

Sat 22 May

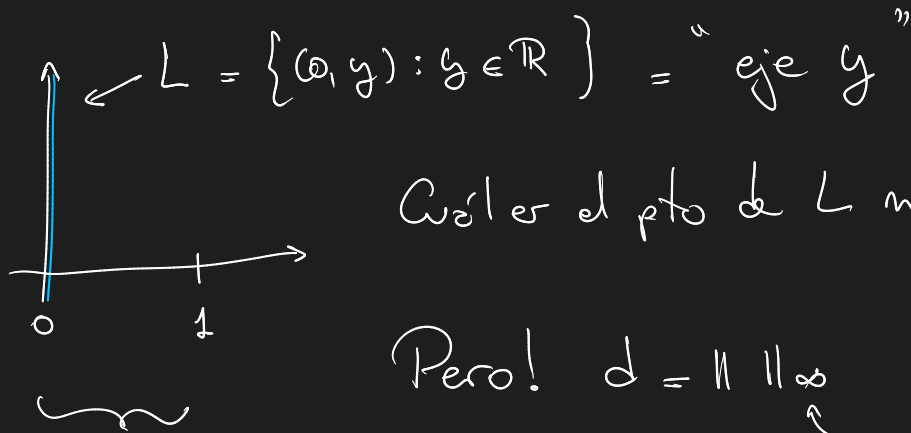
0000

Espacios de Hilbert

(con producto interno \langle, \rangle)

"Hay normas más naturales que otras"

ej) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$



¿Cuál es el pto de L más cercano a $(1, 0)$?

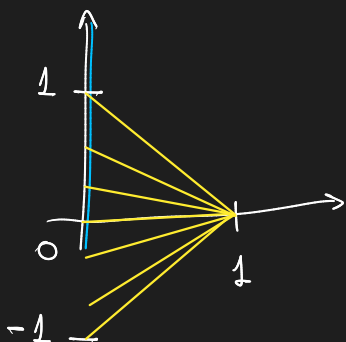
Pero! $d = \|\cdot\|_\infty$

$$\|(1, 0) - (0, 0)\|_\infty = \max\{1, 0\} = 1$$

$$\|(1, 0) - (0, y)\|_\infty = \max\{1, |y|\} \geq 1$$

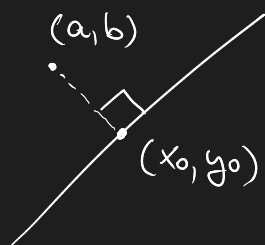
Veamos que para $|y| \leq 1$

$$\|(1, 0) - (0, \frac{1}{2})\|_\infty = \max\{1, \frac{1}{2}\} = 1$$



} Todo $[-1, 1]$ dista 1 del $(1, 0)$

Esto no pasa con $\|\cdot\|_2$:



Siempre \exists un pto de la recta más cercano a (a,b)

Pues

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \langle (x,y), (x,y) \rangle^{1/2} \\ &= (x^2 + y^2)^{1/2}\end{aligned}$$

En \mathbb{R}^n

$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

$$\|u\|_2 = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

Definición

Sea H espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un producto interno sobre H es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades.

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$. $\in \mathbb{R}$ $\in H$
- (2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $x, y, z \in H$.
- (3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in H$. \leftarrow Simetría (en \mathbb{C} es distinto)

Propiedades

Dem: uso (3) y luego a (2)

$$\bullet \langle z, \alpha x + \beta y \rangle \stackrel{\downarrow}{=} \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle$$

• Si $x, y \in H$ cumplen:

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \forall z \in H$$

$$\Rightarrow x = y$$

Dem :

$$\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = 0$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \langle x - y, z - z \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x - y, 0 \rangle = 0$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

□

El par $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se llama **espacio con producto interno**.

? y la distancia?

Ejemplos:

① EN \mathbb{R}^n : $\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$
 $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

② $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ INVERSIBLE.

$$(x, y)_A = \langle Ax, Ay \rangle$$

↓
P.I. de ①

EO: VER QUE ES P.I.

Ejemplos:

$$(3) \ C[0,1], \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Es un P.I.

← de la práctica.

$$(4) \text{ En } \ell^2 = \left\{ a = (a_n)_n \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \right\}$$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots$$

↳ $a, b \in \ell^2 \Rightarrow$ la serie converge.

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces:

(1) $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ para todo $x, y \in H$. ← Desigualdad

(2) La función $\| \cdot \| : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

de Cauchy-Schwarz

es una norma sobre H .

Ejercicio: $\langle 0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ H & H \end{matrix}$

DEM (1): $x=0$:

$$\underline{\langle 0, y \rangle^2 = 0}$$

$$\underline{\langle 0, 0 \rangle \langle y, y \rangle = 0}$$

L470.

$$\underline{x \neq 0} \quad \boxed{4\langle x, y \rangle^2 \leq 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \quad \text{Para } t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{0 \leq \langle tx - y, tx - y \rangle} = t^2 \langle x, x \rangle - t \langle x, y \rangle - t \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

$$= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{a > 0} t^2 - \underbrace{2 \langle x, y \rangle}_{b} t + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{c} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

 CUADRADO < 0 .

\Rightarrow la quad. tiene 0 o 1 raíz real.

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow 4\langle x, y \rangle^2 \leq 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \checkmark$$

② $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ ES UNA NORMA.

