Nico 22 Abr

Espacios Métricos III

Métricas Equivalentes

Si d, d' métricas en E, son Equivalentes

$\Rightarrow \forall x \in E, \quad \forall r>0, \quad \exists r'>0$

$$B_{d'}(x,r') \subseteq B_d(x,r)$$

y recíprocamente

$\forall x \in E, \quad \forall r'>0, \quad \exists r>0$

$$B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r')$$

Ejemplo :

- No equivalentes :

$E = \mathcal{C}([0,5])$ para el cual tenemos $\to d_1$: "$\int$"
$\searrow d_\infty$: "max"

$$\Rightarrow B_{d_\infty}\left(f, \frac{r}{5}\right) \overset{?}{\subseteq} B_{d_1}(f,r) :$$

Sea $g \in B_{d_\infty}\left(f, \frac{r}{5}\right)$:

$$d_1(f,g) = \int_0^5 \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq d_\infty(f,g)}\, dx$$

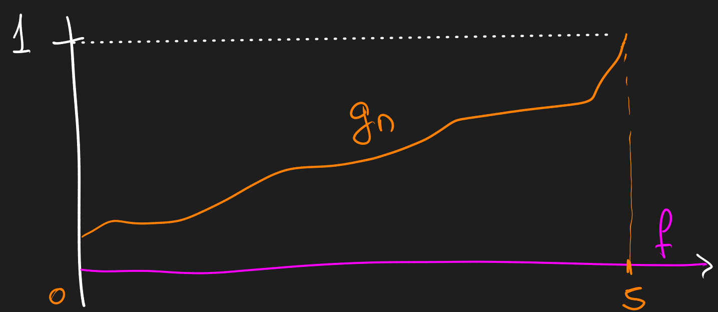
$$\leq \underbrace{5 \cdot \underbrace{d_\infty(f,g)}_{< \frac{r}{5}}}_{< r}$$

Pero:

$$\exists f, \ \forall r > 0, \ B_{d_1}(f,r) \overset{?}{\not\subseteq} B_{d_\infty}\left(f, \tfrac{1}{2}\right)$$

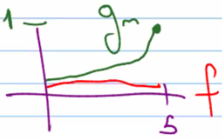
Tomo

$$f = f_0 \equiv 0$$



Sea $g_n \in E$

$g_n(x) = (x/5)^n$



Notar: $d_\infty(g_n, f) \geq \underbrace{|g_n(5) - f(5)|}_{=1}$

$\leadsto g_n \notin B_{d_\infty}\left(f_0, \tfrac{1}{2}\right)$

Pero

$$d_1(g_n, f_0) = \int_0^s \left| \left(\frac{x}{s}\right)^n \right| dx$$

$$= s \int_0^1 t^n \, dt$$

$t = \frac{x}{s}$

$s . dt = dx$

$$= \frac{s}{n+1} < r \quad \text{si} \quad n \geq 0$$

$\rightsquigarrow$ d_1 Y d_∞ NO SON EQUIV.

YA LO SABÍAMOS

- (E, d_1) Y (E, d_∞) NO TIENEN LOS MISMOS ABIERTOS

Otra razón

- $g_n \xrightarrow{d_1} f_0$, pero $g_n \overset{d_\infty}{\not\to} f_0$

$\therefore$ no son equivalentes.

PREGUNTA: ¿CONVERGE g_n EN d_∞?

→ SUP QUE SÍ.

Sup que $\exists f \in \mathcal{C}([0,s])$ tal que

$$g_n \xrightarrow{d_\infty} f$$

entonces:

$$\forall x, \quad |g_n(x) - f(x)| \leq d_\infty(g_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore \quad g_n(x) \longrightarrow f(x)$$

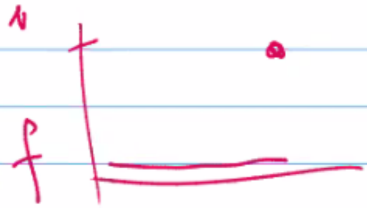
Vemos que

"Convergencia en d_∞ $\Rightarrow$ Convergencia Puntual"

Pero:

$$g_n(x) = \left(\frac{x}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\begin{cases} 0 & x < 5 \\ 1 & x = 5 \end{cases}}_{= f(x)}$$

PERO: $f_m(x) = (x/5)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \underbrace{\begin{cases} 0, & x < 5 \\ 1, & x = 5 \end{cases}}_{= f(x)}$



ABS! PUES f NO ES CONT

Sucesiones de Cauchy.

$(x_n) \subseteq (E, d)$ es de Cauchy si

$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists n_0 \,, \forall n, m \geq n_0 \,/\, d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Ej. de Camilo:

Si tomo $x_n = \log n$

$\Rightarrow \quad d(x_{n+1}, x_n) = \left| \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Pero (x_n) <u>no</u> es de Cauchy:

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$.

