Fernando Vásche

Luna Abr 19

Repaso

(E,d) Espacio métrico

$A \subseteq E$

(ó $\forall r>0$ $B^*(x,r) \cap A \neq \phi$, DONDE
$B^*(x,r) = B(x,r) \setminus \{x\}$)

$A' = \{$ PUNTOS DE ACUMULACIÓN DE $A \}$

Obs: SI A ES FINITO $\Rightarrow$ $A' = \phi$

Dem: PARA QUE $x \in A'$, ES NECESARIO QUE A TENGA INFINITOS PUNTOS.

EJ: SEAN (E,d) e.m., $A, B \subseteq E$.

DECIDIR SI VALEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES ¡JUSTIFICAR!

i) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

ii) $(A')' = A'$

iii) $A' = \bar{A} \setminus \{\text{PUNTOS AISLADOS DE } A\}$

iv) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

v) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

Tarea

i) Si $x \in A' \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinito

$\Rightarrow$ Como $A \subseteq B$

$\forall r > 0, \ B(x,r) \cap B$

es infinito

$\Rightarrow x \in B'$

$\therefore$ es Verdadero.

ii) $(A')' = A'$

$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

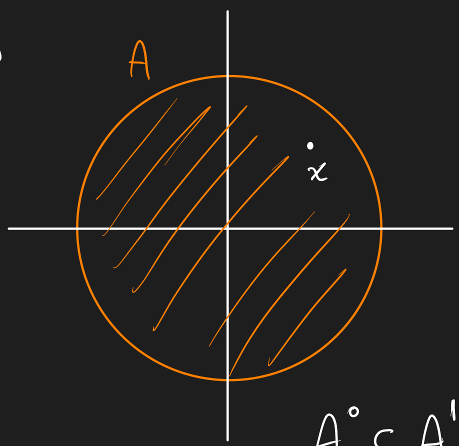
$\Rightarrow A' = \{0\}$

$\Rightarrow (A')' = \phi$

$\therefore$ es Falso!

iii) $A' = \bar{A} \setminus \{\text{Puntos aislados de } A\}$

ej



$x \in A'$ son los elementos de A a los que me puedo acercar con puntos de A (por ej, con alguna sucesión)

$A^\circ \subseteq A'$

Dem:

$\subseteq$) $A' \subseteq \bar{A} \setminus \{\text{Puntos aislados de } A\}$

Porque si $x \in A' \Rightarrow x \in \bar{A}$

y además x no es un punto aislado de A.

$\supseteq$) Sea $x \in \bar{A} \setminus \{\text{Puntos Aislados de } A\}$

Como $x \in \bar{A}$,

$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \phi$

Como x no es punto aislado

$$\# B(x,r) \cap A \geq 2 \quad \forall r>0$$

$x \in A$

$x \notin A$

$$\# B(x,r) \cap A \geq 1 \quad \forall r>0$$

EN CUALQUIER CASO $\left(B(x,r) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r>0.$

LUEGO $A' = \overline{A} \setminus \{\text{PTOS AISLADOS DE } A\}$

(PENSAR) $\Downarrow$

$$\overline{A} = A' \,\dot{\cup}\, \{\text{PTOS AISLADOS DE } A\}$$

<u>Obs</u>: (ii) SI $A \subseteq E$ SATISFACE $A' = A$ SE DICE QUE A ES PERFECTO.

Por ej:

$$A = [0,1] \quad \text{en} \quad E = \mathbb{R}$$

¿y otro conj. perfecto?

más difícil!

Si A es perfecto ¿Qué podemos decir de $\# A$?
no vacío

Debe ser $\# A \geq \aleph_0$

(Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es perfecto

se puede decir algo más...

vale que $\# A > \aleph_0$

<u>Borde de un conjunto</u> (Repaso)

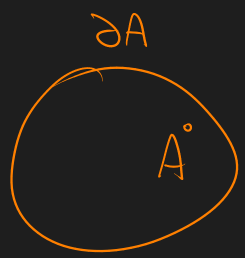
Sean (E,d) e.m, $A \subseteq E$. Entonces decimos que un punto $x \in E$ <u>es punto frontera de A</u> si y sólo si $\forall\, r > 0$ vale que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

