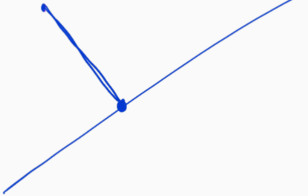
Análisis Avanzado - Espacios Normados 4

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

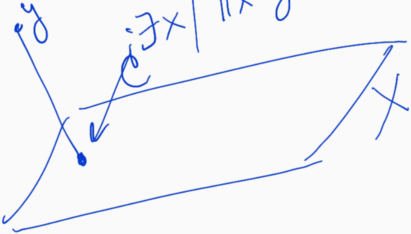
Dto. de Matemática - FCEN - UBA



$$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$$

$$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$$

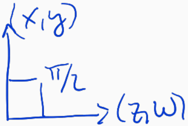
¿$\exists x \mid \|x-y\| = d(y, X)$?

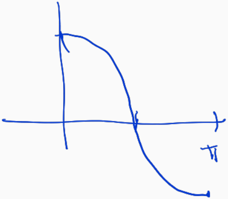


Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $x, y \in H$.
Decimos que x e y son ortogonales si $\boxed{\langle x, y \rangle = 0.}$

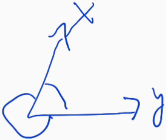
$(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ $\quad \langle (x,y), (z,w) \rangle = xz + yw = 0$





- $x, y \in H \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$

$\measuredangle(x,y) = \arccos\left(\dfrac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right) \in [0, \pi]$



si $\langle x,y \rangle = 0 \Rightarrow \measuredangle(x,y) = \pi/2$

Definición

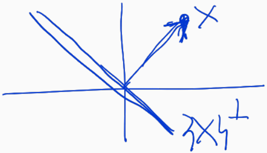
Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $x, y \in H$. Decimos que x e y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$.

Definición

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Definimos el complemento ortogonal de X como

$$X^{\perp} = \{y \in H : \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in X\}.$$

$X = \{x\}$ $\quad \mathbb{R}^2$



Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H;

Proposición

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. $X^\perp$ es un subespacio cerrado de H;
2. $X \subseteq (X^\perp)^\perp$;

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. $X^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H;
2. $X \subseteq (X^{\perp})^{\perp}$;
3. $\boxed{X \cap X^{\perp} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \in X \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin X. \end{cases}}$ $\longrightarrow$ $x \in X \cap X^{\perp} \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$

si X es subesp $\Rightarrow X \cap X^{\perp} = \{0\}$

Dem: 1) $X^{\perp}$ es subes: prop del $\langle , \rangle$.

Sup. $(y_n)_n \subseteq X^{\perp}$ / $y_n \to y$. qvq $y \in X^{\perp}$.

qvq dado $x \in X$, $\langle y, x \rangle = 0$

$\langle y_n, x \rangle = 0 \ \forall n$

$\downarrow$

$\langle y, x \rangle$ $\longrightarrow$ $[\gamma_x(y_n) \to \gamma_x(y)]$

Definición

Sean X, Y subespacios de un espacio vectorial V. Decimos que V es la suma directa de X e Y si

$$\boxed{V = X + Y} \qquad \text{y} \qquad X \cap Y = \{0\}.$$

En este caso, escribimos $\boxed{V = X \oplus Y.}$

$\forall$ todo $v \in V$, es $v = x + y$ con $x \in X$, $y \in Y$

Definición

Sean X, Y subespacios de un espacio vectorial V. Decimos que *V es la suma directa de X e Y* si

$$V = X + Y \qquad \text{y} \qquad \boxed{X \cap Y = \{0\}.}$$

En este caso, escribimos $V = X \oplus Y$.

¿Es cierto que si X es un subespacio de H entonces $H = X \oplus X^{\perp}$?

Rta: No, x ejem. X un subesp. denso de $H \Rightarrow$
$X^{\perp} = \{0\}$ (ejercicio)

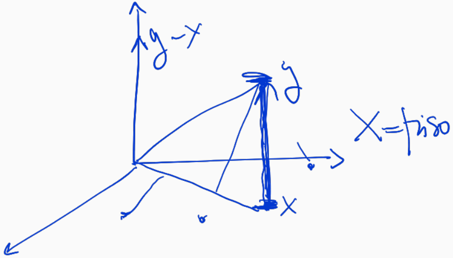
Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un subespacio. Fijemos $y \in H$ y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

1. $\boxed{y - x \in X^{\perp};}$
2. $\boxed{\|y - x\| \leq \|y - v\| \text{ para todo } v \in X.}$

(2) $\boxed{\|y-x\| = d(y, X)}$

Reescribimos (2):



$v \in X, \quad y - v = y - x - (v - x)$

$\|y-x\| \leq \|y-v\| \; \forall v \in X$ es equiv.

$\|y-x\| \leq \|y-x-u\| \; \forall u \in X$

$\underbrace{v-x}_{\in X} \longleftrightarrow v$

llamo $z = y - x$

$\|z\| \leq \|z-u\| \; \forall u \in X$ es equi

$\|z\|^2 \leq \|z-u\|^2 = \langle z-u, z-u\rangle = \|z\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle z, u\rangle$ es equiv.

$2\langle z, u\rangle \leq \|u\|^2 \; \forall u \in X$

$(2) \equiv a$

$\boxed{2\langle y-x, u\rangle \leq \|u\|^2 \; \forall u \in X \Rightarrow (\tilde{2})}$

$\boxed{(1) \Rightarrow (\tilde{2})}$: dem: $(y-x) \in X^\perp \Rightarrow \langle y-x, u\rangle = 0 \; \forall u \in X$.

