Vicky

Mercury 5 Mayo

Teorema de Punto Fijo

Definición

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Teorema de Punto Fijo:

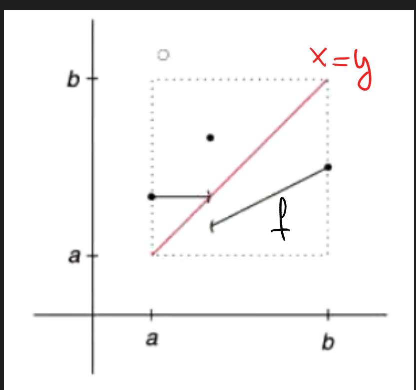
Quiero

- Determinar condiciones en X y f que garantizan la existencia de un punto fijo.

- Determinar condiciones que garantizan unicidad.

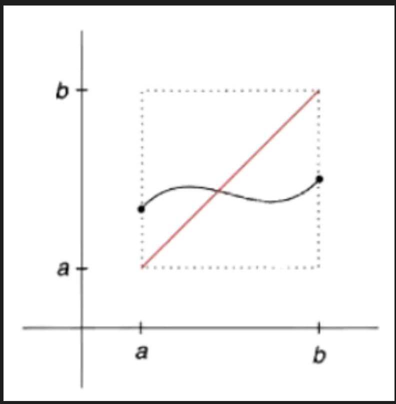
Ejemplo:

- f no tiene punto fijo:



$f : [a,b] \to [a,b]$

- Si $f:[a,b]\to[a,b]$ contínua $\Rightarrow$ tiene punto fijo en $[a,b]$



Dem:

Busco $x \,/\, f(x) = x$

Llamo
$$g(x) = f(x) - x$$

Busco raíces de $g(x)$

Como g es contínua

Miro los signos
$$\Rightarrow g(a).\,g(b) \leq 0$$

- Si $g(a).\,g(b) = 0$

  $\Rightarrow$ alguno es cero $(g(a) = 0$ ó $g(b) = 0)$

  $\Rightarrow$ entonces tiene punto fijo ✓

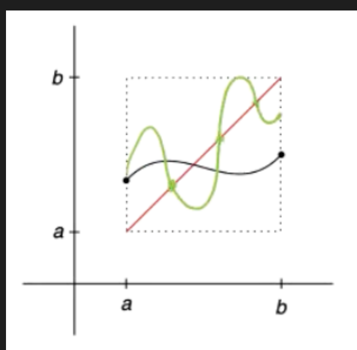
- Si $g(a).\,g(b) < 0$

  $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, g(c) = 0$ ✓

  Bolzano

Observación

- Esto no significa que el punto fijo es único!



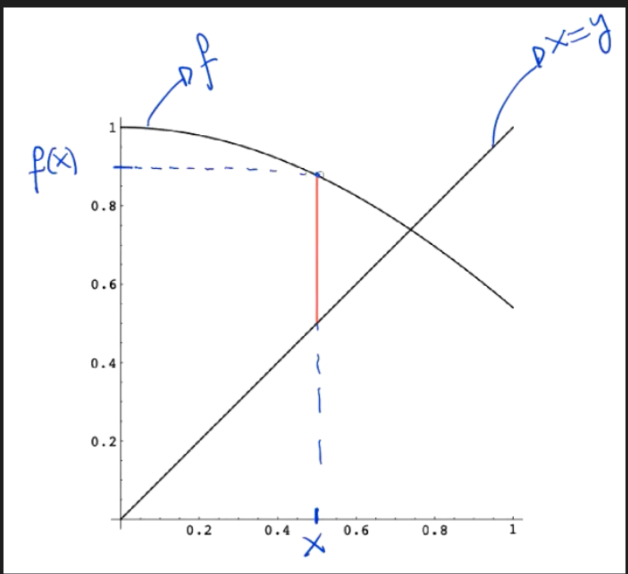
Teorema de Punto Fijo (Banach - 1922)

- Sea (E, d) un em. completo y $f: E \to E$ una función contractiva, es decir, $\exists\ \alpha \in (0,1)$ /

