

## Práctica 9

En lo que sigue  $\mathcal{M}$  será la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de  $\mathbb{R}$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue.

1. Probar que dada una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  y dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , son equivalentes:

(a)  $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

→ (b)  $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

(c)  $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

(d)  $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Concluir que si  $X = \mathbb{R}$  y  $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ , entonces  $f$  es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los ítems de arriba.

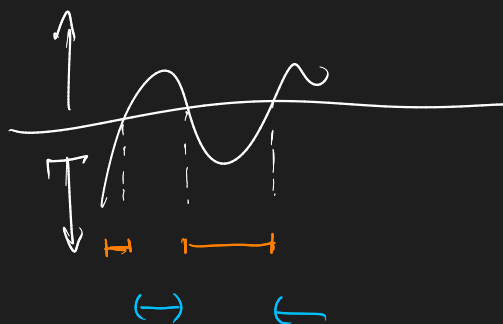
$a \Rightarrow b$ ) Como

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$$

y además

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > a\}$$

!!  
..  
 $\mathcal{B}$



!!  
..  
 $\mathcal{A}$

$$\underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{\mathcal{B} \in \mathcal{A} ?} = \underbrace{X}_{X \in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{A \in \mathcal{A}}$$

Como  $A^c \in \mathcal{B}$

$$\text{y } A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{A} \quad \checkmark$$

$$b \Rightarrow d) \quad B = \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

$$D = \{x \in X : f(x) < a\}$$

$$f(x) < a \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad / \quad f(x) \leq a - \frac{1}{n}$$

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}}_{\substack{\in \mathcal{A} \quad \text{pues} \\ \text{vale } B \text{ por } 7b}}$$

Como  $A$  es  $\sigma$ -álgebra cerrado por unión numerable

$\Rightarrow$  vale que  $D \in A$  ✓

Tengo



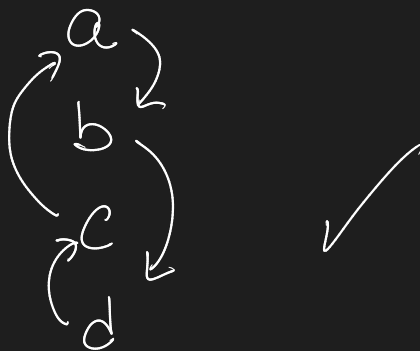
$d \Rightarrow c$ ) mismo que  $a \Rightarrow b$  pues

$$D^c = C \quad \checkmark$$

Falta  $c \Rightarrow a$ )

Sale igual que  $b \Rightarrow d$  ✓

Pro b é



$\therefore a, b, c, d$  son equivalentes

Si  $A = M \Rightarrow$  si vale  $a, b, c$ , ó  $d$   
 $f$  es medible

y si no vale alguno

$\Rightarrow f \notin M$  pues no  
vale ninguno de los  
 $a, b, c, d$  equivalentes.

2. Sean  $E, F \subseteq \mathbb{R}$  Probar:

(a)  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \mathcal{M}$ .

(b)  $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$ .

(c)  $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$ .

a)  $\chi_E(x)$  es medible  $\iff E \in \mathcal{M}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \subseteq \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x \notin E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ) Si  $\chi_E(x)$  es medible

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\}$$

si elijo

$a=0$

$\Rightarrow$

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > 0\}$$

def de  $\chi_E$

$$\downarrow = E$$

$\uparrow$   
es medible

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
es medible

$\therefore E$  es medible.  $\checkmark$

$\Leftarrow$ ) No sé si  $\chi_E$  es medible  
pero E sí lo es

Defino

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = ?$$

• Si  $a < 0$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) \geq 0$$

sucede para todo  $x \in \mathbb{R}$  pues

$$\chi_E(x) \in \{0, 1\}$$

• Si  $a \in [0, 1)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 0$$

$$\equiv \chi_E(x) = 1$$

• Si  $a \in [1, +\infty)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 1$$

nunca sucede

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Come  $R \in M_I$

$$E \in \mathcal{M} \quad (\text{por } \mathcal{H}),$$
$$\varphi \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a \right\} \in \mathcal{M}$$

50  $\chi_E(x)$  es medible.



Prod.

