Sat 27/03

$\varnothing$ O

8. Probar, usando la definición de límite:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2.$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1.$

Def

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ si

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

a)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{3-2n}{n+1}$$

qvq

$$|a_n - (-2)| \overset{?}{<} \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\left| \frac{3-2n}{n+1} + 2 \right| = \left| \frac{3-\cancel{2n}+\cancel{2n}+2}{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{5}{n+1} \right|$$

Veo que $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pero sigo con:

$$= \left| \frac{5}{n+1} \right|$$

$$\overset{n>0}{\downarrow}$$

$$= \frac{5}{n+1} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < n+1$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

Dado un ε, el n_0 a partir del cual vale lo buscado es

sumo 1

$$n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon}$$

$\therefore$ con $n_0 \geq \frac{5}{\varepsilon}$ vale que

éste

para esto sumé 1

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\blacksquare$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{a_n} = 0$ (trivial pues $\sin n$ acotado)

qvq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ |a_n - 0| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \overset{n>0}{=} \frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$\therefore |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3}{2^n+4} = 1$

qvq

$$\left|\frac{2^n-3}{2^n+4} - 1\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\left|\frac{2^n-3}{2^n+4} - 1\right| = \left|\frac{\cancel{2^n}-3-\cancel{2^n}-4}{2^n+4}\right|$$

$$= \left|\frac{-7}{2^n+4}\right|$$

$$\overset{2^n>0}{=} \frac{7}{2^n+4} \overset{?}{<} \varepsilon$$

$\varepsilon>0$
$2^n+4>0$

$$\frac{7}{\varepsilon} < 2^n+4$$

$$\frac{7}{\varepsilon} - 4 < 2^n$$

$$\log_2\left(\frac{7}{\varepsilon}-4\right) < \log_2(2^n) = n$$

$$n > \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon}-4\right)$$

$$n_0 \geq \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon}-4\right) + 1$$

$\blacksquare$

9. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Probar que si $|x_n - \ell| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- Sé que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

- y además sé que

$$|x_n - \ell| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

> 0 !

Caso constante: ?! Revisar

Pues si $a_n = 0 \Rightarrow x_n = \ell \ \forall n$

$\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$

y Fin.

- qvq

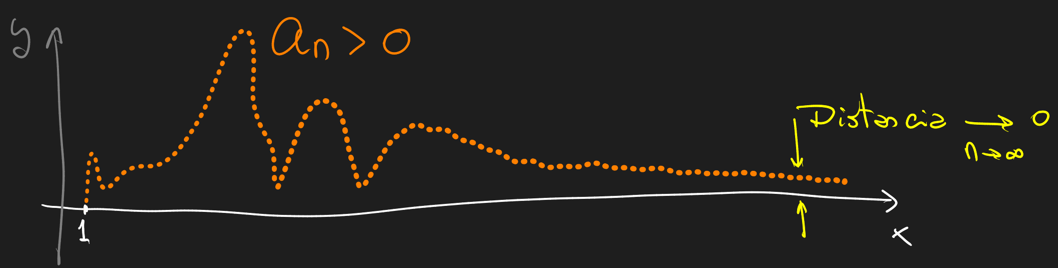
$$x_n \underset{n\to\infty}{\overset{?}{\longrightarrow}} \ell$$

o sea:

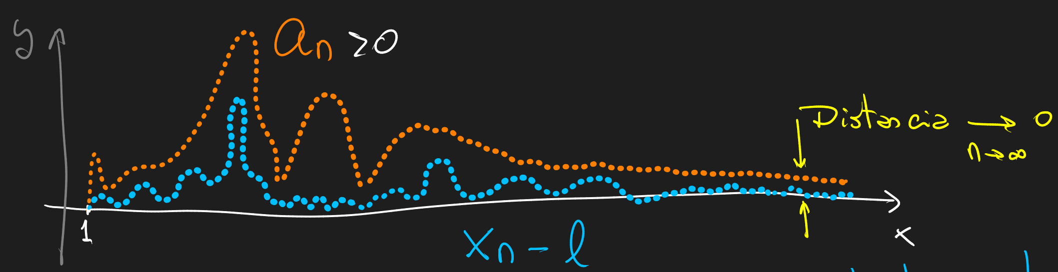
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |x_n - \ell| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Dibujo:

Sé:



y además, a_n acota a $|x_n - \ell| \ \forall n \in \mathbb{N}$



Intuitivamente, vemos que debe ser cierto.

q.v.q.

$$|x_n - \ell| \overset{?}{<} \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

sé que

$$|x_n - \ell| \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

en particular

$$|x_n - \ell| \leq a_n \qquad \forall n \geq n_0$$ con n_0 el mismo que para a_n

Sea $\varepsilon > 0$

uso lo que ya sé

?

