

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de f .

8. Sea $(f_n)_{n \geq 1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f'_n(x)| \leq c$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

Puedo usar Weierstrass?

Sé:

$$f_n \rightarrow f$$

$$f_n \text{ es derivable} \Rightarrow f_n \text{ es continua}$$

$$\text{y como } f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

\uparrow
cerrado

$$\Rightarrow f_n \text{ es unif. continua.}$$

q.v.q

$$\text{Si } \exists c > 0 / |f'_n(x)| \leq c \stackrel{?}{\Rightarrow} f \text{ es continua.}$$
$$\left(\begin{array}{l} \forall x \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

Comienzo intentando probar que f es continua,
y uso \mathcal{H} = medida que les necesite

Si f fuese continua

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Qui se sent
esto!

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \\ &= \left| \underbrace{f(x) - f_n(x)} + \underbrace{f_n(x) - f_n(y)} + \underbrace{f_n(y) - f(y)} \right| \\ &\leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|} \end{aligned}$$

Use convergencia uniforme para acotar estos dos módulos

★

$$\begin{aligned} \text{Si } |f'_n(x)| &\leq c \quad \forall x \in [a, b] \text{ y } \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \int_a^b |f'_n(x)| dx &\leq \int_a^b c dx = (b-a) \cdot c \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f'_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f'_n(x)| dx \leq (b-a) \cdot c$$

$$\left| f_n(b) - f_n(a) \right| \leq \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot c$$

$$\therefore |f_n(x) - f_n(y)| \leq |y-x| \cdot c \leq (b-a) \cdot c$$

Y a tengo cotar para los 3 módulos

$$\left. \begin{array}{l} |f_n(x) - f(x)| < \alpha \\ |f_n(y) - f(y)| < \alpha \end{array} \right\} \text{ Para } n \geq n_0$$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < (b-a) \cdot c$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \underbrace{2 \cdot \alpha}_{\text{variable}} + \underbrace{(b-a) \cdot c}_{\text{fijo} > 0} < \varepsilon$$

quiero
↓

$$\alpha < \frac{\varepsilon - (b-a) \cdot c}{2}$$

$\therefore f$ es continua



Pues si elijo un α tal que valga la desigualdad de arriba, vale la continuidad de f .

α lo elijo a partir de elegir el n_0 correspondiente que cumpla que la distancia entre f_n y f sea menor a este α , lo cual sé que vale porque f_n converge UNIFORMEMENTE a f , con lo cual siempre existe un n_0 para cualquier α .

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a \mathbb{R} tal que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente en X .

(a) La función suma $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ es continua en X .

(b) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \geq 1} \int_a^b f_n(x) dx$.

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n \Rightarrow f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S_N = \sum_{n \geq 1}^N f_n \Rightarrow f \quad \begin{array}{c} \text{! Vale para} \\ \downarrow \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n \Rightarrow f$$

$$a) \text{ Sé } \quad \left| \sum_{n \geq 1}^N f_n(x) - f(x) \right| < \alpha \quad \begin{array}{c} \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n \Rightarrow f \\ \downarrow \end{array} \quad \text{con } \alpha > 0 \quad \forall x \in X \\ N \geq N_0$$

q.v.g

$$\text{si } \text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } |x - y| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n \geq 1}^{\infty} f_n(y) \right| < \varepsilon$$

hago lo mismo que en ej anterior: sumo y resto S_N

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \right|$$

$$= \left| \underbrace{f(x) - S_N(x)}_{\text{?}} + S_N(x) - \underbrace{f(y) + S_N(y) - S_N(y)}_{\text{?}} \right|$$

$$\leq \underbrace{|S_N(x) - f(x)|}_{\leq \alpha \text{ a partir de algún } N_0} + \underbrace{|S_N(y) - f(y)|}_{\leq \alpha \text{ a partir de algún } N_0} + \underbrace{|S_N(x) - S_N(y)|}_{?}$$

$$|S_N(x) - S_N(y)| = \left| \sum_{n=1}^N f_n(x) - f_n(y) \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^N |f_n(x) - f_n(y)|$$

$< \tilde{\epsilon}_n$ por continuidad de las f_n

Finalmente

$$|f(x) - f(y)| < \underbrace{2\alpha}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{N \cdot \tilde{\epsilon}_n}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

quiero
↓

Vale si ;

$$\alpha < \frac{\epsilon}{4}$$

$$\tilde{\epsilon}_n < \frac{\epsilon}{2N}$$

10. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones

$$\sum_{n \geq 1} a_n \cos nx \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$$

convergen absoluta y uniformemente en \mathbb{R} a funciones continuas.

11. Probar que:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

↖ serie de Taylor del Sin.

$$\sin x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo acotado. ¿Qué sucede en \mathbb{R} ?

(b) La función $f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ está bien definida en \mathbb{R} y es continua.

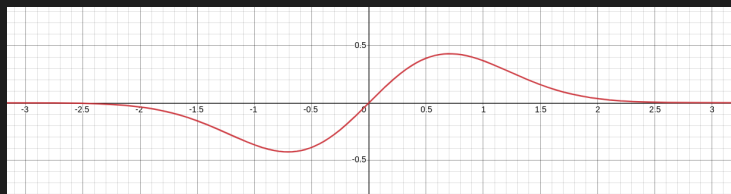
12. Sea $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

- (a) Calcular el límite puntual de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y probar que la convergencia es uniforme sobre \mathbb{R}
- (b) Probar que la serie de término general f_n converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma de $[a, +\infty)$ pero no en $(0, +\infty)$.

a) $f_n \rightarrow 0$

Ver $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{nx^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2nx \cdot e^{nx^2}} = 0$

Busco extremos de f_n



$$f'_n(x) = e^{-nx^2} - 2x^2 \cdot n \cdot e^{-nx^2} = 0$$

$$= \underbrace{e^{-nx^2}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(1 - 2nx^2)}_{\text{Debe ser 0}}$$

Debe ser 0

$$\Rightarrow 2nx^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

↑ extremos

$$f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } |f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{y adem\u00e1s } f_n(x) \rightarrow f$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

Si vemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty$, entonces "ESTAMOS".

Pero $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}e} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ No converge.

($\sum \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$)

No podemos aplicar WEIERSTRASS.

INTENTEMOS VER CUAL ES EL LIMITE PUNTUAL

DE $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. SEA x EL FIJO $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-n x^2} = x \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n x^2} = x \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x^2})^n$$

USANDO QUE $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \forall r \text{ con } |r| < 1$

Si $x \neq 0$ ~~$0 < e^{-x^2} < 1$~~
 $0 < \frac{1}{e^{x^2}} < 1$

EN ESTE CASO $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = x \cdot \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \frac{x}{e^{x^2} - 1}$

Si $x = 0$ $f_n(x) = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ CONV
 PUNTUAL-
 MENTE
 EN \mathbb{R}

$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{x^2} - 1} & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

Sigue! ver notas de consulta de Fer.

