Práctica 9

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

1. Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Concluir que si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los items de arriba.

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.
(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.
(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Probar que f es medible.

4. Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

5. Probar que si f y g son medibles entonces $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.

6. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:

(a) Si f es continua en $[0, 1]$, entonces es medible.
(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0, 1]$ entonces es medible.

7. Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:

(a) $f + g$ es medible.
(b) f^2 es medible.
(c) $f \cdot g$ es medible.

8. Dada una sucesión $(f_n)_n$ de funciones en $[0, 1]$, consideremos las funciones

$$S(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \text{y} \qquad I(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

9. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[0,1]$ tales que convergen en casi todo punto a una función f. Probar que f es medible.

10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa e integrable. Probar que si $E \subseteq [0,1]$ es medible, entonces

$$\int_E f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{E+y} f(x)\, d\mu(x)$$

para todo $y \in [0,1]$ tal que $E + y \subseteq [0,1]$.

11. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $E \subseteq [0,1]$ medible, se tiene que $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$. Probar que $f = g$ en casi todo punto.

12. Sean $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles y no negativas tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge a una función $g(x)$. Probar que g es medible y que

$$\int_{[0,1]} g\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} g_n\ d\mu.$$

13. Sea $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = (-1/n)\chi_{[0,n]}$. Probar que la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 en $[0,\infty)$. Probar que sin embargo $\int f_n\ d\mu = -1$, de manera que

$$\underline{\lim} \int_{[0,+\infty)} f_n\ d\mu = -1 < 0 = \int_{[0,+\infty)} \underline{\lim} f_n\ d\mu.$$

Deducir que el Lema de Fatou no vale si las funciones f_n no son no negativas, aún cuando converjan uniformemente.

14. Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función integrable, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles del $[0,1]$ y $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Probar que:

(a) Si los E_n son disjuntos dos a dos entonces

$$\int_E f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\ d\mu.$$

(b) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\ d\mu = \int_E f\ d\mu \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus E_n} f\ d\mu = 0.$$