

1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Denotemos

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Probar que E es un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq S$ converge.

\Rightarrow) $\mathcal{H} : E$ es un espacio de Banach :

• E es completo

\Rightarrow Toda sucesión de Cauchy

$(y_n)_n \subseteq E$ converge en E

Como $S \subseteq E$

\Rightarrow Toda sucesión de Cauchy

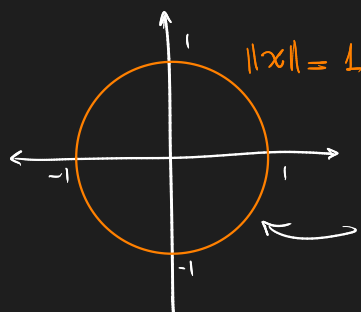
$(x_n)_n \subseteq S \subseteq E$ converge \checkmark

\Leftarrow) $\mathcal{H} : Toda$ sucesión $(x_n)_n$ de Cauchy en S converge

donde :

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

ej: $S \subseteq E = \mathbb{R}^2$, $x \in E$



Suc. de Cauchy
sobre la circunferencia,
(solo el borde!)

Por \mathcal{I}_0 , a partir de un n_0 ,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

\Rightarrow Toda sucesión de Cauchy en S converge en S \leftarrow ? *hace falta justificar?*

$\Rightarrow S$ es completo

? *Cómo llego a que E es completo?*

2. Consideremos la serie

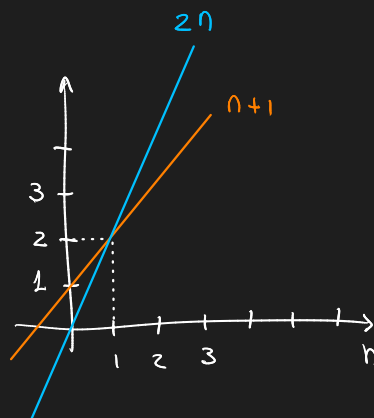
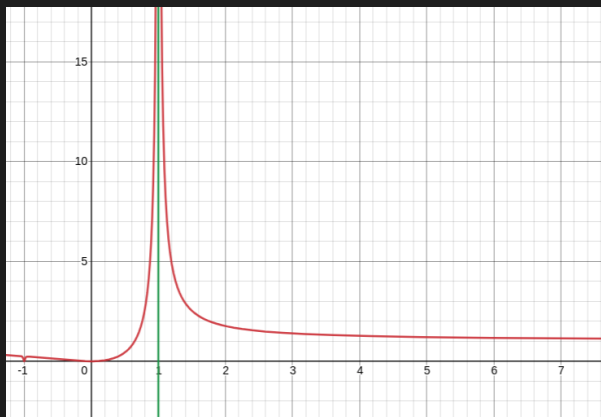
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$$

(a) Probar que converge uniformemente en $[a, +\infty)$ para todo $a > 1$.

(b) ¿Es uniforme la convergencia en $(1, +\infty)$?

$$x > 1$$

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$$



a partir de $n=1$:

$$2n > n+1$$

$$\Rightarrow x^{2n} > x^{n+1} \quad \forall x > 1$$

$$\forall n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} < \frac{1^{n+1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$$

1 es inf. de $(1, +\infty)$

- pues si $x > 1$, el denominador crece en mayor proporción que el numerador (pues son exponenciales)

Ahora, cuando sumo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} = \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\text{si } x=1} + \underbrace{\frac{x^3}{1+x^4}} + \underbrace{\frac{x^4}{1+x^6}} + \dots$$

$\Rightarrow f(1) \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1 + x^{2n}} \stackrel{x > 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{x^n} \cdot \left(\frac{1}{x^n} + x^n\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} \cdot 1}{\cancel{x} \cdot \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 + x^{2(n-1)}}{x^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n-2}}$$

3. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que el conjunto

$$E = \{x \in [0, 1] : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge}\}$$

es medible.

$$(f_n(x)) \text{ converge} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{\text{converge}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$$

