Sat 22 May

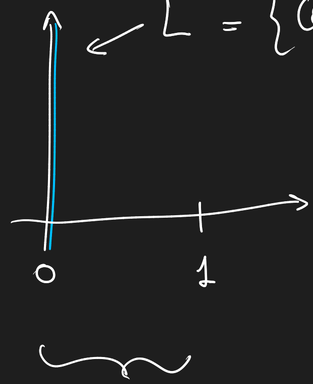
Espacios de Hilbert

(con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$)

"Hay normas más naturales que otras"

ej) $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$

$L = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ = "eje y"



¿Cuál es el pto de L más cercano a $(1,0)$?

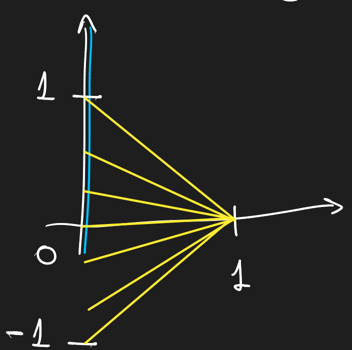
Pero! $d = \|\ \|_\infty$

$$\|(1,0) - (0,0)\|_\infty = \text{máx}\{1, 0\} = 1$$

$$\|(1,0) - (0,y)\|_\infty = \text{máx}\{1, |y|\} \geq 1$$

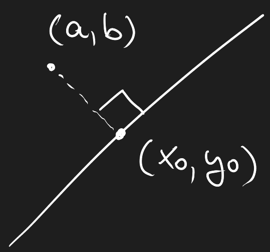
Vemos que para $|y| \leq 1$

$$\|(1,0) - (0,\tfrac{1}{2})\|_\infty = \max\{1, \tfrac{1}{2}\} = 1$$



Todo $[-1,1]$ dista 1 del $(1,0)$

Esto no pasa con $\| \ \|_2$:



Siempre $\exists$ un pto de la recta más cercano a (a,b)

Pues

$$\|(x,y)\| = \langle (x,y),(x,y) \rangle^{1/2}$$

$$= (x^2+y^2)^{1/2}$$

En $\mathbb{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

$$\|u\|_2 = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

Definición

Sea H espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *producto interno* sobre H es una a función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades.

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$ y $\underbrace{\langle x, x \rangle = 0}_{\in \mathbb{R}}$ si y solo si $\underbrace{x = 0}_{\in H}$.

(2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $x, y, x \in H$.

(3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in H$. ← Simetría (en $\mathbb{C}$ es distinto)

Propiedades Dem: uso (3) y llego a (2)

- $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \cdot \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle$

- Si $x, y \in H$ cumplen :

$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \quad \forall z \in H$$

$$\Rightarrow \quad x = y$$

Dem:

$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = 0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \langle x-y, z-z\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x-y, 0\rangle = 0$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad \boxtimes$$

El par $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se llama espacio con producto interno.

¿y la distancia?

Ejemplos: ① EN $\mathbb{R}^n$: $\begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_n) \\ y = (y_1, \ldots, y_n) \end{array}$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

② $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ INVERSIBLE.

$$(x, y)_A = \langle Ax, Ay\rangle$$

P.I DE ①

EJ: VER QUE ES P.I.

← de la práctica.

Ejemplos:

(3) $C[0,1]$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

es un P.I.

(4) En $\ell^2 = \{ a = (a_n)_n \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \}$

$\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

$\underbrace{\langle a, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{si } a,b \in \ell^2 \Rightarrow \text{ la serie converge.}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$

Proposición

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces:

(1) $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ para todo $x, y \in H$. ← Desigualdad de Cauchy-Schwarz

(2) La función $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

es una norma sobre H.

EJERCICIO: $\langle \underset{\uparrow H}{0}, g\rangle = \underset{\uparrow \mathbb{R}}{0} \quad \forall g \in H$

DEM (1): $x = 0$:

$\langle 0, g\rangle^2 = 0 \qquad \langle 0, 0\rangle \langle g, g\rangle = 0$

LISTO.

$x \neq 0$ | q.v.q. $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$. | Para $t \in \mathbb{R}$

$$0 \le \langle tx-y,\, tx-y\rangle = t^2\langle x,x\rangle - t\langle x,y\rangle - t\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle.$$

$$= \underbrace{\langle x,x\rangle}_{a>0} t^2 \underbrace{-\,2\langle x,y\rangle}_{b} t + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{c} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

CUADRAT. < 0.

$\Rightarrow$ la cuad. tiene 0 o 1 raíz real.

$\Rightarrow b^2 - 4ac \le 0 \Rightarrow 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \le 0$

$\Rightarrow \cancel{4}\langle x,y\rangle^2 \le \cancel{4}\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ ✓

(2) $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ ES UNA NORMA.

EJERCICIO. (SUG: p/ TRIANGULAR

$$\|x+y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$$

Definición

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. (desigualdad Δ)

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2$ ✓

pues difieren en $2\|x\|\|y\| > 0$

2) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2}$

CA

$\langle \lambda . x, \lambda x \rangle = \lambda . \langle x, \lambda x \rangle$

$= \lambda^2 . \langle x, x \rangle$

$= \left(\lambda^2 . \langle x, x \rangle \right)^{1/2}$

$= |\lambda| \langle x, x \rangle^{1/2}$ ✓

Obs

C-S: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 . \|y\|^2$

not sure.

