Práctica 6

1. Probar que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en $\mathbb{R}^n$, donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

(a) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\times : \mathbb{R} \times E \to E$ son continuas.

(b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

(c) $\operatorname{diam}(B(x,r)) = 2r$.

(d) Si $y, z \in B(x,r)$ entonces para todo $t \in [0,1]$, $ty + (1-t)z \in B(x,r)$ (es decir, la bola es *convexa).*

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Probar que si definimos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

(a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

(b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.

(c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.

(d) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists\, x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)|\, dt.$$

(a) ¿Son $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ espacios de Banach? ¿Por qué?

(b) Justificar por qué ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el item anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n **para todo** $n \in \mathbb{N}$?

6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Probar que la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^∞ no es compacta.

(b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞.

7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

(a) T es continuo en 0.

(b) Existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

(c) T es continuo.

(d) T es uniformemente continuo.

(e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in M$ (T es *acotada*).

(f) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ y sea $T : E \to F$ lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E\}.$$

9. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito definida como $\|f\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$, entonces K es lineal y continua. Acotar su norma.

10. Sea $(\mathbb{R}[t], \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de polinomios definido en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p. Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.

11. Sea $\mathcal{E} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0,1])$ la norma infinito, entonces $\mathcal{E}$ es un funcional lineal continuo.

12. Sea $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $w_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se define $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i.$$

Probar que $(\cdot, \cdot)$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach cuya norma satisface la regla del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall\, x, y \in E.$$

Definimos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ como

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \quad \forall\, x, y \in E.$$

Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno y que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

14. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y sean $f, g \in H$. Probar que $\langle f, g \rangle = 0$ si y sólo si

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

¿Qué diría Pitágoras sobre esto?

15. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión y $x_0 \in H$. Probar que si $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en H.

16. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \Big\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \Big\}.$$

Para $a, b \in \ell^2$ definimos

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, b_n.$$

(a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?

(b) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^2?

(c) Probar que $\gamma : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

17. Para $f, g \in C([0,1])$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

(a) Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?

(b) Probar que con esta norma, la funcional definida en el Ejercicio 11 no es continua.

(c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

(d) Probar que la funcional lineal

$$\gamma(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno. Se puede ver que no existe $g \in C([0,1])$ tal que $\gamma(f) = \langle f, g\rangle$ para todo $f \in C([0,1])$ (convencerse, no hace falta demostrarlo). ¿Contradice esto el teorema de representación de Riesz enunciado en la teórica?

18. Sea ℓ^2 el espacio definido en el Ejercicio 16. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de ℓ^2 generado por e_1, e_2 y $e_3 + e_4$, donde para cada $j \in \mathbb{N}$, $e_j \in \ell^2$ es la sucesión que tiene un 1 en el lugar j y 0 en los demás.

19. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado de H. Sea $P_X : H \to H$ la proyección ortogonal de H sobre X. Probar que:

(a) $P_X^2 = P_X$;

(b) $P_{X^\perp} = I - P_X$, donde I denota la identidad en H;

(c) $\langle P_X(y), z\rangle = \langle y, P_X(z)\rangle$, para todos $y, z \in H$.
