UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Medida 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Todo abierto U de $\mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos disjuntos.

$U = \dot{\bigcup\limits_n} (a_n, b_n)$

Todo abierto U de $\mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos disjuntos.

Conjuntos medibles: $\mathcal{M}$ σ-álgebra generada por los abiertos y los conjuntos nulos.

. conjunto nulo: A es nulo si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (U_j)_{j \in J}$ de intervalos / $A \subseteq \bigcup_j U_j$ $\wedge$ $\sum_j \operatorname{long}(U_j) < \varepsilon$.

. σ-alg: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ X conj $\neq \emptyset$ / $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ y $(A_n)_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{C}$ una familia de $\mathbb{P}(X)$. La σ-alg. generada por $\mathcal{C}$ es la <u>menor</u> σ-alg. que contiene a $\mathcal{C}$

Si Σ es una σ-alg q' cont. a $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\Sigma \supseteq$ la σ-alg. generada x $\mathcal{C}$.

5

Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941)

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$. $= \operatorname{long}((a,b))$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}^{\in \mathcal{M}}\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

  Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\boxed{\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).}$$

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

(regularidad)

$$\mu(A) = \inf\{\overset{\mu(U)}{\cancel{\mu(A)}} : A \subset U,\ U \text{ abierto}\}.$$

Observación

- $\mu(\emptyset) = 0$: $A_1 = [0,1]$ $A_n = \emptyset$ $\forall n \geq 2$ son disj $\Rightarrow$

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(\underbrace{\bigcup A_n}_{[0,1]}) \underset{\uparrow \text{Teo.}}{=} \sum_n \mu(A_n) = \underbrace{\mu([0,1])}_{1} + \sum_{n \geq 2} \mu(\emptyset)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 2} \mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0 .$$

Observación

- $\mu(\emptyset) = 0$:

- Vale la aditividad: Si $A, B \in \mathcal{M}$ y son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

$A, B, \phi, \phi, \ldots\ldots \Rightarrow \mu(\overbrace{A \cup B}^{A\cup B} \cup \phi \cup \cdots \phi \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(B)$

$+ \mu(\phi) + \mu(\phi) \cdots\cdots = \mu(A) + \mu(B).$

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. (monotonía)

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$.

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (*) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.
- Dados $A \in \mathcal{M}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{M}$ y $\mu(A + c) = \mu(A)$.

Dem (*) A es nulo, qvq es q $\mu(A)=0$.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists (U_j)_j$ intervalos $/ \ A \subseteq \bigcup_j U_j \wedge \sum_j \underbrace{\text{long}(U_j)}_{\mu(U_j)} < \varepsilon$

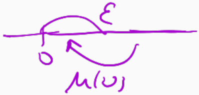
$$\mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_j U_j\Big) \leq \sum_j \underbrace{\mu(U_j)}_{\text{long}(U_j)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(A) < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

- Si $\mu(A) = 0$ qvq A es nulo.

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, U \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\mid A \subseteq U \wedge \mu(U) < \varepsilon$

$[\, 0 = \mu(A) = \inf\big(\mu(U) : U \text{ abto} / A \subseteq U\big)$



$$\Rightarrow U = \bigsqcup_n (a_n, b_n) \Rightarrow A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n)$$

$$\underline{\sum_n \text{long}(a_n, b_n)} = \sum_n \mu((a_n, b_n)) \overset{\text{son disj.}}{=} \mu\Big(\bigcup (a_n, b_n)\Big) = \mu(U) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow A \text{ nulo.}$$

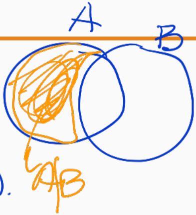
Proposición $I=[0,1]$ $\to \{x\in A : x\notin B\}$

Sean $A, B \in \mathcal{M}(I)$. Entonces, $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$ y $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$.

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}(I)$. Entonces, $A \setminus B \in \mathcal{M}(I)$ y $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$.

En particular, $\boxed{\mu(A^c) = 1 - \mu(A).}$



Dem: $A \setminus B = A \cap B^c \cap I, \in \mathcal{M}(I)$.

$A \cup B = A \setminus B \overset{d}{\cup} B$

$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B \overset{d}{\cup} B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$

$\mu(A^c) = \mu(I \setminus A) = \mu(I) - \mu(A) = 1 - \mu(A)$ ☒

$I \setminus A \overset{d}{\cup} A = I$

Proposición (regularidad)

Sea $A \in \mathcal{M}(I)$. Entonces $\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ cerrado}\}$.

