

Análisis Avanzado - Funciones medibles

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Escribamos el intervalo $[0, 1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B \quad , \text{ con } A \cap B = \emptyset.$$

Escribamos el intervalo $[0, 1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B, \text{ con } \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset.$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \underline{A} \\ 5, & \text{si } x \in \underline{B}. \end{cases}$$

$$10 \notin A$$

$$\int f = 2\mu(A) + 5\mu(B)$$

$$A = [0, 1/2], \quad B = [1/2, 1]$$

$$\underline{A} = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \underline{B} = \mathbb{I} \cap [0, 1]$$

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0, 1]$.

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0, 1]$.

La función característica de $A \subset I$ es $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0, 1]$.

La función característica de $A \subset I$ es $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

$$[0, 1] = A \cup B$$

$$A \cap B = \emptyset$$

Definición

Una partición medible de I es una familia finita A_1, \dots, A_n de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

Definición

SIMPLE

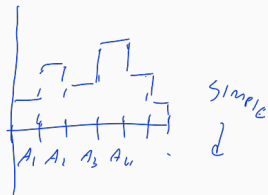
Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible A_1, \dots, A_n de I y números $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_j \\ 0 & x \notin A_j \end{cases}$$

$$f(x) = r_j \quad \text{si} \quad x \in A_j$$

$$f(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x \in A_1 \\ r_2 & \text{si } x \in A_2 \\ r_3 & \text{si } x \in A_3 \\ \vdots & \\ r_n & \text{si } x \in A_n \end{cases}$$



ES CALCONADA

(A_j INTERVALOS

NO NOS INTERESAN MÁS
SIMPLES NO ESCAL.

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$ es una función simple.
- Cualquier combinación lineal de de funciones simples da una función simple.

Si f simple \Rightarrow $g(x) = |f(x)|$ es simple

$(h(x) = \underline{f(x)^2}$ TAMBIÉN, $\underline{\tilde{h}(x)} = \cos(f(x))$ TAMBIÉN)

DEM: $f(x) = \sum_{i=1}^m r_i \chi_{A_i}$ con $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$
 $\{A_i\}_{i=1}^m$ partic. med. de I

$$|f(x)| = |r_j| \text{ si } x \in A_j$$


$$\Rightarrow \boxed{f(x) = r_j \Leftrightarrow x \in A_j}$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \sum_{i=1}^m |r_i| \chi_{A_i}$$

$|f|$ es simple

Fig SIMPLES, QVQ & $f+Bg$ SIMPLE.

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} & \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \quad \{A_i\}_{i=1}^m \text{ PARTIC. DE } I. \\ g(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j} & \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}, \quad \{B_j\}_{j=1}^m \text{ PARTIC. DE } I. \end{cases}$$

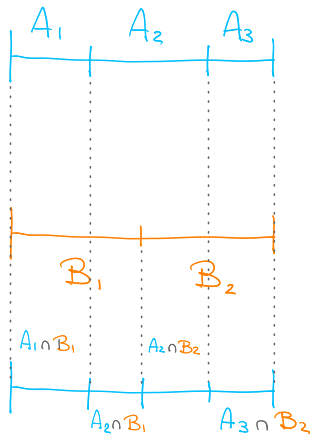
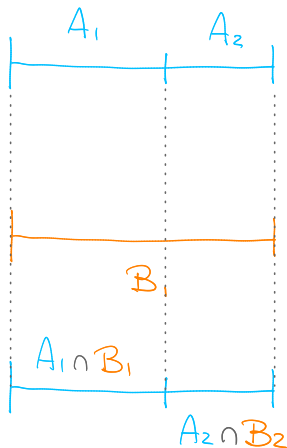
$C_{ij} = A_i \cap B_j$  EJERCICIO : $\{C_{ij} : i=1, \dots, m; j=1, \dots, m\}$
ES PARTICIÓN DE I . MEDIBLE

$x \in C_{ij} \Rightarrow$ $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \alpha_i + \beta \beta_j$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \chi_{C_{ij}}(x)$$

VALE: f, g SIMPLE

$\therefore \alpha f + \beta g$ SIMPLE.



