Leandro Carreira LU: 669/18

Segunda Entrega

14. Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}.$$

E se compone de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ (llamados B)

tales que

(I) $\#B = \#(\mathbb{N} \setminus B)$

y además

(II) $\#B = \aleph_0$

(II) me dice que B es numerable (infinito)

(I) restringe B / $\mathbb{N} \setminus B$ siga siendo numerable.

(ie $\mathbb{N} \setminus B$ no puede ser finito)

$\therefore \quad E \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

ya que E se compone de subconjuntos

numerables (infinitos) de $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad \#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

y como E es infinito

ejercicio 13.c

$$\aleph_0 \leq \#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

$\Rightarrow$ Tengo dos posibilidades

$$\#E \overset{?}{=} \aleph_0$$

ó

$$\#E \overset{?}{=} c$$

Sé que

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$$

está compuesto de los subconjuntos numerables de $\mathbb{N}$ que cumplen $\# \mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$

y que $$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{B : B \subseteq \mathbb{N}\}$$

está compuesto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$

entonces, puedo decir que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : \begin{array}{l} B \text{ no sea numerable ó} \\ B \text{ es numerable pero} \\ \mathbb{N} \setminus B \text{ no es numerable} \end{array} \right\}$$

y como

$$\#B \leq \aleph_0 \quad \forall B \subseteq \mathbb{N}$$

Conj. Naturales no numerables

$\downarrow$

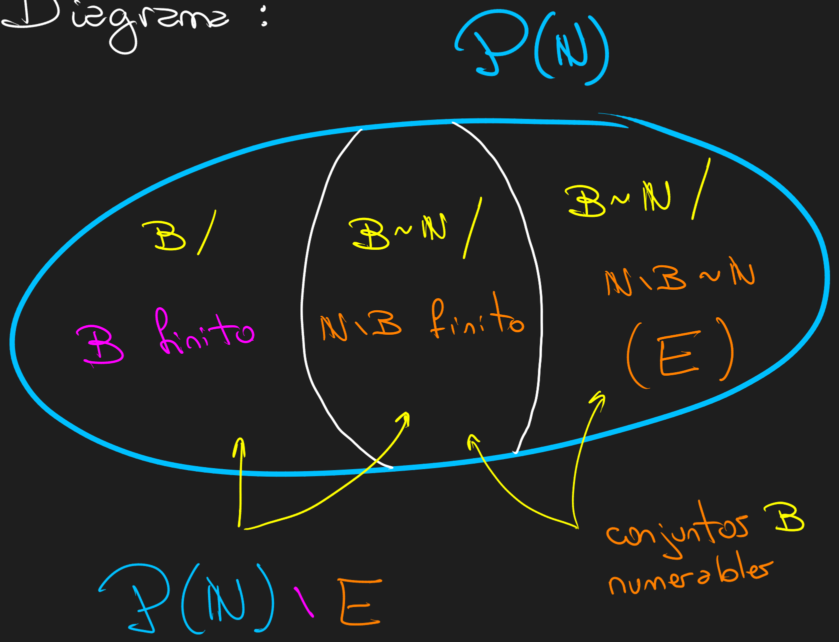
$\#B < \#\mathbb{N}$

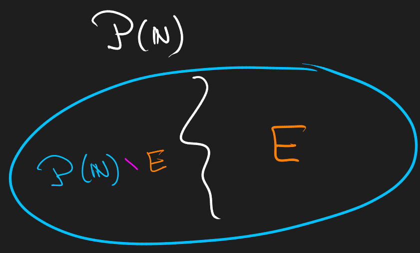
entonces

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito ó}$$

B es numerable con $\mathbb{N}\setminus B$ finito)

Diagrama :





Puedo usar el ejercicio 12 que dice :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } X \text{ es numerable} \\ \Rightarrow \mathcal{P}_f(X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ es finito}\} \text{ es numerable}\end{array}}$$

Con lo que puedo asegurar que es numerable

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \underbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}}_{\text{es numerable}} \cup \underbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : B \sim \mathbb{N} \text{ con } \mathbb{N}\setminus B \text{ finito}\}}_{?}$$

Basta encontrar este cardinal.

Observación:

Me equivoqué asumiendo que E contenía todos los infinitos y P(N)-E los finitos, pero eso no es cierto.

Subo el ejercicio incompleto pero habiendo corregido eso, con la esperanza de hallar una respuesta antes de la fecha de entrega.

Dejo el resto del ejercicio como estaba, aunque como ya dije, es incorrecto.

Además, tengo que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = E \cup \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E\right)$$

$$\Rightarrow \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\left(E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)\right)$$

$$c = \#\left(E \cup \underbrace{(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)}_{\substack{\text{obtuve} \\ \#\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus E = \#\mathbb{N}}}\right)$$

Supongo que

$$E \sim \mathbb{N}$$

y llego a un absurdo.

Obtuve que

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Como la unión de finitos numerables es numerable:

$$E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

Abs! Pues $E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

$\therefore$

$$\#E = c$$

$\blacksquare$