9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

¿es un sii?

$$S_N = \sum_{n\geq 1}^{N} f_n \rightrightarrows f \iff \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$$

a) Sé $\sum_{n\geq 1}^{N} f_n \rightrightarrows f$

$$\left| \sum_{n\geq 1}^{N} f_n(x) - f(x) \right| < \alpha \quad \text{con } \alpha > 0 \quad \forall x \in X$$

$$N \geq N_0$$

qvq

si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /

si $|x-y| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(y) \right| < \varepsilon$

hago lo mismo que en ej anterior: sumo y resto S_N

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n(y) \right|$$

$$= \left| \underbrace{f(x) - S_N(x)} + S_N(x) \underbrace{- f(y) + S_N(y)} - S_N(y) \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| S_N(x) - f(x) \right|}_{\substack{\leq \alpha \\ \text{a partir de} \\ \text{algún } N_0}} + \underbrace{\left| S_N(y) - f(y) \right|}_{\substack{\leq \alpha \\ \text{a partir de} \\ \text{algún } N_0}} + \underbrace{\left| S_N(x) - S_N(y) \right|}_{?}$$

$$\left| S_N(x) - S_N(y) \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f_n(y) \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left| f_n(x) - f_n(y) \right|}_{\substack{< \tilde{\varepsilon}_n \text{ por continuidad} \\ \text{de las } f_n}}$$

Finalmente

$$\left| f(x) - f(y) \right| < 2\alpha + N \cdot \tilde{\varepsilon}_n \overset{\text{quiero}}{<} \varepsilon$$

Vale si $\tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\varepsilon - 1}{2}$$

vale a partir de algún N_0

$\Rightarrow$ f es continua. $\blacksquare$