

Successiones de Funciones

- Series para la próxima

Notación de hoy:

A : Conjunto

X, Y : Espacio métrico (conj, dist)

Ejemplo

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x + 1}{n}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{n \cdot x + 1}{n} = \frac{n \cdot x}{n} + \frac{1}{n} \\ &= x + \frac{1}{n} \longrightarrow x \end{aligned}$$

Sí

$$f(x) = x$$

$$\text{p/c. } x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

Cada vez que evaluamos tenemos convergencia!

" "

Convergencia Puntual

Definición

La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge puntualmente a $f : A \rightarrow Y$ si para todo $x \in A$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ejemplos :

$$\boxed{1} \quad f_n(x) = \frac{nx + 1}{n}$$

$$f(x) = x$$

$\Rightarrow f_n$ converge puntualmente a f .

$$\boxed{2} \quad f_n(x) = \cos(nx)$$

Però un $x = \pi$

$$f_n(\pi) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ im par} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n$ no converge puntualment a ninguna funció.

$$\boxed{3} \quad f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \quad \begin{matrix} x \in [0, 1] \\ \downarrow \\ = \end{matrix} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{array} \right.$$

$f_n \rightarrow f$ puntualment

$$\text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

• Notar que f_n es contínua

y f no !

Obs :

Queremos una noción de convergencia que preserve la continuidad.

Obs :

$f_n \rightarrow f$ puntualmente

$$\text{es: } \forall x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall x \in A : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 /$$

$$d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

notar que :

n_0 depende de ε y de x

Cuando el n_0 no depende de x tenemos

Convergencia Uniforme:

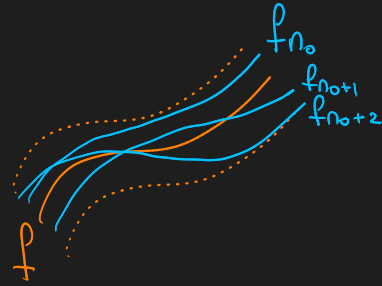
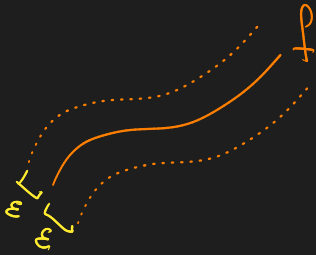
Definición

La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en Y **converge uniformemente** a $f : A \rightarrow Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in A$.

en \mathbb{R} , a partir de un n_0



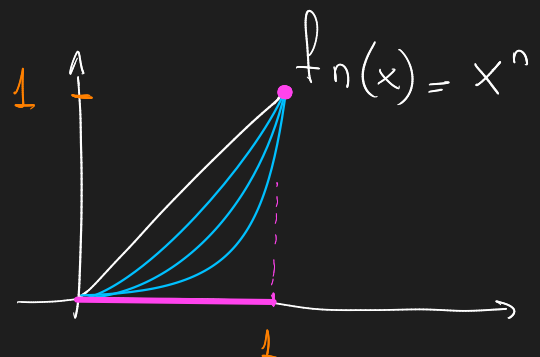
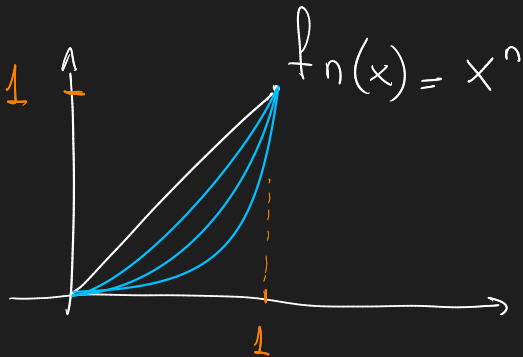
$$f_n \Rightarrow f$$