EXERCICIO. (SUG: p/ TRIANGULAR

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Definición

Sea E espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una función

$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ es una **norma** si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (desigualdad Δ)

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

$$1) \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \checkmark$$

\uparrow
por di. en $2\|x\|\|y\| > 0$

$$2) \quad \| \lambda x \| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2}$$

CA

$$\langle \lambda \cdot x, \lambda x \rangle = \lambda \cdot \langle x, \lambda x \rangle$$

$$= \lambda^2 \cdot \langle x, x \rangle$$

$$= \left(\lambda^2 \cdot \langle x, x \rangle \right)^{1/2}$$

$$= |\lambda| \langle x, x \rangle^{1/2} \quad \checkmark$$

○ bs

$$C-5: \quad \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

\Rightarrow Cauchy - Schwartz \swarrow not sure.

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Llemamos Norma induce a

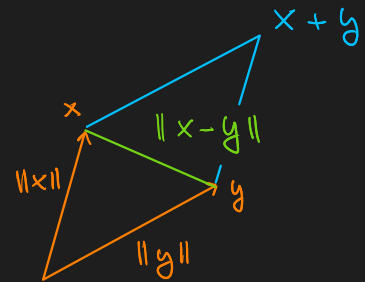
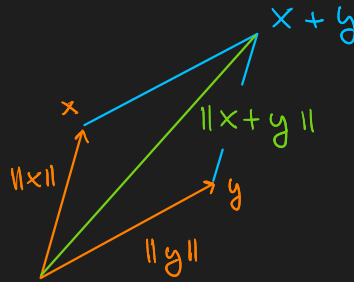
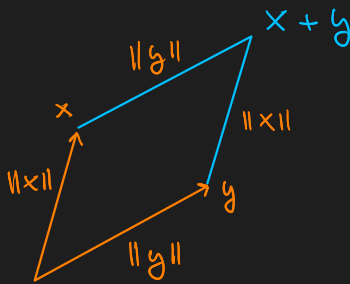
- $\bullet \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

Identidad del paralelogramo

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo $x, y \in H$.



Ejercicio (GUIA)

Si una norma
cumple (*)

\Rightarrow ESTA DADA
POR UN P.I.

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y fijemos $v \in H$. Entonces la función $\gamma_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada sobre H .

Además, vale que $\|\gamma_v\| = \|v\|$.

Norma de
operador

Norma de vector

Se define la **norma del operador** T como la constante de Lipschitz de T :

$$\|T\| = \min \{ M \in \mathbb{R}_0^+ : \|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X \}$$

Ej:

$$v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \left\| \underset{\substack{\in \\ \mathbb{R}^7}}{x}, \underset{\substack{\in \\ \mathbb{R}^7}}{v} \right\| = \|v\| = \sqrt{7}$$

? ó

$$\forall x \in \mathbb{R}^7$$

?

γ_v es Lineal:

γ_v LINEAL:

$$\begin{aligned} \gamma_v(x+y) &= \langle x+y, v \rangle = \\ &= \langle x, v \rangle + \langle y, v \rangle \\ &= \gamma_v(x) + \gamma_v(y) \\ \gamma_v(\lambda x) &= \langle \lambda x, v \rangle = \lambda \langle x, v \rangle \\ &= \lambda \gamma_v(x) \end{aligned}$$

✓

γ_v es acotado:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\gamma_v(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \|v\| = \|v\|$$

$\therefore \gamma_v$ es acotado y $\|\gamma_v\| \leq \|v\|$.

EXERCICIO: ver que $\|\gamma_v\| \geq \|v\|$ (sug: $v \neq 0$ calcular $\gamma_v(v)$)

→ $\gamma_v(v) = \langle v, v \rangle$

$$\| \gamma_v \| \stackrel{?}{\geq} \| v \|$$

S: $v = \vec{0}$:

$$\Rightarrow \gamma_{\vec{0}}(\vec{0}) = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0 = \|\vec{0}\| \quad \checkmark$$

Si $v \neq \vec{0}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) &= \left\langle v, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|v\|} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{= \|v\|^2} \\ &= \frac{\|v\|^2}{\|v\|} \end{aligned}$$

$$\gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left\| \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1$$

$$\text{y } \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$$

?

Cómo probar esto?

$$\begin{aligned} x \in H, & \rightarrow \gamma_v(x) = \langle x, \underline{v} \rangle. \\ \left[\begin{array}{l} \|\gamma_v\| \leq \|v\| \quad (c-s) \\ ES: \|\gamma_v\| \geq \|v\| \end{array} \right] & \Rightarrow \|\gamma_v\| = \|v\| \\ \left[\begin{array}{l} \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup \{c / \\ \|Tx\| \leq c\|x\| \forall x \in E \} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene definida una norma y, por lo tanto, una distancia.

$\underbrace{H \text{ con } \rho_I}_{\sim} \rightsquigarrow H \text{ normado} \rightsquigarrow \underline{H \text{ métrico}}$

Definición

Un espacio con producto interno que es completo con la norma inducida se llama **espacio de Hilbert**.

Espacio de Hilbert \rightarrow Espacio de Banach
(con norma dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$)



David Hilbert
(1862-1943)

Teorema de representación de Riesz

Sea H un espacio de Hilbert. Si $\gamma : H \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal continua, entonces existe un único $v \in H$ tal que

$$\gamma(x) = \langle x, v \rangle$$

para todo $x \in H$. Además, vale que $\|\gamma\| = \|v\|$.



Frigyes Riesz
(1880-1956)

(continuar)
Todas las funciones lineales γ son equivalentes a hacer
prod. interno con un vector fijo.

EXISTENCIA : NO LA VEMOS
UNICIDAD : EJERCICIO.

Dem: (mía)

Sean v_1 y $v_2 \in H$ /

$$\gamma_{v_1}(x) = \langle x, v_1 \rangle \quad \forall x \in H$$

$$\gamma_{v_2}(x) = \langle x, v_2 \rangle \quad \forall x \in H$$

y además vale

$$\|\gamma_{v_1}\| = \|v_1\|$$

$$\|\gamma_{v_2}\| = \|v_2\|$$

?