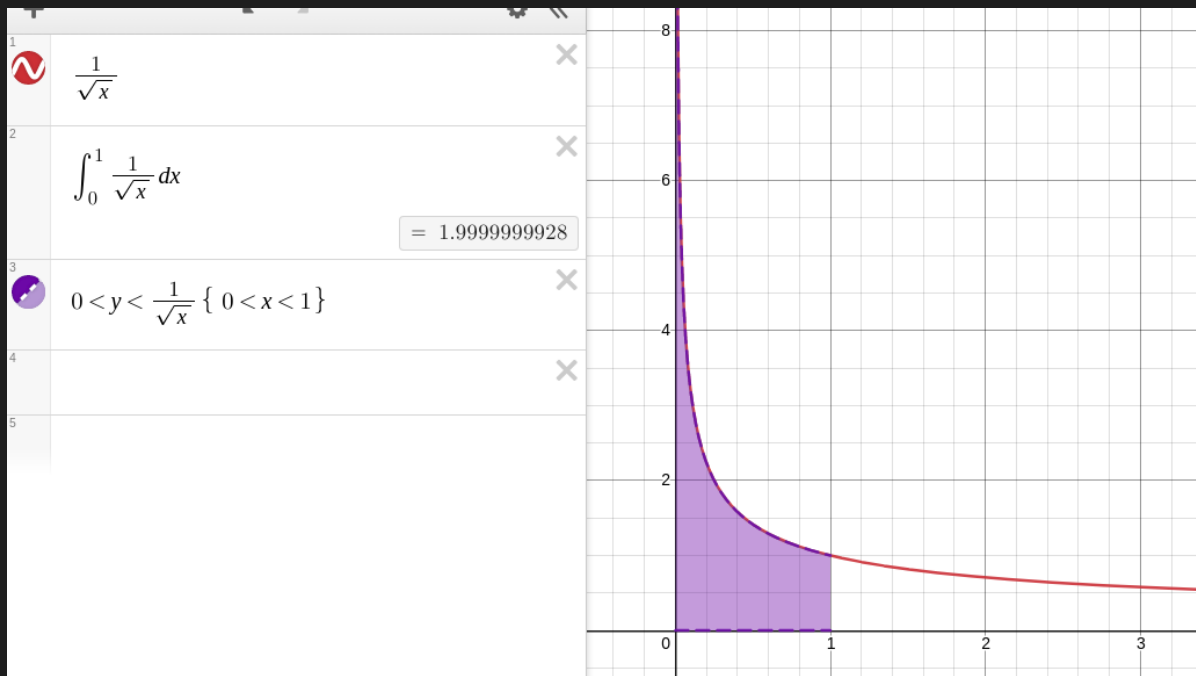


En lo que sigue \mathcal{M} será la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de \mathbb{R} y μ la medida de Lebesgue.

7. Probar que todo conjunto acotado de \mathcal{M} tiene medida finita. Mostrar un conjunto de \mathcal{M} que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.

Uso que puedo cubrir cualquier conjunto acotado con un intervalo abierto, pues todos los abiertos están en \mathcal{M} , y como este abierto tiene medida finita, cualquier subconjunto de este abierto tendrá medida finita menor o igual a la del abierto que lo cubre.



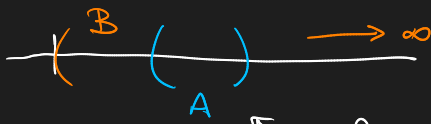
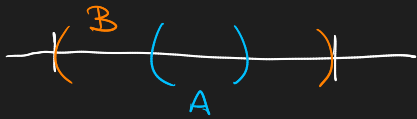
No me sirve ↗ "

$$\bullet \mu\left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right) = 0$$

$$\bullet \mu\left([-4, 0] \cup \left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right)\right) = 4$$

8. (a) Si $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$ y $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
 (b) Si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

a)



← no necesariamente acotado

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \underbrace{\mu(A \cup B)}$$

Como $A \subseteq B$
 $\Rightarrow A \cup B = B$

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B)$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad \checkmark$$

b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) =$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B) + \mu(A \cap B)$$

$$= \mu(A) + \mu(B)$$

$A \setminus B \cap (A \cap B) = \emptyset$
 $\Rightarrow = \mu(A)$

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$.

$$\lambda \cdot A \stackrel{?}{\in} \mathcal{M} \quad (\text{lo probamos Níco con } \lambda + A)$$

