12. Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $w_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se define $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i.$$

Probar que $(\cdot,\cdot)$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

Tengo que mostrar que

$\boxed{1}$ $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0 \iff x = \vec{0}$

$\boxed{2}$ $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$

$\boxed{3}$ $(x, y) = (y, x)$

$\boxed{1}$ $$(x, x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{w_i}_{>0} \cdot \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} \quad ✓$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i^2 = 0 \iff w_i \cdot x_i^2 = 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

$w_i \cdot x_i^2 \geq 0$

$w_i > 0$

$\therefore \; x_i = 0 \quad \forall i \in [1, n]$

$\Rightarrow x = \vec{0}$ ✓

$\boxed{2}$ $$(x, \alpha y + \beta z) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \cdot (\alpha y_i + \beta z_i)$$

$$= \sum w_i \cdot x_i \cdot \alpha y_i + w_i \cdot x_i \cdot \beta z_i$$

$$= \sum w_i \cdot x_i \cdot \alpha y_i + \sum w_i \cdot x_i \cdot \beta z_i$$

$$= \alpha (x, y) + \beta (x, z) \checkmark$$

$\boxed{3}$ $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot y_i \cdot x_i$ ✓

Como cumple 1, 2 y 3, es prod. interno. $\boxed{M}$

13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach cuya norma satisface la regla del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall\, x, y \in E.$$

Definimos la función $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ como

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad \forall\, x, y \in E.$$

Probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno y que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

$\boxed{1}$ $\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \cancel{\|0\|^2}\right)$

$= \cancel{\frac{1}{4} \cdot 2^2} \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in E$ ✓

y además

$\|x\|^2 = 0 \iff x = 0$ pues $\| \ \|$ es norma.

✓

$\boxed{3}$ Simetría ✓

?

$\boxed{2}$ Si $\|\cdot\|$ es PI

$\Rightarrow \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}_{\boxed{3}} + \langle y, y\rangle$

$$\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

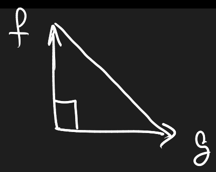
$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$$

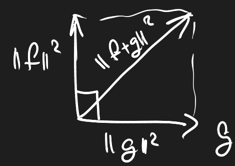
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

14. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sean $f, g \in H$. Probar que $\langle f, g\rangle = 0$ si y sólo si

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

¿Qué diría Pitágoras sobre esto?





$\Rightarrow)$ Hq: $\langle f, g\rangle = 0$

- Si $f = g \Rightarrow f = g = 0$ ✓
- Si $f \equiv 0$ ó $g \equiv 0 \Rightarrow$ ✓

No hace falta separar

- Si $f \neq g$ y $f \neq 0$ y $g \neq 0$

Sabemos que vale también

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$$

qvq

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

Ley $\square$

$$\iff \|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\iff \|f-g\|^2 = \|f+g\|^2$$

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

$$\Rightarrow \langle f-g, f-g\rangle = \langle f+g, f+g\rangle$$

$$\underbrace{\langle f-g, f-g\rangle}_{1} - \underbrace{\langle f+g, f+g\rangle}_{2} = 0$$

$$\langle f, f-g\rangle + \langle -g, f-g\rangle - ② = 0$$

$$\langle f, f\rangle + \langle f, -g\rangle + \langle -g, f\rangle + \langle -g, -g\rangle - ② = 0$$

$$\langle f, f\rangle - 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle - ② = 0$$

$$① = \langle f, f\rangle - 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle$$

$$② = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle$$

$$\Rightarrow ① - ② = -4\underbrace{\langle f, g\rangle}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

$\Leftarrow)$ Hc: $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

Es lo mismo que antes

Ley ◇

$$\Leftrightarrow \|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|f-g\|^2 = \|f+g\|^2$$

⋮ mismos pasos

$$\Rightarrow ① - ② = -4\langle f, g\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle f, g\rangle = 0$$

∎

15. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión y $x_0 \in H$. Probar que si $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_0\rangle = \langle x_0, x_0\rangle$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en H.

① $$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$$

y

② $$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = \| x_0 \|$$

Por qué no vale de una cualquiera de las dos?

la segunda porque tengo infinitos vectores distintos con la misma norma, asi que converger en norma es bastante debil

$$\| x \| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

equiv.

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n \rangle^{1/2} = \langle x_0, x_0 \rangle^{1/2}$$

la primera es converger en la raíz de una norma:

Es más débil que 2? o igual?

La primera es más fuerte, pues fija X0 de un lado, y mueve x_n del otro.

Es más exigente en cuanto a resultados posibles que cumplan esa igualdad.

qvq

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{?}{=} x_0$$

Uso:

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y fijemos $v \in H$. Entonces la función $\gamma_v : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada sobre H.

Además, vale que $\underbrace{\|\gamma_v\|}_{\text{Norma de operador}} = \underbrace{\|v\|}_{\text{Norma de vector}}$.