Tomo $n = n_0$,

$m = n_0 + k$

Así,

$$d(x_n, x_m) = \left| \log\left(\frac{n_0 + k}{n_0} \right) \right| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

$\therefore$ <u>no</u> es de Cauchy!

(Pues para cada ε, siempre puedo encontrar un k que lo supere)

EJEMPLO: Sea $(f_n) \subseteq C([0,5])$ como arriba.

¿Es de Cauchy?

- Para d_1:

$$d_1(g_n, g_m) = \int_0^5 \left| \left(\frac{x}{5}\right)^n - \left(\frac{x}{5}\right)^m \right| dx$$

$$= 5 \int_0^1 |t^n - t^m| \, dt$$

$$\overset{m \geq n}{=} 5 \int_0^1 |t^n| \cdot \underbrace{|1 - t^{m-n}|}_{\leq 2} \, dt$$

$$\leq 10 \int_0^1 t^n \, dt = \frac{10}{n+1} < \varepsilon,$$

si $n \geq n_0$ $(\Rightarrow m \geq n_0)$

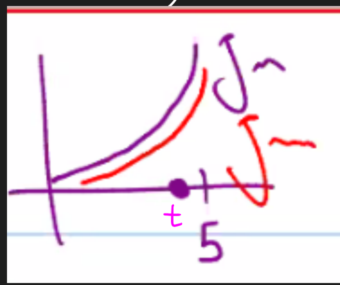
$\therefore (g_n) \subseteq (E, d_1)$ es de Cauchy.

Obs:

Ya sabía que era de Cauchy, pues

"Toda sucesión convergente es de Cauchy"

• Para d_∞ (sabemos que no converge, y como es pecio es completo $\Rightarrow$ no es de Cauchy)



↑ Sin usar ésto:

$$d_\infty(g_n, g_{2n}) = \max_{x\in[0,5]} \left| (x/5)^n - (x/5)^{2n} \right|$$

↑ elijo

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| t^n - t^{2n} \right|$$

$$\geq \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

tomo $t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$

$\therefore$ si $\varepsilon < \frac{1}{4}$, no puedo probar la desigualdad

$\Rightarrow$ no es de Cauchy.

Relacionemos

Suc. de Cauchy y Métricas Equivalentes.

d equiv d' $\not\Rightarrow$ Tienen las mismas sucesiones de Cauchy

$\Rightarrow$ Tienen las mismas sucesiones convergentes

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ sean

- $d(x,y) = |x-y|$
- $d'(x,y) = |f(x) - f(y)|$, con $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ (es BY)

Ejercicio: Probar d' es una métrica.

$\uparrow$ es continua y tiene inversa continua.

Se tiene que

f es biyectiva

con

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

$\uparrow$ cont.

Veamos que son equivalentes:

f cont en x

$\downarrow$

- $\forall x, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$\underbrace{|y-x|<\delta}_{y\in B_d(x,\delta)} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{|f(y)-f(x)|}_{d'(y,x)}<\varepsilon}_{y\in B_{d'}(x,\varepsilon)}$$

ie : $B_d(x,\delta) \subseteq B_{d'}(x,\varepsilon)$

f^{-1} es cont en $f(x)$

$\downarrow$

- $\forall x, \ \forall \varepsilon>0, \ \exists \delta>0 \ /$

$$\underbrace{|f(y)-f(x)|<\delta}_{y\in B_{d'}(x,\delta)} \Rightarrow \underbrace{|y-x|<\varepsilon}_{y\in B_d(x,\varepsilon)}$$

ie : $B_{d'}(x,\varepsilon) \subseteq B_d(x,\delta)$

$\therefore$ son equivalentes.

Muestro cond. Cauchy:

SEA $(X_n) \subseteq \mathbb{R}$, $X_n = n$

- NO ES DE CAUCHY PARA d
  $(d(X_n, X_{n+1}) = 1 \quad \forall n)$
- ES DE CAUCHY PARA d':

$$d'(x_n, x_m) = \Bigg| \underbrace{\frac{n}{1+n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} - \underbrace{\frac{m}{1+m}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 1} \Bigg|$$

$$< \varepsilon \quad \text{si} \quad n, m \geq n_0$$

$\therefore$ mostramos una sucesión que no es de Cauchy para una métrica pero sí para otra métrica equivalente.

PENSAR: Para estos d, d' NO EXISTEN CTES $C_1, C_2 > 0$ /

$$C_1\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C_2\, d(x,y)$$

$\forall x, y$

"NO SON FUERTEMENTE EQUIVALENTES"

Pregunta Fer:

$(\mathbb{R}, d')$ ¿es completo?