Consultas - Vicky

Jueves 25 de 03

Demo equiv. 2

Sabemos: $s \in \mathbb{R}$ y cumple

(a'') $s \geq x \ \forall x \in A$

(b'') $\exists (a_n)_n \subseteq A \ / \ \lim_{n \to \infty} a_n = s$.

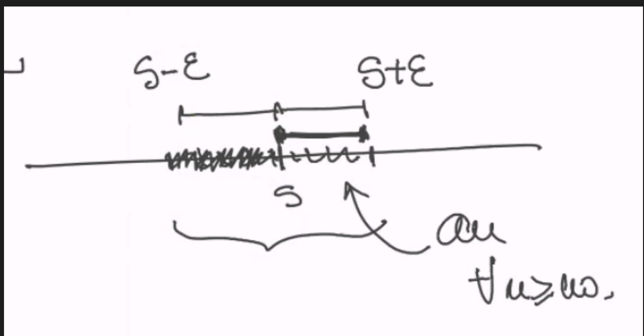
qvq

$s = \sup A \xrightarrow[\text{que}]{\text{debe darse}}$ 1) s cota superior

2) la menor de las cotas sup.

- Como (a'') $\Rightarrow$ s es cota sup
- sea $\varepsilon > 0$. Por def. de límite

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - s| < \varepsilon$



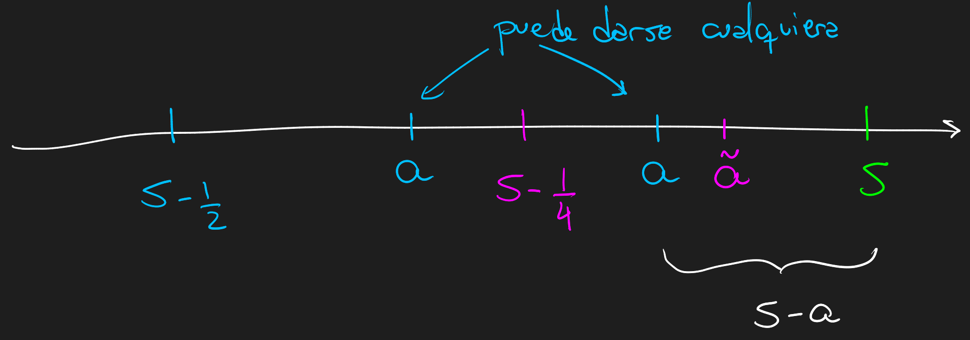
En part. para n_0

$-\varepsilon < a_{n_0} - s < \varepsilon$

$\underbrace{s - \varepsilon < a_{n_0}}_{\text{es lo que quiero.}} \underbrace{< s + \varepsilon}_{\text{No me importa}}$

el $a \in A$ que necesito es a_{n_0}.

Demo de subconjunto de $\mathbb{N}$



$$\tilde{\varepsilon} = \min\left\{\frac{1}{4}, s-a\right\}$$

—o—

$(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ suc. cualquiera acotada

$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$\inf(A) =$

$\inf(A) = \min(A) = -1$
$\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2}$

Suc no convergentes

$a_n = (-1)^n \cdot n$ $\boxed{\text{Diverge}}$

$\boxed{\forall M > 0\ \exists n_0 \ / \ |a_n| > M \ \forall n \geq n_0}$

Obs

"divergir" no es el opuesto a "converger"

Def:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$

Decimos que $(a_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsuc.

de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

si $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$

es una sucesión estrictamente creciente

$n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_7 \ a_8 \ \dots$

$a_{n_1} \quad a_{n_2} \qquad a_{n_3}$

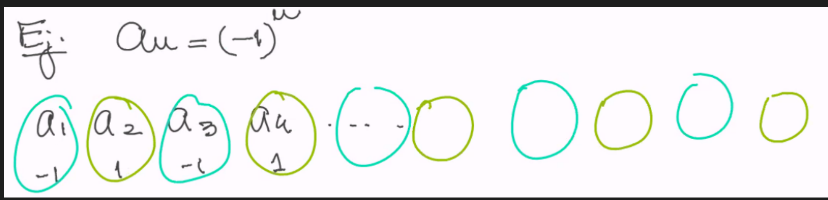
$n_1 = 2 \quad n_2 = 3 \qquad n_3 = 7$

$\longmapsto$

elijo siempre hacia adelante

- elijo en orden
- nunca mismo índice
- puedo saltear elementos

Ej:



Tomo a_{n_k} con $n_k = 2k$

$$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k$$

Tomo a_{n_k} con $n_k = 2k-1$

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}$$

$$= (-1)^{-1} \cdot (-1)^{2k} = -1$$

De Alg. de Lím

• $(a_n)_n, (b_n)_n \;/\; \lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad |a_n - a| \qquad\qquad |b_n - b|$

qvq $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

$$|a_n . b_n - ab| = |a_n . b_n - a b_n + a . b_n - ab|$$

$$\overset{\text{Desig. Triang.}}{\leq} |a_n . b_n - a b_n| + |a . b_n - ab|$$

$$= |b_n| . |a_n - a| + |a| |b_n - b|$$

como $(b_n)_n$ es convergente

$$\Rightarrow \exists M > 0 \;/\; |b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{acotada})$$

y también

si $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_1$$

y

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq n_2$$

Tomo

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

Si $n \geq n_0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n \geq n_1 \\ \text{y} \\ n \geq n_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vale } \boxed{*}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|$$

$$< \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{M}} + \cancel{|a|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{|a|}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$$