Dani

Sat 15 Mayo

(E, s)pacios Normados

- Estarán dados por Espacios Vectoriales

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^n$: d_1, d_2, d_∞

$\boxed{2}$ δ (discreta)

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}$: $d(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$

$\boxed{4}$ $\mathcal{C}[0,1]$: d_1, d_∞

Notar que

en $\boxed{1}$ y $\boxed{4}$:

- $d(x,y) =$ "$\|x-y\|$"

Una cuenta con $x-y$

Todavía no definimos "norma".

- $d(2x,0) = 2\,d(x,0)$

en $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$:

no vale lo de arriba

$\boxed{1}$ y $\boxed{4}$ <u>son</u> espacios normados

Observar que

- Para poder calcular "$\| x - y \|$" necesitamos la operación suma $(+)$
- Para poder hacer $d(2x, 0)$ necesitamos producto por escalar $(2 \cdot x)$

$\therefore$ necesitamos estar en un espacio vectorial (e.v.)

Definición

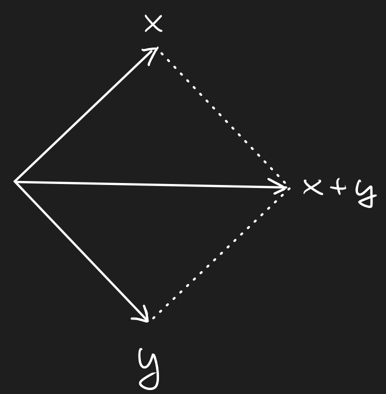
Sea E espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

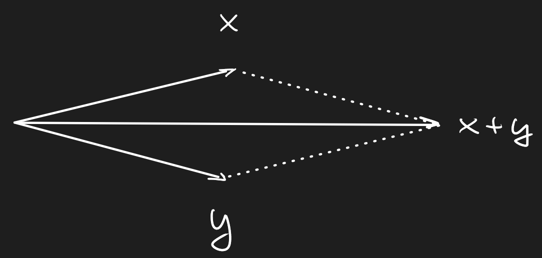
(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1) Desig Triang





Un espacio vectorial E con una norma se llama un espacio normado.

Observación
Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la distancia $d(x,y) = \|x - y\|$.

Definición
Un espacio normado que es completo con la distancia $d(x,y) = \|x - y\|$ se llama un espacio de Banach.

Stefan Banach
(1892-1945)

Teorema del punto fijo

Observación
Todo espacio normado es métrico, pero no todo espacio métrico es un normado.

Si (E, d) es normado (d viene de una norma)

$\Rightarrow$ · E es e.n.

· $\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0)$.

Ej: $(\mathbb{R}^n, \delta)$ no normado

$(\mathbb{R}, d)$ $\quad d(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$.

Ejemplos de espacios normados:

$\mathbb{R}^n$ con $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$.

SON NORMADOS

$C[0,1]$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

K compacto, $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ cont}\}$.

$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$.

· X e.m. $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ cont y acot}\}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

$(C[0,1], \| \|_1)$ NO BANACH

LOS OTROS EJEMPLOS SON BANACH

Ejercicio

Si E es un espacio normado, la suma es continua en $E \times E$ y el producto es continuo en $\mathbb{R} \times E$.

$$\left.\begin{array}{l} + : \quad E \times E \to E \\ \qquad (x, y) \mapsto x+y \\ \\ \cdot : \quad \mathbb{R} \times E \to E \\ \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda . x \end{array}\right\} \text{Contínuas}$$

Con sucesiones

$$\left.\begin{array}{ll} x_n \to x & \text{en } E \\ y_n \to y & \text{en } E \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \longrightarrow x+y$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_n \to \lambda & \text{en } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n . x_n \longrightarrow \lambda . x$$

Observación

En los espacios normados pasan algunas cosas que vemos en $\mathbb{R}^n$ pero no en métricos generales:

- $\overline{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$
- $\operatorname{diam}\left(B(x,r)\right) = 2r$
- $x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\lambda x}{\|x\|} \right\| = |\lambda|$$

- $B(x,r) = x + B(0,r) = \{x+y : y \in B(0,r)\}$

ejercicios

$$= x + r \cdot B(0,1) = \{x + ry : y \in B(0,1)\}$$

¿ esta prop de los normados con dist. en prob y est como

$$\mu + \sigma \cdot \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Definición
Dos normas en un espacio vectorial son equivalentes si definen distancias equivalentes.

$\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ EQUIV si

$d_1(x,y) = \|x-y\|_1$, $d_2(x,y) = \|x-y\|_2$

son distancias equivalentes

en $\mathbb{R}^n$ d_1, d_2, d_∞ son EQUIV.

