Mercury 28 Abr

Análisis Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas d, d_2 y d_∞ son como en la Práctica 3, y δ representa a la métrica discreta, mientras que en (d) (E, d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$.

a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$

d_1

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$f(B_{d_2}(\vec{x}, \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(\vec{x}), \varepsilon)$$

equiv.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

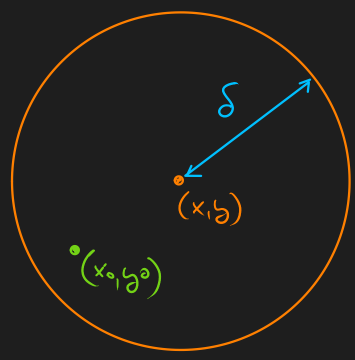
$$f(B_{d_2}((x,y), \delta)) \subseteq B_1(f(x,y), \varepsilon)$$

Sea

$$(x_0, y_0) \in B((x,y), \delta)$$

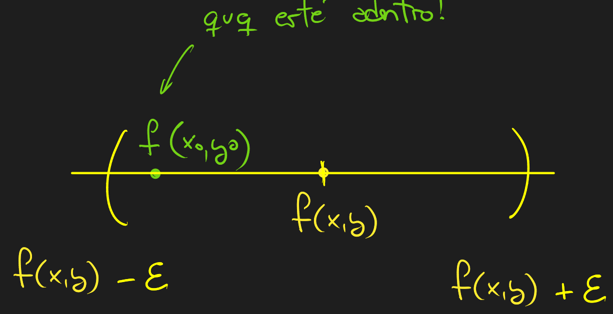
$$(x_0, y_0) \in \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(x,y)) < \delta \}$$

(x_0, y_0) es alguno de estos (a,b)



qvq

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0^2 + y_0^2} \overset{?}{\in} B(f(x,y), \varepsilon)$$



Sé:

qvq $f(x_0, y_0)$ es alguno de estos c.

$$B(f(x,y), \varepsilon) = \{ c \in \mathbb{R} : d_1(c, f(x,y)) < \varepsilon \}$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} : | c - f(x,y) | < \varepsilon \}$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} : | c - (x^2 + y^2) | < \varepsilon \}$$

Sé que:

$$(x_0, y_0) \in B((x,y), \delta)$$

$$\Rightarrow d_2((x_0, y_0), (x,y)) < \delta$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \delta^2$$

quiero

$$f(x_0,y_0) \overset{?}{\in} \left\{ c \in \mathbb{R} : \left| c-(x^2+y^2)\right| < \varepsilon \right\}$$

si esto vale $\Rightarrow \exists\, c = x_0^2+y_0^2 /$

$$\underbrace{\left| x_0^2+y_0^2-(x^2+y^2)\right|}_{d_1\left((x_0,y_0),(x,y)\right)} < \varepsilon$$

Pero de la guía 3 sabemos que

$$d_2(a,b) \leq d_1(a,b)$$

$$\Rightarrow \underbrace{d_2\left((x_0,y_0),(x,y)\right)}_{<\delta} \leq d_1\left((x_0,y_0),(x,y)\right) < \varepsilon$$

Me perdí !! , vuelvo a empezar !! :)

Sugerencia:

Daniel Carando 6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.
Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

6:23 PM

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y),(3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.
Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε, tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED) 6:28 PM

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en $\mathbb{R}$ es la d_1, pero en realidad también es la d_2:
$d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t)$.
También es la d_∞, claro.

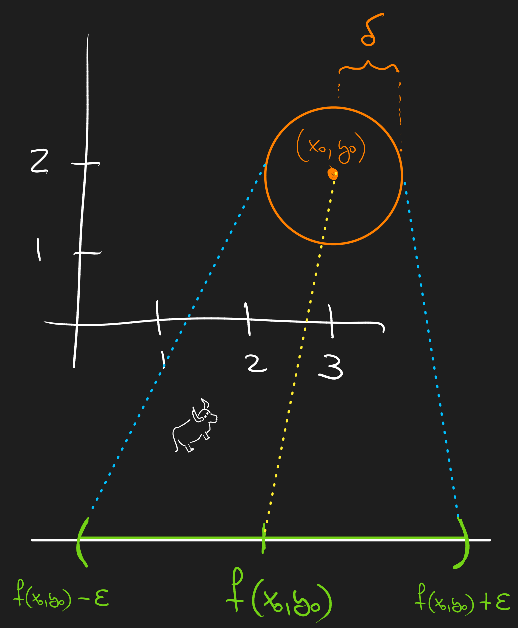
Pruebo que es continua en el (3,2)

Def. de f continua $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, /$

$$f\big(B((x_0,y_0),\delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0,y_0),\varepsilon\big)$$

