

Teorema de Punto Fijo

Definición

Si X es un conjunto y $f : X \rightarrow X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un **punto fijo de f** si $f(x_0) = x_0$.

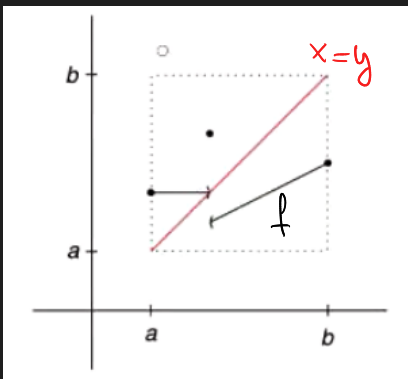
Teorema de Punto Fijo:

Quiero

- Determinar condiciones en X y f que garanticen la existencia de un punto fijo.
- Determinar condiciones que garanticen unicidad.

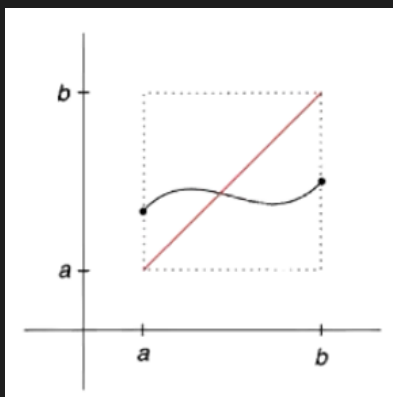
Ejemplo:

- f no tiene punto fijo:



$$f : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

- Si $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua \Rightarrow tiene punto fijo en $[a, b]$



Dem:

Busco $x / f(x) = x$

Llevo

$$g(x) = f(x) - x$$

Busco raíces de $g(x)$

Como g es continua

Miro los signos

$$\Rightarrow g(a) \cdot g(b) \leq 0$$

- Si $g(a) \cdot g(b) = 0$

\Rightarrow alguno es cero ($g(a) = 0$ ó $g(b) = 0$)

\Rightarrow entonces tiene punto fijo \checkmark

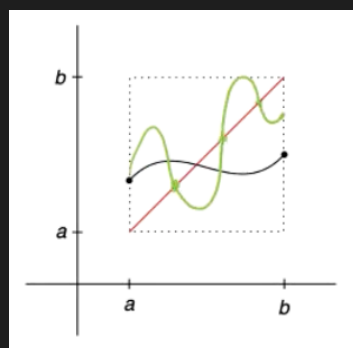
- Si $g(a) \cdot g(b) < 0$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) / g(c) = 0 \quad \checkmark$$

Bolzano

Observación

- Esto no significa que el punto fijo es único!



Teorema de Punto Fijo (Banach - 1922)

• Sea (E, d) un em. completo

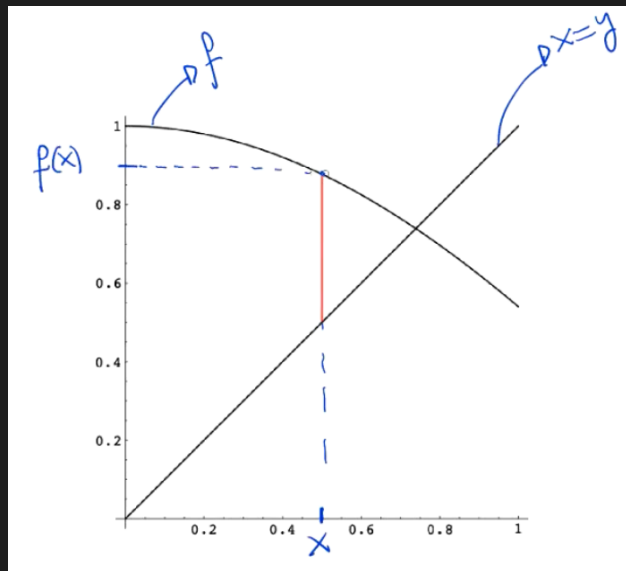
y $f: E \rightarrow E$ una función contractiva,

