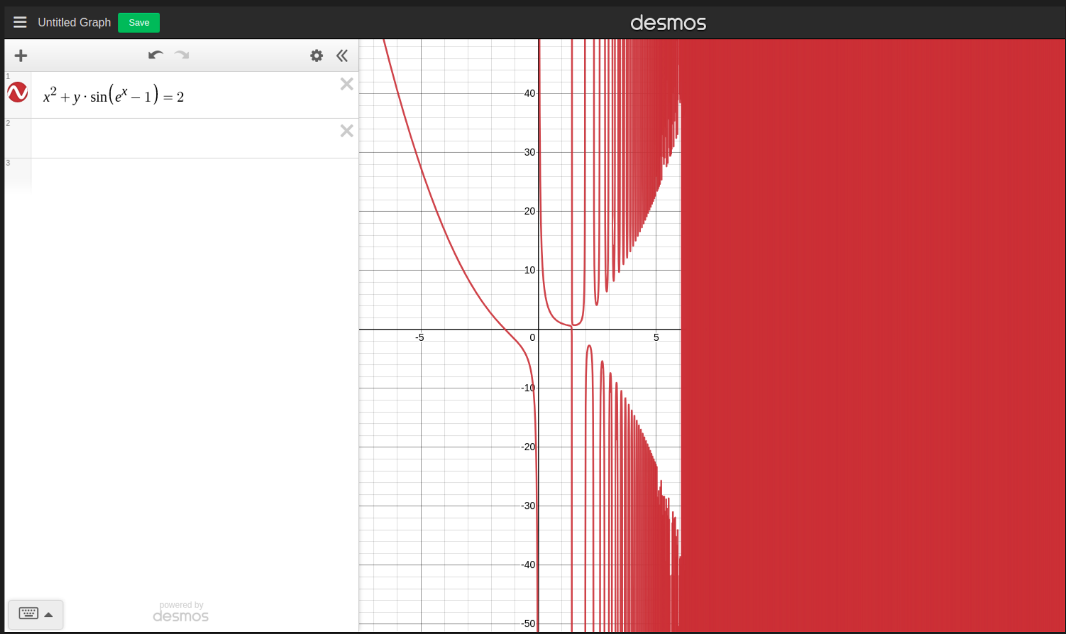
7. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y\,\mathrm{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

