Consultas:

$\cdot)\ \exists\ \alpha \in (0,1),\quad \overbrace{d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)}^{< d(x,y)}\quad \forall x,y \in E.$

$\cdot\cdot)\ d(f(x), f(y)) < d(x,y)\quad \forall x\, y \in E$

Si $\overset{\text{vale}}{\cdot)} \Rightarrow \overset{\text{vale}}{\cdot\cdot)}$

$1-\frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \geq 2 \qquad \nexists\ \alpha \in (0,1) \;/\; 1-\frac{1}{n} \leq \alpha$

Lip $\qquad d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \qquad L > 0$

$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \quad \frac{\sim d(f(x+h), f(x))}{\exists \cdot \sim\quad d(x+h, x)}$

¡$+$!

Ej 5 P5

(E,d) métrico.

E compacto $\Leftrightarrow \forall (F_n)_n \subseteq E$ F_n cerrado $\forall n$

$F_{n+1} \subseteq F_n\ \forall n$, se tiene $\bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$.

$\Rightarrow)$ ...

$\Leftarrow)$ $(x_n)_n \subseteq E$ q'vq $\exists$ un subsec. conv. en E.

$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \dots\}} = \overline{\{x_{n+k} : k \geq 1\}} = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$

$|x_1|x_2|x_3|x_4|x_5 \dots$

F_n es cerrado $\forall n \geq 1$, $F_{n+1} \subseteq F_n$;

$\{x_m : m \geq n+1\} \subseteq \{x_m : m \geq n\}$

$\Rightarrow \underbrace{\overline{\{x_m : m \geq n+1\}}}_{=F_{n+1}} \subseteq \underbrace{\overline{\{x_m : m \geq n\}}}_{=F_n}$

$\Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$, $\boxed{x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n}$ $\Rightarrow x \in F_n \ \forall n$ $\quad <\infty \quad \infty$

- x es punto de acumulación de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
  ↳ $\forall r>0$ $B(x,r) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es ∞.

Paso 1: x es punto de acumulación de F_n.

Si $r>0$ $\quad B(x,r) \cap F_n$

Si fuese finito $\quad B(x,r) \cap F_n = \{x_{n_1}, x_{n_2}, , x_{n_j}\}$

$B(x,r) \cap F_{n+k} \subseteq \quad \forall n \geq 1$.

DEUDA

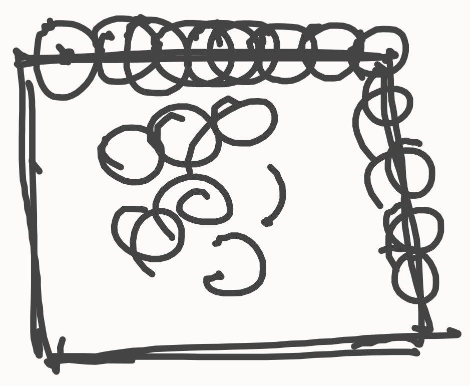
. Ejercicio.

$\mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $r>0$ defino $K = K(A,r)$

$$\boxed{K = \bigcup_{x\in A} \overline{B}(x,r)}$$

Probar es que si A compacto $\Rightarrow$ K compacto.

Veamos K es acotado:



$y \in K \Rightarrow \exists x \in A \,/\, y \in \overline{B}(x,r)$

$\boxed{\|y\|_2} \leq \|y-x\|_2 + \|x\|_2 \leq r + \|x\|_2 \leq r + M$

↳ M es / $\|x\|_2 \leq M$ $\forall x \in A$

($\exists$ xq! A es acotado)

Sea $M>0$ / $\|x\|_2 \leq M$ $\forall x \in A$ (A acot.)

