

7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- (a) T es continuo en 0.
- (b) Existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0 .
- (c) T es continuo.
- (d) T es uniformemente continuo.
- (e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ (T es acotada). \swarrow Tipo: E
- (f) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

De [a] a [e] las probó Vicley en Teoría 15-
- Normados 2

Falta [f]

$\forall A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado

por [e] : T es acotada $\forall x \in E$

en particular

T es acotada $\forall x \in A \subseteq E$

$$\|T(x)\| \leq M \|x\|$$

Pero A es un conjunto acotado

$$\Rightarrow \|T(x)\| \leq M \cdot C$$

$\wedge C \geq \|x\| \forall x \in A$

?

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ y sea $T : E \rightarrow F$ lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E\}.$$

Comienzo por

$$\boxed{1} \quad M = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E\}$$

$$\boxed{2} \quad \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup \{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \}$$

$$\text{Si: } x \in E \text{ y } \|x\| \leq 1$$

$$\Rightarrow \|Tx\|_F \leq \underbrace{M \cdot \|x\|}_{M \cdot 1} = M$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq M$$

Lo guardo para más tarde

$$\boxed{2} \leq \boxed{1}$$

Ahora sigo con:

$$\boxed{2} \quad \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup \{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \}$$

$$\boxed{3} \quad \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup \{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E = 1 \}$$

$$\|T_x\|_F \leq \sup \left\{ \|T_x\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \right\}$$

$\uparrow \forall x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1$

q.v. q

$$\sup_{\|x\|_E = 1} \|T_x\|_F \stackrel{?}{\leq} \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_x\|_F$$

$$\text{Sea } x \in E / \|x\|_E = 1$$

$$\text{Sea } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_n\| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x \right\| \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \underbrace{\|x\|}_{=1} \end{aligned}$$

$$\|x_n\| = 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|T_{x_n}\| \leq \sup \left\{ \|T_x\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \right\}$$

$$\text{pues } [2] \leq [1]$$

y por [1]:

$$\|T_x\|_F \leq M \|x\|_E$$

\Rightarrow Si existe $\|x\|$ para un M fijo

\Rightarrow existe $\|T_x\|_F$

y como

$$x_n \rightarrow x$$

$$\|T_{x_n}\| \rightarrow \|T_x\|$$

$$\Rightarrow \|T_x\| \leq \sup \left\{ \|T_x\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E \leq 1 \right\}$$

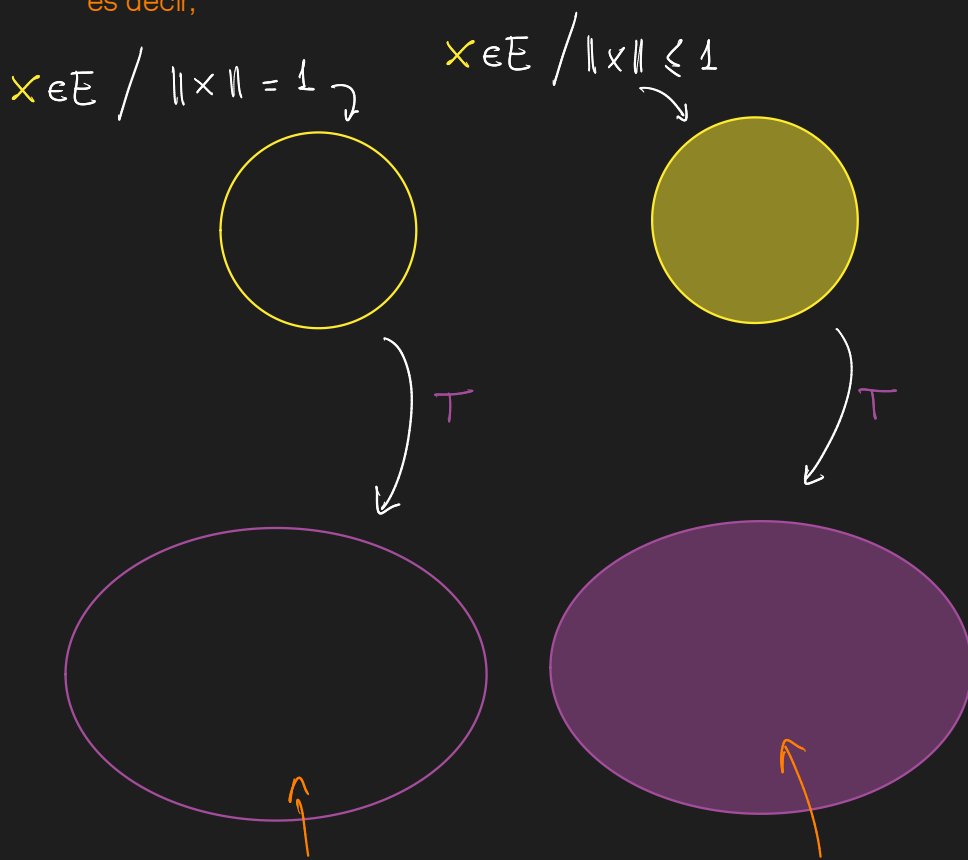
\uparrow
 $\forall x \in E \text{ y } \|x\| = 1$

en particular

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|T_x\|_F \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_x\|_F$$

$$\boxed{3} \leq \boxed{2}$$

Lo cual es intuitivo si de un lado (derecho $\boxed{2}$) tengo más valores posibles de x para pasar a través de T , es decir,



$$\sup_{(\text{solo el borde})} \leq \sup_{(\text{el mismo borde u el interior})}$$

Harta ahora tengo

$$\boxed{3} \leq \boxed{2} \leq \boxed{1}$$

Sigo con

$$\boxed{4} \quad \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \text{ y } x \neq 0 \right\}$$

Ter tl.

