Práctica 7

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a $f : A \to Y$ si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

en func. cont. 2 vimos:

Proposición
Sea $f : E \to E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

$\Rightarrow$) f NO U.C.: $\exists\, \varepsilon_0 /$ ningún δ SIRVE.

Si $\delta = 1/n \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in E / \underbrace{d(x_n, y_n) < \overset{\delta}{1/n}}$

pero $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ $\qquad \Downarrow$ $d(x_n, y_n) \to 0$

$\Leftarrow$) $\boxed{\text{Sup. que } f \text{ ES U.C.}}$

$\Rightarrow$ dado el ε_0, $\exists\, \delta > 0 /$

$\underbrace{d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon}$. Como $d(x_n, y_n) \to 0$

$\exists\, n_0 / \underbrace{d(x_n, y_n) < \delta}\ \forall n \geq n_0. \Rightarrow \underbrace{d'(f(x_n), f(y_n))}_{\substack{\geq \\ \varepsilon_0}} < \varepsilon_0 \ \forall n \geq n_0$ ABS

y acá tenemos

$(f_n)_n$ no converge uniformemente a f $\iff$

$\iff$ existen:

$\alpha > 0$,

$(f_{n_k})_k \subseteq (f_n)_n$

y

$(a_k)_k \subseteq A$

tales que

$$d\left(f_{n_k}(a_k),\ f(a_k)\right) \geq \alpha$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$:

(a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, definida en $\mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, definida en $\mathbb{R}$;

(c) $f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

a) Convergencia Puntual

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} f(x)$$

no depende de x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\leq 1} = 0$$

Converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$

Convergencia uniforme

$$d'(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - 0|$$

$$= \left|\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)\right|$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1}$$

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \checkmark$$

$$d'(f_n(x), f(x)) = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Si dado $\varepsilon > 0$, tomo $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

(b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, definida en $\mathbb{R}$;

CP:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin 0 = \underbrace{0}_{=:f} \checkmark$$

C. Unif.

$$|f_n - 0| = \left|\sin\frac{x}{n}\right| \leq \left|\frac{x}{n}\right|$$

depende de x! dá la idea de que $f_n \not\rightrightarrows f$

Uso ej 1:

Busco $(x_k)_k$ /

$$d'\left(f_{n_k}(x_k)_k, \underbrace{f(x_k)}_{\equiv 0}\right) \geq \alpha$$

Si elijo $x_k = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

y $k = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

?

Preguntar Proced.

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{x_k}{n} - 0\right)_k = \left(\sin\frac{x_n}{n} - 0\right)_n$$

$$\overset{x_n = n}{=} \left(\sin\frac{n}{n}\right)_n$$

$$= (\sin 1)_n \geq \sin 1 =: \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore \quad f_n \not\rightrightarrows f$.

(c) $f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

CPunt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(x,y) = \lim \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})}(x,y) = \underbrace{(x,y)}_{\text{identidad}} \checkmark$$

$$d'\left(\frac{n}{n+1}(x,y), (x,y)\right) = \left\| \frac{n}{n+1}(x,y) - (x,y) \right\|$$

$$= \| \underbrace{(x,y)}_{\substack{\text{depende de} \\ (x,y)!}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)}_{\frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \to 0} \|$$

depende de
(x,y)! no puede converger unif.

Den:

$f_{n_k} := f_n$

$(x,y)_k = (n,n)$

$$d'\left(f_{n_k}((x,y)_k), f((x,y)_k)\right) =$$

$$= d'\left(\frac{n}{n+1}(x,y)_k \,,\, (x,y)_k\right)$$

$$= d'\left(\frac{n}{n+1}(0,n) \,,\, (0,n)\right)$$

?

3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones reales definidas sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$;

ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$;

iii. $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $A = [0, 1]$.

(b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de ii., que es uniforme sobre $[2, 5]$.

