Deni

Cardinalidad #2

Viernes 2 Abril

Conjuntos numerables

X es numerable $\Leftrightarrow$ $\exists f : \mathbb{N} \to X$ Biyectiva

Observación

X es numerable $\Leftrightarrow$ X se puede escribir como una sucesión de elementos distintos

$$X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

Dem:

$\Rightarrow$) Si X numerable

$\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva

f es una sucesión!

Sea $x_n = f(n)$

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

que es lo mismo que

Como f es suryectiva (es biyectiva)

$$X = \operatorname{Im} f = \{ f(n) : n \in \mathbb{N} \}$$

Falta 2° propiedad

Si $n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$

f inyectiva
(biyectiva)

$\Rightarrow x_n \neq x_m$

$\Leftarrow$) Pensar. Muy parecido. Lo hago:

Si $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$$= \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Sea $f : \mathbb{N} \to X$

$f(n) = x_n$

Como $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$\Rightarrow f$ es biyectiva (a cada natural le asigna un elemento distinto de X)

$\Rightarrow \quad \mathbb{N} \sim X$

$\therefore$ X es numerable

$\boxtimes$

Ejemplo

- $\mathbb{R}$ no es numerable.

$\mathbb{R}$ no es una sucesión.

Sea $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ alguna sucesión cualquiera

y veamos que

$$\exists\, y \in \mathbb{R} \;/\; y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Desarrollo decimal de los x_n:

$$\begin{array}{l} \quad\; \text{Parte entera} \in \mathbb{Z} \\ \qquad\quad \downarrow \\ x_1 = m_1 \,,\; a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} \;\; a_{14} \;\; \ldots \\ x_2 = m_2 \,,\; a_{21} \;\; a_{22} \;\; a_{23} \;\; a_{24} \;\; \ldots \\ x_3 = m_3 \,,\; a_{31} \;\; a_{32} \;\; a_{33} \;\; a_{34} \;\; \ldots \\ \quad\;\vdots \end{array}$$

Sea

$$y = 0,\; b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4$$

eligiendo

$b_1 \neq a_{11}$

$b_2 \neq a_{22}$

$b_3 \neq a_{33}$

$b_4 \neq a_{44}$

$\vdots$

más precisamente

$$b_n = \begin{cases} 3 & a_{nn} \neq 3 \\ 5 & a_{nn} = 3 \end{cases}$$

lo fuerzo a que sea distinto

Con esto,

y tiene desarrollo único (no es $0,\widehat{99}$)

$\Rightarrow y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pues el n-ésimo dígito de y

es $\neq$ al n-ésimo dígito de x_n

$\therefore \nexists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Biyectiva

$\therefore \mathbb{R}$ no es numerable. $\blacksquare$

Otra manera es mostrar que

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

Propiedades Fundamentales de Conjuntos Infinitos

Teorema

Sea X infinito

$\Rightarrow \exists\, Y \subset X$ numerable.

Dem

Solo basta encontrar una sucesión dentro de X

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \neq \phi$$

$$\Rightarrow \exists\, x_1 \in X$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1\} \neq \phi$$

$$\Rightarrow \exists\, x_2 \in X \setminus \{x_1\} \quad \left(\begin{matrix}\text{notar que} \\ x_1 \neq x_2\end{matrix}\right)$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \phi$$

$$\Rightarrow \exists\, x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$$

y así puedo seguir

Inductivamente

Si ya elegimos

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ distintos

$\Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$

con $x_n \neq x_i$

con $i \in [1, n-1]$

Defino

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ $\quad x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$\therefore$

$Y = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \} \subset X$

$\uparrow$

es numerable!

$\blacksquare$

Observación

Decir

"X tiene un subconjunto numerable"

es lo mismo que decir

$$\exists f : \mathbb{N} \to X \quad \text{Inyectiva}$$

Entonces, el Teorema dice que

$$\underset{\swarrow \text{Aleph}}{\aleph_0} \leq \# X \qquad \forall X \text{ infinito}$$

Obs:

Aleph$_0$ es el menor de todos los cardinales infinitos.

