Dani:

Sun, May 2

Compacidad II

Repaso:

Definición
Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Proposición
Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel
Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Observación
Un conjunto infinito con la métrica discreta es cerrado y acotado pero no compacto.

Ejemplo:

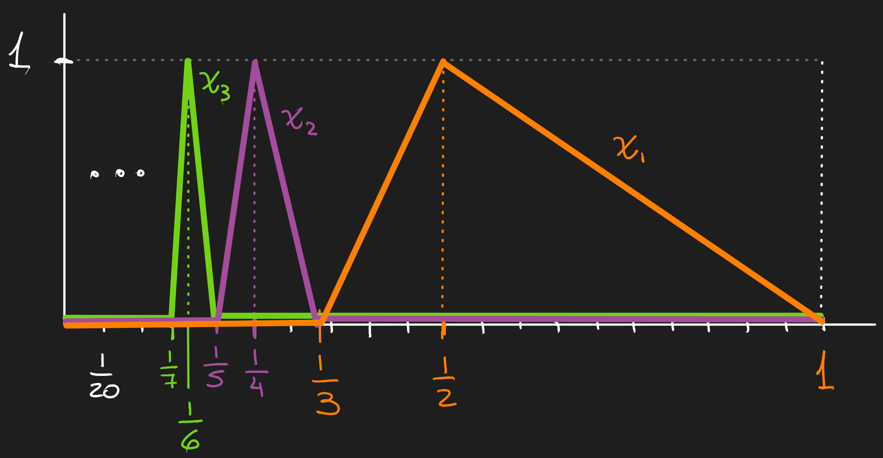
- En $\mathcal{C}([0,1])$, cerrado y acotado no implica compacto
- Usamos d_∞ (para d_1: ejercicio)

$A = \overline{B}(0, 1)$ ← es cerrado (por ser bola CERRADA)

función $\equiv 0$ y acotado (por ser BOLA)

Veamos que no es compacto

(idea, sin cuentas)



$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{en } \frac{1}{2n} \\ \text{"en el medio es lineal"} & \\ 0 & \text{en } \left[0, \frac{1}{2n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{2n-1}, 1\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) = 1 \quad \forall n, m$ (pues los triángulos no se solapan)

y como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$

y encontré que no es convergente $\left(d(x_n, x_m) \to 1 \right)$

$\Rightarrow (x_n)$ no tiene subsuc. convergente.

$\Rightarrow A$ no es compacto.

Obs:

- Notar que este conjunto se comporta como la métrica discreta

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo $A \subset K$ infinito tiene un punto de acumulación en K.

$\Rightarrow)$ $A \subset K$ INFINITO. $\Rightarrow \exists\, (y_n)_n \subset A$ sucesión de elementos distintos de A. Como $\underline{(y_n)_n} \subset A \subset \underbrace{K}_{\text{COMPACTO}}$

$\Rightarrow \exists\, (y_{n_k})$ subsuc. conv. a $y \in K$.

$\underbrace{(y_{n_k}) \subset A}$, son todos $\underline{\text{distintos}}$, $\underline{y_{n_k}} \to \underline{y}$

$\Rightarrow \underset{\overset{\uparrow}{K}}{y}$ es pto de ac. de A

$\Leftarrow)$ q.v.q. K COMPACTO.

$\underbrace{(x_n)_n \subset K}$. $\quad A = \{\underline{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

- Si A es FINITO, $\exists$ algún valor de la suc. que se repite ∞ veces: $\exists\, x \in A \,/\, \underbrace{x_{n_k}} = \underline{x} \;\; \forall k$.

  $\exists\, (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

  $\Rightarrow (x_{n_k})_k$ es subsuc. CONV.

- Si A es INFINITO $\Rightarrow \exists\, x \in K$ pto de ac. de $A \xRightarrow[\text{EJ}]{} \exists\, (x_{n_k})_k$ subsuc. que converge a x.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición

Un *cubrimiento por abiertos* de K es una familia $(V_i)_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de E tal que

$$K \subset \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Definición

Cuando existen $i_1, i_2, \ldots, i_N \in I$ tales que

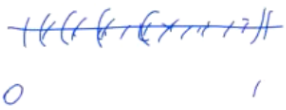
$$K \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_N}$$

decimos que $(V_{i_k})_{k=1}^N$ es un *subcubrimiento finito* de $(V_i)_{i\in I}$.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

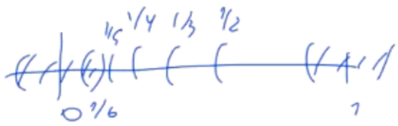
- $(0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n, 1)$



$\{(1/n, 1)\}_n$ NO admite subcub. finito.

