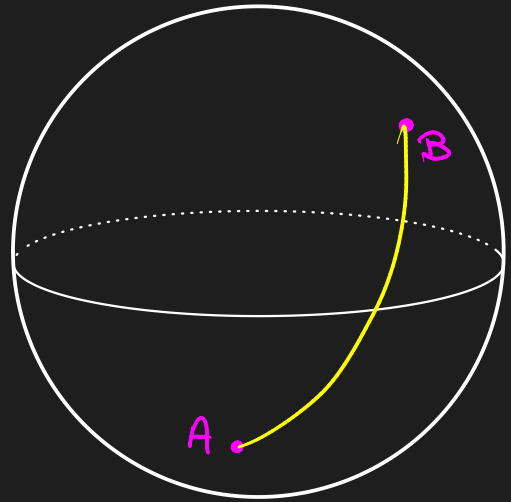
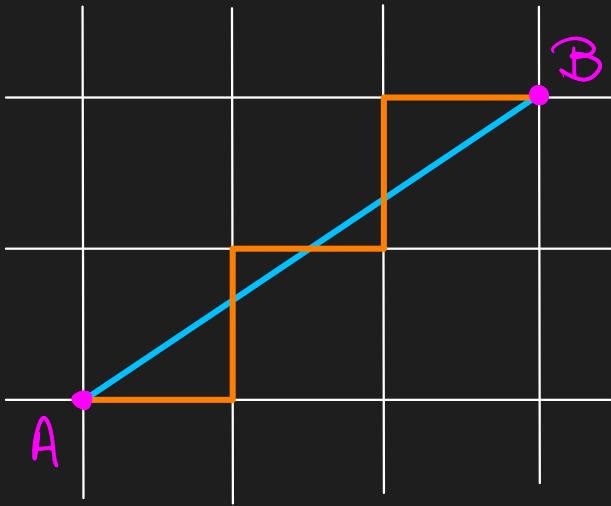


Espacios Métricos I



Def.

Sea E un conjunto,

Una función

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

Se llama **una métrica** o **una distancia** sobre E

si cumple:

$$i) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E \quad \leftarrow \text{se desprende de iii)}$$

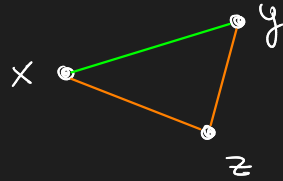
y

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$ii) d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in E$$

$$iii) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$$

Desigualdad Triangular



• Al par (E, d) lo llamaremos un **Espacio Métrico**

Distancias de \mathbb{R}^n

$$\text{Sean } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

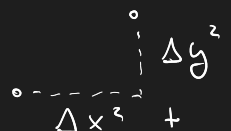
$$y = (\quad) \in \mathbb{R}^n$$

Definimos la

Distancia Euclídea

$$d_z(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|x - y\|_2$$



Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

denotaremos $C([a, b])$

el conjunto de todas las funciones

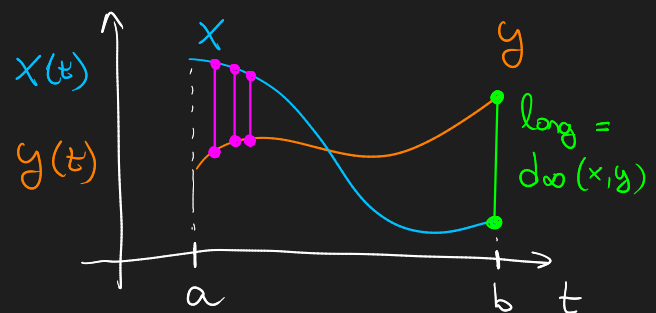
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas

La métrica

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

funciones

Como usar
módulo, está
usando d_1
en cada punto?



