Análisis II – Matemática 3
Análisis Matemático II

Leandro M. Del Pezzo
ldpezzo@dm.uba.ar

Teóricas– Verano 2022

Superficies

Superficies
Definición

Definición.

Una superficie paramétrica (superficie a secas para nosotros) es un conjunto de puntos del espacio que puede describirse por medio de dos parámetros. Más precisamente, $\mathcal{S}$ es una superficie si existen funciones continuas $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ definidas en un dominio elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ si y sólo si existe $(u,v) \in D$ con $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$.

En este caso, llamamos a $T : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

una parametrización de $\mathcal{S}$.

Superficies
Ejemplos

Ejemplo

Como ejemplo sencillo se tiene que si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una función contínua definida en un dominio elemental* D *del plano, su gráfica:*

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}$$

es una superficie que admite la parametrización $T(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

Superficies
Ejemplos

Sean $f\colon D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($N = 2$ o 3) y $c \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de nivel de nivel c de f es

$$\{x \in D\colon f(x) = c\}.$$

Cuando $N = 2$ se denomina curva de nivel c de f y cuando $N = 3$ se denomina superficie de nivel c de f.

Ejemplo

El paraboloide elíptico

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

y el cono

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

son superficies de nivel.

Superficies
Ejemplos

Ejemplo

Moebius

$$T(u,v)\colon [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = (\cos(v)(1+\cos(\tfrac{v}{2})u), \sin(v)(1+\cos(\tfrac{v}{2})u), \sin(\tfrac{v}{2})u)$$

Plano tangente y suavidad

Superficies Suaves

Definición

Definición.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Una parametrización $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ inyectiva y de clase C^1 tal que

$$T_u(u, v) \times T_v(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D.$$

se denomina una pearmetrización regular de $\mathcal{S}$.

Una superficie que admite una parametrización regular se dice suave.

Superficies Suaves

Plano tangente

Definición.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave, $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrizacion regular de $\mathcal{S}$ y $(x_0, y_0, z_0) = T(u_0, v_0) \in \mathcal{S}$. Entonces llamaremos plano tangente a $\mathcal{S}$ en el punto P_0 al plano

$$\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

donde $\mathbf{n} = T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$.

Superficies Suaves

Plano tangente

Propiedad.

Sea $\mathcal{S}$ el gráfico de una función C^1, $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental. Entonces $\mathcal{S}$ es una superficie suave y la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Superficies Suaves

Plano tangente

Propiedad.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie dada en forma implícita por

$$\mathcal{S}: \quad F(x, y, z) = 0$$

donde $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $\nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ para todo (x, y, z). Entonces, $\mathcal{S}$ es una superficie suave y la ecuació n del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Superficies Suaves

Reparametrizaciones

Definición.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ un dominio elemental y $G\colon D^* \to D$ una biyección, C^1 con Jacobiano no nulo. (Es decir, $\det(DG)(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in D_1$). Sea $T_1\colon D^* \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T_1(u,v) = T\big(G(u,v)\big).$$

Llamamos a T_1 una reparametrización de T.

Superficies Suaves

Reparametrizaciones

Proposición.

Sean $\mathcal{S}$, T y T_1 como en la Definición anterior. Entonces, T_1 es una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Más aún,

$$T_{1u}(u,v) \times T_{1v}(u,v) = \left(T_u(G(u,v)) \times T_v(G(u,v))\right) \mathcal{J}_G(u,v)$$

donde $\mathcal{J}_G$ es el determinante de la matriz asociada al diferencial de G,

$$\mathcal{J}_G(u,v) = det(DG)(u,v).$$

Superficies Suaves

Reparametrizaciones

Teorema.

