Vicky 22 Abr

Completitud de $\mathbb{R}$

- Queremos probar que $\mathbb{R}$ es completo

Recuerdo:

Definición:

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

- Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Idea:

- Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.
- Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.
- Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente.
- $(x_n)_n$ converge.

Proposición
Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Vamos a probar

Proposición
Toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión monótona.

Recordemos: Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.
Luego, si una sucesión es acotada, la subsucesión monótona que tiene también va a ser acotada y por lo tanto, convergente.

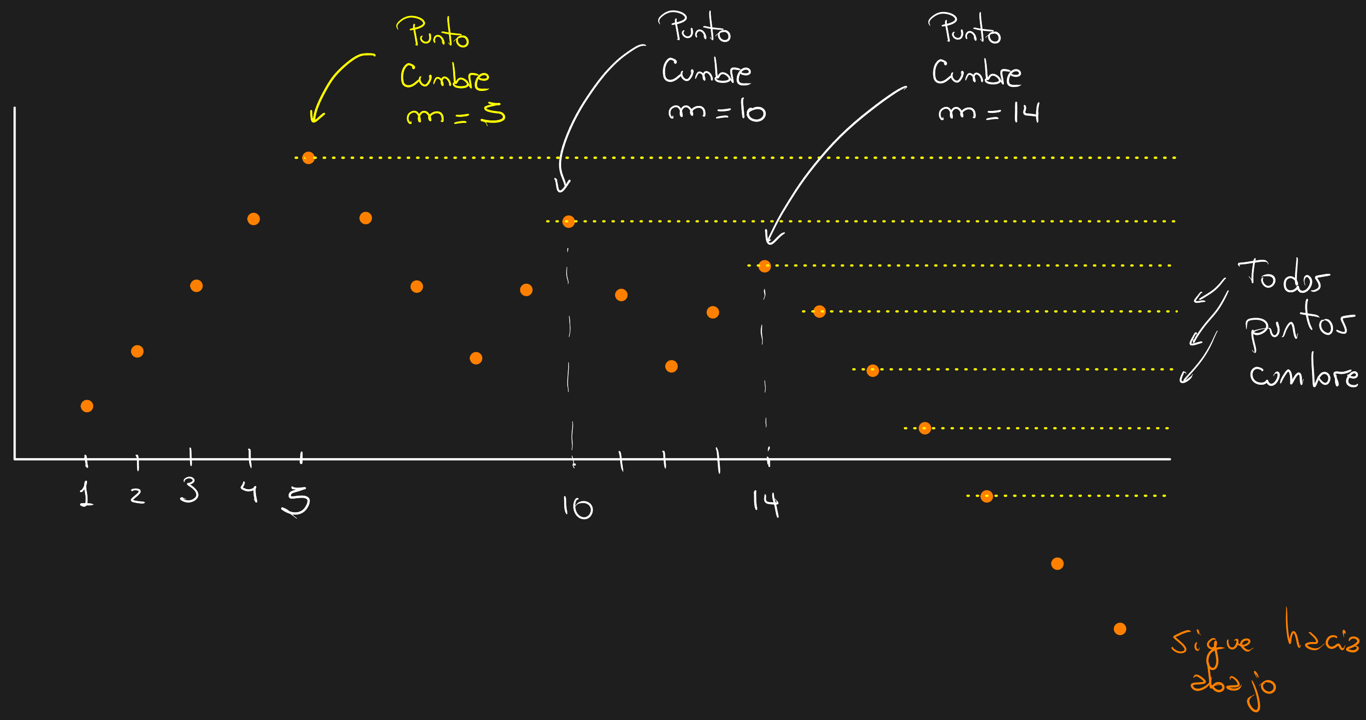
Con esto probamos la 1° prop.

Vamos a probar

Proposición
Toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión monótona.

Usando

Definición
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Decimos que $m \in \mathbb{N}$ es un punto cumbre de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\forall\ n > m$ se tiene $x_n < x_m$.



Si

$$C = \{ m \in \mathbb{N} : m \text{ es punto cumbre de } (x_n)_n \} \subseteq \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow C = \{ 5, 10, 14, 15, 16, 17, \dots \}$$

Vamos a probar

Proposición

Toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión monótona.

Dem :

$(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sucesión cualquiera

$$C = \{ m \in \mathbb{N} : m \text{ es punto cumbre de } (x_n)_n \} \subseteq \mathbb{N}$$

- A C le puede pasar 3 cosas :

$\boxed{1}$ $\#C = \infty$

$\boxed{2}$ $\#C < \infty$

$\boxed{3}$ $C = \emptyset$

Supongo $\boxed{1}$

$\Rightarrow C = \{n_k : n \in \mathbb{N}\}$ con $n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \cdots$

Afirmo :

- $(x_{n_k})_k$ subsuc. de $(x_n)_n$ es monótona decreciente.

