Práctica 9

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

1. Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

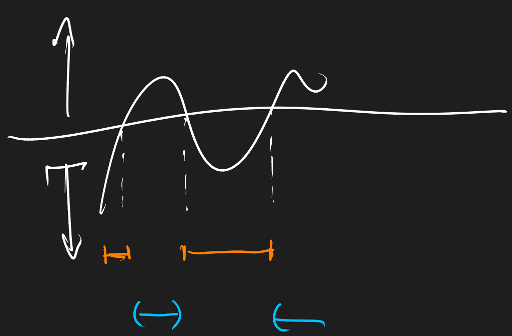
Concluir que si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los items de arriba.

$a \Rightarrow b)$ Como

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$$

y además

$$\underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{=: B} = X \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{=: A}$$



$$\underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{B \in \mathcal{A}?} = \underbrace{X}_{X \in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{A \in \mathcal{A}}$$

Como A^c es B

y $A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow B \in \mathcal{A}$ ✓

$b \Rightarrow d)$ $B = \{x \in X : f(x) \leq a\}$

$D = \{x \in X : f(x) < a\}$

$$f(x) < a \iff \exists n \in \mathbb{N} \,/\, f(x) \leq a - \frac{1}{n}$$

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a - \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A} \text{ pues vale } B \text{ por HI}}$$

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra cerrada por unión numerable

$\Rightarrow$ vale que $D \in \mathcal{A}$ ✓

Tengo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend left] \\ b \arrow[dd, bend left] \\ c \\ d \end{tikzcd}$$

$d \Rightarrow c)$ mismo que $a \Rightarrow b$ pues

$D^c = C$ ✓

Falta $c \Rightarrow a)$

Sale igual que $b \Rightarrow d$ ✓

Probé

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend left] \\ b \arrow[dd, bend left] \\ c \arrow[uu, bend left] \\ d \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

✓

$\therefore$ a, b, c, d son equivalentes $\boxtimes$

Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ si vale a, b, c, ó d

f es medible

y si no vale alguno

$\Rightarrow$ $f \notin \mathcal{M}$ pues no

vale ninguno de los

a, b, c, d equivalentes.

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

a) $\chi_E(x)$ es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \subseteq \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x \notin E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$) Si $\chi_E(x)$ es medible

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\}$$

si elijo $a = 0$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es medible}}}{\chi_E(x)} > 0\}}_{\text{es medible}} \overset{\text{def de } \chi_E}{=} E$$

$\therefore$ E es medible. ✓

$\Leftarrow)$ No sé si χ_E es medible pero E sí lo es

defino

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = ?$$

- Si $a < 0$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) \geq 0$$

sucede para todo $x \in \mathbb{R}$ pues

$$\chi_E(x) \in \{0, 1\}$$

- Si $a \in [0, 1)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 0$$

$$\equiv \chi_E(x) = 1$$

- Si $a \in [1, +\infty)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 1$$

nunca sucede

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \phi & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Como $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$,

$E \in \mathcal{M}$ (por $\mathcal{H}_b$),

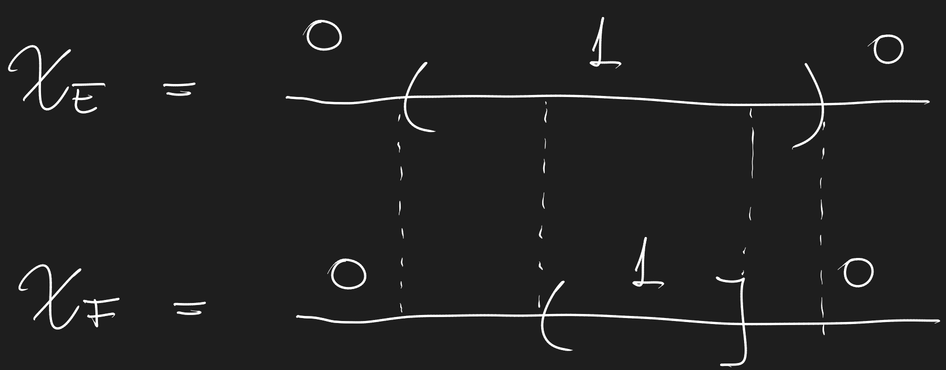
y $\emptyset \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a \} \in \mathcal{M}$$

$\therefore$ $\chi_E(x)$ es medible. $\blacksquare$

Prod.

(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.



"Compuerta lógica AND"

$$\mathrm{I}\begin{cases} \chi_{E\cap F}(x) = 1 \iff x \in E \cap F \\ \chi_{E\cap F}(x) = 0 \iff x \notin E \cap F \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} \chi_E(x) = 1 & \iff & x \in E \\ \chi_E(x) = 0 & \iff & x \notin E \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} \chi_F(x) = 1 & \iff & x \in F \\ \chi_F(x) = 0 & \iff & x \notin F \end{cases}$$

χ_E	χ_F	$\chi_{E\cap F}$	$\chi_E \cdot \chi_F$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Como sus valores son iguales en todos los casos

$$\Rightarrow \chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F.$$

$\boxtimes$

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

"OR"

χ_E	χ_F	$\chi_{E\cap F}$	$\chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$	$\chi_{E\cup F}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	$2-1=1$	1

Iguales

$\boxtimes$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Probar que f es medible.

