NICOLÁS YAROVSKY	393/19 - TEMA 4 LIC. EN CIENCIAS DE DATOS	HOJA N° FECHA

1)

a) $\mathcal{C}$ ES LA INTERSECCIÓN DEL CILINDRO DE RADIO 1 Y EL PARABOLOIDE $z = x^2 + y^2$, AMBOS CENTRADOS EN EL ORIGEN. COMO $y \leq 0$, ESTO NOS DA LA MITAD DE LA CURVA INTERSECCIÓN.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \\ y \leq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

ENTONCES $\mathcal{C}$ ES LA SEMICIRCUNFERENCIA DE RADIO 1 DE CENTRO $(0,0,1)$.

UNA POSIBLE PARAMETRIZACIÓN REGULAR CONOCIDA ES $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $t \in [\pi, 2\pi]$

NOTAMOS QUE $\sigma(\pi) = (-1,0,1)$ Y $\sigma(2\pi) = (1,0,1)$, POR LO QUE SE RESPETA EL RECORRIDO PEDIDO

¿$Im\,\sigma \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \subseteq I$

b) SEA $F(x,y,z) = (0,y,z)$

ENTONCES $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_{\pi}^{2\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$

$F(\sigma(t)) = F(\cos t, \operatorname{sen} t, 1) = (0, \operatorname{sen} t, 1)$

$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$, $t \in [\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (0, \operatorname{sen} t, 1) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) = \operatorname{sen} t \cos t$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt$

TOMAMOS $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t\, dt$. PARA $t = \pi$, $u = 0$ Y PARA $t = 2\pi$, $u = 0$ $\Rightarrow \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \int_0^0 u\, du = 0 = \int_{\mathcal{C}} F\, ds$

NOTA

(*)

LA PARAMETRIZACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA (Y EN PARTICULAR DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA) ES REGULAR A TROZOS, EN ESTE CASO:

$$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

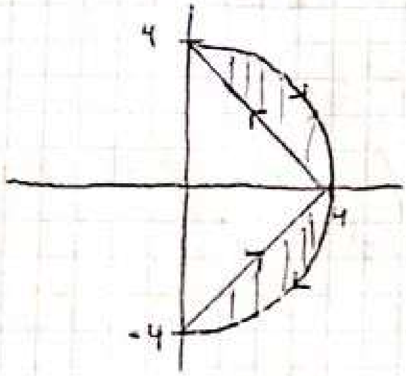
TODAS LAS COMPONENTES SON C^1, EL CAMBIO DE COORDENADAS A POLARES ES INYECTIVO (RESULTADO YA VISTO) Y $\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \neq (0,0,0)$ PUES EL SENO Y EL COSENO NUNCA SE ANULAN SIMULTÁNEAMENTE EN $[\pi, 2\pi]$.

2)

SEA $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ EL CAMPO DADO POR

$$F(x,y) = \left(x\,\text{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{x^2+y^2},\ y\,\text{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

CALCULAR $\int_{\mathcal{C}} F\, ds$ DONDE $\mathcal{C}$ ES LA CURVA DADA POR LA UNIÓN DE $y = 4 - x$, $0 \leq y \leq 4$, $y = x - 4$, $-4 \leq y \leq 0$ RECORRIDA DESDE $(0,-4)$ AL $(0,4)$



NOTAMOS QUE F NO ES C^1 (NI SIQUIERA ESTÁ DEFINIDO) EN EL ORIGEN, PERO QUE A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA SE COMPORTA BIEN.

PODRÍAMOS CERRAR $\mathcal{C}$ CON UNA SEMICIRCUNFERENCIA DE RADIO 4 PARA $x \geq 0$, LO QUE EXCLUYE AL $(0,0)$ EN EL DOMINIO ENCERRADO, Y USAR EL TEOREMA DE GREEN PARA CALCULAR $\int_{\mathcal{C}} F\, ds$

CALCULEMOS $Q_x - P_y$, SIENDO Q Y P LAS SEGUNDA Y PRIMERA COORDENADA DE F RESPECTIVAMENTE:

$$Q_x = \frac{xy\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P_y = \frac{xy\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Entonces, $Q_x - P_y = \frac{xy\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$- \left(\frac{xy\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \right)$$

$$\Rightarrow Q_x - P_y = \frac{2(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

