Moon Jun 14

Práctica 8

Medida

1. Sea $\mathcal{A}$ una una familia no vacía de subconjuntos de X cerrada por complementos y por uniones numerables. Probar que $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables y que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

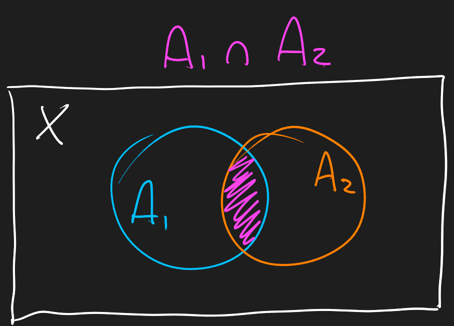
Cerrado por complementos y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ numerables

- $X \in \mathcal{A} \iff X^c \in \mathcal{A}$
- $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

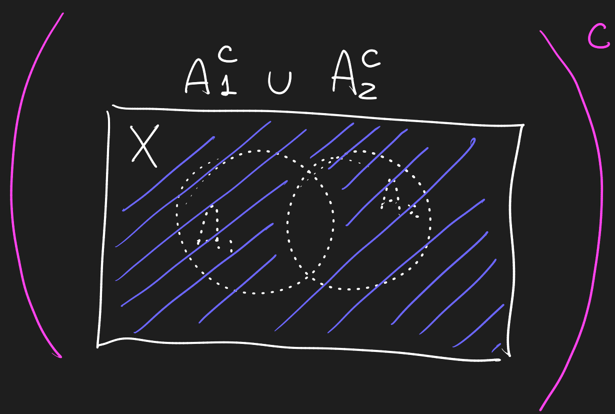
qvq

$$(A_n)_n \subseteq A \Rightarrow \bigcap_n A_n \overset{?}{\in} A$$

Primero



$\equiv$



$$\Rightarrow \bigcap_n A_n = \left(\bigcup_n A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}$$

$A_n \in \mathcal{A}$

y $\mathcal{A}$ es cerrado por complemento

y por unión numerable.

•) ϕ y $X \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

Si $A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A \cap A^c \underset{\text{ej 1}}{\in} \mathcal{A}$

$\Rightarrow \phi \in \mathcal{A}$ ✓

$\Rightarrow (\phi)^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow X \in \mathcal{A}$ ✓

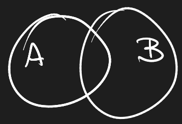
∎

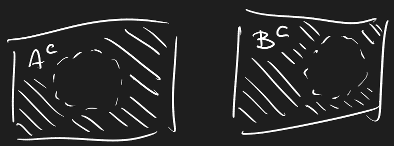
2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de conjuntos de X.

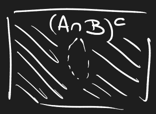
(a) Si A, $B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

(b) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de conjuntos de Y.

a) i)



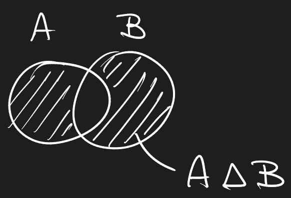




$$(A \cap B)^c \cap A \equiv A \setminus B \quad \checkmark$$

operaciones de σ - álgebra

ii) Dif. simétrica



$$\underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{A}} \cup B \setminus A \equiv A \triangle B \quad \checkmark$$

op. de σ - álgebra

(b) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de conjuntos de Y.

Complemento

$$B \in \mathcal{B} \overset{?}{\iff} B^c \in \mathcal{B}$$

Si $B \in \mathcal{B}$:

$$\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(f^{-1}(B)\right)^c}_{X \setminus \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}}} \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(Y \setminus B)$$

$$= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$$

$$= X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

$\therefore$

- Si $B \in \beta \Rightarrow B^c \in \beta$
- Si $B^c \in \beta \Rightarrow B \in \beta$

$$\therefore \quad B \in \beta \Leftrightarrow B^c \in \beta \quad \checkmark$$

Unión

Sé: $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$\Rightarrow$ Si $f^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$

y $f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ σ-alg.
$\Rightarrow f^{-1}(B_1 \cup B_2) \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ Si $B_1 \in \mathcal{B}$ es porque $f^{-1}(B_1) \in \mathcal{A}$
y $B_2 \in \mathcal{B}$ es porque $f^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ pues $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \in \mathcal{A}$

Lo mismo para numerables B_n.

