6. Sea E un conjunto, en el cual consideramos la métrica discreta. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E?

Compacto :

$$\forall\, (x_n)_n \subseteq K \subseteq E \,,\ \exists\ (x_{n_k})_k \ /$$

$$(x_{n_k})_k \text{ sea } \underbrace{\text{convergente en } K}$$

$$x_{n_k} \longrightarrow x \in K$$

$$d(x_{n_k}, x) \longrightarrow 0$$

$$\delta(x_{n_k}, x) = \begin{cases} 0 & x_{n_k} = x \\ 1 & x_{n_k} \neq x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Los K compactos

↳ Toda (x_n) tiene (x_{n_k}) convergente

$\boxed{1}$ x se repite ∞ veces

7. Probar que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

8. Probar que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto se realiza. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.

9. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 18 de la Práctica 3. Probar que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es sólo cerrado?

10. Consideremos en $(C[0,1], d_\infty)$ la función f_0 constantemente nula. Probar que $\overline{B(f_0, 1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos la distancia por d_1?

11. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ continua. Probar que:

(a) Si E es compacto, entonces $f(E)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f resulta ser un homeomorfismo.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

13. Sea K un espacio métrico compacto, y sea $f : K \to (0, +\infty)$ una función continua. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.