$\Rightarrow$ Si $y \in K$, $\exists x \in A \,/\, y \in \overline{B}(x,r)$

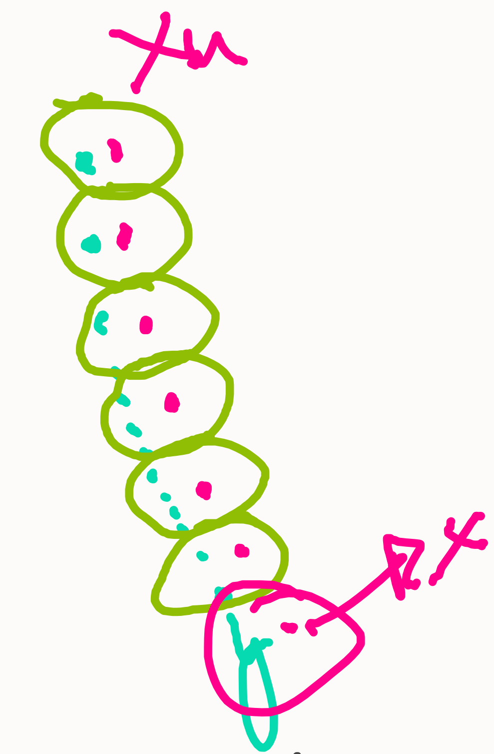
$\Rightarrow \underline{\|y\|_2 \leq r+M}$ ✓

[$A \subseteq \overline{B}(\vec{0}, M) \Rightarrow K \subseteq \overline{B}(\vec{0}, r+M)$]

Veamos q' K cerrado.

$(y_n)_n \subseteq K$ / $y_n \to y$ qvq $y \in K$.

$y_n \in \overline{B}(x_n, r) \Rightarrow (x_n)_n \subseteq A \underset{A \text{ compacto}}{\Rightarrow} \exists (x_{n_k})_k$ subsuc de $(x_n)_n$ convergente a $x \in A$



Afirmo $y \in \overline{B}(x,r)$

$\|x-y\| \le \|x-x_{n_k}\| + \|x_{n_k}-y\|$

$\le \underbrace{\|x-x_{n_k}\|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\|x_{n_k}-y_{n_k}\|}_{\le r} + \underbrace{\|y_{n_k}-y\|}_{\downarrow 0}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\le r + \|x-x_{n_k}\| + \|y_{n_k}-y\|$ $\forall k$

$\Rightarrow \|x-y\| \le r + \underbrace{\lim(\qquad)}_{=0}$. $\Rightarrow y \in \overline{B}(x,r)$

