1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Denotemos

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Probar que E es un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq S$ converge.

$\Rightarrow$) Hp: E es un espacio de Banach:

- E es completo

$\Rightarrow$ Toda sucesión de Cauchy $(y_n)_n \subseteq E$ converge en E

Como $S \subset E$

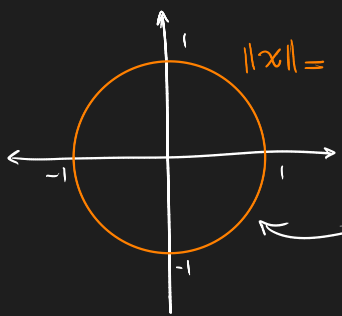
$\Rightarrow$ Toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n \subseteq S \subset E$ converge ✓

$\Leftarrow$) Hp: Toda sucesion $(x_n)_n$ de Cauchy en S converge

donde:

$$S = \{ x \in E : \|x\| = 1 \}$$

ej: S si $E = \mathbb{R}^2$, $x \in E$



$\|x\| = 1$

Suc. de Cauchy sobre la circunferen. (solo el borde!)

Por H6, a partir de un n_0,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

$\Rightarrow$ Toda sucesión de Cauchy en S converge en S $\leftarrow$ ¿hace falta justificar?

$\Rightarrow$ S es completo

¿Cómo llego a que E es completo?

2. Consideremos la serie

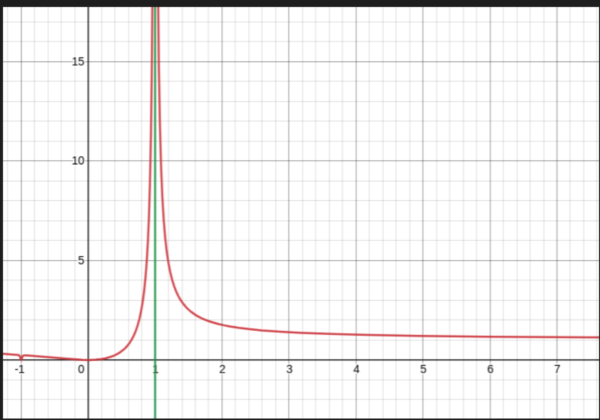
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}.$$

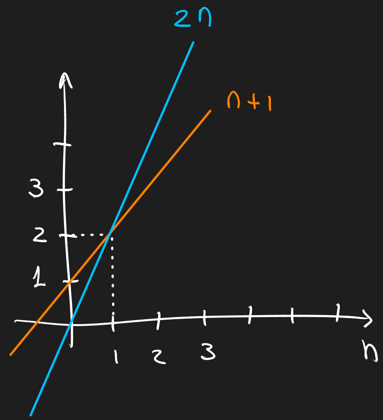
(a) Probar que converge uniformemente en $[a, +\infty)$ para todo $a > 1$.

(b) ¿Es uniforme la convergencia en $(1, +\infty)$?

$x > 1$

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$$





a partir de $n = 1$:

$$2n > n+1$$

$$\Rightarrow x^{2n} > x^{n+1} \quad \forall x > 1, \ \forall n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} < \frac{1^{n+1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$$

1 es inf. de $(1, +\infty)$

- pues si $x > 1$, el denominador crece en mayor proporción que el numerador (pues son exponenciales)

Ahora, cuando sumo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} = \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}} + \underbrace{\frac{x^3}{1+x^4}} + \underbrace{\frac{x^4}{1+x^6}} + \cdots$$

si $x = 1$

$$\Rightarrow f(1) \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} \overset{x>1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^n}\cdot x}{\cancel{x^n}\cdot\left(\frac{1}{x^n}+x^n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\cdot\left(\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n-1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1+x^{2(n-1)}}{x^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n-2}}$$

3. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. Probar que el conjunto

$$E = \{x \in [0,1] : (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ converge}\}$$

es medible.

