

Espacios Métricos 4

Repaso

Definición

Decimos que $x \in E$ es un **punto de acumulación** de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x .

Definición

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A ,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Obs:

Si x no es punto de acumulación de A

$$\Rightarrow \exists r > 0 \quad / \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$$

ó

$$B(x, r) \cap A = \{x\}$$

Esto nos lleva a definir:

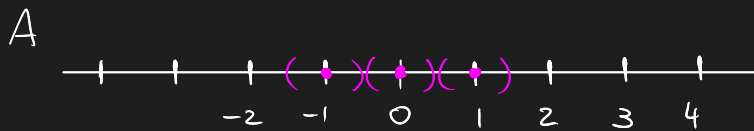
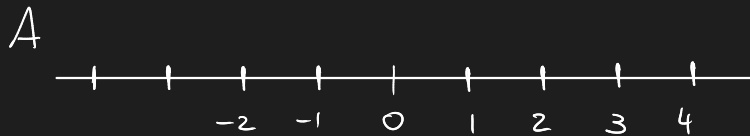
Def:

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice **aislado** si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Ejemplos

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ E = \mathbb{R} \\ A = \mathbb{Z} \end{array} \right\} \text{Todo punto de } A \text{ es aislado}$$



$$B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} = \{x\} \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

↑
Para cualquier
Bolíta de radio $\leq 1 \in \mathbb{R}$

2) Si: $A = \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ no tiene puntos aislados

3) Pensar: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Rt2: Todos puntos aislados menos el cero (pues allí converge)

Pensar

En \bar{A} están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A . ¿Será cierto que \bar{A} es la unión de los puntos de acumulación de A y los puntos aislados de A ?

Sucesiones y Cierre

Def:

Decimos que una sucesión

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ converge a } x \in E$$

si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \underbrace{d(x_n, x) < \varepsilon}_{x_n \in B(x, \varepsilon)} \quad \forall n \geq n_0$$

distancia del EM.

Obs:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \text{ en } (E, d) \iff d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

Dem: Heer!

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

- (i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$
- (ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos **distintos** tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$

$$i) \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0, \mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Tomando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists a_n \in \mathcal{B}(x, \frac{1}{n}) \cap A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n)_n \subset A,$$

$$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

equivale a

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$



\Leftarrow Sabemos que

$$\exists (a_n)_n \subset A \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$$

Dado $r > 0$,

$$\exists n_0 \quad / \quad d(a_n, x) < r \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow a_{n_0} \in \mathcal{B}(x, r)$$

y además

$$a_{n_0} \in A \quad (\text{pues } (a_n)_n \subset A)$$

$$\Rightarrow a_{n_0} \in A \cap B(x, r)$$

$$\Rightarrow A \cap B(x, r) \neq \emptyset$$

o sea que

$$x \in \overline{A}$$



ii) Ejercicio: Probar.

Tip: Hacer primero la vuelta.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$. Son equivalentes:

- (a) A es cerrado
- (b) Para toda sucesión $(a_n)_n \subset A$ que converge a un $x \in E$ se tiene que x pertenece a A .

Sucesiones de Cauchy.

Def

Un conjunto $A \subset E$ es acotado si

$$\exists x \in E \wedge \exists r > 0 \quad / \quad A \subset \mathcal{B}(x, r)$$

Def

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice acotada si

$$\exists x \in E \wedge \exists r > 0 \quad / \quad x_n \in \mathcal{B}(x, r) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

equivalentemente, si

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es acotado}$$

Recordemos que

Si $(x_n)_n$ es convergente $\Rightarrow \exists \underbrace{x \in E} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$
queremos otra def que no dependa del límite.

Podemos saber si una suc. converge mirando solamente los elementos de la sucesión?

(ie: no depender del límite x)

Rta: Casi...

Sucesión de Cauchy

Idea:

Si a partir de cierto punto, todos los elementos estén muy cerca del límite (def. usual)



\Rightarrow Bartería con pedir que a partir de algún n_0 todos los elementos estén cerca entre sí?

Def:

Una suc. $(x_n)_n$ se dice de Cauchy

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \text{si } n, m \geq n_0$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Ejemplos

1) Toda suc. convergente es de Cauchy

Notar que

- Siempre las suc. convergentes son de Cauchy
- Pero no siempre vale la vuelta.

2) En \mathbb{R} : Cauchy \equiv Convergente

Teorema

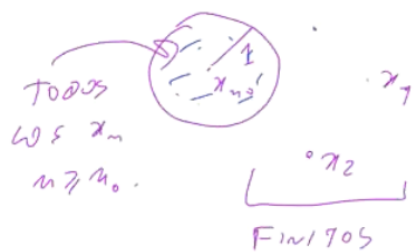
Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

- (1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- (2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.
- (3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Dem. de cede :

Dem(1) : dado $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 / d(x_n, x_m) < 1$
 $\forall n \geq n_0$.