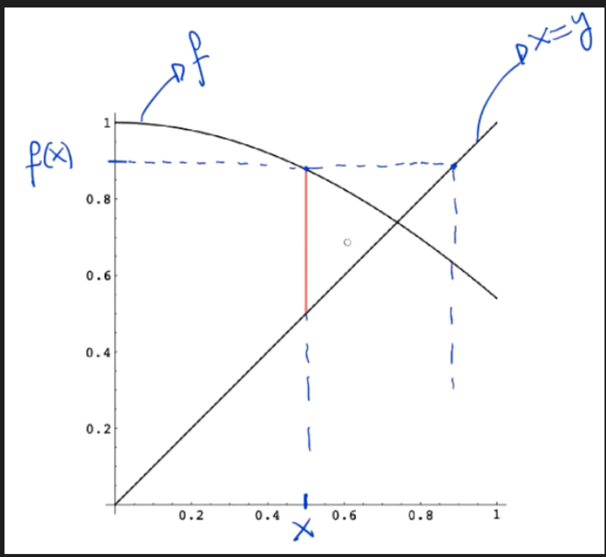
$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y) \quad \forall x, y \in E$$

$\Rightarrow \exists$ un único punto fijo de f en E.

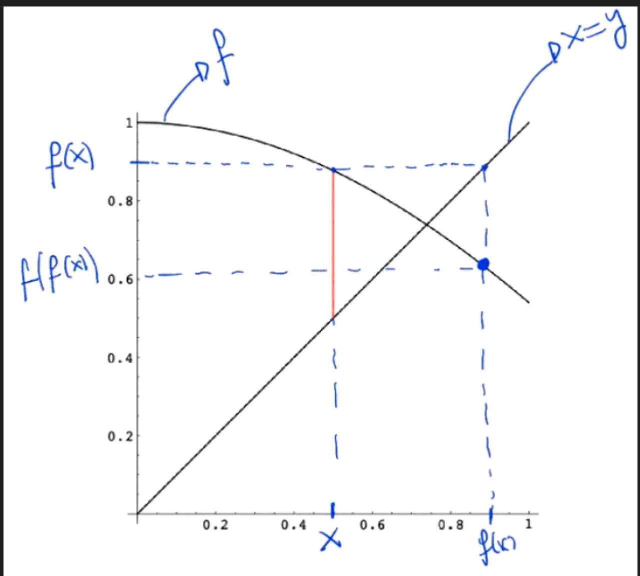
1



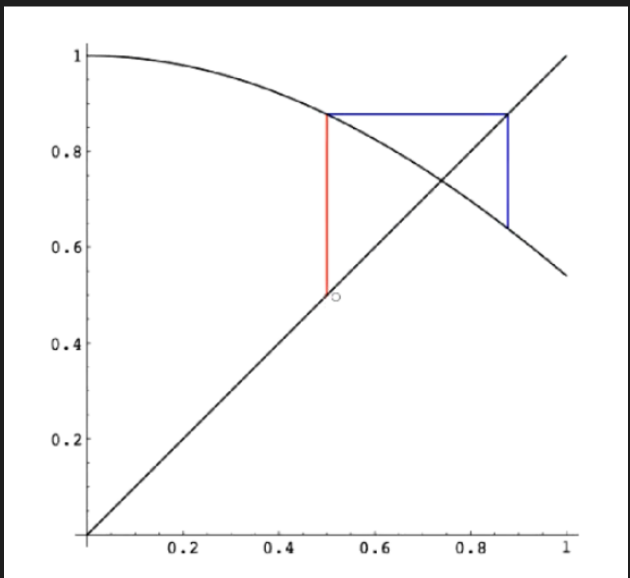
2



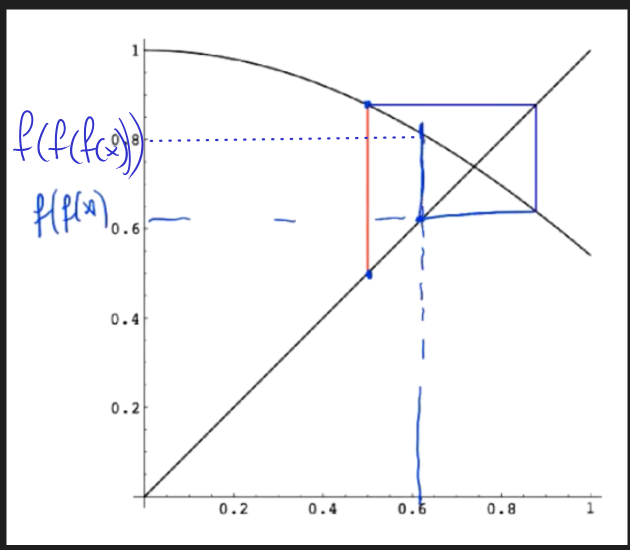
3



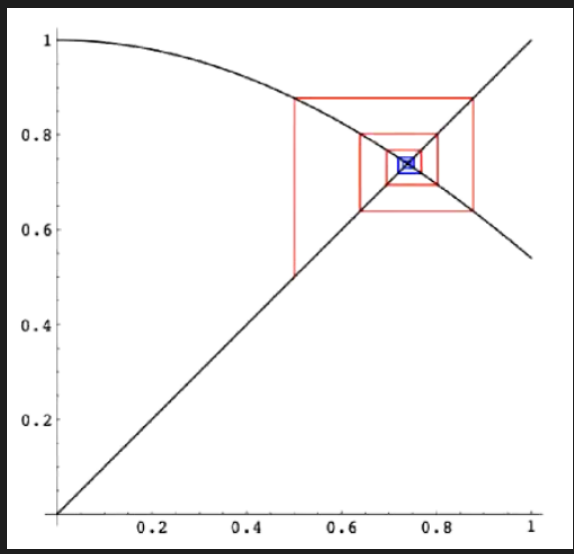
4



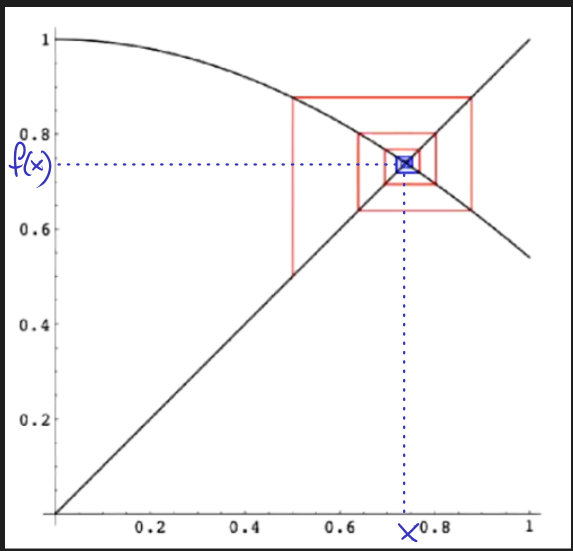
15)



16)



Obtuve un $x \,/\, f(x) = x$



Lo que hice:

$x \in E$

$x_n = f^n(x)$

donde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$.

y mostré (gráficamente) que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f^n(x) = x$$

Dem:

Sea $x_0 \in E$

defino $x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0) = f(f(x_0))$

$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$

$\vdots$

$x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$

Voy a probar que

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tiene límite

usando que E es completo

y que (x_n) es de Cauchy.

Veamos que (x_n) es de Cauchy

Sean n, m con $n \leq m \Rightarrow m = n+k$ con $k \in \mathbb{N}$

mido

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+k})$$

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+k}) \leq$$

$$\underset{\text{desig. Triang.}}{\leq} d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) +$$

$$\vdots$$

$$+ d(x_{n+k-1}, \underbrace{x_{n+k}}_{x_m})$$

Notemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \overset{\text{def de } (x_n)}{=} d(f(x_n), f(x_{n+1}))$$

y como f es una contracción

$$\leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

Similarmente para

$$d(x_{n+2}, x_{n+3}) = d(f(x_{n+1}), f(x_{n+2}))$$

y como f es una contracción

$$\leq \alpha \cdot \underbrace{d(x_{n+1}, x_{n+2})}_{\text{del paso anterior}}$$

