UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Definición $I = [0,1]$

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible $A_1, \ldots, A_n$ de I y números $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x).}$$

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible $A_1, \ldots, A_n$ de I y números $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x).$$

Observación

Cuando los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de I son intervalos, una función simple es escalonada.

Escalonada

$\mathbb{I} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

$A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\chi_A = \chi_A + 0 \cdot \chi_{\mathbb{I}}$

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x).$$

simple

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \underline{\mu(A_i)}.$$

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x).$$

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

Definición

X medible

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$. Decimos que f es medible Lebesgue si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\boxed{\{x \in X : f(x) \leq a\}}$ es medible.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Proposición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Proposición

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces existe una sucesión de fuciones simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\boxed{f_n \rightrightarrows f}$.

Dem: sup $a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in [0,1]$

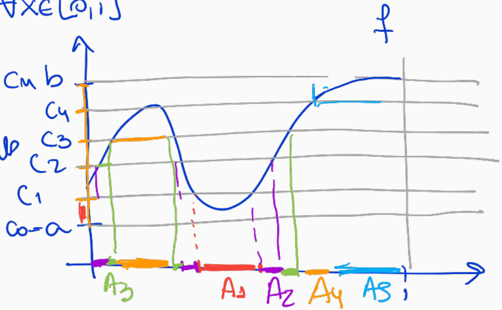
Dado $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{n}$

Partimos $[a,b]$ en n intervalos

$d_n = $ long

$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$

$c_1 = a + \varepsilon_n$, $c_2 = a + 2\varepsilon_n$



Definimos $A_n = f^{-1}([c_{n-1}, c_n])$ $n<m$ $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ $\Rightarrow \{A_n\}_{n=1}^{m}$ es un partición

$A_m = f^{-1}([c_{m-1}, b])$ y f manda medibles en medibles

en conj medibles de $[0,1]$. Defino $f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}(x)$

$\Rightarrow x \in [0,1] \Rightarrow x \in$ a algún $A_k \Rightarrow f_m(x) = c_k$, $f(x) \in [c_{k-1}, c_k]$

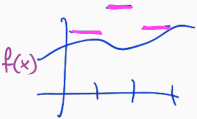
$\Rightarrow |f(x) - f_m(x)| \leq c_k - c_{k-1} = \varepsilon_m = \frac{b-a}{m}$

$\Rightarrow f_m \rightrightarrows f$ $\boxtimes$

• Usamos $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ para armar partición, para poder definir funciones simples f_n (una sucesión de ellas) que aproximan f como funciones escalonadas que

$n \to \infty$, $f_n \rightrightarrows f$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:



Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : \ f(x) \leq u(x),\ x \in [0,1]\}.$

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f)=\{\text{funciones simples medibles } u: \ f(x)\le u(x),\, x\in[0,1]\}$.
- $\mathcal{L}_\mu(f)=\{\text{funciones simples medibles } v: \ v(x)\le f(x),\, x\in[0,1]\}$.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : \ f(x) \le u(x),\, x \in [0,1]\}$.
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : \ v(x) \le f(x),\, x \in [0,1]\}$.

Proposición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces

$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v \, d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u \, d\mu \right\}.$$

esto nos va a permitir dar una buena definición de la integral de Lebesgue

Dem: Si $u \in \mathcal{U}_\mu(f)$ $\wedge$ $v \in \mathcal{L}_\mu(f)$ $\Rightarrow$ $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ $\forall x \in I$.

Prop de simples

$\Rightarrow \int v \, d\mu \leq \int u \, d\mu$. $\boxed{*}$

Como f es acotado $\Rightarrow$ $a \leq f(x) \leq b$

$\Rightarrow u \in \mathcal{U}_\mu(f)$, $a \leq f(x) \leq u(x)$ $\Rightarrow$ $a = \int_0^1 \underbrace{a \chi_{[0,1]}}_{a \cdot \chi_{[0,1]}(x)\ ?} \, d\mu \leq \int u \, d\mu$

$\Rightarrow \sup\limits_{\mathcal{L}_\mu(f)} \ldots \wedge \inf\limits_{\mathcal{U}_\mu(f)} \ldots$ existen.

