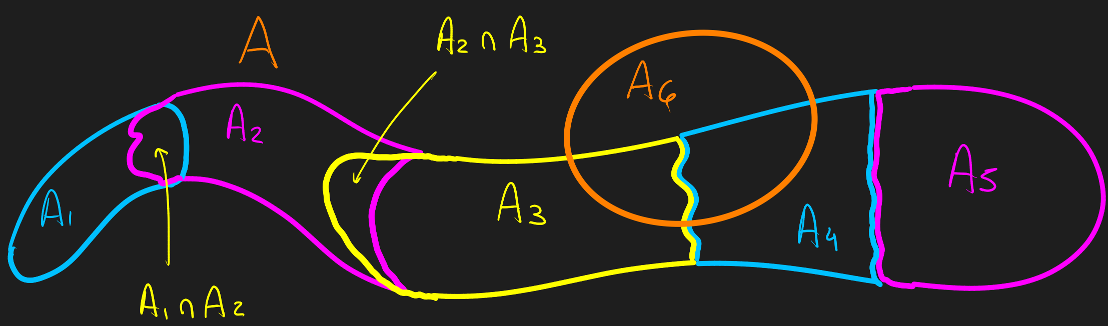
Análisis Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2021

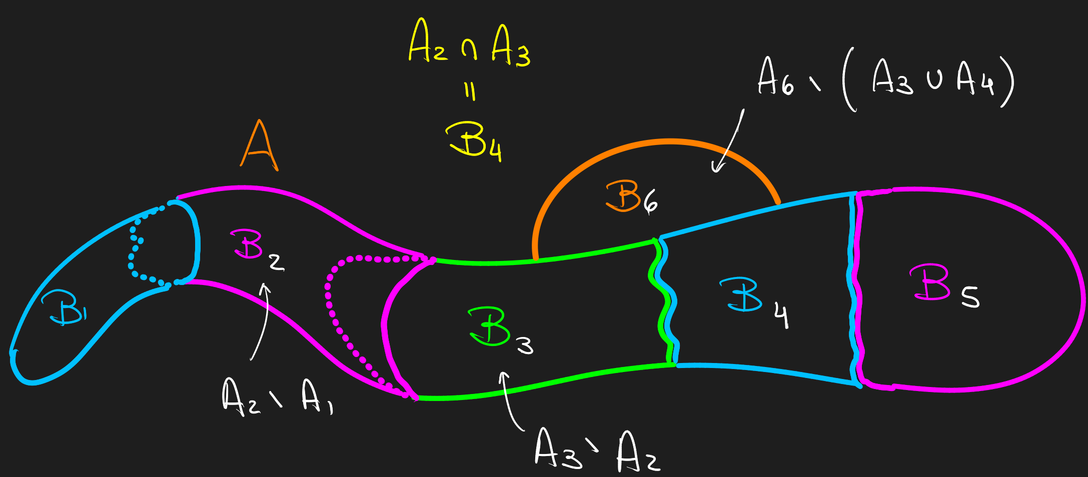
Práctica 2

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Diagrama ((A_n) tiene infinitos conjuntos, no 6)



Quiero



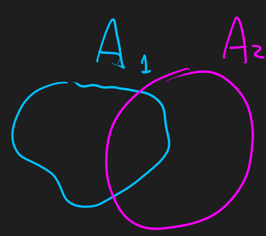
Tomo cada A_n

Lo vuelvo disjunto con los elementos de (A_n) que ya recorrí:

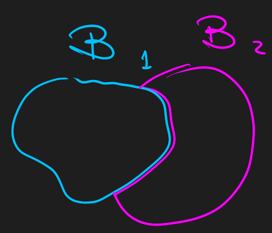
Tengo

$B_1 := A_1$

Ahora, A_2 puede ser $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

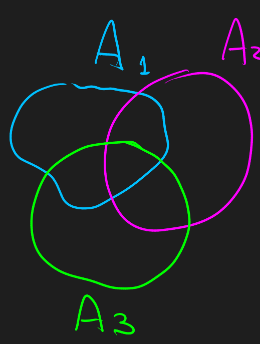


Como quiero que sean disjuntos



$B_2 := A_2 \setminus A_1$

Podría tener el caso



$\Rightarrow B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

Entonces si

para cada B_n

tomo A_n y le quito todo elemento compartido con los A_i con $i < n$

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{n-1} A_i$$

$$\Rightarrow B_n \cap A_i = \phi \quad \forall i < n$$

como $B_i \subset A_i$

$$\Rightarrow B_n \cap B_i = \phi \quad \forall i < n$$

$\therefore$ Todos los elementos de (B_n) son disjuntos.

