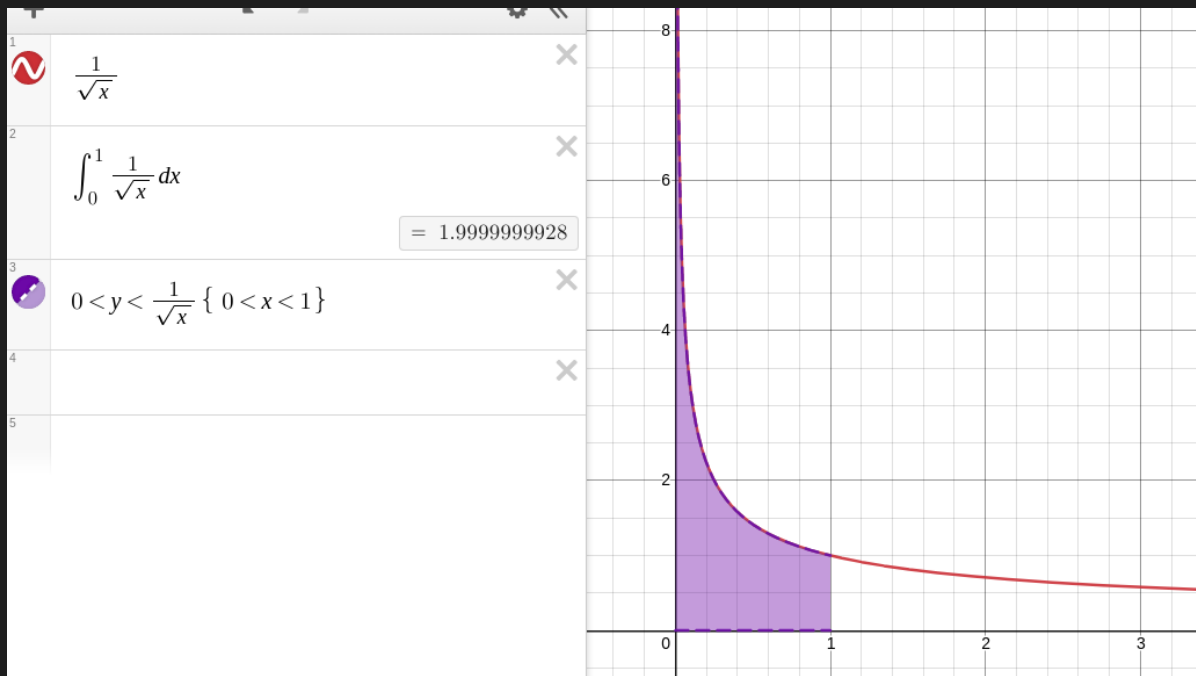


*En lo que sigue  $\mathcal{M}$  será la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de  $\mathbb{R}$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue.*

7. Probar que todo conjunto acotado de  $\mathcal{M}$  tiene medida finita. Mostrar un conjunto de  $\mathcal{M}$  que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.

Uso que puedo cubrir cualquier conjunto acotado con un intervalo abierto, pues todos los abiertos están en  $\mathcal{M}$ , y como este abierto tiene medida finita, cualquier subconjunto de este abierto tendrá medida finita menor o igual a la del abierto que lo cubre.



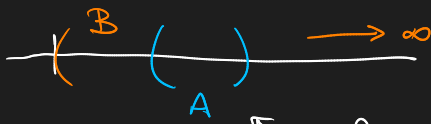
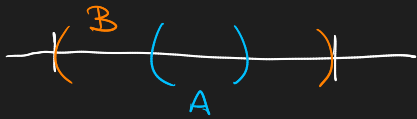
No me sirve ↗ "

$$\bullet \mu\left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right) = 0$$

$$\bullet \mu\left([-4, 0] \cup \left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right)\right) = 4$$

