Definición de Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

Observación

- El supremo es único. hay que probarlo (Ejercicio)
- La existencia del supremo se debe al axioma de completitud de $\mathbb{R}$. → Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$ tiene supremo

Demo de unicidad

Sean s_1, s_2 supremos de A

$\Rightarrow$ Ambos cumplen (a) y (b)

(a) $s_1 \geq x \quad \forall x \in A$

$s_2 \geq x \quad \forall x \in A$

(b) Si $t \in \mathbb{R}$ y $t \geq x \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow s_1 \leq t \wedge s_2 \leq t$

Como s_1 y s_2 además son cotas superiores (por (a)):

$\Rightarrow$ si $S_2 = t \Rightarrow S_1 \leq S_2$
$\Rightarrow$ si $S_1 = t \Rightarrow S_2 \leq S_1$

$\left.\begin{array}{l} S_1 \leq S_2 \\ S_2 \leq S_1 \end{array}\right\} S_1 = S_2$

Ejercicios de la forma

$A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Afirmo: $1 = \operatorname{Sup}(A)$

Se demuestra con (a) y (b)

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;
(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

Dem:

$\boxed{1}$ qvq 1 es cota superior

$\boxed{2}$ la menor de las cotas sup

$\boxed{1} \rightarrow x \in A \Rightarrow 0 \leq \underbrace{x \leq 1}_{1 \text{ es cota superior}}$

$\boxed{2} \rightarrow t$ es una cota superior de A

$\Rightarrow t \geq 1$ pues $1 \in A$

$\Rightarrow 1$ es el supremo.

Ahora:

Si $B = [0,1)$ abierto

Afirmo que $1 = \operatorname{Sup}(A)$

$\boxed{1}$ 1 es cota superior como antes

PERO!

$\boxed{2}$ Si t es cota sup. de B

$\Rightarrow$ qvq $t \geq 1$

Si $t < 1$: $\frac{t+1}{2} = x \in (t, 1)$

$(t \geq 0) \Rightarrow x \in (t, 1) \subseteq B$

$\Rightarrow x \in B$

Pero! $x > t$ Abs!

Pues t era cota superior

$\Rightarrow t \leq 1$

$\Rightarrow \operatorname{Sup}(B) = 1$