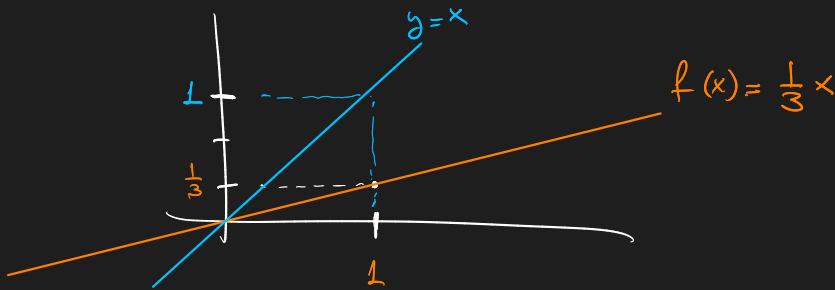


Teo. de Punto Fijo

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de \mathbb{R} . Sea $f : E \rightarrow E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?



$$d(f(x), f(y)) \stackrel{?}{\leq} \alpha \cdot d(x, y) \quad \text{con } \alpha \in (0, 1)$$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3} |x - y|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(x, y)$$

$$\uparrow \alpha = \frac{1}{3} \in (0, 1) \checkmark$$

$\therefore f$ es contractiva.

$$\text{Sea } \hat{E} = \mathbb{R}$$

Por T. de Pto Fijo de Banach,

Como $\hat{E} = \mathbb{R}$ es completo

y f es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo en \hat{E}

¿
Preg. si el
proced. está
bien.

dedo por $x=0$,

pues $f(0) = 0$.

Ahora, si quito este $x=0$ de \hat{E} ,

termino con el E del enunciado,

(que no es completo pues $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\therefore f$ no puede tener punto fijo, pues de tenerlo, sería $x=0$.



Otra forma:

Si tuviera p.f.

$$f(x) = \frac{1}{3}x \stackrel{\downarrow}{=} x \Leftrightarrow x=0$$

y listo ☺

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

Sabemos que si

$$|f'(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ es lipshitz con constante k

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Como $k \in (0, 1)$

f es contracción.

□

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \rightarrow E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \rightarrow E$ a la función $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n veces). Probar:

- (a) Si $x \in E$ es punto fijo de f , entonces es punto fijo de f^n .
 (b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E .
 Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n , entonces $f(x)$ también lo es.
 (c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

$$a) \quad f^1(x) : f(x) = x$$

$$f^2(x) : f(f(x)) = f(x) = x$$

||

$$f(f^1(x)) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$f^3(x) : f(f^2(x)) = \dots$$

$$CB : n=1) \quad f^1(x) : f(x) = x \quad \checkmark$$

$$PI) \quad \text{Sea } f^n(x) = x$$

$$q.v.g \quad f^{n+1}(x) = x$$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \underset{H.I.}{=} f(x) \underset{\substack{f \text{ tiene} \\ \text{pto fijo}}}{=} x \quad \checkmark$$

b) Comienzo por sugencia

Si $x \in E$ es punto fijo de f^n

$\stackrel{?}{\Rightarrow} f(x)$ es punto fijo de f^n

Por \Rightarrow si $f^n(x) = x$

$$\Rightarrow f^m(x) = x \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^1(x) = f(x) = x \quad \checkmark$$

Por Teorema

Como E es completo

y $\exists n / f^n(x)$ es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo para $f^n(x)$

o sea

$$\exists ! x \in E / f^n(x) = x$$

Deantes, probé que si

$$f^n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$$


$\therefore x$ es el único punto fijo de $f(x)$.

$$c) \quad f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$|f'(x)| \stackrel{?}{\leq} k \in (0, 1)$$

$$|\sin(x)| \stackrel{?}{\leq} k \in (0, 1) \quad \underline{\text{NO!}}$$

pues $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ 

$$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \underbrace{f}_{\cos(x)} \text{ no es contractiva}$$

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $|f(x) - f(y)| = |\sin(\xi)| |x - y| \stackrel{\leq 1}{\leq}$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contractiva.

$g'(x) = \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x) \leq 1$

Si $g'(x) = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $\sin(\cos(x)) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{\pi}{2}$ (imposible)

Si $g'(x) = -1 \Rightarrow \sin(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
 $\sin(\cos(x)) = -1 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{\pi}{2}$ (imposible)

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq \alpha |x - y|$ con $\alpha = \max_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| < 1$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Afirmamos: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

$g(\cos(x_0)) = \cos(\cos(\cos(x_0))) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$ es un punto fijo.