$\Rightarrow$ $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_\infty$ son EQUIV.

$C[0,1]$, d_1, d_∞ NO EQUIV.

Si $\exists c, \tilde{c}$ /

$$c \cdot d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \tilde{c}\, d_2(x,y)$$

$\Rightarrow$ d_1 y d_2 son equivalentes

Pero la vuelta no vale.

Con normas sí vale!

Proposición
Dos normas $\| \|_1$ y $\| \|_2$ sobre E son equivalentes si y sólo si existen $c, \tilde{c} > 0$ tales que

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c}\|x\|_2.$$

$$\Downarrow$$

$$c \cdot d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \tilde{c}\, d_2(x,y)$$

$$\Downarrow$$

d_1 y d_2 son uniformemente equivalentes

Dist equivalentes comparten

- Abiertos
- Cerrados
- Sucesiones convergentes

Dist uniformemente equivalentes comparten también

- Acotados
- Sucesiones de Cauchy

entre otras

Observación
Dos normas equivalentes dan métricas *uniformemente equivalentes*.

Dem:

$\Leftarrow$) Ya la hicimos

$\Rightarrow$) Qvq $\exists c, \tilde{c} /$

$$c . \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \tilde{c} . \| x \|_2 \quad \forall x$$

Notamos

$B_1(x, r)$ = "bola con $\| x \|_1$"

$B_2(x, r)$ = "bola con $\| x \|_2$"

Voy a probar:

$$\| x \|_1 \overset{?}{\leq} \tilde{c} . \| x \|_2 \quad \forall x$$

$0 \in B_1(0,1)$ es abierto para d_2, pues $d_2 \sim d_1$

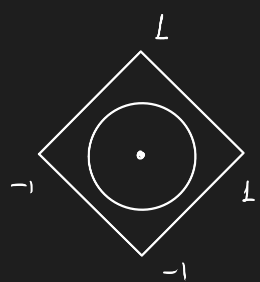
(pero deja de ser bola!)

B_1 abierto

$\downarrow$

$\Rightarrow \exists r > 0 \; / \; B_2(0,r) \subset B_1(0,1)$

Sea $x \in E$, $x \neq 0$



$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\| r . \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} . \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{r}{2} < r$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \in B_2(0,r) \subset B_1(0,1)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2\|x\|_2} \|x\|_1 < 1$$

$$\Rightarrow \|x\|_1 < \underbrace{\frac{2}{r}}_{\tilde{c}} \|x\|_2 \checkmark$$

- Probé lo que quería $\forall x \neq 0$
- Si $x = 0 \Rightarrow \|0\|_1 = 0 = \tilde{c}\,\|0\|_2$ ✓

$$\therefore \|x\|_1 \leq \tilde{c} \cdot \|x\|_2 \checkmark$$

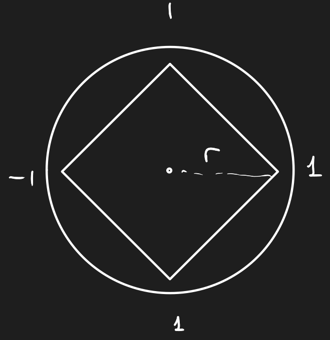
Falta probar

$$c \cdot \|x\|_2 \overset{?}{\leq} \|x\|_1$$

Sea $0 \in B_2(0,1)$

$\Rightarrow$ Como es abierta para d_1 pues $d_2 \sim d_1$

$\exists\, r > 0 \mid B_1(0,r) \subset B_2(0,1)$



Sea $x \in E$

- Si $x = 0 \Rightarrow C.\|x\|_2 = 0 = \|x\|_1$ $\checkmark$
- Si $x \neq 0$:

$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$$

$$\Rightarrow \left\| r \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = \frac{r}{2} < r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 < r$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \in B_1(0,r) \subset B_2(0,1)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|_2 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \|x\|_2 < \|x\|_1 \quad \checkmark$$

$$\underbrace{}_{c}$$

$$\therefore \quad c \cdot \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

y juntando todo

$$c \cdot \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \tilde{c} \cdot \|x\|_2$$

$\blacksquare$

Teorema
En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Dem:

- Idea:

  Toda norma $\| \ \|_?$ es equiv. a $\| \ \|_1$

  donde

  $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

  $$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

- Qvq:

  $\exists\, c, \tilde{c} \,/$

  cualquier norma.

  $$c \cdot \|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \tilde{c} \cdot \|x\|_1$$

Sea $e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$ (vector canónico)

