

Vicky

Mercurio 24 de Marzo



Sucesiones

Función $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Definición de Límite

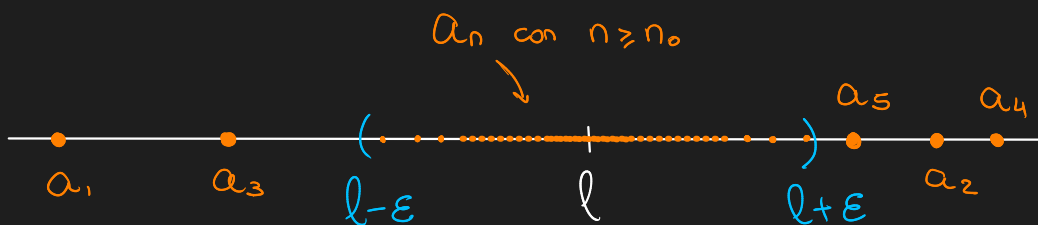
$a_n \in \mathbb{R}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un número $l \in \mathbb{R}$

s: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} /$

$$|a_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

"A partir de un n_0 , la distancia entre cada uno de los a_n y la asíntota l es menor a un epsilon dado"



Estrategia para usarlo en ejercicios:

- Dado un $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ pruebo que existe su correspondiente n_0

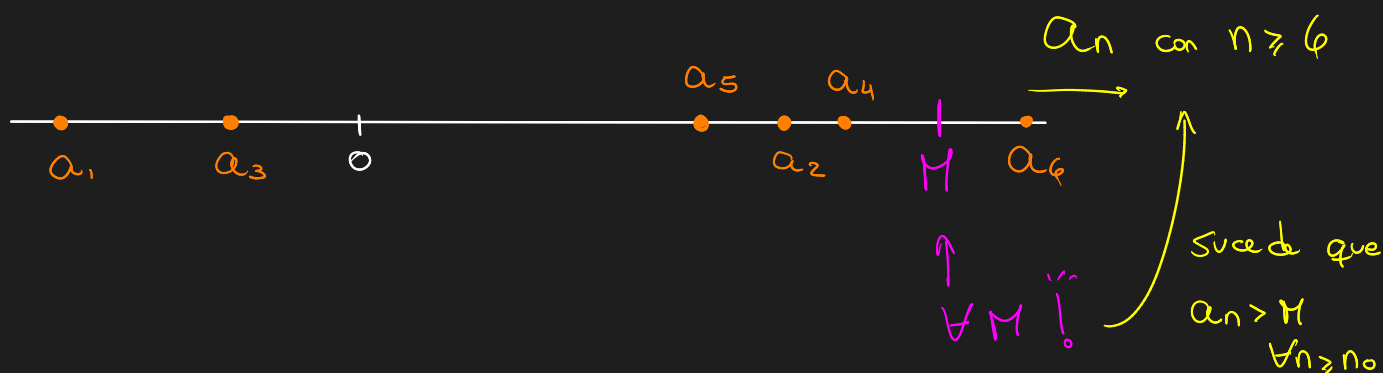
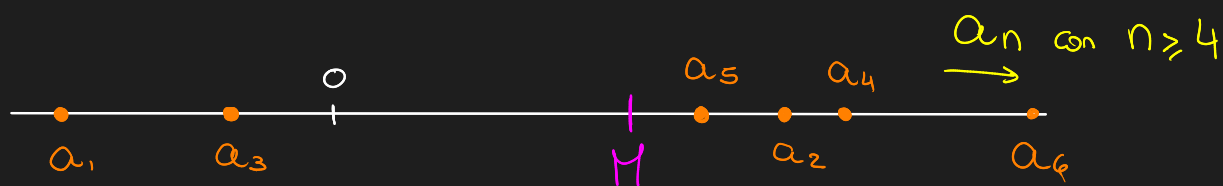
Límites \pm infinito