$$\xrightarrow{u}$$

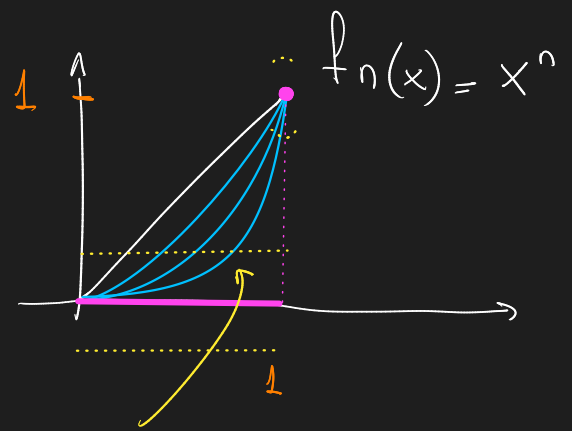
Ejemplos :

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = x^n$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$



Todas las f_n se escapan
de la banda

$$\Rightarrow f_n \not\rightarrow f$$

(ejercicio: demo)

usando ej 1 de la guía 7

$$\boxed{2} \quad f_n(x) = \frac{\cos x}{n}$$

$f_n(x) \rightarrow 0$ puntualmente

¿es uniforme la convergencia?

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{\cos x}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\text{Si } n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

n_0 no depende de x !

Teorema

Si una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones continuas de X en Y converge uniformemente a $f : X \rightarrow Y$, entonces f es continua.

Dem:

H) f_n continua $\forall n$

$$f_n \Rightarrow f$$

q.v.q

f cont?

Por conv. unif. de las f_n ($f_n \Rightarrow f$):

$x_0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$



$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / d'(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

↑ función que se parece
mucho a $f(x)$

$$\forall n \geq n_0 \\ \forall x \in X$$

Además

f_{n_0} es continua en x_0 (pues es cont.)

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 /$$

$$\text{Si } d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalmente

$$\text{Si } d(x, x_0) < \delta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) &\stackrel{\text{desig. Triang}}{\leq} d'(f(x), f_{n_0}(x)) + \\ &+ d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \\ &+ d'(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$f_n \Rightarrow f$

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$\therefore f$ es cont. en x_0 arbitrario

$\therefore f$ es continua.



Pensar: Si $f_n \Rightarrow f$

- f_n unif. cont. $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$ unif. cont.
- f_n acotada $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$ acotada
- f_n deriv $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$ deriv

Proposición

Sea $f_n \Rightarrow f$, con $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Dem:

Idea: Si las curvas son parecidas \Rightarrow las áreas debajo de ellas son parecidas

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists n_0 / \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{?}, \forall n \geq n_0 \\ \forall t \in [a, b]$$

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t) dt \right| \\ \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{?}} dt$$

quiero

$$\int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{?}} dt < \varepsilon$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{?} dt = \frac{\varepsilon}{?} \cdot (b - a) < \varepsilon$$

$$\text{elijo } ? = 2 \cdot (b - a)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \int_a^b f_n(t) dt \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

□

compacto !

Proposición

Sean f_n de clase C^1 en $[a, b]$, $f_n \rightarrow f$ puntualmente en $[a, b]$, y $f'_n \Rightarrow g$.
Entonces, f es derivable y $f' = g$.

Dem (Idea) :

1° - g es continua por Teorema anterior

$$(f'_n \text{ cont } g \quad f'_n \Rightarrow g)$$

2° - Por Barrow / TFC

$$f_n(x) - f(a) = \int_a^x f'_n(t) dt$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \Downarrow \\ f(x) & f(a) & g(t) \end{array}$$

Prop: Convergencia de integrales

$$\int_a^x g(t) dt$$

Sigo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = f(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a)$$

Por TFC

TFC:

$$H(x) = \int_a^x h(t) dt \quad h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont}$$

$$H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad H \text{ deriv. } \gamma \quad H' = h.$$

K compacto , en espacios métricos , vimos que

$$(f_n)_n \subset \mathcal{C}(K)$$

$$f \in \mathcal{C}(K)$$

$$f_n \rightarrow f \text{ en } \|\cdot\|_\infty$$



$$f_n \rightrightarrows f$$

E. Completar

\mathbb{R}, \mathbb{R}^n

$\in [0, 1]$, $\in [\text{Compacto}]$

La convergencia uniforme "se lleva bien" con ser de Cauchy.

