

Sucesiones y Series de Funciones II

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{continuas y acotadas sobre } X\}$$

y

$$B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{acotadas sobre } X\}$$

ambos con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposición

$(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ y $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ son espacios normados completos, es decir Banach.

$$(f_n)_n \subseteq C_b(X) \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$(f_n)_n$ es de Cauchy c/ $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow (f_n)_n$ es uniformemente de Cauchy. $\Rightarrow \exists f : X \rightarrow \mathbb{R} / f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

• f es continua: Rta si x_0 lim unif. de continuas es continua

• f es acot: $\exists \epsilon > 0 \exists n_0 / \forall n > n_0, \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq M_{n_0}} \leq \epsilon + M_{n_0} \quad \forall x \Rightarrow f \text{ acot.}$$

$\Rightarrow f \in C_b(X) \wedge f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \quad \therefore C_b(X) \text{ completo.}$

Página siguiente

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach.

Veamos otros espacios de Banach:

Sucesión de las Sumas Parciales

Sea E esp. de Banach

y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión

Definimos

$$S_N = \sum_{n=1}^N x_n$$

↑ "N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ "

con

$$(S_N)_N \subset E$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la **sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$** .

Definición

Decimos que **la serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge cuando existe el límite $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$.
A ese límite, que es un elemento de E , lo llamamos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Notar que es creciente si los x_n son ≥ 0

Observación:

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \|S_N - S_M\|_E < \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_0.$$

$$\equiv \left\| \sum_{m=N+1}^M x_m \right\| < \varepsilon$$

$$\sum_{m=N+1}^M x_m = \sum_{m=1}^M x_m - \sum_{m=1}^N x_m$$

$$\forall N, M \geq N_0.$$

Recordemos...

En \mathbb{R} , $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right| < \infty$ convergente absoluta.

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Serie de números reales!

Proposición

Sea E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, entonces converge.

Def: qvq $\sum_{u=1}^{\infty} x_u$ conv en E es decir qvq
 $S_N = \sum_{u=1}^N x_u \Rightarrow (S_N)_N$ es de Cauchy en E
 $\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{u=N+1}^M x_u \right\| \leq \boxed{\sum_{u=N+1}^M \|x_u\|}$
 $\sum_{u=1}^M \|x_u\| - \sum_{u=1}^N \|x_u\|$

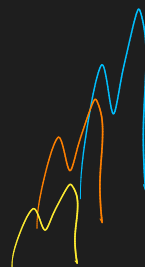
↑
 ↑
 Convergencia Absolutamente

Como $\sum_{u=1}^{\infty} \|x_u\|$ conv $\Rightarrow \left(\sum_{u=1}^N \|x_u\|\right)_N$ es de Cauchy en \mathbb{R}
 Dado $\varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} / N, M \geq N_0 \Rightarrow$
 $\sum_{u=N+1}^M \|x_u\| < \varepsilon$
 $\Rightarrow \|S_M - S_N\| \leq \sum_{u=N+1}^M \|x_u\| < \varepsilon$ si $N, M \geq N_0$.
 $\therefore (S_N)_N$ es de Cauchy en E y \therefore converge.



< 20 / 25 >

Series de Funciones



Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$.

E_f :
 $\mathcal{C}_b(X)$, $\mathcal{B}(X)$
 ↑ f continua y acotada
 ↙ f acotada

Para cada N , tenemos la función:

"Suma Parcial"

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntual o uniformemente) en X si la sucesión de funciones $(S_N)_N$ converge (puntual o uniformemente) en X .

Si tenemos la suerte de que las f_n

sean:

- Continuas y Acotadas
- Acotadas
- Están definidas en un E' compacto

\Rightarrow Podemos usar herramientas de espacios de Banach

Criterio de Weierstrass $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en \mathbb{R} .

Dem:

- Notar que como todos los $|f_n(x)| \leq C_n$ ↙ todos acotados!

$$\Rightarrow f_n \in \mathcal{B}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↑
espacio de Banach de funciones acotadas

- Notar además que

$$S_N = \sum_{n=1}^N f_n \leq \sum_{n=1}^N C_n$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N f_n \in \mathcal{B}(X)$$

Ahora, qvq

$(S_N)_N$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$

y de este espacio, sé que

Convergencia en $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ Convergencia uniforme de funciones

1°) Como $|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X$

$$\Rightarrow \|f_n(x)\|_\infty \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• Si miro

$$\|S_M - S_N\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^M f_n(x) \right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^M \|f_n(x)\|_\infty$$

$$\textcircled{\star} \leq \sum_{n=N+1}^M C_n$$

?
Converge porque
 $M-N$ es finito?

Como $\sum_{n=N+1}^M C_n$ converge (en \mathbb{R})

$\Rightarrow \left(\sum_{n=N+1}^M C_n \right)_N$ es de Cauchy wat?

• sea:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid N, M \geq N_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^M C_n < \varepsilon$$

← A partir de un punto la cota
se hace pequeña? esto
es cond. sobre las f

que se da para que la suma converja?
de las cotas

$\Rightarrow (S_N)_N$ es de Cauchy en $\mathcal{B}(X)$



donde $S_N = \sum_{n=1}^N f_n$

$\Rightarrow S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{?} f \in \mathcal{B}(X)$

$\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformemente a f

$$\left(\sum f_n \right) \Rightarrow f$$

y además

f es continua

Falta mostrar Convergencia Absoluta

Pero ya fué hecho en resultando

$$\sum_{n=N+1}^M \|f_n(x)\|_{\infty} \leq \sum_{n=N+1}^M C_n < \infty$$

Si \uparrow converge

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^M |f_n(x)| < \infty$$

Converge absolutamente.



Micro resumen:

Primero vimos que en un espacio de Banach, la norma infinito era exactamente la convergencia uniforme.

Luego vimos series y sucesiones de funciones, en el contexto de espacios de Banach donde vale la propiedad anterior.

