Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \mu(A_i).$$

$$\underbrace{f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \chi_{A_i}(x)}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

L MEDIBLE

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : \; f(x) \leq u(x), \, x \in [0,1]\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : \; v(x) \leq f(x), \, x \in [0,1]\}.$

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i\,\mu(A_i).$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : \ f(x) \leq u(x),\, x \in [0,1]\}$.
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : \ v(x) \leq f(x),\, x \in [0,1]\}$.

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos su integral de Lebesgue como

$$\int f\,d\mu = \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v\,d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u\,d\mu \right\}.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\underbrace{\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu}.$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x.

Si $\exists\, E \;/\; \mu(E) = 0 \;/$ la prop. vale $\forall\, x \in E^c$

$\left(\begin{array}{l} E^c = [0,1] \setminus E \\ E^c = \mathbb{R} \setminus E \\ \text{según el caso} \end{array} \right)$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x.

prop se traduce a: $f = g$ c.t.p. $\Rightarrow \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

EJERCICIO: f, g med. y int.

$f \leq g$ c.t.p. $\Rightarrow \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

Obs: $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$

$f = 2$ c.t.p. $\Rightarrow \int f\,d\mu = \int 2\,d\mu = 2 \cdot 1 = 2$

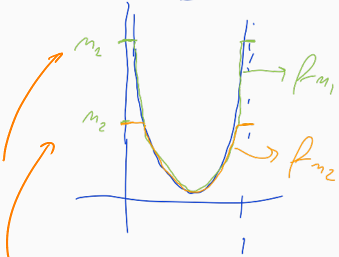
Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. (NO NECESARIAM. ACOTADA)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$



Corta la imagen (no el domin.)

f_n medible $\forall n$ (EJ)

f_n acotada $\forall n$

$|f_n(x)| \leq n \quad \forall x \in [0,1]$.

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

(y medible)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

$f_n \leq f_{n+1}$ (PENSAR)

$\Rightarrow \int f_n \leq \int f_{n+1}$

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

$f_n \geq 0$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

> Definimos
> $$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

$\in [0, +\infty]$

(puede ser $+\infty$)

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

parece trampa, pero es hilar más fino con las hipótesis, para en vez de pedir acotadas, pedir integrables.

Definimos

$$\int f \, d\mu = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu}.$$

Decimos que f es integrable si el límite es finito.

Ejemplo $f: [0,1] \to [0,+\infty]$

$\to f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (f(0) = +\infty)$ ← no importa su valor para la integral, pues mide 0,

$$\boxed{f_n(x)} = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 1/\sqrt{x} \le n \iff 1/n \le \sqrt{x} \iff 1/n^2 \le x \\ n & \text{si } 1/\sqrt{x} > n \iff 1/n^2 > x \end{cases}$$

$$\int f_n(x)\,d\mu = \int_{[0,1/n^2)} f_n\,d\mu + \int_{[1/n^2,1]} f_n\,d\mu = \int_{[0,1/n^2)} n\,d\mu + \int_{[1/n^2,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\,d\mu$$

$$= n \cdot \frac{1}{n^2} + 2\sqrt{x}\Big|_{1/n^2}^{1} = \frac{1}{n} + 2 - 2\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

↳ "RIEMANN ⇒ LEBESGUE" $\quad \int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu = 2.$

Proposición MONOTONÍA

Sean f, g medibles no negativas en $[0, 1]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para casi todo x. Si f es integrable, entonces g es integrable y $\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$.

$\exists E \subset [0,1]$ med /

DEM: $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [0,1] \setminus E$ con $\mu(E) = 0$.

Si $x \in [0,1] \setminus E \Rightarrow g_n(x) = \min\{n, g(x)\} \leq \min\{n, f(x)\}$

$= f_n(x)$.

$\Rightarrow g_n \leq f_n$ ctp. $\Rightarrow$ $\boxed{\int g_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu}$

med acot

EJERCICIO

$\int g\, d\mu \qquad \int f$

$\therefore \int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$.

Proposición

Sea f no negativa, integrable en $[0,1]$. Entonces, $\int f\,d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ en casi todo punto

$\Leftarrow)$ EJERCICIO.

$\Rightarrow)$ $E = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) > 0\}$ q.v.q. E tiene med. cero.

TRUCO: $E = \bigcup_n \underbrace{\{x \in [0,1] \,/\, f(x) \geq 1/n\}}_{A_n}$.

FIJAMOS n

$x \in A_n \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 1/n}$

$\frac{1}{n}\chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{n}\chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\overset{\text{PROP}}{\Rightarrow}$ $0 = \int f\,d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} = \underbrace{\overset{\neq 0}{\frac{1}{n}}\,\mu(A_n)} \Rightarrow \mu(A_n) = 0$.

$E = \bigcup A_n \Rightarrow \mu(E) \leq \overbrace{\sum \mu(A_n)}^{0} = 0$

Continuidad absoluta de la integral

Obs: f med. y acot en $[0,1]$. $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [0,1]$

$A \subset [0,1] \Rightarrow \left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \leq \int_A |f(x)|\,d\mu \leq \int_A M\,d\mu = M\mu(A)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/M$ / si $\mu(A) < \delta \Rightarrow \left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$.

f MED. NO NEGAT., $A \subset [0,1]$ MED

$\Rightarrow \int_A f := \int f \cdot \chi_A \, d\mu$.