(b)  $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$ .

[illegible]

"Compuerto lógica AND"

$$\chi_{E \cap F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \cap F \\ 0 & \text{if } x \notin E \cap F \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \chi_E(x) = 1 & \Leftrightarrow x \in E \\ \chi_E(x) = 0 & \Leftrightarrow x \notin E \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} \chi_F(x) = 1 & \Leftrightarrow x \in F \\ \chi_F(x) = 0 & \Leftrightarrow x \notin F \end{cases}$$

$\chi_E$	$\chi_F$	$\chi_{E \cap F}$	$\chi_E \cdot \chi_F$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Como sus valores son iguales  
en todos los casos

$$\Rightarrow \chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F.$$

□



(c)  $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$ .

"OR"

$\chi_E$	$\chi_F$	$\chi_{E \cap F}$	$\chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$	$\chi_{E \cup F}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	$2 - 1 = 1$	1

↖ ↗  
Gleiches



3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monótona. Probar que  $f$  es medible.

Pruebas monótona creciente :

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}$  :

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x > x_0$$

Armo

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$$

Si llamo

$$a := f(x_0)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(a)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq f^{-1}(a)\}$$

$$= [f^{-1}(a), +\infty) \quad \text{que es cerrado } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore [f^{-1}(a), +\infty) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$  es medible.  $\square$

$f$  medible  $\Leftrightarrow \{x : f(x) \geq a\}$  es medible  $\forall a$ .

Sug: monótona creciente  $\Rightarrow \{x : f(x) \geq a\}$  es un intervalo.

$\{x : f(x) \geq a\} \ni x_0 \Rightarrow a \leq f(x_0)$   
 $\Rightarrow$  cualquier  $y \geq x_0 \Rightarrow f(y) \geq f(x_0) \geq a$   
 $\Rightarrow [x_0, +\infty) \subseteq \{x : f(x) \geq a\}$  si  $x_0 \in$ .  
 si  $\{x : f(x) \geq a\}$  es acotado  $\sup f \geq a$  no vacío.

$\exists \alpha = \inf \{x : f(x) \geq a\}$   
 si  $\alpha \notin \{x : f(x) \geq a\} \Rightarrow \{x : f(x) \geq a\} = (\alpha, +\infty)$   
 como  $(x_n)_n \in \{x : f(x) \geq a\} / x_n \searrow \alpha$ .  
 $(\alpha, +\infty) = \bigcup_n [x_n, +\infty)$  ~~iff~~

Falta no está en  $\mathbb{R}$   
 $\Rightarrow$  es todo  $\mathbb{R}$

4. Probar que si  $f$  es medible entonces  $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  es medible

$\Rightarrow A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$  es medible  
y

$B := \{x \in X : f(x) < a\}$  es medible

$\Rightarrow A \setminus B \equiv A \cap B^c$   
 $\uparrow$   
operaciones de  $\sigma$ -álgebra

$\Rightarrow A \setminus B$  es medible

con  $A \setminus B = \{x \in X : f(x) = a\}$

□

5. Probar que si  $f$  y  $g$  son medibles entonces  $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$ .

$f$  es medible

$A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$  es medible

$g$  es medible

$B := \{x \in X : a \leq g(x)\}$  es medible

$\Rightarrow$  vale la intersección (para un mismo  $a$ )

$$A \cap B = \bigcup_a \{x \in X : f(x) \leq a \leq g(x)\}$$

Pregunta

$$\therefore \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \text{ es medible.}$$

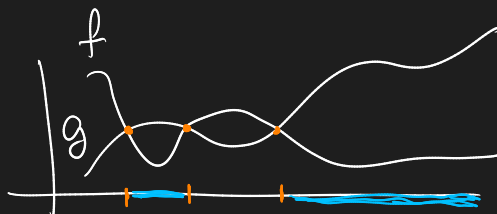


No puedo hacer esto pues cuando quiera unir sobre todos los  $a$  en  $\mathbb{R}$ , ésta unión será de NO NUMERABLES

elementos, por lo que no vale que es medible por ser unión de medibles.

