7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

(a) T es continuo en 0.

(b) Existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

Typo : E

(e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in M$ (T es *acotada*).

(f) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

De $\boxed{a}$ a $\boxed{e}$ las probó Vicky en Teórica 15-

\- Normados 2

Falta $\boxed{f}$

$\forall A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado

por $\boxed{e}$: T es acotada $\forall x \in E$

en particular

T es acotada $\forall x \in A \subseteq E$

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|$$

Pero A es un conjunto acotado

?

$$\Rightarrow \|T(x)\| \leq M \cdot C$$

$C \geq x \in A$

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ y sea $T : E \to F$ lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{M > 0 : \overline{\|Tx\|_F}^{\,\|x\|_E} \le \overline{M\|x\|_E}^{\,\|x\|_E}\}.$$

Comienzo por

$\boxed{1}$ $M = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E\}$

$\boxed{2}$ $\sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_F = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leqslant 1\}$

Si $x \in E$ y $\|x\| \leqslant 1$

$\Rightarrow \|Tx\|_F \leqslant \overbrace{M}^{M.\|x\|}$

$\Rightarrow \boxed{\sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_F \leqslant M \qquad \boxed{2} \leqslant \boxed{1}}$ Lo guardo para más tarde

Ahora sigo con:

$\boxed{2}$ $\sup\limits_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_F = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leqslant 1\}$

$\boxed{3}$ $\sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E = 1\}$

$$\|Tx\|_F \leq \overset{\boxed{12}}{\sup} \{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \}$$

$\forall x \in E$ y $\|x\|_E \leq 1$

qvq

$$\overset{\boxed{13}}{\sup_{\|x\|_E = 1}} \|Tx\|_F \overset{?}{\leq} \overset{\boxed{12}}{\sup_{\|x\|_E \leq 1}} \|Tx\|_F$$

Sea $x \in E$ / $\|x\|_E = 1$

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ / $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x \xrightarrow[n \to \infty]{} x$

$$\Rightarrow \|x_n\| = \left\|\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x\right\|$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \underbrace{\|x\|}_{=1}$$

$$\|x_n\| = 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|Tx_n\| \leq \overset{\boxed{12}}{\sup} \{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \}$$

pues $\boxed{12} \leq \boxed{1}$

y por $\boxed{1}$:

$$\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$$

$\Rightarrow$ Si achico $\|x\|$ para un M fijo

$\Rightarrow$ achico $\|Tx\|_F$

y como

$$x_n \longrightarrow x$$

$$\| T x_n \| \longrightarrow \| T x \|$$

$$\Rightarrow \| T x \| \leq \overset{\boxed{2}}{\sup} \left\{ \| T x \|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \right\}$$

$\hookrightarrow \forall x \in E$ y $\|x\| = 1$

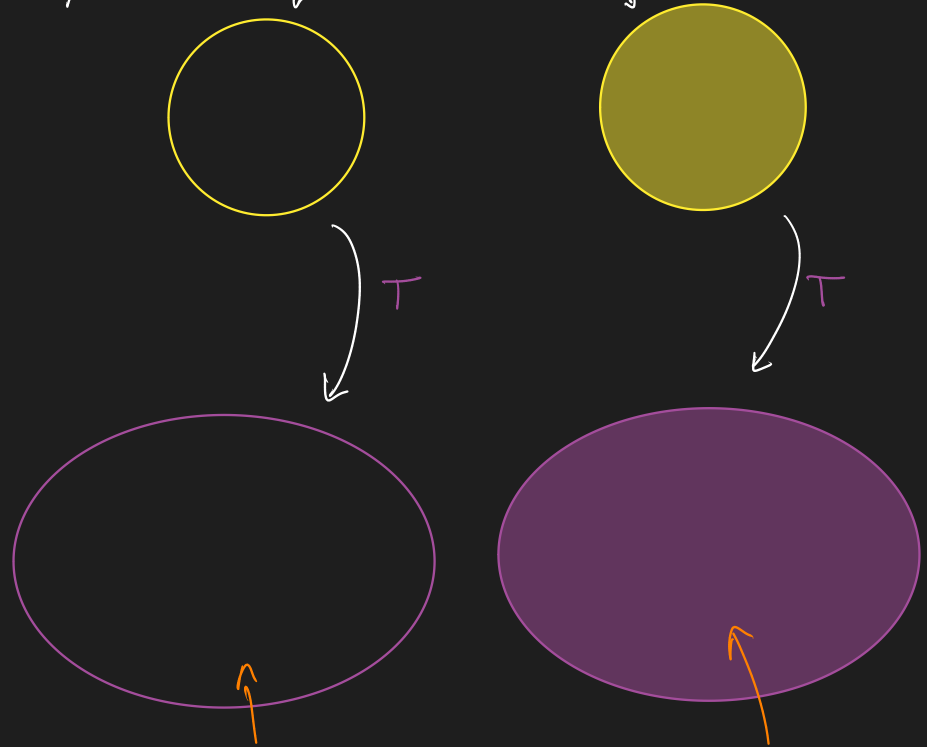
en particular

$$\sup_{\|x\|_E = 1} \| T x \|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \| T x \|_F$$

$$\boxed{3} \leq \boxed{2}$$

Lo cual es intuitivo si de un lado (derecho $\boxed{2}$) tengo más valores posibles de x para pasar a través de T, es decir,

$x \in E \,/\, \|x\| = 1$ $\qquad$ $x \in E \,/\, \|x\| \leq 1$



$\sup$) $\leq$ $\sup$)