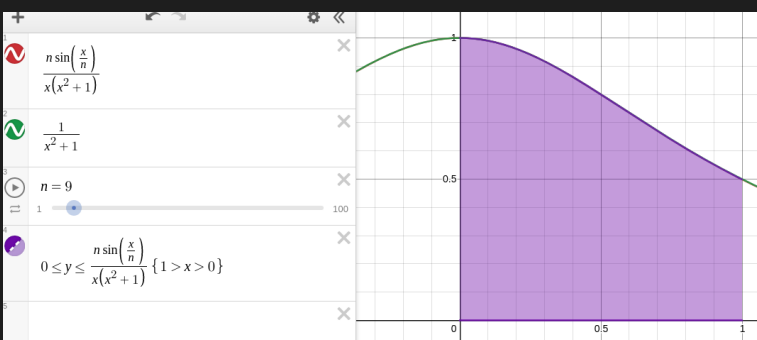
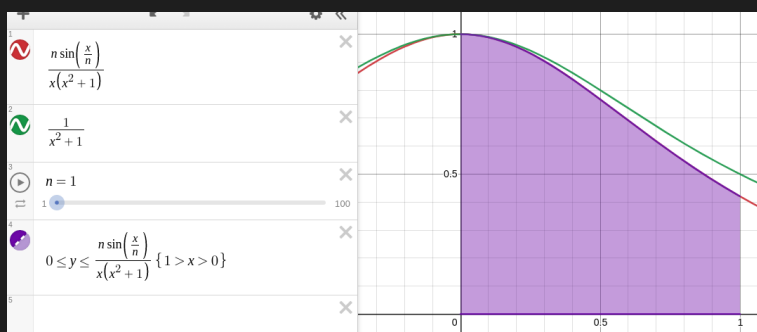
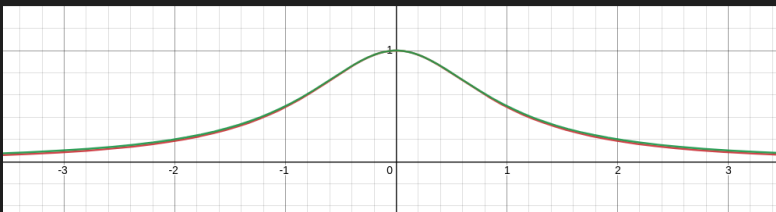
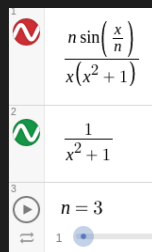
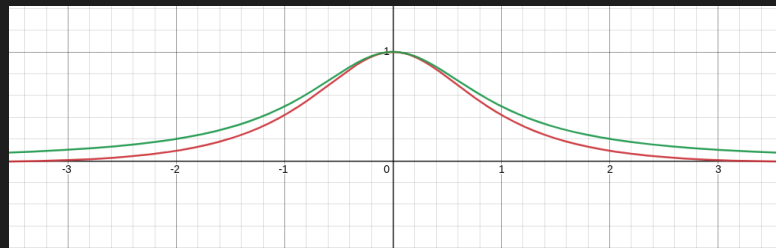
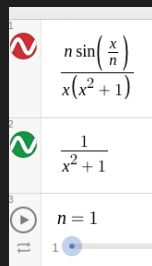
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

4. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} dx.$$

$$\left| \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} \right| \leq \left| \frac{\cancel{n} \cdot \frac{x}{\cancel{n}}}{\cancel{x} \cdot (x^2+1)} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{n}} \right| = \frac{1}{x^2+1}$$

$\underbrace{\quad}_{\geq 0} \quad \underbrace{\quad}_{\geq 1}$



$$\lim \int \square = \int \lim \square ?$$

Criterio de Weierstrass $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ X conj.

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en \mathbb{R} .

$$\underbrace{x \in [0,1]}_{\geq 1} \Rightarrow \underbrace{0 < \sin x < 1}_{0 < x < 1}$$

$$\underbrace{\left| \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x^2+1} \right|}_{=: g_n(x)} = \left| \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x}{x(x^2+1)} \right|$$

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right| = 0$$

en el límite, $\sin \frac{x}{n}$ y $\frac{x}{n}$ son iguales

por lo que la cota mejora cuando $n \rightarrow \infty$

$$\leq \left| \frac{\cancel{n} \cdot \frac{x}{\cancel{n}} - x}{x(x^2+1)} \right| = 0$$

$\therefore \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}$ converge puntualmente a $\frac{1}{x^2+1}$.

Llamo

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Como $0 < \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} \leq f(x) \leq 1$

$$g_n(x) \leq f(x)$$

Teorema (Convergencia mayorada para no negativas)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0,1]$ tales que $g_n(x) \leq \phi(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$, donde ϕ es una función integrable. Supongamos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \text{ en casi todo } x.$$

Entonces, f es integrable

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Con el otro teo sale mejor o sea (Conv. monótona)

Por Teorema de Convergencia mayorada para no negativas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{n \cdot \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)} d\mu = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+x^2} d\mu$$

↗
Puedo usar Riemann acá?

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{tg}(x) \Big|_0^1$$