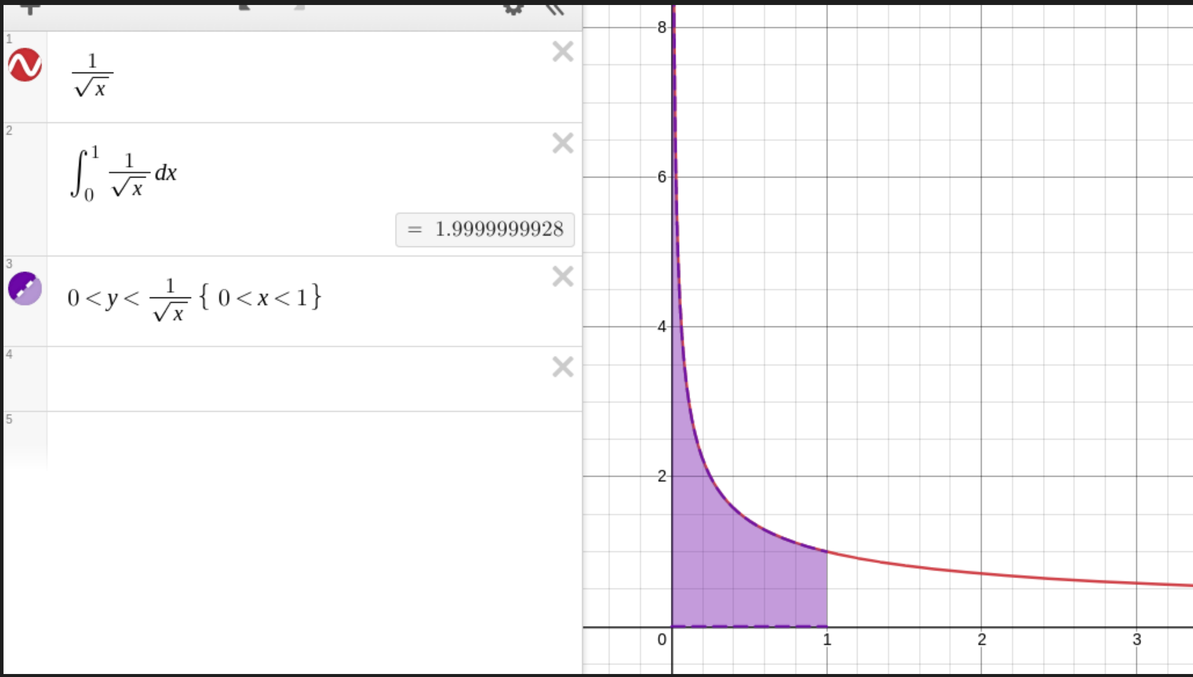
En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

7. Probar que todo conjunto acotado de $\mathcal{M}$ tiene medida finita. Mostrar un conjunto de $\mathcal{M}$ que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.

Uso que puedo cubrir cualquier conjunto acotado con un intervalo abierto, pues todos los abiertos están en M, y como este abierto tiene medida finita, cualquier subconjunto de este abierto tendrá medida finita menor o igual a la del abierto que lo cubre.



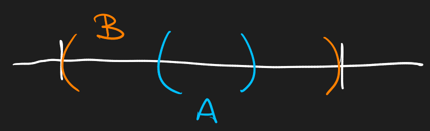
No me sirve

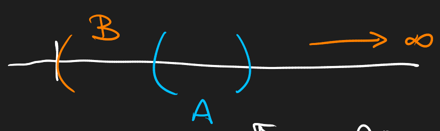
- $\mu\left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right) = 0$

- $\mu\left([-4, 0] \cup \left((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}\right)\right) = 4$

8. (a) Si $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$ y $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
(b) Si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

a)





$\leftarrow$ no necesariamente acotado

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \underbrace{\mu(A \cup B)}$$

Como $A \subseteq B$
$\Rightarrow A \cup B = B$

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B)$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad \checkmark$$

b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) =$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B) + \mu(A \cap B)$$

$A \setminus B \cap (A \cap B) = \phi$
$\Rightarrow = \mu(A)$

$$= \mu(A) + \mu(B)$$

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$.

$\lambda . A \overset{?}{\in} \mathcal{M}$ (lo prueba Nico con $\lambda + A$)

Dem:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \lambda . x$

Como $\lambda > 0$

f es biyectiva

con $f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot y$

$\Rightarrow f(A) = \lambda . A = B$

$f^{-1}(B) = \frac{1}{\lambda} B = A$

$f(A) = B$

$\Rightarrow$ ej 2 $\quad f(\mathcal{M}) = \left\{ B \subseteq Y : f^{-1}(B) = \frac{1}{\lambda} y \right\}_{y \in B}$

(b) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de conjuntos de Y.

