Sat 22 May

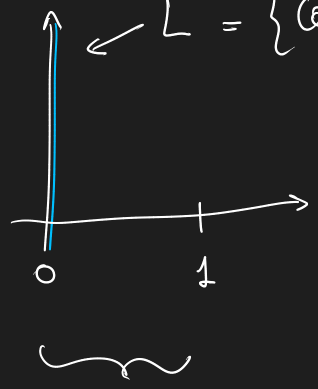
Espacios de Hilbert

(con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$)

"Hay normas más naturales que otras"

ej) $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$

$L = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ = "eje y"



¿Cuál es el pto de L más cercano a (1,0)?

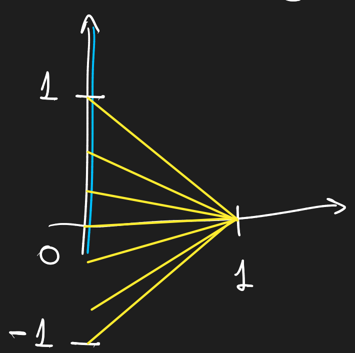
Pero! $d = \|\ \|_\infty$

$$\|(1,0)-(0,0)\|_\infty = \text{máx}\{1, 0\} = 1$$

$$\|(1,0)-(0,y)\|_\infty = \text{máx}\{1, |y|\} \geqslant 1$$

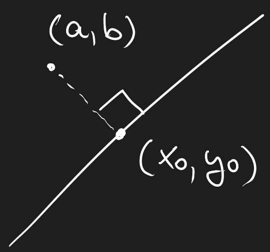
Veamos que para $|y| \leq 1$

$$\|(1,0)-(0,\tfrac{1}{2})\|_\infty = \max\{1, \tfrac{1}{2}\} = 1$$



Todo $[-1,1]$ dista 1 del $(1,0)$

Esto no pasa con $\| \ \|_2$:



Siempre $\exists$ un pto de la recta más cercano a (a,b)

Pues

$$\|(x,y)\| = \langle (x,y),(x,y)\rangle^{1/2}$$
$$= (x^2+y^2)^{1/2}$$

En $\mathbb{R}^n$

$$\langle u,v\rangle = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + \dots + u_n . v_n$$

$$\|u\|_2 = \langle u,u\rangle^{1/2}$$

Definición

Sea H espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *producto interno* sobre H es una a función $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades.

(1) $\langle x,x\rangle \ge 0$ para todo $x\in H$ y $\langle x,x\rangle = 0$ si y solo si $x=0$. $\in\mathbb{R}$ $\in H$

(2) $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y todo $x,y,x\in H$.

(3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ para todo $x,y\in H$. ← Simetría (en $\mathbb{C}$ es distinto)

Propiedades

Dem: uso (3) y llego a (2)

- $\langle z, \alpha x+\beta y\rangle = \alpha.\langle z,x\rangle + \beta\langle z,y\rangle$

- Si $x,y\in H$ cumplen :

$$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \quad \forall z \in H$$

$$\Rightarrow \quad x = y$$

Dem :

- $$\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = 0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \langle x-y, z-z\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x-y, 0\rangle = 0$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad \boxtimes$$

El par $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se llama espacio con producto interno.

¿y la distancia?

Ejemplos: ① EN $\mathbb{R}^n$: $\boxed{\begin{matrix} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n)\end{matrix}}$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

② $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ INVERSIBLE.

$$(x, y)_A = \langle Ax, Ay\rangle$$

P.I DE ①

EJ: VER QUE ES P.I.

Ejemplos:

(3) $C[0,1]$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ es un P.I.

← de la práctica.

(4) En $\ell^2 = \{ a=(a_n)_n \subset \mathbb{R} / \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \}$

$$\langle a,b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

$$\langle a,b\rangle = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n}_{\text{si } a,b\in\ell^2 \Rightarrow \text{ la serie converge.}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

Proposición

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces:

(1) $\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ para todo $x,y\in H$. ← Desigualdad de Cauchy-Schwarz

(2) La función $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$$

es una norma sobre H.

EJERCICIO: $\langle \underset{H}{0}, g\rangle = \underset{\mathbb{R}}{0} \quad \forall g\in H$

DEM (1): $x=0$:

$\underline{\langle 0,g\rangle^2} = 0 \qquad \underline{\langle 0,0\rangle\langle g,g\rangle = 0}$

LISTO.

$x \neq 0$ $\quad$ $\boxed{\text{q.v.q } \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle .}$ $\quad$ Para $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle tx-y, tx-y\rangle = t^2\langle x,x\rangle - t\langle x,y\rangle - t\langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle .$$

$$= \underbrace{\underbrace{\langle x,x\rangle}_{a>0} t^2 \underbrace{-2\langle x,y\rangle}_{b} t + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{c}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

. CUADRAT. < 0.

$\Rightarrow$ la cuad. tiene 0 o 1 raíz real.

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{4}\langle x,y\rangle^2 \leq \cancel{4}\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad ✓$$

② $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ ES UNA NORMA.

EJERCICIO. (SUG: p/ TRIANGULAR

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Definición

Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ es una norma si verifica las siguientes propiedades

(1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (desigualdad Δ)

(2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad ✓$$

pues difieren en $2\|x\|\|y\| \geq 0$

2) $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2}$

CA

$\langle \lambda . x, \lambda x\rangle = \lambda . \langle x, \lambda x\rangle$

$= \lambda^2 . \langle x, x\rangle$

$= \left(\lambda^2 . \langle x, x\rangle\right)^{1/2}$

$= |\lambda| \langle x, x\rangle^{1/2}$ ✓

Obs

C-S: $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$

$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 . \|y\|^2$

not sure.

