

6. Sean (E, d) e (E', d') espacios métricos y $f, g : E \rightarrow E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

(c) Probar que si D es denso en E y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

Definición: D es *denso* en E si $\overline{D} = E$.

$$a) \quad X = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

$P_{v f}$ es abierto

Sea $x_0 \in X$

$\Rightarrow f$ es continua en x_0

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

y como esto vale para cada $x_0 \in X$

tengo una bola abierta en X para cada x_0 .

¡Eh!
Re truco!
No merezco
borrarlo :-)

Alcanza? ... sospechoso! 

De nuevo:

$$\text{Definir } h(x) = f(x) - g(x)$$

\uparrow es continua pues f, g cont.

$$X = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

$$X = \{x \in E : h(x) \neq 0\}$$

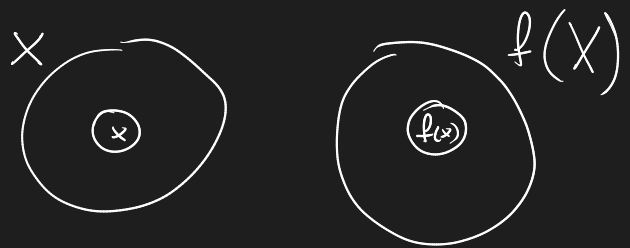
Como h es continua

$$\text{Si } x \in X,$$

$$\text{Si } V \subseteq E \text{ es un abierto / } h(x) \in V$$

$$\Rightarrow h^{-1}(V) \text{ es abierto,}$$

$$\Rightarrow \exists r / \text{ si } y \in B(x, r) \Rightarrow y \neq 0$$



$$\therefore B(x, r) \subseteq X$$

Probé que para cada $x \in X$, existe una bola abierta contenida en X ("lens" de elementos en X)

$\therefore X$ es abierto.



b) Si X es abierto $\Rightarrow X^c$ es cerrado
 \uparrow
resulta ser el conj. de b)

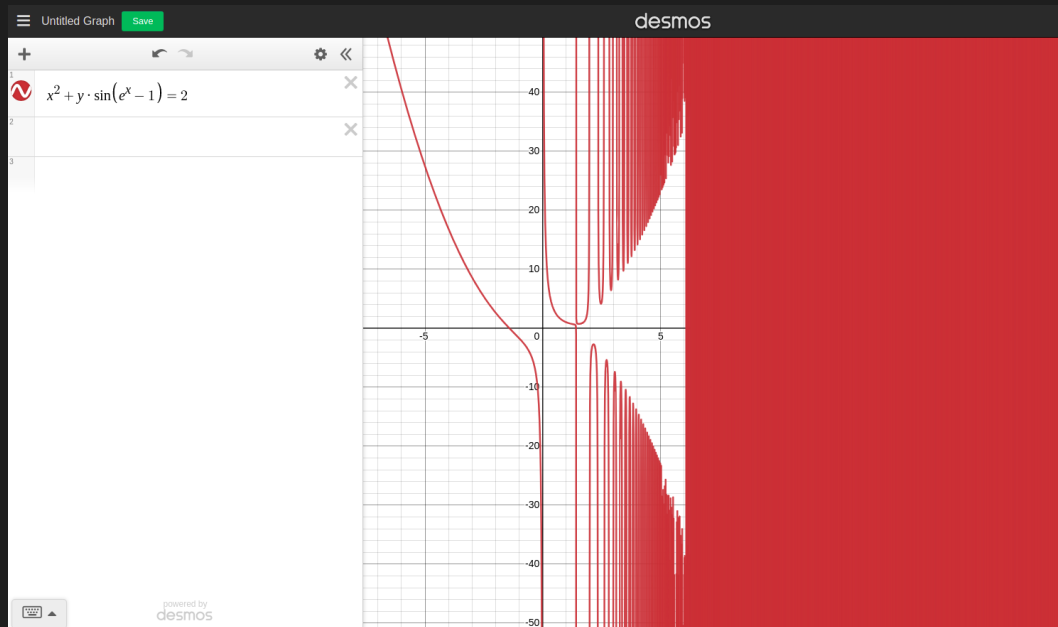
c) (c) Probar que si D es denso en E y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
Definición: D es *denso* en E si $\overline{D} = E$.

