COMPACIDAD II

RECORDAR: $K \subseteq E$ ES COMPACTO SI

$\forall \, (G_i)_{i \in I}$ FLIA DE ABIERTOS /

$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, $\exists \, J \subseteq I$ FINITO /

$K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$ → CUBRIMIENTO "ESTÁNDAR"

EJERCICIOS

1) SI K ES FINITO, ES COMPACTO:

SI $K = \{k_1, \dots, k_m\}$, $\forall \, 1 \leq l \leq m$,

TOMO $i_l \in I \, / \, k_l \in G_{i_l}$

→ SIRVE $J = \{i_1, \dots, i_m\}$

2) SEA $(x_n) \subseteq E$, $x_n \to x$.

$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ ES COMPACTO:

TOMO $i_0 \, / \, x \in G_{i_0}$. COMO ES ABIERTO,

$(\exists \, n_0)$ $x_n \in G_{i_0}$ $\forall \, n > n_0$

PARA $1 \le m \le m_0$, TOMO $i_m \in I$ / $x_n \in G_{i_m}$. ASÍ $J = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$ SIRVE.

3) $E = C([0,1])$ CON d_∞

VEAMOS QUE $\overline{B}(f_0, 1) = F$ NO ES COMPACTA

$\Big(\forall f,\quad ,\quad \varphi : E \to E$, $g \mapsto (g - f + f_0)$

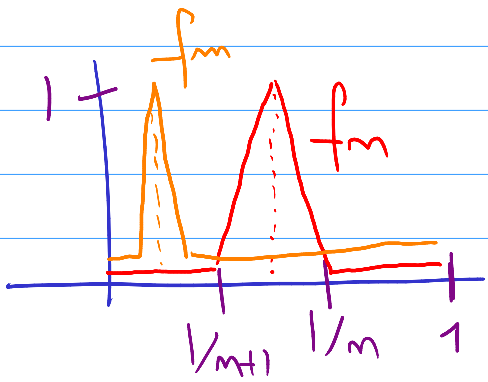
ES UN HOMEO, $\varphi(B(f,\varepsilon)) = B(f_0, 1) \Big)$

AFIRMO: SI TOMO $G_f = B(f, 1/3)$, CON $f \in F$ ENTONCES

$$F \subseteq \bigcup_{f \in F} \underbrace{B(f, 1/3)}_{G_f \text{, ABIERTO}} \quad ;$$

NO ADMITE UN SUBCUB. FINITO

SEA $\forall m \in \mathbb{N}$ $f_m \in F$:



ENTONCES $d(f_n, f_m) = \begin{cases} 0, & n = m \\ 1, & n \neq m \end{cases}$

NOTAR: SI $g, h \in \overline{B}(f, 1/3)$,

ENTONCES $d_\infty(g, h) \le d_\infty(g, f) + d_\infty(f, h) \le 2/3$ $\left(\operatorname{diam} \overline{B}(f, 1/3) \le 2/3 \right)$

ASÍ, $\forall f \in F$,

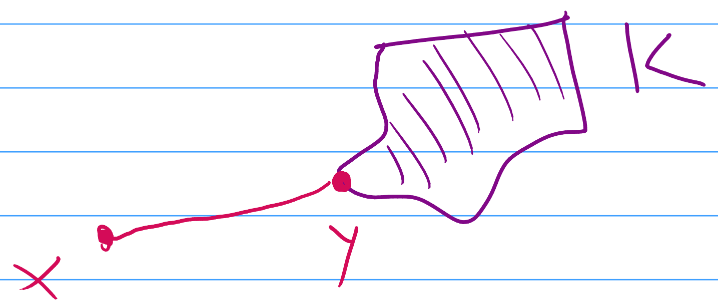
$\#\{ n : f_n \in \overline{B}(f, 1/3) \} \le 1$

$\rightsquigarrow \nexists \underbrace{F'}_{\text{FINITO}} \subseteq F \,/\, F \subseteq \bigcup_{f \in F'} \overline{B}(f, 1/3)$

4)