$\Rightarrow$ Cauchy - Schwartz

$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| . \|y\|$

Llamamos Norma inducida a

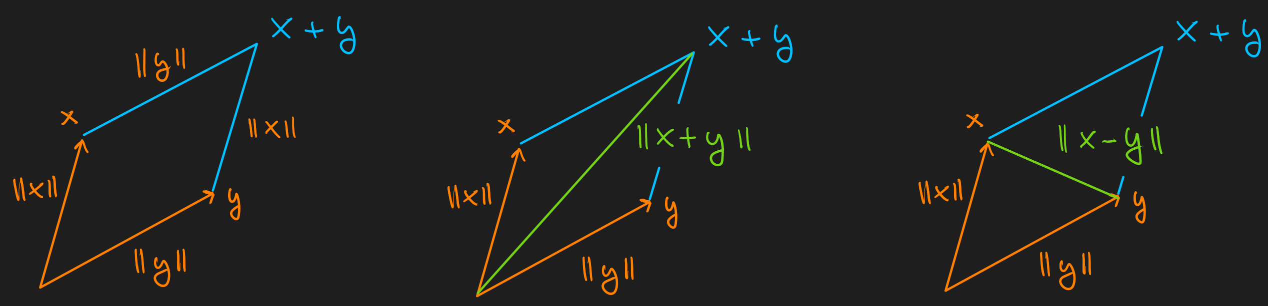
- $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$

Identidad del paralelogramo

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

para todo $x, y \in H$.



EJERCICIO (GUÍA)

Si una norma cumple (*) $\Rightarrow$ ESTÁ DADA POR UN P.I.

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y fijemos $v \in H$. Entonces la función $\gamma_v : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada sobre H.

Además, vale que $\|\gamma_v\| = \|v\|$.

Norma de vector

Norma de operador:

Se define la norma del operador T como la constante de Lipschitz de T:
$$\|T\| = \text{mín}\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X \right\}$$

Ej:

v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)

$$\Rightarrow \| \langle \underset{\mathbb{R}^7}{\underset{\cap}{x}} , \underset{\mathbb{R}^7}{\underset{\cap}{v}} \rangle \| = \| v \| = \sqrt{7} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^7 \quad ?$$

¿ó

γ_v es Lineal:

γ_v LINEAL: $\quad \gamma_v(x+y) = \langle x+y, v \rangle =$
$= \langle x, v \rangle + \langle y, v \rangle$
$= \gamma_v(x) + \gamma_v(y)$

$\gamma_v(\lambda x) = \langle \lambda x, v \rangle = \lambda \langle x, v \rangle$
$= \lambda \gamma_v(x)$

✓

γ_v es acotada:

$$\sup_{\|x\| \le 1} |\gamma_v(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, v \rangle| \underset{C-S}{\le} \underbrace{\sup_{\|x\| \le 1} \|x\|}\, \|v\| = \|v\|$$

$\therefore$ γ_v es acotada y $\|\gamma_v\| \le \|v\|$.

EJERCICIO: ver que $\|\gamma_v\| \ge \|v\|$ (SUG.: $v \ne 0$ calcular $\gamma_v(v)$)

$$\gamma_v(v) = \langle v, v \rangle$$

qvq

$$\| \gamma_v \| \overset{?}{\ge} \| v \|$$

Si $v = \vec{0}$:

$$\Rightarrow \quad \gamma_{\vec{0}}(\vec{0}) = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0 = \|\overset{\vec{0}}{v}\| \quad \checkmark$$

Si $v \neq \vec{0}$:

$$\Rightarrow \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \left\langle v, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=\|v\|}$$

$$= \frac{\|v\|}{\|v\|}$$

$$\gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \left\| \gamma_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| = 1$$

y $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$?

Cómo probé esto?

$v \in H$, $\rightarrow \boxed{\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle}$

$\|\gamma_v\| \leq \|v\|$ (C-S)

EJ: $\|\gamma_v\| \geq \|v\|$

$\Rightarrow \|\gamma_v\| = \|v\|$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf \left\{ c \,/\, \|Tx\| \leq c\|x\| \ \forall x \in E \right\}$$

Un espacio con producto interno $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tiene definida una norma y, por lo tanto, una distancia.

H con PI $\rightsquigarrow$ H normado $\rightsquigarrow$ H métrico

Definición
Un espacio con producto interno que es completo con la norma inducida se llama espacio de Hilbert.

Espacio de Hilbert $\longrightarrow$ Espacio de Banach
(con norma dada por $\langle P.I. \rangle$)


David Hilbert
(1862-1943)

Teorema de representación de Riesz
Sea H un espacio de Hilbert. Si $\gamma : H \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal continua, entonces existe un único $v \in H$ tal que

$$\gamma(x) = \langle x, v \rangle$$

para todo $x \in H$. Además, vale que $\|\gamma\| = \|v\|$.


Frigyes Riesz
(1880-1956)

Todas las funciones lineales (continuas) son equivalentes a hacer prod. interno con un vector fijo.

EXISTENCIA : NO LA VEMOS
UNICIDAD : EJERCICIO.

Dem: (mía)

Sean v_1 y $v_2 \in H$ /

$$\gamma_{v_1}(x) = \langle x, v_1 \rangle \quad \forall x \in H$$

$$\gamma_{v_2}(x) = \langle x, v_2 \rangle \quad \forall x \in H$$

y además vale

$$\|\gamma_{v_1}\| = \|v_1\|$$

$$\|\gamma_{v_2}\| = \|v_2\|$$

?