

## Práctica 6

1. Probar que  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  definen normas en  $\mathbb{R}^n$ , donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Probar que se verifican:

- (a) Las operaciones  $+: E \times E \rightarrow E$  y  $\times: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  son continuas.
- (b) Si  $x \in E$  y  $r > 0$ ,  $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$  (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- (c)  $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$ .
- (d) Si  $y, z \in B(x, r)$  entonces para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $ty + (1-t)z \in B(x, r)$  (es decir, la bola es *convexa*).

3. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  y  $x_0 \in E$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Probar que si definimos  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ .

4. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subseteq E$  un subespacio (vectorial). Probar que:

- (a)  $\overline{S}$  también es un subespacio.
- (b) Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .
- (c) Si  $\dim(S) < \infty$ , entonces  $S$  es cerrado.
- (d) Si  $S$  es un hiperplano (o sea:  $\exists x \neq 0$  tal que  $S \oplus \langle x \rangle = E$ ), entonces  $S$  es o bien denso o bien cerrado en  $E$ .

5. Sea  $\mathbb{R}_n[t]$  el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que  $n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Consideremos para  $p \in \mathbb{R}_n[t]$  las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

- (a) ¿Son  $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$  y  $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$  espacios de Banach? ¿Por qué?
- (b) Justificar por qué ambas normas resultan equivalentes en  $\mathbb{R}_n[t]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

- (c) Si  $\mathbb{R}[t]$  denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , probar que ahí las normas  $\|\cdot\|_\infty$  y  $\|\cdot\|_1$  no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el item anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta  $n$  **para todo**  $n \in \mathbb{N}$ ?
6. Definimos  $\ell^\infty$  como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

- (a) Probar que la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de  $\ell^\infty$  no es compacta.  
 (b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en  $\ell^\infty$ .
7. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados. Sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal. Probar que son equivalentes:
- (a)  $T$  es continuo en 0.  
 (b) Existe  $x_0 \in E$  tal que  $T$  es continuo en  $x_0$ .  
 (c)  $T$  es continuo.  
 (d)  $T$  es uniformemente continuo.  
 (e) Existe  $M > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in E$  ( $T$  es *acotada*).  
 (f) Para todo  $A \subseteq E$  acotado,  $T(A)$  es acotado.



8. Sean  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  y sea  $T : E \rightarrow F$  lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E\}.$$



9. Sea  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Completar

Probar que si consideramos en  $C([0, 1])$  la norma infinito definida como  $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ , entonces  $K$  es lineal y continua. Acotar su norma.



10. Sea  $(\mathbb{R}[t], \|\cdot\|_\infty)$  el espacio de polinomios definido en el Ejercicio 5. Sea  $\delta : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$  dado por  $(\delta p)(t) = p'(t)$ , donde  $p'$  denota el derivado de  $p$ . Probar que  $\delta$  es un operador lineal que no es continuo.



11. Sea  $\mathcal{E} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\mathcal{E}f = f(0)$ . Probar que si consideramos en  $C([0, 1])$  la norma infinito, entonces  $\mathcal{E}$  es un funcional lineal continuo.



12. Sea  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $w_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Se define  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i.$$



Probar que  $(\cdot, \cdot)$  define un producto interno en  $\mathbb{R}^n$ .



13. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach cuya norma satisface la regla del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E.$$

Videy

Definimos la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad \forall x, y \in E.$$



Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno y que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert.



14. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno y sean  $f, g \in H$ . Probar que  $\langle f, g \rangle = 0$  si y sólo si

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

¿Qué diría Pitágoras sobre esto?



15. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$  una sucesión y  $x_0 \in H$ . Probar que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  en  $H$ .



16. Sea  $\ell^2$  el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

Videy,

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para  $a, b \in \ell^2$  definimos

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n.$$

- (a) Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?
- (b) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de  $\ell^2$ ?
- (c) Probar que  $\gamma : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.



17. Para  $f, g \in C([0, 1])$  definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

- (a) Comprobar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?



- (b) Probar que con esta norma, la funcional definida en el Ejercicio 11 no es continua.

?

- (c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

- (d) Probar que la funcional lineal

$$\gamma(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno. Se puede ver que no existe  $g \in C([0, 1])$  tal que  $\gamma(f) = \langle f, g \rangle$  para todo  $f \in C([0, 1])$  (convencerse, no hace falta demostrarlo). ¿Contradice esto el teorema de representación de Riesz enunciado en la teórica?



18. Sea  $\ell^2$  el espacio definido en el Ejercicio 16. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de  $\ell^2$  generado por  $e_1, e_2$  y  $e_3 + e_4$ , donde para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $e_j \in \ell^2$  es la sucesión que tiene un 1 en el lugar  $j$  y 0 en los demás.



19. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $X \subseteq H$  un subespacio cerrado de  $H$ . Sea  $P_X : H \rightarrow H$  la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $X$ . Probar que:

.

- (a)  $P_X^2 = P_X$ ;
- (b)  $P_{X^\perp} = I - P_X$ , donde  $I$  denota la identidad en  $H$ ;
- (c)  $\langle P_X(y), z \rangle = \langle y, P_X(z) \rangle$ , para todos  $y, z \in H$ .