Análisis II – Matemática 3
Análisis Matemático II

Leandro M. Del Pezzo
ldpezzo@dm.uba.ar

Teóricas– Verano 2022

Repaso de Curvas

Repaso
Curvas

Definición.

Un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ es una curva si existe una función continua $\sigma(t)$, denominada una "parametrización de $\mathcal{C}$", definida en algún intervalo $[a, b]$

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C},$$

tal que $P \in \mathcal{C}$ si y solo si existe $t \in [a, b]$ con $\sigma(t) = P$.

Repaso

Curvas

Definición.

Una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ se dice simple, abierta si no se corta a si misma. Más precisamente, si admite una parametrización $\sigma\colon [a, b] \to \mathcal{C}$ que es inyectiva en $[a, b]$.

Definición.

Una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ se dice simple, cerrada si admite una parametrización $\sigma\colon [a, b] \to \mathcal{C}$ que es inyectiva en $[a, b)$ y $\sigma(a) = \sigma(b)$.

Repaso
Curvas

Definición.

Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ una curva simple abierta o cerrada y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ una paramatrización de $\mathcal{C}$ tal que

σ es inyectiva en $[a, b]$ si $\mathcal{C}$ es simple abierta o

σ es inyectiva en $[a, b)$ si $\mathcal{C}$ es simple cerrada.

Sea $t_0 \in [a, b]$ tal que existe $\sigma'(t_0)$ y $\sigma'(t_0) \neq 0$.[a] Entonces llamaremos recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P_0 = \sigma(t_0)$ a la recta que pasa por P_0 con dirección dada por el vector $\sigma'(t_0)$, es decir

$$\mathbb{L}_{P_0} : \sigma(t_0) + \lambda \sigma'(t_0) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[a] Cuando $t_0 = a$ o b la derivada se interpreta lateral y en el caso que la curva sea cerrada $\sigma'(a) = \sigma'(b)$.

Repaso
Curvas

Definición.

Una parametrización $\sigma\colon [a,b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2,3$) de clase $C^1([a,b])$ con $\sigma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y que cumple una de las siguientes condiciones

- σ es inyectiva en $[a,b]$,
- σ es inyectiva en $[a,b)$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$ (derivadas laterales).

se denomina parametrización regular de un curva simple abierta o cerrada respectivamente.

Repaso
Curvas

Definición.

Una curva simple abierta o cerrada, que admite una parametrización regular se dice suave.

Repaso
Curvas

Reparametrización. Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) una curva simple abierta o cerrada que admite una parametrización regular $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ y

$$h\colon [a, b] \to [c, d]$$

una biyección C^1 con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces la parametrización $\tilde{\sigma}\colon [c, d] \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma\big(h^{-1}(\tau)\big).$$

es una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización regular de σ.

Repaso

Longitud de curva

Definición

Sean $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) una curva simple abierta suave. Si existe una cota superior finita para las longitudes de todas las poligonales con vértices en la curva $\mathcal{C}$ decimos que $\mathcal{C}$ es rectificable y definimos la longitud de $\mathcal{C}$ como la menor de esas cotas, es decir

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) := \sup \left\{ \mathcal{L}(\mathcal{P}) \colon \mathcal{P} \text{ es una partición de } \mathcal{C} \right\}.$$

Se tiene

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Repaso

Integral de Longitud de arco

Definición.

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) una curva simple, abierta y suave. Sean $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$ de clase C^1 y f un función continua definida sobre $\mathcal{C}$. Definimos la integral de f sobre la curva $\mathcal{C}$ como

$$\int_{\mathcal{C}} f \, d\ell := \int_a^b f\left(\sigma(t)\right) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Repaso

Integral de Longitud de arco

Proposición.

Sean $N = 2$ o 3, $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^N$ y $\gamma\colon [c, d] \to \mathbb{R}^N$ dos parametrizaciones regulares de una curva simple abierta y suave $\mathcal{C}$. Si f es una función continua definida sobre $\mathcal{C}$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f\, d\ell = \int_a^b f\left(\sigma(t)\right) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_c^d f\left(\gamma(r)\right) \|\gamma'(r)\|\, dr$$

Repaso

Integrales curvilineas

Definición.

Sea $\mathcal{C}$ una curva abierta, simple, suave. Sea τ un campo de vectores unitarios tangentes a $\mathcal{C}$ continuo. Este campo determina un sentido de recorrido sobre la curva $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{C}$ está orientada por el campo τ.

Repaso

Integrales curvilineas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una curva abierta, simple, suave que admite una parametrización regular $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ que la orienta. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre $\mathcal{C}$. Llamamos integral curvilínea del campo $\mathbf{F}$ sobre la curva orientada $\mathcal{C}$ a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} := \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt.$$

Repaso

Integrales curvilineas

Proposición.

Sean $N = 2$ o 3, $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^N$ parametrizaciones regular de una curva simple abierta y suave $\mathcal{C}$. Sean $\mathbf{F}$ un campo continuo sobre $\mathcal{C}$ y $\alpha : [c,d] \to \mathcal{C}$ es una reparametrización regular de σ. Si α preserva la orientación de $\mathcal{C}$ definida por σ, entonces

$$\int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt = \int_c^d \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt.$$

Si no la preserva, entonces

$$\int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt = -\int_c^d \langle \mathbf{F}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \, dt.$$

Teorema de Green

Teorema de Green

Motivación

Recordemos que el teorema fundamental del calculo, nos dice que

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a).$$

"La integral de derivadas de f en el interior de $[a, b]$ es igual a algo de f sobre el borde, $\{a, b\}$".

