

N.º.

Cardinalidad 2

Vimos:

$$\text{Si } \# A_n \leq \aleph_0 \quad \forall n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n \geq 1} A_n \leq \aleph_0$$

• Qué pasa si $\# A_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

↳ ej 10 de Pr. 2.

Recordar

$$c = \# \mathbb{R}$$

Vo y = unir solo 2 conj. de una familia de card = c.

Sea

ejercicio.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1, 1) \xrightarrow{\sim} (0, 1) \longrightarrow \bigcirc^*$$
$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

↗
Se puede usar
arctan también.

$$y \longmapsto \frac{y+1}{2}$$

ejercicio 6, pero contable

$$(*) \quad (0, 1) \xrightarrow{\sim} [0, 1) \xrightarrow{\sim} [k, k+1)$$

↑ ejercicio:
Dar una función
biyectiva

6. (a) Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es numerable y $B \setminus A$ es infinito. Probar que $B \setminus A \sim B$.
(EXPLÍCITA) ~~CONTABLE~~
($A = \{0\}$)

$$\overset{0}{\circ} \overset{0}{\circ} \quad \mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sim \mathbb{R}}$

"UNA UNIÓN DISJ. DE CONJ. DE CARDINAL C TIENE CARDINAL C "

EJ 10:

10. Sea c el cardinal de \mathbb{R} . Probar:

- (a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.
- (b) Si $\#A_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

Sugerencia:

Usar el ejercicio 1 (Puedo reescribir A_n 's como B_n 's disjuntos)

Prop:

$$\text{Sea } \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \left(= \{ f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \} \right)$$

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A = \{ \phi : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ funciones} \}$.

(b) Probar que $[0, 1) \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0, 1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Idea:

$$\text{Sea } \varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(a_n)_{n \geq 1} \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{2^n}$$

• Todo $x \in [0, 1]$ admite un desarrollo en base 2

"
 $\Rightarrow \varphi$ es sobreyectiva"

• φ es inyectiva, salvo

$$\varphi(a_1, \dots, \underbrace{a_n}_{\neq 1}, 1, 1, 1, \dots) =$$

$$= \varphi(a_1, \dots, \underbrace{(a_n + 1)}_{= 1}, 0, 0, 0, \dots)$$

Así, si

$$A = \left\{ (a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \begin{array}{c} a_n \text{ no termina} \\ \text{en unos} \end{array} \right\}$$

Resultado

$$\varphi : A \longrightarrow [0,1) \text{ Biyectiva.}$$

Tengo que mostrar que Todas las sucesiones son biyecciones de ceros y unos.

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim A$$

Sugerencia:

Usar el ejercicio 6.

Sea

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \right\}$$

$$\# A = ?$$

• $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{inyectiva}} A$

$$t \mapsto (x \mapsto t)$$

↗ función que vale constantemente t

\Rightarrow como encontré una func. inyectiva.

$$c \leq \#A$$

Disgresión:

- Si quisiera acotar por arriba:

$$\#A \leq \#P(\mathbb{R})$$

\uparrow se demuestra con aritmética de cardinales.

Veamos que

$$\#A \stackrel{?}{=} c$$

Por eso

$$\#A \stackrel{?}{\leq} c \quad (\text{ya sé que } \#A \geq c)$$

Definimos

$$\psi : A \rightarrow \{f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}\} =: B$$

$$f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$$

Afirmo:

ψ es inyectiva

Basta ver que

$$\# B \stackrel{?}{\leq} c$$

Dem :

$$\text{Seja } f, g \in A \mid \varphi(f) = \varphi(g)$$

$$\text{ie. } f(x) \stackrel{?}{=} g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Seja } y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vamos (em Pr.1)}$$

$$\exists (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Q} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

∴

$$f(y) = f(\lim x_n)$$

$$\begin{array}{c} = \lim f(x_n) \\ \uparrow \\ f \text{ cont} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} = \lim g(x_n) \\ \uparrow \\ x_n \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} = g(\lim x_n) \\ \uparrow \\ g \text{ cont} \end{array}$$

$$= g(y)$$



Sez

$$\mathcal{B} = \{ f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Sez

$$\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Biyección}$$

Ley exponencial

$$\Rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \{ g : \mathbb{Q} \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \} \quad (\star)$$

$$f \mapsto \psi^{-1} \circ f$$

$$(\star) \rightarrow \{ h : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \}$$

$$g \mapsto \left((q, n) \mapsto (g(q))(n) \right)$$

↑ me que do
con el n-ésimo

$$\left(q \mapsto \left(n \mapsto h(q, n) \right) \right) \longleftrightarrow h$$

Ley Exponencial (general)

$$(A^{\mathcal{B}})^{\mathcal{C}} \sim A^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}$$

Vimos que

$$\exists \gamma: \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

↖ puer
numerables

$$\rightarrow \{k: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

$$h \mapsto h \circ \gamma^{-1}$$

↑
Vimos



