

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 4

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

¿Qué funciones sabemos integrar?

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.

$$\int \sum_i r_i \cdot \chi_{A_i} \cdot d\mu = \sum_i r_i \cdot \mu(A_i)$$

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.
- Funciones acotadas.

↳ a partir de las simples

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.
- Funciones acotadas.
- Funciones no negativas (aunque no sean acotadas).

↳ A partir de las truncadas

Teoremas de convergencia

- * Fatou
- * Convergencia monótona
- * Convergencia Mayorada (2 versiones)

Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

↳ No costadas que cambian de signo

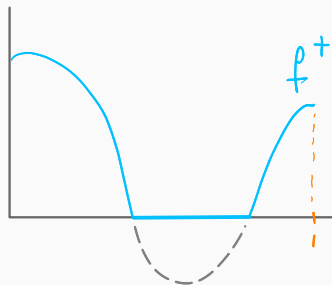
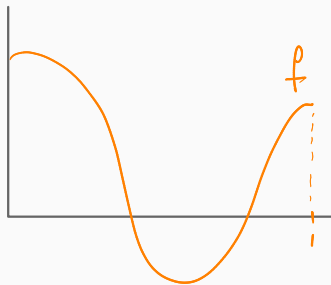
Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

↪ puede no ser acotada !

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$



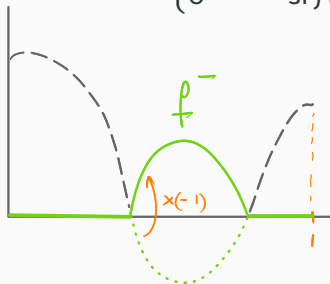
Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$



Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

f^+ y f^- son medibles

Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

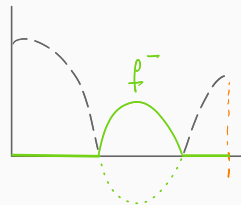
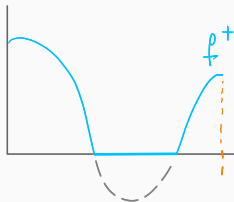
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

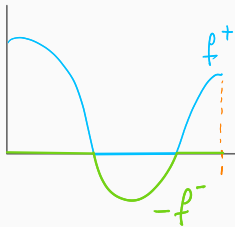
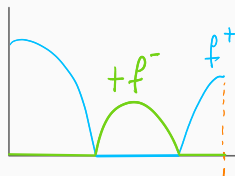
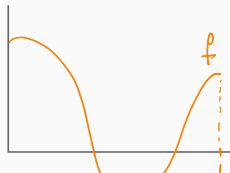
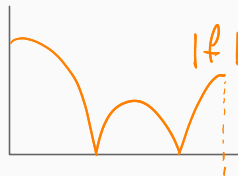
f^+ y f^- son medibles

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$



$$f = f^+ - f^-$$


 \Rightarrow

 \Rightarrow


$$f = f^+ - f^-$$

Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Decimos que f es **Lebesgue integrable** si f^+ y f^- son integrables (es decir, sus integrales son finitas).

$$f = f^+ - f^-$$

Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Decimos que f es **Lebesgue integrable** si f^+ y f^- son integrables (es decir, sus integrales son finitas).

En ese caso, definimos **la integral de Lebesgue de f** como

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

Proposición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Entonces f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable.

$$\Rightarrow) |f| \text{ integrable} \Rightarrow 0 \leq f^+ \leq \underbrace{f^+ + f^-}_{\geq 0} = |f|$$

$$\Rightarrow \int f^+ \leq \int |f| < +\infty \Rightarrow f^+ \text{ integrable}$$

análogamente para f^-

Como f^+ y f^- integrables \Rightarrow f integrable
def

$$\Rightarrow) \boxed{f^+ \text{ y } f^- \text{ int.}}$$

$$|f| = f^+ - f^-$$

TRUNCAMOS

$$g_n = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leq n \\ n & \text{si } g(x) > n \end{cases}$$

TRUNCADO DE $|f|$
↓
EJEMPLO

$$(|f|)_n \stackrel{\text{EJEMPLO}}{=} (f^+)_n + (f^-)_n$$

$$\int |f|_n = \underbrace{\int (f^+)_n}_{< +\infty} + \underbrace{\int (f^-)_n}_{< +\infty} \rightarrow \underbrace{\int f^+}_{< +\infty} + \underbrace{\int f^-}_{< +\infty} < +\infty$$

$$\Rightarrow \int |f| = \lim \int |f|_n < +\infty$$

$\Rightarrow |f|$ ES INTEG.

$$\begin{cases} \text{si } f^+(x) > 0 \Rightarrow f^-(x) = 0 \\ \text{si } f^-(x) > 0 \Rightarrow f^+(x) = 0 \end{cases}$$

EN GENERAL.

$$\text{OJO: } \underline{(g+h)_n \neq g_n + h_n}$$

con $f^+ \text{ y } f^-$ SÍ (EJEMPLO).