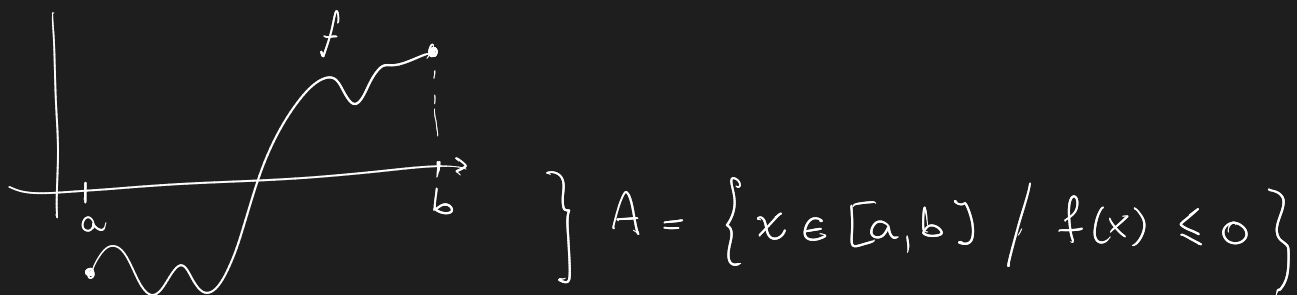
$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$. \square

17. Probar el Teorema de Bolzano: "Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o viceversa), existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$ ".

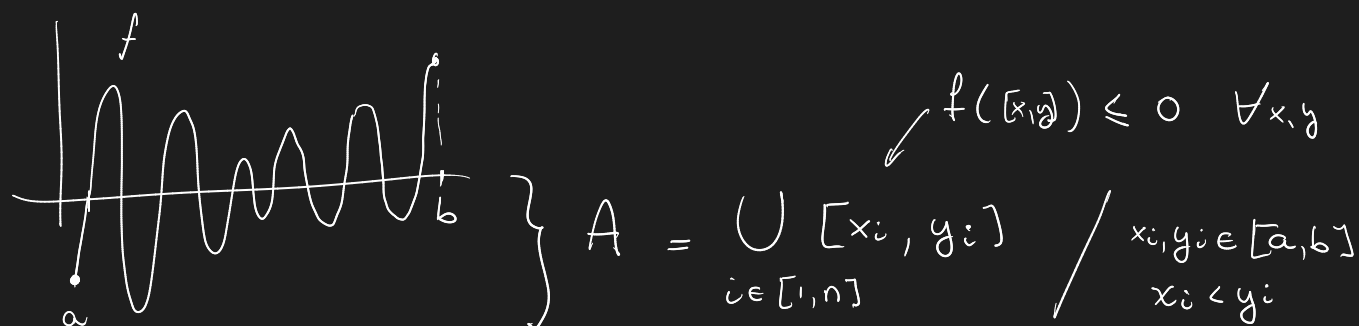
Sugerencia: Considerar $A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$, y ver que es no vacío y acotado superiormente.

• Tip: No se usa punto fijo.

Bolzano se usa más abajo.



También podría ser



Sugerencias:

• $A \neq \emptyset$

Como $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

y $f(a) < 0$

$\Rightarrow a \in A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$

$\Rightarrow A$ tiene al menos 1 elemento: a

\therefore es no vacío.

χ_{epa} : más aún:

Como f es continua de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(a) < 0,$$

$\Rightarrow f(a)$ no es punto aislado

$\Rightarrow \forall U \subseteq [a, b]$ entorno de a ,

$$\exists y \in [a, b], y \neq a / y \in U^\circ$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(a, b]}$

\nwarrow siempre hay otro elemento en cualquier entorno de a

con bolas

$\forall r > 0 / B(a, r) \cap [a, b]$ es infinito.

$\therefore A$ es infinito.

• Es A acotado sup?

$[a, b] =: E$ es compacto

$\Rightarrow E$ tiene cota superior (time máx = b)

\therefore Si $A \subseteq E \Rightarrow A$ tiene cota superior

Pruebo el Teo:

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

con $f(a) < 0$

y $f(b) > 0$

$$\Rightarrow \exists c \in [a, b] / f(c) = 0$$

Notar que

$$A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$$

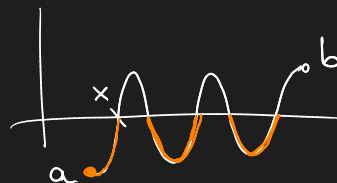
Si $\exists c \Rightarrow c \in A$

Rehago abajo

~~X~~ = $[a, x_0]$ * (podría ser una unión de varios intervalos)
 $[a, x] \cup [] \cup []$

