

SUPREMOS E ÍNFIMOS (CONT)

1) HALLAR, SI EXISTEN, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$,
 $A = \{(-1)^m (1 - 1/m) : m \in \mathbb{N}\}$

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}$$

con n imparcon n par

$$-1 + \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$1 + \frac{1}{2^k}$$



$$A = \underbrace{\left\{ 1 - \frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A^+} \cup \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{2^{k-1}} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A^-}$$

$$\bullet \quad x \leq 0 < y \quad \forall x \in A^-, y \in A^+$$

$$\Rightarrow \sup A = \sup A^+$$

$$\bullet \quad \sup A^+ = 1 :$$

$$\rightarrow 1 \geq 1 - \frac{1}{2^k} \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

1 es cota sup.

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \text{ busco } a \in A^+ / 1 - \varepsilon < a$$

i.e. Busco

$$k \in \mathbb{N} / 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2}k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < k$$

\exists un tal k ,
GRACIAS A ARQUIM.

Obs :

• no tiene max por $1 \notin A$

$$1 \in A \Leftrightarrow \exists n / \underbrace{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\geq 0} = 1$$

$\Rightarrow n$ debe ser par

$$n \text{ par} : n = 2k$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2k} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2k} = 0$$

Abs!

$$\therefore 1 \notin A$$

Así lo mismo

$$\inf A = \inf A^- = -1$$

2) DADOS $A, B \subseteq \mathbb{R}$, SEA

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

¡Ojo!

$$\bullet A = (-\infty, 0] = B$$

$\Rightarrow A, B$ son acotados superiormente

PERO!

$$A \cdot B = [0, +\infty)$$

no lo está!

$$\bullet A = [-1, 0] = B$$

$$\Rightarrow A \cdot B = [0, 1]$$

$$\sup(A \cdot B) = 1$$

PERO!

son distintos!

$$\sup A \cdot \sup B = 0$$

Prop :

¡Positivos!

$\sup A, B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, acot. sup.

$\Rightarrow A \cdot B$ también lo está

$$\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$$

Dem :

Sean $a \in A$, $b \in B$.

Entonces

$$\begin{array}{c} a \geq 0 \\ b \leq \sup B \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \leq \sup A \\ \downarrow \end{array}$$

$$a \cdot b \leq a \cdot \sup B \leq \sup A \cdot \sup B =: S$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
obtiene cota sup. de $A \cdot B$

Falta ver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A, b \in B \mid a \cdot b > \sup A \cdot \sup B - \varepsilon$$

$$a \cdot b > S - \varepsilon$$

Sé que

$$\bullet \quad \forall \delta, \exists a \in A \mid a > \sup A - \delta > 0$$

$$\bullet \quad \forall \gamma, \exists b \in B \mid b > \sup B - \gamma > 0$$

Ovanta :

$$a \cdot b > (\sup A - \delta)(\sup B - \gamma)$$

\uparrow

Supongo $\sup A$ y $\sup B$ son positivos

Caso contrario, digamos $\sup A = 0$

$$\Rightarrow A = \{0\}$$

y luego

Completar

$$a \cdot b > (\sup A - \delta)(\sup B - \gamma)$$

$$= \sup A \cdot \sup B - \gamma \cdot \sup A - \delta \cdot \sup B + \gamma \delta$$

$$> \sup A \cdot \sup B - \varepsilon$$

?

$$\Leftrightarrow -\gamma \underbrace{\sup A}_{=: r} - \delta \underbrace{\sup B}_{=: s} + \gamma \delta > -\varepsilon$$

SPDG, puedo suponer $r \leq s$

(podría también tomar \max)

$$r \leq s:$$

$$-\gamma r \geq -\gamma s$$

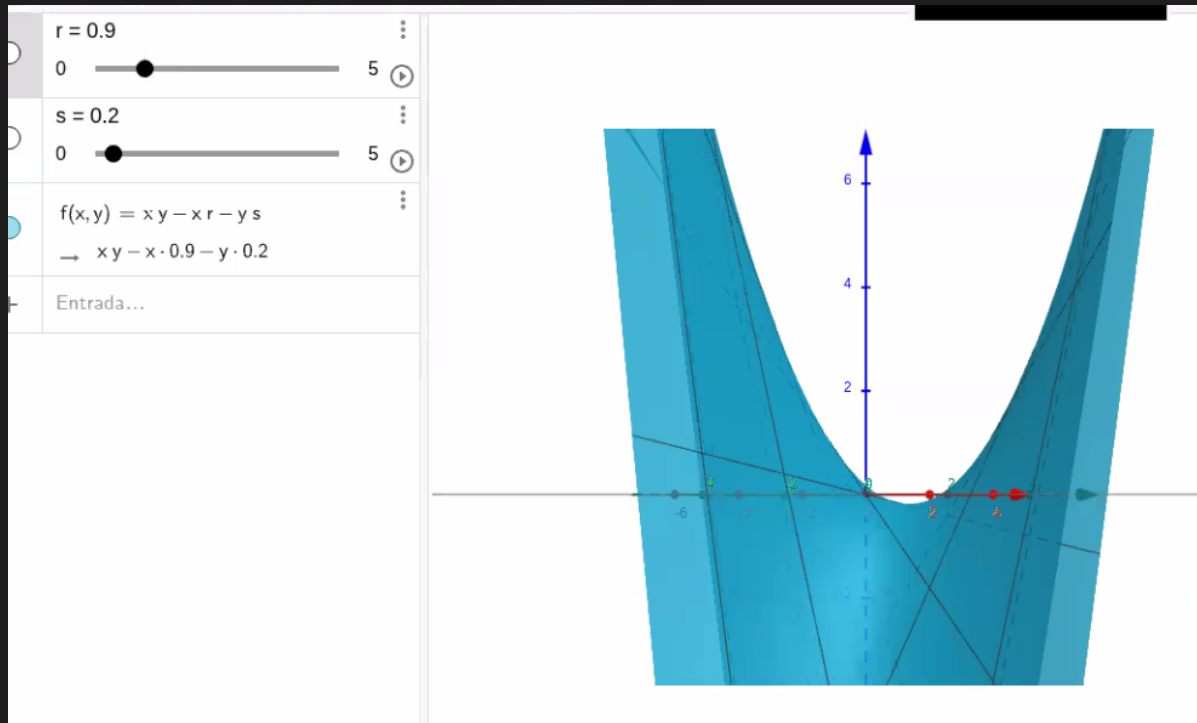
y así

$$-\gamma r - \delta s + \gamma \delta \geq -\gamma s - \delta s + \gamma \delta \stackrel{?}{>} -\varepsilon$$

PENDIENTE: DADO ε ^(y $s > 0$), MOSTRAR QUE

$\exists \gamma, \delta > 0$ QUE CUMPLEN ?

Pendiente



Consultar : (Camilo)

una forma (esto bueno)

$$\lfloor y \rfloor = \sup \{ n \in \mathbb{Z}, n \leq y \}$$

(lo hice en la práctica ej 3a)

gets for me

$$A = \{i \in \mathbb{Z}, i < y\}$$

(lo hice en la practica ej 3a)

stenti!