8. (a) Si  $A, B \in \mathcal{M}$ ,  $A \subseteq B$  y  $\mu(A) < \infty$  entonces  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .  
 (b) Si  $A, B \in \mathcal{M}$  entonces  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

a)



← no necesariamente acotado

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \underbrace{\mu(A \cup B)}$$

Como  $A \subseteq B$   
 $\Rightarrow A \cup B = B$

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B)$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad \checkmark$$

b)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) =$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B) + \mu(A \cap B)$$

$$= \mu(A) + \mu(B)$$

$A \setminus B \cap (A \cap B) = \emptyset$   
 $\Rightarrow = \mu(A)$

9. Para cada  $\lambda > 0$  y cada conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  notamos  $\lambda A$  al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si  $A \in \mathcal{M}$  entonces  $\lambda A \in \mathcal{M}$  y  $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$ .

$$\lambda \cdot A \stackrel{?}{\in} \mathcal{M} \quad (\text{lo probamos Níco con } \lambda + A)$$

Dem :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \lambda \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(A) = \lambda \cdot A = \mathcal{B} \\ f^{-1}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{B} = A \end{array}$$

Como  $\lambda > 0$

$f$  es biyectiva

$$\text{con } f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot y$$

$$f(A) = \mathcal{B}$$



$$\Rightarrow \text{ej 2} \quad f(\mathcal{M}) = \left\{ \mathcal{B} \subseteq Y : f^{-1}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{A} \right\}_{\mathcal{A} \in \mathcal{M}}$$

(b) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que  $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de  $Y$ .

$$\text{Como } f(A) = \mathcal{B}$$

$$= \{ f(A) : A \in \mathcal{M} \}$$

es una  $\sigma$ -álgebra .

q.v.g

$$f(\mathcal{M}) \stackrel{?}{=} \mathcal{M}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \in \mathcal{M} \text{ es nulo} &\Leftrightarrow f(A) \text{ es nulo} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ es nulo} \end{aligned}$$

" $f$  no cambia los nulos"

$$\begin{aligned} \bullet \quad A \in \mathcal{M} \text{ es abierto} &\Leftrightarrow f(A) \text{ es abierto} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(A) \text{ es abierto} \end{aligned}$$

" $f$  no cambia los abiertos"

Entonces

$$A = f\left(\underbrace{f^{-1}(A)}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{nulo o} \\ \text{intervalo abierto}}}\right) \in f(\mathcal{M})$$



$$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\supseteq \mathcal{M} \subseteq f^{-1}(\mathcal{M})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \lambda \cdot x \\ f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot x \end{array} \right.$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{\text{aplica } f} \left( f(\mathcal{M}) \subseteq f\left(f^{-1}(\mathcal{M})\right) = \mathcal{M} \right)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$$

g como

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathcal{M})$$



$$\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A). \quad \Leftrightarrow \quad \mu(A) = \frac{\mu(\lambda \cdot A)}{\lambda}$$

Veamos que cumple

### Teorema (existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única función  $\mu$  de  $\mathcal{M}$  en  $[0, +\infty]$  tal que

[1] • Si  $A = (a, b)$ , entonces  $\mu(A) = b - a$ .

[2] • Si  $A_n \in \mathcal{M}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los  $A_n$  son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

" $\sigma$ -aditividad"

↑ uniones e intersecciones numerables

[3] • Si  $A \in \mathcal{M}$ , entonces

Importante! →  $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}.$  "Regularidad"

Llamo  $\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda \cdot A)}{\lambda}$

[1] Si  $A = (a, b)$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(A) = \mu(\lambda a, \lambda b) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= (\lambda b - \lambda a) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda} (b - a)$$

$$= \underbrace{\mu((a, b))}_A \quad \checkmark$$

[2]

