

1. a) Enuncie y demuestre el teorema de Green para una region elemental de tipo 3.
b) Calule la integral

$$\int_{\partial D} \left(\sin(x^2) - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(\cos(y^3) + \frac{x^2}{3} \right) dy$$

donde D es un anillo dado en coordenadas polares por $1 \leq \rho \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.
¿ D es una región de tipo 3?

2. a) ¿Cómo se define el área de una superficie regular?
b) Considere una curva parametrizada (simple) de la forma $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(t) = (0, y(t), z(t))$$

con $y(t) > 0$ y $\|\sigma'(t)\| \neq 0$ ($\forall t \in [a, b]$). Explícite una fórmula del área de la superficie de revolución alrededor del eje z generada por esta curva, en términos de σ (y su derivada).

c) A partir de la fórmula obtenida, calcule el área de un toro (con radios a elección), vista como superficie de revolución.

3. Un sistema mecánico unidimensional descrito por una función $x(t)$ está modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$x'' = x - x^3 - 2ax'$$

donde $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Determine sus puntos de equilibrio y si son estables o inestables. ¿Dependen las condiciones de estabilidad del parámetro $a > 0$? Para $a = 1$ esboce el diagrama de fase en el plano (x, y) donde $y := x'$.