

## Práctica 5

1. Sea  $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ . Probar, por definición, que  $K$  es compacto.
2. Sea  $K$  un subconjunto compacto no vacío de  $\mathbb{R}$ . Probar que  $K$  tiene mínimo y máximo.
3. Sea  $K \subseteq \mathbb{R}$  compacto. Probar que los subconjuntos de  $\mathbb{R}$

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \quad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

4. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $\{F_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos cerrados de  $E$ . Supongamos que existe  $i_0 \in I$  tal que  $F_{i_0}$  es compacto. Probar que  $\bigcap_{i \in I} F_i$  es compacto.
5. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Probar que  $E$  es compacto si y solo si para toda sucesión  $(F_n)_{n \geq 1}$  decreciente de cerrados no vacíos de  $E$  se tiene que  $\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$ .
6. Sea  $E$  un conjunto, en el cual consideramos la métrica discreta. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de  $E$ ?
7. Probar que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.
8. Probar que en un espacio métrico  $(E, d)$  la distancia de un punto a un compacto se realiza. Esto es, que para todo compacto  $K \subseteq E$  y para todo  $x \in E$  existe  $y \in K$  tal que  $d(x, y) = d(x, K)$ .
9. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico, y sea  $\hat{d}$  la función definida en el Ejercicio 18 de la Práctica 3. Probar que si  $A \subseteq E$  es compacto,  $B \subseteq E$  es cerrado y se cumple que  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $\hat{d}(A, B) > 0$ . ¿Sucede lo mismo si  $A$  es sólo cerrado?
10. Consideremos en  $(C[0, 1], d_\infty)$  la función  $f_0$  constantemente nula. Probar que  $\overline{B(f_0, 1)}$  no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos la distancia por  $d_1$ ?
11. Sean  $(E, d)$  y  $(E', d')$  espacios métricos y  $f : E \rightarrow E'$  continua. Probar que:
  - (a) Si  $E$  es compacto, entonces  $f(E)$  también lo es.
  - (b) Si además  $f$  es biyectiva, entonces  $f$  resulta ser un homeomorfismo.
12. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

- 13.** Sea  $K$  un espacio métrico compacto, y sea  $f : K \rightarrow (0, +\infty)$  una función continua. Probar que existe  $\alpha > 0$  tal que  $f(x) > \alpha$  para todo  $x \in K$ .
- 14.** Sea  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , con la distancia usual de  $\mathbb{R}$ . Sea  $f : E \rightarrow E$  dada por  $f(x) = \frac{1}{3}x$ . Probar que  $f$  es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?
- 15.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable. Supongamos que existe  $k \in (0, 1)$  tal que  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  es una contracción.
- 16.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $f : E \rightarrow E$  una función. Para  $n \in \mathbb{N}$  denotemos por  $f^n : E \rightarrow E$  a la función  $f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  veces). Probar:
- (a) Si  $x \in E$  es punto fijo de  $f$ , entonces es punto fijo de  $f^n$ .
  - (b) Si  $E$  es completo y existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es una contracción, entonces existe un único punto fijo de  $f$  en  $E$ .  
Sugerencia: probar que si  $x \in E$  es punto fijo de  $f^n$ , entonces  $f(x)$  también lo es.
  - (c) Deducir que existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos(x) = x$ .
- 17.** Probar el Teorema de Bolzano: “Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$  (o viceversa), existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ ”.
- Sugerencia: Considerar  $A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$ , y ver que es no vacío y acotado superiormente.
- 18.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Probar que  $f$  tiene un punto fijo.
- 19.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $f : E \rightarrow E$  continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de  $f$  es cerrado.
- 20.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función creciente. Probar que  $f$  tiene un punto fijo.
-