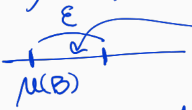
Dem: $F \subseteq A$ cerrado $\Rightarrow \mu(F) \leq \mu(A) \Rightarrow \sup_{\substack{F \subseteq A \\ \text{cerrado}}} \{\mu(F)\} \leq \mu(A)$

Dado $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, F \subseteq A$ cerrado / $\mu(A) - \varepsilon < \mu(F)$.

Llamo $B = I \setminus A = I \cap A^c \in \mathcal{M}(I) \Rightarrow \exists\, U \supseteq B$ abierto /

$\mu(B) + \varepsilon > \mu(U) \Rightarrow \mu(B) = 1 - \mu(A)$

$\mu(U) = 1 - \mu(U^c)$ $\quad$ U^c es cerrado y $A \supseteq U^c = F$



$\Rightarrow \cancel{1} - \mu(A) + \varepsilon > \cancel{1} - \mu(F) \Rightarrow \mu(F) > \mu(A) - \varepsilon$. $\boxtimes$

Continuidad de la medida

$I = [0,1]$

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.

Continuidad de la medida

$A_n \nearrow \bigcup_n A_n$

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.
Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Continuidad de la medida

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.
Entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots \supset B_n \ldots$.

Continuidad de la medida

Teorema

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots \subset A_n \ldots$.
Entonces

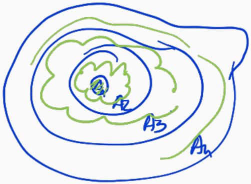
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(I)$ tal que $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots \supset B_n \ldots$.
Entonces

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

$B_N \searrow \bigcap_m B_m$

Dem: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$



$\tilde{A}_1 = A_1 \qquad \tilde{A}_2 = A_2 \setminus A_1 \qquad \tilde{A}_3 = A_3 \setminus A_2$

$\dots \quad \tilde{A}_n = A_n \setminus A_{n-1}$ son disjuntos.

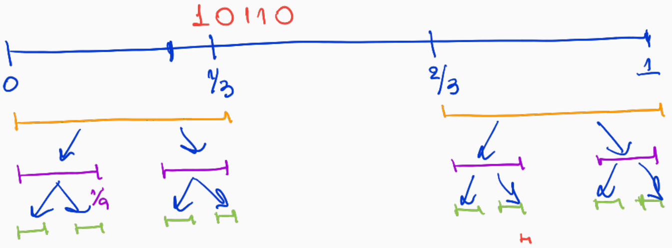
$\Rightarrow \tilde{A}_n \in \mathcal{M}(\Gamma)$. $\qquad A_N \overset{\downarrow}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{N} {}^{d}\, \tilde{A}_n \Rightarrow \bigcup\limits_N A_N = \bigcup\limits_n \tilde{A}_n$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_N A_N\Big) = \mu\Big(\bigcup_n {}^{d}\, \tilde{A}_n\Big) \overset{\circledast}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_n) = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \mu(\tilde{A}_n)}_{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde{A}_n\right)}$$

(son disj)

$$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

Ejercicio: La otra parte. Sug. $A_n = B_n^c$.



$J_0 = [0,1]$

$J_1 = [0,1/3] \cup [2/3, 1]$

$J_2 = [0,1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$

J_3

- J_n = unión de 2^n intervalos disj c/uno de long $1/3^n$

  $\Rightarrow \mu(J_n) = 2^n \cdot 1/3^n = (2/3)^n$

- J_n es cerrado $\forall n \Rightarrow J_n \in \mathcal{B}(I)$

Def: $\mathcal{C} = \bigcap_n J_n$

- $\mathcal{C} \in \mathcal{M}(I)$ ✓
- $\mathcal{C} \neq \emptyset \quad 0 \in \mathcal{C},\ 1 \in \mathcal{C},\ 1/3 \in \mathcal{C} \dots$
- $\mu(\mathcal{C}) \leq \mu(J_n) = (2/3)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \mu(\mathcal{C}) = 0$

  $\mathcal{C} = \bigcap J_n \subseteq J_n$
- $\#\mathcal{C} = c$.

$\underline{x} \in \mathcal{C} \rightsquigarrow$ suc. de ceros y unos. $(x_n)_n$

$x \in J_1 \quad x_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/3] = L_1 \\ 1 & \text{si } x \in [2/3, 1] = R_1 \end{cases}$

$x_2 = 0$ si está en el hijo izq.

$\phantom{x_2 = {}}1$ " " " " " der

$\vdots$

$x \rightsquigarrow$ una suc. de ceros y unos

$\leftsquigarrow$

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \underbrace{\{\text{suc. de ceros y unos}\}}_{\text{tiene cardinal } \mathfrak{c}}$$

$\boxtimes$

$\mathcal{C}$ = conj de Cantor es un conj de medida 0 que es no numerable. $\boxtimes$