

Suggerenza :



Daniel Carando

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el $(3,2)$, por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x, y), (3, 2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.

6:23 PM

Si después necesitas otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε , tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED)

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en \mathbb{R} es la d_1 , pero en realidad también es la d_2 :

6:28 PM

$$d_1(s, t) = |s - t| = \sqrt{(s - t)^2} = d_2(s, t).$$

También es la d_∞ , claro.

Def. de f continua $\left(\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \right)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

$$f\left(B((x_0, y_0), \delta)\right) \subseteq B(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

Lo pruebo en $(x_0, y_0) = (3, 2)$

Sea

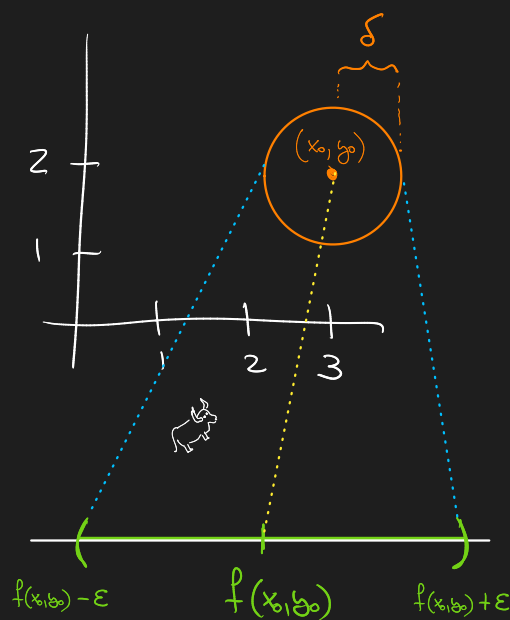
$$(x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), \delta)$$

me fijo solo en:

$$(x, y) \in B((3, 2), \delta)$$

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < \delta \right\}$$

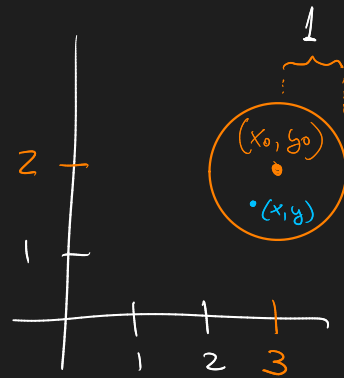
$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$



Si $\delta = 1$:

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x, y)$, o sea

quiero que

donde veo continuidad

$$f(x, y) \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(3, 2), \varepsilon)$$

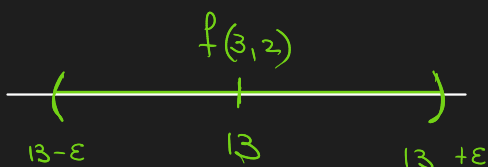
$$\in \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, \underbrace{f(3, 2)}_{3^2 + 2^2}) < \varepsilon \right\}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{|c - 13|}$$

$$|c - 13|$$

$$= |f(a, b) - f(3, 2)|$$

$$= |a^2 - 3^2 + b^2 - 2^2|$$





Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0) . Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$. Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dés que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1. Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, porque ε puede ser arbitrariamente chico.

Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ , sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces $|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$

Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1 . Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2((x, y), (3, 2)) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del radio mínimo:

$$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

quiero



$$\Rightarrow |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

En donde:

$$(x^2 - 3^2) = (x+3)(x-3)$$

$$\underbrace{(x+3)}_{< \delta_1 = 1} \underbrace{(x-3)}$$



$$\text{Como } d(x, 3) < 1$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm d(x, 3)$$

$$< 3 + 1 = 4$$

$$x < 4$$

$$\Rightarrow x + 3 < 7$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

↑ deajo este δ (y no uno 1)
para que dependa de δ

$$(y^2 - 2^2) = (x+2) \underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$$

↳ Como $d(x, 2) < \delta_1 = 1$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x, 2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x+2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

↑ deajo este δ (y no uno 1)
para que dependa de δ

Reemplazando en lo que tenia

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero controlar todo por ϵ

$$12\delta < \epsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \epsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3, 2)$

que resulte ser $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f\left(\mathcal{B}\left((3, 2), \delta\right)\right) \subseteq \mathcal{B}\left(f(3, 2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2((x, y), (x_0, y_0)) < \delta_1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio:

quiero

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2|$$

En donde:

$$(x^2 - x_0^2) = \underbrace{(x + x_0)}_{< \delta} \underbrace{(x - x_0)}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x = x_0 \pm d(x, x_0)$$

$$< x_0 + \delta$$

$$\Rightarrow x + x_0 < x + x_0 + \delta$$

acá ya no puedo usar 1

$$\Rightarrow (x^2 - x_0^2) < (x + x_0 + \delta) \cdot \delta$$

Mismo procedimiento para

$$(y^2 - y_0^2) < (y + y_0 + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{\wedge (x+x_0+\delta) \cdot \delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{\hookrightarrow < (y+y_0+\delta) \cdot \delta}$$

$$< x \cdot \delta + x_0 \cdot \delta + y \cdot \delta + y_0 \cdot \delta + \delta^2$$

$$= \delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2$$

Quiero

$$\delta (x + x_0 + y + y_0) + \delta^2 < \varepsilon$$

?

Acá no puedo despejar delta, por lo que CREO que debería suponer algo de delta para acotar por encima por algo más fácil de despejar?