$B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$

EJERCICIO $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ $\Rightarrow \boxed{\int f = \sum_j \int_{B_j} f\,d\mu}$

Continuidad Absoluta

Obs: f medible y acotada en $[0,1]$

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$$

Si $A \subseteq [0,1]$

$$\Rightarrow \left| \int_A f(x)\, d\mu \right| \leq \int_A |f(x)|\, d\mu$$

$$\leq \int_A M \, d\mu$$

$$= M \cdot \mu(A)$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ /

si $\mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f(x) \right| < \varepsilon$

Ahora, si f es medible y no negativa (no necesariamente acotada)

$A \subseteq [0,1]$ medible

$$\Rightarrow \int_A f := \int f \cdot \chi_A \, d\mu$$

Ejercicio

$$[0,1] = \bigcup_{j=1}^{N} B_j \quad , \quad B_i \cap B_j = \phi \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_{[0,1]} f = \sum_j \int_{B_j} f \, d\mu$$

¿Vale hacerlo así?

Dem

$$\int_{[0,1]} f = \int f \cdot \chi_{[0,1]}$$

$$= \int f \cdot \chi_{\bigcup_{j=1}^{N} B_i} = \int f \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \chi_{B_i} \right) =$$

Uso que

medible, no acotada

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\text{Con } f_n = \min\{n, f_n\} = \begin{cases} f_n & \text{si } f_n \leq n \\ n & \text{si } f_n > n \end{cases}$$

Dem:

$$\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \cdot \chi_{[0,1]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_j B_j} f_n \cdot \chi_{\bigcup_j B_j}$$

?

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_j \int_{B_j} f_n \cdot \chi_{B_j}$$

Teorema

en $[0,1]$.

Sea f no negativa e integrable. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A f\,d\mu < \varepsilon$$

↳ δ depende de ε.

para todo medible $A \subset [0,1]$ con $\mu(A) < \delta$.

DEM.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) > n \iff \text{si } x \in E_n \\ f(x) & \text{si } f(x) \le n. \iff \text{si } x \in E_n^c \end{cases}$$

$$\boxed{E_n = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) > n\}}$$

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \Rightarrow 0 \le \int f\,d\mu - \int f_n\,d\mu \to 0$$

$E_n = \{x \in [0,1] / f(x) > n\}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} n & \forall x \in E_n. \\ f(x) & \forall x \in E_n^c \end{cases}$

$\int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \to 0$

$= \int_{E_n} f + \int_{E_n^c} f - \int_{E_n} f_n - \int_{E_n^c} f_n = \int_{E_n} f + \cancel{\int_{E_n^c} f} - \int_{E_n} n - \cancel{\int_{E_n^c} f}$

$= \int_{E_n} f - \int_{E_n} n \Rightarrow \int_{E_n} f - \int_{E_n} n \longrightarrow 0$

$\exists N / \boxed{0 \leq \int_{E_N} f - \int_{E_N} N < \varepsilon/2}$

Sea $A \subset [0,1]$ med con $\mu(A) < \delta = \varepsilon/2N$.

QVQ $\int_A f < \varepsilon$.

$$\int f\,d\mu = \int_{A\cap E_N} f + \int_{A\cap E_N^c} f = \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N^c} \widehat{f}$$

$$\underset{(d)}{\leq} \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \underbrace{\int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N^c} \widehat{N}}_{= \int_A N\,d\mu = N\mu(A) < N\cdot\delta = N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon/2} <$$

$f \leq N$ en E_N^c

$$< \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \varepsilon/2 = (*)$$

PENSAR

$\boxed{m > N \; \geq 0 \text{ (VER)}}$

$$\int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N = \lim_m \int_{A\cap E_N} f_m - \int_{A\cap E_N} N = \lim_{m\to\infty} \int_{A\cap E_N} (f_m - N)\,d\mu$$

$$\leq \lim_{m\to+\infty} \int_{E_N} (f_m - N)\,d\mu = \lim_{m\to+\infty} \int_{E_N} f_m - \int_{E_N} N\,d\mu = \int_{E_N} f - \int_{E_N} N\,d\mu < \varepsilon/2$$

$$\therefore \int f\,d\mu < (*) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Corolario

LEBESGUE

Sea f no negativa e integrable. La función

$$F(x) = \int_{[0,x]} f\, d\mu$$

es uniformemente continua en $[0,1]$.

$$F(x) = \int_{[0,x]} f\, d\mu \qquad F(0) = \int_{[0,0]} f\, d\mu = 0$$

$$F(1) = \int_{[0,1]} f\, d\mu$$

$$F(1/2) = \int_{[0,1/2]} f\, d\mu$$

$$\underbrace{\int_{[0,1/2]} f\, d\mu}_{\text{LEBESGUE}} \neq \underbrace{\int_0^{1/2} f\, dx}_{\text{RIEMANN}}$$