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu.$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Teorema (Convergencia mayorada)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0, 1]$ y g integrable en $[0, 1]$ tales que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si f es una función tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \text{ en casi todo } x.$$

Teorema (Convergencia mayorada)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0, 1]$ y g integrable en $[0, 1]$ tales que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si f es una función tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \text{ en casi todo } x.$$

Entonces, f es integrable y

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Obj: Verificar casos donde $f_n \rightarrow f$ pero $S_{f_n} \not\rightarrow S_f$

Dem: ① Estrategia: si $f_n \rightarrow f$ c.t.p

Hacer \Rightarrow

$$\begin{aligned} (f_n)^+ &\rightarrow f^+ \\ (f_n)^- &\rightarrow f^- \end{aligned}$$

(haber p/c/x donde $f_n(x) \rightarrow f(x)$)

$x \in [0, 1]$
 Sea $x \in E$ F.F.S.D.
 $\boxed{S: f(x) < 0}$ $f_n(x) \rightarrow \underline{f(x)} < 0$
 $\exists n_0 / \underline{f_n(x)} < 0 \quad \forall n \geq n_0.$
 $\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad f_n^+(x) = 0 \quad f(x) = 0.$
 $\boxed{\forall n \geq n_0, \quad f_n^+(x) = f(x)} \quad f_n^+(x) \rightarrow f^+(x)$

Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ p/c/t x.

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{(f_n)^+(x)}_{\geq 0} \leq \underbrace{|f_n(x)|}_{= (f_n)^+(x) + \underbrace{(f_n)^-(x)}_{\geq 0}} \leq \underbrace{g(x)}_{\geq 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\int (f_n)^+}_{\text{T.C.M. p/m neg.}} \rightarrow \underbrace{\int f^+}_{\int g \, d\mu}$$

$(f_n)^+(x) \rightarrow f^+(x)$

ANÁLOGAMENTE $\underbrace{\int (f_n)^-}_{\leq \int g} \rightarrow \int f^-$

Además:

$$\underline{\int f^+} \leq \int g < +\infty$$

$$\underline{\int f^-} \leq \int g < +\infty$$

$\Rightarrow f^+ \geq f^-$ int. $\therefore \boxed{f \text{ int}}$

$$\begin{aligned} \int f &= \int f^+ - \int f^- = \lim_n \int (f_n)^+ - \lim_n \int (f_n)^- = \\ &= \lim_n \left(\int (f_n)^+ \, d\mu - \int (f_n)^- \, d\mu \right) = \lim_n \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\text{DCT}} \end{aligned}$$

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas.

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado.

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f d\mu$$

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f \, d\mu = \int_{[-N, N]} f \chi_{E_N} \, d\mu.$$

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f d\mu = \int_{[-N, N]} f \chi_{E_N} d\mu.$$

Como f es no negativa, $(I_N)_N$ es creciente en \mathbb{R} y por lo tanto tiene límite.

Definimos

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_N(f).$$

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E .

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f d\mu = \int_{[-N, N]} f \chi_{E_N} d\mu.$$

Como f es no negativa, $(I_N)_N$ es creciente en \mathbb{R} y por lo tanto tiene límite.

Definimos

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_N(f).$$

f es **integrable** si el límite es finito.

Sea E medible y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E :

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Sea E medible y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E :

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Sea E medible y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E :

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Definición

Sea $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Decimos que f es **Lebesgue integrable** si f^+ y f^- son integrables en E .

Sea E medible y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E :

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Definición

Sea $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible. Decimos que f es **Lebesgue integrable** si f^+ y f^- son integrables en E .

En ese caso, definimos **la integral de Lebesgue de f en E** como

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

f med. f INT $\Leftrightarrow |f|$ int.

, linealidad, monotonia.

· FATOU, CONV. MONÓTONA, CONV. MAYORADA

VAL: $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ A_n med., $A_n \cap A_m = \emptyset$
 $n \neq m$

$$\Rightarrow \int_E f \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu$$