Sun 23/May

Práctica 6

1. Probar que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en $\mathbb{R}^n$, donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Para ser norma:

$\|\circ\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ✓

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2) $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\|$

3) $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$

Dem:

1) $\sum |x_i + y_i| \leq \sum |x_i| + |y_i|$

$$= \underbrace{\sum |x_i|}_{\|x\|} + \underbrace{\sum |y_i|}_{\|y\|} \quad ✓$$

2) $\sum |\lambda x_i| = \sum |\lambda| . |x_i|$

$= |\lambda| \sum |x_i|$ ✓

3) $\sum |x_i| = 0 \iff$ Todo x_i es cero : $x = (0,0,\dots,0)$

$\therefore x = \vec{0}$ ✓

Finalmente, como cumple $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$

$\|\cdot\|_1$ es norma.

$$\|\cdot\|_2 = \left(\sum (x_i)^2\right)^{1/2}$$

Lo pruebo para $\|\cdot\|_2^2$

$\boxed{1}$: $\sum (x_i - y_i)^2 \leq \sum x_i^2 + y_i^2$

$$= \underbrace{\sum x_i^2}_{\|x\|_2^2} + \underbrace{\sum y_i^2}_{\|y\|_2^2}$$

$$\sqrt{\sum x_i^2 + \sum y_i^2} \leq \sqrt{\sum x_i^2} + \underbrace{\sqrt{\sum y_i^2}}_{\|y\|_2}$$

$\sqrt{4+4} = \underbrace{2\sqrt{2}}_{<2} \leq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 \cdot 2$

$\|x - y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ ✓

$\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ igual que $\|\cdot\|_1$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_2$ es norma.

3) $$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\boxed{1}$ $$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + |y_i|$$

$$= \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|}_{\|x\|_\infty} + \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |y_i|}_{\|x\|_\infty} \quad ✓$$

$\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ igual que antes.

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_\infty$ es norma.

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

(a) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\times : \mathbb{R} \times E \to E$ son continuas.

(b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

(c) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

(d) Si $y \in B(x,r)$ entonces para todo $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in B(x,r)$ (es decir, la bola es *convexa)*.

Funciones continuas en espacios normados

$\delta = \delta(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists \delta > 0 \ /$

si $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

En el ejercicio, $+$ y $\times$ es la "f"

$+ : E \times E \longrightarrow E$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /$

si $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$

$$\Rightarrow \|\underbrace{(x_1 + y_1)}_{+(x_1, y_1) = x_1 + y_1} - (x_2 + y_2)\| < \varepsilon$$

$$\| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \| = \| (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \|$$

$$\leq \| x_1 - x_2 \| + \| y_1 - y_2 \| \quad \checkmark$$

$$\| (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \| = \| x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{desig} \\ \text{Triang}}}{\leq} \| x_1 - x_2 \| + \| y_1 - y_2 \| \quad \checkmark$$

Producto

$$\times : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

$$\| (a, y_1) - (b, y_2) \| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \underbrace{a \cdot y_1}_{\text{"}f(a, y_1)\text{"}} - b \cdot y_2 \| < \varepsilon$$

$$\| a \cdot y_1 - b \cdot y_2 \| \leq \| a \cdot y_1 \| + \| b y_2 \|$$

$$= |a| \cdot \|y_1\| + |b| \cdot \|y_2\| \quad \checkmark$$

(b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

$$B(x,r) = \{ y \in E : \|x - y\| < r \}$$

$\subseteq$) Sé

$$B(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$$ ← el cerrado más chico que contiene a $B(x,r)$

y

$$B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r)$$

$$\Rightarrow \overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r) \quad \checkmark$$

$\supseteq$) $$\overline{B}(0,1) = B(0,1) \cup \partial B(0,1) \overset{?}{\subseteq} \overline{B(0,1)}$$

- $B(0,1) \subseteq \overline{B(0,1)}$ ✓
- $\partial B(0,1) \overset{?}{\subseteq} \overline{B(0,1)}$