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

a) i) $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} x^{-n}\cdot e^x = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{\underbrace{x^n}_{\to\infty}} = 0$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot x(1-x^2)^n$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}}$$

- si $x=0 \Rightarrow \lim f_n = 0$
- si $x=1 \Rightarrow \lim f_n = 0$
- si $x\in(0,1) \Rightarrow 0 < (1-x^2) < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{n^2}_{\to\infty}\cdot \underbrace{x(1-x^2)^n}_{\to 0}$$

$$n^2 = \frac{1}{\frac{1}{n^2}} \Rightarrow \frac{\overbrace{x(1-x^2)^n}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}} \underset{L'H}{=} \lim \frac{x\cdot(1-x^2)^n\cdot\log(1-x)}{-2n^{-3}}$$

n^{-2}

tampoco!

(b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de ii., que es uniforme sobre $[2, 5]$.

i) $$d'(f_n, f) \underset{\substack{\uparrow \\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}}{=} |f_n - 0|$$

$$= |x^n|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x\in(0,\frac{1}{2})}}{\leq} \frac{1}{2^n} \qquad \forall x \in (0, \tfrac{1}{2})$$

$$\leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

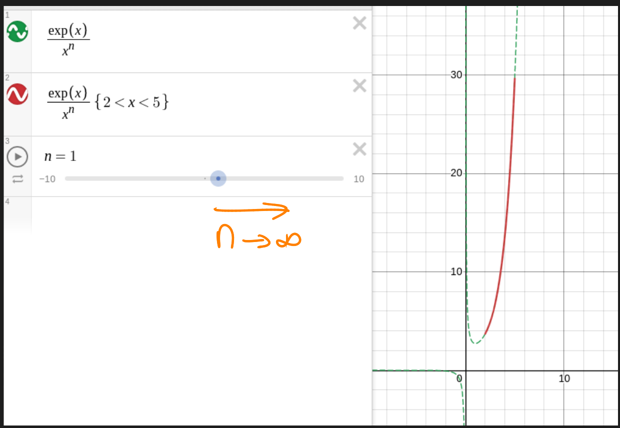
$$\therefore f_n \rightrightarrows f \quad \text{en } (0, \tfrac{1}{2})$$

ii) con $x \in [2,5]$

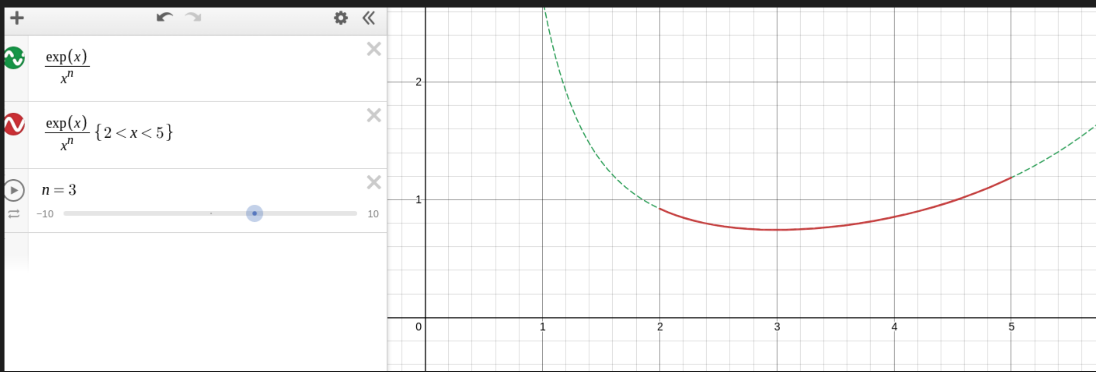
$$d'(f_n, f) = \left| x^{-n} \cdot e^{x} - 0 \right|$$

