FUNCIONES UNIF CONT

RECORDAR: $f: E \to E'$ ES UNIF. CONT

SI $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\forall x, y \in E$.

$\subseteq \mathbb{R}$, INTERVALO

PROP: SUP $f: I \to \mathbb{R}$ DERIVABLE

TAL QUE $(\exists M > 0)$ $|f'(c)| \leq M \ \forall c \in I^{\circ}$.

ENTONCES f ES LIPSCHITZ EN I

(Y $\therefore$ UNIF CONT.)

DEM: SI $x \neq y \in I$, $\exists c$ ENTRE x E y /

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$ (TEO VALOR DEL MEDIO)

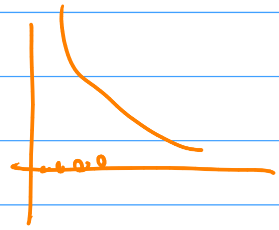
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \boxtimes$$

(UNIF CONT: DADO ε, TOMO $\delta = \varepsilon / 2M$)

VIMOS: NO ES UNIF CONT EN $(0,+\infty)$

EJEMPLO: SEA $\alpha>0$, Y SEA

$$f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=1/x$$



$$|f'(c)|=\left|-1/c^2\right|=1/c^2$$
$$\leq 1/\alpha^2 \quad \forall c\geq\alpha$$

$\rightsquigarrow$ f ES UNIF CONT (PUES LIPSCHITZ)

OBS: SI $I=[a,b]$ Y f ES $C^1([a,b])$

(ie, f ES DERIV CON f' CONT)

$\rightsquigarrow$ f' ESTÁ ACOT $\rightsquigarrow$ SE APLICA EL CRITERIO

$\rightsquigarrow$ f ES UNIF CONT

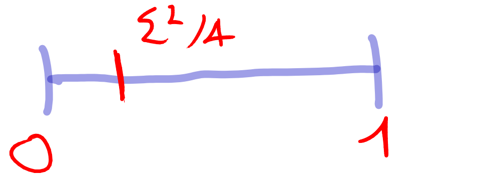
OJO: SEA $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt{x}$$

ENTONCES $f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$ $\quad x\neq 0$ $\quad\rightsquigarrow$ NO ES ACOT EN $[0,1]$

PERO f ES UNIF CONT: SEA $\varepsilon>0$.

SUP $x<y$!!!



- Si $\underbrace{\frac{1}{3\sqrt{x}} \leq 1/\varepsilon}_{\varepsilon^2/3 \leq x}$:

ADO: $|x-y| < \frac{2}{3}\varepsilon^2 =: \delta$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \underset{TVM}{\leq} \frac{1}{2\sqrt{c}}|x-y| \underset{\substack{SUP \\ x<y}}{\leq} \frac{1}{3\sqrt{x}}\underbrace{|x-y|}_{< \frac{2}{3}\varepsilon^2}\cdot\frac{3}{2}$$

ASI $c > x \Rightarrow \sqrt{c} > \sqrt{x}$

- Si $\frac{1}{3\sqrt{x}} > 1/\varepsilon$ (i.e., $x < \varepsilon^2/9$)

$\longrightarrow \delta_{FINAL} < \min\{\varepsilon^2/N, \varepsilon^2\}$

Tomo $\delta < \varepsilon^2/N$ (con N a elegir). $\searrow N \gg 0$

Así, si $y \in [x, x+\delta)$, entonces

$$y < \varepsilon^2/9 + \varepsilon^2/N = \varepsilon^2(1/9 + 1/N)$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} < \varepsilon\sqrt{1/9 + 1/N}$$

Así,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{x}+\sqrt{y} < \varepsilon/3 + \varepsilon\sqrt{1/9+1/N}$$

$$= \varepsilon\cdot\underbrace{\left(1/3 + \sqrt{1/9+1/N}\right)}_{¿<1?} < \varepsilon$$

¿<1? Sí, tomando $N \gg 0$

EJEMPLO: $E = \mathcal{C}([0,1])$, con d_∞.