Notamos $\partial A = \{$puntos frontera de A$\}$

<u>Obs</u>: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

En la teórica vimos que $\overline{A} = A \overset{d}{\cup} \partial A$,

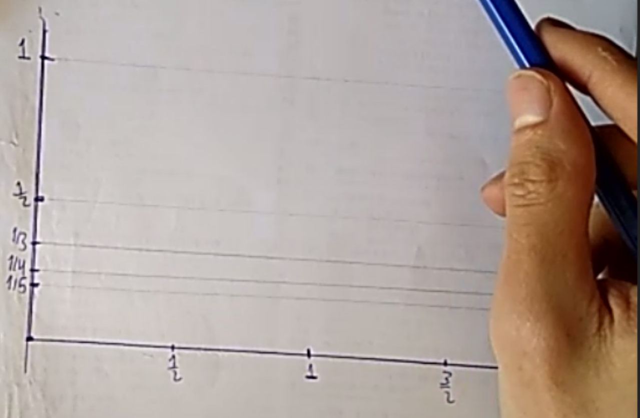
veamos que $\underbrace{\overline{A} = \mathring{A} \,\dot\cup\, \partial A}_{\text{ejercicio}}$



Ej: Sea $A = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right) / \, n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Hallar $\mathring{A}, \bar{A}, A', \partial A, A_{Ais}, (A')'$

Donde $A_{Ais} = \{$Puntos aislados de A$\}$



Teres

Sucesiones convergentes

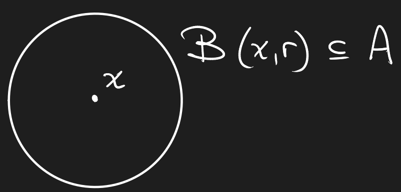
Ejercicios:

Sean (E,d) e.m., $A \subseteq E$. Demostrar que

A es abierto $\Leftrightarrow$ dada $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en E converge[...] a $x\in A$, vale que $\exists\, m_0\in\mathbb{N}$ / $x_m \in A \ \forall m \geq m_0$

("$x_m \in A$ salvo finitos m")

Idea:



A partir de un momento n_0 todo $x_n \in B(x,r) \subseteq A$

Dem

$\Rightarrow$) Como $x \in A$,

$$\exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq A$$

Como $x_n \to x$, tomando $\varepsilon = r$,

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ / $\underbrace{x_n \in B(x,r)}_{d(x_n,x)<r}$ $\forall n \geq n_0$

Luego $x_n \in A \ \forall n \geq n_0$ ✓

$\Leftarrow$) Sea $x \in A$:

Veamos que

$$\exists r>0 \,/\, B(x,r) \subseteq A$$

Supongo que no pasa, es decir

$$\forall r>0, \quad B(x,r) \not\subseteq A$$

equivalentemente:
$B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$x \in \overline{A^c}$

"Clausura de A^c"

En particular:

$$B\left(x,\tfrac{1}{n}\right) \not\subseteq A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar

$$x_n \in B\left(x,\tfrac{1}{n}\right) \qquad x_n \notin A$$

o sea que

(i) $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$

(ii) $x_n \notin A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(i) Luego

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Por lo que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Como $x_n \notin A$ $\forall n \geq n_0$ esto es absurdo!

(pues

⊙ CUESTIÓN... (8)

SEAN $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUC. EN (E,d) e.m. y

$A=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ (SI $a:\mathbb{N}\to E$, $A=\mathrm{Im}(a)$)

¿QUÉ PODEMOS DECIR DE A' EN RELACIÓN A LA SUCESIÓN?

EJEMPLO: $E=\mathbb{R}$ $\quad a_n=(-1)^n$

$\Rightarrow A=\{-1,1\}$

Obs:

$A'=\emptyset$

Vemos que

$$A' \underset{(\star)}{\subseteq} \left\{ y\in E \;/\; \exists\,(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ subsuc tq } a_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} y \right\}$$

Tarea:
Demostrar,

¿Qué condición podemos imponer sobre (a_n) de manera que en $(\star)$ valga la igualdad?

Podemos pedir que (a_n) sea inyectiva.