Si fijo $x_0 \in H$

$$\Rightarrow \gamma_{x_0}(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{es una func. lineal acot. sobre } H$$

$\forall x \in H$

en particular, vale para los $x_i \in (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\|\gamma_{x_0}\| = \|x_0\| = \inf\{M>0 : \|\gamma_{x_0}(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

?

$$\langle x_n - x_0, x_n - x_0\rangle = \langle x_n, x_n - x_0\rangle - \langle x_0, x_n - x_0\rangle$$

$$\langle x_n, x_n - x_0\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x$$

16. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para $a, b \in \ell^2$ definimos

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \, b_n.$$

(a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?

(b) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^2?

(c) Probar que $\gamma : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

a) Props de $\langle , \rangle$

b) Vidy en consulta 3/6

c) También ↗

Sale usando que $\langle , \rangle$ es PI tomando $b_n = \frac{1}{n}$

y $\langle a_n, b_n \rangle$

⋮

$\gamma(a) = \langle a, b \rangle$

define una funcional lineal.

17. Para $f, g \in C([0,1])$ definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(a) Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?

(b) Probar que con esta norma, la funcional definida en el Ejercicio 11 no es continua.

(c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

(d) Probar que la funcional lineal

$$\gamma(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno. Se puede ver que no existe $g \in C([0,1])$ tal que $\gamma(f) = \langle f, g\rangle$ para todo $f \in C([0,1])$ (convencerse, no hace falta demostrarlo). ¿Contradice esto el teorema de representación de Riesz enunciado en la teórica?

a) ① $\langle f, f\rangle \geq 0$ y $\langle f, f\rangle = 0 \iff f \equiv 0$ ✓✓

② $\langle f, \alpha g + \beta h\rangle \overset{?}{=} \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle f, h\rangle$ ✓

③ ✓ Simetría.

Define $\|\cdot\|_2$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(x) \, . dx\right)^{1/2} = \langle f, f\rangle^{1/2}$$

b)

11. Sea $\mathcal{E} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito, entonces $\mathcal{E}$ es un funcional lineal continuo.

$\mathcal{E}$ va de $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{E}f - \mathcal{E}g\|_2 = \left(\int_0^1 (f(0) - g(0))^2 dx\right)^{1/2}$$

?

$=$

c)

(c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

$$\| I(f) - I(g) \|_2 = \left\| \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 g(t)\,dt \right\|_2 \quad ?$$

$=$

18. Sea ℓ^2 el espacio definido en el Ejercicio 16. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de ℓ^2 generado por e_1, e_2 y $e_3 + e_4$, donde para cada $j \in \mathbb{N}$, $e_j \in \ell^2$ es la sucesión que tiene un 1 en el lugar j y 0 en los demás.

16. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty\right\}.$$

Para $a, b \in \ell^2$ definimos

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n.$$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_3 + e_4 &= (0, 0, 1, 1, 0, \dots) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow X = \{e_1, e_2, e_3 + e_4\}$$

Nico probó que está en l^2

$$X^\perp = \{y \in l^2 : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall x \in X\}$$

Veamos cada x:

$$\langle e_1, y\rangle = 0 \iff y_1 = 0 \qquad (y_i \cdot e_i = 0 \ \forall i > 1)$$

$$\langle e_2, y\rangle = 0 \iff y_2 = 0$$

$$\langle e_3 + e_4, y\rangle = 0 \iff y_3 + y_4 = 0$$

$$\therefore \quad X^\perp = \{y \in l^2 : y_1 = y_2 = 0 \wedge y_3 = -y_4\}$$

"Sucesiones cuyos primeros 2 elementos son cero y el tercero y cuarto son opuestos.
El resto de los elementos puede ser cualquier cosa, mientras la sucesión viva en l^2"

19. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado de H. Sea $P_X : H \to H$ la proyección ortogonal de H sobre X. Probar que:

(a) $P_X^2 = P_X$;

(b) $P_{X^\perp} = I - P_X$, donde I denota la identidad en H;

(c) $\langle P_X(y), z \rangle = \langle y, P_X(z) \rangle$, para todos $y, z \in H$.

H se escribe como

$$H = X \oplus X^\perp$$

pues X es cerrado.

$\therefore$ cada $y \in H$

se escribe como

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{único}}}{x} + z \qquad \text{con } x \in X,\ z \in X^\perp$$

$$P_X(y) = x$$

a)

$$P_X^2(y) = x^2 \ ? \quad \text{vector}^2 \ ¿?$$

b) $P_{X^\perp}(y) = z \implies \underset{\underset{H}{\cap}}{y} = \underset{\underset{X}{\cap}}{x} + \underset{\underset{X^\perp}{\cap}}{z}$ ← única

$P_X(y) = x \implies \underset{\underset{H}{\cap}}{y} = \underset{\underset{X}{\cap}}{x} + \underset{\underset{X^\perp}{\cap}}{z}$ ← única

$$P_{X^\perp}(y) \overset{?}{=} \mathbb{I} - P_X(y)$$

$$z \overset{?}{=} \mathbb{I} - x$$

$$x + z \overset{?}{=} \mathbb{I} = y \quad \checkmark \quad ?$$

c) (c) $\langle P_X(y), z\rangle = \langle y, P_X(z)\rangle$, para todos $y, z \in H$.

$$\langle x, z \rangle = \langle y, \tilde{x} \rangle$$

$$y = x + z \quad ???$$