$\Downarrow$

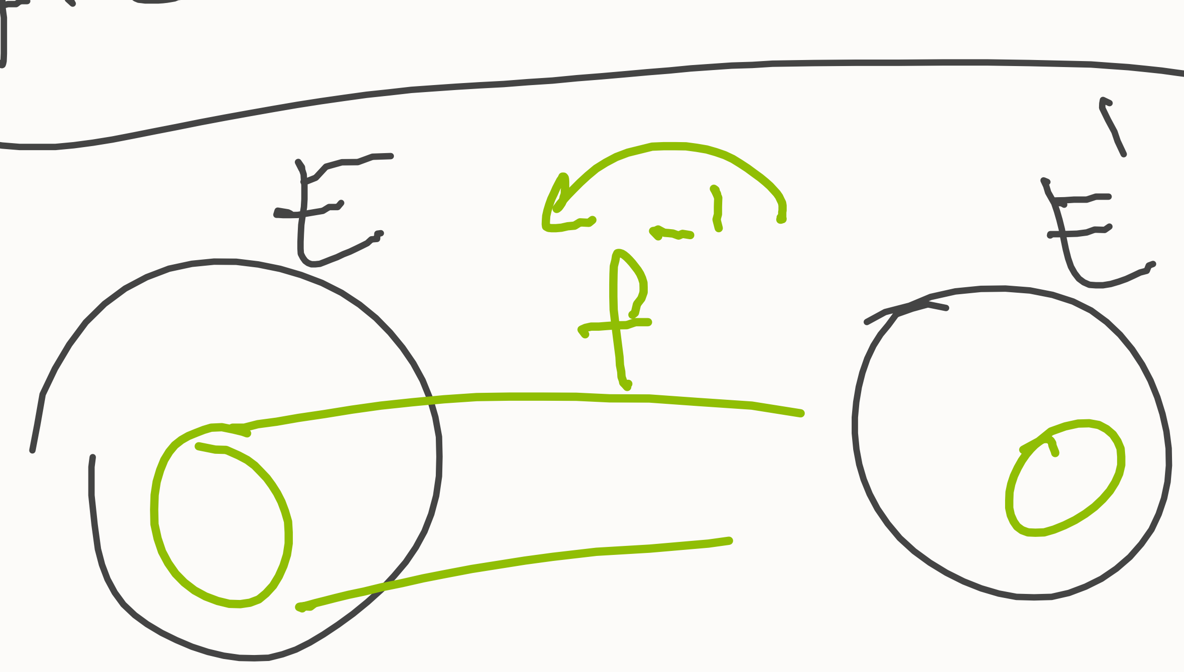
$y \in K$

$\Downarrow$

K es cerrado.

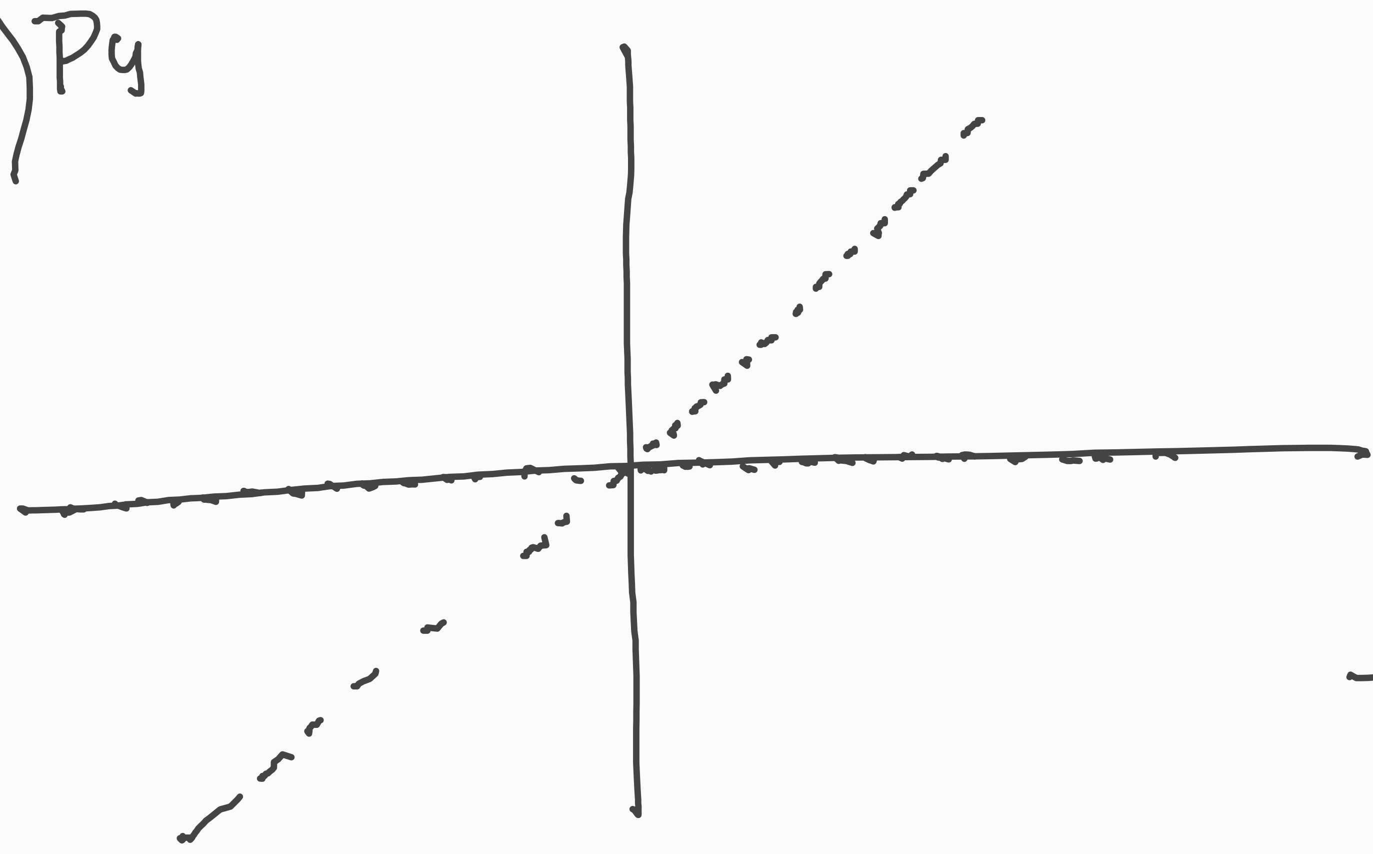
[Mostrar un conj $A \subseteq \mathbb{R}$ y $r>0$ / K no sea cerrado]. $K(A,r)$

