

## Cardinalidad #2

## Conjuntos numerables

 $X$  es numerable  $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$  Biyectiva

## Observación

 $X$  es numerable  $\Leftrightarrow X$  se puede escribir como una sucesión de elementos distintos

$$X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

con  $x_n \neq x_m$   
si  $n \neq m$ 

Dem:

 $\Rightarrow )$  Si  $X$  numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$  biyectiva $\nwarrow$   $f$  es una sucesión!Sea  $x_n = f(n)$ 

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

 $\nwarrow$  que es lo mismo que

Como  $f$  es suryectiva (es biyectiva)

$$X \stackrel{\downarrow}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \{ f(n) : n \in \mathbb{N} \}$$

Falta 2° propiedad

$$\text{Si: } n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$$

$\uparrow$   
 $f$  inyectiva  
(biyectiva)

$$\Rightarrow x_n \neq x_m$$

$\langle = \rangle$  Pensar. Muy parecido. Lo hago:

$$\text{Si: } X = \{ x_n \}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{con } x_n \neq x_m \text{ si } n \neq m$$

$$= \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\text{Sea } f : \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$f(n) = x_n$$

Como  $x_n \neq x_m$  si  $n \neq m$

$\Rightarrow f$  es biyectiva  $\left( \begin{array}{l} \text{a cada natural le asigna un} \\ \text{elemento distinto de } X \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \sim X$$

$\therefore X$  es numerable

$\square$

## Ejemplo

- $\mathbb{R}$  no es numerable.

$\mathbb{R}$  no es una sucesión.

Sea  $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$  alguna sucesión cualquiera

y veamos que

$$\exists y \in \mathbb{R} / y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Desarrollo decimal de los  $x_n$ :

Parte entera  $\in \mathbb{Z}$

↓

$$x_1 = m_1, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$$

$$x_2 = m_2, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots$$

$$x_3 = m_3, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots$$

⋮

Sea

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4$$

eligiendo

$$b_1 \neq a_{11}$$

$$b_2 \neq a_{22}$$

$$b_3 \neq a_{33}$$

$$b_4 \neq a_{44}$$

$\vdots$

más precisamente

$$b_n = \begin{cases} 3 & a_{nn} \neq 3 \\ 5 & a_{nn} = 3 \end{cases} \quad \swarrow \text{lo fuerza a que sea} \\ \text{distinto}$$

Con esto,

$y$  tiene desarrollo único (no es  $0,9\hat{9}$ )

$$\Rightarrow y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pues el  $n$ -ésimo dígito de  $y$

es  $\neq$  al  $n$ -ésimo dígito de  $x_n$

$\therefore \nexists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  Biyectiva

$\therefore \mathbb{R}$  no es numerable.



Otra manera es mostrar que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$$

## Propiedades Fundamentales de Conjuntos Infinitos

### Teorema

Sea  $X$  infinito

$$\Rightarrow \exists Y \subset X \text{ numerable.}$$

### Dem

Solo basta encontrar una sucesión dentro de  $X$

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in X$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in X \setminus \{x_1\} \quad \left( \begin{array}{l} \text{notar que} \\ x_1 \neq x_2 \end{array} \right)$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$$

y así puedo seguir

Inductivamente

Si ya elegimos

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  distintas

$$\Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists x_n \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

con  $x_n \neq x_i$

con  $i \in [1, n-1]$

Defino

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad x_n \neq x_m \text{ si } n \neq m$$

$\therefore$

$$Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$$

$\uparrow$

es numerable!



## Observación

Decir

"X tiene un subconjunto numerable"

es lo mismo que decir

$\exists f: \mathbb{N} \rightarrow X$  Inyectiva

Entonces, el Teorema dice que

$$\overset{\downarrow \text{Aleph}}{\aleph_0} \leq \#X \quad \forall X \text{ infinito}$$

Obs:

$\aleph_0$  es el menor de todos los cardinales infinitos.

## Proposición

Si X es infinito,

Por qué los primos son numerables?

$$\exists Z \subset X, Z \text{ numerable} \quad / \quad X \sim X \setminus Z$$

Dem

$$X \text{ infinito} \xRightarrow{\text{Teo}} \exists Y \subset X \text{ numerable}$$

Idea

$$X = (X \setminus Y) \cup Y$$

$$= (X \setminus Y) \cup Y_{\text{Parer}} \cup Y_{\text{Imparer}}$$

con

$$Y_{\text{Parer}} = \{y_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$Y_{\text{Imparer}} = \{y_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$= (X \setminus Y) \dot{\cup} Y_{\text{Parer}} \dot{\cup} Y_{\text{Imparer}}$$