¿Podemos extender esta idea a dimensión 2?

Teorema de Green

Regiones

Definición.

Una región D de $\mathbb{R}^2$ se dice de tipo I si

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 < x < a_2,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\}$$

es decir, si D se puede describir como el conjunto encerrado entre los gráficos de dos funciones de x, φ_1 y φ_2 en el intervalo (a_1, a_2).

Teorema de Green

Regiones

Definición.

Una región D de $\mathbb{R}^2$ se dice de tipo II si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon b_1 < y < b_2,\ \phi_1(y) < x < \phi_2(y)\}$$

es decir, si D se puede describir como el conjunto encerrado entre los gráficos de dos funciones de y, ϕ_1 y ϕ_2 en el intervalo (b_1, b_2).

Teorema de Green

Regiones

Definición.

Finalmente, una región D es de **tipo III** si es de tipo I y de tipo II simultaneamente.

Teorema de Green

Orientación de curvas cerradas

Definición

Una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ que es la frontera de una región de tipo I, II o III tiene dos orientaciones: una recorriendo la curva en sentido contrario a las agujas del reloj y otra recorriendo la curva en el sentido de las agujas del reloj.

A la primera la llamaremos orientación positiva y escribiremos $\mathcal{C}^+$.

A la segunda, la llamaremos orientación negativa y escribiremos $\mathcal{C}^-$.

Observación: Notemos que la orientación positiva también puede reconocerse de la siguiente forma: si se recorre la curva $\mathcal{C}$ caminando en sentido positivo, se deja la región D que encierra $\mathcal{C}$ a la izquierda.

Teorema de Green

Orientación de curvas cerradas

Supongamos ahora que la curva $\mathcal{C}^+$ encierra una región de tipo I (con orientación positiva), D. Entonces, podemos escribirla como la unión de cuatro curvas,

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{B}_1^- \cup \mathcal{B}_2^+ .$$

Teorema de Green

Orientación de curvas cerradas

Más precisamente, si

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 < x < a_2,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\},$$

entonces $\mathcal{C}_1^+$ es la parte de abajo

$$\mathcal{C}_1^+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 < x < a_2, y = \varphi_1(x)\right\}$$

recorrida de izquierda a derecha y $\mathcal{C}_2^-$ es

$$\mathcal{C}_2^- = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 < x < a_2, y = \varphi_2(x)\right\}$$

recorrida de derecha a izquierda.

Teorema de Green

Orientación de curvas cerradas

Finalmente, $\mathcal{B}_1^-$ es la parte de la izquierda

$$\mathcal{B}_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = a_1, \varphi_1(a_1) < y < \varphi_2(a_1)\}$$

recorrida de arriba hacia abajo y $\mathcal{B}_2^+$ es la parte de la derecha

$$\mathcal{B}_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = a_2, \varphi_1(a_2) < y < \varphi_2(a_2)\}$$

recorrida de abajo hacia arriba.

Observación: $\mathcal{B}_1^-$ o $\mathcal{B}_2^+$ pueden no aparecer. Por ejemplo, se $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$ entonces $\mathcal{B}_1^-$ no aparece.

Teorema de Green

Teorema (Teorema de Green).

Sea $\mathcal{F} = (P, Q)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y suave por trozos, que encierra una región del tipo III $D \subset \Omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}^+} (P, Q) \cdot dl &= \int_{\mathcal{C}^+} (P\,dx + Q\,dy) \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx\,dy\,. \end{aligned}$$

Teorema de Green

Demostración

Lema (Lema 1).

Sea D una región de tipo I en el plano y sea $\mathcal{C}^+$ la curva suave por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 se tiene

$$\int_{\mathcal{C}^+} (P,0)\cdot dl = \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema de Green

Demostración

Lema (Lema 2).

Sea D una región de tipo II en el plano y sea $\mathcal{C}^+$ la curva suave por trozos que recorre su frontera orientada positivamente. Entonces, si $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene

$$\int_{\mathcal{C}^+} (0, Q) \cdot dl = \int_{\mathcal{C}^+} Q\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx\, dy.$$

Teorema de Green
Ejemplo

Ejemplo

Verificar el Teorema de Green para $D = \{(x, y) \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, $P(x, y) = 2x^3 - y^3$ *y* $Q(x, y) = x^3 + y^3$.

Teorema de Green

Comentario

El Teorema de Green se puede aplicar a regiónes más generales que las de tipo III. Por ejemplo, si una región D se puede descomponer en una unión disjunta y finita de regiónes de tipo III, entonces se puede usar el teorema.

Teorema de Green
Calculo de Área

Teorema (Calculo de Área).

Sea D una región donde vale el teorema de Green, entonces

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1 \; dx\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy.$$

Teorema de Green

Ejemplo

Ejemplo

Calcule el área de la región encerrada por el hipocicloide definido por

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

usando la parametrización

$$x = \cos^3(\theta), \quad y = \sin^3(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$