Apunte de teoremas

Análisis Matemático II
Mariano Calcabrini

1. Parametrización por longitud de arco

Sea $\mathcal{L}$ la curva dada por $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, una parametrización regular.
Se define $g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| \, d\tau$, la función de longitud de arco.
Como $f(x) = \|x\|$es una función contínua y $\sigma'(\tau)$ es también lo es, entonces $\|\sigma'(\tau)\|$es una función contínua y por el TFC, $g\epsilon C^1$.
$g(t) = \|\sigma(t)\| \neq 0$. Por el teorema de la función inversa

$$\exists\, g^{-1}/\gamma(s) = \sigma(g^{-1}(s))\ \gamma : [0,l] \to [a,b],\ l = long(\mathcal{L})$$

La reparametrización por longitud de arco es tal que la nueva funcion longitud de arco coincide con el punto en el que se evalua.

2. Flujo a travez de una superficie

Sea S una superficie suave, decimos que esta es oriebntable si en cada punto $P\epsilon S$ es posible elegir un punto normal $\nu(P)$ de modo tal que la funcion vectoral asi definida resulte contínua sobre S.
Proposición: Sea S una superficie que tiene una parametrización regular $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Entonces $\nu_{(P)} = \frac{Tu \times Tv}{\|Tu \times Tv\|}(u,v)$, $P = T(u,v)$ define un campo de versores normales, contínuos y por lo tanto S es orientable.
Decimos que S está orientada por la parametrización T.
Definición: Sea S una superficie orientada por el campo de versores normales contínuo $\nu_{(P)}$. Sea F un campo vectorial contínuo sobre S. Definimos el flujo del campo F a travez de la superficie orientada S como:

$$\int_s F.dS = \int_s\int \langle F \circ T, \nu \rangle \, du \, dv$$

2.1. Parametrizaciones y reparametrizaciones:

Sea S una superficie que tiene dos parametrizaciones regulares $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $T_1 : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea f una función continua sobre S. Entonces:
$\int_s F.dS$ resulta independiente de la parametrización elegida.

2.1.1. Demostración:

Sabemos que T y T_1son dos parametrizaciones regulares de S, entonces T_1es una reparametrización de T.
Por ende $\exists G : D_1 \to D$, biyectiva, $det(DG)_{(u,v)} \neq 0\ \forall (u,v)\epsilon D_1$tal que $T_1(u,v) = T \circ G(u,v)$
Además vemos que $(T_1 u \times T_1 v)_{(u,v)} = (Tr \times Tt)_{G(u,v)} .JG_{(u,v)}$

$$\int_{D_1}\int f(T_{1_{(u,v)}}).\|Tu \times Tv\| \, du \, dv =$$

Si aplicamos el cambio de variable para integrar sobre D:

$$= \int_{D_1}\int f(T \circ G_{(u,v)}) . \left\|Tr \times Tt\right\|_{\left(G_{(r,t)}\right)} .JG_{(u,v)} du\, dv =$$

si llamamos $(r, t) = G(u, v)$:

$$= \int_{D}\int f(T_{(r,t)}) . \left\|Tr \times Tt\right\|_{(r,t)} .JG_{(u,v)} JG^{-1}_{(r,t)} dr\, dt =$$

$$= \int_{D}\int f(T_{(r,t)}) . \left\|Tr \times Tt\right\|_{(r,t)} dr\, dt$$

3. Teorema de Green

3.1. Enunciado del teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$una región elemental del plano de tipo 3. Sea δD la frontera de D, orientada en sentido positivo, sean P y $Q : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces:

$$\int_{\delta D} Pdx + Qdy = \int_{D}\int \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\, dx\, dy$$

3.2. Demostración del teorema

3.2.1. Lema 1

Sea D una region elemental del plano de tipo 1. Sea δD la frontera de D orientada positivamente. Sea $P : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces:

$$\int_{\delta D} Pdx = -\int_{D}\int \frac{\delta P}{\delta y}\, dx\, dy$$

Para probar este lema consideremos la siguiente región de tipo 1:

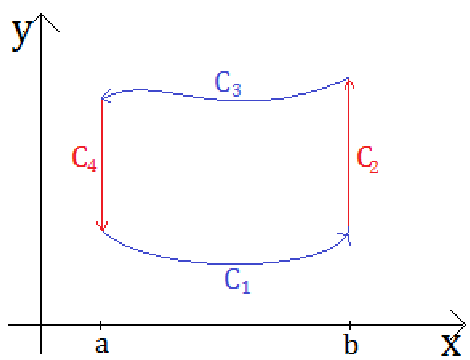

Fig. 1: Región $D = \left\{(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2/x\epsilon\,[a, b]\,,\; y\epsilon\,[\phi_1(x),\, \phi_2(x)]\right\}$