· Por lo tanto, si consideramos $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C}'$ es la semicircunferencia parametrizada por:

$$\sigma(t) = (4\cos t, 4\sin t), \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Entonces, por el teorema de Green: $\int_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'} F\,ds = \iint_D Q_x - P_y = 0$

y por lo tanto, $\int_{\mathcal{C}} F\,ds = -\int_{\mathcal{C}'} F\,ds$

Pero notemos que en el recorrido de $\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$ estamos recorriendo $\mathcal{C}'$ en sentido horario, mientras que la parametrización lo hace en sentido antihorario, por lo que $\int_{\mathcal{C}} F\,ds = -\int_{\mathcal{C}'} F\,ds = \int_{\mathcal{C}'} F\,ds$

$\mathcal{C}' \Rightarrow$ recorrida en sentido antihorario

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}'⊛} F\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(4\cos t, 4\sin t) \cdot (-4\sin t, 4\cos t)\,dt$$

y $F(4\cos t, 4\sin t) = \left(4\cos t\sin(\sqrt{16}) - \frac{4\sin t}{16}, 4\sin t\sin(\sqrt{16}) + \frac{4\cos t}{16}\right)$

Entonces $F(\sigma(t)) \cdot (-4\sin t, 4\cos t) =$

$-16\cos t\sin t\sin(4) + \sin^2 t + 16\cos t\sin t\sin(4) + \cos^2 t =$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}'⊛} F\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\pi = \int_{\mathcal{C}} F\,ds}$

⊛ recorrida en sentido antihorario

Escaneado con CamScanner

3)

SEA $\mathcal{C} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4,\ x^2+y^2=1\}$

ORIENTADA DE MANERA TAL QUE SU PROYECCIÓN EN XY SE

RECORRA EN SENTIDO POSITIVO.

CALCULAR $\int_{\mathcal{C}} F\, ds$ DONDE

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+(z-4)^2} + \frac{(z-4)^3}{3}, \frac{y}{x^2+y^2+(z-4)^2} + \frac{x^3}{3}, \frac{z-4}{x^2+y^2+(z-4)^2} + \frac{y^3}{3} \right)$$

$\mathcal{C}$ ES UNA CIRCUNFERENCIA $\{x^2+y^2=1,\ z=4\}$

NOTAMOS QUE PARTE DEL CAMPO NO ESTÁ DEFINIDO EN $(0,0,4)$,

Y $(0,0,4) \in \mathcal{C}^0$. ADEMÁS, SI $(x,y,z) \in \mathcal{C} \Rightarrow x^2+y^2+(z-4)^2 = 1$

POR LO QUE CONVIENE SEPARAR EL CAMPO F EN $G+H$,

DONDE $G = \dfrac{(x,y,z-4)}{x^2+y^2+(z-4)^2}$ Y $H = \frac{1}{3}\left((z-4)^3, x^3, y^3\right)$.

ENTONCES $\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_{\mathcal{C}} G+H\, ds = \int_{\mathcal{C}} G\, ds + \int_{\mathcal{C}} H\, ds$.

PODEMOS PARAMETRIZAR $\mathcal{C}$ COMO $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 4)$

CON $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} G\, ds = \int_0^{2\pi} G(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 4)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos t + \sin t \cos t\, dt = 0$$

COMO H NO TIENE PROBLEMAS EN EL INTERIOR DE $\mathcal{C}$, PODEMOS

USAR STOKES TOMANDO $\mathcal{C}$ EL BORDE DEL DISCO $\{x^2+y^2 \leq 1,\ z=4\}$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} H\, ds = \iint_D \operatorname{rot}(H)\, dS$$

TENÍAMOS QUE $H = \frac{1}{3}\left((z-4)^3, x^3, y^3\right)$

ENTONCES $ROT(H) = \begin{vmatrix} \partial x & \partial y & \partial z \\ \frac{(z-4)^3}{3} & \frac{x^3}{3} & \frac{y^3}{3} \end{vmatrix}$

$= \left(y^2, (z-4)^2, x^2\right)$

EL DISCO $x^2+y^2 \leq 1$, $z=4$ PODEMOS PARAMETRIZARLO COMO:

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4)$, $(r,\theta) \in [0,1]\times[0,2\pi]$

Y $T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \rightarrow T_r \times T_\theta = (0,0,r)$

LO QUE NOS DA NORMAL $(0,0,1)$, QUE SIGUIENDO LA REGLA DE LA MANO DERECHA PARA EL RECORRIDO DE $\mathcal{C}$, NOS DA UNA ~~de~~ ORIENTACIÓN COMPATIBLE.