$$\leq \alpha^2 \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

y siguiendo:

$$d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \alpha^{k-1} \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

Juntando todo

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i}$$

$$= \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \qquad \alpha \neq 1$$

Probé que

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) \cdot \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$$

$$\overset{\alpha^k < 1}{\leqslant} \underbrace{d(x_n, x_{n+1})} \cdot \frac{1}{1-\alpha}$$

$$d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant \alpha \cdot \underbrace{d(x_{n-1}, x_n)}$$

Sigo aplicando este proced

$$\leqslant \underset{\longrightarrow 0}{\alpha^n} \cdot d(x_1, x_0) \cdot \frac{1}{\underset{<1}{1-\alpha}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\therefore$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como E es completo, (x_n) debe converger

$\exists\, x \in E \ / \ x_n \longrightarrow x$

Como f es contracción $\Rightarrow$ es continua

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

es uniformemente continua.

f cont

$$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

Pero

$$f(x_n) = x_{n-1} \longrightarrow x$$

$$\Rightarrow x = f(x) \quad \checkmark$$

Unicidad

Si $y \in E \ / \ f(y) = y$

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \overset{\text{contrac.}}{\leq} \alpha \cdot d(x,y)$$

puntos fijos

obtuve

$$d(x,y) \leq \underset{\alpha > 0}{\alpha} \cdot d(x,y)$$

$\Rightarrow d(x,y)$ debe ser cero

$\Rightarrow d(x,y) = 0 \iff x = y$

$\boxtimes$

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

- Dado $x \in E$, la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo.
- El punto fijo se puede aproximar.

