Nombre: Leandro Carreira

L.U.: 669/18

| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Análisis Avanzado - Primer parcial**

13/05/2021

**1.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y no vacío. Probar que si $A$ no tiene máximo, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A).$$

- Si $A$ no tiene máximo y es no vacío

$\Rightarrow$ $A$ es infinito

- Como $A$ está acotado superiormente

$\Rightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, c = \sup(A)$

y como $A$ no tiene máximo

$\Rightarrow$ $c \notin A$


Obs:

no necesariamente es un intervalo como en el dibujo, podría haber agujeros en el medio.


Idea:

Construyo sucesión estrictamente creciente "cerca" de $c$ que converja a $c$.

Como $A$ es infinito,

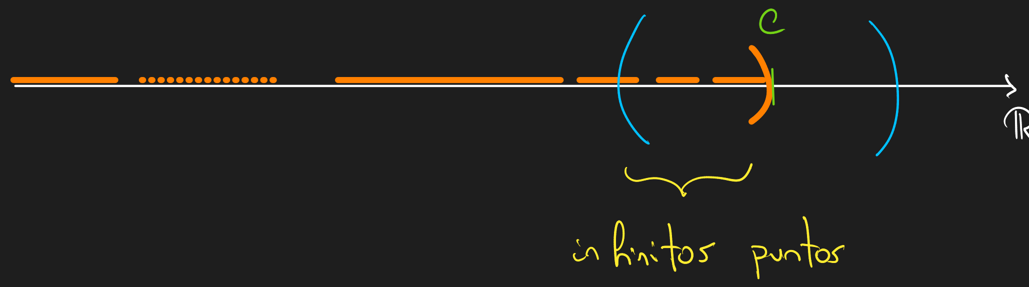
$c$ es supremo de $A$,

y $A$ <u>no</u> tiene máx.

$\Rightarrow \forall r>0 \,/\, B(c,r) \cap A$ es infinito

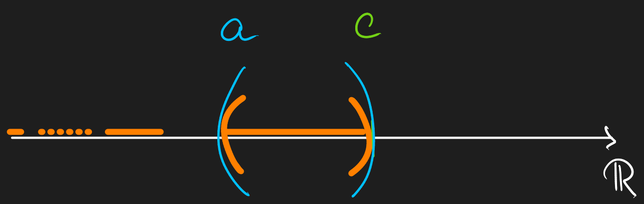
$\Rightarrow c$ es punto de acumulación de $A$

(<u>no</u> puede ser punto aislado, pues de serlo sería un máx)




En particular como $c$ <u>no</u> es punto aislado

$\Rightarrow \exists r_0>0 \,/\, B(c,r_0) \cap A = (a,c)$ $\quad a\in\mathbb{R}$




Construyo sucesión estrictamente crec. en $(a, c)$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = c - \frac{(c-a)}{2n}$$

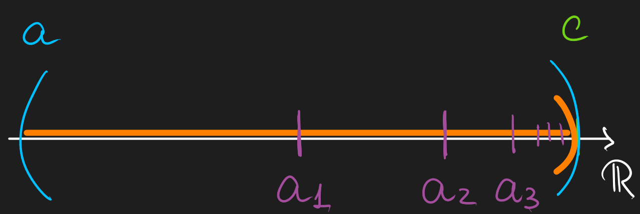
$$n=1: \quad a_1 = c - \frac{(c-a)}{2} = \frac{a+c}{2}$$

$$n=2: \quad a_2 = c - \frac{(c-a)}{4} = \frac{3c+a}{4}$$

$\vdots$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

$$\text{y } a_n \in (a, c) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$




Probé que dadas las condiciones del enunciado, siempre puedo construir $(a_n)_n \subseteq A$ /

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$$

$\blacksquare$

**2.** Consideremos el conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dado por

$$\mathcal{X} = \{E \subseteq \mathbb{N} : \text{ existen } p \text{ primo y } m \in \mathbb{N} \text{ tales que } \#E = p^m\}.$$

Hallar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}$.