Armo

$$(x_n) \subseteq B(0,1) \;/\; \underbrace{x_n \longrightarrow x}_{\|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0} \in \partial B(0,1)$$

$\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$

$\subseteq$) ✓ (VALE EN MÉTRICOS)

$\supseteq$) $\underbrace{y \in \overline{B}(x,r)}_{\Updownarrow \; \|y - x\| \le r}$ q.v.q. $y \in \overline{B(x,r)}$

$\|y - x\| \le r$ $\begin{cases} \|y - x\| < r & \checkmark \\ \|y - x\| = r & ? \end{cases}$

IDEA: armar $x_n \in B(x,r) \;/\; x_n \overset{\text{" "}}{\longrightarrow} y$.

← Dibujito. Usar que es e. mét.

prod escalar por sucesión ?

obs: $\|z\|=1$ $\quad (1-\frac{1}{n})z \in B(0,1)$

pues $\|(1-\frac{1}{n})z\| = |1-\frac{1}{n}| < 1$

por ej 2 a) $\quad (1-\frac{1}{n})z \to z$

Pero como

$$(x_n) \subseteq B(0,1)$$

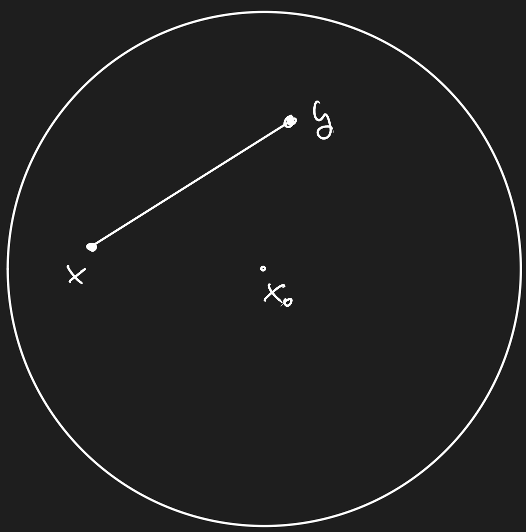
$$y \; x_n \longrightarrow x$$

$\Rightarrow$ x debe estar en $\overline{B(0,1)}$

y como por def. de (x_n), $x \in \partial B(0,1)$

$$\Rightarrow \partial B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$$

$\blacksquare$



(c) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

$$B(x,r) = \{ y \in E : \| x - y \|_E < r \}$$

$$\operatorname{diam}(B(x,r)) = \sup \{ \| x - y \|_E : x, y \in B(x_0, r) \}$$

Como estoy en espacio normado:

$$\operatorname{diam}(B(0,1)) = \sup \{ \|x - y\|_E : \underbrace{x, y \in B(0,1)}_{\text{def. de Bola}} \}$$

¿Siempre puedo proceder así? $B(x,r)$ a $B(0,1)$

$$\| x \|_E < 1$$
$$\| y \|_E < 1$$

Uso razo. de Camilo

$\leq$) $\operatorname{diam}(B(0,1)) \overset{?}{\leq} r$

$$B(0,1) = \{ y \in E : \|y\|_E < 1 \}$$

?

$$\sup \{ \| z - y \|_E : y, z \in B(0,1) \} = 2$$

$\geq$) $\| z - y \| \underset{\substack{\text{desig.} \\ \text{Triang.}}}{\leq} \| z - x \| + \| x - y \|$

$$\| z - y \| \leq \| z \| + \| y \|$$

$$< 1 + 1 = 2$$

$$\|z - y\| < 2$$

Por ej 15b de Pr. 3

$$\operatorname{diam}(B(0,1)) = \operatorname{diam}(\overline{B(0,1)})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 2b}}{=} \operatorname{diam}(\overline{B}(0,1))$$

Falta ver que el diámetro se alcanza:

Sea $v, -v \in \overline{B}(0,1)$ / $\|v\| = \|-v\| = 1$

$$\Rightarrow \quad r.v + x \in B(x,r)$$

y

$$-r.v + x \in B(x,r)$$

$$\Rightarrow \|r.v + x - (-r.v + x)\| = \|2rv\|$$

$$= 2r.\|v\|$$

$$= 2r \quad \checkmark$$

$\boxtimes$

llamo x_0

(d) Si $y \in B(x, r)$ entonces para todo $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in B(x,r)$ (es decir, la bola es *convexa*).