Definición

Una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en Y es **uniformemente de Cauchy** si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

para todos $m, n \geq n_0$ y todo $x \in A$.

Teorema

Si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de A en \mathbb{R} es uniformemente de Cauchy, entonces converge uniformemente a una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Dem :

Obs :

Si $(f_n)_n$ es unif. de Cauchy

\Rightarrow para cada $x_0 \in A$,

$(f_n(x_0)) \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy

\uparrow \times fijo
Sucesión sobre un x fijo

• Como \mathbb{R} es completo

$\Rightarrow (f_n(x_0))_n$ es convergente en \mathbb{R} .

Defino candidato a limite

$$\text{Se } \forall x \in \mathbb{R}, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

Defino candidato

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\begin{array}{ccc} q.v.q & ? & \\ f_n & \xrightarrow{\quad} & f \end{array}$$

Seja $\varepsilon > 0$

Como $(f_n)_n$ é unif. de Cauchy:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} /$$

$$d'(f_n(x) - f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$$

$$\forall x \in A$$

• Se fixo n e x em (\mathbb{R}, d')

$$\Rightarrow 0 \leq |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq n_0$$

Como

$$f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x) \quad (\text{candidato})$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \longrightarrow |f_n(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \begin{array}{l} \forall n \geq n_0 \\ \forall x \in A \end{array}$$

$$\therefore f_n \rightrightarrows f$$



Pensar

$\mathcal{C}(K)$, K compacto

$$(f_n) \subset \mathcal{C}(K)$$

$$\bullet (f_n)_n \text{ unif de Cauchy} \Leftrightarrow (f_n)_n \text{ es de Cauchy en } \|\cdot\|_\infty$$

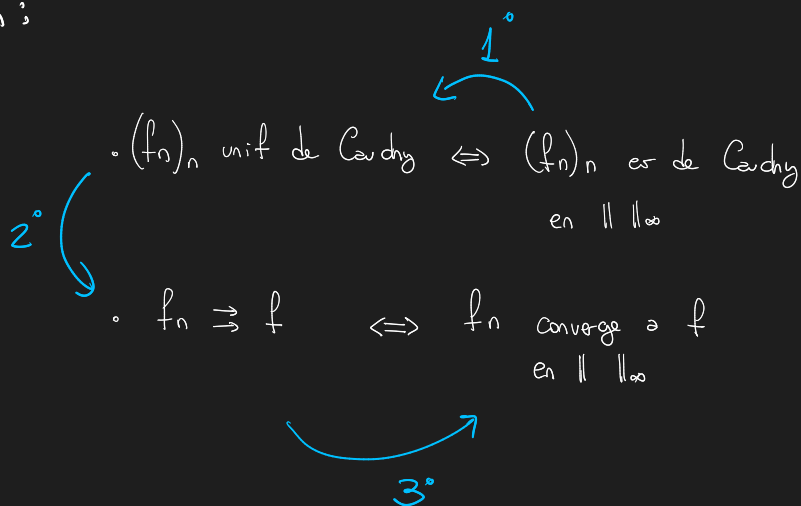
$$\bullet f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \text{ converge a } f \text{ en } \|\cdot\|_\infty$$

↑
necesariamente
continua.

Tes :

$(C(k), \| \cdot \|_\infty)$ es completo

Dem:



X métrico

$$\hookrightarrow C_b(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ cont y } \underline{\text{ACOTADA}} \}$$

$$B(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ACOTADA} \}.$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

¿son completos?