Veamos que es una distancia :

$$i) \quad d(x, y) \stackrel{?}{\geq} 0 \quad y \quad d(x, y) = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} x = y$$

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \geq 0 \quad \checkmark$$

$$d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x(t) - y(t)| = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in [a, b]$$



$$ii) \quad d(x, y) \stackrel{?}{=} d(y, x)$$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \\ &= \sup | -1 (y(t) - x(t)) | \\ &= \sup | -1 | \cdot |y(t) - x(t)| \\ &= \sup_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

$$iii) \quad t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq |x(t) - z(t)| + |y(t) - z(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |y(t) - z(t)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(y, z)$$

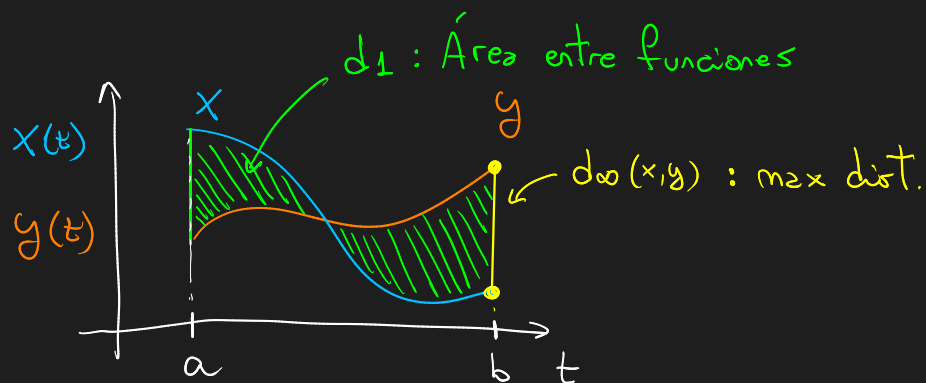
$$\Rightarrow d_{\infty}(x, y) \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(y, z)$$



$C([a, b])$, d_{∞} es un espacio métrico

Otra métrica posible en $C([a,b])$ es

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

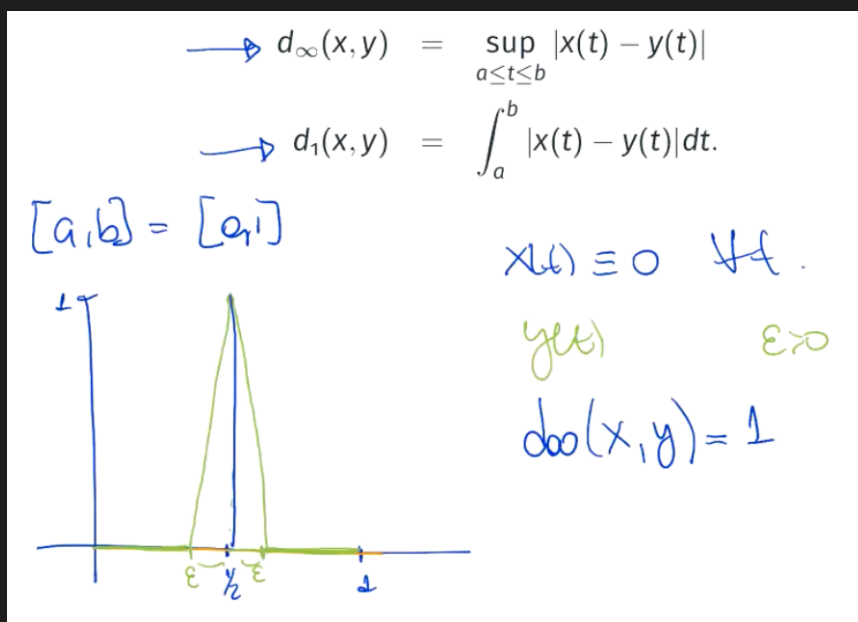


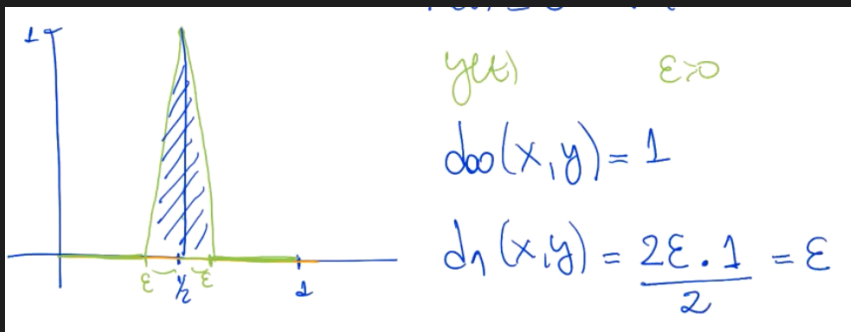
Vemos que

Las 2 distancias anteriores (en $C([a,b])$)

son muy distintas.

