Dani

Viernes 23 Abr
(sí, me atrasé ¡!)

Espacios Métricos 4

Repaso

Definición
Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x.

Definición
El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Obs:

Si x no es punto de acumulación de A

$\Rightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \cap A = \emptyset$

ó

$B(x,r) \cap A = \{x\}$

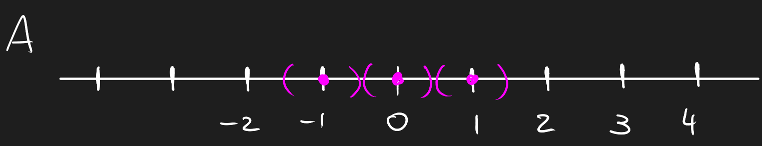
Esto nos lleva a definir:

Def :

> **Definición**
> Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Ejemplos

1) $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ } Todo punto de A es aislado



$$B(x, \tfrac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} = \{x\} \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$

Para cualquier
Bolita de radio $\leq 1 \in \mathbb{R}$

2) Si $A = \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ no tiene puntos aislados

3) Pensar : $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

Rta : Todos puntos aislados menos el cero (pues allí converge)

Pensar
En $\bar{A}$ están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A. ¿Será cierto que $\bar{A}$ es la unión de los puntos de acumulación de A y los puntos aislados de A?

Sucesiones y Clausura

Def:

Decimos que una sucesión

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$

si:

distancia del EM.

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \underbrace{d(x_n, x) < \varepsilon}_{x_n \in B(x,\varepsilon)} \quad \forall n \geq n_0$$

Obs:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ en } (E,d) \iff d(x_n,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

Dem: Hacer!

Proposición
Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:
(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos distintos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x$

i) $\Rightarrow$) $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Tomo

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B(x, \tfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\, a_n \in B(x, \tfrac{1}{n}) \cap A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n)_n \subset A,$$

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

equivalentemente

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) Sabemos que

$$\exists\, (a_n)_n \subset A \ / \ \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

Dado $r > 0$,

$$\exists\, n_0 \ / \ d(a_n, x) < r \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow a_{n_0} \in B(x, r)$$

y además

$$a_{n_0} \in A \quad (\text{pues } (a_n)_n \subset A)$$

$$\Rightarrow a_{n_0} \in A \cap B(x,r)$$

$$\Rightarrow A \cap B(x,r) \neq \emptyset$$

o sea que

$$x \in \overline{A}$$

$\blacksquare$

ii) Ejercicio: Probar.

Tip: Hacer primero la vuelta.

Ejercicio
Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$. Son equivalentes:
(a) A es cerrado
(b) Para toda sucesión $(a_n)_n \subset A$ que converge a un $x \in E$ se tiene que x pertenece a A.

Sucesiones de Cauchy.

Def

Un conjunto $A \subset E$ es acotado si

$$\exists\, x \in E \wedge \exists\, r > 0 \;/\; A \subset B(x, r)$$

Def

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice acotada si

$$\exists\, x \in E \wedge \exists\, r > 0 \;/\; x_n \in B(x, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

equivalentemente, si

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado

Recordemos que

Si $(x_n)_n$ es convergente $\Rightarrow \exists \underbrace{x \in E}_{} \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = x$

queremos otra def que no dependa del límite.

¿Podemos saber si una suc. converge mirando solamente los elementos de la sucesión?

(ie: no depender del límite x)

Rta: Casi...

Sucesión de Cauchy

Idea:

Si a partir de cierto punto, todos los elementos estén muy cerca del límite (def. usual)

$\Rightarrow$ ¿Bastaría con pedir que a partir de algún n_0 todos los elementos estén cerca entre sí?

Def:

Una suc. $(x_n)_n$ se dice **de Cauchy**

si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \text{si } n, m \geq n_0$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Ejemplos

1) Toda suc. convergente es de Cauchy

Notar que

- Siempre las suc. convergentes son de Cauchy
- Pero no siempre vale la vuelta.

