

Demo equiv. 2

Sabemos: $s \in \mathbb{R}$ y acotado

(a') $s \geq x \quad \forall x \in A$

(b') $\exists (a_n)_n \subseteq A \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$

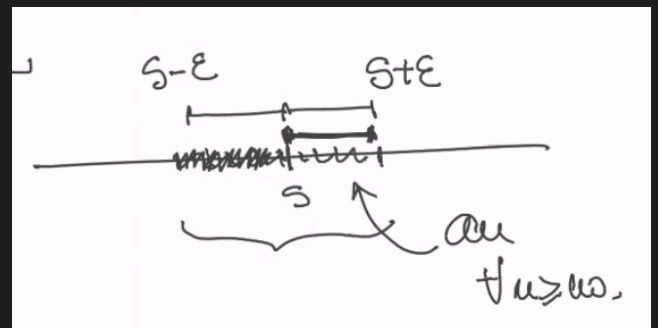
 $\nabla \forall$

$$s = \sup A \xrightarrow[\text{que}]{\text{debe darse}} 1) \text{ } s \text{ cota superior}$$

2) la menor de las cotas sup.

• como (a') $\Rightarrow s$ es cota sup• sea $\varepsilon > 0$. Por def. de límite

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - s| < \varepsilon$$



En fort. para mo

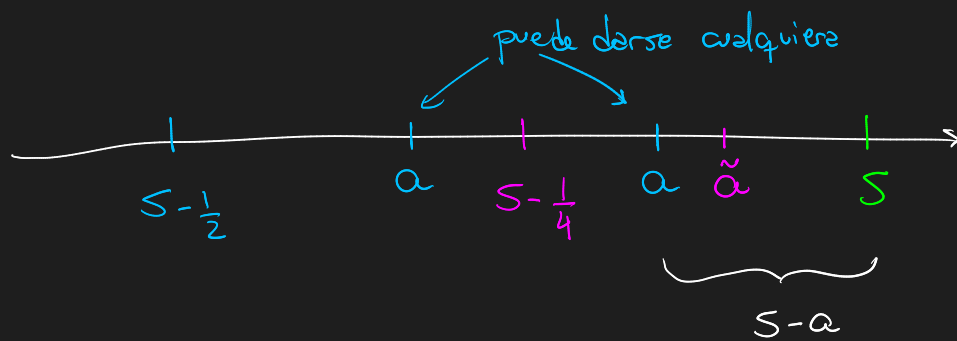
$$- \varepsilon < a_n - s < \varepsilon$$

$$\underbrace{s - \varepsilon < a_n}_{\text{No me importa}} < \underbrace{s + \varepsilon}_{\text{No me importa}}$$

es lo que quiero.

el $a \in A$ que necesito es a_n .

Demo de subconjunto de \mathbb{N}



$$\tilde{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{1}{4}, s-a \right\}$$

— 0 —

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sec. cualquiera acotado

$$A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Si $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\inf(A) =$$

$$\left. \begin{array}{l} \inf(A) = \min(A) = -1 \\ \sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Suc no convergentes

$$a_n = (-1)^n \cdot n \quad \boxed{\text{Diverge}}$$
$$\boxed{\forall \pi > 0 \quad \exists m_0 / |a_n| > \pi \quad \forall n \geq m_0}$$

Obs

"divergir" no es el opuesto a "converger"

Def:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$$

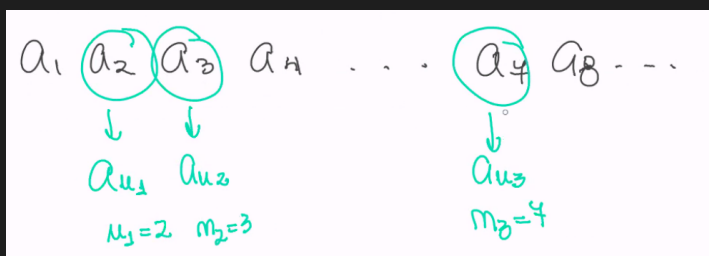
Decimos que $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sub suc.

$$\text{de } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{si } (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$$

es una sucesión estrictamente creciente

$$n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$




→
elijo siempre hacia adelante

- elijo en orden
- nunca mismo índice
- puedo saltar elementos

Ej:

Ej: $a_n = (-1)^n$



Tomo a_{n_k} con $n_k = 2k$

$$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k$$

Tomo a_{n_k} con $n_k = 2k - 1$

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} \\ &= (-1)^{-1} \cdot (-1)^{2k} = -1 \end{aligned}$$

De Alg. de Lím

$$\begin{array}{l} \cdot (a_n)_n, (b_n)_n \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \\ \text{qvg} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ |a_n - a| \\ \downarrow \\ |b_n - b| \end{array}$$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\stackrel{\text{Desig. Triang.}}{\leq} |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| \\ &= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| |b_n - b| \end{aligned}$$

como $(b_n)_n$ es convergente

$$\Rightarrow \exists M > 0 \quad / \quad |b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{acotado})$$

y también

si $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad / \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_1$$

y

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad / \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq n_2$$

Tomo

$$n_0 = \max \{n_1, n_2\}$$

si $n \geq n_0$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow n \geq n_1 \\ \text{oder} \\ n \geq n_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{vale } \boxed{*}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq \overbrace{M}^{\text{für } |a_n| \leq M} |a_n - a| + \overbrace{|a|}^{\text{für } |b_n| \leq M} |b_n - b|$$

$$< \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{M}} + \cancel{|a|} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{|a|}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

