Nicolás Sirolli   Luna Mar 22/21

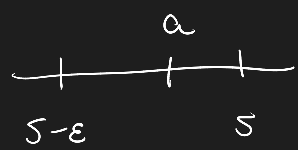
Supremos e Ínfimos

Recordar:

$A \subseteq \mathbb{R}$, Acotado superiormente

$\Rightarrow s = \sup A$ sii

- $s \geq a \quad \forall a \in A$
- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ / \ a > s - \varepsilon$



equivalentemente para el ínfimo.

(Propiedad / Axioma) Principio de Arquímedes (no es un "principio" para nos.)

↳ $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente

Demo: (Por absurdo)

Sup. que $\exists x \in \mathbb{R} \ /$

$n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists s = \sup \mathbb{N}$

elijo $\varepsilon = 1$

Luego, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ con $s-1 < n$

$+1$

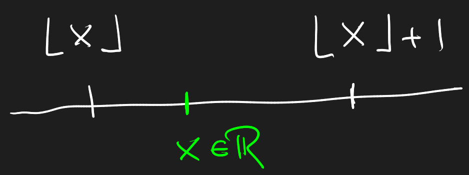
$\therefore \quad \underset{\uparrow \atop \text{sup}}{s} < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ Abs!

$\Rightarrow$ Los naturales no están acotados $\boxtimes$

Obs:

Sí es un principio que cada natural tiene un siguiente.

Parte entera



$\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$

$\lfloor -3{,}1 \rfloor = 4$

Prop

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, n \in \mathbb{Z} \,/$

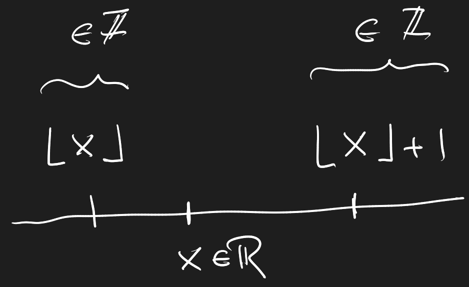
$n \leq x < n+1$

Nombre / Not:

$n =$ Parte entera de x

n = Piso de x

$n = \lfloor x \rfloor$



Dem :

Sea :

$$A = \{ n \in \mathbb{Z} : x < n+1 \}$$

- $A \neq \emptyset$ (Arquímedes)
- A está acotada inferiormente $\Rightarrow$ $n > x-1 \quad \forall n \in A$

$\Rightarrow \exists\, n = \inf A$

Afirmo :

$\boxed{i}$ $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{ii}$ $n \leq x < n+1$

Pruebo

$\boxed{i}$ luego

$\boxed{ii}$ como $n \in A$, $x < n+1$

qvq $n \leq x$

$$\left(\text{y sino, } \begin{array}{c} n > x \text{ y luego} \\ n-1 > x-1 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$n-1 \in A \quad \text{Abs!}$$

Imposible, pues $n \leq m \ \forall\, m \in A$

Recuerdo

"Todo subconjunto de Naturales tiene un 1° elemento"

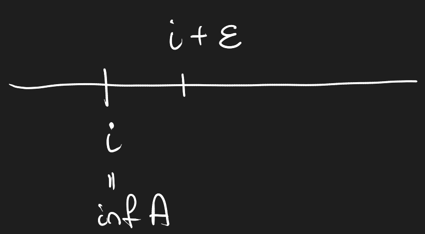
$\boxed{i}$ Lema:

Si $A \in \mathbb{Z}$ es acotado inferiormente
$\neq \emptyset$

$\Rightarrow$ inf $\in A$

(equivalentemente, A tiene mínimo)

Demo:

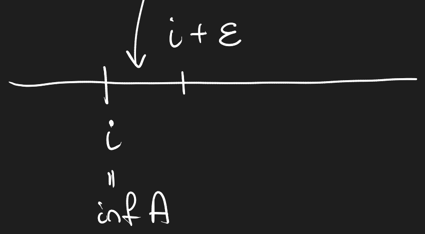


Afirmo:

Si $\varepsilon > 0$ es suf. chico

$$\Rightarrow (i, i+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

no hay enteros en el intervalo



Pero:

$$\exists \alpha \in A \;/\; \alpha < i+\varepsilon$$

$$\therefore \alpha = i$$

$$\boxtimes$$

Unicidad:

Sup $n \leq x < n+1$

$m \leq x < m+1$

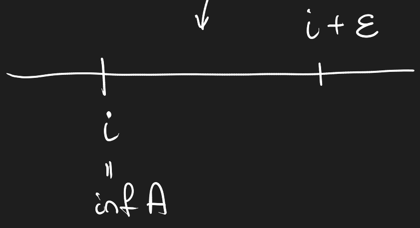
con $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n < m+1 \Rightarrow n \leq m \\ \quad m < n+1 \Rightarrow m \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

No vale restar desigualdades!