es decir, $\exists \alpha \in (0, 1) /$

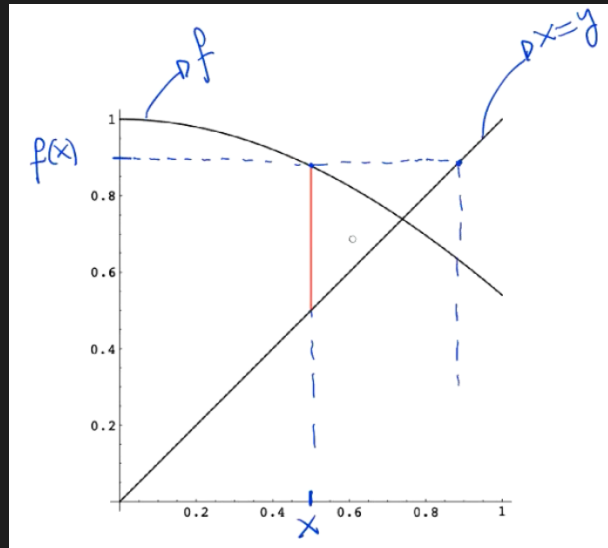
$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

$\Rightarrow \exists$ un único punto fijo de f en E .

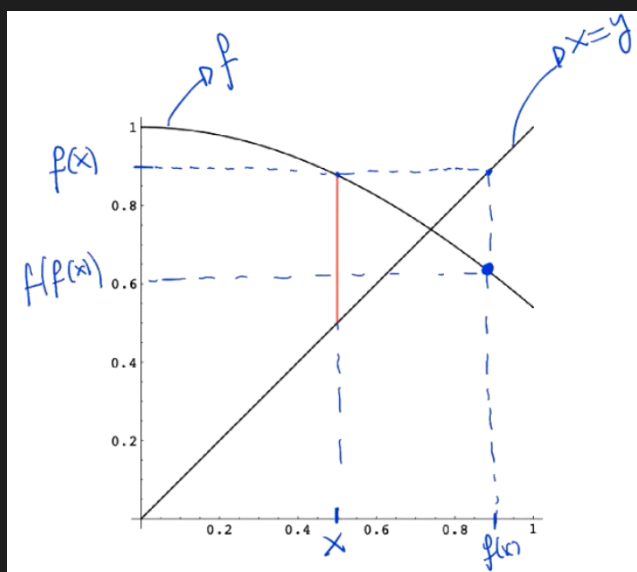
[1]



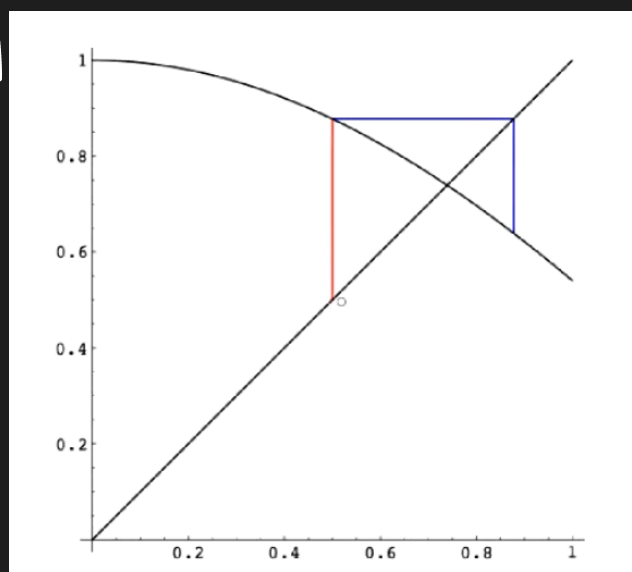
[2]



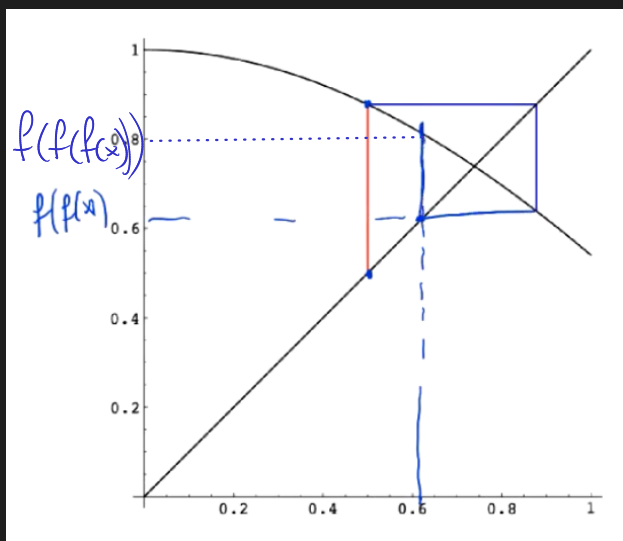
[3]



