# Práctica 1

**1.** (a) Si $m \in \mathbb{Z}$, probar que $m$ es múltiplo de 3 si y sólo si $m^2$ es múltiplo de 3.

(b) Probar que $\sqrt{3}$ no es racional.

**2.** Probar que si $x < y + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

**3.** (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un número irracional entre $s$ y $q$.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre $x$ e $y$.

**4.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Probar:

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq s \quad \forall\, a \in A, \\ \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, a \in A \;/\; s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

$$i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq a \quad \forall\, a \in A, \\ \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, a \in A \;/\; i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

**5.** Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y probar que lo son:

$$(a, b] \qquad B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B \cup \{0\} \qquad \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

**6.** Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, probar:

(a) Si $B$ está acotado superiormente, $A$ también y $\sup A \leq \sup B$.

(b) Si $B$ está acotado inferiormente, $A$ también e $\inf B \leq \inf A$.

(c) Si $A$ no está acotado, $B$ tampoco.

**7.** Dados un conjunto de números reales $A$ y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

(a) Si $A$ está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y $A$ está acotado superiormente, entonces $cA$ está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

**8.** Probar, usando la definición de límite:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1$.

**9.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Probar que si $|x_n - \ell| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

**10.** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ e $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, probar que:

(a) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$.

(b) $cx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\,\ell_1$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

(c) $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \cdot \ell_2$.

(d) Si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\ell_2 \neq 0$ entonces $\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Sugerencia: probar que $\frac{1}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell_2}$ y usar (c).

(e) Si $x_n \leq y_n \;\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2$.

**11.** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, probar que $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $0$.

**12.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n$. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ probar que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

**13.** Probar que:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite y $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) Enunciar y demostrar los resultados análogos para sucesiones decrecientes.

**14.** Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell$.

**15.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, y sea $\ell \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a $\ell$, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell$.

**16.** Probar:

(a) Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

---