Práctica 5

☐ **1.** Sea $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Probar, por definición, que K es compacto.

☐ **2.** Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

☐ **3.** Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \qquad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

☐ **4.** Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de E. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto. Probar que $\cap_{i \in I} F_i$ es compacto.

☐ **5.** Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ decreciente de cerrados no vacíos de E se tiene que $\cap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$.

☐ **6.** Sea E un conjunto, en el cual consideramos la métrica discreta. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E?

☐ **7.** Probar que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

☐ **8.** Probar que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto se realiza. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.

☐ **9.** Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 18 de la Práctica 3. Probar que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es sólo cerrado?

☐ **10.** Consideremos en $(C[0,1], d_\infty)$ la función f_0 constantemente nula. Probar que $\overline{B(f_0, 1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos la distancia por d_1?

☐ **11.** Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ continua. Probar que:

(a) Si E es compacto, entonces $f(E)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f resulta ser un homeomorfismo.

☐ **12.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

1° Parcial

13. Sea K un espacio métrico compacto, y sea $f : K \to (0, +\infty)$ una función continua. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces). Probar:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de f, entonces es punto fijo de f^n.

(b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

Vicky (c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

17. Probar el Teorema de Bolzano: "Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o viceversa), existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$".

Sugerencia: Considerar $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) \leq 0\}$, y ver que es no vacío y acotado superiormente.

18. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.

19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

20. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.