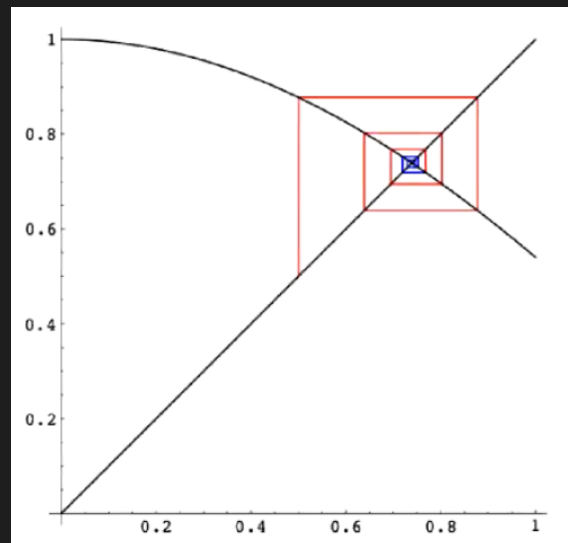
[4]



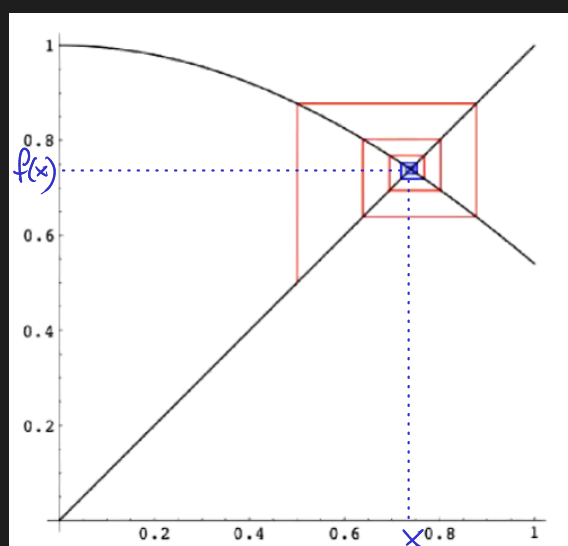
5)



6)



Obtuve un $x / f(x) = x$



Lo que hice:

$$x \in E$$

$$x_n = f^n(x)$$

$$\text{donde } f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces,}}$$

y mostré (gráficamente) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x$$

Dem:

Sea $x_0 \in E$

$$\text{defino } x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0) = f(f(x_0))$$

$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$$

\vdots

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$$

Vo y a probar que

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tiene límite

usando que E es completo

y que (x_n) es de Cauchy.

Veamos que (x_n) es de Cauchy

Sean n, m con $n \leq m \Rightarrow m = n + k$ con $k \in \mathbb{N}$

mido

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+k})$$

$$d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+k}) \leq$$

$$\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k})$$

desig.
Triang.

$\underbrace{x_{n+k}}_{x_m}$

Notemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \stackrel{df\ d(x_n)}{=} d(f(x_n), f(x_{n+1}))$$

y como f es una contracción

$$\leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

Similarmente para

$$d(x_{n+2}, x_{n+3}) = d(f(x_{n+1}), f(x_{n+2}))$$

y como f es una contracción

$$\leq \alpha \cdot d(x_{n+1}, x_{n+2})$$

del paso anterior

$$\leq \alpha^2 \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

y siguiendo:

$$d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \alpha^{k-1} \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

Juntando todo

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i}_{= \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}} \quad \alpha \neq 1$$

Probé que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) \cdot \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}$$

$$\alpha^k < 1$$

$$\leq d(x_n, x_{n+1}) \cdot \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\underbrace{d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha \cdot d(x_{n-1}, x_n)}$$

$$\underbrace{d(x_{n-1}, x_n)}$$

Sigo aplicando
este proced

$$\leq \underbrace{\alpha^n}_{\rightarrow 0} \cdot d(x_1, x_0) \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \alpha}}_{< 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\therefore (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Como E es completo, (x_n) debe converger

$$\exists x \in E \mid x_n \longrightarrow x$$

Como f es contracción \Rightarrow es continua

\downarrow

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

\uparrow
es uniformemente
continua,

f_{cont}

\downarrow

$$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$$

Pero

$$f(x_n) = x_{n-1} \longrightarrow x$$

$$\Rightarrow x = f(x) \quad \checkmark$$

Unicidad

$$\text{Si } y \in E \mid f(y) = y$$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \overset{\text{contrac.}}{\leq} \alpha \cdot d(x, y)$$

$\uparrow \uparrow$
puntos
fijos

obtuve

$\alpha > 0$

$$d(x, y) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

$\Rightarrow d(x, y)$ debe ser cero

$\Rightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

□

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

- Dado $x \in E$, la sucesión $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto fijo.
- El punto fijo se puede aproximar.

