Vicky

Merc. Jun 2

Sucesiones y Series de Funciones II

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ continuas y acotadas sobre } X\}$$

y

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ acotadas sobre } X\}$$

ambos con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposición

$(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ y $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios normados completos, es decir Banach.

$(f_n)_n \subseteq C_b(X)$ $\quad f_n : X \to \mathbb{R}$.

$(f_n)_n$ es de Cauchy c/ $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow (f_n)_n$ es uniformemente de Cauchy. $\underset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \exists f : X \to \mathbb{R} \ / \ f_n \rightrightarrows f$.

. f es continua: Rta si xq' lim unif. de continuas es continua

. f es acot: $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 / \ \forall n \geq n_0, \ \underline{\forall x \in X} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq M_{n_0}} \leq \varepsilon + M_{n_0} \ \forall x \Rightarrow f$ acot.

$\Rightarrow f \in C_b(X) \ \wedge \ f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f \quad \therefore \quad C_b(X)$ completo.

Página siguiente

5 / 25

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach.

Veamos otros espacios de Banach:

Sucesión de las Sumas Parciales

Sea E esp. de Banach

y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión

Definimos

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

"N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$"

con

$$(S_N)_N \subset E$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge cuando existe el límite $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$.
A ese límite, que es un elemento de E, lo llamamos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Notar que es creciente si los x_n son ≥ 0

Observación :

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x_n}$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ \| S_N - S_M \|_E < \varepsilon \ \forall N, M \geq N_0.$

$$S_M - S_N = \sum_{n=1}^{M} x_n - \sum_{n=1}^{N} x_n$$

$$= \Big\| \sum_{m=N+1}^{M} x_m \Big\| < \varepsilon$$

$\forall N, M \geq N_0.$

Recordemos...

En $\mathbb{R}$, $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|} < \infty$ conv absoluta.

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

$\in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Serie de números reales !

Proposición

Sea E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, entonces converge.

Dem: qvq $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ conv en E es decir qvq

$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \Rightarrow (S_N)_N$ es de Cauchy en E

$$\|S_M - S_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} x_n\right\| \leq \boxed{\sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \|x_n\| - \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|$$

Converge Absolutamente

Como $\sum \|x_n\|$ conv $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|\right)_N$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N} / N, M \geq N_0 \Rightarrow$

$$\sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|S_N - S_M\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| < \varepsilon \text{ si } N, M \geq N_0.$$

$\therefore (S_N)_N$ es de Cauchy en E y $\therefore$ converge.

$\boxtimes$

Series de Funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Ej: $\mathcal{C}_b(X)$, $B(X)$

f acotadas

f continuas y acotadas

Para cada N, tenemos la función:

"Suma Parcial"

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntual o uniformemente) en X si la sucesión de funciones $(S_N)_N$ converge (puntual o uniformemente) en X.

Si tenemos la suerte de que las f_n sean:

- Continuas y Acotadas

ó

- Acotadas

ó

- Están definidas en un E' compacto

$\Rightarrow$ Podemos usar herramientas de espacios de Banach

Criterio de Weierstrass $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en $\mathbb{R}$.

Dem:

- Notar que como todos los $|f_n(x)| \leq C_n$ todos acotados!

$\Rightarrow \quad f_n \in B(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

espacio de Banach de funciones acotadas

- Notar además que

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \leq \sum_{n=1}^{N} C_n$$

$$\Rightarrow \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \in B(X)$$

Ahora, qvq

$(S_N)_N$ es de Cauchy en $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$

y de este espacio, sé que

$$\boxed{\text{Convergencia en } \|\cdot\|_\infty \Rightarrow \text{Convergencia uniforme de funciones}}$$

1°) Como $|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow \quad \|f_n(x)\|_\infty \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• Si miro

$$\| S_M - S_N \|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{M} \| f_n(x) \|_\infty$$

$$\star \quad \leq \sum_{n=N+1}^{M} C_n$$

? Converge porque $M-N$ es finito ?

Como $\sum_{n=N+1}^{M} C_n$ converge (en $\mathbb{R}$)

wat?

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=N+1}^{M} C_n \right)_N \text{ es de Cauchy}$$

o sea:

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ N, M \geq N_0$

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^{M} C_n < \varepsilon$$

A partir de un punto la cota se hace re chica? esto es cond. sobre las f que se da para que la suma (de las cotas) converja?

$\Rightarrow (S_N)_N$ es de Cauchy en $B(x)$

$\star$

donde $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$

$\Rightarrow S_N \xrightarrow[N\to\infty]{?} f \in B(x)$

$\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformemente a f

$$\left(\sum f_n\right) \rightrightarrows f$$

y además

f es acotada

Falta mostrar Convergencia Absoluta

Pero ya fué hecho en $\star$ resultando

$$\sum_{n=N+1}^{M} \| f_n(x) \|_\infty \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} C_n < \infty$$

Si $\uparrow$ converge

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=N+1}^{M} |f_n(x)| < \infty}_{\text{Converge absolutamente.}}$$

$\blacksquare$

Micro resumen:

Primero vimos que en un espacio de Banach, la norma infinito era exactamente la convergencia uniforme.

Luego vimos series y sucesiones de funciones, en el contexto de espacios de Banach donde vale la propiedad anterior.