Parametrizamos la curva δD como cuatro curvas C_1, C_2, $C_3\, y\, C_4$:

$$C_1^+ :\; \sigma_1(t) = (t, \phi_1(t)) \quad t\epsilon\,[a, b]$$

$$C_2^+ :\; \sigma_2(t) = (b, t) \quad t\epsilon\,[\phi_1(b), \phi_2(b)]$$

$$C_3^- :\; \sigma_3(t) = (t, \phi_2(t)) \quad t\epsilon\,[a, b]$$

$$C_4^- :\; \sigma_4(t) = (a, t) \quad t\epsilon\,[\phi_1(a), \phi_2(a)]$$

$\int\limits_{\delta D} P\,dx = \int\limits_{C_1} P\,dx + \int\limits_{C_2} P\,dx - \int\limits_{C_3} P\,dx - \int\limits_{C_4} P\,dx$
$= \int_b^a P(t, \phi_1(t)).\,1\,dt + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} P(b,t).\,0\,dt - \int_b^a P(t, \phi_2(t).\,1\,dt - \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} P(a,t).\,0\,dt$
$= \int_b^a P(t, \phi_1(t)).\,1\,dt - \int_b^a P(t, \phi_2(t).\,1\,dt$
$= \int_b^a P(t, \phi_1(t)) - P(t, \phi_2(t)\,dt$
Por otro lado...
$\int\limits_D\int \frac{\delta P}{\delta y} dx\,dy \underset{Por\,Fubini}{=} \int_b^a \left(\int_{\phi_{1(x)}}^{\phi_{2(x)}} \frac{\delta P}{\delta y} dy \right) dx = \int_b^a P(x,y) \mid_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} dx = \int_b^a P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x)\,dx$
Vemos entonces que hay una igualdad entre las expresiones y se cumple el lema

3.2.2. Lema 2

Sea D una region elemental del plano de tipo 2. Sea δD la frontera de D orientada positivamente. Sea $P : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces:

$$\int\limits_{\delta D} Q dx = \int\limits_D\int \frac{\delta Q}{\delta y}\,dx\,dy$$

Para probar este lema consideremos la siguiente región de tipo 2:

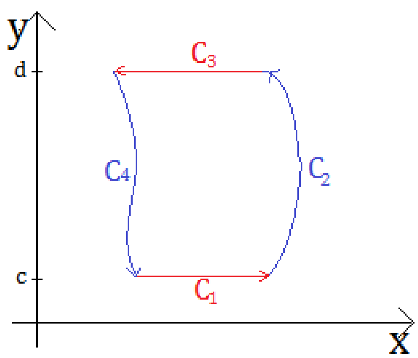

Fig. 2: Región $D = \left\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2/y\epsilon\,[c,d]\,,\ x\epsilon\,[\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)]\right\}$

Parametrizamos la curva δD como cuatro curvas C_1, C_2, $C_3\,y\,C_4$:

$$C_1^+ :\ \sigma_1(t) = (t, c) \quad t\epsilon\,[\varphi_1(c), \varphi_2(c)]$$

$$C_2^+ :\ \sigma_2(t) = (\varphi_2(t), t) \qquad t\epsilon\,[c, d)]$$

$$C_3^- :\ \sigma_3(t) = (t, d) \quad t\epsilon\,[\varphi_1(d), \varphi_2(d)]$$

$$C_4^- :\ \sigma_4(t) = (\varphi_1(t), t) \qquad t\epsilon\,[c, d]$$

$\int\limits_{\delta D} Q\,dy = \int\limits_{C_1} Q\,dy + \int\limits_{C_2} Q\,dy - \int\limits_{C_3} Q\,dy - \int\limits_{C_4} Q\,dy$
$= \int_{\varphi_1(c)}^{\varphi_2(c)} Q(t,c),0\,dy + \int_c^d Q(\phi_2(t),t),1\,dy - \int_{\varphi_1(d)}^{\varphi_2(d)} Q(t,d),0\,dy - \int_c^d Q(\varphi_1(t),t),1\,dy$
$= \int_c^d Q(\phi_2(t),t)\,dy - \int_c^d Q(\varphi_1(t),t)\,dy$
$= \int_c^d Q(\phi_2(t),t) - Q(\varphi_1(t),t)\,dy$
Por otra parte,
$\int\limits_D\int \frac{\delta Q}{\delta x} dx\,dy \underset{Por\,Fubini}{=} \int_c^d \left(\int_{\varphi_{1(y)}}^{\varphi_{2(y)}} \frac{\delta Q}{\delta x} dx \right) dy = \int_c^d Q(x,y) \mid_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} dy = \int_c^d Q(\varphi_2(y),y) - P(\varphi_1(y),y)\,dy$

Vemos entonces que hay una igualdad entre las expresiones y se cumple el lema

Sumando ahora los resultados de ambos lemas, llegamos a la expresión del enunciado. Como pedimos que D sea de tipo 1 y 2, entonces D es de tipo 3.

