UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Cardinalidad 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Conjuntos numerables

X numerable $\Leftrightarrow$ $\exists f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva.

EJ: $\{\text{pares}\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,

$$\{10, 100, 1000, 10.000, \ldots\} \longleftarrow \mathbb{N}$$

$$10^n \longleftarrow\!\shortmid\; n$$

Conjuntos numerables

Observación

Si X es numerable si y sólo si X se puede escribir como una sucesión de elementos distintos: $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

$\Rightarrow)$ X num. $\exists f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva

Sea $x_n = f(n)$, $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$X = \operatorname{Im} f = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$

↳ f suryectiva

$n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m) \Rightarrow x_n \neq x_m$.

$\Leftarrow)$ PENSAR.

Ejemplo
$\mathbb{R}$ no es numerable.

$\mathbb{R}$ NO es una sucesión. Sea $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ cualquiera y veamos que $\underbrace{\exists y \in \mathbb{R}}$ / $y \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x_1 = m_1, a_{1,1}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots$ → desarrollo decimal.

$x_2 = m_2, a_{2,1}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots$

$x_3 = m_3, a_{3,1}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots$

$x_4 = \quad \ldots \quad a_{4,4}$

Sea $y = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$

$$b_n = \begin{cases} 3 & a_{n,n} \neq 3 \\ 5 & a_{n,n} = 3 \end{cases}$$

y tiene desarrollo único. Entonces, $y \neq x_n \ \forall n$ pues el n-ésimo dígito de y es $\neq$ al de x_n.

Ejemplo
$\mathbb{R}$ no es numerable.

VIMOS: $\mathbb{R}$ NO numerable.

pero NO "calculamos" $\# \mathbb{R}$.

EJ DE LA PRÁCTICA: $\underbrace{\mathbb{R}} \sim \underbrace{P(\mathbb{N})}$.

$\# P(\mathbb{N}) > \# \mathbb{N}$

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

DEM: X inf $\Rightarrow X \neq \emptyset \Rightarrow \exists \; x_1 \in X$.

X inf $\Rightarrow X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \, x_2 \in \underbrace{X \setminus \{x_1\}}$ $(x_2 \neq x_1)$

X inf $\Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \, x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ $\boxed{\begin{array}{l} x_3 \neq x_1 \\ x_3 \neq x_2 \end{array}}$

$\vdots$

INDUCTIVAMENTE: si ya elegimos $x_1, \dots, x_{n-1}$ distintos.

$X \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \; x_n \in X \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ $\begin{array}{l} x_n \neq x_1 \\ \vdots \\ x_n \neq x_{n-1} \end{array}$

$(x_n)_n \subset X \qquad x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

$\therefore \; Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$

$\hookrightarrow$ NUMERABLE

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Observación

Decir que X tiene un subconjunto numerable es lo mismo que decir que existe una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en X. Entonces, el teorema dice que $\aleph_0 \leq \#X$ para todo X infinito.

$Y \subset X$ NUM. $\exists\ \underbrace{f : \mathbb{N} \to Y}_{\text{biy.}} \subset X.$

Si pensamos $\mathbb{N} \xrightarrow{f} Y \subset X$

$f \to$ INYECTIVA.

VALE LA VUELTA (PENSAR)

$\therefore\ \aleph_0 \leq \#X\ \forall X$ INFINITO

Proposición
Si X es infinito, existe $Z \subset X$, Z numerable, tal que $X \sim X \setminus Z$.

X INF $\Rightarrow$ $\exists$ $Y \subset X$ numerable $\boxed{Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$

$y_n \neq y_m$ $(n \neq m)$.

IDEA: $X = (X \setminus Y) \overset{D}{\cup} Y = (X \setminus Y) \cup Y_p \overset{D}{\cup} Y_i = (*)$

$Y_p = \{y_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $Y_i = \{y_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} \to$ NUM.

$(*)$ $(X \setminus Y) \overset{D}{\cup} Y_p \overset{D}{\cup} Y_i \sim$ ej pr.

$\sim (X \setminus Y) \overset{D}{\cup} Y_p = X \setminus Y_i$

$f: Y \to Y_p$ biy:
$y_n \mapsto y_{2n}$

$h: X \to X \setminus Y_i$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \notin Y \\ f(x) & x \in Y \end{cases}$$

BIYECTIVA (EJ).

Tomamos $Z = Y_i$, SALE.

Proposición
Si X es infinito, existe $Z \subset X$, Z numerable, tal que $X \sim X \setminus Z$.

Ejercicio (GUÍA)
Si A es numerable y $B \setminus A$ es infinito, entonces $B \setminus A \sim B$.

Proposición

Si X es infinito, existe $Z \subset X$, Z numerable, tal que $X \sim X \setminus Z$.

Ejercicio

Si A es numerable y $B \setminus A$ es infinito, entonces $B \setminus A \sim B$.

Ejercicio

Si X es infinito y A numerable, entonces $X \sim X \cup A$.

↳ en part., X, A NUM. $\Rightarrow$ $X \cup A$ NUM.