Dem :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \lambda \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(A) = \lambda \cdot A = \mathcal{B} \\ f^{-1}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{B} = A \end{array}$$

Como $\lambda > 0$

f es biyectiva

$$\text{con } f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot y$$

$$f(A) = \mathcal{B} \\ \downarrow$$

$$\Rightarrow \text{ej 2} \quad f(\mathcal{M}) = \left\{ \mathcal{B} \subseteq Y : f^{-1}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{A} \right\}_{\mathcal{A} \in \mathcal{M}}$$

(b) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ -álgebra de conjuntos de Y .

$$\text{Como } f(A) = \mathcal{B}$$

$$= \{ f(A) : A \in \mathcal{M} \}$$

es una σ -álgebra .

q u q

$$f(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \mathcal{M}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \in \mathcal{M} \text{ es nulo} &\Leftrightarrow f(A) \text{ es nulo} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ es nulo} \end{aligned}$$

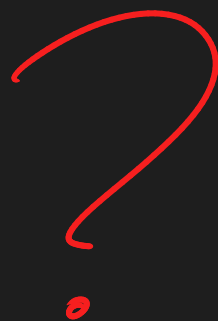
" f no cambia los nulos"

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \in \mathcal{M} \text{ es abierto} &\Leftrightarrow f(A) \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ es abierto} \end{aligned}$$

" f no cambia los abiertos"

Entonces

$$A = f\left(\underbrace{f^{-1}(A)}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{nulo o} \\ \text{intervalo abierto}}}\right) \in f(\mathcal{M})$$



$$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\supseteq \mathcal{M} \subseteq f^{-1}(\mathcal{M})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \lambda \cdot x \\ f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot x \end{array} \right.$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\text{aplica } f} \left(f(\mathcal{M}) \subseteq f\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right) = \mathcal{M} \right)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$$

g como

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{F}(\mathcal{M})$$



$$\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A). \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A) = \frac{\mu(\lambda \cdot A)}{\lambda}$$

Vemos que cumple

Teorema (existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única función μ de \mathcal{M} en $[0, +\infty]$ tal que

[1] • Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.

[2] • Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

" σ -aditividad"

↑ uniones e intersecciones numerables

[3] • Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

Importante! → $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}.$ "Regularidad"

Llamo $\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda \cdot A)}{\lambda}$

[1] Si $A = (a, b)$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(A) = \mu(\lambda a, \lambda b) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= (\lambda b - \lambda a) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda} (b - a)$$

$$= \underbrace{\mu((a, b))}_A \quad \checkmark$$

[2]

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) &= \frac{1}{\lambda} \cdot \mu\left(\lambda \cdot \bigcup_n A_n\right) \\&= \frac{1}{\lambda} \cdot \mu\left(\bigcup_n \lambda \cdot A_n\right) \\&\leq \frac{1}{\lambda} \sum_n \mu(\lambda \cdot A_n) \\&= \sum_n \frac{\mu(\lambda \cdot A_n)}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) \quad \checkmark \text{ sigo junto con [3]}$$

$$\boxed{3} \quad \mu(A) = \inf \{ \mu(U) : A \subset U \text{ abierto} \}$$

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \inf \{ \mu(U) : (\lambda A) \subset U \text{ abierto} \}$$

$$\stackrel{\text{Lema}}{\downarrow} = \frac{1}{\lambda} \cdot \inf \{ \mu(\lambda V) : A \subset V \text{ abierto} \}$$

$$\stackrel{\lambda > 0}{=} \inf \left\{ \frac{\mu(\lambda V)}{\lambda} : A \subset V \text{ abierto} \right\}$$

$$\tilde{\mu}(A) = \inf \{ \tilde{\mu}(V) : A \subset V \text{ abierto} \} \quad \checkmark$$

Mostré que la medida $\tilde{\mu}(A)$ cumple $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$

pero por Teorema de la Existencia de la

medida de Lebesgue, esta medida es única

y \therefore

$$\tilde{\mu} = \mu$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\mu(\lambda A) = \lambda \cdot \mu(A)$$

\square

10. Probar que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

A es siempre acotado (tanto en \Rightarrow como \Leftarrow)

\Rightarrow) Jb: A es medible.