$$\Rightarrow x_0 \in [a, x_0] \subset [a, b]$$

$$\text{con } x_0 < b$$



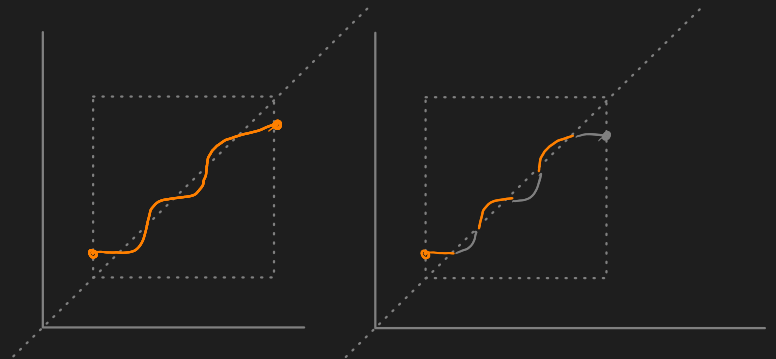
$$\Rightarrow \text{como } f(b) > 0$$

$$f(a) < 0$$

y f es continua

$$f(x_0) = 0$$

$$\vdots \\ c$$



~~X~~ $\therefore \exists c \in [a, b] / f(c) = 0$



De nuevo:

Llevo $c = \sup A$,

el cual existe pues $A \neq \emptyset$

y $A \subseteq [a, b]$ acotado

Hay 3 posibilidades:

• $f(c) < 0$:

$\Rightarrow c \in A$

y como f es continua en c

$\Rightarrow \exists r > 0 \mid \underbrace{B(c, r) \cap A}_{\substack{\text{todos con el mismo} \\ \text{signo } f(x) < 0 \\ \forall x \in \text{---}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{todos con el mismo} \\ \text{signo } f(x) < 0 \\ \forall x \in \text{---} \end{array} \right\}$

Pero entonces hay elementos en la bola
que son más grandes que c



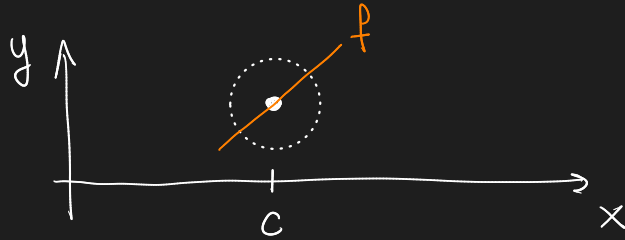
y c es supremo

Abs.

$\therefore f(c) \neq 0$

Caso $f(c) > 0$:

Similarmemente, como f es continua en c



hay todo un entorno a $f(c)$ también positivo

Entonces hay valores menores a c con imagen positiva

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in B(c, r)$$

Absurdo, pues los $x < c$ pertenecen a A

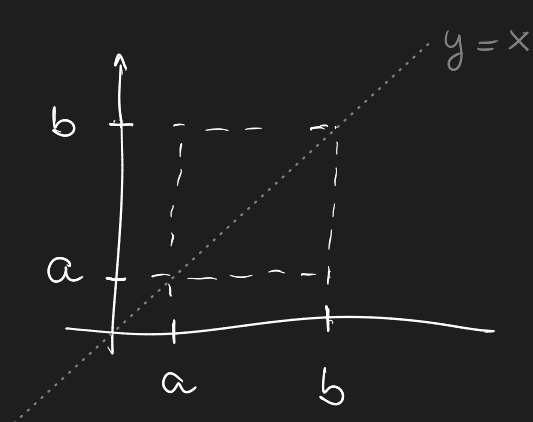
$$\therefore f(c) \neq 0$$

Finalmente

- $f(c) = 0$



18. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.



Sé que $\exists f(a) \in [a, b]$

$\exists f(b) \in [a, b]$

y como f es continua, el gráfico de la función irá de $f(a)$ a $f(b)$ cruzando la recta $y=x$ por algún