$\Rightarrow$ Cauchy - Schwartz

$\langle x, y \rangle \leq \|x\| . \|y\|$

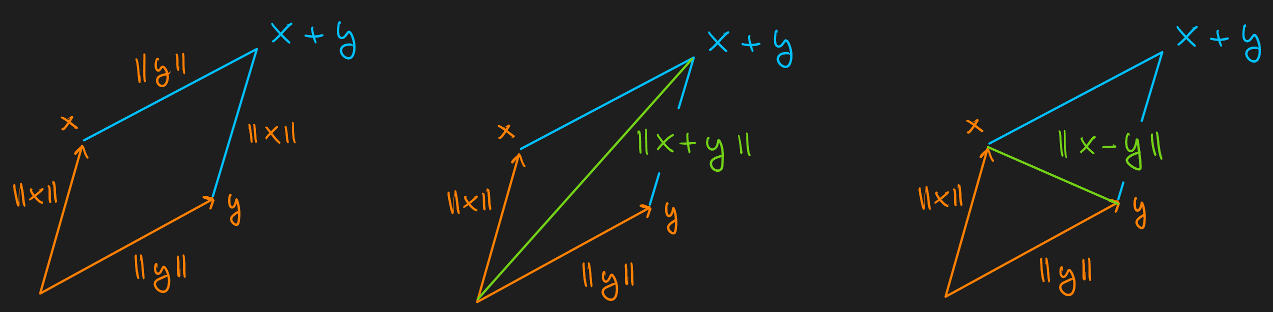
Llamamos Norma inducida a

- $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

Identidad del paralelogramo
Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo $x, y \in H$.



EJERCICIO (GUÍA)
Si una norma cumple (*)
$\Rightarrow$ ESTÁ DADA POR UN P.I.

Proposición
Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y fijemos $v \in H$. Entonces la función $\gamma_v : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada sobre H.
Además, vale que $\underbrace{\|\gamma_v\|}_{\text{Norma de operador}} = \underbrace{\|v\|}_{\text{Norma de vector}}$.

Norma de vector

Norma de operador :

Se define la norma del operador T como la constante de Lipschitz de T:
$\|T\| = \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X \right\}$

Ej:

$v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

$\Rightarrow \| \langle x, v \rangle \| = \| v \| = \sqrt{7}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^7$?

$x \in \mathbb{R}^7$, $v \in \mathbb{R}^7$

? ó

γ_v es Lineal:

γ_v LINEAL: $\gamma_v(x+y) = \langle x+y, v \rangle =$
$= \langle x, v \rangle + \langle y, v \rangle$
$= \gamma_v(x) + \gamma_v(y)$

✓

$\gamma_v(\lambda x) = \langle \lambda x, v \rangle = \lambda \langle x, v \rangle$
$= \lambda \gamma_v(x)$

✓

γ_v es acotada:

$\sup_{\|x\| \le 1} |\gamma_v(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, v \rangle| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|x\| \|v\| = \|v\|$
C-S

$\therefore$ γ_v es acotada y $\|\gamma_v\| \le \|v\|$.

EJERCICIO: ver que $\|\gamma_v\| \ge \|v\|$ (SUG.: $v \neq 0$ calcular $\gamma_v(v)$)

$\gamma_v(v) = \langle v, v \rangle$

qvq

$\|\gamma_v\| \overset{?}{\geq} \|v\|$

Si $v = \vec{0}$:

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\vec{0}}(\vec{0}) = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0 = \|\overset{\vec{0}}{v}\| \quad \checkmark$$

Si $v \neq \vec{0}$:

$$\Rightarrow \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \left\langle v, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\|v\|}$$

$$= \frac{\|v\|}{\|v\|}$$

$$\gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left\| \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1$$

$$y \quad \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1 \qquad ?$$

Cómo probé esto?

$v \in H$, $\rightarrow$ $\boxed{\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle}$

$\|\gamma_v\| \leq \|v\|$ (c-s)

EJ: $\|\gamma_v\| \geq \|v\|$

$\Rightarrow \|\gamma_v\| = \|v\|$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \left\{ c \,/\, \|Tx\| \leq c\|x\| \ \forall x \in E \right\}$$

Un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene definida una norma y, por lo tanto, una distancia.

H con $PI \rightsquigarrow H$ normado $\rightsquigarrow H$ métrico

Definición
Un espacio con producto interno que es completo con la norma inducida se llama espacio de Hilbert.

Espacio de Hilbert $\longrightarrow$ Espacio de Banach
(con norma dada por $\langle P.I. \rangle$)

David Hilbert
(1862-1943)

Teorema de representación de Riesz
Sea H un espacio de Hilbert. Si $\gamma : H \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal continua, entonces existe un único $v \in H$ tal que

$$\gamma(x) = \langle x, v \rangle$$

para todo $x \in H$. Además, vale que $\|\gamma\| = \|v\|$.

Frigyes Riesz
(1880-1956)

Todas las funciones lineales (continuas) son equivalentes a hacer prod. interno con un vector fijo.

EXISTENCIA : NO LA VEMOS
UNICIDAD : EJERCICIO.

Dem: (mía)

Sean v_1 y $v_2 \in H$ /

$$\gamma_{v_1}(x) = \langle x, v_1 \rangle \quad \forall x \in H$$

$$\gamma_{v_2}(x) = \langle x, v_2 \rangle \quad \forall x \in H$$

y además vale

$$\|\gamma_{v_1}\| = \|v_1\|$$

$$\|\gamma_{v_2}\| = \|v_2\|$$

?