De nuevo :

Escribo :



$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \cup \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

y además

$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}^c = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

$$= \{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

o  
o o

$$X = \underbrace{\{ x \in X : f(x) < g(x) \} \cup \{ x \in X : f(x) = g(x) \}}_{\text{Complemento de}} \overset{d}{\cup} \underbrace{\{ x \in X : f(x) > g(x) \}}_{\text{es medible?}}$$

Tengo

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

y como  $f(x) > g(x)$  con  $f(x), g(x) \in X \subseteq \mathbb{R}$

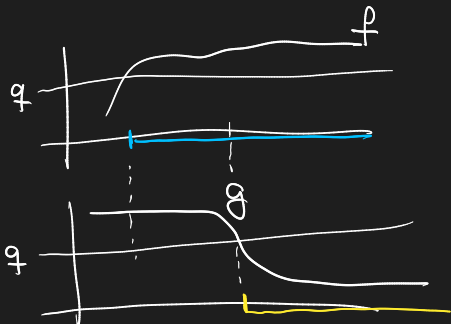
$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} / f(x) > q > g(x) \text{ para cada } x$$

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \} = \bigcup_q \{ x \in X : f(x) > q > g(x) \}$$

↖ es una unión numerable!

Separo

$$\{ x \in X : f(x) > q > g(x) \} = \underbrace{\{ x \in X : f(x) > q \}}_{\text{es medible por } f \text{ medible}} \cap \underbrace{\{ x \in X : q > g(x) \}}_{\text{es medible por } g \text{ medible}}$$



es medible  
por  $f$  medible

es medible  
por  $g$  medible

entonces

$\{x \in X : f(x) > q > g(x)\}$  es medible

$\Rightarrow$  unión numerable de  $\uparrow$  es medible

$\Rightarrow \{x \in X : f(x) > g(x)\}$  es medible

$\Rightarrow$  su complemento es medible

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}^c = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

□

6. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Probar que:

(a) Si  $f$  es continua en  $[0, 1]$ , entonces es medible.

(b) Si  $f$  es continua en casi todo punto de  $[0, 1]$  entonces es medible.

a) Como  $f$  es continua

$f^{-1}((-\infty, a])$  es cerrado  $\forall a \in \mathbb{R}$  en  $[0, 1]$

pues  $(-\infty, a]$  es cerrado  $\forall a \in \mathbb{R}$

?  $f^{-1}((-\infty, a]) \subseteq [0, 1]$

q.v.q

$$f \text{ es medible} \equiv \left\{ x \in [0, 1] : f(x) < a \right\} \forall a \in \mathbb{R} \text{ es medible}$$

veo que para cada cerrado de esta forma

$$f^{-1}((-\infty, a]) = [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$$

(I)

↑ obtengo un intervalo cerrado,

que es medible por ser

complemento de abierto  $\in \mathcal{M}$

y además

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty, a]) &= \left\{ x \in X : f(x) \in (-\infty, a] \right\} \forall a \in \mathbb{R} \\ &= \left\{ x \in X : f(x) < a \right\} \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

por  $\textcircled{I}$  es un intervalo cerrado  
 $\therefore$  es medible.

$\square$



b) Me gustaría saber un conjunto nulo y condic. que sigue  
siendo medible.

?

7. Sean  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles. Probar que:

(a)  $f + g$  es medible.

(b)  $f^2$  es medible.

(c)  $f \cdot g$  es medible.

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a \quad \forall a \in \mathbb{R}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a \quad \forall a \in \mathbb{R}\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : h(x) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}\}$$

Llamo

$$h(x) := f(x) + g(x)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{med}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{medible}} \Rightarrow h(x) \text{ es medible}$

ej 4. Probar que si  $f$  es medible entonces  $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

$\downarrow$

$\Rightarrow \{x \in X : h(x) = a\} \text{ es medible}$



8. Dada una sucesión  $(f_n)_n$  de funciones en  $[0, 1]$ , consideremos las funciones

$$S(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{y} \quad I(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones  $f_n$  son medibles, entonces  $S$  e  $I$  también lo son.

límite de medibles es medible? lo probamos en alguna teórica?

9. Sea  $(f_n)_n$  una sucesión de funciones medibles definidas en  $[0, 1]$  tales que convergen en casi todo punto a una función  $f$ . Probar que  $f$  es medible.