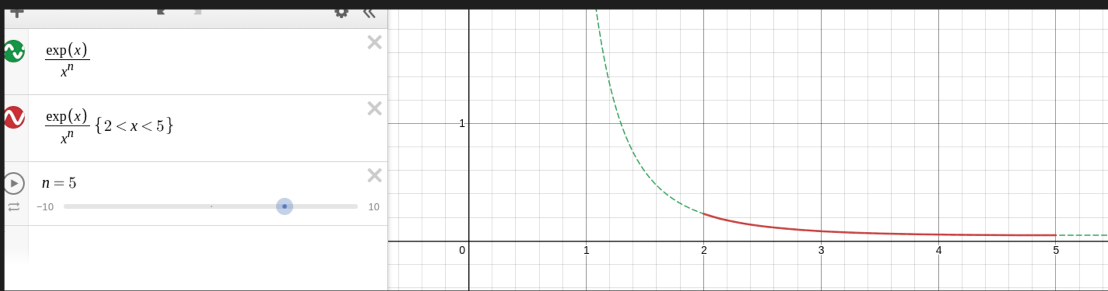
$$= \frac{e^{x}}{x^{n}}$$

quiero el valor más grande desde $n_0 = 1$



Quiero el valor más grande desde n_0 = 1 pues a medida que n crece, fn decrece, y yo quiero acotar todas las fn por arriba.





creciente en $[2,5]$

$$\frac{e^{2}}{2} \leq \frac{e^{x}}{x^{1}} \leq \frac{e^{5}}{5} \approx 29,68$$

$$d'(f_n, f) < 30$$

$\therefore \; f_n \rightrightarrows f$ en $[2,5]$

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

La pregunta es si en vez de restringir el dominio de las fn a $(0, \frac{1}{2})$ y [2, 5], las vemos sobre todo A

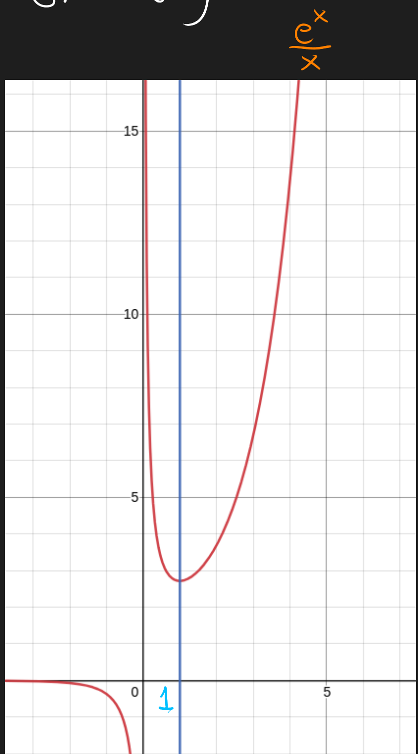
Valdrá para todos los intervalos (finitos) posibles?

y no, no era uniforme la conv.

en i) $f_n \to f$ discontinua ?

$\Rightarrow$ no puede haber convergencia uniforme

en ii) Para $n = 1$



$\frac{e^x}{x}$ no es acotada ?

$$|f_n(1+1/n) - 0| = \underbrace{(1+1/n)^{-n}}_{\to 1/e} \cdot \underbrace{e^{1+1/n}}_{\to e} \geq 1/2 \text{ si } n \gg 0$$

$$|d(f_n, 0)| \geq 1/2, \text{ si } n \gg 0$$

$\alpha = 1/2$, $(f_{n_k}) = (f_n)$, $a_n = 1 + 1/n$

$\therefore \quad f_n \not\rightrightarrows f$

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f: X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f: X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(c) Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f: X \to \mathbb{R}$ si y solo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

(d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada* o es *acotada en* d_∞.

a) $\underset{\substack{\cap \\ B(X)}}{f_n} \longrightarrow f \overset{?}{\in} B(X)$