Falta ver que la unión sea A

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \left(B_n \cup \bigcup_{i<n} A_i \right)$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} B_n \cup \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i<n} A_i$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} B_n \cup \overbrace{\bigcup_{n \geq 1} A_i}^{}$$

$$= \bigcup_{n \geq 1} B_n \cup A$$

como $B_i \subseteq A_i \subset A \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$= A$$

$\blacksquare$

2. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ y subconjuntos A, B de X y C, D de Y, probar que

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. ¿Vale la igualdad?
(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Probar que si f es inyectiva, vale la igualdad.
(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Probar que si f es suryectiva, vale la igualdad.
(g) $f^{-1}(D)^c = f^{-1}(D^c)$.

a) Sea $f(A \cup B)$

qvq

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

Si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$ (o ambas)

- Si $x \in A \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$
- Si $x \in B \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

Junto ambas

$\Rightarrow$ Si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

$$f(B) = \{f(b) : b \in B\}$$

$$f(A \cup B) = \{f(c) : c \in A \cup B\}$$

3. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Basta probar que $\sim$ es

- Reflexiva : Función identidad es biyectiva. ✓
- Simétrica : $A \sim B \equiv B \sim A$ ✓
- Transitiva : Compo de f y g ✓

Probado en Teórica 3 ó 4.

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos

$$\mathbb{Z}_{\leq -3} \qquad 5\,\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \qquad (-1,1) \cap \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z}_{\leq -3} = \underbrace{(-\infty, -3]}_{\text{Infinitos numerables}} \cap \mathbb{Z}$$

Como $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

y $\mathbb{Z} \sim X \quad \forall X \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}_{\leq -3}$

o sea

$$\# \mathbb{Z}_{\leq -3} = \aleph_0$$

b) $5\mathbb{Z} = \{ 5 \cdot q : q \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ \mathbb{Z} \text{ mult. } 5 \} \subseteq \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

$$\# 5\mathbb{Z} = \aleph_0$$

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$\exists f$ biyectiva entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(q, m) = \begin{cases} 2^{q} \cdot 3^{m} & \text{si } q \geq 0 \\ 5^{|q|} \cdot 3^{m} & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \# \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \aleph_0$$

d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$

$$\therefore \left((-1, 1) \cap \mathbb{Q} \right) \sim \mathbb{Q}$$

$$\therefore \# (-1, 1) \cap \mathbb{Q} = \aleph_0$$

5. Probar que si A y B son conjuntos entonces:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

a) $\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \overset{?}{\subseteq} \mathcal{P}(A \cap B)}$

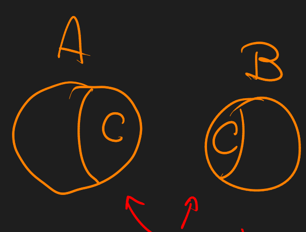
Si tengo un elemento

$$C \in \left(\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\right)$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$$

$\Rightarrow$ No puede darse el caso en que $A \cap B = \emptyset$



Abs!
Comparten (al menos) todo C!

$$\Rightarrow C \subseteq (A \cap B)$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B) \checkmark$$

Obs:
Todos los elementos del conj. de Partes de X son subconj. de X, dado que por definición, Partes de X son todos los subconjuntos distintos posibles "agrupados" bajo otro conj.

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \overset{?}{\supseteq} \mathcal{P}(A \cap B)}$$

Si tengo un elemento

$$D \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow D \subseteq (A \cap B)$$

$$\Rightarrow D \subseteq A \wedge D \subseteq B$$

Def Partes

$$\Rightarrow D \in \mathcal{P}(A) \wedge D \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow D \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$$

$\therefore$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

$\blacksquare$

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Tengo 4 casos:

Si $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow C \subseteq A \vee C \subseteq B$

