Fernando Vásche Lune Abr 19

Repaso

(E, d) Es pacio métrico

$A \subseteq E$

(ó $\forall r > 0$ $B^*(x, r) \cap A \neq \emptyset$, DONDE
$B^*(x, r) = B(x, r) \setminus \{x\}$)

$A' = \{$ PUNTOS DE ACUMULACIÓN DE $A \}$

Obs: Si A ES FINITO $\Rightarrow$ $A' = \emptyset$

Dem: PARA QUE $x \in A'$, ES NECESARIO QUE A TENGA INFINITOS PUNTOS.

EJ: SEAN (E,d) e.m., $A, B \subseteq E$.

DECIDIR SI VALEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES ¡JUSTIFICAR!

i) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

ii) $(A')' = A'$

iii) $A' = \bar{A} \setminus \{\text{PUNTOS AISLADOS DE } A\}$

iv) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

v) $(A \cap B)' = A' \cap B'$

$\left.\begin{array}{l} \text{iv)} \\ \text{v)} \end{array}\right\}$ Tarea

i) Si $x \in A' \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinito

$\Rightarrow$ Como $A \subseteq B$

$\forall r > 0, \ B(x,r) \cap B$

es infinito

$\Rightarrow x \in B'$

$\therefore$ es Verdadero.

ii) $(A')' = A'$

$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

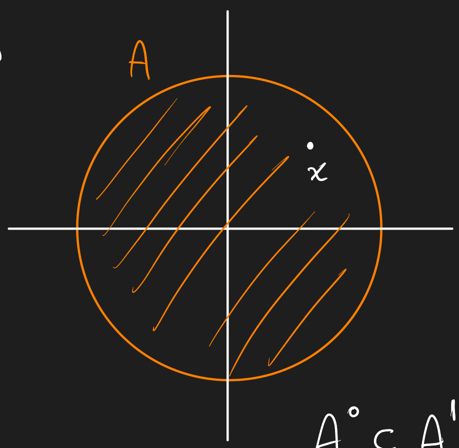
$\Rightarrow A' = \{0\}$

$\Rightarrow (A')' = \phi$

$\therefore$ es Falso!

iii) $A' = \overline{A} \setminus \{\text{Puntos aislados de } A\}$

ej



$x \in A'$ son los elementos de A a los que me puedo acercar con puntos de A (por ej, con alguna sucesión)

$A^\circ \subseteq A'$

Dem:

$\subseteq$) $A' \subseteq \overline{A} \setminus \{\text{Puntos aislados de } A\}$

Porque si $x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A}$

y además x no es un punto aislado de A.

$\supseteq$) Sea $x \in \overline{A} \setminus \{\text{Puntos Aislados de } A\}$

Como $x \in \overline{A}$,

$\forall r > 0, \ B(x, r) \cap A \neq \phi$

Como x no es punto aislado

$$\# B(x,r) \cap A \geq 2 \quad \forall r>0$$

- $x \in A$
- $x \notin A$

$$\# B(x,r) \cap A \geq 1 \quad \forall r>0$$

EN CUALQUIER CASO $\left(B(x,r) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset$ $\forall r>0$.

LUEGO $A' = \bar{A} \setminus \{\text{PTOS AISLADOS DE } A\}$

(PENSAR) $\Downarrow$

$$\bar{A} = A' \,\dot{\cup}\, \{\text{PTOS AISLADOS DE } A\}$$

<u>Obs</u>: (i) SI $A \subseteq E$ SATISFACE $A' = A$ SE DICE QUE A ES PERFECTO.

Por ej:

$A = [0,1]$ en $E = \mathbb{R}$

¿y otro conj. perfecto?

más difícil!

Si A es perfecto ¿Qué podemos decir de $\# A$? no vacío

Debe ser $\# A \geq \aleph_0$

(Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es perfecto

se puede decir algo más...

vale que $\# A > \aleph_0$

Borde de un conjunto (Repaso)

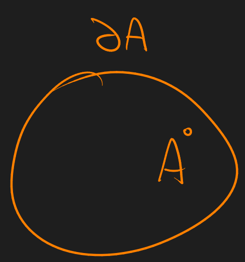
Sean (E,d) e.m, $A \subseteq E$. Entonces decimos que un punto $x \in E$ es punto frontera de A si y sólo si $\forall\, r > 0$ vale que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

Notamos $\partial A = \{$ puntos frontera de $A \}$

Obs: $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

En la teórica vimos que $\bar{A} = A \,\dot\cup\, \partial A$,

$\underbrace{\text{veamos que } \bar{A} = \mathring{A} \,\dot\cup\, \partial A}_{\text{ejercicio}}$

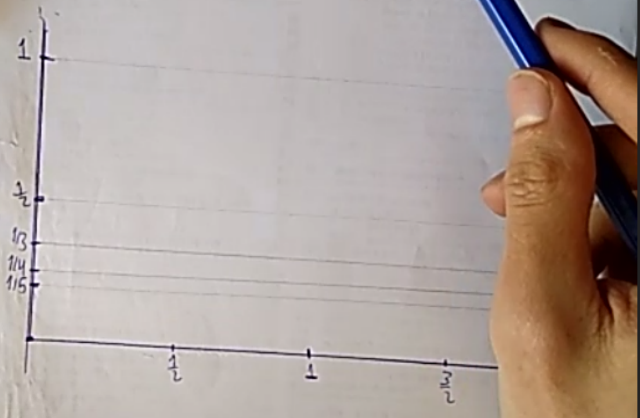


Ej: Sea $A = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} , \frac{1}{m} \right) \mid n \text{ y } m \in \mathbb{N} \right\}$