7. Considerando en cada \mathbb{R}^n la métrica euclídea d_2 , probar que:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \sin(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

a) Grafico porque $\neg A$

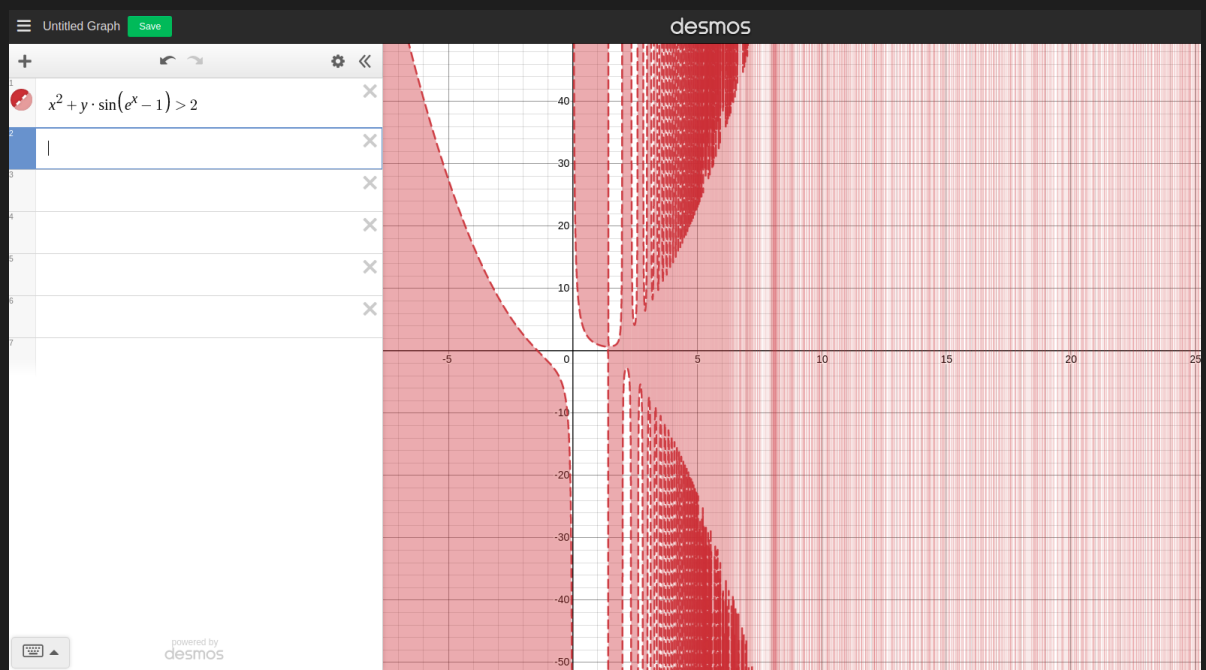
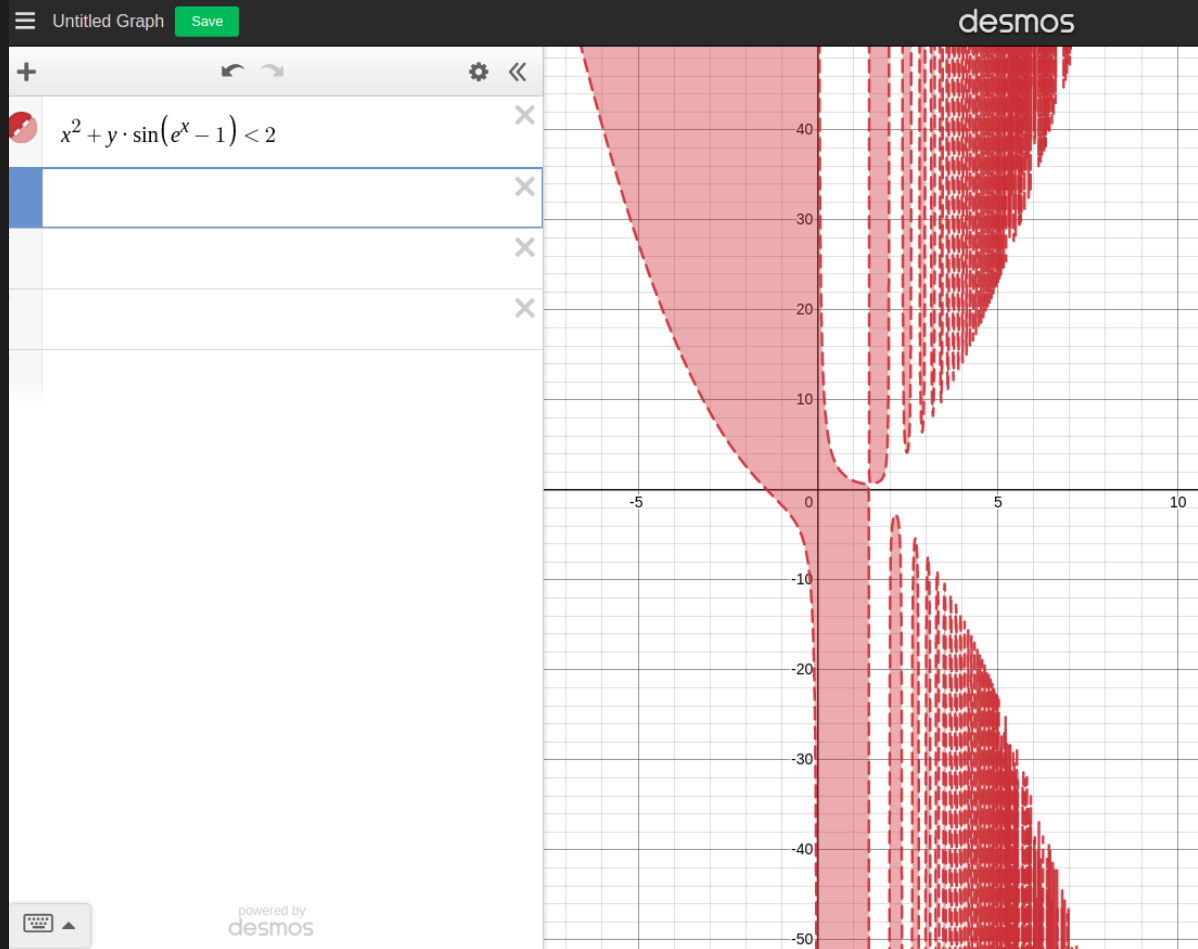