Como $f(A) = B$

$= \{ f(A) : A \in \mathcal{M} \}$

es una σ-álgebra.

qvq

$f(\mathcal{M}) \overset{?}{=} \mathcal{M}$

- $A \in \mathcal{M}$ es nulo $\iff f(A)$ es nulo

$\iff f^{-1}(A)$ es nulo

"f no cambia los nulos"

- $A \in \mathcal{M}$ es abierto $\iff f(A)$ es abierto

$\iff f^{-1}(A)$ es abierto

"f no cambia los abiertos"

Entonces

$$A = f\Big(\underbrace{f^{-1}(\underbrace{A}_{\in \mathcal{M}})}_{\text{nulo o intervalo abierto}}\Big) \in f(\mathcal{M}) \qquad ?$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\supseteq) \quad \mathcal{M} \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}) \qquad \begin{cases} f(x) = \lambda \cdot x \\ f^{-1}(x) = \overset{>0}{\frac{1}{\lambda}} \cdot x \end{cases}$$

$$\underset{\text{aplico } f}{\Rightarrow} f(\mathcal{M}) \subseteq f(f^{-1}(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$$

$$f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$$

y como

$$\mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M} = f(\mathcal{M})$$

$\blacksquare$

$\mu(\lambda A) = \lambda\mu(A).$ $\iff$ $\mu(A) = \dfrac{\mu(\lambda . A)}{\lambda}$

Veamos que cumple

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

$\boxed{1}$ • Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.

$\boxed{2}$ • Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$ "σ - aditividad"

uniones e intersecciones numerables

$\boxed{3}$ • Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

Importante! → $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ abierto}\}.$ "Regularidad"

Llamo $\tilde{\mu}(A) = \dfrac{\mu(\lambda . A)}{\lambda}$

$\boxed{1}$ Si $A = (a, b)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\mu}(A) = \mu((\lambda a, \lambda b)) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= (\lambda b - \lambda a) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda(b-a)}{\lambda}$$

$$= \mu(\underbrace{(a,b)}_{A}) \quad \checkmark$$

$\boxed{2}$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) = \frac{1}{\lambda}\cdot\mu\left(\lambda\cdot\bigcup_n A_n\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\mu\left(\bigcup_n \lambda . A_n\right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\sum_n \mu(\lambda . A_n)$$

$$= \sum_n \frac{\mu(\lambda . A_n)}{\lambda}$$

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(A_n) \checkmark$$

sigo junto con $\boxed{3}$

$\boxed{3}$ $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ abierto}\}$

$$\tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \inf\{\mu(U) : (\lambda A) \subset U \text{ abierto}\}$$

Lema

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \inf\{\mu(\lambda V) : A \subset V \text{ abierto}\}$$

$$\overset{\lambda > 0}{=} \inf\left\{\frac{\mu(\lambda V)}{\lambda} : A \subset V \text{ abierto}\right\}$$

$$\tilde{\mu}(A) = \inf\{\tilde{\mu}(V) : A \subset V \text{ abierto}\} \checkmark$$

Mostré que la medida $\tilde{\mu}(A)$ cumple $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$

pero por Teorema de la Existencia de la medida de Lebesgue, esta medida es única

y $\therefore$

$$\tilde{\mu} = \mu$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(A) = \frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\frac{\mu(\lambda A)}{\lambda} = \mu(A)$$

$$\mu(\lambda A) = \lambda \cdot \mu(A) \qquad \boxtimes$$

10. Probar que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

A es siempre acotado (tanto en $\Rightarrow$ como $\Leftarrow$)

$\Rightarrow$) H: A es medible.

Sea $\varepsilon > 0$,

- $\exists\, G \supseteq A$ abierto / $\underbrace{\mu(G) - \mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{4}}$

$$\mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

- $\exists\, F \subseteq A$ cerrado / $\underbrace{\mu(A) - \mu(F) \leq \frac{\varepsilon}{4}}$

$$\mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$$

Ahora

$$G \setminus F = G \cap F^c$$

$$= G \cap F^c \cap \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} = A \dot\cup A^c$

$$= G \cap F^c \cap (A \dot\cup A^c)$$

$$= (G \cap F^c \cap A) \dot\cup (G \cap F^c \cap A^c)$$

Como $A \subseteq G$

$\Rightarrow A \cap G = A$

Como $F \subseteq A$

$\Rightarrow F^c \supseteq A^c$

$\Rightarrow F^c \cap A^c = A^c$

$$= (A \cap F^c) \overset{d}{\cup} (A^c \cap G)$$

$$G \setminus F = A \setminus F \overset{d}{\cup} G \setminus A$$

$$\mu(G \setminus F) = \mu(A \setminus F) + \mu(G \setminus A)$$

$\downarrow$

Como $F \subseteq A$ y $A \subseteq G$

$\downarrow$

$$= \cancel{\mu(A)} - \mu(F) + \mu(G) - \cancel{\mu(A)}$$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

Tenía que

- $\mu(G) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$
- $\mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{4}$

$\Rightarrow -\mu(F) \leq -\mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$

$$= \mu(G) - \mu(F)$$

$$\leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4} - \mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon$$

Falta $\Leftarrow)$

$\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ F, G, $F \subseteq A \subseteq G$ con F cerrado y G abierto y además $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$

qvq

A es medible ?