Sobre los Reales

quiero un ε / no haya enteros adentro.



$i \in \mathbb{R}$

Idea:

Como $i \in \mathbb{R}$

tiene desarrollo decimal

$i = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$

(Obs: $\underbrace{0,3 = 0,2\widehat{99}}$)

no considero las "colas de 9"

Tomo $j \geq 1$ mínimo / $a_j \neq 9$

Así,

$$i = a_0, 99 \dots 9 \underbrace{a_j}_{\neq 9} a_{j+1} \dots$$

$\Rightarrow$ Tomo

$$\varepsilon = 0,00 \dots 010$$

Así,

$$i + \varepsilon = a_0, 99 \dots 9 (a_j + 1) a_{j+1}$$

Luego,

$i+\varepsilon - i = \varepsilon$

$\boxtimes$

Problemas

1) Sea $A = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \}$

Hallar, si existen, Sup, máx, Inf, mín de A

Por la definición de A:

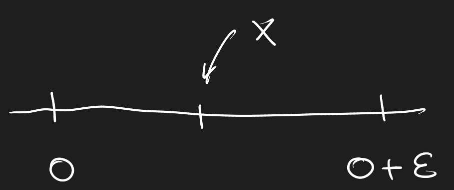
- $\sqrt{2}$ es cota superior $\Rightarrow \exists$ supremo de A
- 0 es cota inferior $\Rightarrow \exists$ ínfimo de A

- Ínfimo(A) $= 0$, pues

  $\hookrightarrow$ $0 \leq x \quad \forall x \in A$ ✓

  candidato a ínf.

  $\hookrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A \ / \ 0 + \varepsilon > x$



Si elijo $x = 0$

$\Rightarrow \varepsilon > 0$ ✓

Ahora el mín:

$\inf A \in A \Rightarrow \exists \min A = \inf A = 0$

Supremo

(ver ej 3 de guía 1)

hay racionales? sí

- Si $\sqrt{2}-\varepsilon < 0$, tomo $q=0$ y listo

Si $\sqrt{2}-\varepsilon \geq 0$, (cito ej 3 de la práctica)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ con $\underbrace{\sqrt{2}-\varepsilon < q < \sqrt{2}}_{\text{Luego } q \in A}$

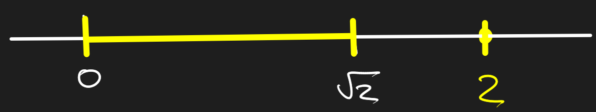
Conclusión

$\operatorname{Sup} A = \sqrt{2} \notin A$

$\Rightarrow \nexists \max A$

2) idem, para

Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cup \{2\}$



- El ínfimo es el mismo que antes

- 0 es cota inf.
- $0 \in A \Rightarrow 0 = \text{ínfimo} A = \text{mín } A$

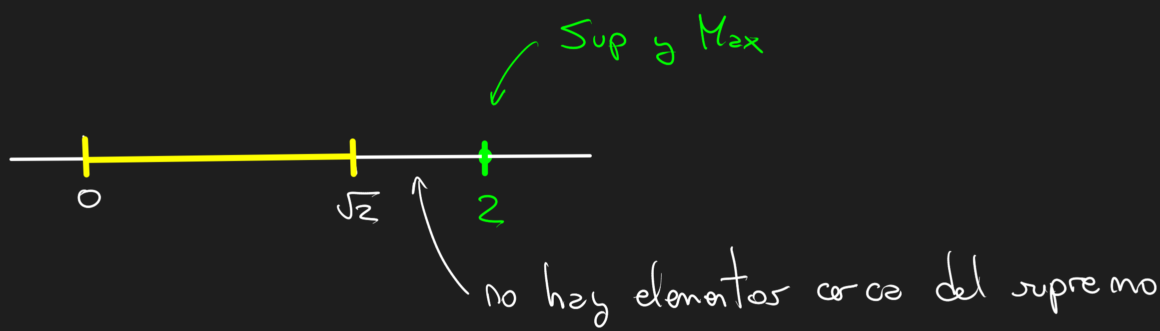
- 2 es cota superior

$2 \geq \sqrt{2}$ pues $\underbrace{2^2 \geq (\sqrt{2})^2}$

Puedo hacer esto pues son no negativos.

Computacionalmente más viable que desarrollo decimal.