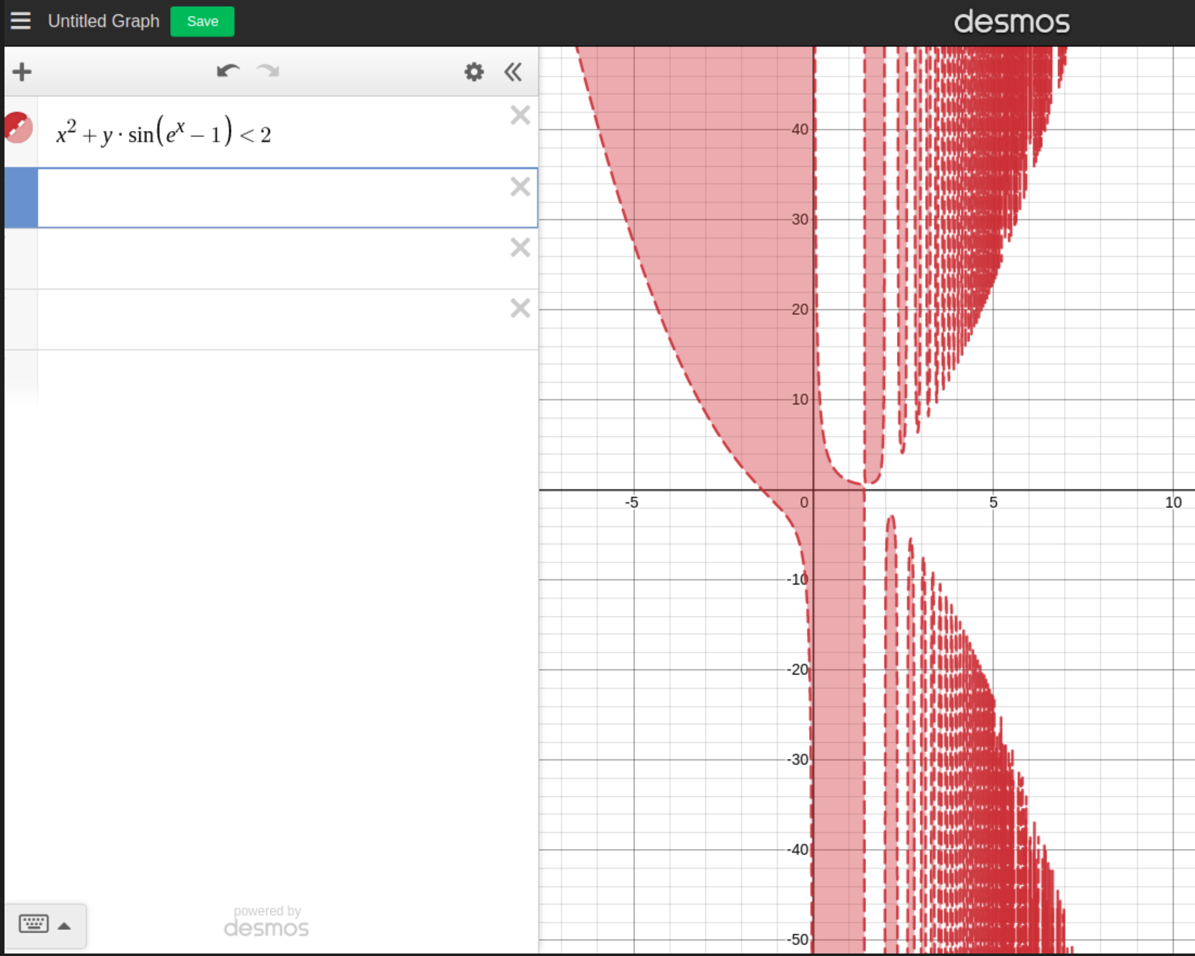
a) Grafico porque 

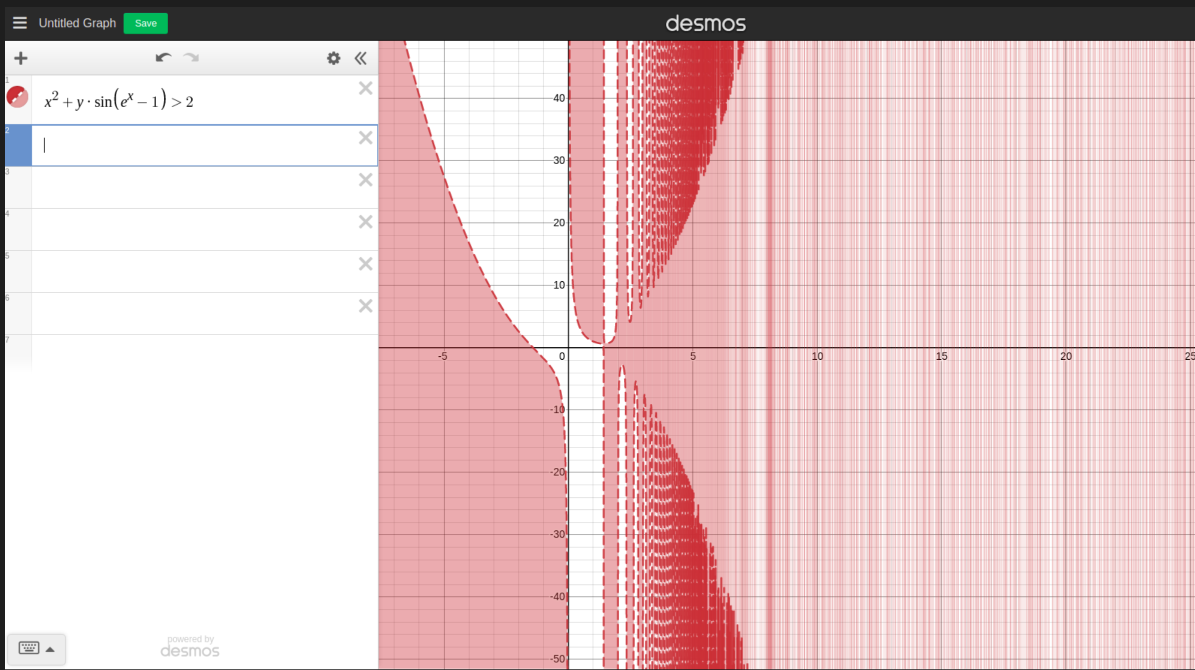


Khe !