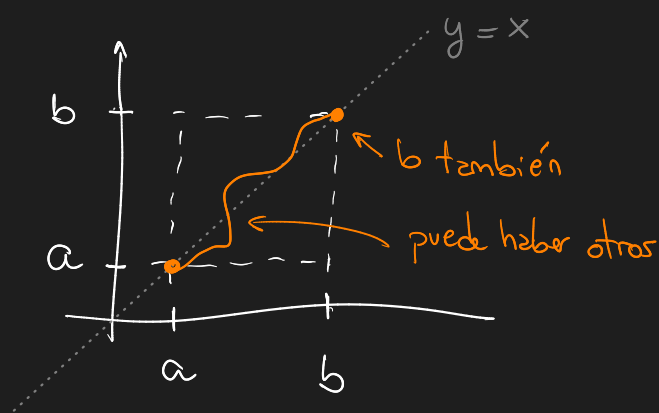
$c \in [a, b]$

• Si: $f(a) = a$

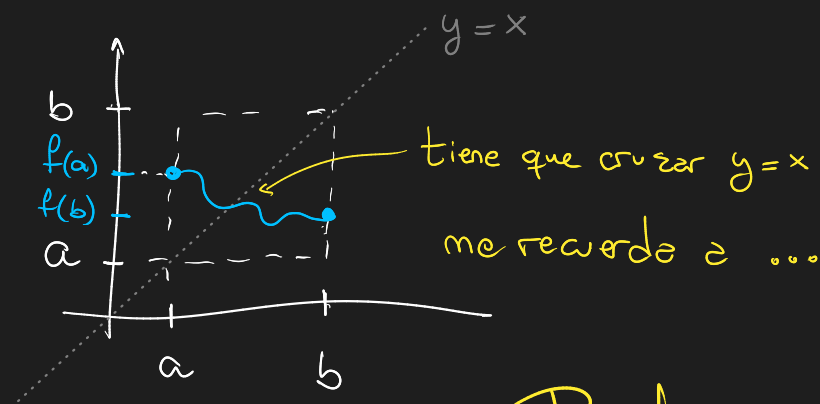
$\Rightarrow a$ es punto fijo de f ✓

Si: $f(b) = b$





$\Rightarrow b$ es punto fijo de f



• Si no, $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$



Bolzano!

1		$f(x) = \cos 3x + 3$
2		$y = x$
3		$g(x) = f(x) - x$
4		$\cos 3x + 3 = x$

Primero, definio

$$g(x) = f(x) - x \quad (\text{continua})$$

Como $f(a) > a$

y $f(b) < b$

$$\Rightarrow g(a) = f(a) - a > 0 \quad \text{estricto}$$

$$g(b) = f(b) - b < 0$$

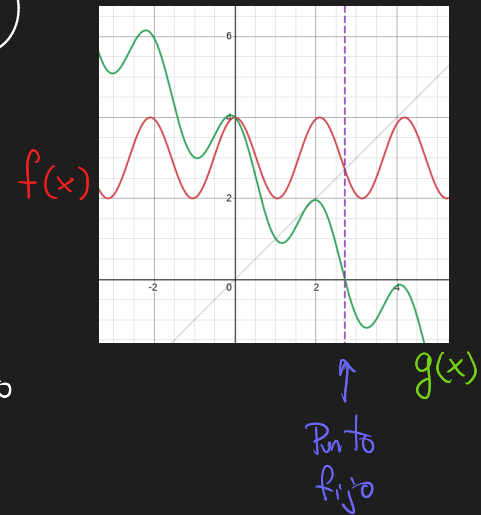
\Rightarrow Por Teorema de Bolzano

$$\exists c \in [a, b] / g(c) = 0$$

$$\Rightarrow g(c) = f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) = c$$

Q.E.D.



19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f: E \rightarrow E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

$$A = \{ x \in E \mid f(x) = x \}$$

$$? \vee ? \quad A \stackrel{?}{=} \bar{A}$$

$\bar{A} = A \Leftrightarrow$ Toda sucesión convergente,
converge a un elemento de A

? E es acotado pues f es continua
en E ?

- Sea $a \in \bar{A}$

$q \vee q$

si $a_n \in A$

y $a_n \rightarrow a \stackrel{?}{\Rightarrow} a \in A$

(si vale para todo)
 $a \in \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$

