EJ 9: $E = \mathbb{R}$, $B(x,r) = \{y \in E \,/\, d(y,x) < r\}$

$\mathbb{Q}^\circ$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\partial\mathbb{Q}$

EJEMPLO. Si $\boxed{E = \mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q}$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{Q} \,/\, d(y,x) < r\} \subset \mathbb{Q}$

E es abierto si es todo el espacio o vacío.

$E = \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} \notin B(1,2) = \{y \in \mathbb{Q} \,/\, d(y,1) < 2\}$

$E = \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in B(1,2) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, d(y,1) < 2\}$

$B_{\mathbb{Q}}(1,2) \quad B_{\mathbb{R}}(1,2)$

EJ 9: $\boxed{E = \mathbb{R}}$

$x \in \mathbb{Q}^\circ \Leftrightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subset \mathbb{Q}$

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, d(y,x) < r\} = \underbrace{(x-r, x+r)}_{\not\subset \mathbb{Q}}$

CONCLUIR: $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.

4 c) : q v q $\underline{\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)}$ $(r' < r)$

• <u>IDEA</u>: Sea $y \in \overline{B(x,r')} \Rightarrow \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{RAZONAMOS}} \Rightarrow y \in B(x,r)$

Esquema para probar inclusión de conjuntos

$y \in \overline{B(x, r')}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \; B(y, \varepsilon) \cap B(x, r') \neq \emptyset$

$\overset{\forall \varepsilon > 0}{\Rightarrow} \exists z_\varepsilon \in B(y, \varepsilon) \cap B(x, r')$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(z_\varepsilon, y) < \varepsilon \\ d(z_\varepsilon, x) < r' \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \; d(y, x) \leq d(y, z_\varepsilon) + d(z_\varepsilon, x)$

$< \varepsilon + r'$

si tomamos

$$0 < \varepsilon < \underbrace{r - r'}_{>0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon + r' < r$$

$$\Rightarrow d(y, x) < r$$

$$\Rightarrow y \in B(x, r)$$

$$\therefore \overline{B(x, r)} \subset B(x, r)$$

Conjunto Derivado

$A \subset E$

$x \in A' \iff \forall r > 0 \,,\ B(x, r) \cap A$ Tiene inf. ptos.

ej

$(a, b)' = [a, b]$.

$x \in [a, b]$, $r > 0$ cualquiera

$$B(x, r) \cap (a, b) = \underbrace{(x-r, x+r) \cap (a, b)}$$

es un intervalo con extremos diferentes $\therefore$ TIENE INFINITOS ELEM. PUNTOS.

$= (\min(x-r, a), \min(x+r, b))$

$$\Rightarrow x \in (a, b)'$$

$\Rightarrow [a,b] \subset (a,b)'$

Falta ver que no hay nada más.

$$\left[\; x \notin [a,b] \underset{\text{VER}}{\Rightarrow} \exists\, r>0 \;/\; B(x,r)\cap[a,b]=\emptyset \;\Rightarrow\; x \notin A' \;\right]$$

$\Rightarrow A' \subset [a,b]$

$$A \subset B \iff \underbrace{B^c}_{=\{x / x \in B\}} \subset \underbrace{A^c}_{=\{x / x \notin A\}}$$

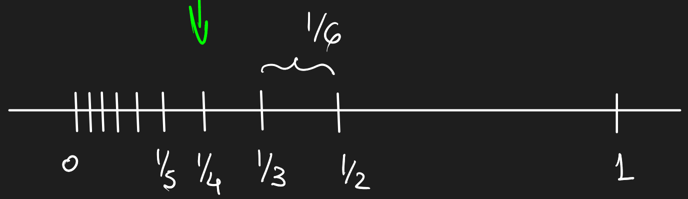
A veces, conviene probar la inclusión contraria de los complementos.

EJEMPLO: $E = \mathbb{R}$, $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$.

$A' =$

$\frac{1}{2} \in A$ ¿$\frac{1}{2} \in A'$? ¿$1/2 \in \bar{A}$?

¡Sí! $A \subset \bar{A}$ ✓



$$B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{10}\right) \cap A = \left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

$\Rightarrow$ no es infinito

$\therefore \ \frac{1}{2} \notin A'$

el único candidato es el cero (que sí es!)

ver que

$$A' = \{0\}$$

si algo no es cero $\Rightarrow \ \notin A'$

Para resolverlo:

Hay que ver:

- $0 \in A'$ (dado $r > 0$, $B(0,r) \cap A$ ES INF.)
- $\to$ DOS MANERAS: (1) $y \in A' \Rightarrow \dots \Rightarrow y \in \{0\}$ $(y = 0)$.

  (2) $y \neq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow y \notin A'$

EJEMPLO: $\frac{4}{7} \notin A'$:

$$\underbrace{B\left(\tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{2}\right) \cap A}_{\text{FINITO}}$$

$\parallel$

$\to \left\{ \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7} \dots, \tfrac{1}{20} \right\}$

$\Rightarrow \frac{4}{7} \notin A'$.