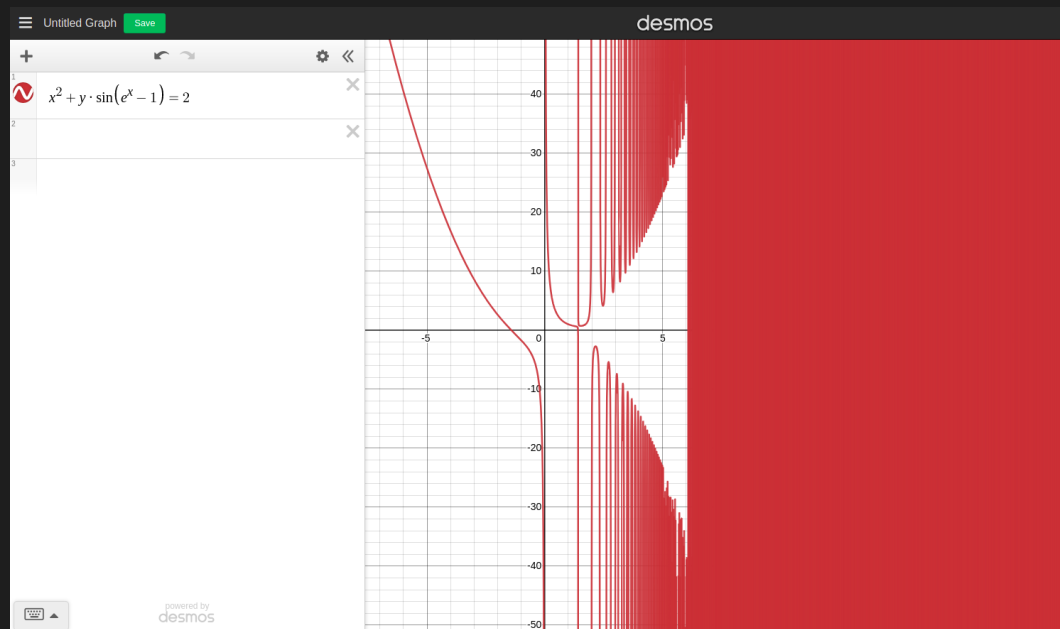


7. Considerando en cada \mathbb{R}^n la métrica euclídea d_2 , probar que:

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \sin(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