$\mathcal{X}$ está compuesto de conjuntos finitos que cumplen que si $E \in \mathcal{X} \Rightarrow \#E = p^m$

Además, $\mathcal{X}$ es un subconj. de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

donde $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}$ :

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$$

Afirmo :

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N} \quad (\text{lo pruebo abajo } \star)$$

y como

$\#\mathcal{X}$ es infinito

pues hay infinitos primos $p$

$\Rightarrow$ hay infinitos $E \subseteq \mathbb{N} \,/\, \#E = p^m$

infinitos conjuntos finitos $E$ de distinto cardinal

y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \quad \# X$ es infinito

y

$$\left.\begin{array}{l} \# X \leq \# \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \\ \qquad\qquad\quad \parallel \\ \# X \leq \# \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \# \mathbb{N} \leq \# X \leq \# \mathbb{N}$$

$X$ es infinito
↓

$$\therefore \# X = \# \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad X \sim \mathbb{N}$$

y como cualquier conjunto infinito menos un conjunto numerable, mantiene su cardinal

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X$$

y sabemos que

$$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

$$\Rightarrow \boxed{\# \left( \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X \right) = c}$$

Falta mostrar ☆ : $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$

del ejercicio 12 de la práctica 2 :

**12.** Probar que si $A$ es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Si

$$A \sim \mathbb{N}$$

qvq

$$\mathcal{P}_f(A) := \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\} \overset{?}{\sim} \mathbb{N}$$

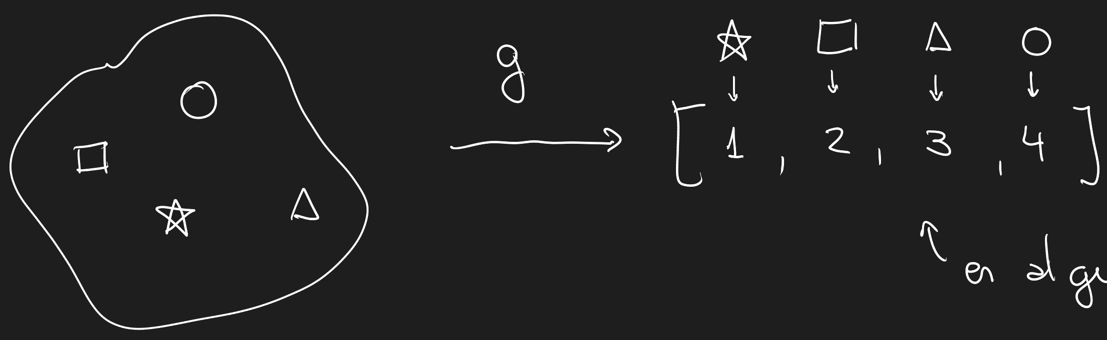
Puedo buscar inyectiva desde

$$g : B_n \longrightarrow \mathbb{N}^n \qquad (\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n \text{ veces}})$$

Con $B_n \subset A$ los conjuntos de $n$ elementos

Ej: si $n = 4$ :

Conj de 4 elementos — Vectores de 4 elementos




en algún orden

Para cada conjunto $B_n$ diferente → Puedo armar un vector que esté en $\mathbb{N}^n$ distinto

$\therefore$ $g$ es inyectiva.

$$\# B_n \leq \# \mathbb{N}^n = \aleph_0$$

Puedo escribir $P_f(A)$ como

$$P_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Sabemos que unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

Como $\# B_n \leq \aleph_0$

$$\Rightarrow \# \Big( \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{infinitos}} B_n \Big) = \aleph_0$$

$\Rightarrow$ $P_f(A)$ es numerable.

$\blacksquare$

**3.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos acotados no vacíos de $E$ tales que

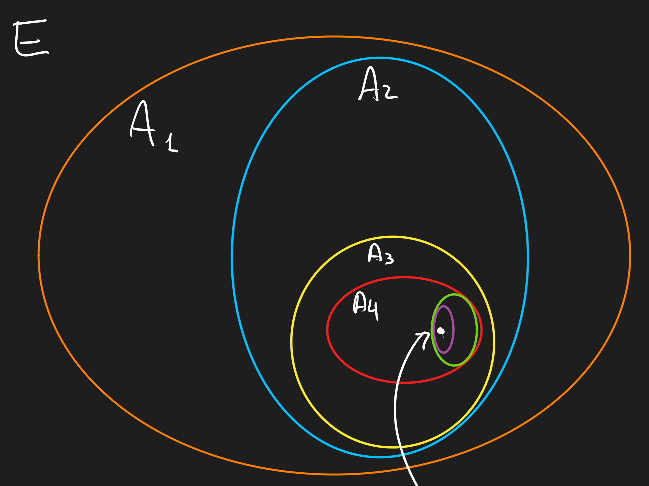
- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe $x \in E$ tal que toda bola centrada en $x$ contiene a algún $A_n$.

