Dany 28 May

# Sucesiones de Funciones

- Series para la próxima

Notación de hoy:

$A$ : Conjunto

$X, Y$ : Espacio métrico (conj, dist)

Ejemplo

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x + 1}{n}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x + 1}{n} = \frac{n \cdot x}{n} + \frac{1}{n}$$

$$= x + \frac{1}{n} \longrightarrow x$$

Si

$$f(x) = x$$

p/c. $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

Cada vez que evaluamos tenemos convergencia!

"Convergencia Puntual"

**Definición**

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $A$ en $Y$ converge puntualmente a $f : A \to Y$ si para todo $x \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ejemplos:

$\boxed{1}$ $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n}$

$$f(x) = x$$

$\Rightarrow$ $f_n$ converge puntualmente a $f$.

$\boxed{2}$ $f_n(x) = \cos(nx)$

Para un $x = \pi$

$$f_n(\pi) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n$ no converge puntualmente a ninguna función.

$\boxed{3}$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \underset{x\in[0,1]}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$f_n \to f$ puntualmente

donde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

- Notar que $f_n$ es continua

  y $f$ no!

**Obs:**

Queremos una noción de convergencia que preserve la continuidad.

**Obs:**

$f_n \to f$ puntualmente

si $\forall x \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\forall x \in A : \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 /$

$$d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

notar que:

$n_0$ depende de $\varepsilon$ y de $x$

Cuando el $n_0$ no dependa de $x$ tendremos

Convergencia Uniforme:

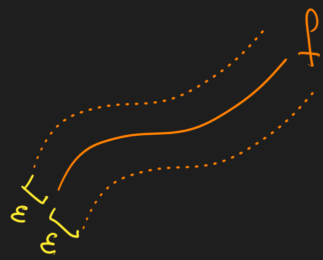
**Definición**

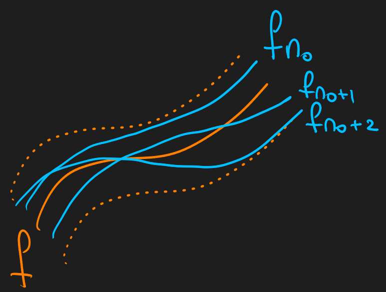
La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $A$ en $Y$ converge uniformemente a $f : A \to Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in A$.

en $\mathbb{R}$, a partir de un $n_0$



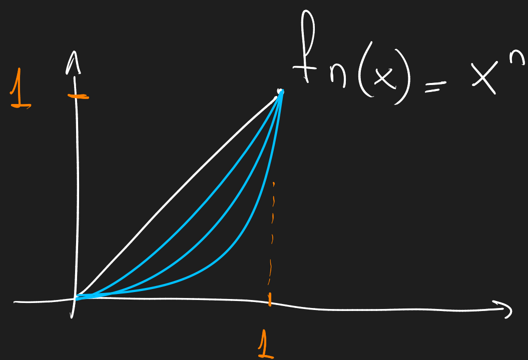

$$f_n \rightrightarrows f$$

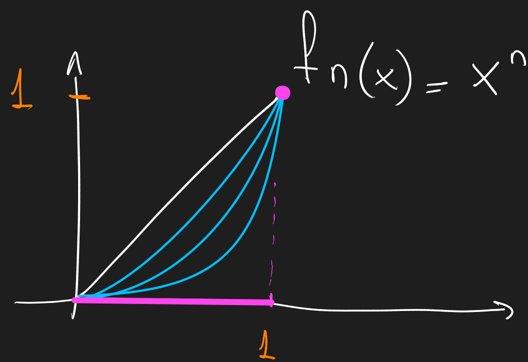
$$\xrightarrow{u}$$

Ejemplos:

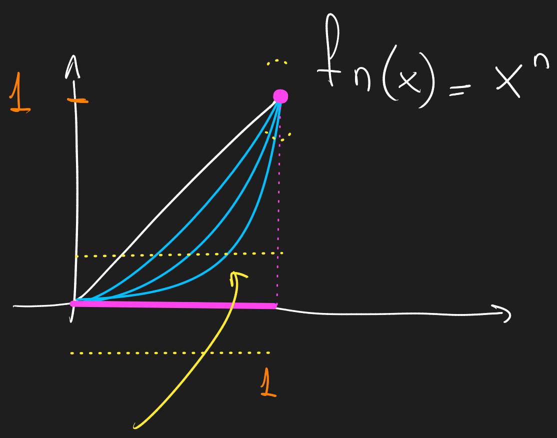
$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n$




$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$




Todas las $f_n$ se escapan de la banda

$\Rightarrow f_n \not\rightrightarrows f$

(ejercicio: demo)

usando ej 1 de la guía 7

$\boxed{2}$ $f_n(x) = \dfrac{\cos x}{n}$

$f_n(x) \to 0$ puntualmente

es uniforme la convergencia?

$$\left| f_n(x) - 0 \right| = \left| \frac{\cos x}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Si $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \left| f_n(x) - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$n_0$ <u>no</u> depende de $x$!

**Teorema**
Si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas de $X$ en $Y$ converge uniformemente a $f : X \to Y$, entonces $f$ es continua.

Dem:

H) $f_n$ contínua $\forall n$

$f_n \rightrightarrows f$

qvq

$f$ cont ?