- Además sé que como

$$a_n \in A \Rightarrow a_n \text{ es punto fijo de } f$$

$$\Rightarrow f(a_n) = a_n =: \boxed{1}$$

y como f es continua

$$y \quad a_n \rightarrow a$$

$$\Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$$

$$\parallel \boxed{1}$$

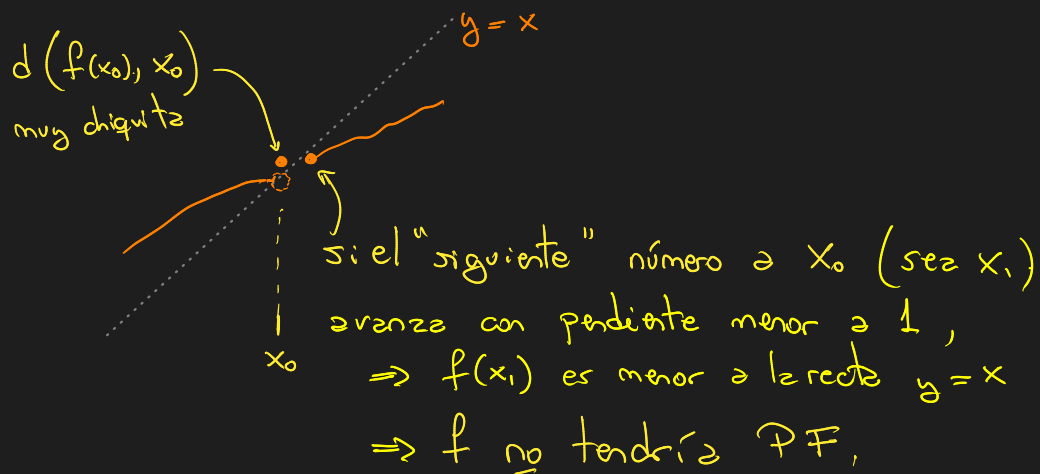
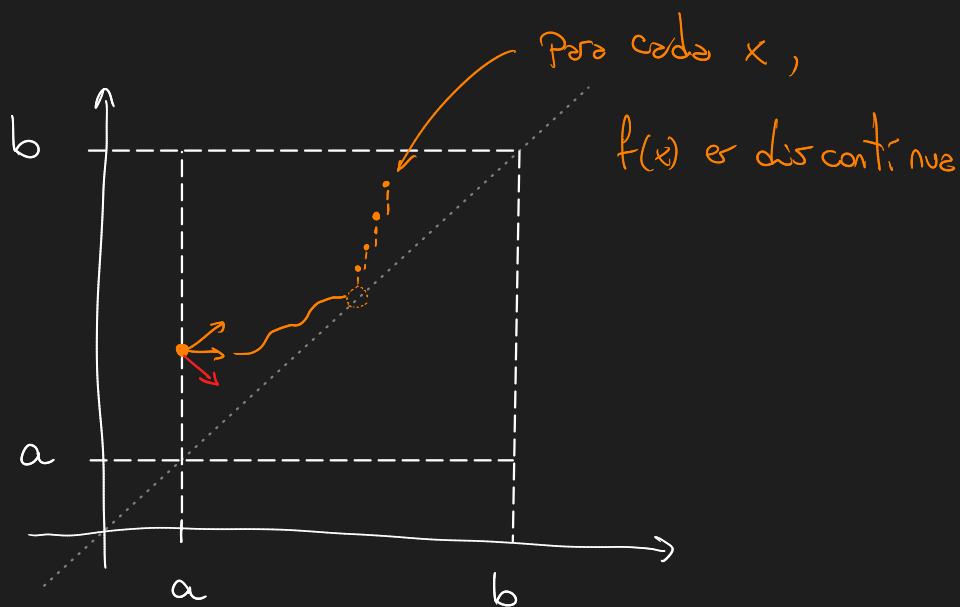
$$a_n \rightarrow a$$

$$\therefore f(a) = a$$

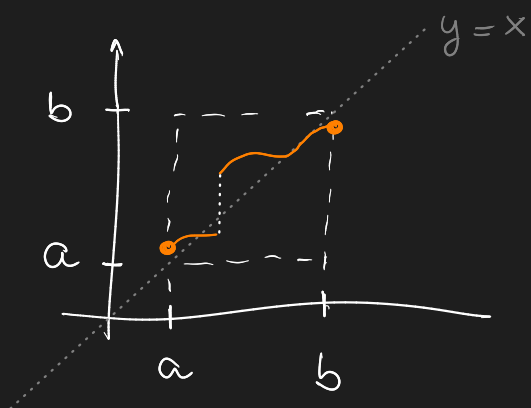
$$\Rightarrow a \in A$$

Finalmente

$$A = \overline{A}$$



20. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.



• Si $f(a) = a$

ó $f(b) = b$

$\Rightarrow f$ tiene P.F.

• Si no :

Como f es creciente

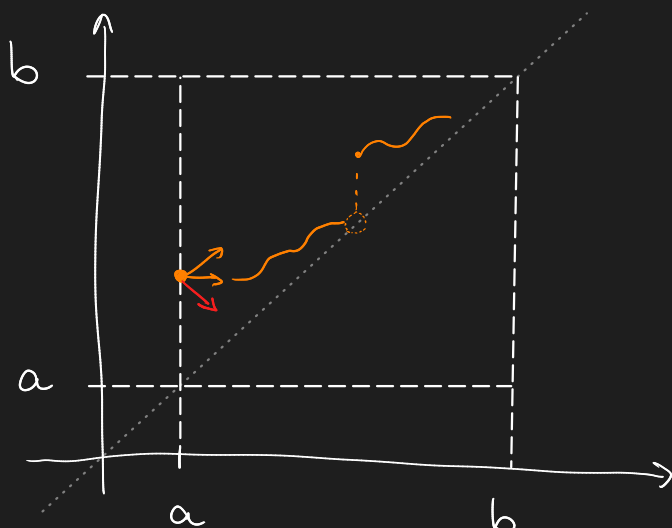
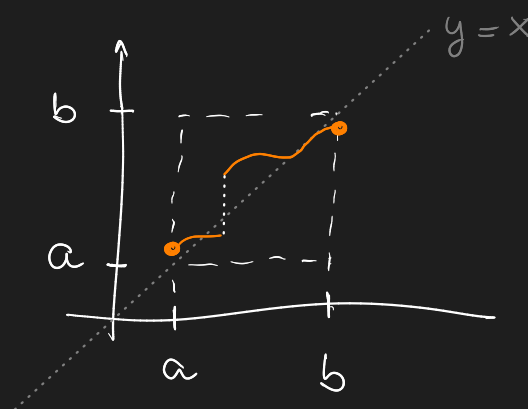
$$f(b) \geq f(a)$$