Sea S una superficie suave que admite dos parametrizaciones regulares

$$T : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$$

$$\hat{T} : \hat{D} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$$

Entonces, $\hat{T}$ es una reparametrización de T. Es decir, existe una biyección $G : \hat{D} \to D$, C^1 con Jacobiano no nulo, tal que

$$\hat{T}(\hat{u}, \hat{v}) = T(G(\hat{u}, \hat{v})).$$

Área

Área

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave. Queremos encontrar una forma de definir el área de $\mathcal{S}$ que vuelva a darnos lo que tomamos como definición en el caso de superficies planas,

$$A(D) = \iint_D 1\, dxdy.$$

Supongamos que tenemos una superficie $\mathcal{S}$ contenida en el plano $\{z = 0\}$. Una parametrización de esta superficie tendrá la forma

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Área

Calculemos $T_u \times T_v$. Tenemos,

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, 0\right) \qquad T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, 0\right)$$

$$T_u \times T_v = \left(0, 0, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \left(0, 0, \frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right).$$

Sea $G\colon D \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

Por lo tanto,

$$\|T_u \times T_v\| = \left|\frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right| = |det(DG)|.$$

Área

Lo que hemos hecho no es otra cosa que representar la región plana S contenida en el plano (x, y) por medio de un cambio de coordenadas dado por G. El Teorema de cambio de variables nos da un cálculo del área de S como una integral sobre D,

$$Area(S) = \iint_S 1\, dx\, dy = \iint_D |det(DG)(u, v)|\, du\, dv = \iint_D \|T_u \times T_v\|(u, v)\, du\, dv.$$

Área

Definición

Sean $\mathcal{S}$ una superficie suave y

$$T : D \to S \subset \mathbb{R}^3.$$

una parametrización regular. Entonces

$$Area(\mathcal{S}) := \iint_D \|T_u \times T_v\|(u,v)\, du\, dv.$$

Integral de superficies

Integral de superficies
Motivación

Vamos a definir lo que entenderemos por integral de superficie de una función continua.
Para motivarlo consideremos el siguiente problema: Hallar la masa total de una membrana $\mathcal{S}$

Si la membrana es de un material homogéneo, su masa será proporcional al área de S. Llamamos a esa proporción "densidad superficial de masa", ρ_0. Por lo tanto, en este caso,

$$\text{Masa total de } \mathcal{S} = \rho_0 Area(S).$$

Si la membrana está formada por parches S_k de materiales homogéneos de densidad superficial de masa ρ_k, entonces

$$\text{Masa total de } \mathcal{S} = \sum_k \rho_k Area(S_k).$$

Integral de superficies
Motivación

Si ahora la membrana está formada por un material inhomogéneo con densidad superficial de masa $\rho(x, y, z)$ continua, podemos aproximarla por

$$\text{Masa total} \sim \sum_{i,j/R_{ij}\subset D} \rho(P_{ij}) Area(S_{ij}) = \sum_{i,j/R_{ij}\subset D} \rho(T(u_{ij}, v_{ij})) \iint_{R_{ij}} \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

Integral de superficies

Definición

Definición.

$\mathcal{S}$ una superficie suave,

$$T : D \to S \subset \mathbb{R}^3$$

una parametrización regular y $\rho : S \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\iint_S \rho \, dS := \iint_D \rho(T(u,v)) \|T_u \times T_v\|(u,v) \, du \, dv.$$

Integral de superficies

Teorema.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave que admite dos parametrizaciones regulares

$$T : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$$

$$\hat{T} : \hat{D} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$$

Sea $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} f\, dS &= \iint_{D} f(T(u,v)) \| T_u \times T_v \| (u,v)\, du\, dv \\ &= \iint_{\hat{D}} f(\hat{T}(\hat{u},\hat{v})) \| \hat{T}_{\hat{u}} \times \hat{T}_{\hat{v}} \| (\hat{u},\hat{v})\, d\hat{u}\, d\hat{v}. \end{aligned}$$

Integral de superficies

Teorema (Teorema del valor medio).

