Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas d, d_2 y d_∞ son como en la Práctica 3, y δ representa a la métrica discreta, mientras que en (d) (E, d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos }. \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0,1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0,1)$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

6. Sean (E, d) e (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

(c) Probar que si D es denso en E y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
Definición: D es *denso* en E si $\overline{D} = E$.

7. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

(a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y\,\mathrm{sen}(e^x-1) = -2\}$ es cerrado.

(b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1 \le x^3 - 3y^4 + z - 2 \le 3\}$ es cerrado.

(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

8. Sean (E,d) e (E',d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E'.

9. Sea (E,d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

10. Consideramos las funciones $\mathcal{E},\mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

11. Sea (E,d) un espacio métrico.

(a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x,x_0)$. Probar que f es continua.

(b) Sea $A \subseteq E$ cerrado, y sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x,A)$. Probar que g es continua, y que $g(x) > 0$ si $x \notin A$.

(c) Sean $A,B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \to [0,1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0\ \forall x \in A$ y $h(x) = 1\ \forall x \in B$.

(d) Sean $A,B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x,A)$ es una función uniformemente continua.

13. Sean (E,d) e (E',d') espacios métricos y sea $f : E \to E'$ una función para la cual existe $c \ge 0$ tal que

$$d'(f(x_1),f(x_2)) \le c \cdot d(x_1,x_2)$$

para todos $x_1,x_2 \in E$. Probar que f es uniformemente continua.

14. Para cada $r > 0$ estudiar la continuidad uniforme de la función

$$f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

15. (a) Sean (E, d) e (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

i. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y

ii. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $(-\infty, -\pi]$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

16. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'.

17. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

18. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.