Por conv. unif. de las $f_n$ ($f_n \rightrightarrows f$):

$x_0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, d'(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad \forall n \geq n_0$ $\forall x \in X$

función que se parece mucho a $f(x)$

Además

$f_{n_0}$ es contínua en $x_0$ (pues es cont.)

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \,/$

Si $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$

Finalmente

Si $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \overset{\text{desig. Triang}}{\leq} \overbrace{d'(f(x), f_{n_0}(x))}^{f_n \rightrightarrows f} + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d'(f_{n_0}(x_0), f(x_0))$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$f_n \rightrightarrows f$

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$\therefore$ $f$ es cont. en $x_0$ arbitrario

$\therefore$ $f$ es continua. ☒

Pensar: Si $f_n \rightrightarrows f$

- $f_n$ unif. cont $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f$ unif. cont.
- $f_n$ acotada $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f$ acotada
- $f_n$ deriv $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f$ deriv

**Proposición**
Sea $f_n \rightrightarrows f$, con $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Dem:

Idea: Si las curvas son parecidas $\Rightarrow$ las áreas debajo de ellas son parecidas

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{?}$, $\forall n \geq n_0$
$\forall t \in [a,b]$

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{?}}\,dt$$

quiero

$$\int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{?}}\,dt < \varepsilon$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{?}\,dt = \frac{\varepsilon}{?}\cdot(b-a) < \varepsilon$$

dijo $? = 2.(b-a)$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt$$

$\boxtimes$

compacto !

**Proposición**
Sean $f_n$ de clase $C^1$ en $[a,b]$, $f_n \to f$ puntualmente en $[a,b]$, y $f_n' \rightrightarrows g$.
Entonces, $f$ es derivable y $f' = g$.

Dem (Idea):

1° - $g$ es continua por Teorema anterior

$(f_n'$ cont y $f_n' \rightrightarrows g)$

2° - Por Barrow | TFC

$$\begin{array}{ccccc} f_n(x) & - & f(a) & = & \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ \downarrow & & \downarrow & & \downdownarrows \\ f(x) & & f(a) & & \underbrace{g(t)} \end{array}$$

Prop: Convergencia de integrales

$$\int_a^x g(t)\,dt$$

Sigo :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a) = f(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Por TFC

TFC:

$\underline{H(x) = \int_a^x h(t)\,dt}$ $\qquad h : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont

$H : [a,b] \to \mathbb{R}$ , $H$ der. y $H' = h$.

K compacto, en espacios métricos, vimos que

$$(f_n)_n \subset \mathcal{C}(K)$$

$$f \in \mathcal{C}(K)$$

$$f_n \to f \text{ en } \|\ \|_\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$f_n \rightrightarrows f$$

E. Completos

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}[0,1]$, $\mathcal{C}$ [Compacto]

La convergencia uniforme "se lleva bien" con ser de Cauchy.

**Definición**

Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $A$ en $Y$ es uniformemente de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

para todos $m, n \geqslant n_0$ y todo $x \in A$.

**Teorema**

Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de $A$ en $\mathbb{R}$ es uniformemente de Cauchy, entonces converge uniformemente a una función $f : A \to \mathbb{R}$.

Dem:

Obs:

Si $(f_n)_n$ es unif. de Cauchy

$\Rightarrow$ para cada $x_0 \in A$,

$(f_n(x_0)) \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy

x fijo

Sucesión sobre un x fijo

∘ Como $\mathbb{R}$ es completo

$\Rightarrow (f_n(x_0))_n$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Defino candidato a límite

Sé $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Defino candidato

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

qvq

$$f_n \overset{?}{\rightrightarrows} f$$

Sea $\varepsilon > 0$

Como $(f_n)_n$ es unif. de Cauchy :

$\exists n_0 \in \mathbb{N} /$

$$d'(f_n(x) - f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n, m \geq n_0$$

$$\forall x \in A$$

- Si fijo $n$ y $x$ en $(\mathbb{R}, d')$

$$\Rightarrow 0 \leq |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall m \geq n_0$$

Como

$$f_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) \quad \text{(candidato)}$$

$$\Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \longrightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right|$$

$$\Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0 \\ \forall x \in A \end{array}$$

$$\therefore \ f_n \rightrightarrows f$$

$\blacksquare$

Pensar

$\mathcal{C}(K)$ , $K$ compacto

$(f_n) \subset \mathcal{C}(K)$

- $(f_n)_n$ unif de Cauchy $\Leftrightarrow$ $(f_n)_n$ es de Cauchy en $\| \ \|_\infty$

- $f_n \rightrightarrows f$ $\Longleftrightarrow$ $f_n$ converge a $f$ en $\| \ \|_\infty$

$\uparrow$
necesariamente continua.

Teo:

$$(\mathcal{C}(K), \|\ \|_\infty) \text{ es completo}$$

Dem:

1°

• $(f_n)_n$ unif de Cauchy $\Leftrightarrow$ $(f_n)_n$ es de Cauchy en $\|\ \|_\infty$

2°

• $f_n \rightrightarrows f$ $\Longleftrightarrow$ $f_n$ converge a $f$ en $\|\ \|_\infty$

3°

X MÉTRICO

$\rightarrow C_b(X) = \{ f : X \to \mathbb{R};\ f$ CONT Y ACOTADA $\}$.

$B(X) = \{ f : X \to \mathbb{R},\ f$ ACOTADA $\}$.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

¿SON COMPLETOS?