Caso de análisis :





Puedo hacer d_1 tan chico como quiera (eligiendo bien $y(x)$)
mientras que d_∞ es siempre 1.

Decimos que

$d_1(x,y)$ y d_∞ no son
distancias equivalentes.

Pregunta 2:

Son independientes?
en el sentido que
no dan info de la otra
distancia.

Distancia Discreta

Definición

Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en E como

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

(i) $\delta(x,y) = 0 \xrightarrow{\text{por def.}} x = y$ $\delta(x,y) \in \{0,1\}$

(ii) $\delta(x,y) = 1 = \delta(y,x)$

(iii) $\underbrace{\delta(x,y)}_{=1 \text{ (} x \neq y \text{)}} \stackrel{(?)}{\leq} \delta(x,z) + \delta(z,y)$
caso x caso.

- La usamos para probar propiedades

Topología en Espacios Métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$



Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}.$$

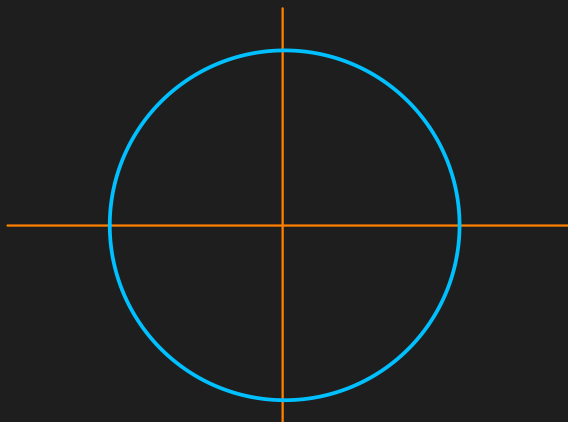


Dibujemos las bolas de las distancias

\mathbb{R}^2

- $E = \mathbb{R}^2$
- $x = (0, 0)$
- $r = 1$

$$B^2((0,0), 1) = \{ (x,y) : \underbrace{d_2((0,0), (x,y))}_{\sqrt{x^2+y^2}} < 1 \}$$



