Escribo encima!

UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Espacios Normados 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Definición

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (desigualdad Δ)

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Un espacio vectorial E con una norma se llama un espacio normado.

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $\boxed{d(x, y) = \|x - y\|.}$

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x,y) = \|x-y\|$.

No todo espacio métrico es un espacio normado. $(\mathbb{R}^n, \delta)$

$(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ $\quad d(2x,0) \neq 2d(x,0).$

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

No todo espacio métrico es un espacio normado.

Definición

Un espacio normado que es completo con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ se llama un espacio de Banach.

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

No todo espacio métrico es un espacio normado.

Definición

Un espacio normado que es completo con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ se llama un espacio de Banach.

Proposición

Dos normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ sobre E son equivalentes si y sólo si existen $c, \tilde{c} > 0$ tales que $id : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_0) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$

$$\boxed{c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c}\|x\|_2.} \quad \forall x \in E.$$

Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

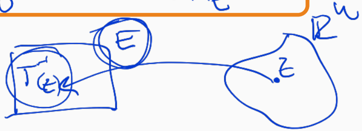
Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $\boxed{T : E \to \mathbb{R}^n}$ y una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que T es una isometría.

$z \in \mathbb{R}^n \quad \|z\|_0 := \|T^{-1}(z)\|_E$



Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $T : E \to \mathbb{R}^n$ y una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que T es una isometría.

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ (donde el homeomorfismo es un isomorfismo lineal).

Lipschitz

Homeomorfismo: f biyectiva, f y f^{-1} continuas

Isomorfismo: f es biyectiva

espacio copado ? ☆

$$\begin{tikzcd}
(E, \|\cdot\|_E) \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "Id \circ T"'] & (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_0) \arrow[l, bend right, "T"'] \arrow[r, "Id"] & \boxed{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)} \arrow[l, bend right, "Id"']
\end{tikzcd}$$

isomorfismo isométrico

Prop.

Bilipschitz pues normas en $\mathbb{R}^n$ son equiv

Teorema

☆ $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$: Sucesión acotada $\Rightarrow$ Convergente

Heine - Borel : Cerrado + Acotado = Compacto

Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

Corolario

En un espacio normado de dimensión finita, los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

Operadores lineales continuos

Operadores lineales continuos

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

Operadores lineales continuos

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma 2.

Operadores lineales continuos

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma 2.
- Entonces, T es continua para cualquier par de normas que pongamos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma 2.
- Entonces, T es continua para cualquier par de normas que pongamos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.
- Y lo mismo pasa con una transformación lineal entre dos espacios normados de dimensión finita.

Definición

Sean E, F dos espacios normados sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

Definición

Sean E, F dos espacios normados sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador lineal):
  - $T(x \overset{E}{+} y) = T(x) \overset{F}{+} \overset{\in F}{T(y)}$ para todo $x, y \in E$,
  - $T(\lambda \underset{E}{\cdot} x) = \lambda \underset{F}{\cdot} T(x)$ para todo escalar λ y todo $x \in E$.

Definición

Sean E, F dos espacios normados sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador lineal):
  - $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in E$,
  - $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo escalar λ y todo $x \in E$.
- Es una función continua, con las métricas que definen las normas.

· $\underline{x \in E}$ $\quad T : E \to F$ op. lineal continuo

$d_E(x,y)$ $\quad d_F(Tx, Ty)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(x)) \ / \ \text{si } \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx - Ty\| < \varepsilon.$

Sup $T: E \to F$ op lineal. continuo en 0.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / $\underbrace{\|x\|_E < \delta}_{x \in B_E(0,\delta)} \Rightarrow \underbrace{\|Tx\| < \varepsilon}_{Tx \in B_F(0,\varepsilon)}$

$[T0 = 0]$

$$\left(T(B_E(0,\delta)) \subseteq B_F(0,\varepsilon) \right)$$

- $B(x,r) = B(0,r) + x$

$x_0 \in E$ qvq T es cont. en x_0. Sea $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ de la continuidad en 0.