↑                      ↑  
Disjuntas

y además

$$\overbrace{\left( Y_{\text{Parer}} \dot{\cup} Y_{\text{Imparer}} \right)}^Y \sim Y_{\text{Parer}}$$

$$\text{Pues } \left. \begin{array}{l} f: Y \rightarrow Y_{\text{Parer}} \\ f(y_n) = y_{2n} \end{array} \right\} \text{ Biyectiva}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (X \setminus Y) \dot{\cup} Y_{\text{Parer}} \dot{\cup} Y_{\text{Imparer}} &\sim (X \setminus Y) \dot{\cup} Y_{\text{Parer}} \\ &\parallel \\ &\sim X \setminus Y_{\text{Imparer}} \end{aligned}$$



Si llamo  $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un  $Z \subset X / X \sim X \setminus Z$

□

Otra forma:

Puedo definir

$$h: X \rightarrow X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin Y \\ f(x) & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

que es Biyectiva

∴

$$X \sim X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

Si llamo  $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un  $Z \subset X / X \sim X \setminus Z$

□

## Ejercicio (de la práctica 2)

Si  $A$  es numerable

y  $B \setminus A$  es infinito

$$\Rightarrow B \setminus A \sim B$$

## Ejercicio

Si  $X$  es infinito

y  $A$  es numerable

$$\Rightarrow X \sim X \cup A$$

## Obs

Puedo unir numerable numerables, y obtener un numerable!

## Subconjuntos Propios

### Corolario

Un conjunto es infinito  $\Leftrightarrow$  es coordinable con un subconjunto propio

$$\mathbb{R} \sim [1, \pi)$$

$$\mathbb{R} \sim \text{Cualquier intervalo}$$

$$\mathbb{R} \sim \{e^x : x \in \mathbb{R}\}$$

Dem

$\Rightarrow$ ) Vimos que si

$X$  es infinito

$$\Rightarrow \exists Z \subset X \quad / \quad X \sim \underbrace{X \setminus Z}_{\text{subconj. propio de } X} \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ ) No es tan fácil de mostrar  
(sale con inducción)

Idea:

Si  $X$  es finito  $\Rightarrow X$  no es contable  
con ningún subconj. propio.

Supongamos que  $\#X \leq \#Y$  y que  $\#Y \leq \#X$ .

¿Es cierto que  $\#X = \#Y$ ?

**Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor-Schröder-Bernstein**

Si existen  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  inyectivas, entonces existe  $h: X \rightarrow Y$  biyectiva.

Si:

$$\left. \begin{array}{l} \exists f: X \rightarrow Y \text{ inyectiva} \\ \exists g: Y \rightarrow X \text{ inyectiva} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists h: X \rightarrow Y \text{ biyectiva}$$

## Corolario

La relación  $\leq$  entre cardinales

es una relación de orden.

## Ejemplo

Sirve para mostrar que

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$$

sin definir la función biyectiva: 

Defino

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(n) = n \quad \text{inyectiva}$$

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{sea } q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{m}{n} \quad \text{con } \overbrace{m, n}^{\text{únicos!}} \in \mathbb{Z}$$

$$g(m, n) = 1$$

$\underbrace{\quad}_{\text{MCD}}$   
(coprimos)

$$g(q) = \begin{cases} 2^m \cdot 3^n & \text{si } m \geq 0 \\ 5^{|m|} \cdot 3^n & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Primos  
↓   ↓  
2   3

Por descomposición única:

$\Rightarrow g$  es inyectiva!

$\therefore$

Por C-S-B

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$$



Ejemplo:

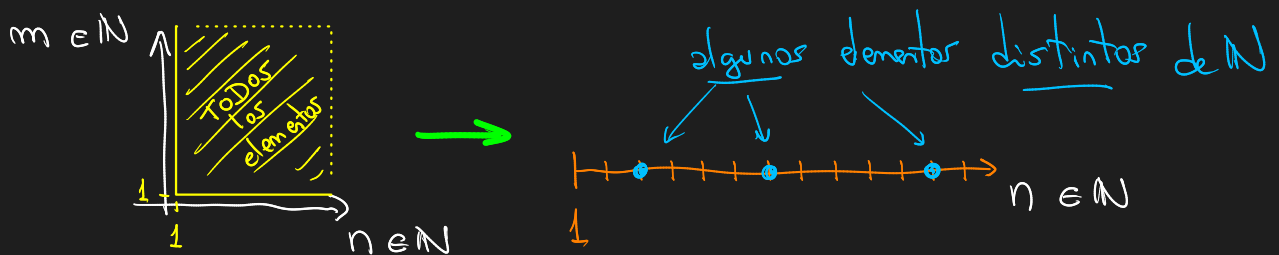
$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Armo 2 funciones inyectivas

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$f(n) = (n, 1) \quad \text{inyectiva}$$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$



$$g(n, m) = 2^n \cdot 3^m \quad \text{inyectiva.}$$

↙   ↘  
primos

(Para cada  $n, m$ , tengo una descomposición  
distinta en primos  $\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$ )

$\therefore$  Por C.S.B.