¿no habría que distinguir el x del centro con el x del segmento?

$$tx + (1-t).y = t(x-y) + y$$

$$\| t(x-y) + y - x_0 \| = \| tx - ty + y - x_0 \|$$

$$= \| tx - ty + y - x_0 + t.x_0 - t.x_0 \|$$

$$= \| t.(x - x_0) + (1-t)(y - x_0) \|$$

$$\leq \| t.(x-x_0) \| + \| (1-t)(y-x_0) \|$$

$$= t. \underbrace{\| (x-x_0) \|}_{<r} + (1-t) \underbrace{\| (y-x_0) \|}_{<r}$$

pues $x, y \in B(x_0, r)$

$$< t.r + (1-t).r = r$$

$$\underbrace{\| t(x-y) + y}_{} - \underbrace{x_0}_{} \| < r$$

La dist. entre el segmento y x_0 es menor al radio de la bola

$$\therefore t(x-y) + y \in B(x_0, r) \quad \boxtimes$$

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Probar que si definimos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.

$$x_n \longrightarrow x_0$$

$$\| x_n - x_0 \| \longrightarrow 0$$

$$y_1 = \frac{x_1}{1}, \quad y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\| y_n - x_0 \| = \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - x_0 \right\|$$

$$= \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n.x_0}{n} \right\|$$

$$\text{Si } x_n \longrightarrow x_0$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n} = 1$$

continua

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_0 = n.x_0$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n.x_0}{n} \right\| \longrightarrow \frac{n.x_0 - n.x_0}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = x_0 \quad \blacksquare$$

Preguntar Proced.

$$\overbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots}^{n_1} \Big| \overbrace{\cdots + x_{n-1} + x_n}^{4}$$

se parece a x_0

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_{n-1} + x_n}_{n}$$

EJERCICIO: si $y_1, \dots, y_m \in B(x, \varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{y_1 + \cdots + y_m}{m} \in B(x, \varepsilon).$$

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists\, x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0\le t\le 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\, dt.$$

(a) Probar que $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ son espacios de Banach.

(b) Probar que ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el item anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n **para todo** $n \in \mathbb{N}$?

a) Espacio de Banach: E es espacio vectorial <u>completo</u> y normado.

$(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$: ev?

↳ Sí, con base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

completo?

↳ Todo esp. normado de dim $< \infty$ es Completo

es $\|\cdot\|_\infty$ una norma?

↳ Veo: $\begin{cases} \cdot \text{ Triangular} \\ \cdot \text{ Prod escalar} \\ \cdot\ 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \end{cases}$

Completo?

Todo esp. norma de dim $< \infty$ es Completo

$\dim\left(\text{base } \{1, x, x^2, \dots, x^n\}\right) = n+1 < \infty$ ✓

$\mathbb{R}_n[t]$ es Completo.

Es norma ?

- $$\max_{0 \leq t \leq 1} |p(t) - q(t)| \leq \max |p(t)| + |q(t)|$$

$$= \max |p(t)| + \max |q(t)| \quad \checkmark$$

- $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ salen como con $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^n$

$\blacksquare$

Ahora con

$$\|p(t)\|_1 = \int_0^1 |p(t)| \, dt$$

- Desig Triang.

$$\int_0^1 |p(t) - q(t)| \, dt \leq \int_0^1 |p(t)| + |q(t)| \, dt$$

$$= \|p(t)\|_1 + \|q(t)\|_1 \quad \checkmark$$

- $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ salen igual.