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave que admite una parametrización regular y $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe un punto $P_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$\iint_{\mathcal{S}} f dS = f(P_0) Area(S).$$

Superficies de revolución

Orientación

Orientacion

Definición

Definición.

Decimos que una superficie $\mathcal{S}$ es orientable si hay una forma de elegir en cada punto P de $\mathcal{S}$ un único versor normal $\nu(P)$ ($\nu(P)$ es perpendicular la plano tangente y tiene modulo 1) de modo que la función vectorial que resulta de esta elección resulte continua en $\mathcal{S}$.

Orientacion
Ejemplos

- Si $\mathcal{S}$ es un gráfico,

$$\mathcal{S}: z = f(x, y),$$

  se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en $\mathcal{S}$.
- Si $\mathcal{S}$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipos I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.
- Pero si la parametrización T deja de ser inyectiva, $\mathcal{S}$ podría ser no orientable aunque se tenga $T_u \times T_v \neq 0$ en todos lados. Esta es la situación con la Cinta de Möebius.

Orientacion
Superficies suaves

Proposición.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave y $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$. Para cada $P \in \mathcal{S}$, sea

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \text{con } P = T(u,v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $\mathcal{S}$. En este caso, decimos que $\mathcal{S}$ está orientada por la parametrización T.

Orientacion
Superficies suaves

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por el versor ν y sea $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{S}$.

- T preserva la orientación si

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \qquad \text{con } P = T(u,v).$$

- T invierte la orientación si

$$\nu(P) = -\frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \qquad \text{con } P = T(u,v).$$

Flujo

Flujo

Definición

Definición.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$ a la integral

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{F} \cdot \nu \rangle \, dS.$$

Flujo
Orientación

Sean T y $\hat{T}$ parametrizaciones regulares de una superficie $\mathcal{S}$. Supongamos que $\hat{T}$ es una reparametrización de T. Sea G una biyección C^1 con jacobiano no nulo entre los parámetros $(\hat{u},\hat{v})$ de $\hat{T}$ y (u,v) de T, es decir,

$$\hat{T}(\hat{u},\hat{v}) = T(G(\hat{u},\hat{v})).$$

Decimos que $\hat{T}$ y T tienen la misma orientación si $\mathcal{J}_G(\hat{u},\hat{v}) > 0$ para todo $(\hat{u},\hat{v})$, y entonces

$$\nu(P) = \frac{T_u \times T_v(u,v)}{\|T_u \times T_v(u,v)\|} = \frac{\hat{T}_{\hat{u}} \times \hat{T}_{\hat{v}}(\hat{u},\hat{v})}{\|\hat{T}_{\hat{u}} \times \hat{T}_{\hat{v}}(\hat{u},\hat{v})\|}.$$

Si esto no sucede, se tiene que $\mathcal{J}_G(\hat{u},\hat{v}) < 0$, y

$$\nu(P) = \frac{T_u \times T_v(u,v)}{\|T_u \times T_v(u,v)\|} = -\frac{\hat{T}_{\hat{u}} \times \hat{T}_{\hat{v}}(\hat{u},\hat{v})}{\|\hat{T}_{\hat{u}} \times \hat{T}_{\hat{v}}(\hat{u},\hat{v})\|}.$$

Flujo

Orientación

Propiedad.

Sea $\mathcal{S}$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $\hat{T} : \hat{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{S}$. Entonces, el cálculo de

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$$

da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización $\hat{T}$.

Si $\hat{T}$ invierte la orientación, los cálculos del flujo de $\mathbf{F}$ difieren sólo en el signo.

Flujo
Ejemplos

Ejemplo

Calculemos

$$\int_{Cil} \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$$

donde

$$Cil = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

es la pared lateral del cilindro, orientada según $\nu(1,0,0) = (1,0,0)$ *(normal "hacia afuera"). Y*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, 3y, z).$$

Flujo
Ejemplos

Ejemplo

Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$$

que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy *a través del cuadrado* $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.