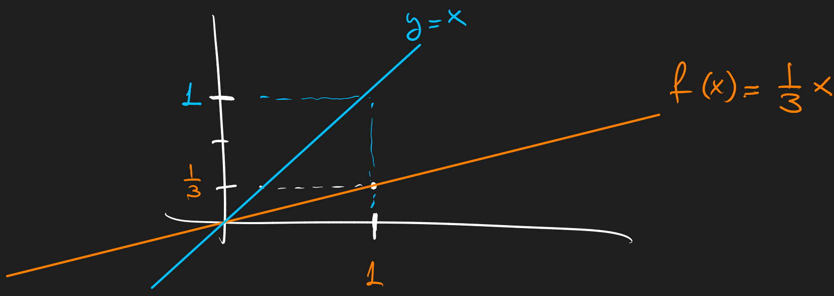
Teo. de Punto Fijo

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?



$$d(f(x), f(y)) \overset{?}{\leq} \alpha \cdot d(x,y) \quad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3}|x-y|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(x,y)$$

$\uparrow$ $\alpha = \frac{1}{3} \in (0,1)$ ✓

$\therefore f$ es contractiva.

Sea $\hat{E} = \mathbb{R}$

Por T. de Pto Fijo de Banach,

Como $\hat{E} = \mathbb{R}$ es completo

y f es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo en $\hat{E}$

¿?

Preg. si el proced está bien.

dado por $x=0$,

pues $f(0) = 0$.

Ahora, si quito este $x=0$ de $\hat{E}$,

termino con el E del enunciado,

(que <u>no</u> es completo pues $\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\therefore$ f <u>no</u> puede tener punto fijo, pues de

tenerlo, sería $x=0$.

$\blacksquare$

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0,1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

Sabemos que si

$$|f'(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f es lipchitz con constante k

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y|$$

Como $k \in (0,1)$

f es contracción.

$\boxtimes$

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces). Probar:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de f, entonces es punto fijo de f^n.

(b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

(c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

a) $f^1(x) : f(x) = x$

$f^2(x) : f(f(x)) = f(x) = x$

$\quad \| $

$f(f^1(x)) = f(f(x)) = f(x) = x$

$f^3(x) : f(f^2(x)) = \ldots$

CB: $n = 1$) $f^1(x) : f(x) = x$ ✓

PI) Sea $f^n(x) = x$

qvq $f^{n+1}(x) = x$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \underset{HI}{=} f(x) \underset{\substack{f \text{ tiene} \\ \text{pto fijo}}}{=} x$$ ✓

b) Comienzo por sugerencia

Si $x \in E$ es punto fijo de f^n

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ es punto fijo de f^n

Por a) si $f^n(x) = x$

$$\Rightarrow f^m(x) = x \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^1(x) = f(x) = x \checkmark$$

Por Teorema

Como E es completo

y $\exists n \,/\, f^n(x)$ es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo para $f^n(x)$

o sea

$$\exists!\, x \in E \,/\, f^n(x) = x$$

De antes, probé que si

$$f^n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$$

$\therefore$ x es el único punto fijo de $f(x)$.

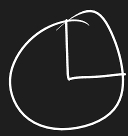
TM

c) $f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$|f'(x)| \overset{?}{\leq} k \in (0,1)$

$|\sin(x)| \overset{?}{\leq} k \in (0,1)$ NO!

pues $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  $\ni 1$

$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \underbrace{f}_{\cos(x)}$ no es contractiva

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $\quad |f(x) - f(y)| = \underbrace{|\operatorname{sen}(\xi)|}^{\leq 1} |x-y|$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contrac.

$g'(x) = \operatorname{sen}(\cos(x)) \cdot \operatorname{sen}(x) \leq 1$

Si $g'(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = 1$ (ó -1) $\rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\cos(x)) = 0$

$\operatorname{sen}(\cos(x)) = 1$ (ó -1) $\quad \Rightarrow g'(x) \neq 1, \neq -1 \Rightarrow |g'(x)| < 1$

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x-y| \leq \alpha |x-y|$

$\alpha \in (0,1) \ni \max |g'| \neq 1$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Afirmo: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

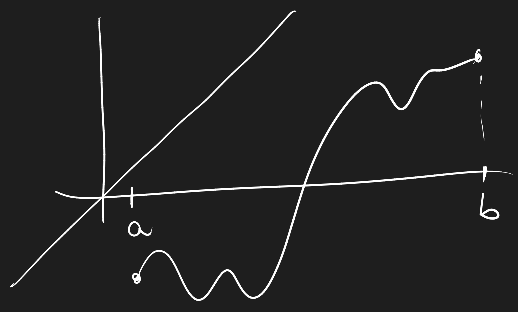
$g(\cos(x_0)) = \cos(\underbrace{\cos(\cos(x_0))}_{g(x_0) = x_0}) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$ es un punto fijo.

$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$. $\boxtimes$

34 / 34

17. Probar el Teorema de Bolzano: "Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o viceversa), existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$".

Sugerencia: Considerar $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) \leq 0\}$, y ver que es no vacío y acotado superiormente.



$f(a) < 0$

y $f(a) \in A$ pues $a \in [a,b]$

y f cont.

$\Rightarrow A \neq \emptyset$

$\exists\, c \in [a,b] \ /$

$f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \leq c$

?

18. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.

19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

20. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.