2) En $\mathbb{R}$: Cauchy $\equiv$ Convergente

Teorema

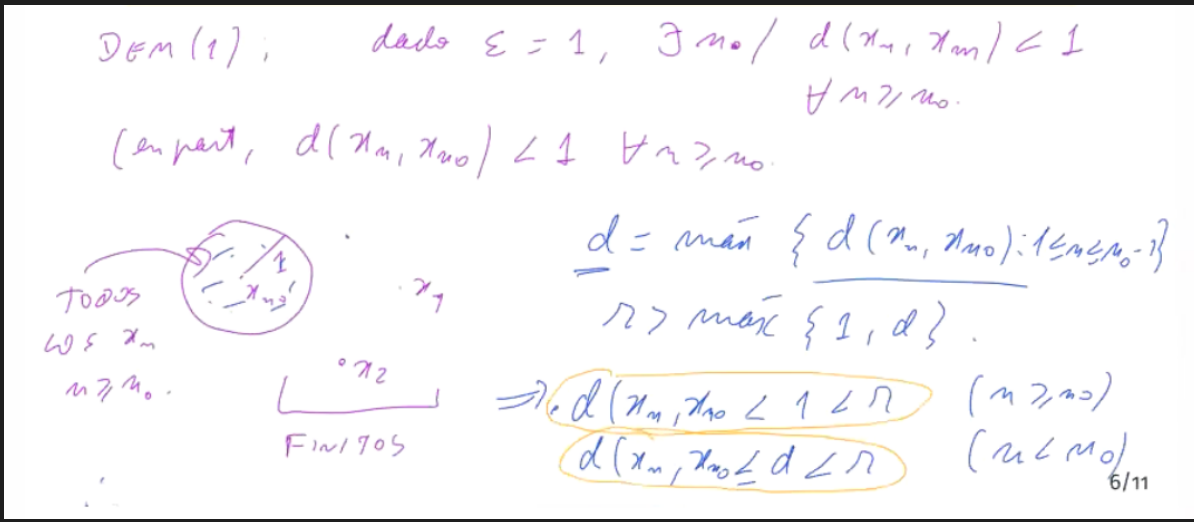
Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Dem. de cada:



DEM (1): dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0 /\ d(x_n, x_m) < 1$ $\forall\, n \geq n_0$.

(en part, $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ $\forall\, n \geq n_0$.

$d = \max \{ d(x_n, x_{n_0}) : 1 \leq n \leq n_0 - 1 \}$

$r > \max \{1, d\}$.

$\Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) < 1 < r$ $(n \geq n_0)$

$d(x_n, x_{n_0}) \leq d < r$ $(n < n_0)$

$$\therefore (x_n)_n \subset B(x_{n_0}, r)$$

$\Rightarrow$ es acotada $\blacksquare$

2) Sea

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} /\ d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geq n_0$$

$\Rightarrow \forall\, n, m \geq n_0$,

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{pues } n \geq n_0}} + \underbrace{d(x_m, x)}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{pues } m \geq n_0}}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$\therefore$ es de Cauchy.

$\blacksquare$

3) Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sub.suc. convergente a $x \in E$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,/\, d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0$$

y además, como la sucesión es de Cauchy.

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n, m \geq n_0$$

Quiero juntar estas dos cosas:

Sea $k_1 \geq k_0 \,/\, n_{k_1} \geq n_0$

$\Rightarrow$ Si $n \geq n_0$:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_1}})}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ n,\, n_{k_1} \geq n_0}} + \underbrace{d(x, x_{n_{k_1}})}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ k_1 \geq k_0}}$$

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

$\therefore$ $(x_n)_n$ converge.

$\blacksquare$

Hay suc. de Cauchy no convergentes:

Ejemplo:

$E = \mathbb{Q}$

$$x_n = 3,\underbrace{1416\ldots\ldots}_{\text{Primeros } n \text{ dígitos de } \pi}\overbrace{000\ldots\ldots}^{\text{desde el dígito } n+1, \text{ todos ceros,}}$$

$\Rightarrow (x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ (pues finitos decimales)

$\Rightarrow$ Si $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{10^{n_0}}$$

Pues tienen al menos n_0 dígitos en común.