3.3. Forma vectorial del teorema de green

Sea $F = (P, Q, 0)$ un campo C^1 y sea D una región donde vale el teorema de Green, si consideramos $n = \frac{(y', -x')}{\|(y', -x')\|}$, entonces:

$$\int_{\delta D} F \cdot n \, ds = \int_D \int \nabla \cdot F.dA$$

4. Teorema de Stokes para superficies que son gráficos

4.1. Enunciado del teorema:

Sea S una superficie que es un gráfico, $z = f(x, y)$, con $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, D región elemental.

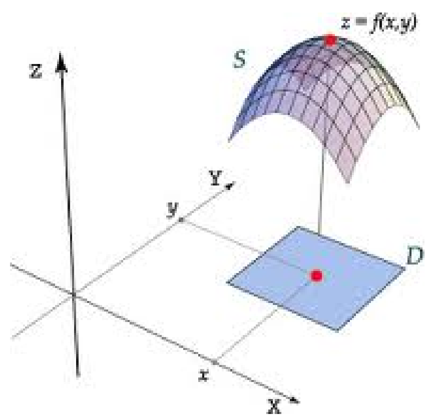

Fig. 3: Gráfico de una función C^1

Sea $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$una parametrización de S. $T(x, y) = (x, y, f(x, y))$. T es una parametrización regular de S que la oprienta $(z > 0)$ con $T_x \times T_y = (-\frac{\delta f}{\delta x}, -\frac{\delta f}{\delta y}, 1)$. Sea F una campo contínuo sobre S.

$$\oint_{\delta S} F.ds = \int_S \nabla \times F.dS = \int_D \int \langle \nabla \times F \circ T(x, y), T_x \times T_y \rangle \, dx \, dy$$

$$\oint_{\delta S} F.ds = \int \int -\nabla \times F_1(x, y, f(x, y)) \frac{\delta f}{\delta x} - \nabla \times F_2(x, y, f(x, y)) \frac{\delta f}{\delta y} + \nabla \times F_3(x, y, f(x, y)) \, dx \, dy$$

4.2. Demostración del teorema:

Primero consideremos $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$una parametrización de δD que la orienta positivamente. Definimos entonces la curva frontera δS comola curva orientada cerrada y simple que es la imagen de la aplicacion $\sigma : t \longmapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$.

$$\int_S \nabla \times F.dS = \int_D \int \left\langle \nabla \times F, (-\frac{\delta f}{\delta x}, -\frac{\delta f}{\delta y}, 1) \right\rangle dA = \int_D \int \left[\left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta f} \right) \left(-\frac{\delta f}{\delta x} \right) + \left(\frac{\delta F_1}{\delta f} - \frac{\delta F_3}{\delta x} \right) \left(-\frac{\delta f}{\delta y} \right) + \left(\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right) \right] dA$$

Por otro lado,

$$\oint_{\delta S} F.ds = \int_\sigma F.ds = \int_\sigma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Donde σ es la pametrización de δS que preserva la orientación definida al principio. $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Entonces:

$\oint\limits_{\delta S} F.ds = \int\limits_\sigma \left(F_1\frac{dx}{dt}+F_2\frac{dy}{dt}+F_3\frac{df}{dt}\right)dt = \int\limits_a^b \left(F_1\frac{dx}{dt}+F_2\frac{dy}{dt}+F_3\left(\frac{\delta f}{\delta x}\frac{dx}{dt}+\frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dt}\right)\right)dt$

$= \int\limits_\sigma \left(F_1+F_3\frac{\delta f}{\delta x}\right)dx + \left(F_2+F_3\frac{\delta f}{\delta y}\right)dy = \int\limits_{\delta D}\left(F_1+F_3\frac{\delta f}{\delta x}\right)dx+\left(F_2+F_3\frac{\delta f}{\delta y}\right)dy$

Si aplicamos el teorema de Green sobre esta última integral:

$\oint\limits_{\delta S} F.ds = \int\int\limits_D \left[\frac{\delta\left(F_2+F_3\frac{\delta f}{\delta y}\right)}{\delta x} - \frac{\delta\left(F_1+F_3\frac{\delta f}{\delta x}\right)}{\delta y}\right]dA =$

