Sat. 24 Abr

4. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto *propio* de $\overline{B}(x,r)$.

(g) Probar que $\{y \in E : \ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

4a) Si $A = \{x\}$ es cerrado

$\Rightarrow A^c = E \setminus \{x\}$ es abierto

Sea $y \in A^c$ (para cada $y \in A^c$)

gvq

$\exists \varepsilon > 0 \,/\, B(y, \varepsilon) \subseteq A^c$

$\{z \in E : d(y,z) < \varepsilon\} \subseteq A^c$

Si tomo

$\varepsilon = d(x,y)$

$\Rightarrow B(y,\varepsilon) = \{\underbrace{z \in E}_{z \in E \setminus \{x\} \text{ pues } y \neq x \,\wedge\, d(y,z) < d(y,x)} : d(y,z) < d(x,y)\}$

$\Rightarrow B(y,\varepsilon) \subseteq A^c$

$\therefore$ A^c es abierto

$\Rightarrow$ $\{x\}$ es cerrado.