$\therefore$ $(x_n)_n$ es de Cauchy

Pero! no converge, pues π es irracional $(\pi \notin \mathbb{Q})$

y $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$

- Para ser convergente, debería converger a un elemento del espacio métrico $\mathbb{Q}$,

y como $\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ no converge.

- Lo mismo valdría usando algún otro irracional como $\sqrt{2}$, e, etc.

Obs:

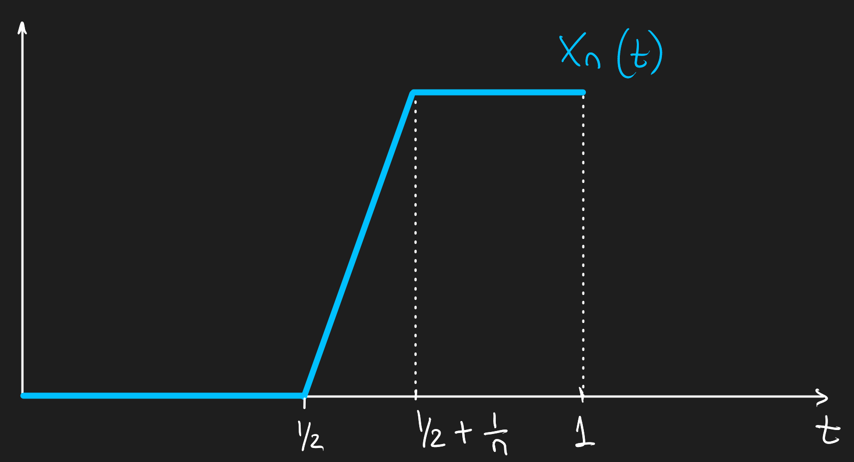
Una suce. de Cauchy que no converge, puede interpretarse como que converge a un agujero en el espacio E.

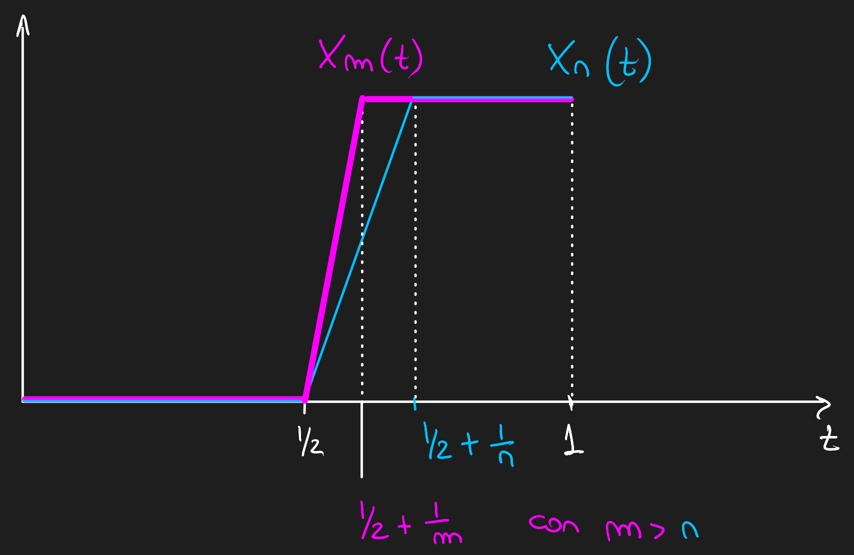
Otro ejemplo menos "trivial"

$$E = \mathcal{C}([0,1])$$

$$\text{con } d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

Idea sin cuentas:

