

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i).$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m r_i \chi_{A_i}(x)$$

$A_i \cap A_j = \emptyset$

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i).$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

Lebesgue

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i).$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f)$ = {funciones simples medibles $u : f(x) \leq \underline{u(x)}$, $x \in [0, 1]$ }.
- $\mathcal{L}_\mu(f)$ = {funciones simples medibles $v : \underline{v(x)} \leq f(x)$, $x \in [0, 1]$ }.

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i).$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : f(x) \leq u(x), x \in [0, 1]\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : v(x) \leq f(x), x \in [0, 1]\}.$

Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos su **integral de Lebesgue** como

$$\int f d\mu = \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u d\mu \right\}.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\underline{\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu}.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$.
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x .

Si $\exists E \mid \mu(E) = 0 \mid$ la prop. vale

$$\forall x \in E^c$$

$$\left(\begin{array}{l} E^c = [0,1] \setminus E \\ E^c = \mathbb{R} \setminus E \\ \text{según el caso} \end{array} \right)$$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x .

propor se traduce a: $f=g$ c.t.p. $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

EJERCICIO: f, g med. γ aut.

$$f \leq g \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad \leftarrow$$

OBS. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$

$$f=2 \text{ c.t.p.} \Rightarrow \int f \, d\mu = \int 2 \, d\mu = 2 \cdot 1 = 2$$

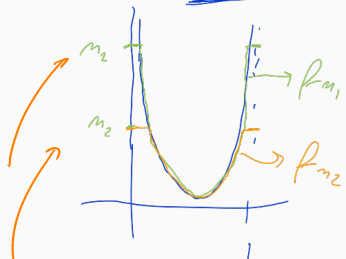
Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. (NO NECESARIAMENTE ACOTADA)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\underline{f_n(x)} = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} \underline{f(x)} & \text{si } \underline{f(x)} \leq n \\ \underline{n} & \text{si } \underline{f(x)} > n \end{cases}$$



Corta la imagen (no el dominio.)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \text{ medible } \forall n \text{ (EJ)} \\ f_n \text{ acotada } \forall n \end{array} \right.$$

$$|f_n(x)| \leq n \quad \forall x \in [0, 1].$$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n d\mu$.
(f_n medible)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral, la sucesión de números $(\int f_n d\mu)_n$ es creciente.

$$\underline{f_n} \leq \underline{f_{n+1}} \quad (\text{PENSAR}) \quad \Rightarrow \quad \int f_n \leq \int f_{n+1}$$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} \underline{f(x)} & \text{si } f(x) \leq n \\ \underline{n} & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

$$\underline{f_n \geq 0}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral, la sucesión de números $(\int f_n d\mu)_n$ es creciente.

Definimos

$$\underline{\int f d\mu} = \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu} \longrightarrow$$

$$\in [0, +\infty] \\ (\text{puede ser } +\infty)$$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral, la sucesión de números $(\int f_n d\mu)_n$ es creciente.

parece trampa, pero es hilar más fino con las hipótesis,
para en vez de pedir acotadas, pedir integrables.

Definimos

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

Decimos que f es integrable si el límite es finito.

Ejemplo

$$\rightarrow \underline{f: [0,1] \rightarrow [0,+\infty]} \quad \left(f(0) = +\infty \right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{no importa su valor para} \\ \text{la integral, pues mide 0,} \end{array} \right]$$
$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\underline{f_n(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \frac{1}{\sqrt{x}} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq x \\ n & \text{si } \frac{1}{\sqrt{x}} > n \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} > x \end{cases}$$

$$\int f_n(x) d\mu = \int_{[0, 1/n^2)} f_n d\mu + \int_{[1/n^2, 1]} f_n d\mu = \int_{[0, 1/n^2)} n d\mu + \int_{[1/n^2, 1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu$$

$$= n \cdot \frac{1}{n^2} + 2\sqrt{x} \Big|_{1/n^2}^1 = \frac{1}{n} + 2 - 2 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

$$\hookrightarrow \text{"RIEMANN} \Rightarrow \text{LEBESGUE": } \int f d\mu = \lim \int f_n d\mu = \underline{2}$$

Proposición

monotonía

Sean f, g medibles no negativas en $[0, 1]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para casi todo x . Si f es integrable, entonces g es integrable y $\int g d\mu \leq \int f d\mu$.