(solo el borde) (el mismo borde $\cup$ el interior)

Hasta ahora tengo

$$\boxed{3} \leq \boxed{2} \leq \boxed{1}$$

Sigo con

$$\boxed{4} \quad \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \text{ y } x \neq 0 \right\}$$

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \left\| \frac{Tx}{\|x\|_E} \right\|_F \overset{\substack{T \text{ es tl.} \\ \downarrow}}{=} \left\| T\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|_E}}_{\text{norma} = 1}\Big) \right\|$$

Recuerdo:

$$\boxed{3} \quad \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup \left\{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E = 1 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\| : x \in E \right\}$$

$\therefore$ $\boxed{4}$ es un caso especial de $\boxed{3}$ (o el mismo ...)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \displaystyle \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F \\ \boxed{4} \leq \boxed{3} \end{array}}$$

Tengo: $\boxed{4} \leq \boxed{3} \leq \boxed{2} \leq \boxed{1}$

Pero!

Si $\|x\|_E \leq 1$

$$\Rightarrow \|Tx\|_F \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

$\therefore$ También vale que

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\boxed{2} \leq \boxed{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{4} = \boxed{3} = \boxed{2} \leq \boxed{1}$$

Falta uno! 

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \underbrace{\overset{\boxed{4}}{\sup} \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \text{ y } x \neq 0 \right\}}_{=: C}$$

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C$$

$$\|Tx\|_F \leq C \cdot \|x\|_E$$

Pero M era el ínfimo de todos los posibles C:

$$\boxed{1} \quad M = \inf\left\{ M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E \right\}$$

$$\therefore \quad M \leq \underbrace{\overset{\boxed{4}}{\sup}\left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \text{ y } x \neq 0 \right\}}_{=:\, C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1} \leq \boxed{4}$$

Finalmente

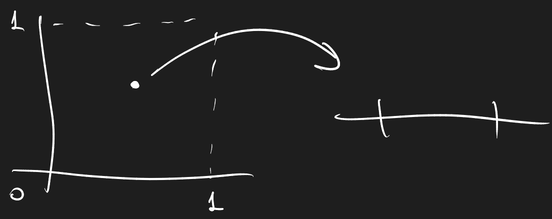
$$\boxed{4} = \boxed{3} = \boxed{2} = \boxed{1}$$

9. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por

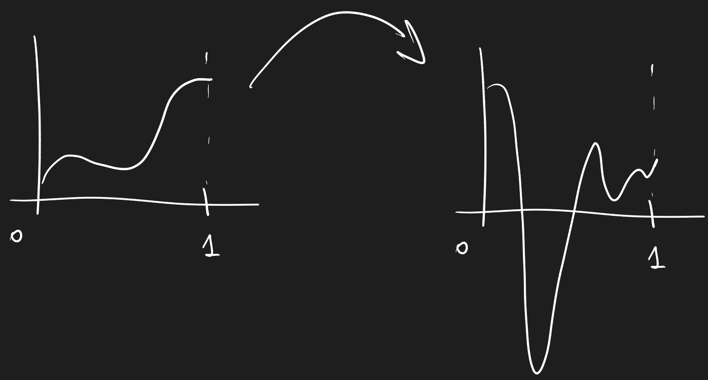
$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito definida como $\|f\|_\infty = \max_{0 \le t \le 1} |f(t)|$, entonces K es lineal y continua. Acotar su norma.

$k :$



$K :$



$\| f \|_\infty = \max\limits_{0 \le x \le 1} | f(x) |$ en el $[0,1]$

K Lineal ?

Suma) $\underbrace{K(f+g)(x)}_{} \overset{?}{=} (Kf)(x) + (Kg)(x)$

$$\int_0^1 k(x,y) \cdot (f+g)(y)\, dy =$$

def + de funciones

$$= \int_0^1 k(x,y) \cdot \big(f(y) + g(y) \big)\, dy$$

$$= \int_0^1 k(x,y)\, f(y) \cdot dy + \int_0^1 k(x,y)\, g(y) \cdot dy \quad \checkmark$$

Prod escalar

$$(K\, af)(x) = \int_0^1 k(x,y) \cdot (af)(y)\, dy$$

$\downarrow$ def prod. escalar funciones.

$$= \int_0^1 k(x,y) \cdot a f(y)\, dy$$

$$= a \cdot \int_0^1 \cdots \quad \checkmark$$

$\therefore$ K es Lineal.

$\blacksquare$

Continua ?

$$\left| \int_0^1 k(x,z) \cdot f(z)\, dz - \int_0^1 k(y,z) \cdot f(z)\, dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left(\cancel{k(x,z) - k(y,z)} \right) \cdot f(z)\, dz \right| \qquad ?$$

10. Sea $(\mathbb{R}[t], \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de polinomios definido en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p. Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.

11. Sea $\mathcal{E} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito, entonces $\mathcal{E}$ es un funcional lineal continuo.

Lineal ?

+ $\mathcal{E}(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g)$ ✓

· $\mathcal{E}(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda . f(0) = \lambda . \mathcal{E} f$

Es lineal ✓

Continua ? con $\|\cdot\|_\infty$

$\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}$: Todas equiv.

$$\| \mathcal{E}f - \mathcal{E}g \|_\infty = \| f(0) - g(0) \| \leq | f(0) | + | g(0) |$$

$$\leq \max |f(x)| + \max |g(x)|$$

?