?

Preg. alcanza probarlo para 2 elementos?

3. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos σ-álgebras de conjuntos de X. Probar que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es una σ-álgebra de conjuntos de X.

$$A \in \mathcal{A}_1 \iff A^c \in \mathcal{A}_1$$

$$A \in \mathcal{A}_2 \iff A^c \in \mathcal{A}_2$$

$$\Rightarrow \text{Si } \left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{A}_1 \\ \text{y } A \in \mathcal{A}_2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} A^c \in \mathcal{A}_1 \\ \text{y} \\ A^c \in \mathcal{A}_2 \end{array}\right.$$

equiv

$$A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \iff A^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$$

$\therefore$ $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es cerrada por complementos

La unión vale pues vale en cada una de las sigma-álgebras,

entonces para cada unión numerable de elementos de $\mathcal{A}_1$

tengo un elemento de $\mathcal{A}_1$

y lo mismo para $\mathcal{A}_2$

Entonces en la intersección de todos los elementos de $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$

tendremos todas las uniones posibles de todos los elementos

en esta intersección.

4. Probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo.

Vicky en Teo 20

$A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo

si

$\forall \varepsilon > 0$,

$\exists$ contables intervalos abiertos $(U_n)_{n \in J}$

tales que

- $A \subset \bigcup_{n \in J} U_n$
- $\sum_n \text{long}(U_n) < \varepsilon$

Idea:

- en cada punto del subconjunto numerable de R, armo un intervalito y listo el pollo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ numerable

Para cada $a \in A$, defino

$$U_n = \left(a - \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}, a + \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}\right)$$

← nota que la unión cubre A

Notar

$$\text{long}(U_n) = \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^n}$$

$$A \subset \bigcup_n U_n$$

$$\Rightarrow \sum_n \text{long}(U_n) \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2.2^n}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\sum_n \frac{1}{2^n}}_{=1}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \checkmark$$

Tengo lo que quería

- $A \subset \bigcup_{n \in J} U_n$ pues lo cubre ✓
- $\sum \text{long}(U_n) < \varepsilon$ ✓

$\boxtimes$

5. Probar que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a,b)$, $[a,b]$, $[a,+\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcular su medida.

$[a,b)$: Solo tengo abiertos y los nulos.

$\Rightarrow (a,b)$ está por definición

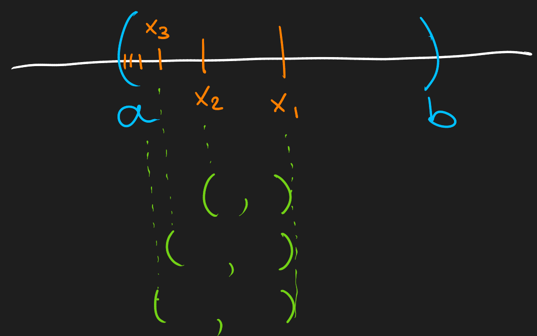
$(a,b) \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow (a,b)^c \in \mathcal{M}$

tomo una sucesión de elementos

fijo

$$x_n \subset (a,b) \; / \; x_n = \left(a + \frac{b-a}{2^{n+1}},\ a + \frac{b-a}{2}\right)$$



Por ser σ-álgebra

$$(A_n)_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$$

con $$\bigcup_n A_n = \lim_{N \to \infty} \bigcup_n^N A_n$$

$-\infty, a)(a, +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \bigcup_n^N \left(a + \underset{\longrightarrow 0}{\frac{b-a}{2^n}},\ a + \frac{b-a}{2}\right) = \left[a,\ a + \frac{b-a}{2}\right)$$

?

5. Probar que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcular su medida.

$[a,b)$: Solo tengo abiertos y los nulos.