Sea $\varepsilon > 0$,

$$\bullet \exists G \supseteq A \text{ abierto} / \underbrace{\mu(G) - \mu(A)} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\bullet \exists F \subseteq A \text{ cerrado} / \underbrace{\mu(A) - \mu(F)} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$$

Ahora

$$G \setminus F = G \cap F^c$$

$$= G \cap F^c \cap \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = A \cup A^c$$

$$\searrow = G \cap F^c \cap (A \cup A^c)$$

$$= (G \cap F^c \cap A) \cup (G \cap F^c \cap A^c)$$

Como $A \subseteq G$

$$\Rightarrow A \cap G = A$$

Como $F \subseteq A$

$$\Rightarrow F^c \supseteq A^c$$

$$\Rightarrow F^c \cap A^c = A^c$$

$$= (A \cap F^c) \cup (A^c \cap G)$$

$$G \setminus F = A \setminus F \cup G \setminus A$$

$$\mu(G \setminus F) = \mu(A \setminus F) + \mu(G \setminus A)$$

↓
Como $F \subseteq A$ y $A \subseteq G$

$$\downarrow$$
$$= \cancel{\mu(A)} - \mu(F) + \mu(G) - \cancel{\mu(A)}$$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

Tenra que

$$\bullet \mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\bullet \mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow -\mu(F) \leq -\mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

$$\leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4} - \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon \quad \checkmark$$

Fd to \Leftarrow

\Leftarrow) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F, G$, $F \subseteq A \subseteq G$ con F cerrado
y G abierto
y además $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

$q \vee q$

A es medible?

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defino $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

y usando JdL puedo asegurar que

$\exists F_n$ cerrado y G_n abierto /

$$F_n \subseteq A \subseteq G_n \quad \text{y} \quad \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$$

Para cada n en \mathbb{N} , definí dos conjuntos F_n y G_n que a medida que n tiende a infinito, se aproximan más y más entre ellos (en medida).



Llamo

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}$$

pues unión de medibles
es medible y F_n
es cerrado y $\therefore F_n \in \mathcal{M}$

y sé que como

$$F_n \subseteq A$$

$$\Rightarrow B \subseteq A$$

Vemos que

$$A = A \setminus B \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

\Rightarrow si $A \setminus B$ es medible,

A es medible!

en particular

que $A \setminus B$ es nulo (y \therefore medible)

Veamos $A \setminus B$ es nulo

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$\subseteq G_n \cap B^c$$

$A \subseteq G_n$

$$= G_n \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c$$

$$= G_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \cap F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus F_n$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Como } \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$$

\Rightarrow Me gustaría decir que

$$^{\text{"}} \mu(A \setminus B) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} ^{\text{"}}$$

PERO! no sé si $A \setminus B$ es medible!

\Rightarrow Hago algo similar a lo que hice con

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

defino

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \quad \leftarrow \text{es medible.}$$

$$\text{Como } A \subseteq G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A \subseteq D$$

Con la misma argumentación que antes

$$A \setminus B \subseteq D \setminus B = \underbrace{D \cap B^c}_{\text{es medible}}$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $D \cap B^c$ es medible

$$\Rightarrow D \setminus B \text{ es medible}$$

y demostrar

$$D \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) \leq \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) = 0$$

$$\Rightarrow D \setminus B \text{ es nulo}$$

$$\text{y como } A \setminus B \subseteq D \setminus B$$

$$\Rightarrow A \setminus B \text{ también es nulo}$$

$$\text{y } \therefore A \setminus B \text{ es medible.}$$

Finalmente, como

$$A = \underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow A \text{ es medible} \quad \square$$

11. Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?

$$\text{Si } \mu(A) = 0$$

$\Rightarrow A$ es nulo

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon$$

Los puntos de A° son aquellos

que :

$$\text{si } a \in A^\circ \Rightarrow \exists \alpha > 0 / B(a, \alpha) \subset A^\circ$$

pero para cada α que se me ocurra,

siempre habrá un $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ /

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon < \alpha$$

$$\therefore \nexists \alpha > 0 / B(a, \alpha) \subset A^\circ \quad \forall a \in A^\circ$$

$$\therefore A^\circ = \emptyset$$

□

$$\bullet \text{ Si } A^\circ = \emptyset \Rightarrow \mu(A) \stackrel{?}{=} 0 \quad ?$$

$$\text{Si } A = [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow A^c = \emptyset$$

\mathbb{Q} numerable \Rightarrow es nulo \Rightarrow es medible
 $\wedge \mu(\mathbb{Q}) = 0$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}^c$ es medible ($\in \sigma_0$)

Además $[0,1]$ es medible (lo probamos al fpro)
 en ejercicios).

