UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Funciones medibles

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Escribamos el intervalo $[0,1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0,1] = A \cup B \quad , \text{con } A \cap B = \emptyset.$$

Escribamos el intervalo $[0,1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0,1] = A \cup B \quad , \text{con } \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset.$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \underline{A} \\ 5, & \text{si } x \in \underline{B}. \end{cases}$$

IDEA

$$\int f = 2\mu(A) + 5\mu(B)$$

$$A = [0, 1/2] \; , \; B = (1/2, 1]$$

$$\boxed{\underline{A} = \underbrace{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \qquad \underline{B} = \underbrace{\mathbb{I} \cap [0,1]}}$$

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0, 1]$.

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0, 1]$.

La función característica de $A \subset I$ es $\chi_A : I \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En lo que sigue vamos a considerar $I = [0,1]$.

$[0,1] = A \cup B$

$A \cap B = \emptyset$

La función característica de $A \subset I$ es $\chi_A : I \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Definición

Una partición medible de I es una familia finita $A_1, \ldots, A_n$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

$\boxed{A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j}$

Definición

SIMPLE

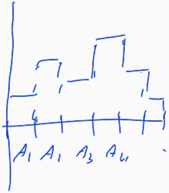
Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible $A_1, \dots, A_n$ de I y números $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x).$$

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_j \\ 0 & x \notin A_j \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = r_j \quad \text{si} \quad x \in A_j}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x \in A_1 \\ r_2 & \text{si } x \in A_2 \\ r_3 & \text{si } x \in A_3 \\ \vdots & \\ r_n & \text{si } x \in A_n \end{cases}}$$



simple

$\downarrow$

ESCALONADA

(A_j INTERVALOS)

NOS INTERESAN MÁS SIMPLES NO ESCAL.

Observación

- Si f es una función simple, entonces $|f|$ es una función simple.
- Cualquier combinación lineal de de funciones simples da una función simple.

Si f SIMPLE $\Rightarrow$ $\boxed{g(x) = |f(x)| \text{ es simple}}$

$\Big(h(x) = f(x)^2$ TAMBIÉN, $\tilde{h}(x) = \cos(f(x))$ TAMBIÉN $\Big)$

DEM: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i \chi_{A_i}$ con $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ PARTIC. MED. DE I

$\boxed{|f(x)| = |r_j| \text{ si } x \in A_j}$

$\rightarrow$ $\boxed{f(x) = r_j \iff x \in A_j}$

$\Rightarrow |f(x)| = \sum_{i=1}^{m} |r_j| \chi_{A_j}$

$|f|$ es SIMPLE

f, g SIMPLES, QVQ $\alpha f + \beta g$ SIMPLE.

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i \, \chi_{A_i} \qquad r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}, \quad \{A_i\}_{i=1}^{m} \text{ PARTIC. } \overset{\text{MED}}{\text{DE}} \ I. \\ g(x) = \sum_{j=1}^{m} s_j \, \chi_{B_j} \qquad s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}, \quad \{B_j\}_{j=1}^{m} \text{ PARTIC DE } I. \end{array}\right.$$

$\underline{C_{ij}} = \underline{A_i} \cap \underline{B_j}$ $\qquad$ $\underline{\text{EJERCICIO}}$: $\{C_{ij} : i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, m\}$

ES PARTICIÓN MEDIBLE DE I.

$\underline{\overline{x \in C_{ij}}} \Rightarrow (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \underline{\overline{\alpha r_i + \beta s_j}}$

$$\underbrace{(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (\alpha r_i + \beta s_j) \, \chi_{C_{ij}}(x)}$$

$\boxed{\text{VALE: } f \cdot g \text{ SIMPLE}}$ $\qquad$ $\therefore \ \alpha f + \beta g$ SIMPLE.