Intersecar todos los elementos devuelve una partición de I pues

> todos con todos $=== I$ intersección $I = I$

> cada A_i es disjunto con todos los A_j , por lo cual cada intersección es disjunta de todas las otras

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x)$$

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x)$$

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\underbrace{\int f d\mu}_{//} = \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i)}_{//}$$

$$\int_I f d\mu$$

$$\int_I f(x) d\mu(x)$$

$$\longrightarrow r_1 \mu(A_1) + r_2 \mu(A_2) + \dots + r_n \mu(A_n)$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía:** Si f y g son simples $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\underline{\int f \, d\mu} \leq \underline{\int g \, d\mu}.$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía:** Si f y g son simples $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

ejercicio

(c) Si f es simple, entonces

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

es simple

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$$

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

$$\alpha f + \beta g(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \chi_{C_{ij}}$$

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \mu(C_{ij}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha \alpha_i \mu(C_{ij})}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta \beta_j \mu(C_{ij})}_{\textcircled{2}}$$

$$\textcircled{1} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \underbrace{r_i}_{=} \mu(c_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^m r_i \sum_{\substack{j=1 \\ \text{disjuntos} \\ \text{2 a 2}}}^m \underbrace{\mu(A_i \cap B_j)}_{=}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu \left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^m \underbrace{A_i \cap B_j}_{=}}_{=} \right) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu \left(A_i \cap \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right)}_{\substack{I \\ \text{I}}} \right) = \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu(A_i) =$$

$$= \alpha \int f \, d\mu.$$

EJERCICIO: $\textcircled{2} = \beta \int g \, d\mu \quad \boxtimes$

Definición

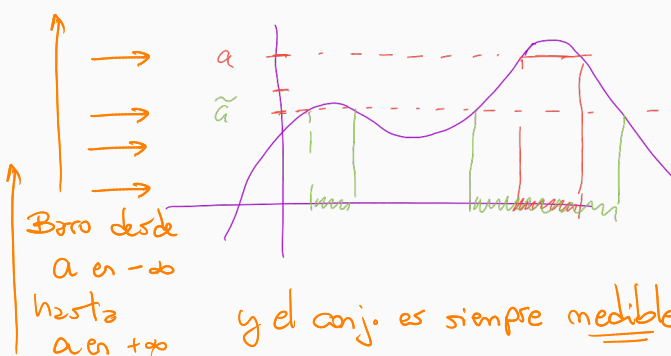
Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos).

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es **medible Lebesgue** si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

y el conj. es siempre medible.

Definición

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es **medible Lebesgue** si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\boxed{\{x \in X : f(x) \leq a\}} = f^{-1}((-\infty, a])$$

es medible.

$$(Im f \subset \overline{\mathbb{R}}) \quad f^{-1}([-\infty, a])$$

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.

$$f^{-1}((-\infty, a]) \rightarrow \text{CERRADO} \quad \text{Y } \therefore \text{MEDIBLE}$$

\hookrightarrow CERRADO

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es **medible Lebesgue** si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.

PENSAR: $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\} \rightarrow$ es un intervalo
 $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es **medible Lebesgue** si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible. (DECREC TAMBIÉN)
- Si f es simple medible entonces es medible. → EJERCICIO

Proposición

X MEDIBLE

Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : \underline{f(x)} \leq a\}$ es medible. $[f \text{ medible}]$

Proposición

X MEDIBLE

Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:



- (a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.
- (b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.

Proposición

X MEDIBLE

Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

- (a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.
- (b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.
- (c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ es medible.

✓

Proposición X medible

Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

- (a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.
- (b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.
- (c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ es medible.
- (d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > a\}$ es medible.

$$(a) \Rightarrow (b) \quad \{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$\underbrace{f(x) < a} \Leftrightarrow \exists n \ / \ \underbrace{f(x) \leq a - \frac{1}{n}}$$

ES MEDIBLE X SER UNIÓN DE MEDIBLES.

$$(b) \Rightarrow (c) \quad \{x \in X : f(x) \geq a\} = X \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) < a\}}_{\text{MEDIBLE}} \quad \text{MEDIBLE}$$

$$\boxed{(c) \Rightarrow (a) \ , \ (d) \Rightarrow (a) \text{ ET}} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{MED} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \text{MED} \end{matrix}$$

- Combinación lineal de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.
- Límite puntual de una suc. de funciones medibles es medible.

X MEDIBLE

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

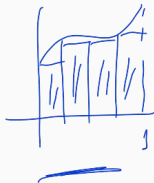
$$\rightarrow \{x \in X : g(x) \leq a\} = \textcircled{\times}$$

$$g(x) \leq a \Leftrightarrow \sup_n f_n(x) \leq a \Leftrightarrow \underbrace{f_n(x) \leq a}_{\text{MEDIBLE}} \quad \forall n$$

$$\textcircled{\times} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\} \rightarrow \text{MEDIBLE } \forall a \in \mathbb{R}$$

¿Cómo definimos la integral de una función medible?

¿Cómo definimos la integral de una función medible?
Empecemos por funciones medibles, acotadas y no negativas.



$$\underline{L_\mu(f) = \{ g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ simple medible} / } \\ g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in I \}$$

(NO NECESARIAMENTE ESCALONADAS)

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in L_\mu} \left[\int g \, d\mu \right]$$

LA CONOCIMOS