Proposición

Si X es infinito,

Por qué los primos son numerables?

$$\exists\ Z \subset X,\ Z \text{ numerable} \ /\ X \sim X \setminus Z$$

Dem

$$X \text{ infinito} \overset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \exists\, Y \subset X \text{ numerable}$$

Idea

$$X = (X \setminus Y) \cup Y$$

$$= (X \setminus Y) \cup Y_{\text{Pares}} \cup Y_{\text{Impares}}$$

con

$$Y_{\text{Pares}} = \{ y_{2n} : n \in \mathbb{N} \}$$

$$Y_{\text{Impares}} = \{ y_{2n+1} : n \in \mathbb{N} \}$$

$$= (X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

Disjuntas

y además

$$\Big(\overbrace{Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}}}^{Y}\Big) \sim Y_{\text{Pares}}$$

Pues $\left.\begin{array}{l} f : Y \to Y_{\text{Pares}} \\ f(y_n) = y_{2n} \end{array}\right\}$ Biyectiva

Entonces

$$(X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}} \sim (X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\sim \quad X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

Si llamo $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un $Z \subset X \ / \ X \sim X \setminus Z$

$\blacksquare$

Otra forma:

Puedo definir

$$h : X \to X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin Y \\ f(x) & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

que es Biyectiva

$$\therefore \quad X \sim X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

Si llamo $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un $Z \subset X \ / \ X \sim X \setminus Z$

$\blacksquare$

Ejercicio (de la práctica 2)

Si A es numerable

y $B \setminus A$ es infinito

$\Rightarrow B \setminus A \sim B$

Ejercicio

Si X es infinito

y A es numerable

$\Rightarrow X \sim X \cup A$

Obs

Puedo unir numerable numerables, y obtener un numerable !

Subconjuntos Propios

Corolario

Un conjunto es infinito $\Leftrightarrow$ es coordinable con un subconjunto propio

$\mathbb{R} \sim [1, \pi)$

$\mathbb{R} \sim$ Cualquier intervalo

$\mathbb{R} \sim \{ e^x : x \in \mathbb{R} \}$

Dem

$\Rightarrow$) Vimos que si

X es infinito

$\Rightarrow \exists Z \subset X \ / \ X \sim \underbrace{X \setminus Z}$ ✓

subconj propio de X

$\Leftarrow$) No es tan fácil de mostrar

(sale con inducción)

Idea:

Si X es finito $\Rightarrow$ X no es coordinable

con ningún subconj propio.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Si:

$$\left.\begin{array}{l} \exists f : X \to Y \text{ inyectiva} \\ \exists g : Y \to X \text{ inyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists h : X \to Y \text{ biyectiva}$$

Corolario

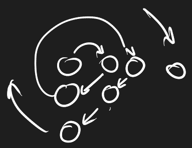
La relación $\leq$ entre cardinales

es una relación de orden.

Ejemplo

Sirve para mostrar que

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$$

sin definir la función biyectiva: 

Defino

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

$$f(n) = n \quad \text{inyectiva}$$

$$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$$

sea $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{m}{n}$ con $\underbrace{m, n}_{\text{únicos!}} \in \mathbb{Z}$

y $\underbrace{(m, n)}_{\text{MCD (coprimos)}} = 1$

Primos

$$g(q) = \begin{cases} 2^{m} \cdot 3^{n} & \text{si } m \geq 0 \\ 5^{|m|} \cdot 3^{n} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Por descomposición única:

$\Rightarrow g$ es inyectiva !