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$



Obs:

Se puede usar para probar que unión numerable de numerables es numerable.

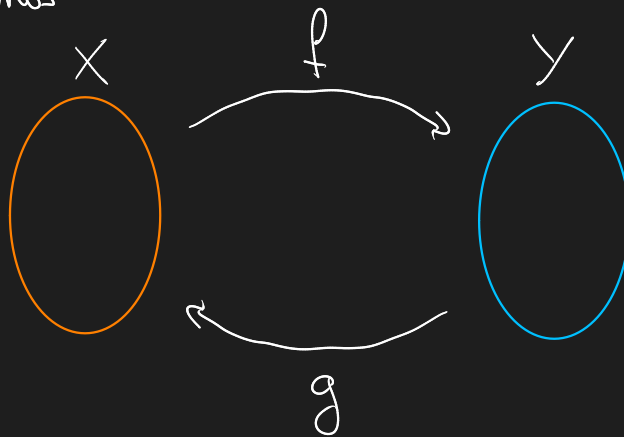
Dem. de

**Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor-Schröder-Bernstein**

Si existen  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  inyectivas, entonces existe  $h : X \rightarrow Y$  biyectiva.

Idea

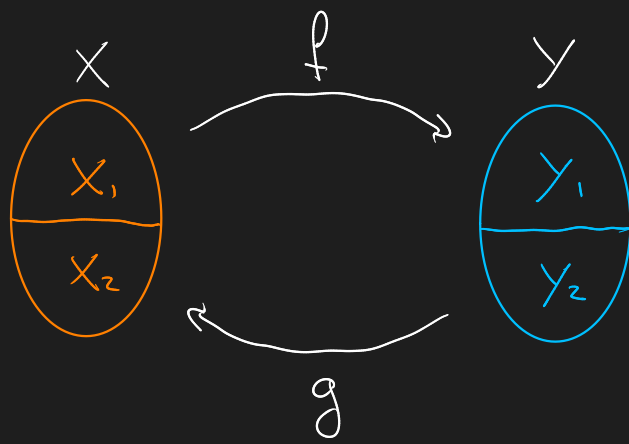
Tenemos



queremos  $h$  biyectiva

Entonces

Si partimos  $X$  e  $Y$ , de forma que



$$X = X_1 \sqcup X_2$$

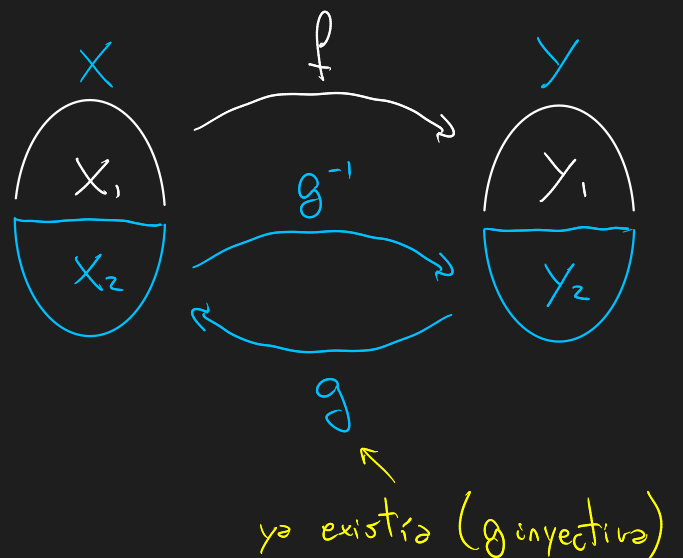
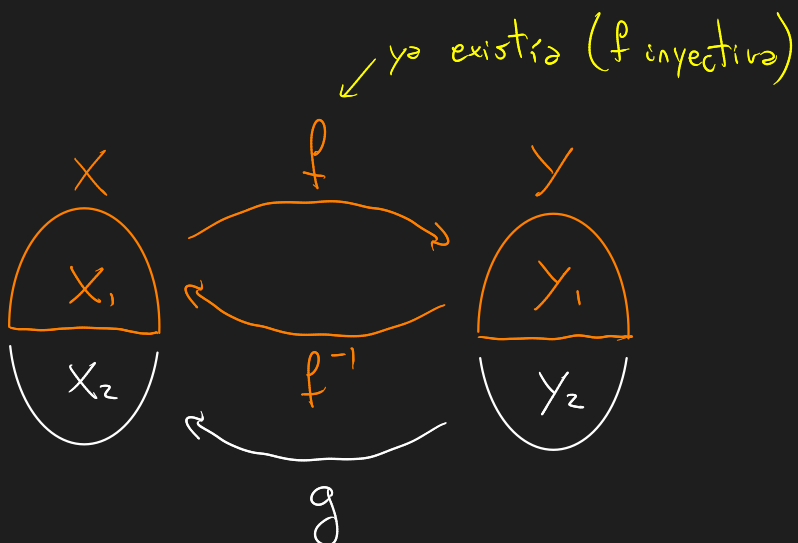
$$Y = Y_1 \sqcup Y_2$$