a) Gráfico porque $\neg A$

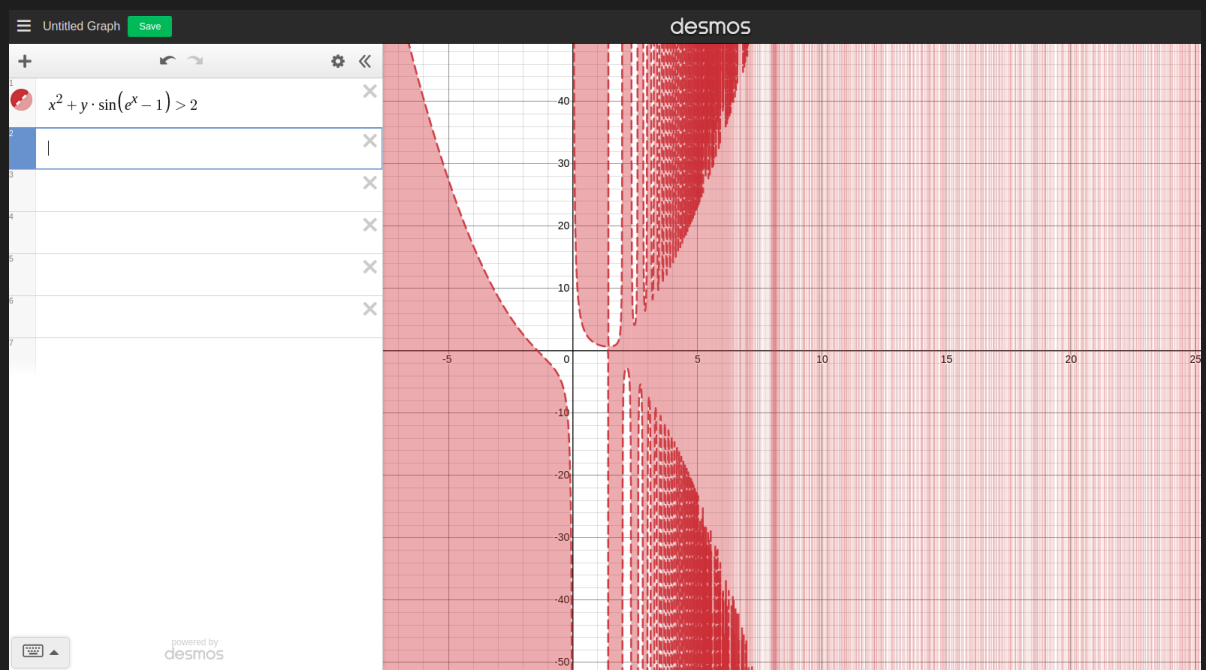
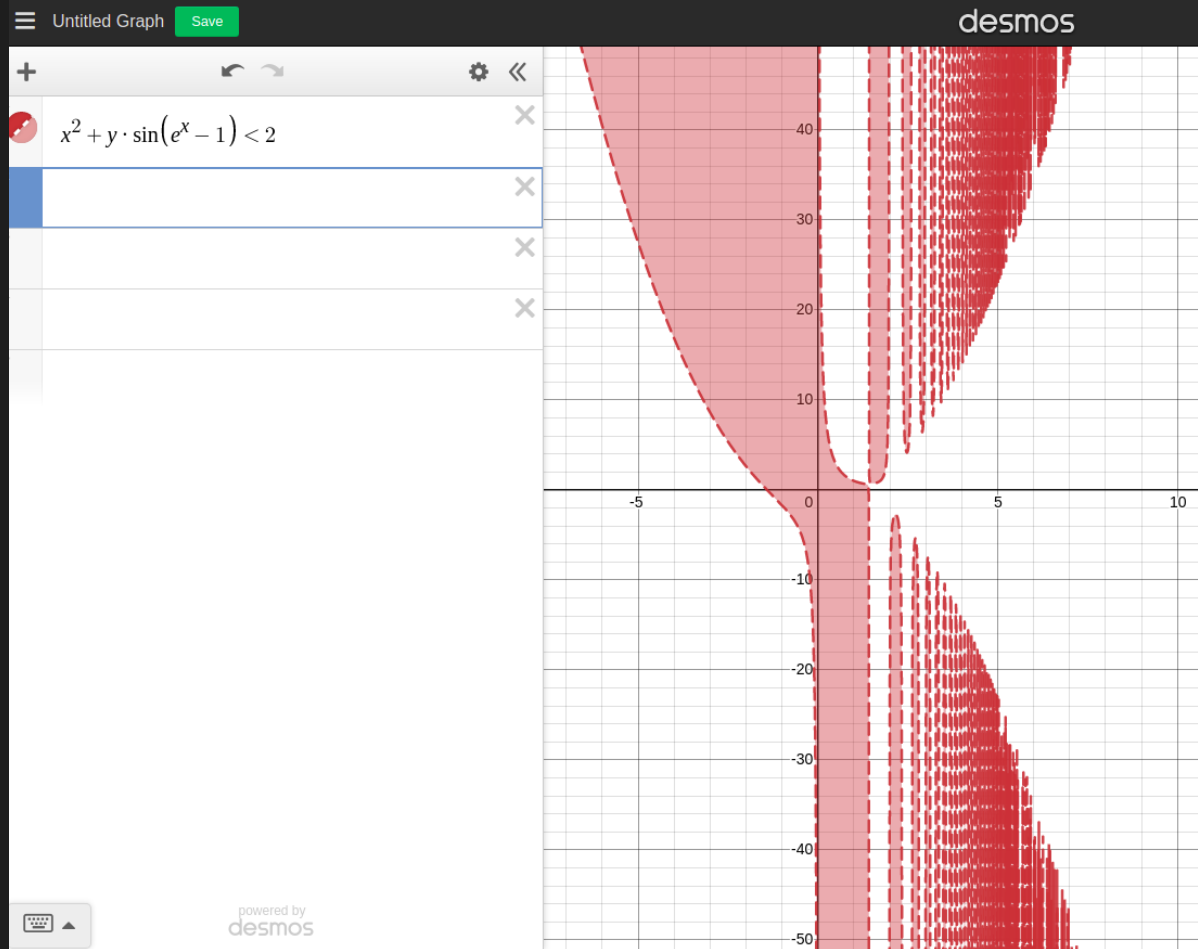