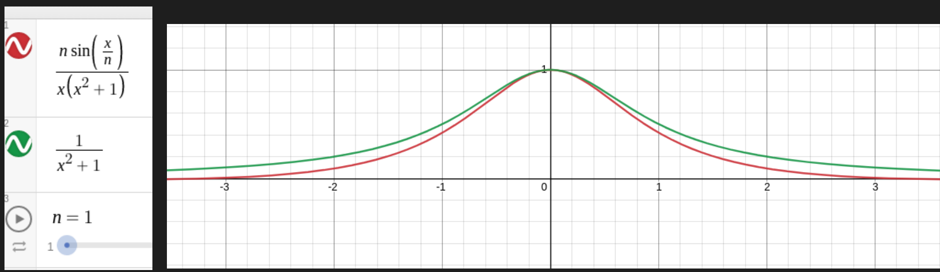
$(f_n(x))$ converge $\iff$ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{\lim_{N\to\infty} S_N(x)}$ converge

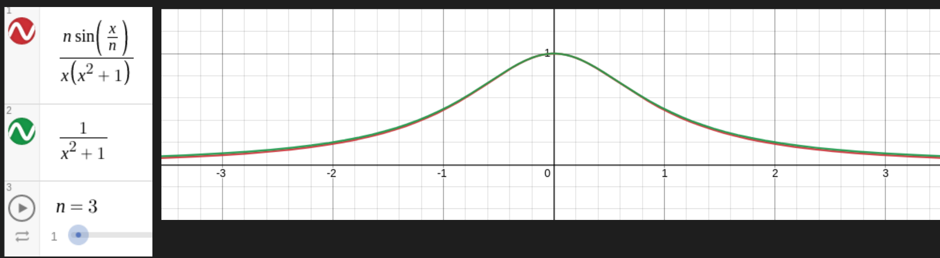
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

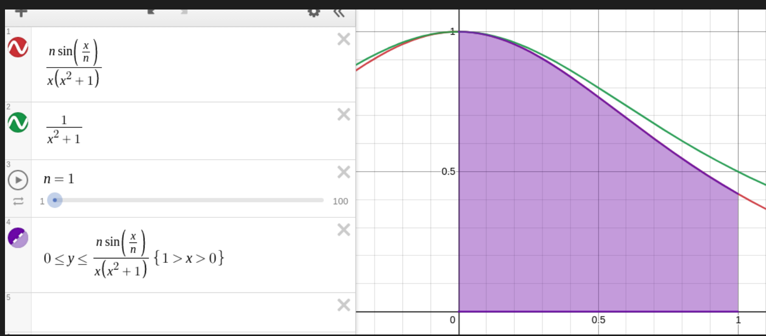
4. Calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}\frac{n\sin(x/n)}{x(x^2+1)}\,dx.$$

$$\left|\frac{n\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}^{<\frac{x}{n}}}{\underbrace{x}_{\geq 0}\underbrace{(x^2+1)}_{\geq 1}}\right| \leq \left|\frac{\cancel{n}}{\cancel{x}\cdot(x^2+1)}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{n}}\right| = \frac{1}{x^2+1}$$







$$\lim\int\square = \int\lim\square \ ?$$

Criterio de Weierstrass $f_n: X\longrightarrow\mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n\geq 0$ tal que $\boxed{|f_n(x)|\leq c_n}$ para todo $x\in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en $\mathbb{R}$.

$x \in [0,1] \Rightarrow 0 < \sin x < 1$

$$\left| \underbrace{\frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}}_{=:g_n(x)} - \frac{1}{x^2+1} \right| = \left| \frac{\overset{\geq 1}{n} \cdot \sin\left(\overset{0<x<1}{\frac{x}{n}}\right) - x}{x(x^2+1)} \right|$$

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right| = 0$$

en el límite, $\sin \frac{x}{n}$ y $\frac{x}{n}$ son iguales

por lo que la cota mejora cuando $n \to \infty$

$$\leq \left| \frac{\cancel{n} \cdot \frac{x}{\cancel{n}} - x}{x(x^2+1)} \right| = 0$$

$\therefore$ $\dfrac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}$ converge puntualmente a $\dfrac{1}{x^2+1}$.

Llamo

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Como

$$0 < \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} \leq f(x) \leq 1$$

$$g_n(x) \leq f(x)$$

Teorema (Convergencia mayorada para no negativas)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0,1]$ tales que $g_n(x) \leq \phi(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$, donde ϕ es una función integrable. Supongamos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Entonces, f es integrable

$$\boxed{\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.}$$

Con el otro teo sale mejor creo (Conv. monótona)

Por Teorema de Convergencia mayorada para no negativas

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{n.\sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)}\, d\mu = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+x^2}\, d\mu$$

¿Puedo usar Rieman acá?

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = tg(x)\Big|_0^1$$