$\Rightarrow A$ es medible (\cap de 2 medibles).

◦
◦
◦

$$\mu([0,1]) = 1 \checkmark$$

$$[0,1] = \underbrace{[0,1] \cap \mathbb{Q}}_{\subseteq \mathbb{Q}} \cup [0,1] \cap \mathbb{Q}^c$$

\mathbb{Q} nulo $\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ nulo
 $\Rightarrow \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

$$1 = \mu([0,1]) = \underbrace{\mu([0,1] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$$

$$\Rightarrow 1 = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$$

$$1 = \mu(A)$$

Rta : No

12. Sea $A \subseteq [0, 1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0, 1]$.

Un conjunto A es denso si :

• $\overline{A} = X = [0, 1]$ ↙ conjunto que lo contiene

• pero tambien :

$$A \text{ es denso en } [0, 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cap (a, b) \neq \emptyset \quad \forall a < b,$$

$$a, b \in [0, 1]$$

equivalentemente

$$A \cap B(a, r) \neq \emptyset \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$\forall r > 0$$

$$\therefore A \text{ es denso en } [0, 1] \Leftrightarrow$$

$$A^c \cap B(a, r) = \emptyset \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$\forall r > 0$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{(a-r, a+r)}$$

Supongo que

$\exists a \in A, \exists r > 0$ / "a A le falta un intervalito"

$$A \cap \mathcal{B}(a, r) = \emptyset$$

$$A \cap (a-r, a+r) = \emptyset$$

y luego es un absurdo.

$$\Rightarrow \mu(A \cap \mathcal{B}(a, r)) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow A^c \cap \mathcal{B}(a, r) \neq \emptyset$$

intervalito de radio r

$$\overbrace{a-r \quad a \quad a+r} = (a-r, a+r)$$

y así como $A \cup A^c = [0, 1]$

es lo mismo que $(A \cap [0, 1]) \cup (A^c \cap [0, 1]) = [0, 1]$

$$\Rightarrow \underbrace{(A \cap \overbrace{\mathcal{B}(a, r)}^{(a-r, a+r)})}_{\text{mide } 0} \cup \underbrace{(A^c \cap \mathcal{B}(a, r))}_{\downarrow} = \underbrace{\mathcal{B}(a, r)}_{\text{mide } 2r}$$

debe medir $2r$

$$\Rightarrow \mu(A^c \cap B(a, r)) = 2r \quad \text{con } r > 0$$

$$\Rightarrow \mu(A^c) \geq 2r$$

$$\text{pero } \mu(A) = 1 \quad (\text{por J6})$$

$$\text{y } A \cup A^c = [0, 1]$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \mu(A^c) = \mu([0, 1])$$

$$1 + \underbrace{2r}_{>0} = 1$$

Ab5!

\therefore

$$A \cap B(a, r) \neq \emptyset \quad \forall a \in A \text{ y } \forall r > 0$$

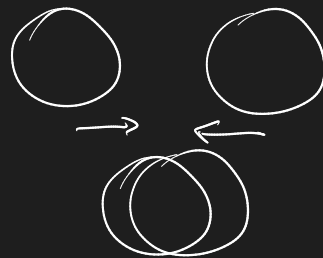
$$\Rightarrow A \text{ es denso.}$$

\square

13. Sea $\mathcal{M}(I)$ la σ -álgebra de los conjuntos medibles en $I = [0, 1]$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$ y $B \in \mathcal{M}(I)$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \Delta B) = 0$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

¿Cuáles quedan fuera de $\mathcal{P}([0, 1]) \setminus \mathcal{M}(I)$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \Delta B) = 0$$



$$\begin{aligned} A_n \Delta B &= (A_n \cup B) \setminus (A_n \cap B) \\ &= (A_n \setminus B) \cup (B \setminus A_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \setminus B) + \mu(B \setminus A_n) = 0$$

disjuntos

$$\downarrow = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(A_n \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} = 0$$

(Suma de sucesiones
convergentes converge)

disjuntos

por $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \textcircled{\text{I}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap B) \stackrel{\star}{=} \mu(B)$$

por B no depende
de n

$$\textcircled{I} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0$$

$$\textcircled{\star} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(B) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$$