$\therefore$ Por C-S-B

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \quad \blacksquare$$

Ejemplo:

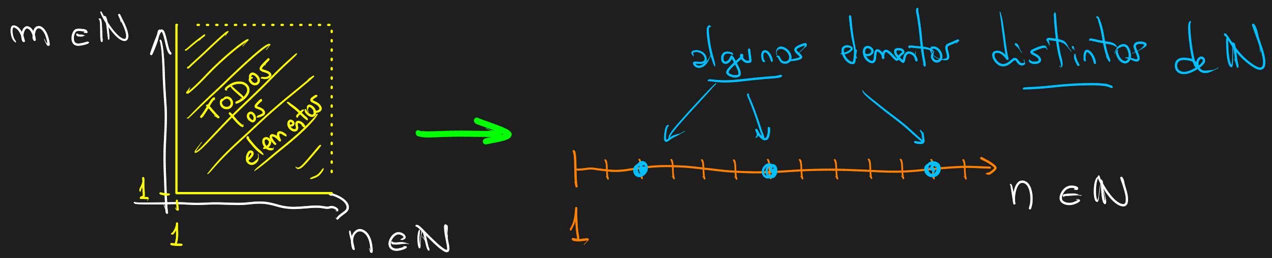
$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Armo 2 funciones inyectivas

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$f(n) = (n, 1) \quad \text{inyectiva}$$

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$



$$g(n, m) = 2^{n} \cdot 3^{m} \quad \text{inyectiva.}$$

primos

(Para cada n, m, tengo una descomposición distinta en primos)

$\therefore$ Por C.S.B.

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

∎

Obs:

Se puede usar para probar que unión numerable de numerables es numerable.

Dem. de

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Idea

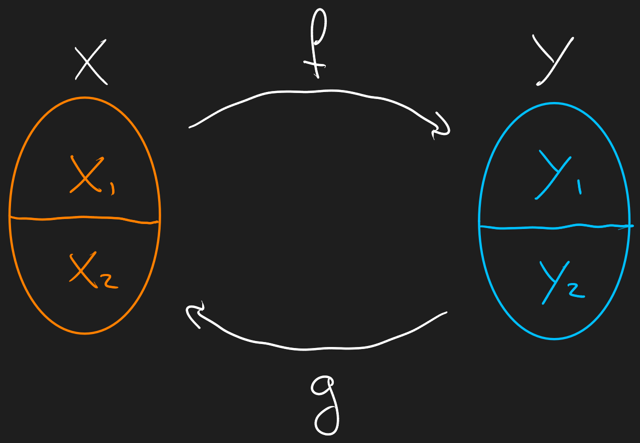
Tenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

queremos h biyectiva

Entonces

Si partimos X e Y, de forma que



$$X = X_1 \uplus X_2$$

$$Y = Y_1 \uplus Y_2$$

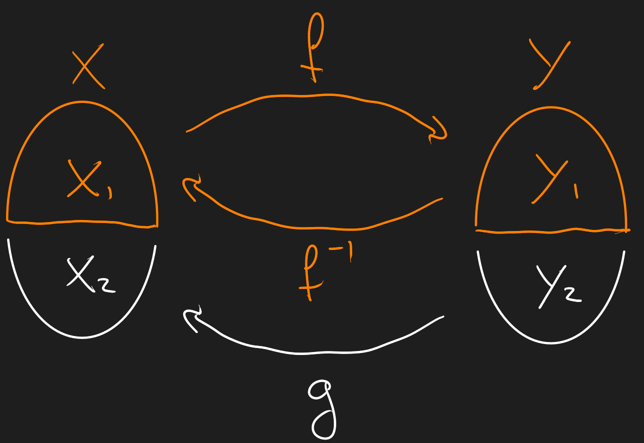
y además, si encuentro

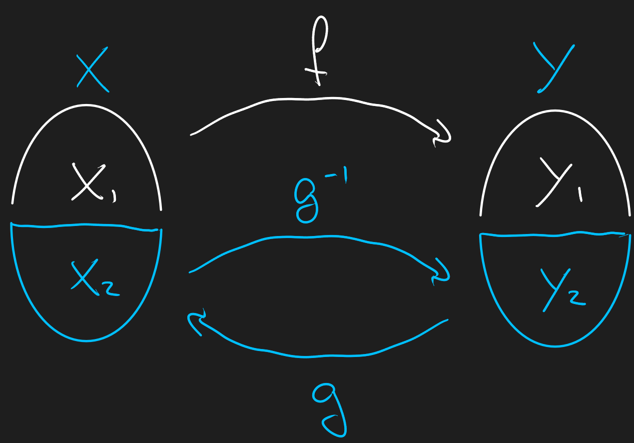
$$f : X_1 \to Y_1 \quad \text{Biyectiva}$$

$$g : Y_2 \to X_2 \quad \text{Biyectiva}$$

Entonces, busco f y g /

ya existía (f inyectiva)





ya existía (g inyectiva)

