Nico.

Cardinalidad 2

Vimos:

Si $\# A_n \leq \aleph_0 \quad \forall n \quad (n \in \mathbb{N})$,

$\Rightarrow \# \bigcup_{n \geq 1} A_n \leq \aleph_0$

¿Qué pasa si $\# A_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

↳ ej 10 de Pr. 2.

Recordar

$c = \# \mathbb{R}$

Voy a unir solo 2 conj. de una familia de card $= c$.

Sea

ejercicio.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1) \xrightarrow{\sim} (0,1) \longrightarrow ⊛$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$y \longmapsto \frac{y+1}{2}$$

se puede usar arctan también.

⊛ ejercicio 6, pero contable

$$(0,1) \xrightarrow{\sim} [0,1) \xrightarrow{\sim} [k, k+1)$$

ejercicio: Dar una función biyectiva

(EXPLÍCITA) CONTABLE

6. (a) Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es ~~numerable~~ y $B \setminus A$ es infinito. Probar que $B \setminus A \sim B$.

$(A = \{0\})$

$$\therefore \quad \mathbb{R} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{[k, k+1)}_{\sim \mathbb{R}}$$

"UNA UNIÓN DISJ. DE CONJ. DE CARDINAL c TIENE CARDINAL c"

EJ 10:

10. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

Sugerencia:

Usar el ejercicio 1 (Puedo reescribir A_n's como B_n's disjuntos)

Prop:

Sea $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\left(= \{ f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \} \right)$

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Idea:

Sea $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$

$$(a_n)_{n\geq 1} \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{2^n}$$

- "Todo $x \in [0,1]$ admite un desarrollo en base 2"

  $\Rightarrow \varphi$ es sobreyectiva

- φ es inyectiva, salvo

$$\varphi(a_1 \ldots \underbrace{a_n}_{\neq 1} 1\,1\,1 \ldots) =$$

$$= \varphi(a_1 \ldots \underbrace{(a_n + 1)}_{=1} 0\,0\,0 \ldots)$$

Así, si

$$A = \{ (a_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_n \text{ \underline{no} termina en unos} \}$$

Resulta

$$\varphi : A \longrightarrow [0,1) \quad \text{Biyectiva.}$$

Tengo que mostrar que <u>Todas</u> las sucesiones son biyecciones de ceros y unos.

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim A$$

Sugerencia:

Usar el ejercicio 6.

Sea

$$A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ continua} \}$$

$$\# A = ¿?$$

- $\mathbb{R} \xhookrightarrow{\text{inyectiva}} A$

$$t \longmapsto (x \longmapsto t)$$

← función que vale constantemente t

$\Rightarrow$ Como encontré una func. inyectiva.

$$c \leqslant \# A$$

Disgresión:

- Si quisiera acotar por arriba:

$$\# A \leqslant \# \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$\hat{\llcorner}$ se demuestra con aritmética de cardinales.

Veamos que

$$\# A \stackrel{?}{=} c$$

Para eso

$$\# A \stackrel{?}{\leqslant} c \quad \left(\text{ya sé que } \# A \geqslant c \right)$$

Definimos

$$\varphi : A \longrightarrow \{ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \} =: B$$
$$f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}}$$

Afirmo:

φ es inyectiva

Basta ver que

$$\#B \overset{?}{\leq} c$$

Dem:

Sean $f, g \in A \,/\, \varphi(f) = \varphi(g)$

ie. $f(x) \overset{?}{=} g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

Sea $y \in \mathbb{R}$.

Vimos (en Pr.1)

$$\exists (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Q} \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = y$$

$\therefore$

$$f(y) = f(\lim x_n)$$

$$\underset{f \text{ cont}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim f(x_n)$$

$$\underset{x_n \in \mathbb{R}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim g(x_n)$$

$$\underset{g \text{ cont}}{\overset{\uparrow}{=}} g(\lim x_n)$$

$$= g(y)$$

$\blacksquare$

Sea

$$B = \{ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \}$$

Sea

$$\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{Biyección}$$

Ley exponencial

$$\Rightarrow B \xrightarrow{\sim} \{ g : \mathbb{Q} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \} \circledast$$

$$f \longmapsto \Psi^{-1} \circ f$$

$$\circledast \longrightarrow \{ h : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \to \{0,1\} \}$$

$$g \longmapsto \left((q,n) \longmapsto (g(q))(n) \right)$$

me quedo con el n-ésimo

$$\left(q \mapsto (n \mapsto h(q,n)) \right) \longleftarrow h$$

Ley Exponencial (general)

$$(A^B)^C \sim A^{B \times C}$$

Vimos que

$$\exists\, \gamma : \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

pues numerables

$$\longrightarrow \{ k : \mathbb{N} \to \{0,1\} \} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto h \circ \gamma^{-1}$$

Vimos

$\blacksquare$