)^2 = (4a + 2)^2$$

$$\sqrt{2 - 4a} = (4a)^2 + 16a + 4$$

$2 - 4a = 16a^2 + 16a + 4$ o $2 - 4a = -16a^2 + 16a - 4$

$0 = 16a^2 + 20a - 2$ $\qquad 0 = -16a^2 - 12a + 6$

$\downarrow$

resolviendo

$$(\pm)^2 \cdot \left(\sqrt{2 - 4a}\right)^2 = (4a + 2)^2$$

$a = -20 \pm$

¿Que sucede si $2 - 4a < 0$?

Si $2 - 4a < 0$ entos λ es un numero imaginario

donde si $\lambda_1 \in \mathbb{C} \rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, Como busco que 1 λ sea

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4a}}{2a} = -\frac{1}{a} \pm \frac{\sqrt{4 - 4a}}{2a} = \frac{-1}{a} \pm \frac{\sqrt{4}\sqrt{1-a}}{2a} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a} = \lambda_{1,2}$$, quiero a al menos 1 $\lambda = 2$

No, porque lo que se pide es que la función dada sea solución de la ecuación NO homogénea

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a} = 2$$

$$-1 \pm \sqrt{1-a} = 2a$$

$$-1 + \sqrt{1-a} = 2a$$

$$\sqrt{1-a} = 2a + 1$$

$$1 - a = (2a+1)^2$$

$$1 - a = 4a^2 + 4a + 1$$

$$0 = 4a^2 + 5a$$

$$0 = a(4a+5)$$

$a = 0$ $a \neq 0$ sino la resolvente queda dividiendo por 0

$$\boxed{a = -\frac{5}{4}}$$

$$-1 - \sqrt{1-a} = 2a$$

$$-\sqrt{1-a} = 2a + 1$$

$$(-)^2(\sqrt{1-a})^2 = (2a+1)^2$$

$$[1 - a = (2a+1)^2]$$

$$\Rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

Verifico que a cumple.

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)}}{2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)} =$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{-\frac{5}{2}} = \frac{-2 \pm 3}{-\frac{5}{2}}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{5}$$

$$\lambda_2 = 2$$

Verifica lo que buscaba

∴ la solución homogenea es $x_h(t) = c_1 e^{\frac{2}{5}t} + c_2 e^{2t}$ y con

$c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ e^{2t} es solución,

ahora busquemos x_p para

$$a\,x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 9e^{2t}$$

con $a = -\frac{5}{4}$

$$-\frac{5}{4}x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 9e^{2t} \quad (1)$$

Para aplicar el meto variación cst Necesito que sea de la forma

$$x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t)$$

Multiplico (1) por el factor $-\frac{4}{5}$

$$x''(t) - \frac{8}{5}x'(t) - \frac{4}{5}(t) = -\frac{36}{5}e^{2t}$$

Busco c_1 y c_2 / $c_1 e^{\frac{2}{5}t} + c_2 e^{2t} = \cancel{-\frac{36}{5}e^{2t}}\ x_p$

Aplico el meto variación cst.

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2}{5}t} & e^{2t} \\ \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{36}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{2}{5}t}c_1'(t) + c_2'(t)e^{2t} = 0 & (1) \\ \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}t}c_1'(t) + c_2'(t)\,2e^{2t} = -\frac{36}{5}e^{2t} & (2) \end{cases}$$