Khe!



Sé que A es cerrado $\Leftrightarrow A^c$ es abierto

Veo $f(x, y) < z$
y $f(x, y) > z$



Si por cada $(x, y) \in A^c$ puedo meter una bolita abierta
 contenida en $A^c \Rightarrow A^c$ es abierto
 $\Rightarrow A$ es cerrado

$$\text{Llamo } A_-^c = \left\{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2 \right\}$$

$$A_+^c = \left\{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) > 2 \right\}$$

Probo A_-^c abierto

$$\text{Sea } (x,y) \in A_-^c$$

$$\text{q.v.q } \exists r > 0 / B((x,y), r) \subseteq A_-^c$$

$$\text{Llamo } f(x,y) := x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1)$$

Como $f(x,y)$ es continua (pues suma, resta, producto de funciones continuas en \mathbb{R}^2 ...
o hay que probarlo? $\ddot{\sigma}$)

$$\Rightarrow f(B((x,y), \delta)) \subseteq B(f(x,y), \varepsilon)$$

\Rightarrow Si para cada abierto entorno de $f(x,y)$,

tengo una bola abierta centrada en (x,y)

Contenida en $A_-^c \Rightarrow A_-^c$ es abierto

Observación obse:

Cuando $f(x,y)$ está "cerca" de 2 en:

$$x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2$$

Digo que si:

$$d_2(x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1), 2) = \varepsilon_0 > 0$$

$$\Rightarrow \exists (x, y) \in B(f(x, y), \varepsilon) \stackrel{?}{\subseteq} A_-^c /$$

$$d_2(x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1), 2) = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$$

∴ siempre puedo meter una bola
"cerca del borde", pues justamente
no hay borde, sino un abierto.

Probé que A_-^c es abierto.



De la misma forma se prueba A_+^c .

y como unión de abiertos es abierto

$$\Rightarrow A_-^c \cup A_+^c = A^c \text{ es abierto}$$

∴ A es cerrado.



 Pruebo que $f(x, y)$ es continua 

Acoto norma L_2 y obtengo δ en función de ε :

$$\underbrace{|f(x, y) - f(a, b)|}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{|x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - a^2 - b \cdot \sin(e^a - 1)|}_{\in \mathbb{R}}$$

$$= |x^2 - a^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

$$\leq |x^2 - a^2| + |y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

~~~~~

$$\hookrightarrow |(x+a) \cdot (x-a)| \leq |x+a| \cdot |x-a|$$

$$\begin{aligned} & \leq |x| + |a| \\ & \leq |a| + \delta + |a| \end{aligned}$$

$$\text{elijo } \delta_1 = 1$$

$$= 2|a| + 1$$

$$\leq (2|a| + 1) \cdot \delta$$

↑ no es unif.  
continua  
pues depende  
de  $a$

y para el 2º término:

$$|y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1)| \leq \text{no me sirve uss de sig. } \Delta$$

$$|y \cdot \sin(e^x - 1)| + |b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

↑ puedo poder  
sacar esto

$$\begin{aligned} & \leq 1 \\ & \leq e^x - 1 \end{aligned}$$

$$|y - b| \leq \delta$$