En efecto :

- Como $n_k < n_{k+1}$

  y $n_k, n_{k+1} \in C$

  $\Rightarrow x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$

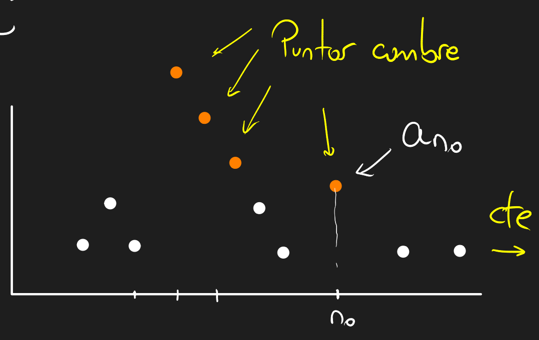
$\therefore$ $(x_{n_k})_k$ es monótona decreciente.

Si pasa $\boxed{2}$, armo sucesión creciente

$\boxed{2}$ $\#C < \infty$

Sea n_0 el elemento más grande de C

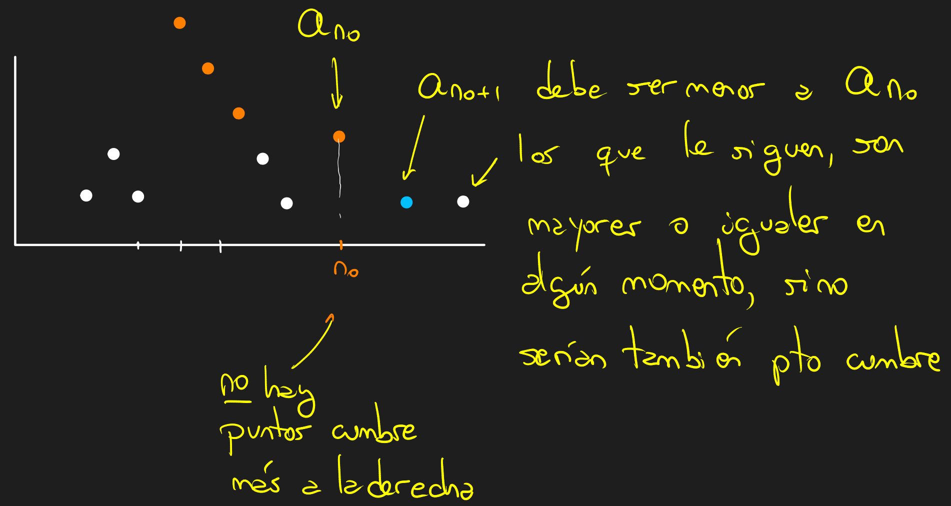
$\Rightarrow a_n < a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$



$\exists\, n_1 > n_0 + 1 \;/\; a_{n_1} \geq a_{n_0+1}$

Pues $n_0 + 1 \notin C$, pues n_0 era el pto cumbre más "a la derecha",

y por eso



y sigo

$\exists\, n_2 > n_1 + 1 \;/\; a_{n_2} \geq a_{n_1+1}$

Pues $n_1 + 1 \notin C$

y sigo

$\exists\, n_k > n_{k-1} + 1 \;/\; a_{n_k} \geq a_{n_{k-1}+1}$

y así construí:

$(a_{n_k})_k$ subsuc. de $(a_n)_n$ monótona creciente.

Si pasa $\boxed{3}$

Repetimos el argumento de $\boxed{2}$

- Tomo el primer a_1
- Como no hay puntos cumbre,

$$\exists\, n_1 > 1 \quad / \; a_{n_1} \geq a_1$$

Como no hay puntos cumbre,

$$\exists\, n_2 > n_1 + 1 \quad / \; a_{n_2} \geq a_{n_1+1}$$

y así sigo construyendo una sucesión monótona creciente

$\Rightarrow (a_{n_k})_k$ es monótona creciente. ✓

Para cada $k \in \mathbb{N}$, pues $C = \emptyset \Rightarrow (a_n)_n = (a_{n_k})_k$

$\blacksquare$

Con esto probamos la completitud de $\mathbb{R}$.

Bonus Track

$\mathbb{R}^m$ también es completo.

Dem:

Sea $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^m$

con $x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots, x_n^m)$

Si $(x_n)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^m$

con $d(x, y) = \|x - y\|_2$

como

$$|x_n^j - x_{n'}^j| \leq \|x_n - x_{n'}\|$$

$\Rightarrow \quad (x_n^j)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy $\forall\ 1 \leq j \leq m$

Como $\mathbb{R}$ es completo

$\Rightarrow$ para cada $1 \leq j \leq m$

$$\exists\ x^j \in \mathbb{R} \ / \ x_n^j \longrightarrow x^j$$

$\Rightarrow \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ es el límite de $(x_n)_n$.

$\blacksquare$