Pos. k

$$\Rightarrow x = e_1 . x_1 + e_2 . x_2 + \cdots + e_n . x_n$$

$$\Rightarrow \| x \| = \| e_1 . x_1 + e_2 . x_2 + \cdots + e_n . x_n \|$$

desig. triang.

$$\leq \| e_1 . x_1 \| + \| e_2 . x_2 \| + \ldots + \| e_n . x_n \|$$

$$= \| e_1 \| . |x_1| + \| e_2 \| . |x_2| + \ldots + \| e_n \| . |x_n|$$

Como estoy en $\mathbb{R}^n$,

$$\exists M = \max_{1 \leq k \leq n} \| e_k \|$$

$$\Rightarrow \| x \| \leq M . \left(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \right)$$

$$\| x \| \leq \tilde{C} . \| x \|_1 \quad ✓$$

Falta ver que

$$\exists c \, / \, c . \| x \|_1 \leq \| x \| \qquad \forall x \in E$$

Si $x = 0$ ✓

Si $x \neq 0$:

Sea $g : (\mathbb{R}^n , \| \ \|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \| x \|$ norma desconocida

Nota que

g es continua pues

$$|g(x) - g(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,|$$
$$\leq \|x - y\|$$
ejercicio.

$$|g(x) - g(y)| \leq \tilde{C} \cdot \|x - y\|_1$$
de antes

$\Rightarrow g$ es Lipschitz

$\Rightarrow g$ es continua.

Sea

$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_1 = 1 \}$: "Borde de la $B_1(0,1)$"

S es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$

$\Rightarrow S$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$

Hasta ahora tenemos

- g continua
- que sale de un compacto

$\Rightarrow g(x)$ tiene <u>máx</u> y <u>mín</u> en $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1 \}$

llamo $m = \min\limits_{x \in S} g(x)$

Como $g(x) = \|x\|$

$\Rightarrow \quad g(x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad m \geq 0$

Si $m = 0$:

$$\exists\, y \in S \,/\, g(y) = 0$$

$$\Rightarrow \|y\| = 0$$

$$\Rightarrow y = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \|y\|_1 = 0$$

Pero $\Rightarrow y \notin S$

Abs

$\therefore \quad m > 0$

Sea $x \neq 0$

$$\frac{x}{\|x\|_1} \in S \Rightarrow m \leq g\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)$$

$$\Rightarrow m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|$$

norma desconocida.

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|$$ ✓

$$\therefore \quad \| \; \| \sim \| \; \|_1$$

$\boxtimes$

Espacios normados de dimensión finita

Proposición (dim del e.v.)
Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $T : E \to \mathbb{R}^n$ y una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que T es una isometría.

$(E, \| \; \|_E)$ $\quad \exists\, T : E \to \mathbb{R}^n$ y $\| \; \|_0$ norma en $\mathbb{R}^n$

$$\|Tx - Ty\|_0 \doteq \|x - y\|_E$$

$$d_0(T(x), T(y)) \qquad d_E(x, y).$$

Armo norma:

$\exists\, T : E \to \mathbb{R}^n$ ISOMORF. LINEAL.

$z \in \mathbb{R}^n$: $\quad \|z\|_0 := \|T^{-1} z\|_E$

$\| \; \|_0$ es UNA NORMA (EJERCICIO).

$$d_0(Tx,Ty) = \|Tx - Ty\|_0 = \|T^{-1}(Tx - Ty)\|_E$$

$$= \|T^{-1}Tx - T^{-1}Ty\|_E = \|x-y\|_E = d_E(x,y) \quad \checkmark$$

$$T : (E, \|\ \|_E) \to (\mathbb{R}^n, \|\ \|_0)$$

BIY. ISOMETRÍA.

"ISOMORFISMO ISOMÉTRICO"

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ (donde el homeomorfismo es un isomorfismo lineal).

$$(E, \|\ \|_E) \xrightarrow[\text{ISOMET.}]{T} (\mathbb{R}^n, \|\ \|_0) \xrightarrow{id} (\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$$

HOMEO
BI-LIPSCHITZ
LINEAL

HOMEO UNIF
(id, id^{-1} SON UNIF. CONT).
pues $\|\ \|_0$ y $\|\ \|_2$ SON NORMAS EQUIV. x TEO.
y $\therefore$ id, id^{-1} SON LIPSCHITZ.

Corolario
Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

$$\underbrace{(E, \| \ \|_E) \sim}_{\text{Homeo. Unif.}} \underbrace{(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)}_{\text{Completo}}$$

Corolario
En un espacio normado de dimensión finita, los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

VALE LA VUELTA (NO LA VEMOS)

VALE: Si E es NORMADO DE DIM INFINITA, $\overline{B}(0,1)$ es cerrado y acot pero NO COMPACTO.