$$x \in B_E(x_0,\delta) \Rightarrow \boxed{\|x-x_0\|_E < \delta} \Rightarrow x - x_0 \in B_E(0,\delta)$$

$$\Rightarrow \underbrace{T(x-x_0)}_{} \in B_F(0,\varepsilon) \Rightarrow \underbrace{T(x)-T(x_0)}_{} \in B_F(0,\varepsilon)$$

T cont en 0. $\hookrightarrow (T(x)-T(x_0))$

$$\Rightarrow \boxed{\|T(x)-T(x_0)\|_F < \varepsilon} \Rightarrow T(x) \in B_F(T(x_0),\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ T es continuo en x_0.

T continuo en 0 $\Rightarrow$ T continuo en x, $\forall x \in E$

$\Rightarrow$ T continua.

Mas aún, T uniformemente continuo.

• Sea $x_0 \in E$ y sup T cont. en x_0.

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $\|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$.

Veamos q' T es cont. en 0.

Dado $\varepsilon > 0$ tomo el $\delta > 0$ de la cont. en x_0.

Si $\|y\|_E < \delta \Rightarrow y = \underbrace{y + x_0}_{x} - x_0 \Rightarrow \|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow \|\underbrace{T(x) - T(x_0)}_{T(x - x_0) = T(y)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|Ty\| < \varepsilon \Rightarrow T$ cont. en 0

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal.

Son equivalentes:

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

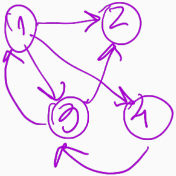
Dem: $(1) \Rightarrow (2)$ ✓

$(1) \Rightarrow (3)$ ✓ (lo probamos)

$(1) \Rightarrow (4)$

$(4) \Rightarrow (3)$ (vale en general)

$(3) \Rightarrow (1) \wedge (2)$ (" ")



Definición

Decimos que un operador lineal $T : E \to F$ es acotado si existe $c > 0$ tal que

$$\boxed{\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E} \quad (1)$$

$\|T(x)\| \leq M$

$\forall x \in E$

para todo $x \in E$.

Definición

Decimos que un operador lineal $T : E \to F$ es acotado si existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \qquad (1)$$

para todo $x \in E$.

Equivalentemente, T es acotado si

$$\sup_{x \in B(0,1) \subseteq E} \|T(x)\|_F < \infty. \qquad (2)$$

Dem: (1) $\Rightarrow$ (2)

$$x \in B_E(0,1) \overset{(1)}{\Rightarrow} \|T(x)\|_F \leq C \underbrace{\|x\|_E}_{<1} \leq C \cdot 1$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in B(0,1)} \|Tx\| < \infty$$

$(2) \Rightarrow (1)$ $M = \sup_{x \in B(0,1)} \|Tx\|_F < \infty$,

$x \neq 0$, sea $y = \dfrac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|}$ para $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow y \in B_E(0,1)$ $\left(\|y\| = \dfrac{1}{(\varepsilon+1)} \cdot \dfrac{\cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}} < 1 \right.$.

$\Rightarrow \underbrace{\|T(y)\|_F}_{\left\|T\left(\frac{1}{(\varepsilon+1)\|x\|} \cdot x\right)\right\| = \frac{1}{(1+\varepsilon)\|x\|} \|Tx\|_F} \leq M$

$\|Tx\| \leq (1+\varepsilon) M \cdot \|x\|_E$ $\forall \varepsilon > 0$ C

$\Rightarrow \|Tx\| \leq M \|x\|$. ✓. $\boxtimes$

Teorema

Un operador lineal $T : E \to F$ es continuo si y sólo es acotado.

Dem: $\Rightarrow$) Sea $\varepsilon = 1$. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ /

Si $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx\|_F < 1$.

