De las diapos de

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar)

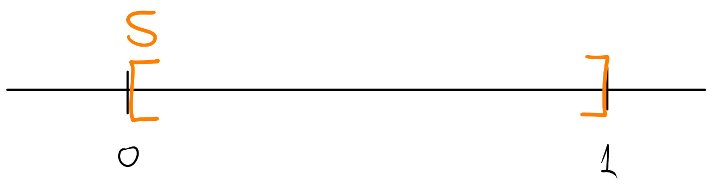
Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

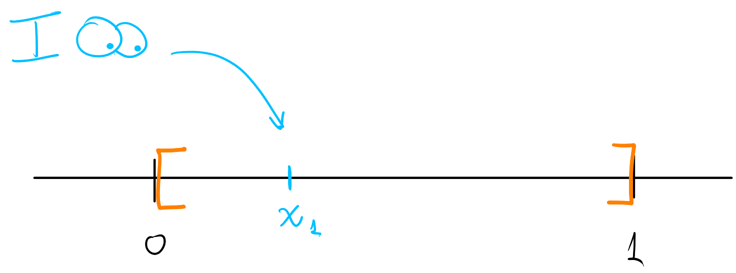
Teorema (Cantor)

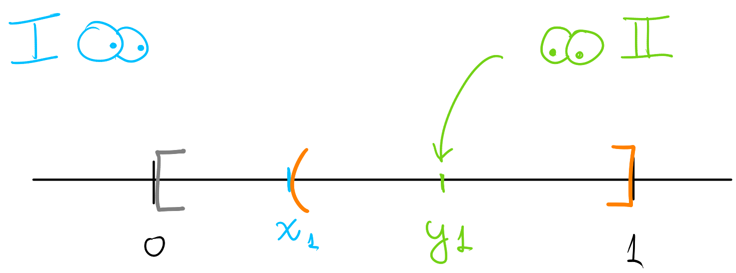
Los números reales no son numerables.

Demostración: Consideremos el siguiente juego de dos jugadores:

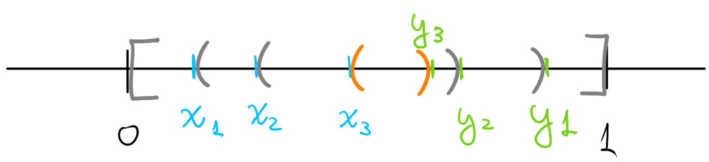
Se fija un conjunto $S \subset [0,1]$. Comienza I eligiendo un número $x_1 \in [0,1]$; y luego II elige un número $y_1 \in (x_1, 1]$.



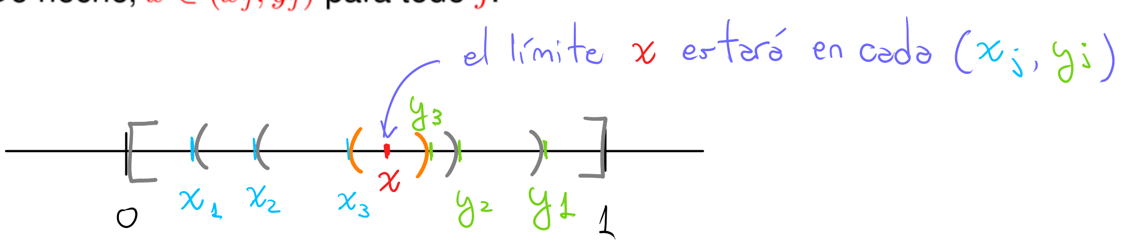




Luego se alternan para elegir números, I elige $x_{j+1} \in (x_j, y_j)$, II elige $y_{j+1} \in (x_{j+1}, y_j)$.



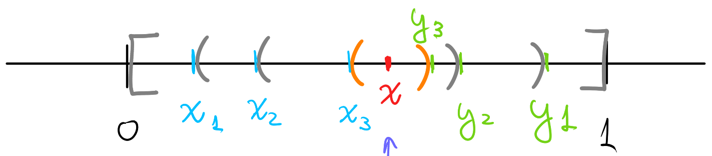
La sucesión $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es monótona creciente y acotada, con lo cual tiene límite $x \in [0,1]$. De hecho, $x \in (x_j, y_j)$ para todo j.



El jugador I gana si $x \in S$, de lo contrario pierde.

Supongamos que $[0,1] = \{q_k\}_{k\geq 1}$ es numerable, y que $S = [0,1]$.

Como la sucesión $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es monótona creciente y acotada, tenía límite $x \in [0,1] = S$, y el jugador I gana.



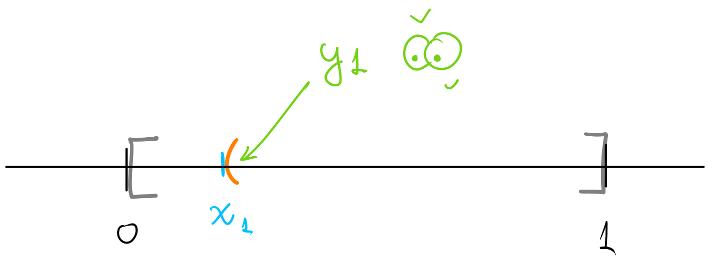
$x \in [0,1] = S \Rightarrow I$ gana!

Pero el jugador II tiene una estrategia ganadora: en el turno $j+1$, va a elegir

$$y_{j+1} = q_n \text{ tal que } n = \min\{k \in \mathbb{N}, q_k \in (x_{j+1}, y_j)\}$$

el índice más chico tal que q_k sea "el más pegado" a x_{j+1}

que existe pues supusimos que todos los números reales entre 0 y 1 podían ser indexados en una sucesión $\{q_k\}_{k\geq 1}$



El límite es $x = q_i$ para algún i, pero en el turno i, II lo hubiese elegido si estaba disponible, así que x no puede ser un elemento de S.

$\Rightarrow x \notin S$

pero $x \in S$ pues $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada en $[0,1]$

Abs!

Conclusión: llegamos a un absurdo, $[0,1]$ no puede ser numerable.