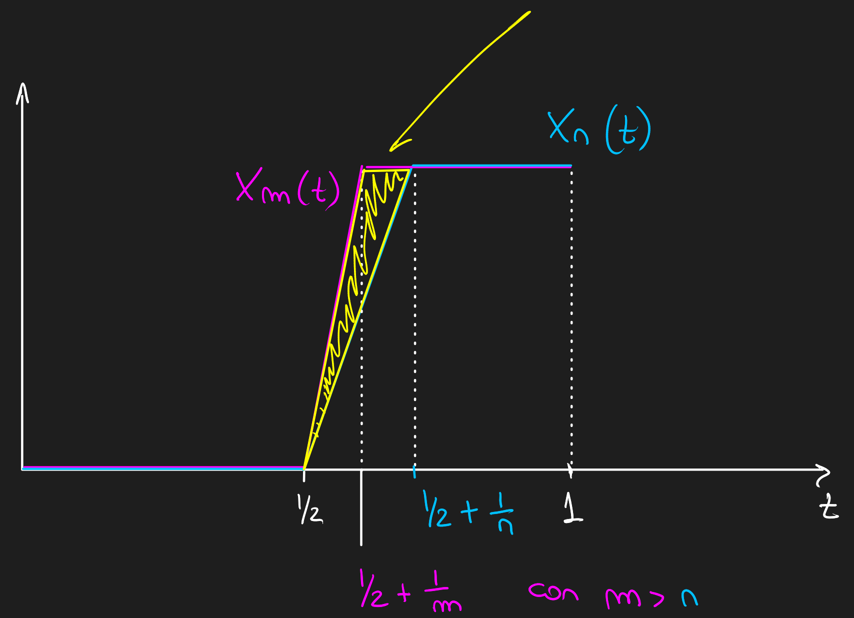




Sabemos que

$$d(x_m, x_n) = \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|\, dt$$

Lo cual geométricamente es el área del triángulo restante



Entonces

$$d(x_m, x_n) = \text{Área}(\triangledown)$$

y como es una sucesión de Cauchy:

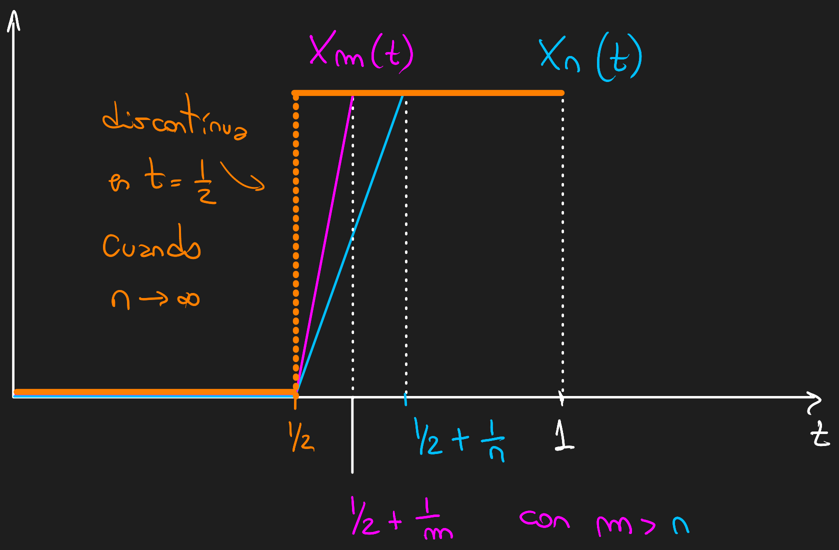
$$d(x_m, x_n) = \text{Área}(\nabla) < \varepsilon$$

Si $n, m \geq n_0$

$\therefore$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Pero! no converge!

Pues si convergiera, sería a una función discontinua, con una discontinuidad (salto) en $t = \frac{1}{2}$



Conclusión

- Es de Cauchy, pero no converge

Nota que

Con d_∞ esto no pasa (es completo!)

Def:

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda suc. de Cauchy es convergente a algún punto $x \in E$.

Ejemplo:

$\mathbb{R}$ es completo.

$\mathbb{R}^n$ también.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente. Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente. Por la parte (3) del Teorema, $(x_n)_n$ converge.

Ejercicio

Consideremos un conjunto no vacío E con la métrica discreta δ. ¿Es (E, δ) completo?

y $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$?