$$B(x(t), r) = \{ y \in E : d(x, y) < r \}$$

\nwarrow centro
 \nearrow funciones

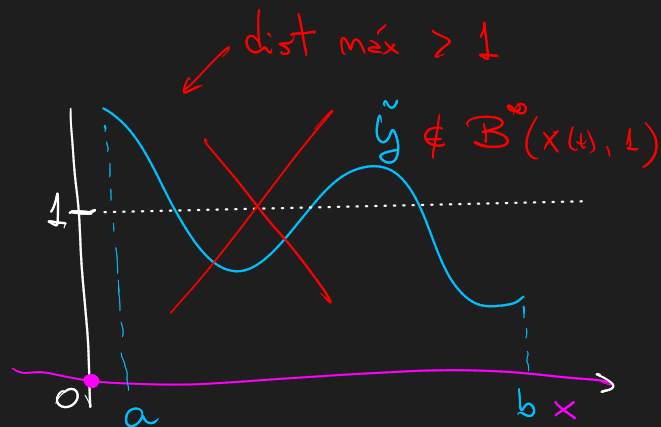
Para d_∞ en $C([a, b])$

Centro

$$x(t) = 0$$

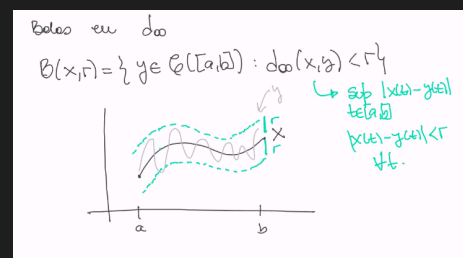
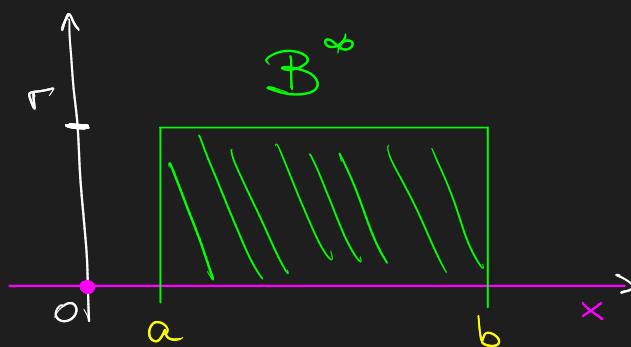
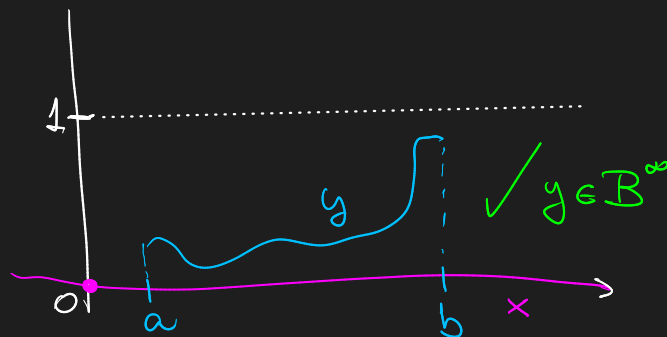
Radio

$$r = 1$$

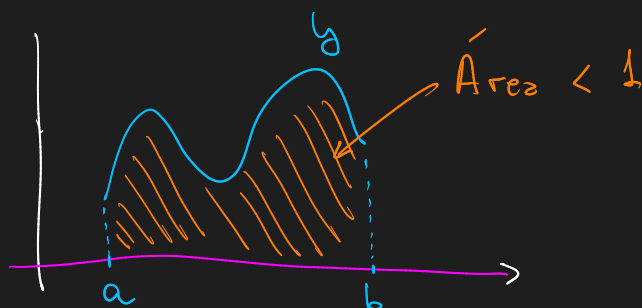


en B^∞ solo están las

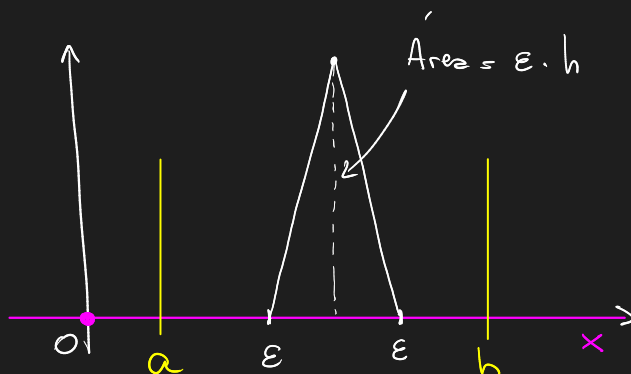
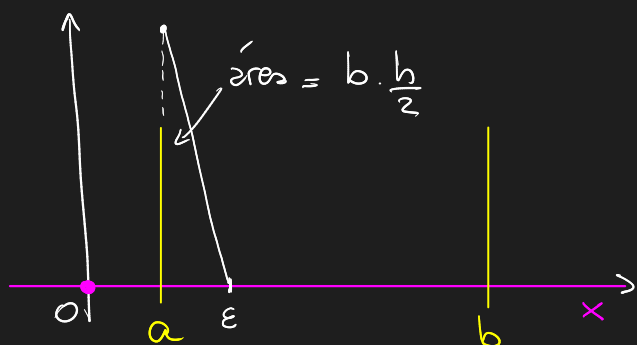
funciones con valores < r



$$\text{Para } d_1 = \int_a^b |x - y| dt$$



- Como el área de la función es no puede ser > 1 ,
y como el intervalo en x es fijo: $[a, b]$,
puedo encontrar infinitas funciones con $y(t)$ tan grande
como yo quiera:

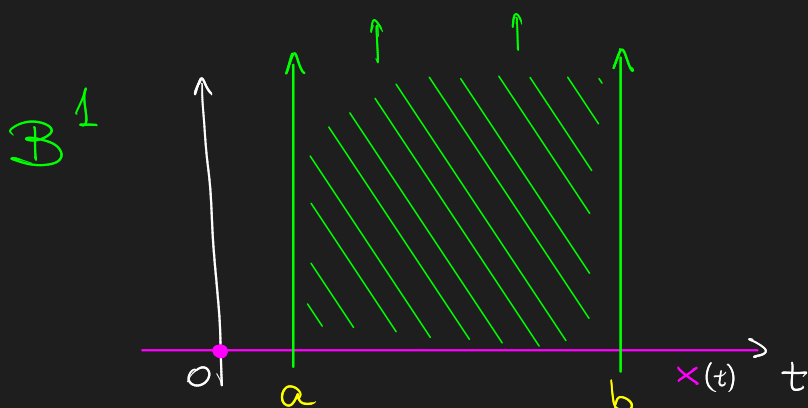


Si quiero $A < 1$

$$\Rightarrow \varepsilon, h < 1$$

$$\begin{matrix} h > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \varepsilon < \frac{1}{h}$$

Con esto vemos que
puedo construir cualquier
función de Área 1 con
una altura particular,
por lo que en este caso,
la Bola no está acotada.



. E con $d = \text{discreta}$

$$B(x, 1) = \{y \in E : d(x, y) < 1\} = \{x\}$$

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ E & r > 1 \end{cases}$$

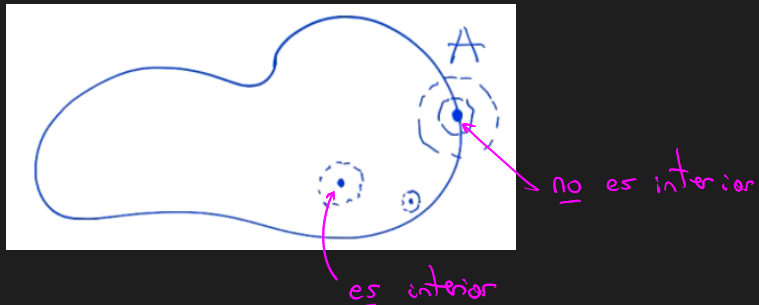
← Solo x

← Todo E

11/

Def :

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un **punto interior** de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.



Definición

Sea $A \subset E$. El **interior de A** es el conjunto de todos los puntos interiores de A , y lo notamos A° .

A° interior

Obs

$$A^\circ \subseteq A$$

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice **abierto** si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

$$\Leftrightarrow G = G^\circ = \{x \in G : x \text{ es int}\}$$

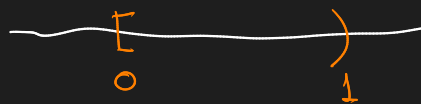
Observación

El conjunto E es abierto. (pues contiene todas las bolas)
El conjunto \emptyset es abierto.

$$E; : E = \mathbb{R}$$

$$d = 1.1$$

$$A = [0, 1)$$



$$A^\circ ?$$

Veamos que $0 \notin A^\circ$ ^{interior}

$$r > 0,$$

$$B(0, r) = \{y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0, y)} < r\}$$



$$= (-r, r) \ni \text{n}^\circ \text{s negativos}$$

$$\circ \circ \quad B(0, r) \not\subset A$$

- Sea $x \in A$ y $x \neq 0 \Rightarrow x \in A^\circ$



Si elijo r como

$$r > 0, \quad B(0, r) = \{y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0, y)} < r\}$$

$$r < \min \{x - 0, 1 - x\}$$

$$r < \min \{x, 1 - x\}$$

$$\Rightarrow B(0, r) = \{y \in \mathbb{R} : |y| < \min \{x, 1 - x\}\}$$