$= \int\int\limits_D \left[\left(\frac{\delta F_2}{\delta x}+\frac{\delta F_2}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta F_3}{\delta x}\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta F_3}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta f}{\delta y}+F_3\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}\right)-\left(\frac{\delta F_1}{\delta y}+\frac{\delta F_1}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta F_3}{\delta y}\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta F_3}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta f}{\delta x}+F_3\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}\right)\right]dA$

$= \int\int\limits_D\left[\left(\frac{\delta F_2}{\delta x}+\frac{\delta F_2}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta x}+\frac{\delta F_3}{\delta x}\frac{\delta f}{\delta y}\right)-\left(\frac{\delta F_1}{\delta y}+\frac{\delta F_1}{\delta f}\frac{\delta f}{\delta y}+\frac{\delta F_3}{\delta y}\frac{\delta f}{\delta x}\right)\right]dA =$

$= \int\int\limits_D \left(\frac{\delta F_3}{\delta y}-\frac{\delta F_2}{\delta f}\right)\left(-\frac{\delta f}{\delta x}\right)+\left(\frac{\delta F_1}{\delta z}-\frac{\delta F_3}{\delta x}\right)\left(-\frac{\delta f}{\delta y}\right)+\left(\frac{\delta F_2}{\delta x}-\frac{\delta F_1}{\delta y}\right)$

Vemos ahora que hay una igualdad entre las dos integrales planteadas en el teorema.

5. Teorema de campos conservativos:

5.1. Enunciado del Teorema

Sea F un campo C^1en $\mathbb{R}^3$salvo, quizá, en un conjunto finito de puntos. Las siguientes afirmaciones sobre F son equivalentes:

1. $\oint\limits_C F.ds = 0 \ \forall C,\ curva\ cerrada,\ simple\ y\ orientada$
2. $\int\limits_{C_1} F.ds = \int\limits_{C_2} F.ds$ para todo par de curvas $C_1,\ C_2$, con los mismos extemos y la misma orientación
3. $\exists f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f\epsilon C^1(\mathbb{R})\,/F=\nabla f$
4. $\nabla \times F = \overrightarrow{0}$

Si se cumple alguna de estas proposiciones, se cumplen todas, y decimos que F es un campo conservativo.

5.2. Demostración del teorema

5.2.1. $1 \Rightarrow 2$

Supongamos que se cumple 1.:
Sean $C_1,\ C_2$ dos curvas abiertas simples con los mismos extremos y la misma orientación:
Consideremos la curva $C=C_1\cup C_2$ tal como se observa en la figura 4:

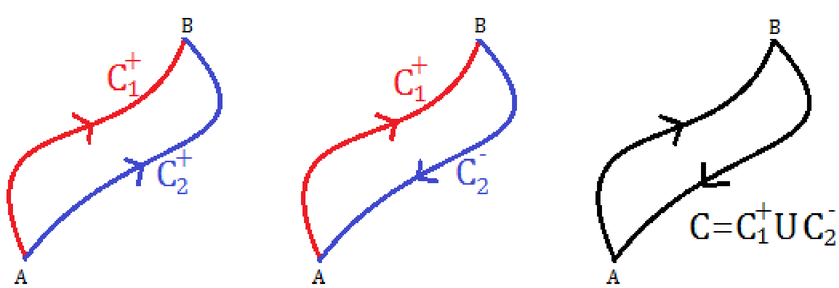

Fig. 4:

C es una curva cerrada simple, entonces:
$\oint\limits_C F.ds = 0 = \int\limits_{C_1^+} F.ds + \int\limits_{C_2^-} F.ds = \int\limits_{C_1^+} F.ds - \int\limits_{C_2^+} F.ds \ \Leftrightarrow\ \int\limits_{C_1^+} F.ds = \int\limits_{C_2^+} F.ds$

5.2.2. $2 \Rightarrow 3$

Supongamos que F es C^1. Definimos una función $f(x,y,z) = \int\limits_{Cxyz} F.ds$, donde C_{xyz} es cualquier curva abierta simple que una al origen con el punto (x,y,z). (2. prueba que f es independiente de la curva elegida).

Consideremos entonces, tres trayectorias en particular. En primer lugar la descripta en la figura 5.