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x)$$

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una partición medible de I y $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x)$$

Definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

$$\boxed{\int_I f \, d\mu}$$

$$\boxed{\int_I f(x) \, d\mu(x)}$$

$$r_1 \mu(A_1) + r_2 \mu(A_2) + \cdots + r_n \mu(A_n)$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad**: Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad**: Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía**: Si f y g son simples $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad**: Si f, g son funciones simples y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía**: Si f y g son simples $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

EJERCICIO

(c) Si f es simple, entonces

es simple

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i} \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{m} s_j \, \chi_{B_j}$$

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

$$\alpha f + \beta g (x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha r_i + \beta s_j) \, \chi_{C_{ij}} .$$

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha r_i + \beta s_j) \, \mu(C_{ij}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha \, r_i \, \mu(C_{ij})}_{1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta \, s_j \, \mu(C_{ij})}_{2}$$

$$\textcircled{1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i \, \mu(C_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} \mu(\underbrace{A_i \cap B_j}_{\text{disjuntos 2 a 2}})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j\Big) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu\Big(A_i \cap \underbrace{\Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\Big)}_{=\,I}\Big) = \alpha \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i) =$$

$$= \alpha \int f \, d\mu .$$

EJERCICIO: $\textcircled{2} = \beta \int g \, d\mu$ $\boxtimes$

Definición

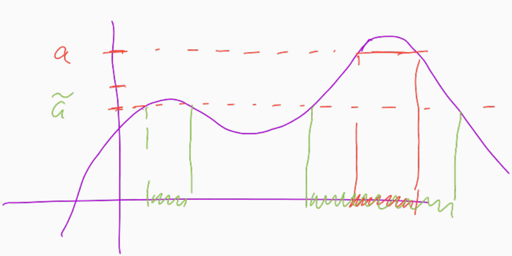
Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$ (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos).

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$ (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible Lebesgue si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definición

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$ (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible Lebesgue si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\boxed{\{x \in X : f(x) \leq a\}} = f^{-1}((-\infty, a]) \qquad f^{-1}([-\infty, a])$$

es medible.

$(\mathrm{Im}\, f \subset \overline{\mathbb{R}})$

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.

$f^{-1}((-\infty, a]) \to$ CERRADO Y $\therefore$ MEDIBLE

$\hookrightarrow$ CERRADO

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$ (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible Lebesgue si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible.

PENSAR: $\underbrace{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\}}$ → es un INTERVALO $\forall a \in \mathbb{R}$.

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en $\mathbb{R}$ (podemos permitir que f valga $+\infty$ o $-\infty$ en algunos puntos). Decimos que f es medible Lebesgue si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

Ejemplo

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es medible.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es medible. (DECREC TAMBIÉN)
- Si f es simple medible entonces es medible. → EJERCICIO

Proposición X MEDIBLE

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : \underline{f(x) \leq a}\}$ es medible. [f MEDIBLE]

Proposición X MEDIBLE

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.

Proposición X MEDIBLE

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.

(c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ es medible.

Proposición X medible

Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.

(b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) < a\}$ es medible.

(c) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ es medible.

(d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in X : f(x) > a\}$ es medible.

$(a) \Rightarrow (b)$ $\quad \{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$

$f(x) < a \iff \exists n \,/\, f(x) \leq a - 1/n$

ES MEDIBLE X SER UNIÓN DE MEDIBLES.

$(b) \Rightarrow (c)$ $\quad \{x \in X : f(x) \geq a\} = \underbrace{X}_{\text{MED}} \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) < a\}}_{\text{MED}}$ MEDIBLE.

$c) \Rightarrow a)$, $d) \Rightarrow a)$ EJ

- Combinación lineal de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.
- Límite puntual de una suc. de funciones medibles es medible.

X MEDIBLE

$f_n : X \to \mathbb{R}$ medible $\forall n \in \mathbb{N}$.

$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\{x \in X : g(x) \leq a\} = (*)$

$g(x) \leq a \Leftrightarrow \sup_n f_n(x) \leq a \Longleftrightarrow f_n(x) \leq a \;\; \forall n$

$(*) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\} \longrightarrow$ MEDIBLE $\forall a \in \mathbb{R}$

¿Cómo definimos la integral de una función medible?

¿Cómo definimos la integral de una función medible?
Empecemos por funciones medibles, acotadas y no negativas.

$\mathcal{L}_\mu(f) = \{ g : I \to \mathbb{R}$ simples medibles /
$g(x) \le f(x) \;\; \forall x \in I \}$.

(NO NECESARIAM. ESCALONADAS)

$$\boxed{\int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{L}_\mu} \int g \, d\mu}$$

LAS CONOCEMOS