Análisis 2 / Análisis Matematico 2 / Matemática 3 - Primer Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (12/05/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justifique todas sus respuestas y explique sus razonamientos. Escriba prolijo. Duración: 4 horas.

Ejercicio 1. Llamamos *catenoide* a la superficie de ecuación

$$x^2 + y^2 = cosh^2(z).$$

a. Probar que el trozo de catenoide con $-2 \leq z \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ es una superficie suave.

Sugerencia: Considerar la función

$$\Psi(u, v) = (cosh(u)cos(v), cosh(u)sen(v), u).$$

b. Sea S la superficie dada por el trozo de catenoide

$$x^2 + y^2 = cosh^2(z), \quad -2 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0.$$

Si la densidad de masa de la superficie S es $\rho(x, y, z) = xy|\operatorname{senh}(z)|$, calcular la masa total de la superficie.

Ayuda: Recordar que $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$, $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Ejercicio 2. Calcular la integral de línea del campo

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + e^{\cos y} \right)$$

sobre la curva dada por

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

orientada de manera tal que empiece en el $(1, 0)$ y termine en el $(-1, 0)$.
Sugerencia: En caso de ser necesario, puede descomponer F en la suma de dos campos.

Ejercicio 3. Consideremos el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ orientado de tal manera que la normal en el punto $(0, 1, 0)$ sea igual a $(0, 1, 0)$. Observar que el hiperboloide es una superficie de revolución de la curva

$$\sigma(\theta) = (cosh(\theta), 0, senh(\theta))$$

alrededor del eje z.
Sea S el trozo de hiperboloide obtenido al acotar $senh(-1) \leq z \leq senh(1)$, $y \geq 0$, .

a. Parametrizar S preservando la orientación. Parametrizar el borde de S, ∂S^+, de forma compatible con la orientación de S.

b. Calcular $\int_{\partial S^+} F d\mathbf{s}$, donde

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xe^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{2ye^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{1}{2}z^2, \frac{2ze^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

Ejercicio 4. Sea S el cono de ecuación $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$ con $-1 \leq z \leq 0$ orientado de tal manera que la tercera coordenada de la normal sea negativa en todo punto. Calcular $\int_S F d\mathbf{S}$ donde el campo F esta dado por

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y + z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-x - z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-x + y}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$