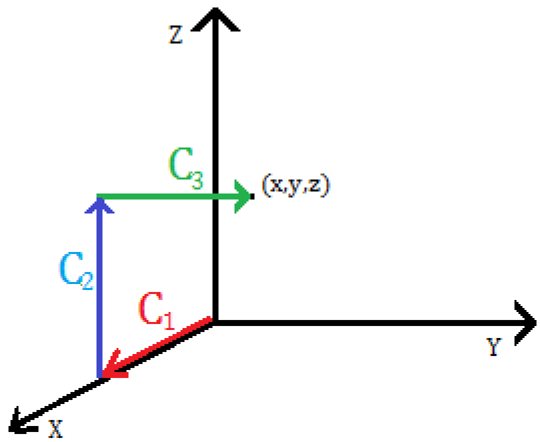

Fig. 5: Una curva posible que une al origen con el punto (x,y,z)

Parametrizamos las curvas anteriores como:

$C_1: \ \sigma_1(t) = (t,0,0) \quad t\epsilon[0,x]$
$C_2: \ \sigma_2(t) = (x,0,t) \quad t\epsilon[0,z]$
$C_3: \ \sigma_3(t) = (x,t,z) \quad t\epsilon[0,y]$

$$f(x,y,z) = \int\limits_0^x \langle F(t,0,0),(1,0,0)\rangle\, dt + \int\limits_0^z \langle F(x,0,t),(0,0,1)\rangle\, dt + \int\limits_0^y \langle F(x,t,z),(0,1,0)\rangle\, dt$$

$$f(x,y,z) = \int\limits_0^x F_1(t,0,0)dt + \int\limits_0^z F_3(x,0,t)dt + \int\limits_0^y F_2(x,t,z)dt$$

Consideramos entonces la derivada:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y,z) = 0 + 0 + F_2(x,y,z)$$

De forma similar se pueden elegir curvas que prueban $\nabla f = (F_1,F_2,F_3)$. Decimos que F es un *campo gradiente*.
Como $F\epsilon C^1$, por el TFC $f\epsilon C^2$

5.2.3. $3 \Rightarrow 4$

Supongamos que $\exists f / \nabla f = (F_1,F_2,F_3)$, q.v.q. $\nabla \times F = 0$:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right) - \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right); \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta z}\right); \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)\right)$$

Como $f\epsilon C^2$ las derivadas cruzadas son iguales (Clairaut-Schwarz) y la expresión anterior es:

$$\nabla \times F = (0,0,0)$$

5.2.4. $4 \Rightarrow 1$

Sea $F/\nabla \times F{=}\overrightarrow{0}$, sea C una curva cerrada simple orientada. Entonces existe una superficie S que tiene a a C como frontera orientada (resultado que no probaremos). Por el Teorema de Stokes:

$$\oint_{C=\delta S} F.ds{=}\int\int_S \nabla \times F.dS = \int\int_S 0.dS{=}0$$

5.3. Propiedad de los campos conservativos

Sea F un campo conservativo tal que $\nabla f = F$. Sea C una curva abierta simple dada por una parametrizacion regular que la orienta $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\int_C F.ds = \int_C \nabla f.ds = \int_a^b \langle \nabla f \circ \sigma(t), \sigma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \frac{d(f\circ\sigma(t))}{dt} dt = f \circ \sigma(b) - f \circ \sigma(a)$$

6. Teorema de Gauss o de la divergencia

6.1. Enunciado del teorema:

Sea Ω una región elemental simétrica de $\mathbb{R}^3$, sea $\delta\Omega$su frontera orientada con normal exterior, y sea F un campo C^1en $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$\int\int_\Omega\int \nabla \cdot F \, dV = \int\int_{\delta\Omega} \langle F, n\rangle \, .dS$$

Donde $n{=}(n_1, n_2, n_3)$ es la normal exterior de $\delta\Omega$.

6.2. Demostración del teorema:

Sea $F = (P, Q, R)$,

$\int\int_\Omega\int \nabla \cdot F \, dV{=}\int\int_{\delta\Omega} \langle F, n\rangle \, .dS$

$\int\int_\Omega\int P_x + Q_y + R_z dx \, dy \, dz = \int\int_{\delta\Omega} P.n_1 + Q.n_2 + R.n_3 \, dS$

Probaremos la igualdad:

$\int\int_\Omega\int R_z dx \, dy \, dz = \int\int_{\delta\Omega} R.n_3 \, dS$

Y analogamente se podrá probar para P y Q. Sumando las expresiones estas llegamos al enunciado del Teorema, entonces basta con probar la igualdad anterior.

Como Ω es una región elemental simétrica, podemos representarla del siguiente modo:

$\Omega = \left\{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3/(x, y)\epsilon D \subset \mathbb{R}^2, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\right\}$

$$\int\int_\Omega\int R_z dx \, dy \, dz = \int\int_D \left(\int_{f_1}^{f_2} R_z dz\right) dxdy = \int\int_D \left(R \Big|_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)}\right) dxdy = \int\int_D R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))dxdy$$

Por otro lado:

$$\int\int_{\delta\Omega} R.n_3 \, dS = \int\int_{S_1} R.n_3 \, dS + \int\int_{S_2} R.n_3 \, dS + \int\int_{S_L} R.n_3 \, dS$$

Donde:

$S_1 = \left\{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3/(x, y)\epsilon D, z = f_1(x, y)\right\}$

$S_2 = \left\{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3/(x, y)\epsilon D, z = f_2(x, y)\right\}$

$S_L = \left\{(x, y, z)\epsilon\mathbb{R}^3/(x, y)\epsilon\delta D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\right\}$

Podemos hacerlo porque Ω es simétrica.