! Pero no sé si es continua

• Si f es continua

\Rightarrow ej. 18

• Si no es continua :

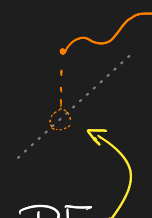


\Rightarrow Si cruza $x = y$ donde es continua

\Rightarrow ej. 18

\Rightarrow Si "cruza" $x = y$ en un punto donde f es discontinua

\Rightarrow ese punto no es P.F.



y como f siempre aumenta o se mantiene, y estar acotado por b

\Rightarrow solo puede cruzar $y = x$ en algún c

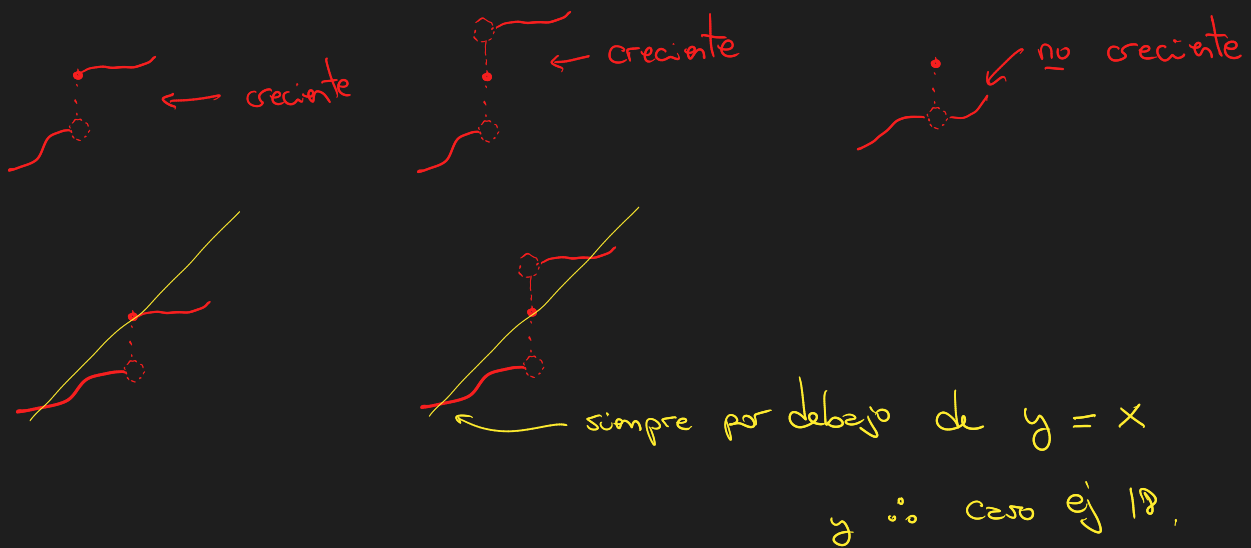
tal que $\forall r > 0, B(c, r) \cap [a, b]$ es infinito.

notar que: no puede ser punto aislado, ya que

$f(x)$ solo puede mantenerse o aumentar

y en ningún caso puede cruzar $y = x$

sin antes haberla cruzado con una porción de f continua:



\therefore no modifica en nada el resultado cambiar función continua (ej 18) por creciente (ej 20)

$\therefore f$ tiene punto fijo.



Victoria Paternostro

Hola! Esta buenísimo todo lo que pensaste. Pero estoy de acuerdo en que falta formalidad.

Va una sugerencia:

Consideremos el conjunto

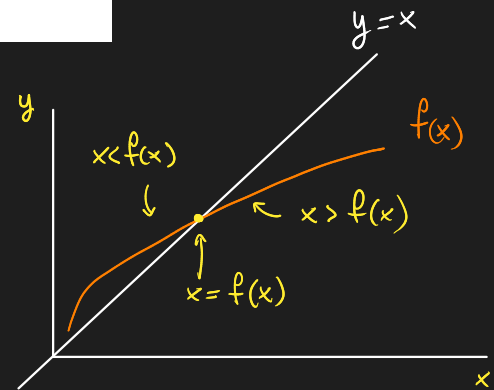
$\{x \in [a, b] : x \leq f(x)\}$. Seguro que es un conjunto no vacío (a pertenece) y es acotado porque está contenido en $[a, b]$. Yo diría que el supremo tiene que ser un punto fijo.



1

Seamos más formales

$$A = \{x \in [a, b] : x \leq f(x)\}$$



- $A \neq \emptyset$ puer $a \in A$
puer $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
puer f es creciente

- A es acotado ^{sup e inf.} puer $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
y $f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$
 $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
puer f es creciente.