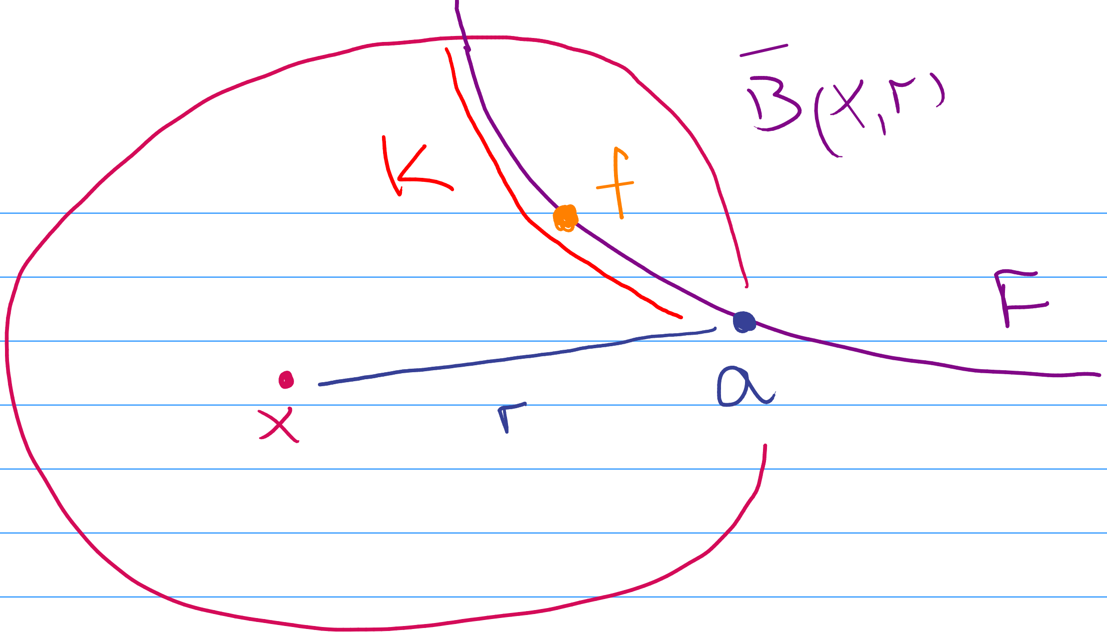
8. Probar que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto se realiza. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.

$= \inf \{ d(x, k) : k \in K \}$



AFIRMO: SI $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ES CERRADO,

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, F)$ SE REALIZA



Sea $K = \underbrace{F}_{\text{CERR}} \cap \underbrace{\bar{B}(x,r)}_{\text{COMPACTO}} \rightarrow$ COMPACTO

$\exists k \in K \subseteq F$, ...

AFIRMO: $d(x,F) = d(x,K) = d(x,k)$

DEM: $d(x,F) =$

$$\underbrace{\inf\{d(x,f) : f \in F\}}_{\in [0,+\infty)}$$

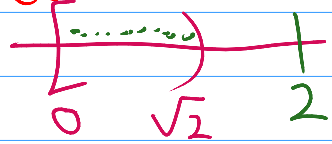
$\in [0,+\infty)$; ACÁ VIVE $r = d(x,a)$

REVISAR ↑

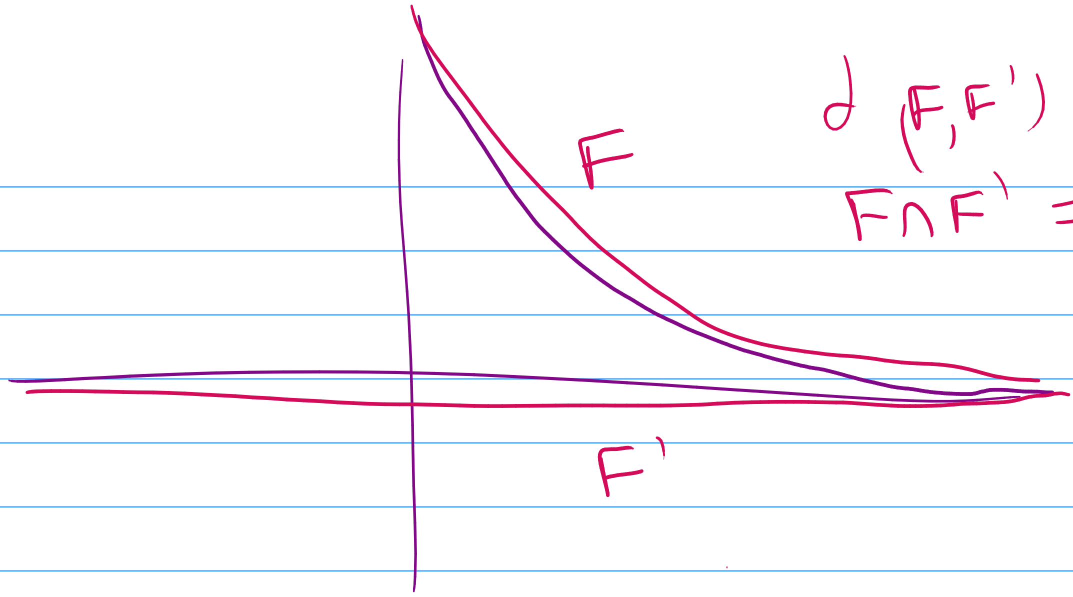
$$= \inf\{d(x,f) : f \in F, \underbrace{d(x,f) \leq r}_{f \in \bar{B}(x,r)}\}$$

$$= \inf\{d(x,f) : f \in K\} = d(x,K)$$

EJEMPLO: $F = \mathbb{Q} \cap [0,\sqrt{2})$. → ES CERR, NO COMPACTO



$d(2,F) = 2-\sqrt{2}$; NO SE REALIZA
$(\nexists x \in \mathbb{Q} \,/\, d(2,x) = 2-\sqrt{2} = |2-x|)$



$d(F,F')=0$

$F\cap F'=\emptyset$

9. Sea (E,d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 18 de la Práctica 3. Probar que si $A\subseteq E$ es compacto, $B\subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A\cap B=\emptyset$, entonces $\widehat{d}(A,B)>0$. ¿Sucede lo mismo si A es sólo cerrado?