Khe!



Sé que A es cerrado $\Leftrightarrow A^c$ es abierto

Veo $f(x, y) < 2$



Borde puntado $\therefore A^c$ es abierto ... claro! \cup_0^c

Si por cada $(x, y) \in A^c$ puedo meter una bolita abierta
contenida en $A^c \Rightarrow A^c$ es abierto

$\Rightarrow A$ es cerrado

$$\text{Llamemos } A_-^c = \left\{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2 \right\}$$


$$A_+^c = \left\{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) > 2 \right\}$$

Provebo A_-^c abierto

Sea $(x,y) \in A_-^c$

$$\text{q.v.q. } \exists r > 0 / B((x,y), r) \subseteq A_-^c$$

$$\text{Llamemos } f(x,y) := x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1)$$

Como $f(x,y)$ es continua (pues suma, resta, producto de funciones continuas en \mathbb{R}^2 ...
o hay que probarlo? )

$$\Rightarrow f(B((x,y), \delta)) \subseteq B(f(x,y), \varepsilon)$$

\Rightarrow Si para cada abierto entorno de $f(x,y)$,

tengo una bola abierta centrada en (x,y)

Contenida en $A_-^c \Rightarrow A_-^c$ es abierto

Observación obse:

Cuando $f(x,y)$ está "cerca" de 2 en:

$$x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2$$

Digo que si:

$$d_2(x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1), 2) = \varepsilon_0 > 0$$

$$\Rightarrow \exists (x, y) \in B(f(x, y), \varepsilon) \stackrel{?}{\subseteq} A_-^c /$$

$$d_2(x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1), 2) = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$$

∴ siempre puedo meter una bola
"cerca del borde", pues justamente
no hay borde, sino un abierto.

Probé que A_-^c es abierto.



De la misma forma se prueba A_+^c .

y como unión de abiertos es abierto

$$\Rightarrow A_-^c \cup A_+^c = A^c \text{ es abierto}$$

∴ A es cerrado.



 Pruebo que $f(x, y)$ es continua 

Acoto norma L_2 y obtengo δ en función de ε :

$$\underbrace{|f(x, y) - f(a, b)|}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{|x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - a^2 - b \cdot \sin(e^a - 1)|}_{\in \mathbb{R}}$$