$\Rightarrow (a,b)$ está por definición

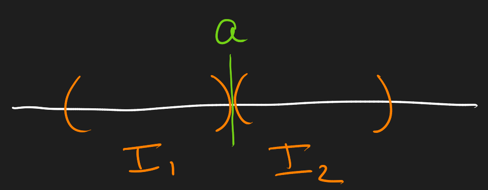
$(a,b) \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow (a,b)^c \in \mathcal{M}$

Como $\mathcal{M}$ tiene todos los abiertos

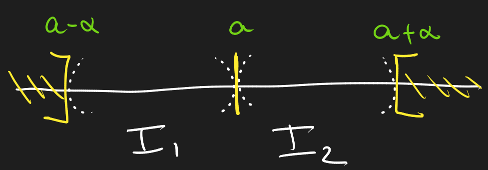
$\Rightarrow \quad I_1 := (a-\alpha, a) \in \mathcal{M} \quad$ con $\alpha > 0$

y $\quad I_2 := (a, a+\alpha) \in \mathcal{M}$



Bastaba mostrar que $\{a\}$ es nulo y $\mathcal{M}$ contiene los nulos.

$(I_1 \cup I_2)^c \in \mathcal{M}$

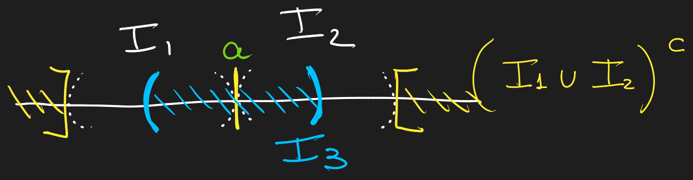


quiero solo este elemento

?

Defino

$I_3 := \left(a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad I_3 \in \mathcal{M}$ pues abierto



$$(I_1 \cup I_2)^c \cap I_3 \in \mathcal{M} \quad \text{por ejercicio 1.}$$

$$\|$$

$$\{a\} \in \mathcal{M}$$

Finalmente

$$\{a\} \cup (a,b) \in \mathcal{M}$$

$$\therefore [a,b) \in \mathcal{M} \quad \blacksquare$$

Mide $b-a$

- Con $[a,b]$ puedo hacer lo mismo aislando b en lugar de a.

- Con $[a,+\infty)$ puedo unir $\{a\}$ con abiertos de largo 1 a la derecha de a

$$[a,+\infty) \equiv \bigcup_n \underbrace{[a+n-1, a+n)}_{\in \mathcal{M}}$$

$$\mu\left([a,+\infty)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disjuntos}}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mu\left([a+n-1, a+n)\right)}_{a+n-(a+n-1)=1} = +\infty$$

$$\mu\left([a,+\infty)\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu\left([a+n-1, a+n)\right)}_{a+n-(a+n-1)=1} = N \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

6. Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ y la de los irracionales del $[0,1]$. ¿Por qué son medibles estos conjuntos?

- $\mathbb{Q}$ es numerable $\Rightarrow \mu(\mathbb{Q}) = 0$

$$\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$$

- $$\mu\big(\underbrace{\mathbb{I}\cap[0,1]}_{\underbrace{[0,1]}_{\subseteq\mathbb{R}}\setminus\mathbb{Q}}\big) = \mu([0,1]\subset\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{Q})$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

ii) $\mathbb{Q}$ es medible pues

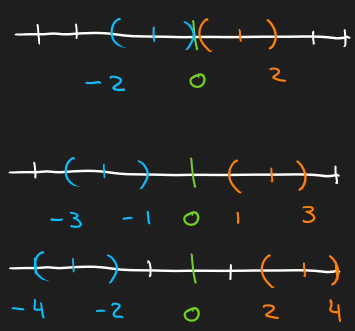
$$\mathbb{Q} = \{0\} \cup \bigcup_n \overbrace{(n-1, n+1)}^{\subseteq\mathbb{Q}} \cup \overbrace{(-n-1, -n+1)}^{\subseteq\mathbb{Q}}$$

$n=1$ $(0,2) \cup (-2,0)$

$n=2$ $(1,3) \cup (-3,-1)$

$n=3$ $(2,4) \cup (-4,-2)$

$\vdots$



Todas operaciones entre abiertos de $\mathbb{Q}$ de medida cero.

Como $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^c$ en $\mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathbb{I}$ en $\mathcal{M}$

//