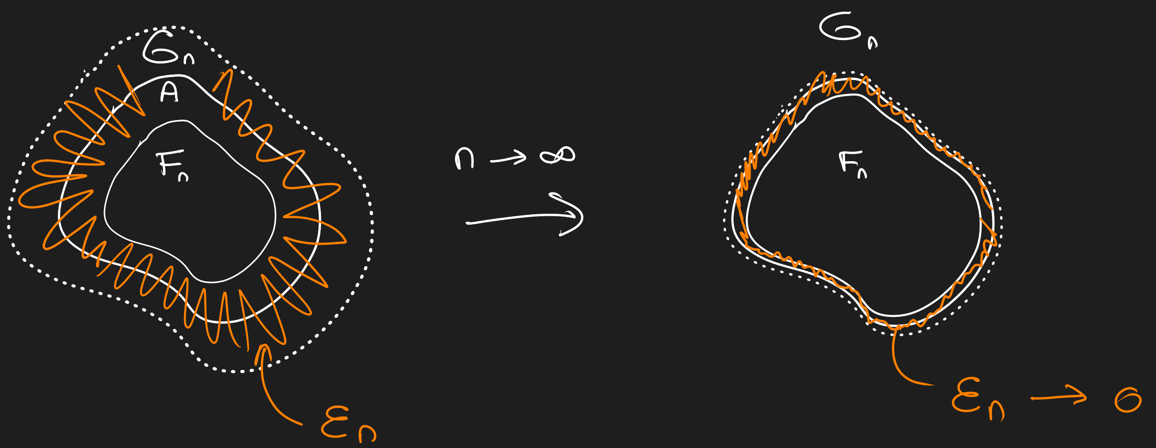
Para cada $n \in \mathbb{N}$, defino $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$

y usando Ho puedo asegurar que

$\exists$ F_n cerrado y G_n abierto /

$$F_n \subseteq A \subseteq G_n \quad y \quad \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n$$

Para cada n en N, definí dos conjuntos Fn y Gn que a medida que n tiende a infinito, se aproximan más y más entre ellos (en medida).



Llamo

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{M}$$

pues unión de medibles es medible y F_n es cerrado y $\therefore F_n \in \mathcal{M}$

y sé que como

$$F_n \subseteq A$$

$$\Rightarrow B \subseteq A$$

Vemos que

$$A = A \setminus B \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

$\Rightarrow$ si $A \setminus B$ es medible ,

A es medible !

en particular

que $A \setminus B$ es nulo (y $\therefore$ medible)

Veamos $A \setminus B$ es nulo

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$\underset{A \subseteq G_n}{\subseteq} G_n \cap B^c$$

$$= G_n \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c \qquad (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$$

$$= G_n \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \cap F_n^c$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus F_n$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$A \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Me gustaría decir que

"$\mu(A \setminus B) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$"

PERO! no sé si $A \setminus B$ es medible!

$\Rightarrow$ Hago algo similar a lo que hice con

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

defino

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \quad \leftarrow \text{es medible.}$$

Como $A \subseteq G_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad A \subseteq D$

Con la misma argumentación que antes

$$A \setminus B \subseteq D \setminus B = \underbrace{D \cap B^c}_{\text{es medible}}$$

$$\subseteq G_n \setminus F_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $D \cap B^c$ es medible

$\Rightarrow \quad D \setminus B$ es medible y además

$$D \setminus B \subseteq G_n \setminus F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) \leq \mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mu(D \setminus B) = 0$$

$\Rightarrow D \setminus B$ es nulo

y como $A \setminus B \subseteq D \setminus B$

$\Rightarrow A \setminus B$ también es nulo

y $\therefore A \setminus B$ es medible.

Finalmente, como

$$A = \underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{B}_{\in \mathcal{M}}$$

$\Rightarrow A$ es medible

$\boxtimes$

11. Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?

Si $\mu(A) = 0$

$\Rightarrow$ A es nula

$\Rightarrow$ $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon$

Los puntos de A° son aquellos que:

si $a \in A^\circ \Rightarrow \exists \alpha > 0 \,/\, B(a, \alpha) \subset A^\circ$

pero para cada α que se me ocurra, siempre habrá un $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ /

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon < \alpha$$

$\therefore \nexists \alpha > 0 \,/\, B(a, \alpha) \subset A^\circ \quad \forall a \in A^\circ$

$\therefore A^\circ = \phi$

$\blacksquare$

- Si $A^\circ = \phi \Rightarrow \mu(A) \overset{?}{=} 0$?