Busco contraejemplo

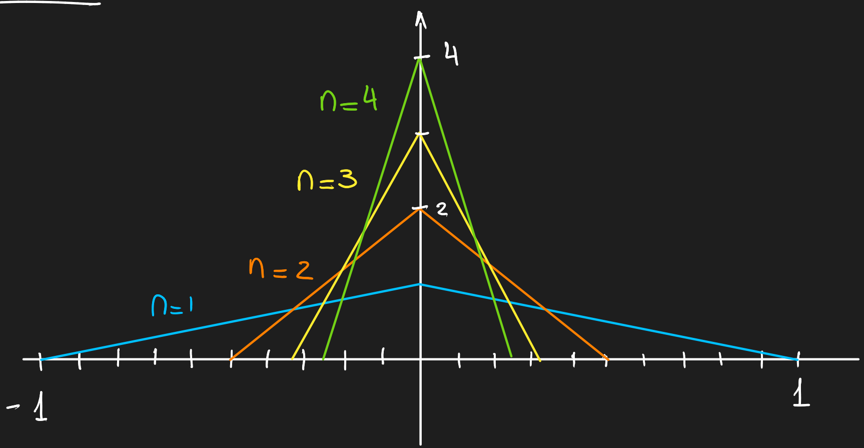
(tiene que ser falso, sino la pregunta b sería muy fácil)

Quiero:

que cada función fn sea acotada ← pues $f_n \in B(X)$

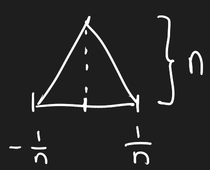
que converja a una f no acotada (que se vaya a infinito)

- Triángulos!



?

" $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{1}{n} \\ \text{(triángulo de altura } n \text{)} & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} \longrightarrow f = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{sino} \end{cases}$ "



$\therefore$ es falso!

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f : X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

Si $f_n \rightrightarrows f$

$\Rightarrow d'(f_n, f) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (\forall x \in X)$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Además, como cada f_n es acotada

$\Rightarrow |f_n(x)| < M_n$ para cada n

alguna f_n

$\Rightarrow |f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)|$

$\leq \underbrace{|f_{n_0}(x) - f(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq M_{n_0}}$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + M_{n_0}$ para cada n

Si elijo $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow |f(x)| < 1 + M_{n_0}$

Finalmente:

f es acotado y $\therefore$ $f \in B(X)$ $\blacksquare$

(c) Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{R}$ si y solo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

Converg. unif $\iff$ converg.

$f_n \rightrightarrows f$ sii $(\forall \varepsilon)(\exists n_0)$

$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$|f_n(x) - f(x)| \leq d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$

$\forall x$

5. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f_n')_{n\geq 1}$ en $[0,1]$, con $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$.

Conv. Puntual

- $f_n(x) = \dfrac{n x^2}{1+nx^2}$

Si $x=0$:

$$f_n(0) = 0$$

Si $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overrightarrow{n x^2}^{\,\infty}}{\underrightarrow{1+nx^2}_{\,\infty}} \overset{L'H}{=} \lim \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$f_n \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Conv. Unif.

$$d'(f_n, f) = |f_n - f|$$

$$\leq \underbrace{|f_n|}_{\leq \sup M_n} + \underbrace{\left| \frac{nx^2}{1+nx^2} \right|}_{< 1}$$

$$d'(f_n, f) < \varepsilon$$

?

$$\therefore \quad f_n \rightrightarrows f$$

Ahora con

$$f'_n = \frac{x^2 \cdot (1+nx^2) - nx^2 \cdot x^2}{(1+nx^2)^2}$$

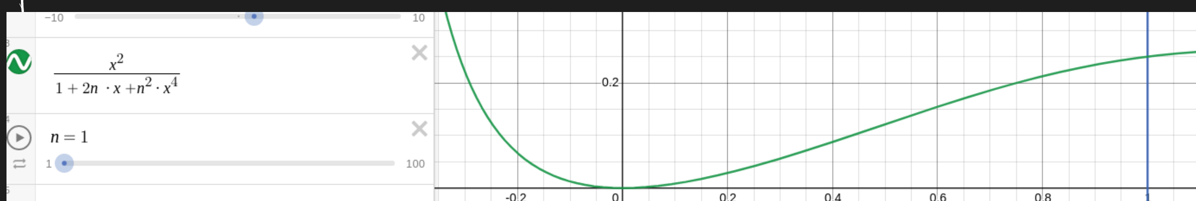
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 + \cancel{nx^4} - \cancel{nx^4}}{(1+nx^2)^2} =$$