y además, si encontramos

$$f : X_1 \rightarrow Y_1 \text{ Biyectiva}$$

$$g : Y_2 \rightarrow X_2 \text{ Biyectiva}$$

Entonces, busco  $f$  y  $g$  /



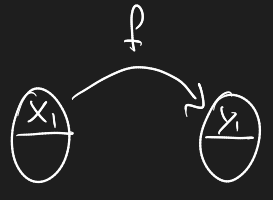
Con esto, puedo definir

$$h: X \rightarrow Y$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2 \end{cases}$$

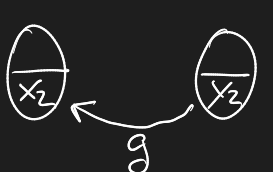
Que es biyectiva, y listo,

Dado cualquier  $x_i \in X_1$

$\Rightarrow Y_1 = f(X_1)$  ..... 

↖ le aplico f a cada  $x_i \in X_1$

$\Rightarrow Y_2 = Y \setminus f(X_1)$  ..... 

$\Rightarrow X_2 = g(Y \setminus f(X_1))$  ..... 

$\Rightarrow X_1 \stackrel{?}{=} X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$

$\uparrow$   
queremos ver esto

El "Truco" será elegir bien el  $X_1$  inicial.



Buscamos

$$\underline{X_1} \subset X \quad / \quad X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$$

solo basta

encontrar  $X_1$  que cumpla esto

Defino

$$\phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

y buscamos  $X_1 \subset X$  /

$$\phi(X_1) = X_1$$

$\nwarrow$  punto fijo,

Prop de  $\phi$

$$\text{Si } A \subseteq B \subset X$$

$$\Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$\Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B)$$

$$\Rightarrow g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$$

$\therefore \phi$  es una función creciente

$$\text{Si } A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$$

Volviendo, buscaremos

$$X_1 \subseteq X \text{ / } \phi(X_1) = X_1$$

De Pino

$$\mathcal{C} = \{ C \subseteq X \text{ / } \phi(C) \subseteq C \}$$

↑ solo una desigualdad.

Obs!

Si de todos los  $C \in \mathcal{C}$  me quedo con

los más chicos o los más grandes

$\Rightarrow$  tengo grandes chances

de que cumplan la igualdad

Para eso, elijo

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

y veremos que sirve.

$$\text{Como } X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$$\Rightarrow X_1 \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \phi(C) \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

$\uparrow$   
 def. de  $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

y como definimos

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(X_1) \subseteq X_1} \quad \text{Tenemos } \subseteq, \text{ falta } \supseteq$$

Si aplico  $\phi$  de nuevo

$$\Rightarrow \phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1)$$

$$\text{De nuevo, por def. de } \mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid \underbrace{\phi(C)} \subseteq \underbrace{C}\}$$

$$\Rightarrow \phi(X_1) \in \mathcal{C}$$

$$\phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1)$$

y como de finitar

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$\uparrow$   
 $\phi(x_1)$  es uno de ellos

$$\Rightarrow X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \phi(x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 \subseteq \phi(x_1)} \quad \text{que es lo que buscábamos}$$

$\therefore$

$$X_1 = \phi(x_1)$$

$\therefore$

$$\text{Tengo } Y_1 = f(x_1)$$

$\therefore$

$$\text{Tengo } Y_2 = Y \setminus f(x_1)$$

$\therefore$

$$\text{Tengo } X_2 = g(Y \setminus f(x_1))$$

$\therefore$

$$\leq \exists f : X \rightarrow Y \quad \text{inyectiva}$$

$$\leq \exists g : Y \rightarrow X \quad \text{inyectiva}$$

$\Rightarrow \exists h : X \rightarrow Y \text{ Bijective}$

$\square$