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) &= \frac{1}{\lambda} \cdot \mu\left(\lambda \cdot \bigcup_n A_n\right) \\&= \frac{1}{\lambda} \cdot \mu\left(\bigcup_n \lambda \cdot A_n\right) \\&\leq \frac{1}{\lambda} \sum_n \mu(\lambda \cdot A_n) \\&= \sum_n \frac{\mu(\lambda \cdot A_n)}{\lambda}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) \quad \checkmark \text{ sigo junto con [3]}$$



$$\boxed{3} \quad \mu(A) = \inf \{ \mu(U) : A \subset U \text{ abierto} \}$$

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \inf \{ \mu(U) : (\lambda A) \subset U \text{ abierto} \}$$

$$\stackrel{\text{Lema}}{\downarrow} = \frac{1}{\lambda} \cdot \inf \{ \mu(\lambda V) : A \subset V \text{ abierto} \}$$

$$\stackrel{\lambda > 0}{=} \inf \left\{ \frac{\mu(\lambda V)}{\lambda} : A \subset V \text{ abierto} \right\}$$

$$\tilde{\mu}(A) = \inf \{ \tilde{\mu}(V) : A \subset V \text{ abierto} \} \quad \checkmark$$

Mostré que la medida  $\tilde{\mu}(A)$  cumple  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$  y  $\boxed{3}$

pero por Teorema de la Existencia de la

medida de Lebesgue, esta medida es única

y  $\therefore$

$$\tilde{\mu} = \mu$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\mu(\lambda A) = \lambda \cdot \mu(A)$$

$\square$

10. Probar que un conjunto acotado  $A \subseteq \mathbb{R}$  es medible Lebesgue si y sólo si  $\forall \varepsilon > 0$  existen conjuntos  $G$  abierto y  $F$  cerrado tales que  $F \subseteq A \subseteq G$  y  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$ .

$A$  es siempre acotado (tanto en  $\Rightarrow$  como  $\Leftarrow$ )

$\Rightarrow$ ) Jb:  $A$  es medible.

Sea  $\varepsilon > 0$ ,

$$\bullet \exists G \supseteq A \text{ abierto} / \underbrace{\mu(G) - \mu(A)} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\bullet \exists F \subseteq A \text{ cerrado} / \underbrace{\mu(A) - \mu(F)} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$$

Ahora

$$G \setminus F = G \cap F^c$$

$$= G \cap F^c \cap \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} = A \cup A^c \rightarrow = G \cap F^c \cap (A \cup A^c)$$

$$= (G \cap F^c \cap A) \cup (G \cap F^c \cap A^c)$$

Como  $A \subseteq G$

$$\Rightarrow A \cap G = A$$

Como  $F \subseteq A$

$$\Rightarrow F^c \supseteq A^c$$

$$\Rightarrow F^c \cap A^c = A^c$$

$$= (A \cap F^c) \cup (A^c \cap G)$$

$$G \setminus F = A \setminus F \cup G \setminus A$$

$$\mu(G \setminus F) = \mu(A \setminus F) + \mu(G \setminus A)$$

↓  
Como  $F \subseteq A$  y  $A \subseteq G$

$$\downarrow$$
$$= \cancel{\mu(A)} - \mu(F) + \mu(G) - \cancel{\mu(A)}$$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

Tenra que

$$\bullet \quad \mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\bullet \quad \mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow -\mu(F) \leq -\mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

$$\leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4} - \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon \quad \checkmark$$

Fd to  $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ )  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists F, G$ ,  $F \subseteq A \subseteq G$  con  $F$  cerrado  
y  $G$  abierto  
y además  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

$q \vee q$

$A$  es medible?

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defino  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

y usando JdL puedo asegurar que

$\exists F_n$  cerrado y  $G_n$  abierto /

$$F_n \subseteq A \subseteq G_n \quad \text{y} \quad \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$$

Para cada  $n$  en  $\mathbb{N}$ , definí dos conjuntos  $F_n$  y  $G_n$  que a medida que  $n$  tiende a infinito, se aproximan más y más entre ellos (en medida).