$\therefore A$ tiene supremo $c = \sup A$

$\nexists \forall c \stackrel{?}{\in} A$.

Armo sucesiones que converjan a $c = \sup A$

Sé que $c \in \overline{A}$

Sea $(x_n) \subset A$, $x_n \rightarrow c$ (Como c es supremo,
 (x_n) se acerca siempre
por izquierda)

¿ $c \in A$?

Como

$$x_n \rightarrow c$$

y como f creciente

$$\dots \leq f(x_{n-1}) \leq f(x_n) \leq \dots \leq f(c)$$

• Como f continua en c

$$\text{Si } x_n \rightarrow c$$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c)$$

• Veamos que $c \neq f(c)$

$$\text{Si } c < f(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \mid \overset{\text{inclusión}}{B(c, r)} \subset A$$

$$\Rightarrow c + \frac{r}{2} \in B(c, r) \subset A$$

Pero c era supremo, y $c + \frac{r}{2} > c$

Abso!

$$\therefore c \neq f(c)$$

• Veamos que $c \neq f(c)$

$$\text{Si: } c > f(c)$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \mid B(c, r) \text{ est\u00e1 compuesto de elementos } > f(c)$$

$$\text{Pero } c - \frac{r}{2} \in B(c, r) \text{ y } \underline{\text{no}} \text{ es } > f(c)$$

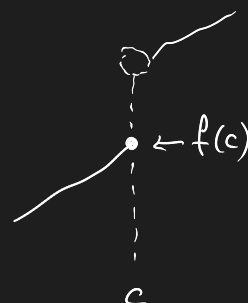
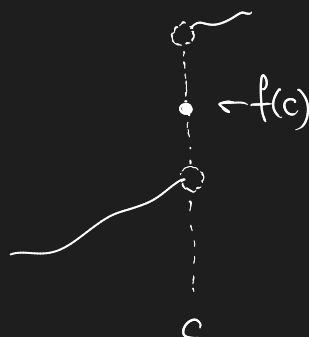
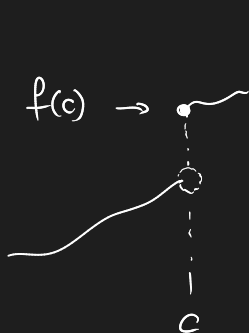
por est\u00e1 en A , por c era supremo

$$\therefore c \neq f(c)$$

Finalmente:

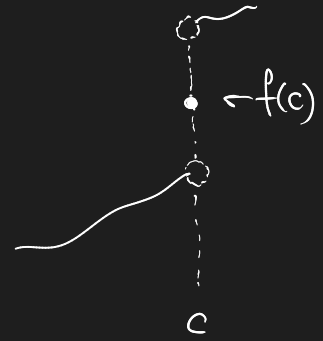
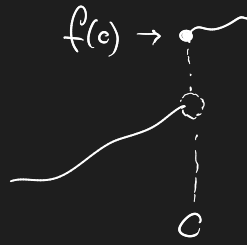
$$c = f(c) \quad \checkmark$$

• Caso f discontinua en c



Caso $f(c) > c$

$$c < f(c) < f(f(c))$$



\Rightarrow Como f creciente

$$\forall \varepsilon > 0, f(c) \leq f(c + \varepsilon)$$

\Rightarrow me gustaría decir que

$$c + \varepsilon < f(c + \varepsilon)$$

$$c < f(c)$$

$$c + \varepsilon < f(c) + \varepsilon$$


$$f(c + \varepsilon) < f(f(c) + \varepsilon)$$

para concluir que $c + \varepsilon$ está en A , y llegar a un absurdo

Caso $f(c) < c$

Como f creciente

$$\forall \varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0, f(c - \varepsilon) \leq f(c) \leq f(c + \tilde{\varepsilon})$$


Daniel Carando
12:10 PM

Hola! Si tenemos los x_n en A que tienden a c , como f es creciente podemos afirmar lo siguiente:
 $x_n \leq f(x_n) \leq f(c)$.
 Fijate si a partir de esto podés demostrar una de las desigualdades. Ah, no hacía falta pedir que los x_n formen una sucesión creciente.

Como verás, acá no importa si la f es continua o no en c (ni qué tipo de discontinuidad tiene).

Con respecto a si A es unión de intervalos, no es necesariamente cierto aunque f fuera continua. Por ejemplo, f podrá estar siempre por abajo de la recta $y = x$ y tocarla sólo en contables puntos, pero sin cruzarla (podés pensar en una función tipo serrucho). En ese caso A estaría formado por esos puntos de contacto y no sería unión de intervalos.

ahora sí !!



• Si $c < f(c)$:

$$\text{Si } c < f(c) \Rightarrow c \in A$$

y si aplico f , como es creciente, mantiene desig.

$$f(c) < f(f(c)) \Rightarrow f(c) \in A$$

Pero por \mathcal{H} :

$$c < f(c)$$

y c es supremo.