Con ésto, puedo definir

$$h : X \to Y$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2 \end{cases}$$

Que es biyectiva, y listo.

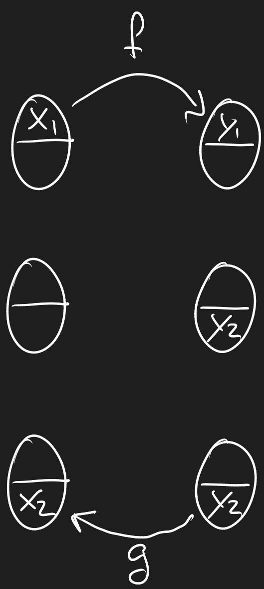
Dado cualquier $x_i \in X_1$

le aplico f a cada $x_i \in X_1$

$\Rightarrow Y_1 = f(X_1)$

$\Rightarrow Y_2 = Y \setminus f(X_1)$

$\Rightarrow X_2 = g\left(Y \setminus f(X_1)\right)$



$\Rightarrow X_1 \stackrel{?}{=} X \setminus g\left(Y \setminus f(X_1)\right)$

queremos ver ésto

El "Truco" será elegir bien el X_1 inicial.

Buscamos

$$X_1 \subset X \;/\; X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$$

solo basta
encontrar X_1 que cumpla esto

Defino

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

$$\phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

y buscamos $X_1 \subset X$ /

$$\phi(X_1) = X_1$$

Punto fijo.

Prop de ϕ

Si $A \subseteq B \subset X$

$$\Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$\Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B)$$

$$\Rightarrow g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$$

$\therefore$ ϕ es una función creciente

$$\boxed{\text{Si } A \subseteq B \subset X \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)}$$

Volviendo, buscamos

$$X_1 \subset X \;/\; \phi(X_1) = X_1$$

Defino

$$\mathcal{C} = \{ C \subseteq X \;/\; \phi(C) \subseteq C \}$$

solo una desigualdad.

Obs!

Si de todos los $C \in \mathcal{C}$ me quedo con los más chicos ó los más grandes

$\Rightarrow$ tengo grandes chances de que cumplan la igualdad

Para eso, elijo

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

y veamos que sirve.

Como $X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

$\Rightarrow X_1 \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \phi(C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de } \mathcal{C}}}{\subseteq} C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

y como definimos

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$\Rightarrow \boxed{\phi(X_1) \subseteq X_1}$ Tenemos $\subseteq$, falta $\supseteq$

Si aplico ϕ de nuevo

$\Rightarrow \phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1)$

De nuevo, por def. de $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \,/\, \underbrace{\phi(C)}_{\phi(\phi(X_1))} \subseteq \underbrace{C}_{\phi(X_1)}\}$

$\phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1)$

$\Rightarrow \phi(X_1) \in \mathcal{C}$

y como definimos

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$\phi(X_1)$ es uno de ellos

$$\Rightarrow X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \phi(X_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 \subseteq \phi(X_1)}$$ que es lo que buscábamos

$\therefore$

$$X_1 = \phi(X_1)$$

$\therefore$ Tengo $Y_1 = f(X_1)$

$\therefore$ Tengo $Y_2 = Y \setminus f(X_1)$

$\therefore$ Tengo $X_2 = g(Y \setminus f(X_1))$

$\therefore$ Si $\exists f : X \to Y$ inyectiva

y $\exists g : Y \to X$ inyectiva

$\Rightarrow \exists h : X \to Y$ Biyective

$\blacksquare$