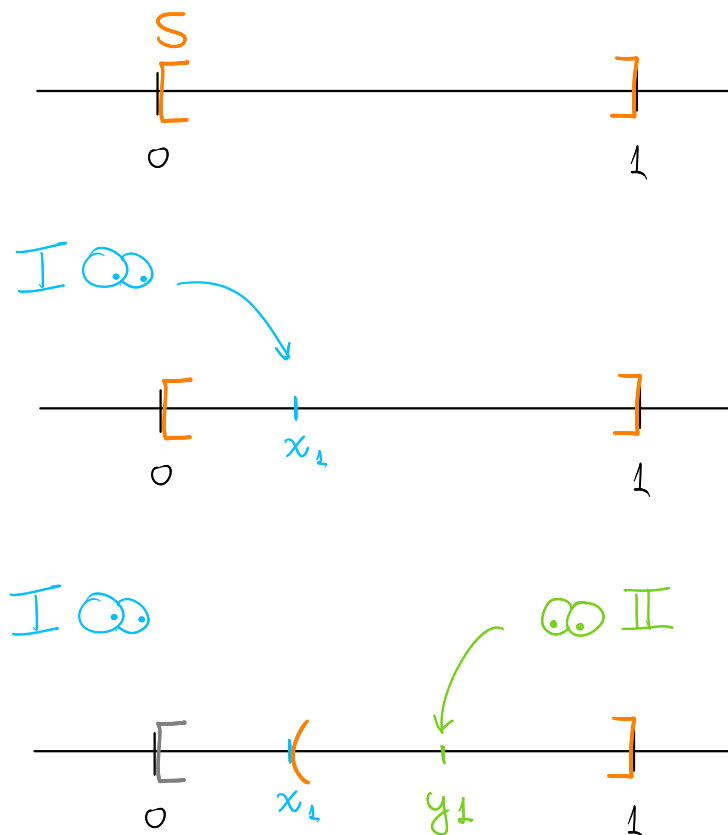


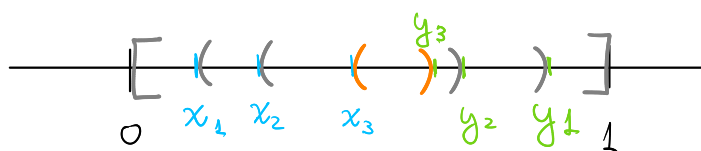
Teorema (Cantor)

*Los números reales no son numerables.***Demostración:** Consideremos el siguiente juego de dos jugadores:

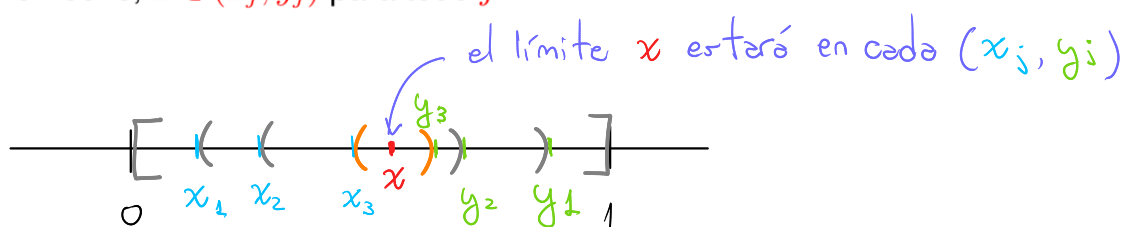
Se fija un conjunto $S \subset [0, 1]$. Comienza I eligiendo un número $x_1 \in [0, 1]$; y luego II elige un número $y_1 \in (x_1, 1]$.



Luego se alternan para elegir números, I elige $x_{j+1} \in (x_j, y_j)$, II elige $y_{j+1} \in (x_{j+1}, y_j)$.



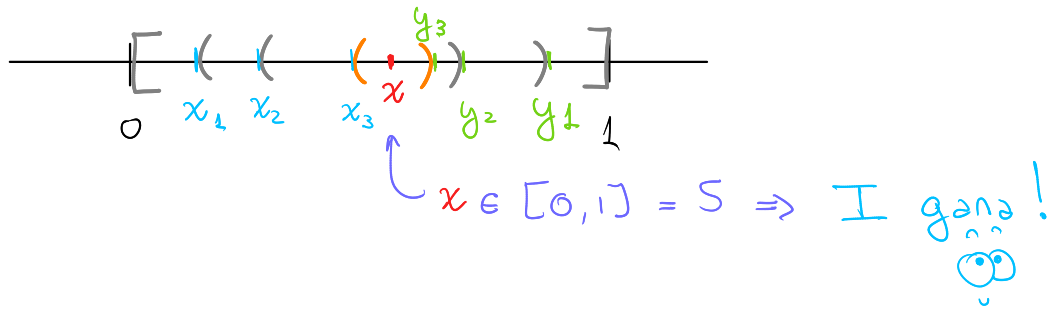
La sucesión $\{x_j\}_{j \geq 1}$ es monótona creciente y acotada, con lo cual tiene límite $x \in [0, 1]$. De hecho, $x \in (x_j, y_j)$ para todo j .



El jugador I gana si $x \in S$, de lo contrario pierde.

Supongamos que $[0, 1] = \{q_k\}_{k \geq 1}$ es numerable, y que $S = [0, 1]$.

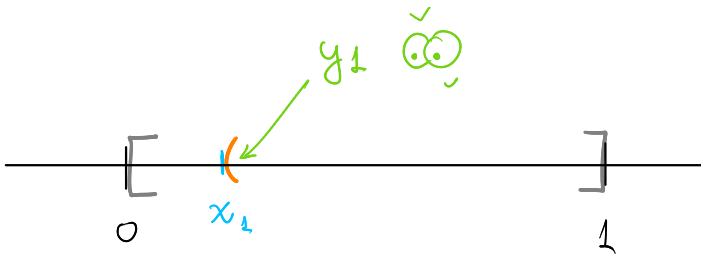
Como la sucesión $\{x_j\}_{j \geq 1}$ es monótona creciente y acotada, tenía límite $x \in [0, 1] = S$, y el jugador I gana.



Pero el jugador II tiene una estrategia ganadora: en el turno $j + 1$, va a elegir

$$y_{j+1} = q_n \text{ tal que } n = \min\{k \in \mathbb{N}, q_k \in (x_{j+1}, y_j)\}$$

↑ el índice más chico tal que q_k sea "el más pegado" a x_{j+1}
que existe pues supusimos que todos los números reales entre 0 y 1 podían ser indexados en una sucesión $\{q_k\}_{k \geq 1}$



El límite es $x = q_i$ para algún i , pero en el turno i , II lo hubiese elegido si estaba disponible, así que no puede ser un elemento de S .

$$\Rightarrow x \notin S$$

pero $x \in S$ pues $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada en $[0, 1]$

Abs!

Conclusión: Llegamos a un absurdo, $[0, 1]$ no puede ser numerable.