$\boxed{(\tilde{2}) \Rightarrow (1)}$ $(\tilde{2})$ $2\langle y-x, u\rangle \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in X$

$u = tw, \ t \in \mathbb{R} \quad w \in X$

$\overset{(\tilde{2})}{\Rightarrow} \ 2t\langle y-x, w\rangle \leqslant t^2\|w\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \forall w \in X.$

Tomo $t = s\langle y-x, w\rangle \quad s>0, \ w \in X$

$\Rightarrow 2 \cdot s \cdot \overline{\langle y-x, w\rangle}^2 \leqslant s^2 \overline{\langle y-x, w\rangle}^2 \|w\|^2 \quad \forall s>0, \ \forall w \in X$

Si $y-x \notin X^\perp \quad \exists w_0 \in X \ / \ \langle y-x, w_0\rangle \neq 0$

$\Rightarrow 2s\,\cancel{\langle y-x, w_0\rangle^2} \leqslant s^2\,\cancel{\langle y-x, w_0\rangle^2}\,\|w_0\|^2 \quad \forall s>0$

$\Rightarrow \ \frac{2}{s} \leqslant \|w_0\|^2 \quad \forall s>0$ ABS! $\Rightarrow y-x \in X^\perp$ ✓ (1) ✓.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $K \subseteq V$ se dice convexo si para todos $x, y \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se tiene

seg q'ue x, y

$$(1-t)x + ty \in K.$$

Definición

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $K \subseteq V$ se dice convexo si para todos $x, y \in K$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene

$$(1-t)x + ty \in K.$$

Proposición

Hilbert

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $K \subseteq H$ un conjunto cerrado y convexo. Entonces, para cada $y \in H$ existe un único $x \in K$ tal que

$$\|y - x\| = \inf\{\|y - u\| : u \in K\} = d(y, K).$$

Dem: $r = d(y, K) = \inf\{ \|y - w\| : w \in K \} \geq 0$

Seguro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, w_n \in K$ /

$$r^2 \leq \|y - w_n\|^2 < r^2 + \frac{1}{n}$$

Veamos $(w_n)_n \subseteq K$ es de Cauchy.

$$\|w_n - w_m\|^2 = \|w_n - y - (w_m - y)\|^2$$

ley del paralelogramo

$$= 2\left(\|w_n - y\|^2 + \|w_m - y\|^2\right) - \|w_n - y + (w_m - y)\|^2$$

$$< 2\left(r^2 + \frac{1}{n} + r^2 + \frac{1}{m}\right) - \|w_n - y + w_m - y\|^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) + \underbrace{4r^2 - \|w_n - y + w_m - y\|^2}_{\leq 0} \leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \checkmark$$

$$\|w_n - y + w_m - y\|^2 = 4\left\|\frac{w_n - y + w_m - y}{2}\right\|^2 = 4\Big\|\underbrace{\frac{w_n + w_m}{2}}_{\in K} - y\Big\|^2 \leq 4 \cdot r^2$$

$\Rightarrow \boxed{\checkmark}$

Como H Hilbert, $\exists x \in H / z_n \to x$ en H y como K cerrado, $x \in K$.

$\Rightarrow \|z_n - y\| \longrightarrow \boxed{\|x - y\| = r}$.

Para ver q es! sup q' $x, \tilde{x} \in K \wedge \|x-y\| = \|\tilde{x}-y\| = r$.

Como antes

$$\|x - \bar{x}\|^2 = \|x - y - (\bar{x} - y)\|^2 = 2\left(\|x-y\|^2 + \|\bar{x}-y\|^2\right) - 4\left\|\frac{x+\bar{x}}{2} - y\right\|^2$$

$$= 4r - 4\underbrace{\left\|\frac{x+\bar{x}}{2} - y\right\|^2}_{\leq r} \leq 0 \Rightarrow \|x - \bar{x}\| = 0$$

$$\Rightarrow x = \bar{x}$$

$\boxtimes$

Teorema

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces,

$$H = X \oplus X^{\perp}.$$

Dem: Si $y \in H \Rightarrow$ como X es subesp. cerrado $\Rightarrow X$ es convexo y cerrado $\Rightarrow \exists!\, x \in X$ /

$\|y - x\| = d(y, X) \Rightarrow y - x \in X^{\perp}$

$\Rightarrow y = \underbrace{y - x}_{\in X^{\perp}} + \underbrace{x}_{\in X}$

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos proyección ortogonal de y sobre X al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^{\perp}$.

$$y \in H \Rightarrow y = \underset{\substack{\cap \\ X}}{x} + \underset{\substack{\cap \\ X^{\perp}}}{z}$$

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos proyección ortogonal de y sobre X al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^{\perp}$. Notamos $\boxed{P_X(y) = x.}$

$$\begin{aligned} P_X : H &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto x \end{aligned}$$

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos proyección ortogonal de y sobre X al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^{\perp}$. Notamos $P_X(y) = x$.

Teorema

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces, para todo $y \in H$, existe un único $x \in X$ tal que $\|y - x\| = d(y, X)$.

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos proyección ortogonal de y sobre X al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^{\perp}$. Notamos $P_X(y) = x$.

Teorema

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces, para todo $y \in H$, existe un único $x \in X$ tal que $\|y - x\| = d(y, X)$.

De hecho, $x = P_X(y)$ y por lo tanto

$$\boxed{\|y - P_X(y)\| = d(y, X).}$$