Pruebo monótona creciente:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall\, x > x_0$$

Armo

$$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(x_0) \,,\; x_0 \in \mathbb{R} \}$$

si llamo

$$a := f(x_0)$$

$$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a \} =$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(a) \} \quad ?$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : x \geq f^{-1}(a) \}$$

$$= [\, f^{-1}(a) \,, +\infty) \quad \text{que es cerrado } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \; [\, f^{-1}(a) \,, +\infty) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ es medible. ☒

4. Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si f es medible

$\Rightarrow$ $A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible

y

$B := \{x \in X : f(x) < a\}$ es medible

$\Rightarrow$ $A \setminus B \equiv A \cap B^c$

operaciones de σ-álgebra

$\Rightarrow$ $A \setminus B$ es medible

con $A \setminus B = \{x \in X : f(x) = a\}$

$\blacksquare$

5. Probar que si f y g son medibles entonces $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.

f es medible

$$A := \{ x \in X : f(x) \leq a \} \text{ es medible}$$

g es medible

$$B := \{ x \in X : a \leq g(x) \} \text{ es medible}$$

$\Rightarrow$ vale la intersección (para un mismo a)

$$\underbrace{A \cap B}_{\text{Preguntar}} = \bigcup_{a} \{ x \in X : f(x) \leq a \leq g(x) \}$$

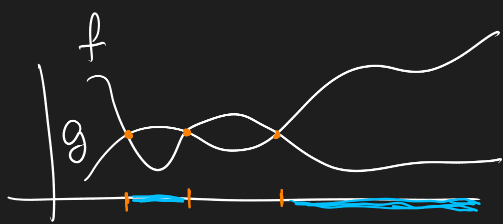
!

$$\cancel{\therefore \{ x \in X : f(x) \leq g(x) \} \text{ es medible.}}$$

! No puedo hacer esto pues cuando quiera unir sobre todos los a en R, ésta unión será de NO NUMERABLES elementos, por lo que no vale que es medible por ser unión de medibles.

De nuevo :

Escribo :



$$\{ x \in X : f(x) \leq g(x) \} = \{ x \in X : f(x) = g(x) \} \overset{d}{\cup} \{ x \in X : f(x) < g(x) \}$$

y además

$$\{ x \in X : f(x) \leq g(x) \}^{c} = X \setminus \{ x \in X : f(x) \leq g(x) \}$$

$$= \{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

$\therefore$

$$X = \underbrace{\{ x \in X : f(x) < g(x) \} \overset{d}{\cup} \{ x \in X : f(x) = g(x) \}}_{\text{Complemento de}} \overset{d}{\cup} \underbrace{\{ x \in X : f(x) > g(x) \}}_{\text{es medible?}}$$

Tengo

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

y como $f(x) > g(x)$ con $f(x), g(x) \in X \subseteq \mathbb{R}$

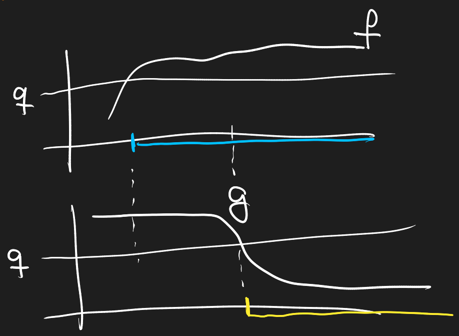
$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} \,/\, f(x) > q > g(x)$ para cada x

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \} = \bigcup_{q} \{ x \in X : f(x) > q > g(x) \}$$

es una unión numerable!

Separo

$$\{ x \in X : f(x) > q > g(x) \} = \underbrace{\{ x \in X : f(x) > q \}}_{\substack{\text{es medible} \\ \text{pues } f \text{ medible}}} \cap \underbrace{\{ x \in X : q > g(x) \}}_{\substack{\text{es medible} \\ \text{pues } g \text{ medible}}}$$



entonces

$\{x \in X : f(x) > q > g(x)\}$ es medible

$\Rightarrow$ unión numerable de $\uparrow$ es medible

$\Rightarrow$ $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ es medible

$\Rightarrow$ su complemento es medible

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}^c = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

$\boxtimes$

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:

(a) Si f es continua en $[0,1]$, entonces es medible.

(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0,1]$ entonces es medible.

a) Como f es contínua

$f^{-1}((-\infty, a])$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$ en $[0,1]$

pues $(-\infty, a]$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$

? $f^{-1}((-\infty, a]) \subseteq [0,1]$

qvq

f es medible $\equiv \{x \in [0,1] : f(x) < a\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ es medible

veo que para cada cerrado de esta forma

$$f^{-1}((-\infty, a]) = [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$$

I

obtengo un intervalo cerrado, que es medible por ser complemento de abierto $\in \mathcal{M}$

y además

$$\overset{\forall a \in \mathbb{R}}{f^{-1}((-\infty, a])} = \{x \in X : f(x) \in (-\infty, a]\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$= \{x \in X : f(x) < a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

por (I) es un intervalo cerrado

$\therefore$ es medible.

$\blacksquare$

b) Me gustaría restar un conjunto nulo y concluir que sigue siendo medible.

?

7. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:

(a) $f + g$ es medible.

(b) f^2 es medible.

(c) $f \cdot g$ es medible.

$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) < a \quad \forall a \in \mathbb{R} \}$ $\quad \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a \quad \forall a \in \mathbb{R} \}$

$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x) \quad \forall a \in \mathbb{R} \}$ $\quad \{ x \in \mathbb{R} : h(x) = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \}$

Llamo

$$h(x) := \underbrace{f(x)}_{\text{med}} + \underbrace{g(x)}_{\text{medible}} \Rightarrow h(x) \text{ es medible}$$

ej **4.** Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$\downarrow$

$\Rightarrow \{ x \in X : h(x) = a \}$ es medible