10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Probar que si $E \subseteq [0,1]$ es medible, entonces

$$\int_E f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{E+y} f(x)\, d\mu(x)$$

para todo $y \in [0,1]$ tal que $E + y \subseteq [0,1]$.

11. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $E \subseteq [0,1]$ medible, se tiene que $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$. Probar que $f = g$ en casi todo punto.

12. Sean $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge a una función $g(x)$. Probar que g es medible y que

$$\int_{[0,1]} g \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} g_n \; d\mu.$$

13. Sea $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = (-1/n)\chi_{[0,n]}$. Probar que la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 en $[0, \infty)$. Probar que sin embargo $\int f_n \, d\mu = -1$, de manera que

$$\underline{\lim} \int_{[0,+\infty)} f_n \, d\mu = -1 < 0 = \int_{[0,+\infty)} \underline{\lim} f_n \, d\mu.$$

Deducir que el Lema de Fatou no vale si las funciones f_n no son no negativas, aún cuando converjan uniformemente.

14. Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función integrable, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles del $[0,1]$ y $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Probar que:

(a) Si los E_n son disjuntos dos a dos entonces

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

(b) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus E_n} f \, d\mu = 0.$$