ENTONCES, $\iint_D rot(H)\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} ROT(H)(T(r,\theta)) \cdot (0,0,r)\, d\theta dr$

$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (r^2\sin^2\theta, 0, r^2\cos^2\theta)\cdot(0,0,r)\, d\theta dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\, d\theta dr$

USANDO $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)) \rightarrow \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\, d\theta dr = \cancel{\int\int \frac{r^3}{2} \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta dr}$

$= \int_0^1 r^3\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta\right) dr = \int_0^1 r^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) dr$

$= \int_0^1 \pi r^3\, dr = \pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = \iint_D rot(H)\, dS = \int_{\mathcal{C}} H\, ds$

ENTONCES, $\boxed{\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_{\mathcal{C}} G\, ds + \int_{\mathcal{C}} H\, ds = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}}$

4) SEA $F(x,y,z) = (\operatorname{sen}(z^2) + 3xy, e^{x^3} - y^2, x^2 - yz)$

CALCULAR $\iint_S F\,dS$ DONDE S ES LA PORCIÓN DE

ESFERA $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$, $2 \leq z \leq 4$

COMO EL CAMPO ES $C^1(\mathbb{R}^3)$ PODEMOS USAR EL TEOREMA DE GAUSS PARA [illegible] CUENTAS:

NOTAMOS QUE $\operatorname{div}(F) = 3y - 2y - y = 0$

SI TAPAMOS S CON LAS TAPAS S_1 Y S_2 DONDE S_1 ES EL DISCO EN $z = 2$, $x^2 + y^2 \leq 4$ Y S_2 EL DISCO EN $z = 4$, $x^2 + y^2 \leq 4$, ENTONCES:

$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} F\,dS = -\underbrace{\iiint_{\Omega}}_{\text{ORIENTADO CON NORMAL INTERIOR}} \operatorname{div}(F) = 0$$

ENTONCES $\iint_S F\,dS = -\iint_{S_1} F\,dS - \iint_{S_2} F\,dS$

SI TOMAMOS LAS PARAMETRIZACIONES

$T_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2)$, $(r,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi]$

$T_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4)$, $(r,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi]$

PARA S_1 Y S_2 RESPECTIVAMENTE, USANDO EL EJ (3) SABEMOS QUE $T_{1_r} \times T_{1_\theta} = T_{2_r} \times T_{2_\theta} = (0,0,r)$.

COMO S TIENE NORMAL INTERIOR, S_1 RESPETA LA ORIENTACIÓN, PERO S_2 LA INVIERTE, POR LO QUE:

$$\iint_S F\,dS = -\iint_{S_1} F\,dS + \iint_{S_2} F\,dS$$ $\rightarrow S_1$ Y S_2 PARAMETRIZADAS POR T_1 Y T_2.

NOTA

ENTONCES:

$$-\iint_{S_1} F\,dS = -\int_0^2\int_0^{2\pi} F(T_1(r,\theta))\cdot(0,0,r)\,d\theta\,dr$$

APROVECHAMOS QUE EL PRODUCTO VECTORIAL NOS DEJA SOLO LA TERCERA ~~[illegible]~~ COMPONENTE DE F COMPUESTA CON $T_1(r,\theta)$ (LO MISMO VOY A USAR PARA $\iint_{S_2} F\,dS$).

$$\Rightarrow -\int_0^2\int_0^{2\pi} F(T_1(r,\theta))\cdot(0,0,r)\,d\theta\,dr = -\int_0^2\int_0^{2\pi} r(r^2\cos^2\theta - 2r\sin\theta)\,d\theta\,dr$$

$$\cancel{= -\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta\,d\theta\,dr = -\int_0^2 r^2(\sin\theta + 2\cos\theta\Big|_0^{2\pi})dr}$$

$$\cancel{= -\int_0^2 r^2\cdot 0\,dr = 0}$$

$$= -\int_0^2\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta - 2r^2\sin\theta\,d\theta\,dr = -\left(\int_0^2 r^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\,dr - \int_0^2 2r^2\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,dr\right)$$

$$= -\left(\int_0^2 r^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)dr - \int_0^2 2r^2\underbrace{\left(-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right)}_{=0}dr\right)$$

$$= -\int_0^2 r^3\pi\,dr = -\pi\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = \boxed{-4\pi = -\iint_{S_1} F\,dS}$$

AHORA, $\iint_{S_2} F\,dS = \int_0^2\int_0^{2\pi} r(r^2\cos^2\theta - 4r\sin\theta)\,d\theta\,dr = 4\pi$

PUES, LO ÚNICO QUE CAMBIA RESPECTO A $\iint_{S_1} F\,dS$ ES UN 4 EN VEZ DE UN 2 EN UNA INTEGRAL QUE DA 0.

POR LO QUE $\iint_S F\,dS = -4\pi + 4\pi = 0$