$f: E \to E'$ cont. $\Leftrightarrow \forall G \subseteq E'$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto.



$U \subseteq E$ abierto $\not\Rightarrow$ $f(U)$ es abto en E'

2) P4



$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 1) f es cont. en $x=0$.

2) Si $x \neq 0 \Rightarrow f$ no es cont. en x.

2) $x \neq 0$ q'vq f no es cont. en x.

Seguro q' $\exists$ una suc. $(x_n)_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ / $x_n \to x$

Si f fuera cont., $\underbrace{f(x_n)}_{=0} \to f(x)$

Si $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x \neq 0$ ABS!

Si $x \notin \mathbb{Q}$, tomo $(\tilde{x}_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ / $\tilde{x}_n \to x$

si fuera cont. $\underbrace{f(\tilde{x}_n)}_{\tilde{x}_n} \to \underbrace{f(x)}_{=0}$ $\Big\}$ $\Rightarrow x = 0$ ABS! $x \notin \mathbb{Q}$.

1) Dado $\varepsilon > 0$. q'vq $\exists \delta > 0$ / $x \in \overbrace{(-\delta, \delta)}^{B(0,\delta)} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$|f(x)| = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ |x| & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$\boxed{\text{Ejercicio 5 P5}}$

(E,d) espacio métrico. Probar que E es compacto $\Leftrightarrow$ $\forall$ sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ decreciente de cerrados no vacíos de E se tiene que $\bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$.

Solución:

$\Rightarrow$) Ejercicio

$\Longleftarrow$) Queremos ver que E compacto. Tomemos $(x_n)_n \subseteq E$ y veamos que tiene una subsucesión convergente.

Para eso consideramos $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$

$\Rightarrow$ • cada F_n es cerrado (pues es clausura de un conjunto.

Tomando clausura:

• $\{x_m : m \geq n+1\} \subseteq \{x_m : m \geq n\} \Rightarrow F_{n+1} \subseteq F_n$

Entonces, por hipótesis, $\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$. Veamos que $\exists$ una subsuc. de $(x_n)_n$ que converge a x.

Como $x \in F_n \ \forall n \geq 1$, en particular está en F_1.

Si $x \in F_1 \Rightarrow \exists\, x_{n_1}$, $n_1 \geq 1$ / $d(x, x_{n_1}) < 1$

[Esto vale xq' como $x \in F_1 = \overline{\{x_m : m \geq 1\}} \Rightarrow$ para $r=1$ $B(x,1) \cap \{x_m : m \geq 1\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_{n_1} \in B(x,1)$].

Ahora elegimos x_{n_2}. Como queremos q' sea subsuc. $n_2 > n_1$. Esto se cumple si elegimos este elem. en $\{x_m : m \geq n_1 + 1\}$.

Entonces: como $x \in F_{n_1+1}$ $\exists\, x_{n_2}$ $(n_2 > n_1)$ / $d(x, x_{n_2}) < 1/2$. [mismo argumento q' antes].

Así seguimos:

$x \in F_{n_2+1} \Rightarrow \exists\, x_{n_3} \in \{x_m : m \geq n_2 + 1\}$ / $d(x_{n_3}, x) < 1/3$

etc.

Inductivamente construimos $(x_{n_k})_k$ /

- es subsuc. de $(x_n)_n$ [xq! $(n_k)_k$ es estrictamente creciente].

- $d(x, x_{n_k}) < 1/k$

Esta última condición garantiza que $x_{n_k} \to x$ como queríamos.

¡ :) !