Análisis Avanzado - Supremos e ínfimos

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Supremo

Supremo

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de* A si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Supremo

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de A* si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Ejemplo

cota superior

- $[0, 1]$ esta acotado~~s~~ superiormente por 1. Y también por 2 y por 4.5 y por 1000....

Supremo

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de A* si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Ejemplo

- $[0, 1]$ esta acotados superiormente por 1. Y también por 2 y por 4.5 y por 1000....
- $\{-13, 0, 1, 3, 7\}$ está acotado superiormente,

Supremo

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de* A si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Ejemplo

- $[0, 1]$ esta acotados superiormente por 1. Y también por 2 y por 4.5 y por 1000....
- $\{-13, 0, 1, 3, 7\}$ está acotado superiormente,
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{4}\}$ está acotado superiormente, $(-\infty, 3/4]$

Supremo

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de A* si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Ejemplo

- $[0, 1]$ esta acotados superiormente por 1. Y también por 2 y por 4.5 y por 1000....
- $\{-13, 0, 1, 3, 7\}$ está acotado superiormente,
- $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{4}\}$ está acotado superiormente,
- $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par } \}$ no es acotado superiormente.

$\underline{n = 2k} \in \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} = A$

Si $c \in \mathbb{R}$ que es cota sup de A

$\Rightarrow \quad 2k \leq c \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Sabemos que $\exists N \in \mathbb{N} \;/\; c < N \leq 2N \in A$

$\underline{\text{ABS!}}$

Principio de Arquímedes

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$.

Principio de Arquímedes

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$.

A la menor cota superior es de un conjunto A (acotado superiormente y no vacío) la llamamos *supremo de A*

Definición de Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice $\boxed{\textit{supremo de } A}$ si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$; $\rightarrow$ s es cota superior

(b) $\underbrace{\text{si } t \in \mathbb{R} \text{ satisface } t \geq x \text{ para todo } x \in A}_{t \text{ cota sup}}$, entonces $s \leq t$.

s es la menor de las cotas sup.

Definición de Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

Observación

- El supremo es único.

hay que probarlo (Ejercicio)

- La existencia del supremo se debe al axioma de completitud de $\mathbb{R}$.

Todo conjunto $\neq \emptyset$ y acotado sup de $\mathbb{R}$ tiene sup.

Ejemplo

• $A=[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ Afirmo: $1=\sup(A)$.

Dem: (1) qvq 1 es cota sup

(2) la menor de las cotas sup.

(1) $\rightarrow$ $x\in A \Rightarrow 0\le \underbrace{x\le 1}$ (<) $\rightarrow$ 1 cota sup.

(2) $\rightarrow$ t es una cota sup. de A $\Rightarrow$ $t\geq 1$ pues $1\in A$. $\Rightarrow$ 1 es el sup(A).

$B=[0,1)$ Afirmo que $1=\sup(B)$

cota sup ✓. Si t cota sup de B qvq $t\geq 1$.

Sup $t<1$

$\rightarrow \frac{t+1}{2}=x\in(t,1)$

$(t\geq 0) \Rightarrow x\in(t,1)\subseteq B \Rightarrow x\in B$ pero

$x>t$ ABS! pues t cota sup. $\Rightarrow t\leq 1 \Rightarrow \sup(B)=1$.

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

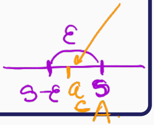
(a') $s \geq x$ para todo $x \in A$; s es cota sup

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a') $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \varepsilon$.



Dem: ⊛ $s = \sup(A) \Rightarrow s$ cumple (a') y (b').

(a') ✓ ((a') = (a))

· Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ como $s-\varepsilon < s$, $s-\varepsilon$ no puede ser cota sup. de A. $\Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, a > s-\varepsilon$.

⊛ s / (a') y (b') $\Rightarrow$ qvq $s = \sup(A)$. Sea $t \in \mathbb{R}$ cota sup de A. qvq $t \geq s$. Sup que $t < s \Rightarrow t = s - \varepsilon$, $\varepsilon = (s-t) > 0$

$\underset{(b')}{\Rightarrow} \exists\, a \in A \,/\, t = s-\varepsilon < a$ ABS! xq t cota sup.

Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Cuando el supremo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *máximo de A* y lo notamos $\max(A)$.

Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Cuando el supremo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *máximo de A* y lo notamos $\max(A)$.

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Si existe $t \in \mathbb{R}$ cota superior de A tal que $t \in A$, entonces A tiene máximo y $\max(A) = t$.

Dem: Sea $s = \sup(A) \Rightarrow s \leq t$ pues t cota sup y $s = \sup(A)$.

Como $t \in A$, $t \leq s$ pues s cota sup.

$\Rightarrow t = s$.

$A = [0,1]$

Ínfimo

Ínfimo

Cotas inferiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $d \in \mathbb{R}$ es una *cota inferior* de A si $d \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado inferioirmente* si tiene una cota ~~superior~~. inferior!

Ínfimo

Cotas inferiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $d \in \mathbb{R}$ es una *cota inferiori de A* si $d \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado inferioirmente* si tiene una cota ~~superior~~. inf.

Definición de Ínfimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Un número $i \in \mathbb{R}$ se dice *ínfimo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $i \leq x$ para todo $x \in A$; (cota inf).

(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \leq x$ para todo $x \in A$, entonces $t \leq i$.

t cota inf. i mayor cota inf

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

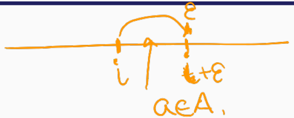
(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$;

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$; cota inf.

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$.



Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$.

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$.

Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Cuando el ínfimo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *mínimo de A* y lo notamos $\min(A)$.

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$.

Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Cuando el ínfimo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *mínimo de A* y lo notamos $\min(A)$.

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Si existe $t \in \mathbb{R}$ cota inferior de A tal que $t \in A$, entonces A tiene mínimo y $\min(A) = t$.

Nombre

Cuando un conjunto es acotado superiormente e inferiormente, decimos que es (simplemente) *acotado*.

Nombre

Cuando un conjunto es acotado superiormente e inferiormente, decimos que es (simplemente) *acotado*.

Proposición

Sea $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Entonces:

(1) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(2) $\sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$.

Dem: $A \mp B = \{a \mp b : a \in A, b \in B\}$

(1) $s_A = \sup(A)$ y $s_B = \sup(B)$ qvq $\sup(A+B) = s_A + s_B$

. $a \in A, b \in B \Rightarrow a+b \leq s_A + s_B \Rightarrow s_A + s_B$ cota sup de $A+B$.

. Voy a probar que vale (b'). Dado $\underbrace{\varepsilon>0}$ q.v.q

$\exists\, a\in A,\ b\in B \,/\ \underbrace{s_A+s_B}_{\Downarrow} - \varepsilon < a+b.$

$$s_A+s_B-\varepsilon = \left(s_A-\varepsilon/2\right) + \left(s_B-\varepsilon/2\right)$$

se que $\exists\, a\in A \,/\ a > s_A-\varepsilon/2$

se que $\exists\, b\in B \,/\ b > s_B-\varepsilon/2$

$\Rightarrow a+b > s_A-\varepsilon/2 + s_B-\varepsilon/2 = s_A+s_B.$

(2) dp. $\underline{\underline{1}}$ usamos arg. similar al ant.

$$s_A-i_B-\varepsilon = s_A-\varepsilon/2-\left(i_B+\varepsilon/2\right) \dots$$

dp2: $A-B = A+(-B) \longrightarrow \sup(-B) = -\inf(B).$

- En $\mathbb{R}$ todo conj $\neq \emptyset$ y acotado sup. tiene supremo.

- En $\mathbb{R}$ todo conj $\neq \emptyset$ y acot. inf tiene ínfimo.

- Si $A \subseteq \mathbb{R} \neq \emptyset$ y acotado $\Rightarrow$ $\inf(A) \leq \sup(A)$.

$\boxtimes$