De (1) $e^{\frac{2}{5}t} c_1'(t) = -c_2'(t) e^{2t}$

$$-e^{\frac{2}{5}t-2t} c_1'(t) = +c_2'(t)$$

$$\boxed{-e^{-8/5} c_1'(t) = c_2'(t)} \quad (3)$$

3 en 2 $\frac{2}{5} e^{\frac{2}{5}t} c_1'(t) * -e^{-8/5} \cdot 2e^{2t} c_1'(t) = -\frac{36}{5} e^{2t}$

$$\left(\frac{2}{5} e^{\frac{2}{5}t} - .2 e^{\frac{2}{5}t}\right) c_1'(t) = -\frac{36}{5} e^{2t}$$

$$-\frac{8}{5} e^{\frac{2}{5}t} c_1'(t) = -\frac{36}{5} e^{2t}$$

$$c_1'(t) = +\frac{36}{\cancel{5}} \cdot \left(+\frac{\cancel{5}}{8}\right) e^{2t} \cdot e^{-\frac{2}{5}t}$$

$$\boxed{c_1'(t) = \frac{9}{2} e^{8/5t}} \quad 4$$

$$\underbrace{\int c_1'(t)\,dt}_{TFC} = \int \frac{9}{2} e^{8/5t}$$

$$c_1(t) = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{8} e^{8/5t} \underbrace{+c}_{\text{tomo } c=0}$$

$$c_1(t) = \frac{45}{16} e^{8/5t}$$

Uso 4 e 3

$$-e^{-8/5t} \cdot \frac{9}{2} e^{8/5t} = c_2'(t)$$

$$-\frac{9}{2} e^0 = c_2'(t)$$

$$c_2'(t) = -\frac{9}{2}$$

$$c_2(t) = -\frac{9}{2} t$$

$$x_p = \frac{45}{16} e^{\frac{8}{5}t} \cdot e^{\frac{2}{5}t} * -\frac{9}{2} t e^{2t} = \frac{45}{16} e^{2t} - \frac{9}{2} t e^{2t} = e^{2t}\left(\frac{45}{16} - \frac{9t}{2}\right)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{2}{5}t} + c_2 e^{2t} + e^{2t}\left(\frac{45}{16} - \frac{9}{2} t\right)$$

Escaneado con CamScanner

Busco C_1 y C_2 que verifiquen

$$x(0) = 1$$
$$x'(0) = 0$$

$$x(t) = C_1 e^{2/5 t} + C_2 e^{2t} + e^{2t}\left(\frac{45}{16} - \frac{9}{2} t\right)$$

$$x'(t) = C_1 \cdot \frac{2}{5} e^{2/5 t} + 2C_2 e^{2t} + 2 \cdot \frac{45}{16} e^{2t} - \frac{9}{2} t e^{2t} - \frac{9}{2} e^{2t}$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 = C_1 + C_2 + \frac{45}{16} & (1) \\ x'(0) = 0 = C_1 \frac{2}{5} + 2C_2 + \underbrace{\frac{45}{8} - \frac{9}{2}}_{\frac{9}{8}} & (2) \end{cases}$$

De 2 $\quad C_1 \frac{2}{5} + 2C_2 = -\frac{9}{8}$

$$2C_2 = -\frac{9}{8} - \frac{2}{5} C_1$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{9}{16} - \frac{1}{5} C_1} \quad 3$$

3 EN 1

$$C_1 - \frac{9}{16} - \frac{1}{5} C_1 + \frac{45}{16} = 1$$

$$\frac{4}{5} C_1 = -\frac{5}{4}$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{25}{16}} \quad 4$$

4 en 3 $\quad C_2 = -\frac{9}{16} + \frac{25}{16} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{-\frac{1}{4} = C_2}$

$$\therefore \quad x(t) = -\frac{25}{16} e^{2/5 t} + \frac{1}{4} e^{2t} + e^{2t}\left(\frac{45}{16} - \frac{9}{2} t\right)$$

Verifica lo pedido

$$x(0) = -\frac{25}{16} - \frac{1}{4} + \frac{45}{16} = 1 \quad \checkmark$$

$$x'(0) = -\frac{25}{16} \cdot \frac{2}{5} + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{45}{16} - \frac{9}{2} = 0 \quad \checkmark$$

17

¿Hay alguna solución tal que $x(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$?

todas las sol de $x(t)$ ~~homog~~ tienden al 0 con $t \to -\infty$, ya que $x(t)$ tiene exponenciales positivas por lo que todas las sol cumplen lo pedido