(en part, $d(x_n, x_{n_0}) < 1 \forall n \geq n_0$.



$$d = \max \{ d(x_n, x_{n_0}) : 1 \leq n \leq n_0 \}$$

$$r > \max \{ 1, d \}.$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) < 1 < r \quad (n \geq n_0)$$

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq d < r \quad (n < n_0)$$

6/11

$$\therefore (x_n)_n \subset B(x_{n_0}, r)$$

\Rightarrow es acotada \square

2) Sea

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0,$$

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pues } n \geq n_0} + \underbrace{d(x_m, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pues } m \geq n_0}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

\therefore es de Cauchy.

\square

3) Sea $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sub.suc. convergente a $x \in E$

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} / d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0$$

y además, como la sucesión es de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$$

Quiero juntar estas dos cosas:

$$\text{Sea } k_1 \geq k_0 / n_{k_1} \geq n_0$$

$$\Rightarrow \text{Si } n \geq n_0 :$$

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_1}})}_{< \frac{\varepsilon}{2} \quad n, n_{k_1} \geq n_0} + \underbrace{d(x, x_{n_{k_1}})}_{< \frac{\varepsilon}{2} \quad k_1 \geq k_0}$$

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

$\therefore (X_n)_n$ converge,

III

Hay suc. de Cauchy no convergentes:

Ejemplo:

$$E = \mathbb{Q}$$

$$X_n = 3, \underbrace{1416 \dots}_{\text{Primeros } n \text{ dígitos de } \pi} \underbrace{\dots 000 \dots}_{\text{desde el dígito } n+1, \text{ todos ceros,}}$$

$$\Rightarrow (X_n)_n \subset \mathbb{Q} \quad (\text{pues límites decimales})$$

$$\Rightarrow \text{Si } n, m \geq n_0$$

$$d(X_n, X_m) \leq \frac{1}{10^{n_0}}$$

Pues tienen al menos n_0 dígitos en común,

$\therefore (X_n)_n$ es de Cauchy

Pero! no converge, pues π es irracional ($\pi \notin \mathbb{Q}$)

$$\text{y } (X_n)_n \subset \mathbb{Q}$$

• Para ser convergente, debería converger

π un elemento del espacio métrico \mathbb{Q} ,
y como $\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ no converge.

- Lo mismo valdría usando algún otro irracional como $\sqrt{2}$, e , etc.

Obs:

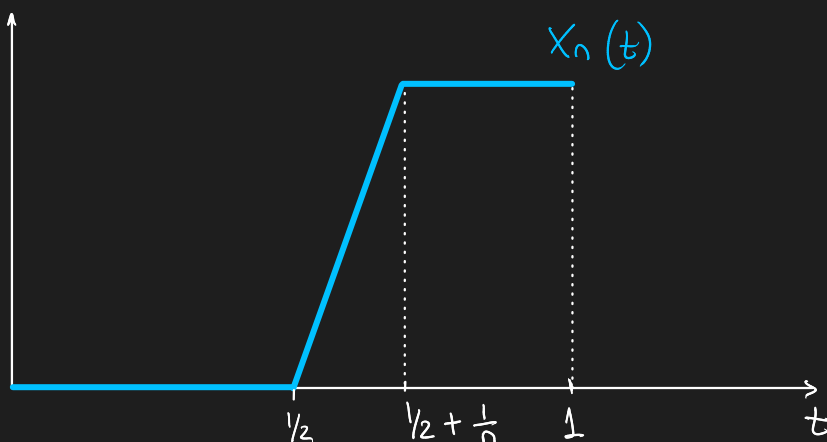
Una suce. de Cauchy que no converge, puede interpretarse como que converge a un agujero en el espacio E .

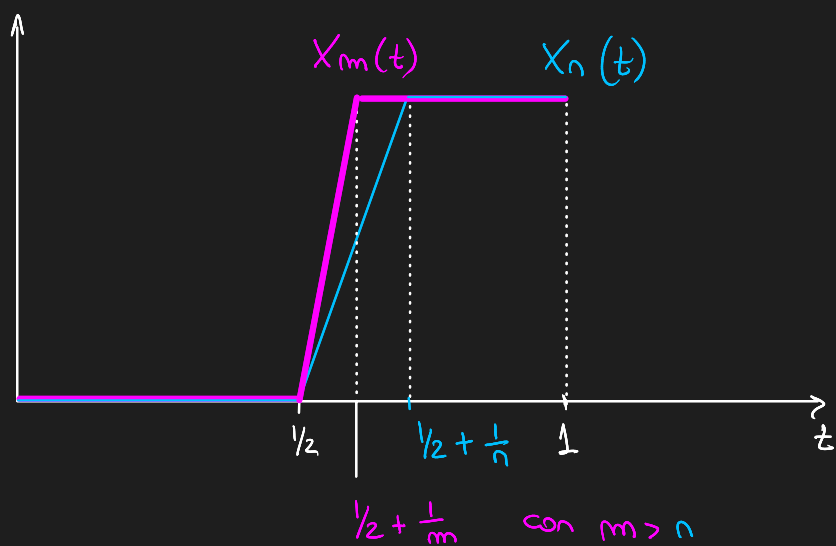
Otro ejemplo menos "Trivial"

$$E = \mathcal{C}([0,1])$$

$$\text{con } d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

Idea sin contextos:

