Sugerencia:

Daniel Carando 6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.
Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

6:23 PM

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y),(3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 3 y 4 e y está entre 1 y 3.
Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε, tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED) 6:28 PM

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en $\mathbb{R}$ es la d_1, pero en realidad también es la d_2:
$d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t)$.
También es la d_∞, claro.

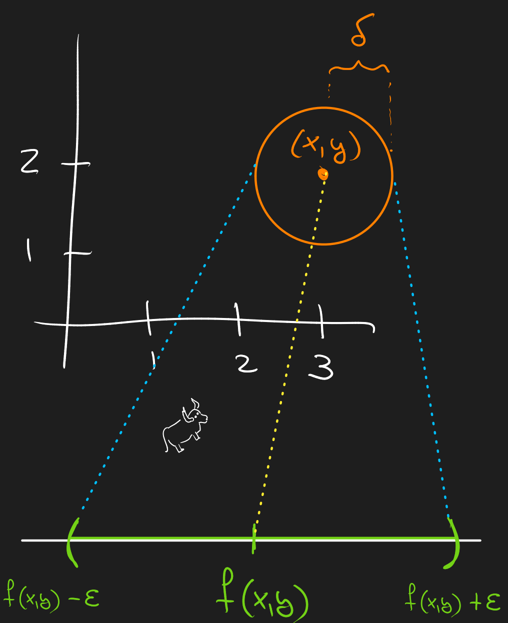
Pruebo que es continua en el $(3,2)$

Def. de f continua $(\forall x,y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f\Big(B\big((x,y),\delta\big)\Big) \subseteq B\big(f(x,y),\varepsilon\big)$$

Lo pruebo en $(x,y) = (3,2)$



Sea

$$(x_0,y_0) \in B\big((x,y),\delta\big)$$

me fijo solo en:

$$(x_0,y_0) \in B\big((3,2),\delta\big)$$

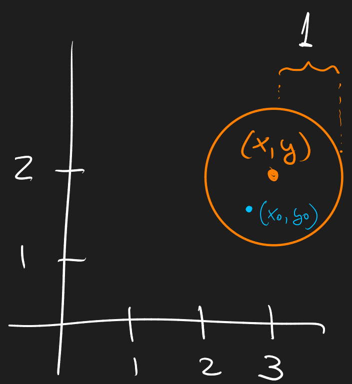
$$(x_0,y_0) \in \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2\big((x,y),(3,2)\big) < \delta \right\}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$$

Si $\delta = 1$:

$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2\big((x,y),(3,2)\big) < 1 \right\}$$

$$\underbrace{(x-3)^2 + (y-2)^2} < 1^2$$



$$f(x-3,\, y-2) < 1$$

$$\boxed{\text{en el caso general sería } f(x-\tilde{x},\, y-\tilde{y}) < \delta^2}$$

con $\tilde{x}, \tilde{y}$ los puntos del dominio de f

Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x_0, y_0)$, o sea

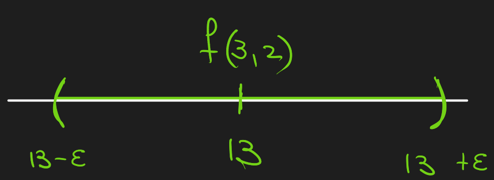
quiero que

donde veo continuidad ↓

$$f(x_0,y_0) \overset{?}{\in} B\big(f(3,2),\, \varepsilon\big)$$

$$\in \left\{ c \in \mathbb{R} : \underbrace{d\big(c, \underbrace{f(3,2)}_{3^2+2^2}\big)}_{|c-13|} < \varepsilon \right\}$$

$$= |x_0^2 - 3^2 + y_0^2 - 2^2|$$



Como

$$f(x-3,\ y-2) < 1$$

Restringo los valores de x_0, y_0 acotando $f(x_0, y_0)$

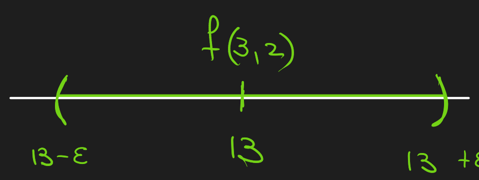
$$f(x_0, y_0) < 1$$

y volviendo:

$$\overbrace{f(x_0,y_0)}^{<1} \overset{?}{\in} \left\{ c \in \mathbb{R} \ : \ d\Big(\overbrace{f(x_0,y_0)}^{<1},\ \underbrace{f(3,2)}_{13}\Big) < \varepsilon \right\}$$

$$\overbrace{|f(x_0,y_0) - 13|}$$

$$< |1^2 - 13| = 12 < \varepsilon$$



- Armo caso general $\left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$

$$|\delta^2 - (x^2+y^2)| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \delta^2 - (x^2+y^2) < \varepsilon$$

$$x^2+y^2-\varepsilon < \delta^2 < x^2+y^2+\varepsilon$$

$$|\delta| < \sqrt{x^2+y^2+\varepsilon}$$

$$\delta > 0$$

$$\delta < \sqrt{x^2+y^2+\varepsilon}$$

Finalmente, obtuve

$\forall \varepsilon > 0$, elijo algún δ / $\delta < \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon}$

pej: $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ /

$$f\Big(B\big((x,y),\delta\big)\Big) \subseteq B\Big(f(x,y),\varepsilon\Big)$$

$\blacksquare$