Si $S_L \neq \phi 0$, tendremos que $n_3{=}0$

δD se parametriza como $(X(u), Y(u))$y S_L como $T(u,v) = (X(u), Y(u), v)$
$T_u = (X'(u), Y'(u), 0)$
$T_v = (0,0,1)$
$T_u \times T_v = (Y'(u), -X'(u), 0)$
Entonces $\int\int_{S_L} R.n_3 \, dS = 0$

$$\int\int_{\delta\Omega} R.n_3 \, dS = \int\int_{S_1} R.n_3 \, dS + \int\int_{S_2} R.n_3 \, dS$$

Si parametrizamos S_1 y S_2 con $T_1 = (x, y, f_1(x,y))$ y $T_2 = (x, y, f_2(x,y))$ respectivamente, y elegimos las normales exteriores $(-T_{1x} \times T_{1y}$ y $T_{2x} \times T_{2y})$, llegamos a:
$\int\int_{\delta\Omega} R.n_3 \, dS = \int\int_{D} R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y)) dxdy$, Y probamos la igualdad que queríamos. Como Ω es una región elemental simétrica podemos probar lo anterior para P y Q de forma análoga.

7. Las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias forman un espacio vectorial de dimension n

Consideremos el sistema $X'(t) = A(t).X(t)$, homogéneo. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sean $a_{ij}(t)$ funciones contínuas $\forall t \epsilon I$. Sea $(A(t))_{ij} = a_{ij}$. Entonces el conjunto de solución del sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con n incognitas es un espacio vectorial de dimensión n.

7.1. Demostración

Veamos que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial:

1. $X(t) \equiv 0$ es solución

2. Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ soluciones. Veamos que $X_1(t) + X_2(t)$ también es solución:

   $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$; $X'(t) = X_1'(t) + X_2'(t) = A(t)X_1(t) + A(t)X_2(t) = A(t)\,(.X_1(t) + X_2(t))$. Entonces $X(t)$ es solución.

3. Sea $X_1(t)$ solución y $c \epsilon \mathbb{R}$, veamos que $cX_1(t)$ también es solución.

   $X(t) = cX_1(t)$; $X'(t) = c.X_1'(t) = c.A(t).X_1(t) = A(t).c.X_1(t) = A(t).X(t)$. Entonces $X(t)$ es solución.

Probamos entonces que las soluciones forman un espacio vectorial. Veamos que tiene dimensión n:
Sea $\tau \epsilon I$, sea $e_i \epsilon \mathbb{R}^n$ el iésimo vector canónico.
$X_i / X_i' = A.X_i \; X_i(\tau) = e_i$. Por los teoremas de Existencia y Unicidad sbemos que $X_1 ... X_n$ existen y son únicas. Q.V.Q $\{X_1 ... X_n\}$son una base del espacio vectorial de soluciones, es decir, que $\{X_1 ... X_n\}$son linealmente independientes y generan a cualquier solución.
q.v.q. $c_1 X_1 + ... + c_n X_n = \overrightarrow{0} \; \forall t \epsilon I \; \Leftrightarrow c_1 = ... = c_n = 0$
En particular la ecuación anterior se cumple para $t = \tau$, entonces:
$c_1 e_1 + ... c_n e_n = \overrightarrow{0}$. Esto se cumple unicamente si $c_1 = ... = c_n = 0$, porque $\langle e_1 ... e_n \rangle = \mathbb{R}^n$.
Debemos probar ademas que si X es solución, X es combinación lineal de $\{X_1, X_2\}$

8. Independencia de las soluciones

Sean $\{X_1 ... X_n\}$soluciones de un sistema lineal homogéneo. $\{X_1(t) ... X_n(t)\}$ son l.i. como funciones de $t \epsilon I \; \Leftrightarrow$los vectores $\{X_1(\tau) ... X_n(\tau)\}$son l.i. en $\mathbb{R}^n$.
Demostración:
$\Rightarrow$
Supongamos que $\{X_1(t) ... X_n(t)\}$son l.i., q.v.q. $\{X_1(\tau) ... X_n(\tau)\}$son l.i. e.i. q.v.q. si existen constantes $c_1 ... c_n$tales que $c_1 X_1(\tau) + ... + c_n X_n(\tau) = \overrightarrow{0} \Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$