$\boxed{*} \Rightarrow \underbrace{\sup\limits_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \int v \, d\mu}_{S} \leq \underbrace{\inf\limits_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \int u \, d\mu}_{I}$.

Sea $(g_n)_n$ suc de func. simples med / $g_n \overset{u}{\rightrightarrows} f$.

Llamamos $\delta_n = \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - f(x)|$, $\delta_n \to 0$ (conv unif).

Toda constante es una función simple $a = \int a \cdot \chi_A \, d\mu$

$$\underbrace{g_n(x) - \delta_n}_{\text{simple } v_n \in \mathcal{L}_\mu(f)} \leq f(x) \leq \underbrace{g_n(x) + \delta_n}_{\text{simple } u_n \in \mathcal{U}_\mu(f)}$$

$\chi_{[0,1]}(x)$?

$$I \leq \int u_n \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linealidad de } \int}}{=} \int g_n \, d\mu + \delta_n = \int_0^1 (g_n - \delta_n) \, d\mu + 2\delta_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vale solo en } x=\delta_n \text{ ?}}}{=}$$

$$= \int v_n \, d\mu + 2\delta_n \leq S + 2\delta_n \quad \forall n$$

$\chi_{[0,1]}(x)$

$I \leq S. \Rightarrow I = S.$ ☒

Proposición (No demostramos)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si

$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v \, d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u \, d\mu \right\},$$

entonces f es medible. (libro)

Proposición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si

$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v \, d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u \, d\mu \right\},$$

entonces f es medible.

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos su integral de Lebesgue como

integral.

$$\int f \, d\mu = \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v \, d\mu \right\} \overset{\text{Prop}}{=} \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u \, d\mu \right\}.$$

Proposición

Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples medibles definidas en $[0,1]$ que converge uniformemente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible y acotada. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Dem: llamamos $\delta_n = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g_n(x)| \Rightarrow \delta_n \to 0.$

$g_n \rightrightarrows f$

$\varepsilon > 0 \ \exists n_0 /$ $n, m \geq n_0 \Rightarrow |g_n(x)-g_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x$ $\Rightarrow \int |g_n - g_m| d\mu < \varepsilon \int 1 = \varepsilon$

Además $g_n - \delta_n \in \mathcal{L}_\mu(f)$, $g_n + \delta_n \in \mathcal{U}_\mu(f)$

$\cdot \left(\int g_n d\mu\right)_n \in \mathbb{R}$ es conv en $\mathbb{R}$:

$$\left|\int g_n d\mu - \int g_m d\mu\right| = \left|\int g_n - g_m \, d\mu\right| \leq \int |g_n - g_m| d\mu$$

$g_n \rightrightarrows f$ $(g_n)_n$ Uniformemente de Cauchy.

Como $\left(\int g_n \, d\mu\right)_n$ es conv y $\int (g_n - \delta_n)\, d\mu = \int g_n \, d\mu - \delta_n$

y $\int \underbrace{(g_n+\delta_n)}_{\in \mathcal{U}_\mu(f)} d\mu = \int g_n \, d\mu + \delta_n \Rightarrow$

$$\lim \int g_n \, d\mu = \lim \int (g_n-\delta_n)\, d\mu \underset{\uparrow}{=} \lim \int (g_n+\delta_n)\, d\mu$$

$$\boxed{\int f \, d\mu} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \int u \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int (g_n+\delta_n)\, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (g_n-\delta_n)\, d\mu$$

$$\leq \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \int v \, d\mu = \boxed{\int f \, d\mu}$$

$\boxtimes$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces (consecuencia de la prop. y linealidad en simples.

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(x definición)

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces
$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$
- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$
- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Dem: $h = f - g$ medible

$f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]\setminus E$ con $E / \mu(E) = 0$.