Sé que A es cerrado $\Leftrightarrow$ A^c es abierto

Veo $f(x,y) < 2$
y $f(x,y) > 2$





Si para cada $(x,y) \in A^c$ puedo meter una bolita abierta contenida en $A^c \Rightarrow A^c$ es abierto

$\Rightarrow A$ es cerrado

Llamo $A_-^c = \{(x,y)\in E : x^2 + y\cdot\sin(e^x - 1) < 2\}$

$A_+^c = \{(x,y)\in E : x^2 + y\cdot\sin(e^x - 1) > 2\}$

Pruebo A_-^c abierto

Sea $(x,y) \in A_-^c$

qvq $\overset{?}{\exists} r>0 \,/\, B((x,y),r) \subseteq A_-^c$

llamo $f(x,y) := x^2 + y\cdot\sin(e^x - 1)$

Como $f(x,y)$ es continua (pues suma, resta, producto de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ ... o hay que probarlo?)

$\Rightarrow f(B((x,y),\delta)) \subseteq B(f(x,y),\varepsilon)$

$\Rightarrow$ Si para cada abierto entorno de $f(x,y)$,

tengo una bola abierta centrada en (x,y)

<u>Contenida</u> en $A_-^c \Rightarrow A_-^c$ es abierto

Observación obse:

Cuando $f(x,y)$ está "cerca" de 2 en:

$x^2 + y\cdot\sin(e^x - 1) < 2$

Digo que si:

$$d_2\left(x^2+y\cdot\sin(e^x-1)\,,\,2\right) = \varepsilon_0 > 0$$

$$\Rightarrow \exists\,(x,y) \in B(f(x,y),\varepsilon) \overset{?}{\subseteq} A_-^c \;/$$

$$d_2\left(x^2+y\cdot\sin(e^x-1)\,,\,2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$$

∴ siempre puedo meter una bola "cerca del borde", pues justamente no hay borde, sino un abierto.

Probé que A_-^c es abierto.

De la misma forma se prueba A_+^c.

y como unión de abiertos es abiert@

$$\Rightarrow A_-^c \cup A_+^c = A^c \text{ es abierto}$$

∴ A es cerrado.

$\blacksquare$

 Pruebo que $f(x,y)$ es continua

Acoto norma L2 y obtengo δ en función de ε:

$$\Big|\underbrace{f(x,y)}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{f(a,b)}_{\in\mathbb{R}}\Big| = \left|x^2+y\cdot\sin(e^x-1)-a^2-b\cdot\sin(e^a-1)\right|$$

$$= \left| x^2 - a^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1) \right|$$

$$\leq \underbrace{|x^2 - a^2|} + \left| y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1) \right|$$

$$\hookrightarrow |(x+a)\cdot(x-a)| \leq \underbrace{|x+a|} \cdot \underbrace{|x-a|}_{<\delta}$$

$$\leq |x| + |a|$$

$$\leq |a| + \delta + |a|$$

elijo $\delta_1 = 1$

$$= 2|a| + 1$$

$$\leq (2|a|+1) \cdot \delta$$

no es unif. continua pues depende de a

y para el 2° término:

$$\left| \underbrace{y} \cdot \underbrace{\sin(e^x - 1)}_{\substack{\leq 1 \\ \leq e^x - 1}} - b \cdot \sin(e^a - 1) \right| \leq$$

$|y - b| \leq \delta$

no me sirve usar desig. Δ

$$|y \cdot \sin(e^x - 1)| + |b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

pierdo poder acotar esto