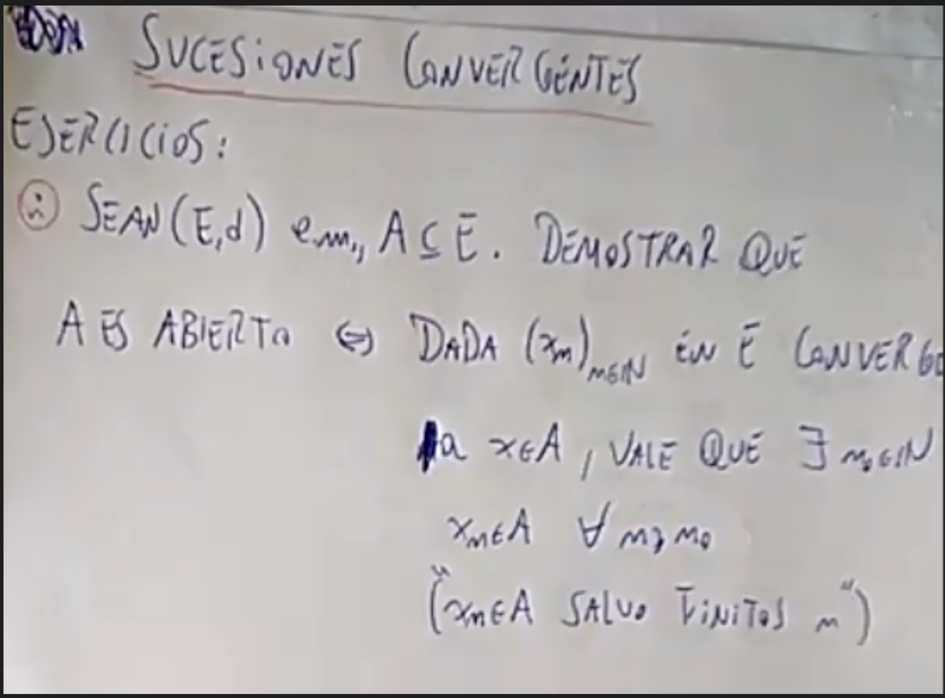
Hallar $\mathring{A}, \bar{A}, A', \partial A, A_{Ais}, (A')'$

Donde $A_{Ais} = \{$ Puntos aislados de $A \}$

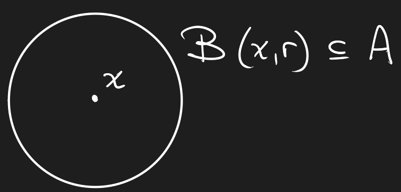
— · —



Teres



Idea:



A partir de un momento n_0

todo $x_n \in B(x,r) \subseteq A$

Dem

$\Rightarrow$) Como $x \in A$,

$\exists\, r>0 \;/\; B(x,r) \subseteq A$

Como $x_n \longrightarrow x$, tomando $\varepsilon = r$,

existe $n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \underbrace{x_n \in B(x,r)}_{d(x_n,x)\,<\,r} \quad \forall n \geq n_0$

Luego $x_n \in A \quad \forall n \geq n_0$ ✓

$\Leftarrow$) Sea $x \in A$:

Veamos que

$$\exists r>0 \ / \ B(x,r) \subseteq A$$

Supongo que no pasa, es decir

$$\forall r>0, \quad B(x,r) \not\subseteq A \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} \text{equivalentemente:} \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \\ x \in \overline{A^c} \\ \text{"Clausura de } A^c\text{"} \end{array}$$

En particular:

$$B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) \not\subseteq A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar

$$x_n \in B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) \qquad x_n \notin A$$

o sea que

$$(i) \quad d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

$$(ii) \quad x_n \notin A \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) Luego

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Por lo que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Como $x_n \notin A$ $\forall n \geq n_0$ esto es absurdo!

(pues

⊙ CUESTIÓN... (8)

SEAN $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUC. EN (E,d) e.m. y

$A=\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ (Si $a:\mathbb{N}\to E$, $A=\mathrm{Im}(a)$)

¿QUE PODEMOS DECIR DE A' EN RELACIÓN A LA SUCESIÓN?

EJEMPLO: $E=\mathbb{R}$ $a_n=(-1)^n$

$\Rightarrow A=\{-1,1\}$

Obs: $A'=\emptyset$

Veamos que

$$A' \underset{✪}{\subseteq} \left\{ y\in E \;/\; \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ sub suc tq } a_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} y \right\}$$

Tarea: Demostrar,

¿Qué condición podemos imponer sobre (a_n) de manera que en ✪ valga la igualdad?

Podemos pedir que (a_n) sea inyectiva.