Sea $X = c_1X_1 + ... + c_nX_n$. $X(\tau) = c_1X_1(\tau) + ... + c_nX_n(\tau) = 0$. Entonces $X \equiv 0$, porque existe una única funcion que en τ vale 0 (teoremas de existencia y unicidad). Es decir $c_1X_1 + ... + c_nX_n \equiv 0$. Pero como por hipótesis $\{X_1(t)...X_n(t)\}$ son l.i, $\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$

$\Leftarrow$

Supongamos ahora que $\{X_1(\tau)...X_n(\tau)\}$son l.i.q.v.q. $\{X_1(t)...X_n(t)\}$son l.i. e.i. si existen constantes $c_1...c_n$tales que $c_1X_1(t) + ... + c_nX_n(t) = \overrightarrow{0}\,\forall t\epsilon I$ q.v.q.$\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$
En particular tomo $t = \tau$. Como por hipóteisis$\{X_1(\tau)...X_n(\tau)\}$son l.i., $\Rightarrow c_1 = ... = c_n = 0$.

9. Método de variación de las constantes

9.1. Enunciado del teorema:

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto, $A(t) \subset \mathbb{R}^{nxn}$, $b(t)\epsilon\mathbb{R}^n$ contínuas en I. Sea$\{X_1(t)...X_n(t)\}$una base de soluciones del sistema homogéneo. Entones Existen funciones continuamente diferenciables $C_1(t)....C_n(t)$ tales que $X_p = C_1(t)X_1(t)+...+C_n(t).X_n(t)$ es solución particular del sistema no homogéneo $X'(t) = A(t).X(t)+b(t)$. Las funciones $C_i(t)$ son primitivas de $C_i'(t)$, solucionanan el siguiente sistema homogéneo para todo $t\epsilon I$:

$Q(t).C(t) = b(t)$ donde $Q(t)$es la matriz que tiene como columnas a $\{X_1(t)...X_n(t)\}$(matriz fundamental).

9.2. Demostración del teorema:

Sabemos que cualquier solución del homogeneo es de la forma $X = Q(t).C$ con C un vector constante. Proponemos una solución particular del no homogéneo de la forma $X_p = Q(t).C(t)$ con $C(t) = (C_1(t), ..., C_n(t))$.

$X_p = C_1(t).X_1(t) + ... + C_2(t).X_2(t)$.Como queremos que X_p sea solución,

$X_p' = Q'(t)C(t) + Q(t).C'(t) = A(t).(Q.(t)C(t)) + Q(t).C'(t) = A(t).X_p + Q(t).C'(t)$. Queremos que $X_p = A(t).X_p + b(t)$, entonces buscamos funciones $C(t)$ tales que $Q(t).C'(t) = b(t)$. Como Q(t) contiene como columnas vectores linealmente independientes,$detQ(t) \neq 0$. y por ende es inversible. Entonces $\exists Q(t)^{-1}/C'(t) = Q(t)^{-1}.b(t)$. Dado que las funciones individuales de Q y b son contínuas, podemos hallar $C(t)$ integrando y el TFC nos asegura que las mismas son contínuamente diferenciables.

10. Ecuación diferencial y ecuación integral

Los siguientes sistemas son equivalentes:

ED:

$X\epsilon C^1\left[\tau - \lambda, \tau + \lambda\right]$
$X'(t) = f(t, X(t))$
$X(\tau) = \varsigma$

EI:

$X\epsilon C\left[\tau - \lambda, \tau + \lambda\right]$
$X(t) = \varsigma + \int\limits_{\tau}^{t} f(s, X(s))ds$

$\Rightarrow$

Sea X solución de ED, $X\epsilon C^1\left[\tau - \lambda, \tau + \lambda\right]$, entonces X es integrable en un entorno de τ:

$\int\limits_{\tau}^{t} X'(s)ds = \int\limits_{\tau}^{t} f(s, X(s))ds$

$X(t) - X(\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} f(s, X(s))ds$

$X(t) = \varsigma + \int\limits_{\tau}^{t} f(s, X(s))ds$

$\Leftarrow$

Sea X solución de la ecuación integral:

$X(\tau) = \varsigma + \int\limits_{\tau}^{\tau} f(s, X(s))ds = \varsigma$

$X'(t) = \left(\varsigma + \int\limits_{\tau}^{t} f(s, X(s))ds\right)' = 0 + f(t, X(t))$

Además X es contínua y como es una integral, su primitiva es contínua, entonces X'es contínua $\Leftrightarrow$ $X\epsilon C^1\left[\tau-\lambda,\tau+\lambda\right]$

