Sugerencia:

Daniel Carando 6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.
Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

6:23 PM

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y),(3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.
Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε, tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED) 6:28 PM

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en $\mathbb{R}$ es la d_1, pero en realidad también es la d_2:
$d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t)$.
También es la d_∞, claro.

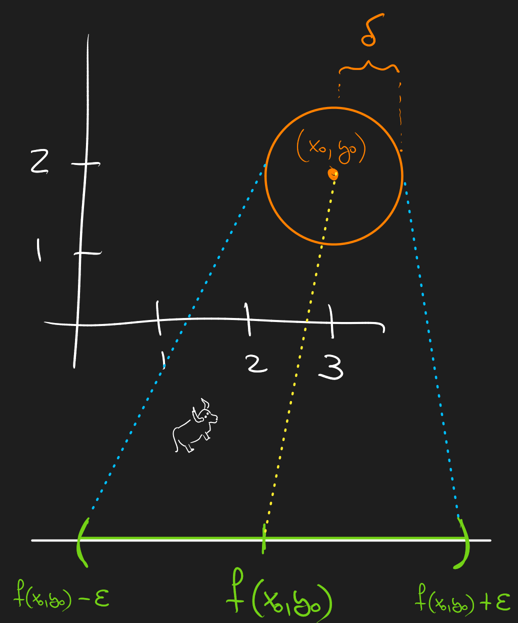
Pruebo que es continua en el $(3,2)$

Def. de f continua $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$f\big(B((x_0,y_0),\delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0,y_0),\varepsilon\big)$$

Lo pruebo en $(x_0,y_0) = (3,2)$



Sea

$$(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$$

me fijo solo en:

$$(x,y) \in B((3,2),\delta)$$

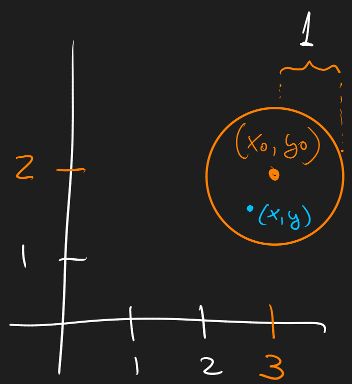
$$(x,y) \in \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(3,2)) < \delta\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$

Si $\delta = 1$:

$$(x,y) \in \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(3,2)) < 1\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x,y)$, o sea

quiero que

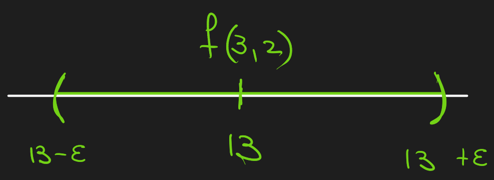
donde veo continuidad ↓

$$f(x,y) \overset{?}{\in} B(f(3,2), \varepsilon)$$

$$\in \{c \in \mathbb{R} : \underbrace{d(c, \underbrace{f(3,2)}_{3^2+2^2})}_{|c-13|} < \varepsilon\}$$

$$= |f(a,b) - f(3,2)|$$

$$= |a^2 - 3^2 + b^2 - 2^2|$$



Daniel Carando (EDITED) 6:48 PM

Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0). Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$.
Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dés que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1.
Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, proque ε puede ser arbitrariamente chico.
Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ, sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces
$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$
Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1. Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2((x,y),(3,2)) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio:

quiero

$$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

En donde:

$$(x^2 - 3^2) = (x+3)\underbrace{(x-3)}_{< \delta_1 = 1}$$

Como $d(x,3) < 1$

$\Rightarrow x = 3 \pm d(x,3)$

$< 3 + 1 = 4$

$x < 4$

$\Rightarrow x + 3 < 7$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

$$(y^2 - 2^2) = \underbrace{(x+2)}\underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$$

Como $d(x,2) < \delta_1 = 1$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x,2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x + 2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero acotar todo por ε

$$12\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3,2)$

que resulta ser $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{12}\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

$$f\Big(B\big((3,2), \delta\big)\Big) \subseteq B\big(f(3,2), \varepsilon\big)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\big((x,y), (x_0,y_0)\big) < \delta_1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio:

quiero

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| = \left|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2\right| \leq \left|x^2 - x_0^2\right| + \left|y^2 - y_0^2\right|$$

En donde:

$$(x^2 - x_0^2) = \underbrace{(x + x_0)}\underbrace{(x - x_0)}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x = x_0 \pm d(x, x_0)$$
$$< x_0 + \delta$$
$$\Rightarrow x + x_0 < x + x_0 + \delta$$

acá ya no puedo usar 1

$$\Rightarrow (x^2 - x_0^2) < (x + x_0 + \delta) \cdot \delta$$

Mismo procedimiento para

$$(y^2 - y_0^2) < (y + y_0 + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< (x + x_0 + \delta) \cdot \delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< (y + y_0 + \delta) \cdot \delta}$$

$$< x \cdot \delta + x_0 \cdot \delta + y \cdot \delta + y_0 \cdot \delta + \delta^2$$

$$= \delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2$$

Quiero

$$\delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2 < \varepsilon$$

? Acá no puedo despejar delta, por lo que CREO que debería suponer algo de delta para acotar por encima por algo más fácil de despejar?