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \left\| \frac{Tx}{\|x\|_E} \right\|_F \stackrel{\downarrow}{=} \left\| T \left(\underbrace{\frac{x}{\|x\|_E}}_{\text{norma} = 1} \right) \right\|$$

Reverdo:

$$\boxed{3} \quad \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup \left\{ \|Tx\|_F : x \in E \text{ y } \|x\|_E = 1 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\| : x \in E \right\}$$

∴ $\boxed{4}$ es un caso especial de $\boxed{3}$ (o el mismo ...)

⇒

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$$

$$\boxed{4} \leq \boxed{3}$$

Tengo : $\boxed{4} < \boxed{3} < \boxed{2} < \boxed{1}$

Pero!

Si $\|x\|_E \leq 1$

$$\Rightarrow \|Tx\|_F \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

\therefore También vale que

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\boxed{2} < \boxed{4}$$

$\therefore \boxed{4} = \boxed{3} = \boxed{2} < \boxed{1}$

Falta uno!

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \text{ y } x \neq 0 \right\}$$

$$=: C$$

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C$$

$$\|Tx\|_F \leq C \cdot \|x\|_E$$

Pero M era el índice de todos los posibles C :

$$\boxed{1} \quad M = \inf \{ M > 0 : \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \}$$

$$\therefore M \leq \underbrace{\sup \left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0 \right\}}_{=: C}$$

$$\Rightarrow \boxed{1} \leq \boxed{4}$$

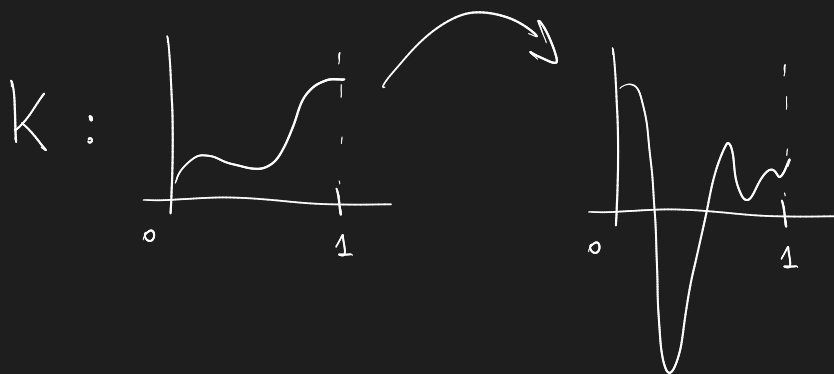
Finalmente

$$\boxed{4} = \boxed{3} = \boxed{2} = \boxed{1} \quad \circ \circ$$

9. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Probar que si consideramos en $C([0, 1])$ la norma infinito definida como $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$, entonces K es lineal y continua. Acotar su norma.



$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \text{ en el } [0, 1]$$

K Lineal?

$$\text{Suma) } \underbrace{K(f+g)(x)}_{?} \stackrel{?}{=} (Kf)(x) + (Kg)(x)$$

$$\int_0^1 k(x, y) \cdot \underbrace{(f+g)(y)}_{\substack{\text{def} + \text{de funciones}}} dy =$$

$$= \int_0^1 k(x, y) \cdot (f(y) + g(y)) dy$$

$$= \int_0^1 k(x, y) f(y) \cdot dy + \int_0^1 k(x, y) g(y) \cdot dy \quad \checkmark$$

Prod escalar

$$\begin{aligned} (K a f)(x) &= \int_0^1 k(x, y) \cdot (a f)(y) dy \\ &\quad \downarrow \text{def prod. escalar funcion.} \\ &= \int_0^1 k(x, y) \cdot a f(y) dy \\ &= a \cdot \int_0^1 \dots \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\therefore K$ es Lineal.

ta

Continua?

$$\left| \int_0^1 k(x, z) \cdot f(z) dz - \int_0^1 k(y, z) \cdot f(z) dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (\cancel{k(x, z)} - \cancel{k(y, z)}) \cdot f(z) dz \right|$$

?

- 10.** Sea $(\mathbb{R}[t], \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de polinomios definido en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p . Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.

11. Sea $\mathcal{E} : C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito, entonces \mathcal{E} es un funcional lineal continuo.

Lineal?

$$+ \mathcal{E}(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g) \checkmark$$

$$\cdot \mathcal{E}(\lambda f) = (\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot \mathcal{E}f$$

Es lineal \checkmark

Continuo? con $\|\cdot\|_\infty$

\swarrow $\|\cdot\|$ en \mathbb{R} : Toda equiv.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}f - \mathcal{E}g\|_\infty &= \|f(0) - g(0)\| \leq |f(0)| + |g(0)| \\ &\leq \max |f(x)| + \max |g(x)| \end{aligned}$$