$$= |x^2 - a^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

$$\leq |x^2 - a^2| + |y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

~~~~~

$$\hookrightarrow |(x+a) \cdot (x-a)| \leq |x+a| \cdot |x-a|$$

$$\begin{aligned} & \leq |x| + |a| \\ & \leq |a| + \delta + |a| \end{aligned}$$

$$\text{elijo } \delta_1 = 1$$

$$= 2|a| + 1$$

$$\leq (2|a| + 1) \cdot \delta$$

↑ no es unif.  
continua  
pues depende  
de  $a$

y para el 2º término:

$$|y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)| \leq \text{no me sirve uss de sig. } \Delta$$

$$|y \cdot \sin(e^x - 1)| + |b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

No hacía falta probar cont. Very difícil con estas  
funciones.



Quedan para hacer

b)

c)

(se ven similares a  $\boxed{a}$ )

8. Sean  $(E, d)$  e  $(E', d')$  espacios métricos y  $f : E \rightarrow E'$  una función continua y suryectiva. Probar que si  $D$  es denso en  $E$  entonces  $f(D)$  es denso en  $E'$ .

$$D \text{ es denso} \Leftrightarrow \overline{D} = E$$

$f : E \rightarrow E'$  suryectiva (ie cada  $y \in E'$  se corresponde con un  $x \in E$  /  $f(x) = y$ )

$$\text{Si: } \overline{D} = E \Rightarrow \overline{f(D)} \stackrel{?}{=} E'$$

$$\text{Sé que } f(E) = E'$$

por como  $f$  suryectiva

para cada  $y \in E'$  tengo  $x \in E$  /  $f(x) = y$

$$\Rightarrow f(\overline{D}) = E'$$

$$\Rightarrow f(D) \cup f(D') = E'$$

quiero llegar a que  $\overline{f(D)} = E'$

quedo aplicar clausura a ambos lados!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{f(D) \cup f(D')} &= \overline{E'} \\ \overline{f(D)} \cup \overline{f(D')} &= E' \\ \downarrow \text{ como } f \text{ es continua} & \\ f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)} & \quad \downarrow \overline{f(D')} \subset \overline{f(D')} \\ & \quad f(\overline{D'}) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \Rightarrow \overline{f(D) \cup f(\partial D)} &= \overline{E'} \\ \overline{f(D)} \cup \overline{f(\partial D)} &= E' \\ \downarrow \text{ como } f \text{ es continua} & \\ f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)} & \\ \text{y como } \partial D \subset \overline{D} & \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \text{como } f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$$

$$\text{y } \overline{D} = D \cup D'$$

$$\Rightarrow f(\overline{D}) = f(D \cup D') \subset \overline{f(D)}$$

?

$$\Rightarrow f(\partial D) \subset f(\overline{D})$$

Faltaría ver que

$$\overline{f(\partial D)} \subset \overline{f(D)}$$

de nuevo, se que

$$f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$$

$$\text{y } \partial D \subset \overline{D}$$

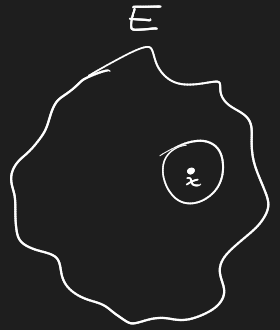
$$\Rightarrow f(\partial D) \subset f(\overline{D})$$

?

9. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Probar que todo punto de  $E$  es aislado si y sólo si toda función de  $E$  en un espacio métrico arbitrario es continua.

$\Rightarrow$ )  $\forall x \in E$ ,  $x$  es punto aislado

$$\exists r > 0 \mid B(x, r) = \{x\}$$



Sea  $f: E \rightarrow E'$

q.v.q.  $f$  es continua.

uso que:

como  $x$  es pto. aislado

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$$

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

pues

$$f(\{x\}) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

$$f(x) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$



vale siempre pues es el centro de la bola de radio  $\varepsilon > 0$

Mostré que si

$\forall x \in E$ ,  $x$  es punto aislado  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Toda  $f$  definida en  $E \rightarrow E'$  (arbitrario) será continua.

Falt b welta

$\Leftarrow$ ) Si: Toda  $f$  definida en  $E \rightarrow E'$  es continua

$\forall x \in E$  todos los  $x \in E$  son estados

(Uso explicación de Gabriel + Dani en Zulip)

[illegible]

**Daniel Carando**  
Clarísimo!  
Ya que estamos, con esa misma función que usaste se puede probar la vuelta pero de forma directa, sin usar contrarrecíproco: empezás armando esa misma función y, por hipótesis, sabés que es continua. Entonces... pero acá por si alguien lo quiere pensar.

## Plan :

- Aprovecho que TODO  $f$  es continua.
- Para cada punto  $a$ , como una  $f_a(x)$  (continua por  $\mathbb{R}$ )  
es de acumulación
- Supongo que  $a$  no es aislado, y luego es un absurdo.
- Supongo que  $\exists x_n \rightarrow a$ , (pues infinitos  $x_n$  en el entorno de  $a$ )  
quiero que  $f_a(x_n) \rightarrow y \neq f_a(a)$
- Muestro que para esta  $f_a$ ,  $a$  es aislado.
- Entonces todos los puntos de  $E$  son aislados.