Llamo

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}$$

pues unión de medibles  
es medible y  $F_n$   
es cerrado y  $\therefore F_n \in \mathcal{M}$

y sé que como

$$F_n \subseteq A$$

$$\Rightarrow B \subseteq A$$

Vemos que

$$A = A \setminus B \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

$\Rightarrow$  si  $A \setminus B$  es medible,

$A$  es medible!

en particular

que  $A \setminus B$  es nulo (y  $\therefore$  medible)

Veamos  $A \setminus B$  es nulo

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$\subseteq G_n \cap B^c$$

$A \subseteq G_n$

$$= G_n \cap \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c$$

$$= G_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \cap F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus F_n$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Como } \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$$

$\Rightarrow$  Me gustaría decir que

$$^{\text{"}} \mu(A \setminus B) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} ^{\text{"}}$$

PERO! no sé si  $A \setminus B$  es medible!

$\Rightarrow$  Hago algo similar a lo que hice con

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

defino

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \quad \leftarrow \text{es medible.}$$

$$\text{Como } A \subseteq G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A \subseteq D$$

Con la misma argumentación que antes

$$A \setminus B \subseteq D \setminus B = \underbrace{D \cap B^c}_{\text{es medible}}$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $D \cap B^c$  es medible

$$\Rightarrow D \setminus B \text{ es medible}$$



y demostrar

$$D \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) \leq \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) = 0$$

$$\Rightarrow D \setminus B \text{ es nulo}$$

$$\text{y como } A \setminus B \subseteq D \setminus B$$

$$\Rightarrow A \setminus B \text{ también es nulo}$$

$$\text{y } \therefore A \setminus B \text{ es medible.}$$

Finalmente, como

$$A = \underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

$$\Rightarrow A \text{ es medible} \quad \square$$

11. Sea  $A \in \mathcal{M}$ . Probar que si  $\mu(A) = 0$  entonces  $A^\circ = \emptyset$ . ¿Vale la vuelta?

$$\text{Si } \mu(A) = 0$$

$\Rightarrow A$  es nulo

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad \text{y} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon$$

Los puntos de  $A^\circ$  son aquellos

que :

$$\text{si } a \in A^\circ \Rightarrow \exists \alpha > 0 / B(a, \alpha) \subset A^\circ$$

pero para cada  $\alpha$  que se me ocurra,

siempre habrá un  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$  /

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon < \alpha$$

$$\therefore \nexists \alpha > 0 / B(a, \alpha) \subset A^\circ \quad \forall a \in A^\circ$$

$$\therefore A^\circ = \emptyset$$

□

$$\bullet \text{ Si } A^\circ = \emptyset \Rightarrow \mu(A) \stackrel{?}{=} 0 \quad ?$$

$$\text{Si } A = [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow A^c = \emptyset$$

$\mathbb{Q}$  numerable  $\Rightarrow$  es nulo  $\Rightarrow$  es medible  
 $\wedge \mu(\mathbb{Q}) = 0$ .

$\Rightarrow \mathbb{Q}^c$  es medible ( $\in \sigma_0$ )

Además  $[a,b]$  es medible (lo probamos al fpro)  
 en ejercicios).

$\Rightarrow A$  es medible ( $\cap$  de 2 medibles).

◦  
◦  
◦

$$\mu([a,b]) = 1 \checkmark$$

$$[a,b] = \underbrace{[a,b] \cap \mathbb{Q}}_{\subseteq \mathbb{Q}} \cup [a,b] \cap \mathbb{Q}^c$$

$\mathbb{Q}$  nulo  $\Rightarrow [a,b] \cap \mathbb{Q}$  nulo  
 $\Rightarrow \mu([a,b] \cap \mathbb{Q}) = 0$

$$1 = \mu([a,b]) = \underbrace{\mu([a,b] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + \mu([a,b] \cap \mathbb{Q}^c)$$

$$\Rightarrow 1 = \mu([a,b] \cap \mathbb{Q}^c)$$

$$1 = \mu(A)$$

Rta : No

12. Sea  $A \subseteq [0, 1]$  un conjunto medible Lebesgue tal que  $\mu(A) = 1$ . Probar que  $A$  es denso en  $[0, 1]$ .