DEM: $\exists E \subset [0, 1]$ med /
 $\underbrace{g(x) \leq f(x)} \quad \forall x \in [0, 1] \setminus E \quad \text{con } \mu(E) = 0.$

Si $x \in [0, 1] \setminus E \Rightarrow \underbrace{g_n(x) = \min \{n, g(x)\}} \leq \min \{n, \underbrace{f(x)}\}$
" "

$\Rightarrow g_n \leq f_n$ c.t.p. \Rightarrow $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$ $\underbrace{f_n(x)}$
 $\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{med. axt}} \quad \quad \quad \text{EJERCICIO}$

$\int g d\mu \quad \quad \quad \int f$

$\therefore \int g d\mu \leq \int f d\mu.$

Proposición

Sea f no negativa, integrable en $[0, 1]$. Entonces, $\int f d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ en casi todo punto

\Leftarrow) Ejercicio.

\Rightarrow) $E = \{x \in [0, 1] / \underline{f(x) > 0}\}$ q.v.g. E tiene med. cero.

TRUCCO: $E = \bigcup_n \{x \in [0, 1] / \underline{f(x) \geq 1/n}\}$.

FIJAMOS n

$$x \in A_n \Rightarrow \underline{f(x) \geq 1/n}$$

A_n

$$\frac{1}{n} \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases} \Rightarrow \underline{f(x) \geq \frac{1}{n} \chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in [0, 1]}$$

$$\stackrel{\text{PROP}}{\Rightarrow} \underline{0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n} \chi_{A_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\neq 0} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(A_n) = 0.}$$

$$E = \bigcup A_n \Rightarrow \underline{\mu(E) \leq \sum \mu(A_n) = 0}$$

Continuidad absoluta de la integral

Obs: f med. y acot. en $[0,1]$. $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [0,1]$

$$A \subset [0,1] \Rightarrow \underbrace{\left| \int_A f(x) dx \right|} \leq \int_A |f(x)| dx \leq \int_A M dx = \underbrace{M \mu(A)}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/M$ / $\underbrace{\mu(A) < \delta} \Rightarrow \underbrace{\left| \int_A f dx \right| < \varepsilon}$.

f MED. NO NEGAT., $A \subset [0,1]$ MED

$$\Rightarrow \int_A f := \int \underbrace{f \cdot \chi_A}_{\text{med. no negat.}} dx$$

EJERCICIO $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$

$B_i \cap B_j = \emptyset$ if $i \neq j$

$$\Rightarrow \boxed{\int f = \sum_i \int_{B_i} f dx}$$

Continued Absolute

Obs: f medible y acotada en $[0,1]$

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\text{Si: } A \subseteq [0,1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_A f(x) d\mu \right| &\leq \int_A |f(x)| d\mu \\ &\leq \int_A M d\mu \\ &= M \cdot \mu(A) \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} /$$

$$\text{si } \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f(x) \right| < \varepsilon$$

Ahora, si f es medible y no negativa (no necesariamente acotada)

$$A \subseteq [0, 1] \text{ medible}$$

$$\Rightarrow \int_A f := \int f \cdot \chi_A d\mu$$

Ejercicio

$$[0,1] = \bigcup_{j=1}^N B_j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \int_{[0,1]} f = \sum_j \int_{B_j} f d\mu$$

Dem

$$\int_{[0,1]} f = \int f \cdot \chi_{[0,1]}$$

$$= \int f \cdot \chi_{\bigcup_{j=1}^N B_j} = \int f \cdot \left(\sum_{j=1}^N \chi_{B_j} \right) =$$

? vale hacerlo así?



Uso que

medible, no acotada

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

$$\text{Con } f_n = \min \{n, f_n\} = \begin{cases} f_n & \text{si } f_n \leq n \\ n & \text{si } f_n > n \end{cases}$$

Dem:

$$\int_{[0,1]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n \cdot \chi_{[0,1]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_i B_i} f_n \cdot \chi_{\bigcup_i B_i}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \int_{B_i} f_n \cdot \chi_{B_i}$$

?