- $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n, 1) \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{NO}} \cup \underbrace{\{1\}}_{\text{AB.}}$ NO CUB x AB.

- $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n, 1) \cup (-\delta, \delta) \cup (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow$ CUB x AB



$n_0 \,/\, 1/n_0 < \delta$

$[0,1] = \bigcup_{1\le n\le n_0} (1/n, 1) \cup (-\delta,\delta) \cup (1-\delta, 1+\delta)$

ejemplos particulares.

Teorema
Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

$\Leftarrow)$ Sea $A \subset K$ INFINITO y VEAMOS QUE TIENE UN PTO DE AC. EN K.

SUP. QUE NO: dado $x \in K$, $x \notin A' \Rightarrow \exists r_x /$ $B(x, r_x) \cap A$ es FINITO.

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x) \underset{HIP}{\Longrightarrow} \exists x_1, \dots, x_N /$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, r_{x_k}) \Rightarrow A = K \cap A \subset \bigcup_{k=1}^{N} \underbrace{(B(x_k, r_{x_k}) \cap A)}_{\text{FINITO}}$$

$\bigcup$ FINITA — FINITO ABS

$\therefore A' \neq \emptyset$ $\quad \therefore K$ COMP.

Teorema
Sean (E, d), (E', d') e.m. y sea $f : E \to E'$ continua. Si $K \subset E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E'.

DEM: "FUNC. CONT MANDAN COMPACTOS EN COMPACTOS".
QVQ $f(K)$ COMPACTO.

Sea $(y_n)_n \subset f(K)$. P/c/ $n \in \mathbb{N}$. $\exists x_n \in K / y_n = f(x_n)$

$(x_n)_n \subset K \underset{K \text{ COMP}}{\Longrightarrow}$ TIENE SUBSUC $(x_{n_k})_k$ conv. a $x \in K$.

$\underset{f \text{ CONT}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \to f(x) \in f(K) \Rightarrow \exists (y_{n_k})$ conv. a $f(x) \in f(K)$

$\therefore f(K)$ es compacto

Corolario

Sea $K \subset E$ compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,

- f es acotada en K: existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$.
- f alcanza su máximo y su mínimo en K.

DEM: K comp $\underset{\text{TEO}}{\Rightarrow}$ $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es acot. en $\mathbb{R}$

$\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $\exists\, c \,/\, |f(x)| \leq c \quad \forall x \in K$

· $s = \sup \{ f(x) : x \in K \}$ (acot.) $\Rightarrow$ $\exists (x_n)_n \subset K$. $f(x_n) \to s$

K compacto, $\exists (x_{n_k})_k$ conv. a $x_0 \in K$.

$s \leftarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0) \Rightarrow \boxed{s = f(x_0)} \Rightarrow s$ es MÁX.

Teorema

Sean (E, d), (E', d') e.m., y sea $f : E \to E'$. Si f es continua y E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

DEM: Sup f NO es U.C. $\Rightarrow$ $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \subset E$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$

tales que $d(x_n, y_n) \to 0$, $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

$(x_n) \subset E$ compacto $\Rightarrow$ $\exists (x_{n_k})_k$ conv a $x_0 \in E$.

$(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ COMPACTO $\Rightarrow$ $\exists (y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ conv. a $y_0 \in E$.

$(x_{n_{k_j}})_j$ es subsuc. de $(x_{n_k})_k$ $\Rightarrow$ $(x_{n_{k_j}})_j$ CONV a x_0.

$x_{n_{k_j}} \to x_0$, $y_{n_{k_j}} \to y_0$.

$d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to 0$ (subsuc. de una que tiende a 0)

$d'(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \geq \varepsilon_0$.

$0 \leftarrow d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to d(x_0, y_0) \Rightarrow d(x_0, y_0) = 0$

$x_{n_{k_j}} \to x_0$, $y_{n_{k_j}} \to y_0$ $\Rightarrow \boxed{x_0 = y_0}$

$\varepsilon_0 \leq d'(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \to d'(f(x_0), f(y_0))$

$x_{n_{k_j}} \to x_0$, $y_{n_{k_j}} \to y_0$

f cont $\to$ $f(x_{n_{k_j}}) \to f(x_0)$, $f(y_{n_{k_j}}) \to f(y_0)$

$d'(f(y_0), f(y_0)) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0$

ABS

$0 \quad \varepsilon_0$

es unif continua