

Borrador

Texto

Deshacer

Rehacer

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es **compacto** si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K .

Es decir: K es compacto si y sólo si

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $x \in K$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

Ejemplo

1) $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $d = |\cdot|$.

Si $(x_n)_n \subseteq [a, b] \Rightarrow$ es acotada \Rightarrow

$\exists (x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ conv. Si $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$

grq $x \in [a, b]$. Seguro que $x \in \overline{[a, b]} = [a, b]$ ✓

Ejemplo

2) $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.

$x_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow (x_n)_n \subseteq (0, 1)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

cualquier subsucesión de $(x_n)_n$ va a conv a $0 \notin A$. $\Rightarrow A$ no es compacto

3) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, tome $x_n = n$ $(x_n)_n \subseteq \mathbb{N}$

$d(x_n, x_m) = |n - m| \geq 1 \quad \forall n \neq m$.

$\Rightarrow (x_n)_n$ no es de Cauchy \therefore

ninguna subs. es de Cauchy y \therefore

ninguna es conv. \mathbb{N} no es compacto

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Dem: Recordemos: $A \subseteq E$ es acotado si $\exists x \in E \wedge M > 0 / A \subseteq B(x, M)$.

Veamos q' K es acotado. Supongamos que no. Fijo $x_0 \in K$, $\forall m \in \mathbb{N} \exists x_m \in K / d(x_0, x_m) \geq m$.

Como $(x_m)_m \subseteq K \exists (x_{m_k})_k$ q' conv a digamos $x \in K$. Si $f(y) = d(x_0, y) \Rightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es continua.

$$f(x_{m_k}) \rightarrow f(x) \Rightarrow m_k \leq d(x_0, x_{m_k}) \xrightarrow{f(x_{m_k})} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow{f(x)} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

$(x_m)_m \subseteq K / x_m \rightarrow x \notin K$
 $\exists (x_{m_k})_k$ conv en $K \Rightarrow x \in K$
 \downarrow
 $+\infty$
 $K \rightarrow \infty$ ABS!

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Dem: \Rightarrow) vale en general.

\Leftarrow) $K \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado y acotado.

Sea $(x_n)_n \subseteq K$. Como K es acotado \Rightarrow

$(x_n)_n$ es una suc. acotada.

Veamos que \exists una subsuc. conv de $(x_n)_n$.

$(x_n) = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$ $(x_m^j)_m \subseteq \mathbb{R} \forall 1 \leq j \leq m$.

y son acotadas $|x_m^j| \leq \|x_m\| \forall m \forall j$.

$\exists (x_{m_k}^1)_{k \in \mathbb{N}}$ subsuc de $(x_m^1)_m$ conv a $x^1 \in \mathbb{R}$

Como $(x_{m_k}^2)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada tiene una subsuc. $(x_{m_{k_2}}^2)_{k_2 \in \mathbb{N}}$ conv a x^2

$(x_{n_1 n_2}) \rightsquigarrow (x_{n_1 n_2 n_3})_{n_3 \in \mathbb{N}}$ con $a \cdot x^3$ sig

hasta llegar a lo coord m .

Obtengo $(x_{n_1 n_2 n_3 \dots n_m})_{n_m \in \mathbb{N}} = (x_{n_1 n_2 \dots n_m}^1, \dots, x_{n_1 n_2 \dots n_m}^m)$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $x =$ x^1 x^m

Como K es cerrado, y $(x_{n_1 n_2 \dots n_m})_{n_m} \rightarrow x$

$\Rightarrow \underline{x \in K} \quad (K = \overline{K}) \quad \square$

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

- E es cerrado: $E = \overline{E}$
- E es acotado: $E \subseteq B(x, 2), x \in E$

- E no es compacto. Ej 3 los seq. convergentes con lo métrica discreta son constantes a partir de un momento.

$\exists (x_n)_n \subseteq E / x_n \neq x_m \ \forall m \neq n$.
 Cualquier subseq. de $(x_n)_n$ tiene todos sus términos \neq . \therefore ninguno es const.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ un compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.

Dem: Sea $(x_n)_n \subseteq F$. Como $F \subseteq K$ y K es compacto $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$ subsuc. de $(x_n)_n$ y $\underline{x \in K} / x_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Como $(x_{n_k})_k \subseteq F \Rightarrow x \in \overline{F} = F$
 \uparrow Cerrado.

**Corolario**

Intersección (arbitraria) de conjuntos compactos, es compacta.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ una sucesión convergente a $x \in E$. Probar que el conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Hacer con Teo. Compacidad 2
 \uparrow

