d_1 y d_2 métricas equiv. en E

$$\circledast \begin{cases} \forall x \in E \\ \forall r > 0, \\ B^{d_1}(x, r_1) \subseteq B^{d_2}(x, r) \quad \text{y} \quad B^{d_2}(x, r_2) \subseteq B^{d_1}(x, r) \end{cases}$$

Ser abierto está ligado a una distancia.

Idea: $U \subseteq E$ abierto respecto a d_1.
qvq es abierto respecto a d_2.
$x \in U$ qvq $\exists\, r_1 > 0 \,/\, B^{d_2}(x, r_1) \subseteq U$
Se que $\exists\, r > 0 \,/\, B^{d_1}(x, r) \subseteq U$ pues U
es abierto wrt d_1.

Entonces,

$$\circledast \Rightarrow \exists\, r_2 > 0 \,/\, B^{d_2}(x, r_2) \subseteq B^{d_1}(x, r)$$

$$\Rightarrow B^{d_2}(x, r_2) \subseteq B^{d_1}(x, r) \subseteq U \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Vale

- Hay que mostrar lo mismo para la otra Bola y después la vuelta.

Ejemplo: $E = \mathbb{Z}$, δ = discreta $\wedge$ $d(x,y) = |x-y|$

resultan equivalentes

$$B^d(x,r) = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, |x-y| < r\}$$
$$= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, x-r < y < r+x\}$$

$$B^\delta(x,r) = \{y \in \mathbb{Z} \,/$$

Fijemos $x \in \mathbb{Z}$ $\wedge$ $r > 0$

1) qvq $\exists\, r_1 > 0 \,/\, B^\delta(x,r_1) \subseteq B^d(x,r)$

Tomando $r_1 = \frac{1}{2}$

$$B^\delta(x,\tfrac{1}{2}) = \{x\} \subseteq B^d(x,r)$$

2) $B^\delta(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r < 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } r \geq 1 \end{cases}$

- Si $r \geq 1$:

$\Rightarrow$ Cualquier $\tilde{r} > 0$ cumple que

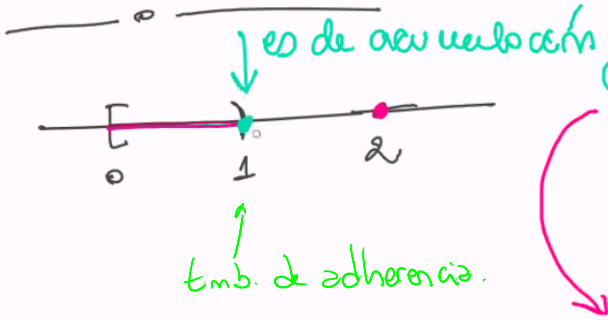
$$B^d(x,\tilde{r}) \subseteq B^\delta(x,r)$$

- Si $r < 1$:

$$\Rightarrow B^{d}\left(x, \tfrac{1}{2}\right) = \{x\}$$

elijo

$$= B^{\delta}(x, r).$$



$\circledast$ acumulación.

$\forall r>0 \; B(x,r)\cap A$ es un conj. infinito.

$\circledast$ adherencia.

$\forall r>0. \; B(x,r)\cap A \neq \emptyset$