Sea $\varphi : E \to E$, $\varphi(f)(x) = (f(x))^2$

"$\varphi(f) = f^2$" ↳ NO ES COMPOS.

• φ es cont:

SEA $\varepsilon > 0$

Sea $\underbrace{f \in E}_{\text{FIJA}}$. Sea $\underbrace{g \in E}_{\text{SE MUEVE}}$

$$|f(x)^2 - g(x)^2| \le |f(x)+g(x)|\,\underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\le d_\infty(f,g)}$$

$$\le |f(x)| + |g(x)| \le |f(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x)|$$

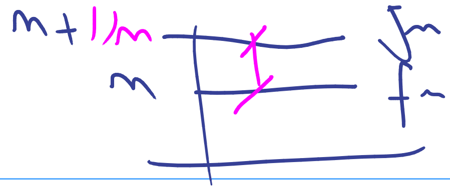
$$\le 2\underbrace{\|f\|_\infty}_{:= \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|} + \underbrace{d_\infty(g,f)}_{\le 1 \text{ (si pvl(...))}}$$

$$\therefore\ |f^2(x) - g^2(x)| < \overbrace{(2\|f\|_\infty + 1)}^{M_f}\, d_\infty(f,g)$$

$\forall x \in [0,1]$

$$\rightsquigarrow d_\infty(\varphi(f), \varphi(g)) \le M_f\, d_\infty(f,g)$$

$< \varepsilon$, si $d_\infty(f,g) < \min\{\varepsilon/2M_f, 1\}$



• φ NO ES UNIF CONT:

Qvq $\exists\ (f_n), (g_n) \subseteq E,\ \exists\ \alpha > 0$ /

• $d_\infty(f_n, g_n) \to 0 \ (n \to +\infty)$

• $d_\infty(\varphi(f_n), \varphi(g_n)) \geq \alpha \ (\forall n)$

Tomo $f_n(x) = n$, $g_n(x) = n + 1/n$

Así, • $f_n(x) - g_n(x) = 1/n \quad \forall x$

$\to d_\infty(f_n, g_n) = 1/n \to 0$

• $\varphi(f_n)(x) - \varphi(g_n)(x) =$

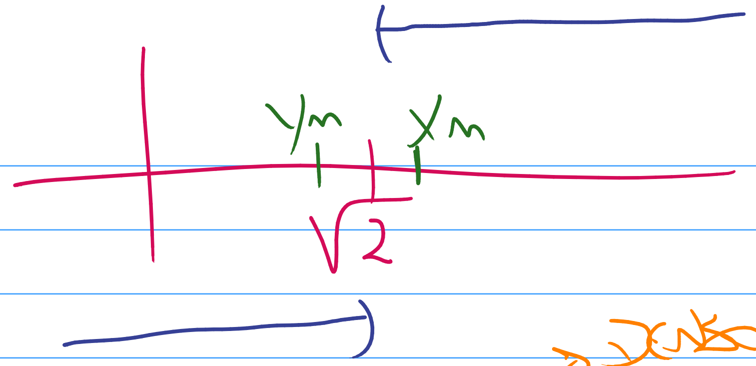
$= n^2 - (n^2 + 2 + 1/n^2) = -(2 + 1/n^2)$

$\to d_\infty(\varphi(f_n), \varphi(g_n)) = 2 + 1/n^2$

$\geq 2 \quad \forall n$

EJEMPLO: Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -1, & \text{si } x < \sqrt{2} \end{cases}$$



DENSO EN $\mathbb{R}$

- f ES CONT (EN $\mathbb{Q}$)
- NO SE PUEDE EXTENDER f CONT. A $\mathbb{R}$
- f NO ES UNIF CONT:

Tomo $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{Q}$ / $x_n \searrow \sqrt{2}$, $y_n \nearrow \sqrt{2}$. Así

- $d(x_n, y_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$
- $d(f(x_n), f(y_n)) = 2 \quad \forall n$