

Suggerenza :



**Daniel Carando**

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el  $(3,2)$ , por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el  $\delta$  lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un  $\delta$  auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás  $\delta_1 = 1$ , entonces cuando tomes  $d((x, y), (3, 2)) < \delta_1$ , sabés que  $x$  está entre 2 y 4 e  $y$  está entre 1 y 3.

6:23 PM

Si después necesitas otro  $\delta_2$  para llegar finalmente al menor que  $\varepsilon$ , tu  $\delta$  va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED)

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en  $\mathbb{R}$  es la  $d_1$ , pero en realidad también es la  $d_2$ :

6:28 PM

$$d_1(s, t) = |s - t| = \sqrt{(s - t)^2} = d_2(s, t).$$

También es la  $d_\infty$ , claro.

Def. de  $f$  continua  $\left( \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \right)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

$$f\left(B((x_0, y_0), \delta)\right) \subseteq B(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

Lo pruebo en  $(x_0, y_0) = (3, 2)$

# Sea

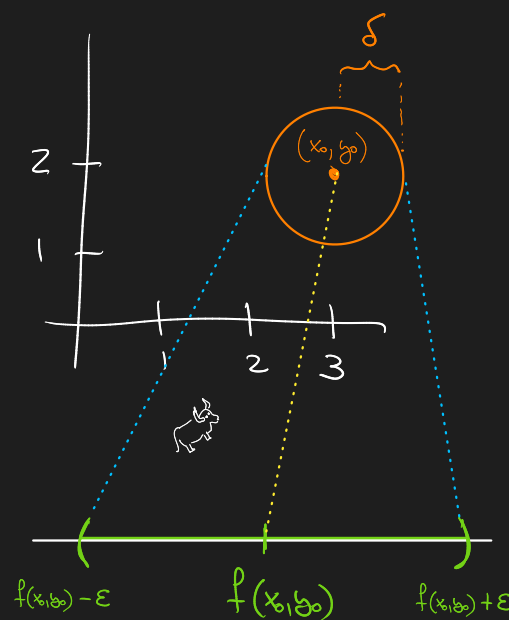
$$(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), \delta)$$

me hizo solo en:

$$(x, y) \in B((3, 2), \delta)$$

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < \delta \right\}$$

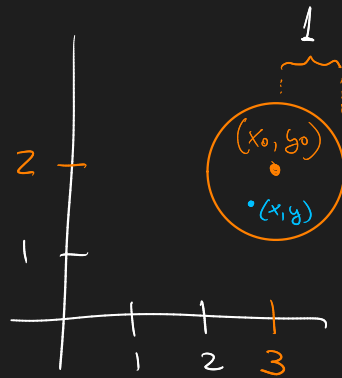
$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$



Si  $\delta = 1$ :

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos  $f(x, y)$ , o sea

quiero que

donde veo continuidad

$$f(x, y) \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(3, 2), \varepsilon)$$

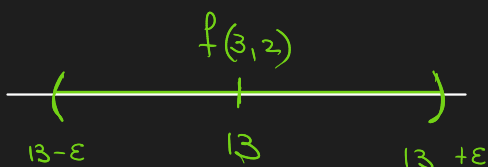
$$\in \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, \underbrace{f(3, 2)}_{3^2 + 2^2}) < \varepsilon \right\}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}$$

$$|c - 13|$$

$$= |f(a, b) - f(3, 2)|$$

$$= |a^2 - 3^2 + b^2 - 2^2|$$





Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar  $(x_0, y_0)$  para el punto en el que estudiás la continuidad y  $(x, y)$  para los puntos que andan alrededor del  $(x_0, y_0)$ . Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea,  $(x_0, y_0)$  son los puntos que están cerca del  $(3, 2)$ . Lo que podés hacer menor que cualquier  $\delta$  es la distancia entre los puntos  $(x_0, y_0)$  y el  $(3, 2)$ . En este caso particular, esto coincide con la raíz de  $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$ . Si tomás  $\delta_1 = 1$  auxiliar, entonces sabés que  $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$ . Pero esto no dés que  $f(x_0, y_0) < 1$ . Al contrario,  $f(x_0, y_0)$  se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1. Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís  $12 < \varepsilon$ . Esto te da la pauta de que algo no va, porque  $\varepsilon$  puede ser arbitrariamente chico.

Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el  $\varepsilon$  tiende a 0, los posibles  $\delta$  también tienden a 0. Tu  $\delta$  no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de  $\delta$  (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con  $\varepsilon$  y  $\delta$ , sin usar sucesiones) es: tomá  $\delta_1 = 1$  y  $(x, y)$  a menos de 1 de  $(3, 2)$ . Entonces  $|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$

Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al  $\delta_1$ . Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que  $\delta$

Si  $\delta_1 = 1$ :

$$d_2((x, y), (3, 2)) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del radio mínimo:

$$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

quiero



$$\Rightarrow |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

En donde:

$$(x^2 - 3^2) = (x+3)(x-3)$$

$$\underbrace{(x+3)}_{< \delta_1 = 1} \underbrace{(x-3)}$$



Como  $d(x, 3) < 1$

$$\Rightarrow x = 3 \pm d(x, 3)$$

$$< 3 + 1 = 4$$

$$x < 4$$

$$\Rightarrow x + 3 < 7$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

↑ deajo este  $\delta$  (y no uno 1)  
para que dependa de  $\delta$

$$(y^2 - 2^2) = (x+2) \underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$$

↳ Como  $d(x, 2) < \delta_1 = 1$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x, 2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x+2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

↑ deajo este  $\delta$  (y no uno 1)  
para que dependa de  $\delta$

Reemplazando en lo que tenia

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero controlar todo por  $\varepsilon$

$$12\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con  $(x_0, y_0) = (3, 2)$

que resulte ser  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f\left(\mathcal{B}\left((3, 2), \delta\right)\right) \subseteq \mathcal{B}\left(f(3, 2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si  $\delta_1 = 1$ :

$$d_2((x, y), (x_0, y_0)) < \delta_1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio:

quiero

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|$$

En donde:

$$(x^2 - x_0^2) = \underbrace{(x + x_0)}_{< \delta} \underbrace{(x - x_0)}_{< \delta}$$

Como  $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x = x_0 \pm d(x, x_0)$$

$$< x_0 + \delta$$

$$\Rightarrow x + x_0 < x + x_0 + \delta$$

acá ya no puedo usar 1

$$\Rightarrow (x^2 - x_0^2) < (x + x_0 + \delta) \cdot \delta$$

Mismo procedimiento para

$$(y^2 - y_0^2) < (y + y_0 + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{\wedge (x+x_0+\delta) \cdot \delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{\hookrightarrow (y+y_0+\delta) \cdot \delta}$$

$$< x \cdot \delta + x_0 \cdot \delta + y \cdot \delta + y_0 \cdot \delta + \delta^2$$

$$= \delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2$$

Quiero

$$\delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2 < \varepsilon$$

?

Acá no puedo despejar delta, por lo que CREO que debería suponer algo de delta para acotar por encima por algo más fácil de despejar?