Ya vimos que hay conjuntos que son coordinables con subconjuntos propios.

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \{\text{pares}\} \sim \{10, 100, 1000, \ldots\}$$

$$\mathbb{R} \to (0, +\infty) \qquad x \mapsto e^x$$

biy.

$$\overbrace{(-\pi/2, \pi/2)} \to \overline{\mathbb{R}} \qquad t \mapsto \operatorname{tg} t$$

biy

EJ: TODO INTERVALO (NO TRIVIAL) TIENE CARDINAL c.

$$\boxed{\begin{array}{c} (a,b),\ [a,b) \\ (a,b]\quad [a,b] \\ a \neq b \end{array}}$$

(el intervalo $[3,3]$ NO).

Corolario

Un conjunto es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio.

DEM: $\Rightarrow$) VIMOS: X infinito $\Rightarrow \exists\, Z \subset X$ /

↳ NUMERABLE

$X \sim \underbrace{X \setminus Z}$

↳ subconj propio de X.

$\Leftarrow$) IDEA: X FINITO $\Rightarrow X$ NO coord con ningún subconj. propio.

(sale x INDUCCIÓN)

NO LO HACEMOS

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

$\exists\, f: X \to Y$
INY

$\exists\, g: Y \to X$
INY

$\boxed{\exists\, h: X \to Y \quad \text{BIYECTIVA}}$

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

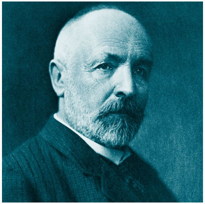
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder

Felix Bernstein

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Corolario

La relación $\leq$ entre cardinales es una relación de orden.

REFL ✓ TRANSIT ✓ ANTISIM

(C-S-B)

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$f(n) = n$

INY

$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

$q \in \mathbb{Q}$, $\quad q = \frac{m}{n}$ $\quad$ $\exists !$ $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$

$$g(q) = \begin{cases} 2^m 3^n & \text{si } m \geq 0 \\ 5^{|m|} 3^n & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

POR DESCOMP. ÚNICA,

g INY.

$\therefore$ (x C.S.B) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad\qquad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto (n, 1) \qquad\qquad (m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

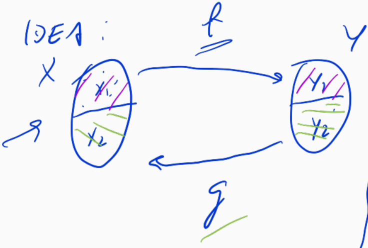
INY $\qquad\qquad$ INY

x C.S.B $\qquad \boxed{\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

(se puede usar para probar que unión CONTABLE DE CONTABLES ES CONTABLE.)

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

IDEA:



SI PODEMOS PARTIR X Y Y:

$X = X_1 \overset{D}{\cup} X_2$ $\quad$ $Y = Y_1 \overset{D}{\cup} Y_2$

DE MANERA QUE:

$f : X_1 \to Y_1$ biy

$g : Y_2 \to X_2$ biy.

LISTO!

$h : X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & x \in X_2 \end{cases}$$

ES BIYECTIVA (EJ.)

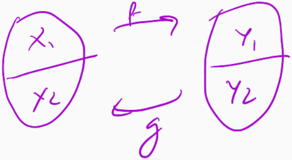
X_1 $\quad$ $Y_1 = f(X_1)$

$Y_2 = Y \setminus f(X_1)$.

$X_2 = g(Y \setminus f(X_1))$.

$X_1 \overset{?}{=} X - g(Y \setminus f(X_1))$

↳ QUEREMOS.



BUSCAMOS $X_1 \subset X$ /

$$\boxed{X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1))} \longrightarrow$$ CON ESTO YA ESTAMOS

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

$$\phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$

BUSCAMOS $\subset X$

$$\phi(X_1) = X_1$$

$$\boxed{A \subseteq B \subset X} \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B)) \Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(A) \subseteq \phi(B)} \quad (*)$$

$\phi(A) = X - g(Y - f(A))$ BUSCAMOS $X_1 \subset X$ / $\boxed{\phi(X_1) = X_1}$.

$\boxed{A \subset B \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B) \quad (*)}$

$\boxed{\mathcal{C} = \{ C \subseteq X \;/\; \phi(C) \subseteq C \}}$

$\boxed{X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C}$ VEAMOS QUE SIRVE $X \in \mathcal{C}$.

• $X_1 \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}. \Rightarrow \phi(X_1) \underset{(*)}{\subseteq} \phi(C) \subseteq C$

$C \in \mathcal{C}$. $\forall C$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subset \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = X_1$ $\boxed{\phi(X_1) \subseteq X_1}$ ✓

• $\phi(X_1) \subseteq X_1 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1) \Rightarrow \phi(X_1) \in \mathcal{C}$

$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \phi(X_1) \Rightarrow \boxed{X_1 \subseteq \phi(X_1)}$

$\phi(X_1)$ es uno de ellos.

$\therefore X_1 = \phi(X_1)$