Un conjunto  $A$  es denso si :

•  $\overline{A} = X = [0, 1]$  ↙ conjunto que lo contiene

• pero tambien :

$$A \text{ es denso en } [0, 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cap (a, b) \neq \emptyset \quad \forall a < b,$$

$$a, b \in [0, 1]$$

equivalentemente

$$A \cap B(a, r) \neq \emptyset \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$\forall r > 0$$

$$\therefore A \text{ es denso en } [0, 1] \Leftrightarrow$$

$$A^c \cap B(a, r) = \emptyset \quad \forall a \in [0, 1],$$

$$\forall r > 0$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{(a-r, a+r)}$$

Supongo que

$\exists a \in A, \exists r > 0$  / "a A le falta un intervalito"

$$A \cap \mathcal{B}(a, r) = \emptyset$$

$$A \cap (a-r, a+r) = \emptyset$$

y luego es un absurdo.

$$\Rightarrow \mu(A \cap \mathcal{B}(a, r)) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow A^c \cap \mathcal{B}(a, r) \neq \emptyset$$

intervalito de radio  $r$

$$\overbrace{a-r \quad a \quad a+r} = (a-r, a+r)$$

y así como  $A \cup A^c = [0, 1]$

es lo mismo que  $(A \cap [0, 1]) \cup (A^c \cap [0, 1]) = [0, 1]$

$$\Rightarrow \underbrace{(A \cap \overbrace{\mathcal{B}(a, r)}^{(a-r, a+r)})}_{\text{mide } 0} \cup \underbrace{(A^c \cap \mathcal{B}(a, r))}_{\downarrow} = \underbrace{\mathcal{B}(a, r)}_{\text{mide } 2r}$$

debe medir  $2r$

$$\Rightarrow \mu(A^c \cap B(a, r)) = 2r \quad \text{con } r > 0$$

$$\Rightarrow \mu(A^c) \geq 2r$$

$$\text{pero } \mu(A) = 1 \quad (\text{por J6})$$

$$\text{y } A \cup A^c = [0, 1]$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \mu(A^c) = \mu([0, 1])$$

$$1 + \underbrace{2r}_{>0} = 1$$

Ab5!

$\therefore$

$$A \cap B(a, r) \neq \emptyset \quad \forall a \in A \text{ y } \forall r > 0$$

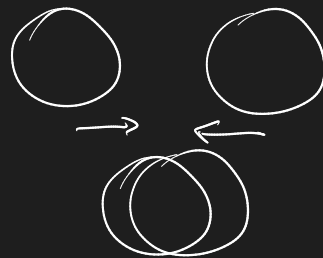
$$\Rightarrow A \text{ es denso.}$$

$\square$

13. Sea  $\mathcal{M}(I)$  la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles en  $I = [0, 1]$  y  $\mu$  la medida de Lebesgue. Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$  y  $B \in \mathcal{M}(I)$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \Delta B) = 0$ . Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$ .

¿Cuáles quedan fuera de  $\mathcal{P}([0, 1]) \setminus \mathcal{M}(I)$ ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \Delta B) = 0$$



$$\begin{aligned} A_n \Delta B &= (A_n \cup B) \setminus (A_n \cap B) \\ &= (A_n \setminus B) \cup (B \setminus A_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \setminus B) + \mu(B \setminus A_n) = 0$$

disjuntos

$$\downarrow = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(A_n \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} = 0$$

(Suma de sucesiones  
convergentes converge)

disjuntos

por  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \textcircled{\text{I}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{II}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap B) \stackrel{\star}{=} \mu(B)$$

por  $B$  no depende  
de  $n$

$$\textcircled{I} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0$$

$$\textcircled{\star} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(B) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$$

