FUNCIONES CONTINUAS

$f: E \to E'$ FUNCIÓN. SON EQUIV:

- $(\forall x)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$
- $\forall (x_n) \subseteq E$, $x_n \to x$ SE TIENE $f(x_n) \to f(x)$
- $\forall V \subseteq E'$ ABIERTO, $f^{-1}(V) \subseteq E$ ABIERTO

EJERCICIOS:

1) SEA $f: E \to E'$, SEA $a \in E$.

SUP $f(a) \in E'$ ES AISLADO

$\rightsquigarrow (\exists \varepsilon>0)\ B(f(a),\varepsilon) = \{f(a)\}$

SI f ES CONT, $(\exists \delta>0)$

$$d(x,a)<\delta \Rightarrow f(x)=f(a) \quad (*)$$

"f ES LOC. CTE EN a"

VALE LA VUELTA: SI $(\exists \delta>0)$ TAL QUE VALE $(*)$ ENTONCES f ES CONT EN a.

PENSAR: DADO E' EM,

TODO PUNTO DE E' ES AISLADO SII

$\forall f: E \to E'$ CONT SE TIENE QUE f ES LOC. CTE

2) SEA $f: E \to \mathbb{R}$. ENTONCES f ES CONT SII $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$U_\alpha = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ Y $\{x \in E : f(x) > \alpha\} = V_\alpha$

SON ABIERTOS (DE E)

NOTAR: $U_\alpha = f^{-1}\underbrace{(-\infty, \alpha)}_{\text{AB DE } \mathbb{R}}$, $V_\alpha = f^{-1}\underbrace{(\alpha, +\infty)}_{\text{AB DE } \mathbb{R}}$

- f CONT $\Rightarrow U_\alpha, V_\alpha$ ABIERTOS
- QUIERO $(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$$y \in B(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in \underbrace{B(f(x), \varepsilon)}$$

$(f(x) - \varepsilon, +\infty) \cap (-\infty, f(x) + \varepsilon) = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

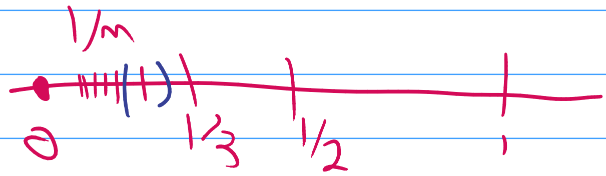
ie, $y \in \underbrace{V_{f(x) - \varepsilon} \cap U_{f(x) + \varepsilon}}$

ES ABIERTO, Y CONTIENE A x

$\to \exists \delta$ COMO ARRIBA

3) SEA $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$

E



SEA (E', d') EM, Y SEAN $(y_n) \subseteq E'$, $y \in E'$.
DEFINIMOS $f : E \to E'$

$$f(x) = \begin{cases} y_n, & \text{SI } x = 1/n, \\ y, & \text{SI } x = 0. \end{cases}$$

SON EQUIV:

i) f ES CONT

$\Downarrow$ ✓ $\Uparrow$ 1/n AISLADO $\Rightarrow$ f CONT EN $1/n$

ii) f ES CONT EN 0

iii) $f(1/n) = y_n \to y = f(0)$

ii $\Rightarrow$ iii) PUES SI $(x_n) \subseteq E$ ESTÁ DADA POR $x_n = 1/n$

$$x_n \to 0 \quad \underset{\text{CONT}}{\Rightarrow} \quad f(x_n) \to f(0) = y$$

iii $\Rightarrow$ ii) SEA $(z_n) \subseteq E$ TAL QUE $z_n \to 0$

(OJO, PODRÍA $1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, \ldots$)

$\Leftarrow$) $f(z_m) \to f(0) = y$

Sea $\varepsilon > 0$. • PVQ $(\exists m_0)$

$m \geq m_0 \Rightarrow d'(f(z_m), y) < \varepsilon$ (*)

• Sé $(\exists m_0)$

$m \geq m_0 \Rightarrow d'(\underbrace{y_m}_{= f(1/m)}, y) < \varepsilon$

Sea m. Tomo m_0 / $m \geq m_0 \Rightarrow \underbrace{d(z_m, 0)}_{|z_m|} < 1/m_0$

• Si $z_m = 0$, (*) vale

• Si no, $(\exists m)$ $z_m = 1/m$. Así

$1/m_0 > |z_m| = 1/m \Rightarrow m > m_0$

$\Rightarrow d(f\underbrace{(1/m)}_{f(z_m)}, y) < \varepsilon$

4) Sean (E,d), (E',d') EM. Ej: es una distancia

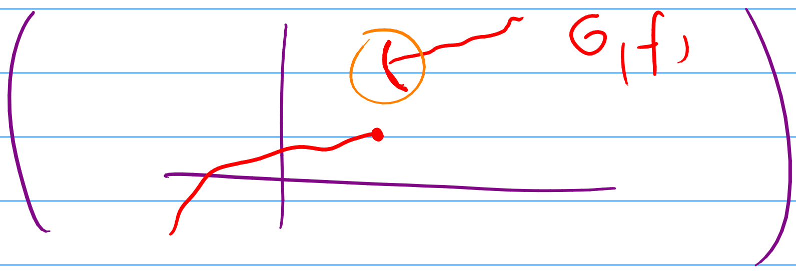
Definimos $d_\infty : (E \times E') \times (E \times E') \to \mathbb{R}$,

$d_\infty((x,x'), (y,y')) = \max\{d(x,y), d'(x',y')\}$

SEA $f : E \to E'$. DEFINIMOS EL GRÁFICO DE f POR

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq E \times E'$$

AFIRMO: f CONT $\Rightarrow$ $G(f)$ ES CERRADO



DEM: SEA $(x_m, \underbrace{y_m}_{f(x_m)}) \subseteq G(f)$ /

$$(x_m, f(x_m)) \xrightarrow{d_\infty} (x, y) \quad (\text{QVQ } y = f(x))$$

COMO $x_m \to x$ (EJERCICIO),

Y f ES CONT, $f(x_m) \to f(x)$;

PERO TAMBIÉN $f(x_m) \to \overset{\shortparallel}{y}$ $\boxed{\checkmark}$