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge $(\pm \infty)$

s: $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} /$

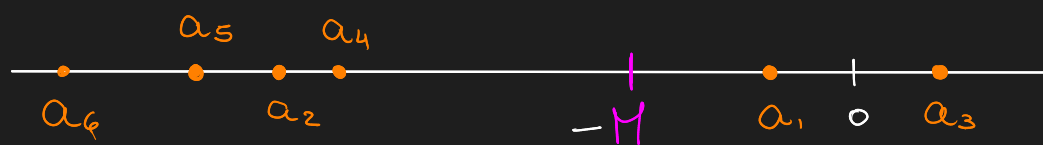
\uparrow
"Barrera"

$$a_n > M, \forall n \geq n_0$$



Para divergencia $\pm \infty$ es igual pero con $-M$

$\xrightarrow{a_n \text{ con } n \geq 4}$



Definición

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado
(sup, inf, both) (sup, inf, both)

Equivalentemente (solo acotado!)

$$\exists M > 0 / |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente \Rightarrow es acotada

Dem:

Supongo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \quad (\text{es convergente})$$

elijo un $\varepsilon = 1$ y digo

Por $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 / |a_n - l| < 1 \quad \forall n \geq n_0$
 \hookrightarrow acoto todos los a_n a distancia ε de l
 $\Rightarrow |a_n| \leq |l| + 1$

$$\text{Pues } |a_n - l| < 1$$

$$-1 < a_n - l < 1$$

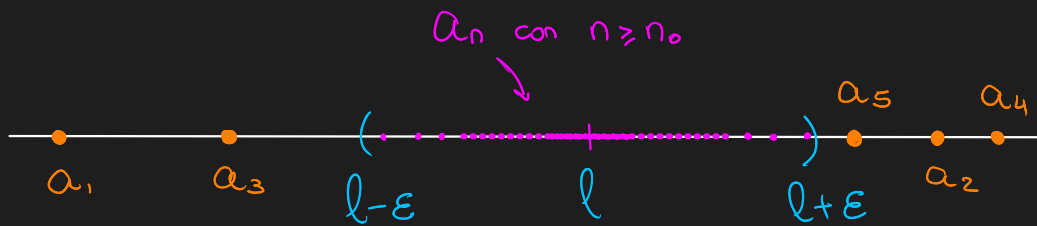
$$l - 1 < a_n < l + 1$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \max \{ |l-1|, |l+1| \} \leq |l|+1$$

↑

D.T.R.

- Tengo acotados todos los a_n con $n \geq n_0$
- Falten los a_n con $n < n_0$



$$\Rightarrow \text{Tomo } M = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l|+1 \}$$

↳ construir una cota para todos los elementos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

que da demostrado que

$$|a_n| \leq M$$

y \therefore la sucesión es acotada.



(no puede darse el caso que converja pero que en
"el medio" no se pueda acotar)

Álgebra de Límites

Teorema

Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Entonces,

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$, para todo $c \in \mathbb{R}$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$;
- (4) Si $b \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$.
- (5) Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \leq b$.

Dem (2):

Dado $\varepsilon > 0$, quiero a_n a partir del cual

$$|a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$$

Reescribo

$$|a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \quad (\oplus)$$

si $n \geq n_1$

si $n \geq n_2$

↑
≡ "momento" a partir del cual
vale la condición $|*| < \frac{\varepsilon}{2}$

⇒ si tomo

$$n \geq \max \{n_1, n_2\} = n_0$$

$$(\oplus) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Llegando a que

$$|a_n - a + b_n - b| < \varepsilon$$



Equivalencia 2

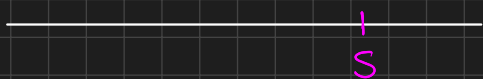
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a'') $s \geq x$ para todo $x \in A$; $= (a) = (a')$