Abs!

$$c \not< f(c)$$

$$(c \geq f(c))$$

• Caso $c > f(c)$:

$$\Rightarrow c \notin A$$

$$\text{i.e. } x \leq c \quad \forall x \in A$$

Si aplico f (creciente)

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in A$$

Como $x \in A$

$$x \leq f(x) \leq f(c) \quad \leftarrow \text{es cota sup.}$$

$$\Rightarrow x \leq f(c) \quad \forall x \in A$$

y como $c = \sup A$ (la menor de las cotas sup.)

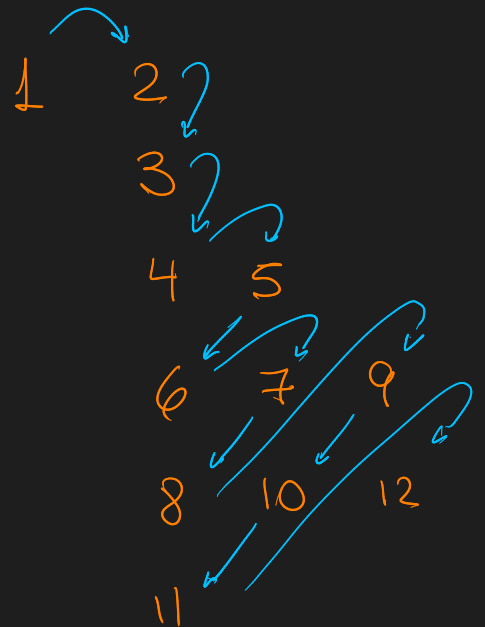
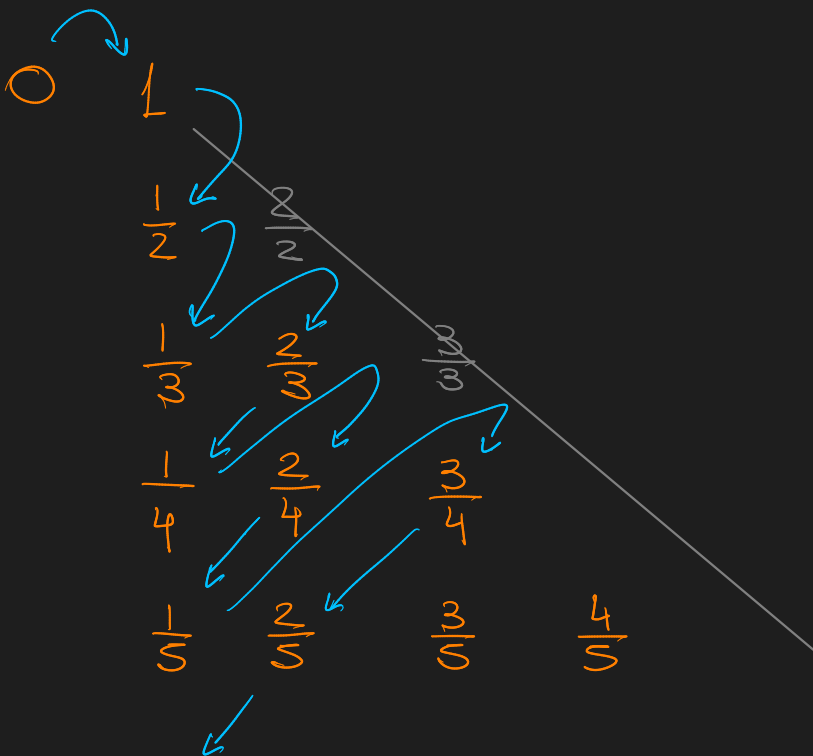
$$\Rightarrow c \leq f(c)$$

Abs! Per por $f_b : c > f(c)$

$$\therefore c \neq f(c)$$

Finalmente

$$\left. \begin{array}{l} \bullet c \neq f(c) \\ \bullet c \neq f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow c = f(c)$$



$$q_1 \leftrightarrow 0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$A_0 = \{ n \in \mathbb{N} : q_n \leq 0 \}$$

$$A_0 = \{ 1 \}$$

$$A_1 = \{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq 1 \}$$

$$A_{\frac{1}{2}} = \{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \frac{1}{2} \}$$

$$A_1 = \underbrace{\{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \frac{1}{2} \}}_{\substack{A_{\frac{1}{2}} \\ \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N}}} \cup \underbrace{\{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } > \frac{1}{2} \text{ y } \leq 1 \}}_{\# = \# A_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \# A_1 = 2 \# A_{\frac{1}{2}}$$

y como es infinito

$$\# A_1 = \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N} = \# A_x \quad \forall x \in (0,1]$$

$$\sum_{n \in A_x} \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\overset{0}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}}{\underset{0}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