Si $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow A^\circ = \phi$

$\mathbb{Q}$ numerable $\Rightarrow$ es nulo $\Rightarrow$ es medible $\wedge \mu(\mathbb{Q}) = 0$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}^c$ es medible $(\in \mathcal{M})$

Además $[0,1]$ es medible (lo probamos al ppio en ejercicio 5).

$\Rightarrow A$ es medible ($\cap$ de 2 medibles).

⋮

$\mu([0,1]) = 1$ ✓

$[0,1] = \underbrace{[0,1] \cap \mathbb{Q}}_{\subseteq \mathbb{Q}} \,\dot\cup\, [0,1] \cap \mathbb{Q}^c$

$\mathbb{Q}$ nulo $\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ nulo

$\Rightarrow \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

$1 = \mu([0,1]) = \underbrace{\mu([0,1] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$

$\Rightarrow 1 = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$

$1 = \mu(A)$

Rta: No

12. Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0,1]$.

Un conjunto A es denso si:

conjunto que lo contiene

- $\bar{A} = X = [0,1]$

- pero también:

A es denso en $[0,1] \iff$

$\iff A \cap (a,b) \neq \phi \qquad \forall a<b, \; a,b \in [0,1]$

equivalentemente

$A \cap B(a,r) \neq \phi \qquad \forall a \in [0,1], \; \forall r>0$

$\therefore$ A es denso en $[0,1] \iff$

$A^c \cap \underbrace{B(a,r)}_{(a-r,\,a+r)} = \phi \qquad \forall a \in [0,1], \; \forall r>0$

Supongo que

$$\exists a \in A \,,\, \exists r > 0 \,/$$

"a A le falta un intervalito"

$$A \cap B(a,r) = \phi$$

$$A \cap (a-r, a+r) = \phi$$

y llego a un absurdo.

$$\Rightarrow \mu\Big(A \cap B(a,r)\Big) = \mu(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad A^c \cap \underbrace{B(a,r)}_{\text{intervalito de radio } r} \neq \phi$$

$$\underset{a-r}{(} \text{———} \underset{a}{|} \text{———} \underset{a+r}{)} = (a-r, a+r)$$

y así como $A \overset{d}{\cup} A^c = [0,1]$

es lo mismo que $\Big(A \cap [0,1]\Big) \overset{d}{\cup} \Big(A^c \cap [0,1]\Big) = [0,1]$

$$\Rightarrow \underbrace{\Big(A \cap \overbrace{B(a,r)}^{(a-r,\,a+r)}\Big)}_{\text{mide } 0} \overset{d}{\cup} \underbrace{\Big(A^c \cap B(a,r)\Big)}_{\downarrow} = \underbrace{B(a,r)}_{\text{mide } 2r}$$

debe medir $2r$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(A^c \cap B(a,r)\right) = 2.r \qquad \text{con } r>0$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A^c) \geq 2.r$$

pero $\mu(A) = 1$ (por Hip)

y $A \,\dot{\cup}\, A^c = [0,1]$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) + \underbrace{\mu(A^c)}_{\geq} = \mu([0,1])$$

$$1 + \underbrace{2r}_{>0} = 1$$

Abs!

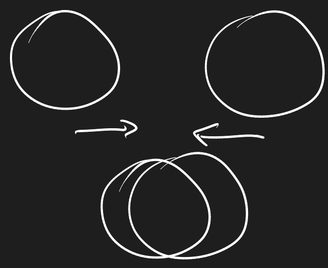
$\therefore$

$$A \cap B(a,r) \neq \emptyset \qquad \forall a \in A \text{ y } \forall r>0$$

$\Rightarrow$ A es denso. ■

13. Sea $\mathcal{M}(I)$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles en $I = [0,1]$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$ y $B \in \mathcal{M}(I)$ tales que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

¿Cuáles quedan fuera de $\mathcal{P}([0,1]) \setminus \mathcal{M}(I)$?



$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$$

$$A_n \triangle B = (A_n \cup B) \setminus (A_n \cap B) = (A_n \setminus B) \cup (B \setminus A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus B) + \mu(B \setminus A_n) = 0$$

disjunto

$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(B \setminus (A_n \cap B))}_{\geq 0} = 0$$

(Suma de sucesiones convergentes converge)

pues $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \overbrace{\mu(A_n) - \mu(A_n \cap B)}^{\text{disjuntos}} = 0 & \text{I} \\ \lim_{n\to\infty} \mu(B) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap B) \overset{\star}{=} \mu(B)$$

pues B no depende de n

I. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0$

$$\overset{\star}{=} \lim \mu(A_n) - \mu(B) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$$

$\blacksquare$