$2 \in A \Rightarrow 2 = \max A$
$= \text{Sup } A$



3) $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \;,\; x = \frac{y}{5^k} \text{ con } y \in \mathbb{Z},\; k \geq 0, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- $\exists$ mín A, y es 0 (0 cota inf, $0 \in A$)

Obs:

Si A_1 es el del ej 1,

tenemos $A \subseteq A_1$

$$\Rightarrow \sup A \leq \sup A_1$$

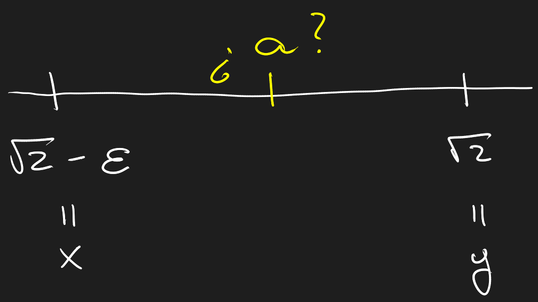
$$\inf A \geq \inf A_1$$

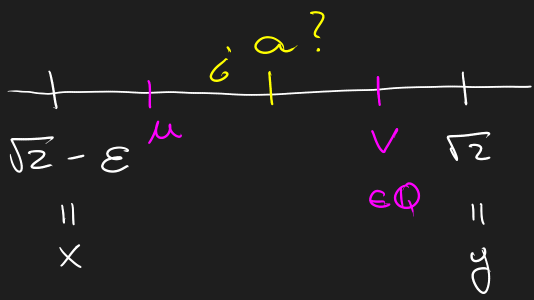
- Afirmo:

$\sup A = \sqrt{2}$ ← es cota superior

Es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \,/\, a > \sqrt{2} - \varepsilon$$





Tomo

- $v \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$
- $\mu \in (x, v) \cap \mathbb{Q}$

"Puedo suponer que x, y son racionales"

Tengo:

$u, v \in \mathbb{Q} \quad , \quad u < v$

escribo

$$u = \frac{r}{s} \quad , \quad v = \frac{m}{n}$$

con $\quad r, m \in \mathbb{Z}$,

$\qquad s, n \in \mathbb{N}$

Busco :

$y \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 0$ /

$$\frac{r}{s} < \frac{y}{5^k} < \frac{m}{n}$$

$$u < \frac{y}{5^k} < v$$

equivalentemente (saco denominadores)

$(.s.n.5^k)$

incógnitas

$$\underbrace{n.r}_{a \in \mathbb{Z}}.5^k < y.\underbrace{s.n}_{c \in \mathbb{N}} < \underbrace{s\,m}_{b \in \mathbb{Z}}.5^k$$

Dato

$$u < v \Rightarrow \frac{r}{s} < \frac{m}{n} \underset{s, n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n.r < s.m$$

Lema

- Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$,

  y dado $c \in \mathbb{N}$,

existen k, y /

$$a \cdot 5^k < c \cdot y < b \cdot 5^k$$

Dem :

Tomo k /

$$5^k \cdot (b-a) > c$$

(Propiedad) "Principio de Arquímedes"

$$5^k > \frac{c}{\underbrace{b-a}_{\in \mathbb{N}}}$$

$5^{\mathbb{Z}}$ no está acotado

Tomo :

$$y = \min \{ z \in \mathbb{Z} \,/\, a \cdot 5^k < c \cdot z \}$$

Así, $a \cdot 5^k < c \cdot y$ ← primera desigualdad! ✓

qvq : $c \cdot y < b \cdot 5^k$ ← segunda y última desigualdad

- Supongo que no :

$$\Rightarrow c \cdot y \geq b \cdot 5^k$$

uso los datos que tengo $5^k \cdot (b-a) > c$

$$c < \underbrace{b\cdot 5^k}_{\leq c\cdot y} - 5^k\cdot a \leq c\cdot y - 5^k\cdot a$$

estricto
(todo depende de que sea estricto)

Como:

$$y = \min\{z \in \mathbb{Z} \,/\, a\cdot 5^k < c\cdot z\}$$

$\Rightarrow$ $y-1$ no cumplirá

siendo entonces que:

$$a\cdot 5^k \geq c\cdot(y-1)$$

$$-a\cdot 5^k \leq c\cdot(1-y)$$

$$\leq c\,y + c\cdot(1-y) = c$$

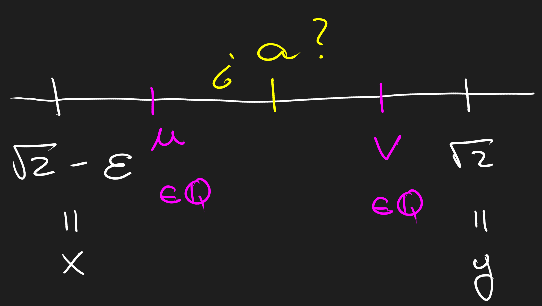
$$c < c \quad \text{Abs!}$$

$$\Rightarrow c\cdot y < b\cdot 5^k$$

y queda demostrado que

$$a\cdot 5^k < c\cdot y < b\cdot 5^k$$

que aseguraba la existencia de u, v en el intervalo $\forall \varepsilon > 0$, probando la segunda condición de propiedad de supremo:



Así, como

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \,/\, a > \sqrt{2} - \varepsilon \quad \boxed{b}$$

y como $\sqrt{2}$ es cota superior $\boxed{a}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ es supremo de A

$\blacksquare$