$\blacksquare$

b) Normas equiv si

$$\exists\, c, \tilde{c} \in \mathbb{R} \;/$$

$$c \cdot \|\ \|_a \leq \|\ \|_b \leq \tilde{c}\, \|\ \|_a$$

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\, dt.$$

$\|p\|_\infty \leq \|p\|_1$ per $\|p\|_\infty = |p(t)|$ para algún t ✓

Falta:

$$\int_0^1 |p(t)|\, dt \leq \int_0^1 \max |p(t)|\, dt = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \cdot \int_0^1 dt$$

$$\int_0^1 |p(t)|\, dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|$$ ✓

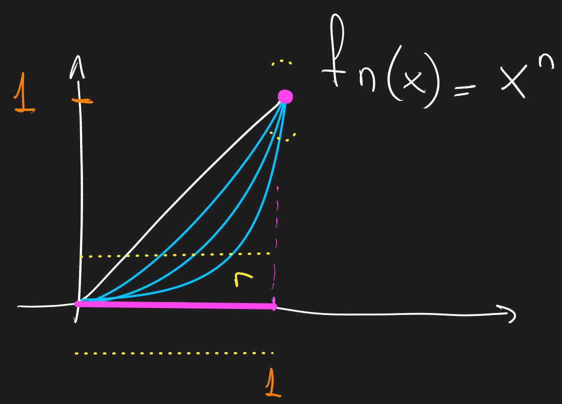
$\therefore$ son equiv.

$\blacksquare$

c) El problema aparece cuando los polinomios pueden tener grado infinito?

Porque t sigue estando entre 0 y 1, con lo que los polinomios siguen estando acotados por mas que el grado del polinomio sea muy grande

?



$\Leftrightarrow \exists\ c_1, c_2 \ / \ \forall p \in \mathbb{R}_n[t]$

(*) $c_1 \|p\|_\infty \leq \|p\|_1 \leq c_2 \|p\|_\infty$

COMO ESTO VALE $\forall n$,

$\forall p \in \mathbb{R}[t]$,

$c_1 \|p\|_\infty \leq \|p\|_1 \leq c_2 \|p\|_\infty$

¿dónde está el error en el razonamiento?

c_1 y c_2 en (*) DEPENDEN DE n

6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Probar que la bola de ℓ^∞ no es compacta.

(b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞.

a) Como es espacio normado

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a}}{B(0}, \underset{\substack{\uparrow \\ r}}{1)} = \{ \underset{\substack{\| \\ \therefore \\ b}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \ell^\infty : \underbrace{\|b\|}_{\|0-b\|} < 1 \}$$

en espacios normados

Compacto $\Rightarrow$ cerrado y acotado

Como las sucesiones son acotadas.

$\Rightarrow$ debo probar que $B(0,1)$ no es cerrada

Armo sucesiones que tiendan a algo fuera de $B(0,1)$

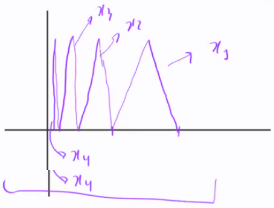
$$\|b\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n|$$

$$(b_n) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \notin B(0,1)$$

$\therefore B(0,1)$ no es cerrada

Creo que no vale por ser dim ∞ ?

6) ℓ^∞ EN $C[0,1]$, $\overline{B}_{C[0,1]}$ NO COMPACTA.



$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| = \|x_n - x_m\|_\infty = 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

2/3

$\Rightarrow (x_n)_n \subset \overline{B}_{C[0,1]}$ NO tiene subsuc. conv.

6 a) buscar una suc. en $\overline{B}_{\ell^\infty}$ / $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ $\forall n \neq m$.

$\Rightarrow B(0,1)$ no es compacta.

b) ?

$\forall n \neq m$

6 b). A denso en $E \iff \overline{A} = E$.

$\iff$ la bola centrada en cualquier $x \in E$ de cualquier radio r tiene un elem. de A.

Si encontramos NO numerables bolitas disjuntas en $E \Rightarrow$ cualquier denso tiene que ser NO NUMERABLE ¿POR QUÉ?