Otra versión del T.P.F

Sea (E, d) un em. compacto \swarrow más fuerte que ser completo.

y $f: E \rightarrow E$ (continua?)

Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \swarrow$ no es exactamente lo mismo? $\forall x, y \in E$

$\Rightarrow f$ tiene un único punto fijo.

Dem:

¶iro

$\{d(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq \mathbb{R}, \quad \underline{\text{no vacío}} \quad (E \neq \emptyset)$

\nearrow acotado inferiormente por 0 (pues $d(x, y) \geq 0$)

$$\Rightarrow \exists a = \inf \{ d(x, f(x)) : x \in E \}$$

Veamos que a es mínimo

$$\text{ie: } \exists x_0 \in E \mid a = d(x_0, f(x_0))$$

Seguro

$$\exists (x_n)_n \subseteq E \mid d(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

(equiv. de sucesiones de ínfimo)

Como E es compacto

$$\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ subsuc. de } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

convergente a $x_0 \in E$

$$\Rightarrow d(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \xrightarrow{\text{por ser subsuc. de convergente a } a} a$$

$\downarrow f$ continua y Ej 12 - P3

$$d(x_0, f(x_0))$$

$$\Rightarrow d(x_0, f(x_0)) = a$$

Si $a = 0$:

$$\Rightarrow f(x_0) = x_0 \leftarrow x_0 \text{ es PF.}$$

Si $a > 0$:

$$\Rightarrow d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = a$$

$$\text{Por T6. : } d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Ab5! pues a era el ínfimo.

$$\therefore a = 0 \quad \checkmark$$

Unicidad : como antes.

QED

Resumen

Teo. Punto Fijo

[1] en. **completo** + contracción

[2] en. **compacto** + $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$

↑ por qué en las
contracciones el α
está del lado derecho
de $<$?

$$a < \alpha \cdot b$$

Si encuentro α muy chiquito

\Rightarrow todos los más grandes sirven

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

Si $\alpha = 1$

$$a < b$$

Si $\alpha = 0,5$

$$a < \frac{b}{2}$$

se vuelve más restrictivo.

Usos del TPF:

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales:

Sea I es un intervalo en \mathbb{R} y $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en la variable x . Esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in I$. Sea $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

Entonces, existe un $r > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

tiene una única solución $x : [\tau - r, \tau + r] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 .

Recordemos que x es solución si y sólo si

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds.$$

es solución si y sólo si

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds.$$

$T(x)$
 $T(x)(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$
 $T(x) = x$

- Teorema de la función implícita.
- Aproximación de soluciones lineales.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$ Buscar soluciones $Ax=y$

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ / $Tx = (I-A)x+y$ si x es punto fijo

de $T \Rightarrow x = (I-A)x+y = x - Ax+y \Rightarrow Ax=y$.

Buscar cond / T sea contractiva.

$$\|Tx - T\bar{x}\| = \|(I-A)(x-\bar{x})\| \leq \|I-A\| \|x-\bar{x}\|$$

- Fractales....

Ejemplo:

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $|f(x) - f(y)| = |\sin(\xi)| |x-y| \leq |x-y|$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contractiva.

$$g'(x) = \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x) \leq 1$$

$$\text{si } g'(x) = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\sin(\cos(x)) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow \sin(\cos(x)) = 0 \Rightarrow g'(x) \neq 1$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1$$

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x-y| \leq \alpha |x-y|$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Afirmo: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

$$g(\cos(x_0)) = \cos(\cos(\cos(x_0))) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0) \text{ es un punto fijo.}$$

$$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0.$$



1	$\cos(\cos(x))$
2	$\cos(x)$
3	$\sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)$
4	$\cos(\cos(\cos(x)))$
5	$\cos(\cos(\cos(\cos(x))))$
6	$\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(x)))))$