Sea  $a \in E$ ,

si  $a$  es punto de acumulación,

↙ aquí está el absurdo

$\Rightarrow \exists$  infinitos puntos en todo entorno de  $a$

$\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E / x_n \rightarrow a$

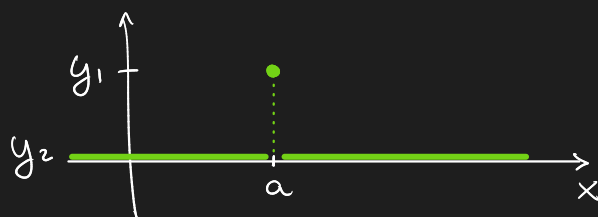
Llamo

$f_a: E \rightarrow E'$  (continua por  $f_b$ )

$$f_a(x) = \begin{cases} \text{algún elemento } y_1 \in E' & \text{si } x = a \\ \text{algún elemento } y_2 \in E' & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

$(y_1 \neq y_2)$

Ilustración (es más general que  $\mathbb{R}^2$ )



Tengo  $x_n \rightarrow a$

veo que

$$f_a(x_n) = y_2 \quad \text{si } x_n \neq a$$

pero

$$f_a(a) = y_1$$

Absurdo! pues  $f_a(x_n) \not\rightarrow f_a(a)$

$\therefore$   $a$  es punto aislado.

Como para cada  $a$  en  $E$  tengo una  $f_a$  que muestra un punto aislado en  $a$  (pues  $f_a$  no puede ser discontinua)

$\Rightarrow$  Todos los  $x \in E$  son puntos aislados.



10. Consideramos las funciones  $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \quad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (a) Demostrar que si utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_\infty$  ambas resultan continuas.
- (b) Demostrar que si en cambio utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_1$ ,  $\mathcal{I}$  es una función continua pero  $\mathcal{E}$  no lo es.
- (c) Analizar si es posible que una función  $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua para la distancia  $d_1$  pero no para  $d_\infty$ .

$$\begin{aligned} \omega) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \\ \mathcal{E}(B(f, \delta)) &\stackrel{?}{\subseteq} B(\mathcal{E}(f), \varepsilon) \\ &B(\widetilde{f(0)}, \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } g &\in B(f, \delta) \\ \Rightarrow d_\infty(f, g) &< \delta \\ \Rightarrow \mathcal{E}(g) &= g(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\infty(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) &= d_\infty(f(0), g(0)) \\ &= |f(0) - g(0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{como } d_\infty(f, g) &< \delta \\ &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

$$|f(0) - g(0)| < \delta < \varepsilon$$



$$\text{Para } I(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$I(B(f, \delta)) \stackrel{?}{\subseteq} B(\underbrace{I(f)}, \varepsilon)$$

$$B\left(\int_0^1 f(x) dx, \varepsilon\right)$$

$$\text{Si } g \in B(f, \delta)$$

$$\Rightarrow d_\infty(f, g) < \delta$$

$$\Rightarrow \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \} < \delta$$

Veo

$$d_\infty(I(f), I(g)) = d_\infty\left(\int_0^1 dx, \int_0^1 dx\right)$$

$$\stackrel{\in \mathbb{R}}{=} \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(y) dx \right|$$

$$< \delta < \varepsilon$$

□

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en  $C([0, 1])$  la distancia  $d_1$ ,  $I$  es una función continua pero  $\mathcal{E}$  no lo es.

$$\text{Si } g \in \mathcal{B}(f, \delta)$$

$$\Rightarrow d_1(f, g) < \delta$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot dx < \delta$$

$$\begin{aligned} d_1(I(f), I(g)) &= \int_0^1 |I(f(x)) - I(g(x))| \, dx \\ &= \int_0^1 \left| \underbrace{\int_0^1 f(x) \, dx - \int_0^1 g(x) \, dx}_{\in \mathbb{R}} \right| \, dx \end{aligned}$$

Si lo llamamos a

$$= \int_0^1 a \cdot dx$$

$$= a \cdot 1$$

$$= \left| \int_0^1 f(x) \, dx - \int_0^1 g(x) \, dx \right|$$

Como sabíamos que

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot dx < \delta$$

↓

$$< \delta < \varepsilon$$

□

Vemos  $\mathcal{E}(f)$

$$\text{si } g \in \mathcal{B}(f, \delta)$$

$$\Rightarrow d_1(f, g) < \delta$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \delta$$

Veamos:

$$d_1(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) = \int_0^1 |\mathcal{E}(f(x)) - \mathcal{E}(g(x))| dx$$

$$= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

?

$$\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \delta$$

↑ pues sumo términos positivos,  
entre ellos, el  $|f(x) - g(x)|$

?

$$\text{Sea } f_0 = f(x) = 0$$

$$\text{Sea } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([0,1]) / f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Con lo que vemos que

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_0$$

pues

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pero !

$$\varepsilon(f_n) = f_n(0) =$$

- (c) Analizar si es posible que una función  $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  sea continua para la distancia  $d_1$  pero no para  $d_\infty$ .