ó

$C \subset A \vee C \subseteq B$

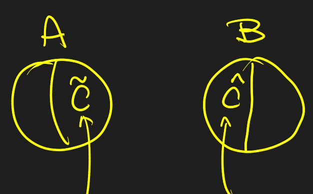
ó

$C \subseteq A \vee C \subset B$

ó

$C \subset A \vee C \subset B$

Acá puede darse el caso disjunto

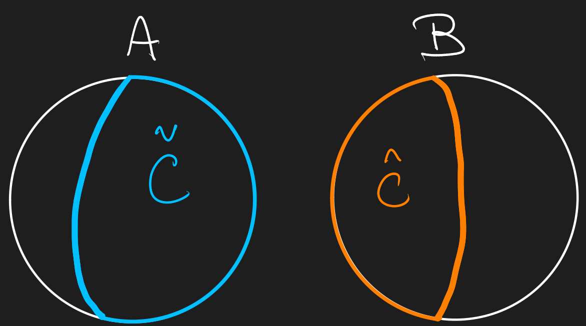


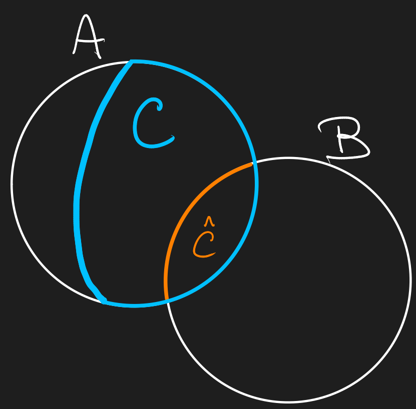
Otro pedacito de C

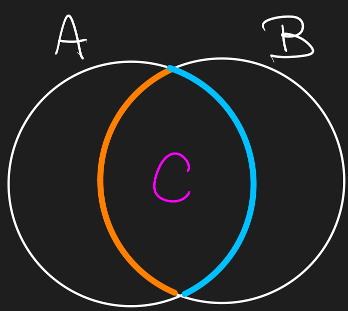
Un pedacito de C

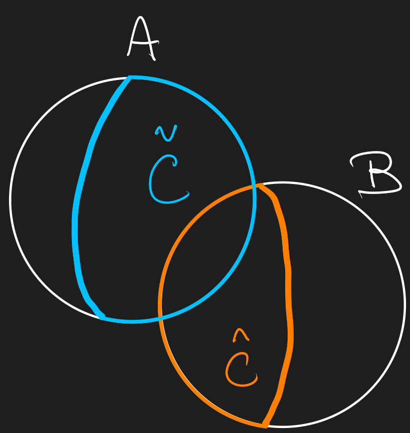
$\underbrace{\tilde{C} \cup \hat{C}}$ $= C$

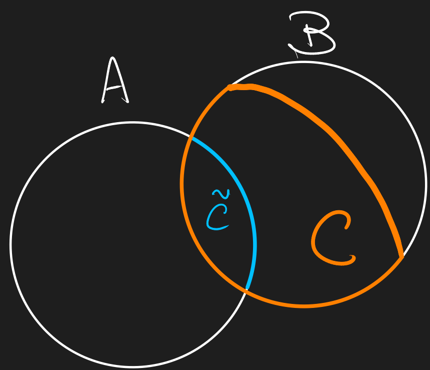
en el caso más general, no sé si son disjuntos











Si $C \in \underbrace{\underbrace{\mathcal{P}(A)}_{\text{Conj. de Conjuntos}} \cup \underbrace{\mathcal{P}(B)}_{\text{Conjunto de Conjuntos}}}_{\text{La unión no los mezcla entre subconjuntos}}$

$$C \in \{X : X \subseteq A\} \cup \{Y : Y \subseteq B\}$$

$$\Rightarrow C \in \{X : X \subseteq A\}$$

ó

$$C \in \{Y : Y \subseteq B\}$$

$$\Rightarrow C \subseteq A$$

ó

$$C \subseteq B$$

$$\Rightarrow C \subseteq (A \cup B)$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cup B) \quad \checkmark$$

Para la vuelta,

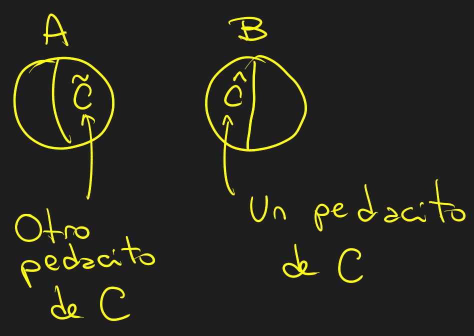
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

no debe ser $\supseteq$, solo $=$ ó $\subseteq$

$\Rightarrow$ $q \vee q$ $\supset$ no vale

Busco un contraejemplo:

Acá podemos prestar atención al caso disjunto



$$\tilde{C} \cup \hat{C} = C$$

en el caso más general, no sé si son disjuntos

Puedo ver que $C \subseteq A \cup B$ pero $C \nsubseteq A$ y $C \nsubseteq B$

Elijo como contraejemplo

$$C = A \cup B \quad , \text{ con } A \neq B \ !$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Pero

$$C \notin \mathcal{P}(A)$$

y

$$C \notin \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow C \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$\therefore$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$$

← notar que vale si $A = B$

$\therefore$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

$\blacksquare$

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

$\exists f : A \to B$ biyectiva

$f^{-1}(D) = \{a \in A \,,\, f(a) \in D\} \subseteq A$

$f(C) = \{b \in B \,,\, \exists a \in C \,,\, f(a) = b\} \subseteq B$

$f(C) \subseteq B$

$f(C) \in \mathcal{P}(B)$

¿ $\exists g : \mathcal{P}(A) \xrightarrow{\text{biy}} \mathcal{P}(B)$?

$C \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow C \subseteq A$

$g(C) = f(C) \in \mathcal{P}(B)$

6. (a) Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es numerable y $B \setminus A$ es infinito. Probar que $B \setminus A \sim B$.

(b) Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.