$\Rightarrow h(x) = 0$ en $[0,1]\setminus E$.

además $\Rightarrow$ h es acotada y $\therefore$ $|h| = |h|\chi_E \leq \underbrace{M\chi_E}$

$$\Rightarrow \left|\int f\,d\mu - \int g\,d\mu\right| \underset{\text{linealidad}}{=} \left|\int f - g\,d\mu\right| \underset{\checkmark}{\leq} \int |f-g|\,d\mu$$

$$= \int |h|\,d\mu \underset{\text{monotonía}}{\leq} \int M\chi_E\,d\mu = M\mu(E) = 0. \Rightarrow \boxed{\int f\,d\mu = \int g\,d\mu}$$

$\boxtimes$

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible y acotada, y se $E \subseteq [0,1]$ un conjunto medible.
Definimos la integrale de f sobre E como

$$\boxed{\int_E f\, d\mu} := \boxed{\int f\chi_E\, d\mu.}$$

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible y acotada, y se $E \subseteq [0,1]$ un conjunto medible. Definimos la integrale de f sobre E como

$$\int_E f \, d\mu := \int f \chi_E \, d\mu.$$

Proposición (Ejercicio)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible y acotada. Si $\{E_n\}_{n=1}^N$ una colección de conjuntos medibles del $[0,1]$ disjuntos 2 a 2 y $E = \bigcup_{n=1}^N E_n$, entonces

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^N \int_{E_n} f \, d\mu.$$

$$= \int_E f \cdot \chi_{E_1} + f \cdot \chi_{E_2} + \cdots + f \cdot \chi_{E_N}$$

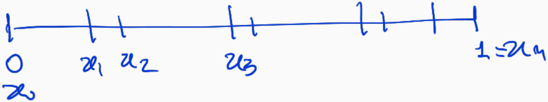
$$= \int_E f \cdot \sum_{i=1}^N \chi_{E_i} = \int_E f \cdot \chi_E$$

Integral de Riemann vs Integral de Lebesgue

$\chi_{(\mathbb{I}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]} \Rightarrow$ integrable Lebesgue pero no Riemann.

Recordamos:

$[0,1]$ y $\Pi = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$

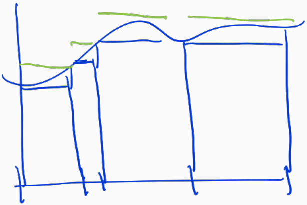


$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ acotado.

$[x_i, x_{i+1}]$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$



$$I(f,\pi) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} m_i \overbrace{(x_{i+1}-x_i)}^{\mu([x_i,x_{i+1}])}}_{\underbrace{\int \sum_{i=0}^{m} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1}]}}_{v\in\mathcal{L}_\mu(f)} d\mu}$$

$$S(f,\pi) = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} M_i (x_{i+1}-x_i)}_{\underbrace{\int \sum_i M_i \chi_{[x_i,x_{i+1}]}}_{u\in\mathcal{U}_\mu(f)}}$$

$$\text{Si } \sup_{\pi} I(f,\pi) = \inf_{\pi} S(f,\pi) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\forall \pi,\ \int v\,d\mu = I(f,\pi) \leq S(f,\pi) = \int u\,d\mu$$

$$\underbrace{\sup_{\pi} I(f,\pi)}_{\underline{S}} \leq \sup_{v\in \mathcal{L}_\mu(f)} \int v\,d\mu \leq \inf_{u\in \mathcal{U}_\mu(f)} \int u\,d\mu \leq \inf_{\pi} S(f,\pi) = \overline{S}$$

Si f es integrable Riemann $\Rightarrow$ $\underline{S} = \overline{S}$

y $\therefore$ $\displaystyle\sup_{v\in \mathcal{L}_\mu(f)} \int v\,d\mu = \inf_{u\in \mathcal{U}_\mu(f)} \int u\,d\mu \Rightarrow f$ medible

Prop de más arriba (que no probamos)

$$\Rightarrow \int f\,d\mu = \underline{S} = \overline{S} = \int_0^1 f(t)\,dt.$$