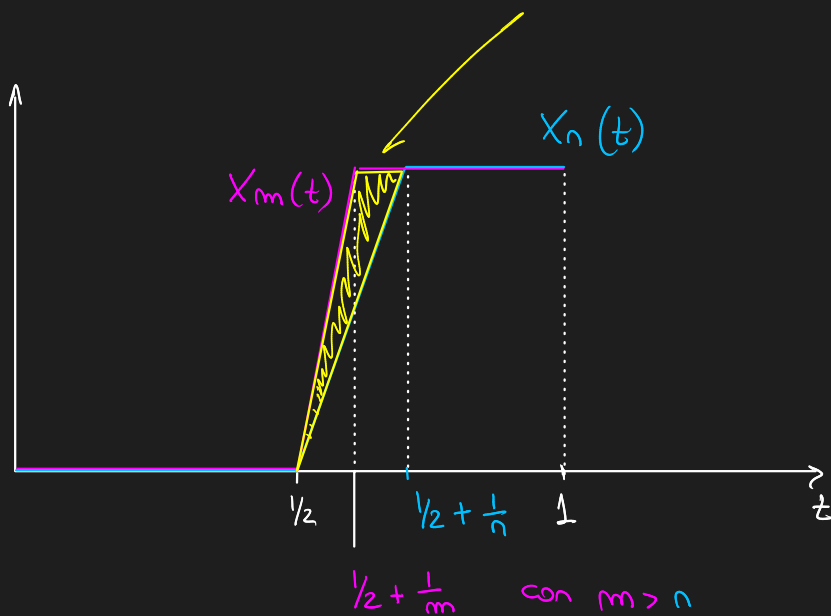




Sabemos que

$$d(X_m, X_n) = \int_0^1 |X_m(t) - X_n(t)| dt$$

Lo cual geométricamente es el área del triángulo restante



Entonces

$$d(X_m, X_n) = \text{Área}(\nabla)$$

y como es una sucesión de Cauchy:

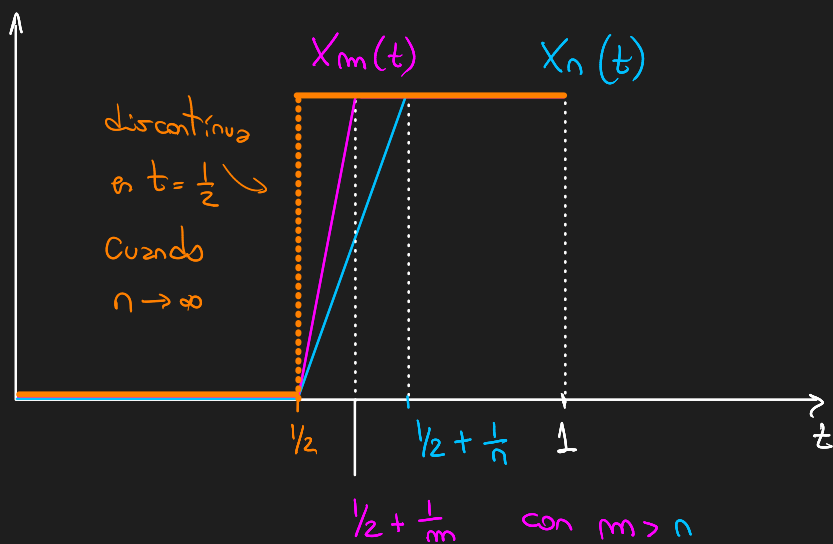
$$d(x_m, x_n) = \text{Área}(\nabla) < \varepsilon$$

$$\text{Si } n, m \geq n_0$$

∴ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Pero! no converge!

Pues si convergiera, sería a una
función discontinua, con una discontinuidad
(salto) en $t = \frac{1}{2}$



Conclusión

- Es de Cauchy, pero no converge

Notar que

Con d_∞ esto no pasa (es completo!)

Def:

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda suc. de Cauchy es convergente a algún punto $x \in E$.

Ejemplo:

\mathbb{R} es completo.

\mathbb{R}^n también.

Ejemplo

\mathbb{R} es completo (y también \mathbb{R}^n)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en \mathbb{R} tiene una subsucesión convergente. Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente. Por la parte (3) del Teorema, $(x_n)_n$ converge.

Ejercicio

Consideremos un conjunto no vacío E con la métrica discreta δ . ¿Es (E, δ) completo?

y $(\mathbb{I}, |\cdot|)$?