11. Solución general de una ecuación de segundo orden

Sea Y_p una solución particular de la ecuación lñineal homogenea de orden 2, y $Y_h=c_1U_1+c_2U_2$ la solución geenral de la homogénea asociada. Entonces podemos escribir la ecuación general de la ecuación no homogénea como:

$$Y=Y_h+Y_p=c_1U_1+c_2U_2+Y_p$$

11.1. Demostración del teorema:

Consideremos el sistema lineal $L(Y)=Y''+P_1Y'+P_2Y=R$, con $P_1,\ P_2\ y\ R$ funciones contínuas en $I\subseteq\mathbb{R}$. Sean Y_1 y Y_2 soluciones de la ecuación no homogénea $L(Y)=R$

$$L(Y_1-Y_2)=L(Y_1)-L(Y_2)=R-R=0$$

Entonces Y_1-Y_2es una solución del sistema homogéneo asociado $L(Y)=0$. Podemos escribir entonces Y_1-Y_2 como combinación lineal de soluciones del homogéneo:

$$Y_1-Y_2=c_1U_1+c_2U_2$$

que es lo mismo que:

$$Y_1=c_1U_1+c_2U_2+Y_2$$

donde $c_{1,}\ c_2\epsilon\mathbb{R}$ y Y_1 y Y_2 dos soluciones cualquiera de la ecuación no homogénea.
Entonecs, si podemos determinar una solución particular $Y_2=Y_p$ del no homogéneo, podemos expresar cualquier otra solución del no homogéneo como:
$Y=c_1U_1+c_2U_2+Y_p$ Llamamos entonces a esta solución solución general o integral general de la ecuación no homogénea.

12. La matriz wronskiana es inversible

12.1. Definiciones:

Sean $X_1(t)...X_n(t)$ soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden n, homogéna. Definimos $W(X_1(t)...X_n(t))=$ $det\begin{bmatrix}X_1(t) & ... & X_n(t)\\ X_1'(t) & ... & X_n'(t)\\ \vdots & ... & \vdots\\ X_1^{(n)}(t) & ... & X_n^{(n)}(t)\end{bmatrix}$ el wronskiano. Entonces,

$$\exists\tau\epsilon I/W(\tau)\neq0\Longleftrightarrow\forall t\epsilon I\ W(t)\neq0\Longleftrightarrow\{X_1(t)...X_n(t)\}\ son\ l.i.$$

12.2. Demostración:

Consideramos el sistema homogeneo de primer orden de n ecuaciones (S) asociado a la ecuación de orden n (E).

Sean $X_1(t)...X_n(t)$ soluciones de (E). Sean $\overline{X_i}=\begin{pmatrix}X_i\\ \vdots\\ X_i^{(n-1)}\end{pmatrix}$, con $1\leq i\leq n$. Veamos que $\{X_1(t)...X_n(t)\}\ sonl.i.\Longleftrightarrow$ $\left\{\overline{X_1}(t)...\overline{X_n}(t)\right\}\ son\ l.i.$
$\Rightarrow$
Supongamos que $\{X_1(t)...X_n(t)\}\ son\ l.i$, q.v.q. $\left\{\overline{X_1}(t)...\overline{X_n}(t)\right\}\ son\ l.i.$

e.i. supongamos que $c_1\overline{X_1} + ... + c_n\overline{X_n} = 0 \ \forall t \epsilon I$, q.v.q $c_1 = ... = c_n = 0$.

Mirando la primer fila de cada columna:

$c_1X_1 + ... + c_nX_n = 0 \Longleftrightarrow c_1 = ... = c_n = 0$,porque $\{X_1(t)...X_n(t)\}$ *son l.i.*

$\Leftarrow$

Supongamos que $\left\{\overline{X_1}(t)...\overline{X_n}(t)\right\}$ *son l.i.* q.v.q. $\{X_1(t)...X_n(t)\}$ *son l.i*

Si $c_1X_1 + ... + c_nX_n = 0 \ \forall t\epsilon I$, q.v.q. $c_1 = ... = c_n = 0$

si derivamos $n-1$ veces, obtenemos $c_1\overline{X_1} + ... + c_n\overline{X_n} = 0$, que son l.i. por hipótesis, entonces $c_1 = ... = c_n = 0$

Por otro lado, tenemos los resultados de los teoremas para sistemas de ecuaciones:

Sabemos que $\left\{\overline{X_1}(t)...\overline{X_n}(t)\right\}$son base del espacio vectorial de soluciones del sistema, y que estos vectores son l.i. $\forall t\epsilon I$ $\Leftrightarrow$son l.i. en τ. Entonces, como la matriz wronskiana tiene columnas linealmente independientes, tenemos $detW \neq 0$, en todo t y en particular en τ.