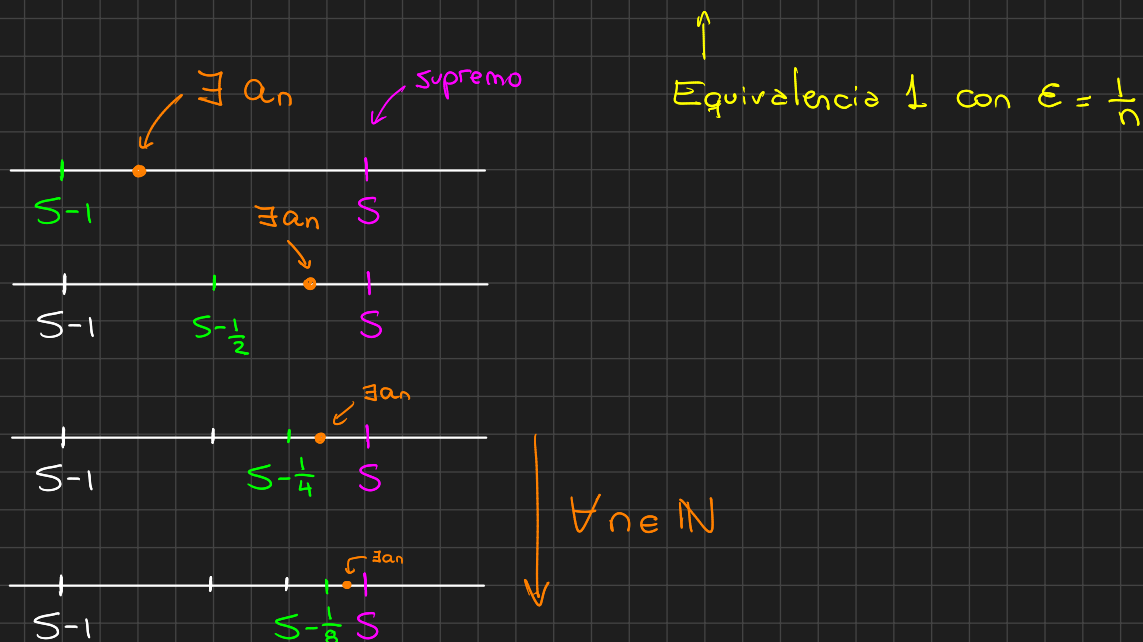
(b'') existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Dem: $s = \sup A \Rightarrow (b'')$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ me muevo $\frac{1}{n}$ hacia la izquierda del \sup .



$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A \mid a_n > s - \frac{1}{n}$$



Supongo que tengo

$$(a_n)_n \subseteq A$$

$\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$$

Sea $\epsilon > 0$

distancia que me desplazo en cada n
↓

$$|s - a_n| \stackrel{s > a_n}{=} s - a_n < \frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{si } n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

que es lo que quería

Falta la vuelta

$$\forall a \in A \quad (a \leq s) \Rightarrow s = \sup A$$

como $(a \leq s) \Rightarrow s$ es cota superior

$$(b \leq s) \Rightarrow \text{Tarea!}$$

que

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A \mid s - \epsilon < a \leq s$$

Def

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema

Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.

Más concretamente

- (i) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;
- (ii) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demo (del Teorema)

• Sea

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$$

acotada superiormente

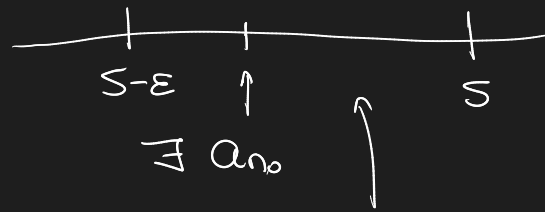
$$\Rightarrow \exists s = \sup A$$

Veamos que

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sea $\varepsilon > 0$, por def. de supremo:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / a_{n_0} > s - \varepsilon$$



todos los elementos a_n con $n \geq n_0$ caen a la derecha de a_{n_0}

$$S: n \geq n_0$$

S cota sup.

$$\Rightarrow S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S < S + \varepsilon$$

\uparrow
 $(a_n)_n$ es creciente

$$\Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - S < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$



Borrador Texto Deshacer Rehacer

Subconjuntos de \mathbb{N}

Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

- (i) A tiene primer elemento; \leftarrow tiene mín siempre
- (ii) Si A es acotado, tiene último elemento. tiene máx siempre

Como $A \subset \mathbb{N}$
} los supremos
son máximos
y los ínfimos
son mínimos.

Principio de Buena Ordenación

(equivalente a Principio de Inducción)

Dem : (ii)