$y \neq 0$ Sea $x = \frac{\delta}{2} \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|x\| = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\|y\|}{\|y\|} = \frac{\delta}{2} < \delta$

$\Rightarrow \underbrace{\|Tx\|_F}_{} < 1$

$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|y\|} \|Ty\|_F$ $\Rightarrow \boxed{\|Ty\|_F < \frac{2}{\delta} \|y\|}$ $\Rightarrow C > 0$

$\Leftarrow$) $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq C \|x-y\|$ T Lip. $\Rightarrow$ T UC $\Rightarrow$ T cont

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ operador lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

(5) Existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

T es acotado

Funcionales lineales

Definición

Una funcional lineal es un operador lineal $\gamma : E \to \mathbb{R}$.

Normado

Proposición

Sea $\gamma : E \to \mathbb{R}$ una funcional lineal. Entonces, γ es continua si y sólo si $\text{Ker}(\gamma)$ es un subespacio cerrado.

$\to \{x \in E : \gamma(x) = 0\}$

Dem: $\Rightarrow)$ $\text{Ker}(\gamma) = \gamma^{-1}(\{0\})$

$\to \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.

$\underset{\gamma \text{ cont}}{\Rightarrow}$ $\gamma^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

$\Leftarrow)$ $H = \operatorname{Ker}(\gamma)$. H es cerrado que γ es continua

$\longrightarrow \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Sea $x \in E \,/\, \gamma(x) \neq 0 \Longrightarrow \boxed{E = H \oplus \langle x \rangle}$

Hiperplano.

$\hookrightarrow$ + "+" $H \cap \langle x \rangle = 0$

En efecto:

1) $y \in H \cap \langle x \rangle \Longrightarrow \gamma(y) = 0 \wedge y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow 0 = \gamma(y) = \gamma(\lambda x) = \lambda \underbrace{\gamma(x)}_{\neq 0} \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow y = 0.$

2) Sup que $y \in E$.

Sea $\underset{\in H}{z} = y - \underset{\in \langle x \rangle}{\frac{\gamma(y)}{\gamma(x)} x} \in E$, $\gamma(z) = \gamma(y) - \frac{\gamma(y)\cancel{\gamma(x)}}{\cancel{\gamma(x)}} = 0$

$\Longrightarrow z \in H \Longrightarrow y = z + \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)} x \in H \oplus \langle x \rangle \Longrightarrow E = H \oplus \langle x \rangle.$

Si $y\in E \Rightarrow \boxed{y = h + \lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $h\in H$ $\Rightarrow$

$$\gamma(y) = \underbrace{\gamma(h)}_{=0} + \lambda\gamma(x) \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)} \Rightarrow \boxed{y = h + \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)}.x}$$

Sea $d = d\left(\frac{x}{\gamma(x)}, H\right) = \inf\left\{\left\|\frac{x}{\gamma(x)} - h\right\|_E : h\in H\right\}$

como H es cerrado, $d>0$ (Ejercicio P4 Ej 11)

Tomamos $y\in E$, $y = h + \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)}.x$, $h\in H$.

$$\|y\|_E = \left\|h + \frac{\gamma(y)}{\gamma(x)}x\right\|_E = \left\|\gamma(y)\left(\frac{h}{\gamma(y)} + \frac{x}{\gamma(x)}\right)\right\|_E$$

$$= |\gamma(y)|.\left\|\frac{h}{\gamma(y)} + \frac{x}{\gamma(x)}\right\|_E = |\gamma(y)|\left\|\frac{x}{\gamma(x)} - \underbrace{\frac{(-h)}{\gamma(y)}}_{\in H}\right\|_E$$

$$\geq |\gamma(y)|.d \Rightarrow \boxed{|\gamma(y)| \leq \frac{1}{d}\|y\|_E} \quad \forall y \Rightarrow \gamma \text{ es acot.} \therefore \text{cont.} \boxtimes$$