Lo pruebo en $(x_0,y_0) = (3,2)$



Sea

$$(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$$

me fijo solo en:

$$(x,y) \in B((3,2),\delta)$$

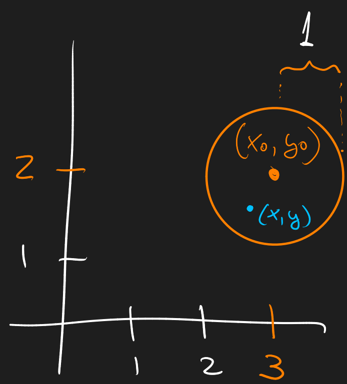
$$(x,y) \in \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(3,2)) < \delta\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$

Si $\delta = 1$:

$$(x,y) \in \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(3,2)) < 1 \}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x,y)$, o sea

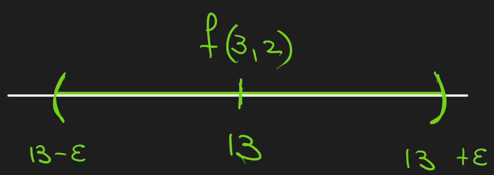
quiero que

donde veo continuidad

$\downarrow$

$$f(x,y) \overset{?}{\in} B(f(3,2), \varepsilon)$$

$$\in \{ c \in \mathbb{R} : \underbrace{d(c, \underbrace{f(3,2)}_{3^2+2^2})}_{|c-13|} < \varepsilon \}$$



$$= |f(a,b) - f(3,2)|$$

$$= |a^2 - 3^2 + b^2 - 2^2|$$

Daniel Carando (EDITED) 6:48 PM

Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0). Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$.
Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dés que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1.
Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, proque ε puede ser arbitrariamente chico.
Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ, sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces
$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$
Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1. Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\big((x,y),(3,2)\big) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

sé

$$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

En donde:

$$(x^2 - 3^2) = \underbrace{(x+3)}\underbrace{(x-3)}_{<\delta_1 = 1}$$

Como $d(x,3) < 1$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \pm d(x,3) < 3 + 1 = 4$$

$x < 4$

$\Rightarrow x + 3 < 7$

$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

$(y^2 - 2^2) = \underbrace{(x+2)}\ \underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$

Como $d(x,2) < \delta_1 = 1$

$\Rightarrow x = 2 \pm d(x,2)$

$x < 3$

$\Rightarrow x + 2 < 5$

$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero acotar todo por ε

$12\delta < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3,2)$

que resulta ser $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{12}\right\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists \delta > 0 \; /$$

$$f\left(B\left((3,2), \delta\right)\right) \subseteq B\left(f(3,2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\left((x,y), (x_0,y_0)\right) < \delta_1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio:

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| = \left|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2\right| \leq \left|x^2 - x_0^2\right| + \left|y^2 - y_0^2\right|$$

En donde:

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = \underbrace{|x + x_0|}_{} \, \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow \quad x_0 - d(x,x_0) < x < x_0 + d(x,x_0)$$

$$\Rightarrow |x+x_0| < \underbrace{|x|}_{\leq |x_0| + |x-x_0|} + |x_0|$$

$$< 2|x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

elijo este $\delta = 1$

Mismo procedimiento para

$$|y^2 - y_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< (2|x_0|+1)\cdot\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< (2|y_0|+1)\cdot\delta}$$

$$< \delta \left(2|x_0| + 2|y_0| + 2\right)$$

$$< 2\delta \left(\underbrace{|x_0|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_0|}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{> 0}\right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)}$$

$\therefore$ mostré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ dado por

$$\delta = \min\left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)} \right\}$$

tal que

$$f\left(B\left((x_0, y_0), \delta\right)\right) \subseteq B\left(f(x_0, y_0), \varepsilon\right)$$

$\therefore$ mostre continuidad en cada (x_0, y_0) de $E = \mathbb{R}^2$

$\therefore$ f es contínua en $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$

$\blacksquare$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos }. \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0,1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0,1)$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

Como f es continua en x_0:

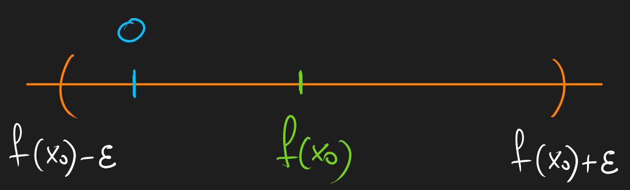
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, /$

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

Si

$f(x_0) > 0$

$\Rightarrow B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$ tiene centro en:



Si tomo

$$r = d\big(f(x_0), 0\big) > 0$$

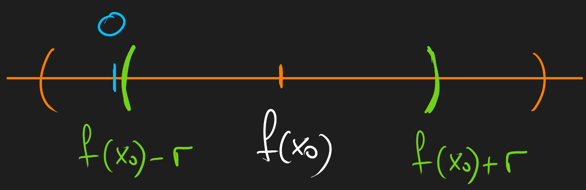
Como f es continua en x_0

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, /$

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

en particular

Vale para $\varepsilon = r = d(f(x_0), 0) > 0$



$\therefore$ Todos los elementos de la bola

$$B\Big(f(x_0),\ d(f(x_0), 0)\Big)$$

$$\parallel$$

$$\Big\{ y \in E = \mathbb{R} : d\big(f(x_0), y\big) < d\big(f(x_0), 0\big) \Big\}$$

∎