Sabemos que $\exists n_0, |\underbrace{a_n - 0}_{= a_n}| < \varepsilon$

$\forall a_n \geq$

10. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_2$, probar que:

(a) $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1 + \ell_2$.

(b) $cx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\ell_1$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

(c) $x_n \cdot y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell_1 \cdot \ell_2$.

(d) Si $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\ell_2 \neq 0$ entonces $\frac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Sugerencia: probar que $\frac{1}{y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\ell_2}$ y usar (c).

(e) Si $x_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2$.

a) qvq

$$\left|(x_n + y_n) - (\ell_1 + \ell_2)\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\left|(x_n + y_n) - (\ell_1 + \ell_2)\right| = \left|x_n - \ell_1 + y_n - \ell_2\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|x_n - \ell_1\right| + \left|y_n - \ell_2\right|}_{\text{sé que son convergentes}}$$

$\Rightarrow$ Como sé que

(I) $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \ / \ |x_n - \ell_1| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_1$

(II) $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \ / \ |y_n - \ell_2| < \varepsilon_2 \quad \forall n \geq n_2$

Si elijo

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

$\Rightarrow$ valen ambos límites ((I) y (II))

Volviendo, tenía que

$$|(x_n + y_n) - (l_1 + l_2)| \leq \underbrace{|x_n - l_1|}_{\varepsilon_1} + \underbrace{|y_n - l_2|}_{\varepsilon_2}$$

$$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

con $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\boxtimes$

(b) $cx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\ell_1$, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

q.v.q.

$$|c.x_n - c.l_1| \overset{?}{<} \varepsilon$$

sabiendo que

$$|x_n - l_1| < \varepsilon$$

$$|c.x_n - c.l_1| = |c(x_n - l_1)|$$

$$= |c| . |x_n - l_1|$$

Si n_1 es el n a partir del cual $|x_n - l| < \varepsilon_1 \; \forall n \geq n_0$:

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; |x_n - l_1| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |c| . |x_n - l_1| < \underbrace{|c| . \varepsilon_1}_{\text{Vale } \forall \varepsilon_1 > 0,} \quad \forall n \geq n_1$$

vale para todo $\mathbb{R}^+ - \{0\}$

y $|c| \geq 0$ $\mathbb{R}^+$

fijo

$$\{|c| . \varepsilon_1 : \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\} = \mathbb{R}^+$$

variable

$$= \left\{ \quad \varepsilon_0 \quad : \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \right\}$$

$$\Big\downarrow \text{ vale } \forall \varepsilon_0 > 0$$

$\therefore$

$$|c| \cdot |x_n - l_1| < \varepsilon_0 \qquad \forall \; \varepsilon_0 > 0$$

$$\blacksquare$$

(c) $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \cdot \ell_2$.

q.v.q

$$|x_n \cdot y_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \overset{?}{<} \varepsilon$$

cruzados!

$$|x_n \cdot y_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = |x_n \cdot y_n + \ell_2 \cdot x_n - \ell_2 \cdot x_n - \ell_1 \cdot \ell_2|$$

$$= |x_n(y_n - \ell_2) + \ell_2(x_n - \ell_1)|$$

$$\overset{DT}{\leq} |x_n(y_n - \ell_2)| + |\ell_2(x_n - \ell_1)|$$

$$\leq |x_n| \cdot |y_n - \ell_2| + |\ell_2| \cdot |x_n - \ell_1|$$

Como $x_n \longrightarrow \ell_1$ cuando $n \to \infty$

$$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \;/\; M > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\leq \underbrace{M}_{\in \mathbb{R}^+ - \{0\}} \cdot |y_n - \ell_2| + \underbrace{|\ell_2|}_{\in \mathbb{R}^+} |x_n - \ell_1|$$

$\boxed{\text{Caso } \ell_2 \neq 0}$

Sé que

- $\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; |x_n - \ell_1| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_1$

  y en particular

$$|x_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon_1}{2|\ell_2|} \quad (|\ell_2| \neq 0)$$

- $\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; |y_n - \ell_2| < \varepsilon_2 \quad \forall n \geq n_2$

  y en particular $\qquad M > 0$

$$|y_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon_2}{2M}$$

Llamo

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

y digo

$$|x_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$$

$$|y_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Volviendo

$$|x_n \cdot y_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \leqslant M \cdot |y_n + \ell_2| + |\ell_2|\,|x_n + \ell_1|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

que es lo que quería. Falta el caso:

$\boxed{\text{Caso } \ell_2 = 0}$

$$|x_n \cdot y_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \leqslant M \cdot |y_n + \ell_2| + \underbrace{|\ell_2|}_{=0}\,|x_n + \ell_1|$$

$$\leqslant M \cdot |y_n + \ell_2|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\blacksquare$

11. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, probar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

muy similar al caso 10 b. con $(x_n \cdot y_n) \to l_1 . l_2$

Si (y_n) está acotada y $x_n \to 0$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \;/\; M > |x_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\exists N \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \;/\; N > |y_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Llegando a:

en el 10c era $|l_2|$

$$\leq |x_n| . |y_n - l_2| + |y_n| . |x_n - l_1|$$

$$\leq \underbrace{M}_{\in \mathbb{R}^+ - \{0\}} . |y_n - l_2| + \underbrace{N}_{\in \mathbb{R}^+ - \{0\}} |x_n - l_1|$$

$$< M . \frac{\varepsilon}{2M} + N . \frac{\varepsilon}{2N}$$

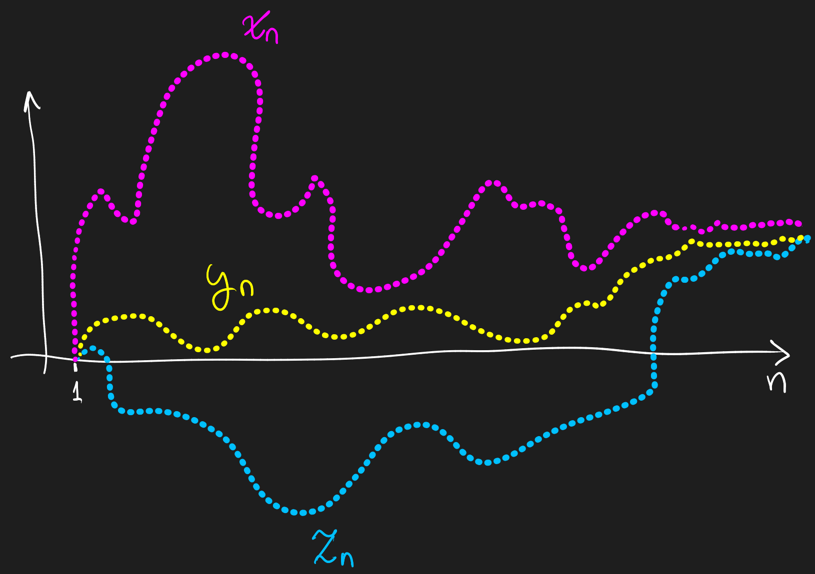
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\blacksquare$

12. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \le y_n \le z_n$ para todo n. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ probar que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Sé:

- $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n$
- $|x_n - \ell| < \varepsilon$
- $|z_n - \ell| < \varepsilon$



qvq

$$|y_n - \ell| \overset{?}{<} \varepsilon$$

Digo

$$y_n \leq z_n$$

$$y_n - \ell \leq z_n - \ell \leq |z_n - \ell| < \varepsilon$$

? usar $10 \cdot \varepsilon$.

13. Probar que:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite y $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) Enunciar y demostrar los resultados análogos para sucesiones decrecientes.

a) Sea

elems de $(x_n)_n$

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente

$$\Rightarrow \exists\, s = \sup A$$

qvq

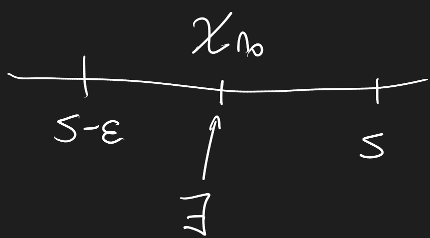
$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{?}{=} s$$

o sea, que

$$|x_n - s| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Por def de Supremo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; x_{n_0} > s - \varepsilon$$



y además como es creciente

$$x_{n_0} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$$

Junto todo:

$$\Rightarrow \quad S-\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def} \\ \text{Sup}}}{<} x_{n_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Crec}}}{\leq} x_n \underset{\substack{\uparrow \\ S\ \text{sup}}}{\leq} S \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon>0}}{<} S+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad S-\varepsilon < x_n < S+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < x_n - S < \varepsilon$$

$$= \quad |x_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\blacksquare$

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Def de límite a infinito (se prueba?) ← ?

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in \mathbb{R}$ DIVERGE $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \right)$

Si:

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, a_n > M \quad \forall n \geq n_0$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente

Preguntar!

$\Rightarrow x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

y además, como no es acotada

$\Rightarrow \nexists\, C \in \mathbb{R} \,/\, C \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

en particular

$\Rightarrow \nexists\, C \in \mathbb{R} \,/\, C \geq x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

dicho de otra forma

$\Rightarrow \forall\, C \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N} \,/\, x_{n_M} > C \geq x_n \geq x_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

Veo que para cada C, siempre hay un x_n mayor

$\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}^+_{\setminus\{0\}}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_n > M$

$\blacksquare$

(c) Enunciar y demostrar los resultados análogos para sucesiones decrecientes.

Son lo mismo cambiando sup por inf y algunos signos.