$$\operatorname{diam}(A_n) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\}$$

los elementos de $A_n$ se acercan cada vez más entre sí a medida que $n \to \infty$

Idea




quiero un $x \in E$ que esté en cada bola

Sea $x \in A_n \quad \forall n \geq 1 \quad (A_n \neq \emptyset)$

qvq

$$\forall r > 0,\ \overset{?}{\exists}\, n \in \mathbb{N} \ / \ A_n \subseteq B(x, r)$$

Como $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in A_n\} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x,y \in A_n$$

$\Rightarrow$ Si fijo el centro de una bola en $x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\forall r > 0$ podré hallar un $A_{n_0} \subseteq B(x, r)$

pues

$A_{n_0}$ es acotado (por H.)

$\Rightarrow$ existe una bola que lo contiene

y además

si $c = \operatorname{diam}(A_{n_0})$

$= \sup\{d(x,y) : x,y \in A_{n_0}\}$

y el radio de esta bola es $2c$,

de forma que la bola contenga todos

los valores de $A_{n_0}$ que sabemos distan

en a lo sumo $c$

(uso $2c$ como radio por si $A_{n_0}$ es cerrado, ie: incluye borde)

$\Rightarrow \forall r>0$, siempre habrá un $A_{n_0}$ /

$\operatorname{diam}(A_{n_0}) < \frac{r}{2}$

$\Rightarrow A_{n_0} \subseteq B(x, r)$ con $x \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ mostré que eligiendo $x \in E$ perteneciente a todos los $A_n$ (no vacíos), para toda bola centrada en este $x$, siempre habrá un $A_{n_0}$ contenido en ella.

$\blacksquare$

**4.** Sean $(E,d), (E',d')$ espacios métricos. Sea $f: E \to E'$ continua tal que $f^{-1}(K')$ es compacto para todo $K' \subseteq E'$ compacto.

Probar que $f(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq E$ cerrado.

Como $f$ es continua:

$\boxed{1}$ Si $K \subseteq E$ es compacto $\Rightarrow f(K)$ es compacto

$\boxed{2}$ Si $f(F) \subseteq E'$ es cerrado $\Rightarrow F$ es cerrado

Hi:

$\boxed{3}$ Si $K' \subseteq E'$ es compacto $\Rightarrow f^{-1}(K')$ es compacto

qvq:

Si $F \subseteq E$ es cerrado $\Rightarrow f(F)$ es cerrado

Por Teo

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

qvq

Si $F \subseteq E$ es cerrado $\overset{?}{\Rightarrow} f(F)$ es cerrado

o sea que

si $F = \overline{F} \overset{?}{\Rightarrow} f(F) = \overline{f(F)}$

Si $F = \overline{F}$

$$\Rightarrow f(F) = f(\overline{F}) \subseteq \overline{f(F)} = \overline{f(\overline{F})}$$

$f^{-1}$

$$\overline{F} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(F)}\right)$$

¿ que ésto sea una igualdad.

Por $\boxed{1}$ y $\boxed{3}$ sé que:

$K \subseteq E$ es compacto $\Longleftrightarrow$ $f(K) \subseteq E'$ es compacto

Me gustaría obtener alguna propiedad de $f$ a partir de ☆ (en particular la vuelta) que generalice a conjuntos cerrados.

Uso Teorema de subcubrimientos finitos sobre compactos

Sé que para cada $f(k)$ compacto, $\exists$ subcub. finito de abiertos

si $f(k)$ compacto $\Rightarrow$ $f(k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ abiertos

y como cada $K$ también es compacto, $\exists$ subcub. finito de abiertos

si $K$ compacto $\Rightarrow$ $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ abiertos no sé cómo seguir !!.

---

Fin