

## Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- (a)  $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .
- (b)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ , la función identidad.
- (c)  $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$ , la función identidad.
- (d)  $i : (A, d) \rightarrow (E, d)$ , la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas  $d$ ,  $d_2$  y  $d_\infty$  son como en la Práctica 3, y  $\delta$  representa a la métrica discreta, mientras que en (d)  $(E, d)$  es un espacio métrico y  $A \subseteq E$ .

$$a) f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

← Paraboloide



q.v.g

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$$

$$f(B_{d_2}(\vec{x}, \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(\vec{x}), \varepsilon)$$

equiv.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$$

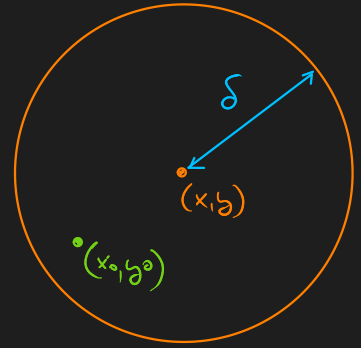
$$f(B_{d_2}((x, y), \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(x, y), \varepsilon)$$

Sea

$$(x_0, y_0) \in B_{d_2}((x, y), \delta)$$

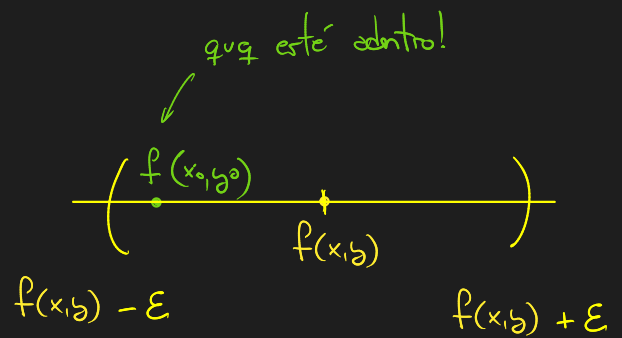
$$(x_0, y_0) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (x, y)) < \delta \right\}$$

$\uparrow$   
 $(x_0, y_0)$  es alguno de  
 estos  $(a, b)$



q u q

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0^2 + y_0^2} \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(x, y), \varepsilon)$$



Se:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(f(x, y), \varepsilon) &= \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, f(x, y)) < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ c \in \mathbb{R} : |c - f(x, y)| < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ c \in \mathbb{R} : |c - (x^2 + y^2)| < \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

(acá pregunté en Zulip porque  $\sqrt{\cdot}$ )

Sugerencia:



Daniel Carando

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el  $(3,2)$ , por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el  $\delta$  lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un  $\delta$  auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás  $\delta_1 = 1$ , entonces cuando tomes  $d((x, y), (3, 2)) < \delta_1$ , sabés que  $x$  está entre 2 y 4 e  $y$  está entre 1 y 3.

Si después necesitás otro  $\delta_2$  para llegar finalmente al menor que  $\varepsilon$ , tu  $\delta$  va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED)

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en  $\mathbb{R}$  es la  $d_1$ , pero en realidad también es la  $d_2$ :

$$d_1(s, t) = |s - t| = \sqrt{(s - t)^2} = d_2(s, t).$$

También es la  $d_\infty$ , claro.

6:23 PM

6:28 PM

Pruebo que es continua en el  $(3, 2)$

Def. de  $f$  continua  $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f(B((x_0, y_0), \delta)) \subseteq B(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

Lo pruebo en  $(x_0, y_0) = (3, 2)$

Sea

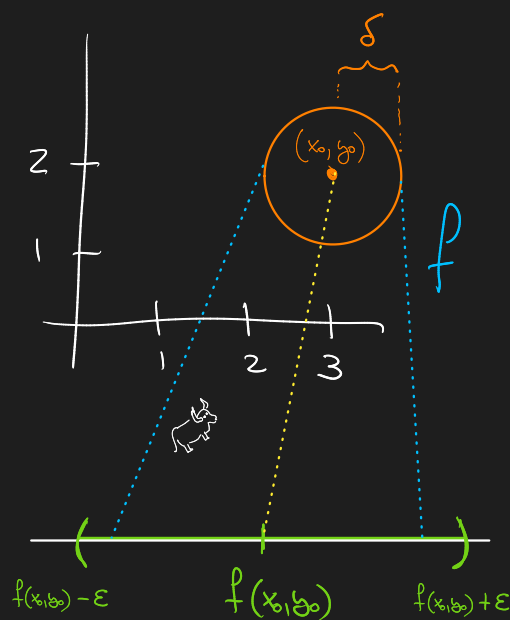
$$(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$$

me fijo solo en:

$$(x, y) \in B((3, 2), \delta)$$

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < \delta \right\}$$

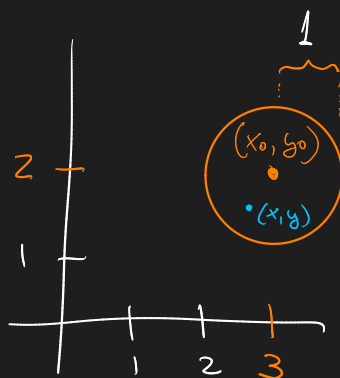
$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$



Si  $\delta = 1$ :

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio  
contenga a todos estos  $f(x, y)$

De nuevo pifio y me pierdo.  
Pregunto de nuevo en Zulip.



Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar  $(x_0, y_0)$  para el punto en el que estudiás la continuidad y  $(x, y)$  para los puntos que andan alrededor del  $(x_0, y_0)$ . Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea,  $(x_0, y_0)$  son los puntos que están cerca del  $(3, 2)$ . Lo que podés hacer menor que cualquier  $\delta$  es la distancia entre los puntos  $(x_0, y_0)$  y el  $(3, 2)$ . En este caso particular, esto coincide con la raíz de  $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$ . Si tomás  $\delta_1 = 1$  auxiliar, entonces sabés que  $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$ . Pero esto no dás que  $f(x_0, y_0) < 1$ . Al contrario,  $f(x_0, y_0)$  se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1. Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís  $12 < \varepsilon$ . Esto te da la pauta de que algo no va, porque  $\varepsilon$  puede ser arbitrariamente chico.

Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el  $\varepsilon$  tiende a 0, los posibles  $\delta$  también tienden a 0. Tu  $\delta$  no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de  $\delta$  (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con  $\varepsilon$  y  $\delta$ , sin usar sucesiones) es: tomá  $\delta_1 = 1$  y  $(x, y)$  a menos de 1 de  $(3, 2)$ . Entonces  $|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$

Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al  $\delta_1$ . Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que  $\delta$

Si  $\delta_1 = 1$ :

$$d_2((x, y), (3, 2)) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{\text{quiero acotar esto}} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{\text{quiero acotar esto}}$$

En donde:

$$(x^2 - 3^2) \overset{\text{dif. de cuadrados}}{=} (x+3)(x-3)$$

$$\underbrace{(x+3)}_{< \delta_1 = 1} \underbrace{(x-3)}_{< \delta_1 = 1}$$

$$\text{Como } d(x, 3) < 1$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm d(x, 3)$$

$$< 3 + 1 = 4$$



$$x < 4$$

$$\Rightarrow x + 3 < 7$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

↖ dejo este  $\delta$  (y no uno 1)  
para que dependa de  $\delta$

$$(y^2 - 2^2) = (x+2)(x-2)$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}} \leq \delta = 1$$

$$\hookrightarrow \text{Como } d(x, 2) < \delta_1 = 1$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x, 2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x + 2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

↖ dejo este  $\delta$  (y no uno 1)

Reemplazando en lo que tenía para que dependa de  $\delta$

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero controlar todo por  $\varepsilon$

$$\Rightarrow 12\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con  $(x_0, y_0) = (3, 2)$  encontré un  $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f\left(\mathcal{B}\left((3, 2), \delta\right)\right) \subseteq \mathcal{B}\left(f(3, 2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si  $\delta_1 = 1$ :

$$d_2((x, y), (x_0, y_0)) < \delta_1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|$$

En donde:

$$|x^2 - x_0^2| = \underbrace{|x + x_0|}_{< \delta} \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

Como  $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x_0 - d(x, x_0) < x < x_0 + d(x, x_0)$$

$$\Rightarrow |x + x_0| < |x| + |x_0|$$

$$\leq |x_0| + |x - x_0|$$

$$< 2|x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

Mismo procedimiento para

↑ elijo este  $\delta = 1$

$$|y^2 - y_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

$$< (2|x_0| + 1) \cdot \delta < (2|y_0| + 1) \cdot \delta$$

$$< \delta (2|x_0| + 2|y_0| + 2)$$

$$< 2\delta \left( \underbrace{|x_0|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_0|}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{\geq 0} \right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)}$$



∴ mos tré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  dado por

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)} \right\}$$

tal que

$$f\left(\mathcal{B}((x_0, y_0), \delta)\right) \subseteq \mathcal{B}(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

∴ muestre continuidad en cada  $(x_0, y_0)$  de  $E = \mathbb{R}^2$

∴  $f$  es continua en  $(\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$

□

Resumen:

Quiero que para toda bola del codominio de  $f$ , pueda pasar una bola del dominio por  $f$ , y que quede contenida en la primera:

$f(\text{AlgunaBolaBienPeque}) \text{ dentro\_de CadaBolaDelCodominio}$

Pasos:

- \* Se que la bola del codominio tiene radio epsilon
- \* Entonces sé que los elementos de la bola están acotados por epsilon de distancia entre sí.
- \* Planteo  $|f(x, y) - f(a, b)| < \text{epsilon}$
- \* Quiero  $|f(x, y) - f(a, b)| < \dots$  meter un delta acá  $\dots < \text{epsilon}$
- \* Usando las distancias/cotas de la bola del dominio, opero acotando la norma del paso anterior hasta poder acotar por delta.
- \* De haber varios términos delta en algún producto, puedo elegir un valor fijo para alguno (ya que el otro delta podrá seguir tendiendo a cero, "arrastrando consigo" el otro término) y tener un despeje más sencillo.
- \* Finalmente, despejo delta en función de epsilon, obteniendo el delta que buscaba que depende de epsilon y (posiblemente) de los  $x, y$  sobre los cuales se analice continuidad.
- \* Probé continuidad para todo  $x, y$  de  $E = \mathbb{R}^2$

fin