Otra versión del T.P.F

Sea (E,d) un e.m. compacto ← más fuerte que ser completo.

y $f : E \to E$ (continua?)

no es exactamente lo mismo?

Si $d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \forall x,y \in E$

$\Rightarrow$ f tiene un único punto fijo.

Dem:

Miro

$\{d(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq \mathbb{R}$, no vacío $(E \neq 0)$

¿acotado inferiormente por 0 (pues $d(x,y) \geq 0$)

$\Rightarrow \exists\ a = \inf \{ d(x, f(x)) : x \in E \}$

Veamos que a es mínimo

i.e: $\exists\ x_0 \in E \ / \ a = d(x_0, f(x_0))$

Seguro

$$\exists\ (x_n)_n \subseteq E \ / \ d(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

(equiv. de sucesiones de ínfimo)

Como E es compacto

$\exists\ (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsuc. de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

convergente a $x_0 \in E$

por ser subsuc. de convergente a a

$$\Rightarrow\ d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \longrightarrow a$$

$\downarrow$ f continua y Ej 12. P3

$$d(x_0, f(x_0))$$

$$\Rightarrow\ d(x_0, f(x_0)) = a$$

Si $a = 0$:

$\Rightarrow \quad f(x_0) = x_0 \quad \leftarrow x_0$ es PF.

Si $a > 0$:

$$\Rightarrow d\Big(f(x_0), f(f(x_0)) \Big) < d(x_0, f(x_0)) = a$$

Por Hip. : $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

Abs! pues a era el ínfimo.

$\therefore \quad a = 0 \quad \checkmark$

Unicidad : como antes.

$\blacksquare$

Resumen

Teo. Punto Fijo

$\boxed{1}$ em. completo + contracción

$\boxed{2}$ em. compacto + $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

¿por qué en las contracciones el α está del lado derecho de $<$?

si encuentro α muy chiquito

$\Rightarrow$ todos los más grandes sirven

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x,y)$$

$a < \alpha \cdot b$

si $\alpha = 1$

$a < b$

si $\alpha = 0,5$

$a < \frac{b}{2}$

se vuelve más restrictivo.

Usos del TPF:

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales:

Sea I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en la variable x. Esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in I$. Sea $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

Entonces, existe un $r > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

tiene una única solución $x : [\tau - r, \tau + r] \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

Recordemos que x es solución si y sólo si

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds.$$

es solución si y sólo si

$$\boxed{x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds.} \to T(x)$$

$$T(x)(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds$$

$T(x) = x$

- Teorema de la función implícita.
- Aproximación de soluciones lineales.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$ Busco solucionar $\boxed{Ax=y}$

$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $Tx = (I-A)x + y$ si x es punto fijo de $T \Rightarrow x = (I-A)x + y = \cancel{x} - Ax + y \Rightarrow +Ax = y$.

Buscar cond / T sea contractiva.

$\|Tx - T\bar{x}\| = \|(I-A)(x-\bar{x})\| \underset{\bar{A}.}{\le 1}$ J dos(x,y)

- Fractales....

Ejemplo:

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $|f(x) - f(y)| = \overset{\le 1}{\underline{|\operatorname{sen}(\xi)|}}\,|x-y|$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contrac.

$g'(x) = \operatorname{sen}(\cos(x)) \cdot \operatorname{sen}(x) \le 1$ $\to \cos(x) = 0 \Rightarrow$ $\operatorname{sen}(\cos(x)) = 0$

si $g'(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = 1$ (ó -1) $\Rightarrow g'(x) \ne 1$ $\Rightarrow |g'(x)| < 1$

$\operatorname{sen}(\cos(x)) = 1$ (ó -1) $\ne -1$

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x-y| \le \alpha |x-y|$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$. $(0,1) \ni \max |g'| \ne 1$

Afirmo: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

$g(\cos(x_0)) = \cos(\underbrace{\cos(\cos(x_0))}_{g(x_0) = x_0}) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$ es un punto fijo.

$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$. ☒