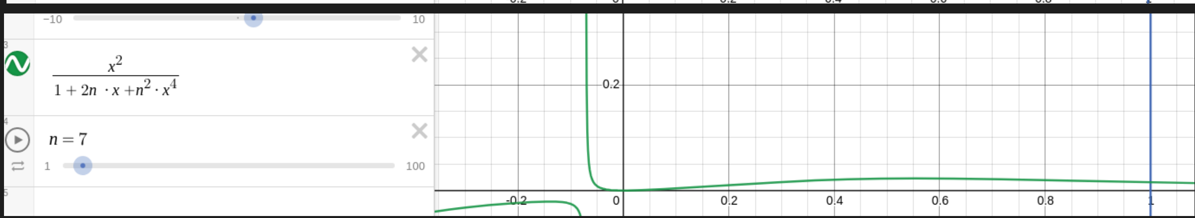
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x^2}{(1+nx^2)^2} = 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$f'_n \longrightarrow f \equiv 0$$

Conv. Unif

$$\left| \frac{x^2}{(1+nx^2)^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{1 + 2nx^2 + n^2x^4}$$





$$\frac{x^2}{1+2nx^2+n^2x^4} \underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{\leq} \frac{x^2}{1+2x^2+x^4}$$

Como $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow x^2 < 1 + 2x^2 + x^4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+2x^2+x^4} < 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\therefore f_n' \rightrightarrows f \equiv 0$$

$$f_m'(x) = \frac{2mx(1+mx^2) - mx^2(2mx)}{(1+mx^2)^2}$$

$$= \frac{2mx}{(1+mx^2)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

¿UNIF?

No: $f'(1/m) = \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^2} \geq 1$ si $m \gg 0$

6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones de X a $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a f y a g, respectivamente.

Probar que:

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

a) Sé que

$$f_n \rightrightarrows f$$

$$g_n \rightrightarrows g$$

$$\Rightarrow (f_n + g_n) \longrightarrow f + g$$

Convergen uniformemente?

$$|f_n + g_n - (f+g)| = |f_n - f + g_n - g|$$

$$\leq \underbrace{|f_n - f|}_{\substack{< \alpha_f \\ \text{puer} \\ f_n \rightrightarrows f}} + \underbrace{|g_n - g|}_{\substack{< \alpha_g \\ \text{puer} \\ g_n \rightrightarrows g}}$$

$$d'(f_n + g_n, f + g) < \alpha_f + \alpha_g$$

$$\therefore (f_n + g_n) \rightrightarrows (f+g) \quad \blacksquare$$

b)

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

Unif acotadas :

$$\exists M \;/\; |f_n(x)| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

el mismo M para todas!

$$\exists N \;/\; |g_n(x)| < N \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como

f_n y g_n están unif. acotadas

$\Rightarrow$ f acotada y g acotada

ej 4

$$|f_n \cdot g_n - f \cdot g| < \underbrace{|f_n(x)|}_{<M} \cdot \underbrace{|g_n(x)|}_{<N} + \underbrace{|f(x)|}_{<\tilde{M}} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{<\tilde{N}}$$

$$< 2MN$$

$\boxtimes$

Si tengo una sucesion de funciones acotadas uniformemente por M que convergen a una f, vale que f está acotada tambien por la misma M?

? es $M = \tilde{M}$?

y $N = \tilde{N}$?