

4. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Sean  $x \in E$  y  $r > 0$ .

- (a) Probar que  $\{x\}$  es un conjunto cerrado.
- (b) Probar que  $B(x, r)$  es un conjunto abierto.
- (c) Probar que si  $r > r' > 0$  entonces  $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$ .
- (d) Probar que  $\overline{B(x, r)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$  es un conjunto cerrado.
- (e) Deducir que  $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B(x, r)}$ .
- (f) Dar un ejemplo en que  $\overline{B(x, r)}$  sea un subconjunto *propio* de  $\overline{B(x, r)}$ .
- (g) Probar que  $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$  es un conjunto abierto.

4a) S:  $A = \{x\}$  es cerrado

$\Rightarrow A^c = E \setminus \{x\}$  es abierto

Sea  $y \in A^c$  (para cada  $y \in A^c$ )

qva

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B(y, \varepsilon) \subseteq A^c$$

$$\{z \in E : d(y, z) < \varepsilon\} \subseteq A^c$$

Si tomo

$$\varepsilon = d(x, y)$$

$$\Rightarrow B(y, \varepsilon) = \left\{ z \in E : d(y, z) < d(x, y) \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{z \in E \setminus \{x\} \text{ pues } y \neq x}$

$$\Rightarrow B(y, \varepsilon) \subseteq A^c$$

$$d(y, z) < d(y, x)$$