Continuidad absoluta de la integral

Teorema

$\nearrow \text{en } [0,1]$.

Sea f no negativa e integrable. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A f d\mu < \varepsilon$$

$\hookrightarrow \delta$ depende de ε .

para todo medible $A \subset [0,1]$ con $\mu(A) < \delta$.

D.E.M.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) > n \Leftrightarrow \text{si } x \in E_n \\ f(x) & \text{si } f(x) \leq n \Leftrightarrow \text{si } x \in E_n^c \end{cases}$$

$$E_n = \{x \in [0,1] / f(x) > n\}$$

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \Rightarrow 0 \leq \int f d\mu - \int f_n d\mu \rightarrow 0$$

$$\underline{E_n} = \{x \in [0,1] / \underline{\mu(x)} > n\}$$

$$\underline{f_n}(x) = \begin{cases} n & \forall x \in E_n \\ \underline{f}(x) & \forall x \in E_n^c \end{cases}$$

$$\left(\int \underline{f} d\mu - \int \underline{f_n} d\mu \right) \rightarrow 0$$

$$= \int_{\underline{E_n}} \underline{f} + \int_{\underline{E_n^c}} \underline{f} - \int_{\underline{E_n}} \underline{f_n} - \int_{\underline{E_n^c}} \underline{f_n} = \int_{\underline{E_n}} \underline{f} + \cancel{\int_{\underline{E_n^c}} \underline{f}} - \int_{\underline{E_n}} n - \cancel{\int_{\underline{E_n^c}} \underline{f}}$$

$$= \int_{\underline{E_n}} \underline{f} - \int_{\underline{E_n}} n \Rightarrow \int_{\underline{E_n}} \underline{f} - \int_{\underline{E_n}} n \rightarrow 0$$

$$\exists \underline{N} / \boxed{0 \leq \int_{\underline{E_N}} \underline{f} - \int_{\underline{E_N}} N < \varepsilon/2} \leftarrow \leftarrow$$

$$\text{Sea } A \subset [0,1] \text{ med con } \underline{\mu(A)} < \delta = \underline{\varepsilon/2N}.$$

$$\forall \varepsilon \quad \int_A \underline{f} < \varepsilon.$$

$$\underbrace{\int f d\mu = \int f + \int f = \int f - \int N + \int N + \int \widehat{f}}_{\substack{A \cap E_N \quad A \cap E_N^c \quad A \cap E_N \quad A \cap E_N \quad A \cap E_N \quad A \cap E_N^c}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{A \cap E_N} f - \int_{A \cap E_N} N + \int_{A \cap E_N} N + \int_{A \cap E_N^c} \widehat{N} < \\ &\underbrace{\int_{A \cap E_N} f - \int_{A \cap E_N} N}_{f \in N \text{ on } E_N^c} + \int_{A \cap E_N^c} \widehat{N} = \int_A N d\mu = N \mu(A) < N \cdot \delta = N \frac{\epsilon}{2N} = \epsilon/2 \end{aligned}$$

$$< \int_{A \cap E_N} f - \int_{A \cap E_N} N + \epsilon/2 = \textcircled{\times}$$

$$\begin{aligned} \int_{A \cap E_N} f - \int_{A \cap E_N} N &= \lim_m \int_{A \cap E_N} f_m - \int_{A \cap E_N} N \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{PENSAR}}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A \cap E_N} (f_m - N) d\mu \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_N} (f_m - N) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{E_N} f_m - \int_{E_N} N d\mu = \int_{E_N} f - \int_{E_N} N d\mu < \epsilon/2 \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} m, m > N \\ \geq 0 \text{ (VER)} \end{array} \right.$

$$\therefore \int f d\mu < \textcircled{\times} < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Corolario

Sea f no negativa e integrable. La función

$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\mu$$

es uniformemente continua en $[0, 1]$.

$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\mu$$

$$F(0) = \int_{[0,0]} f d\mu = 0$$

$$F(1) = \int_{[0,1]} f d\mu$$

$$F(1/2) = \int_{[0,1/2]} f d\mu$$

$$\underbrace{\int_{[0,1/2]} f d\mu}_{\text{LEBESGUE}} \neq \underbrace{\int_0^{1/2} f dx}_{\text{RIEMANN}}$$