

Práctica 1

1. (a) Si $m \in \mathbb{Z}$, probar que m es múltiplo de 3 si y sólo si m^2 es múltiplo de 3.
 (b) Probar que $\sqrt{3}$ no es racional.

a) Probar

$$m \text{ es mult. de } 3 \Leftrightarrow m^2 \text{ es mult. de } 3$$

$\Rightarrow m$ es mult. 3 (TFA)

$$\Rightarrow m = s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} \quad / \quad p_i^{k_i} = 3^{k_i} \quad \text{con } k \geq 1$$

$$\Rightarrow m^2 = \left(S \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} \right)^2$$

$$= \underbrace{S_1}_{=1}^{2k_1} \cdot P_1^{2k_2} \cdot P_2^{2k_3} \cdot \dots \cdot P_n^{2k_4}$$

$$= P_1^{2k_1} \cdot P_2^{2k_2} \cdot P_3^{2k_3} \cdot \dots \cdot P_n^{2k_n}$$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} / p_i^{z_k} = 3^{z_k}$ que es potencia de 3

\Rightarrow es múltiplo de 3

\therefore Si m es mult. de 3 $\Rightarrow m^2$ lo es también

$\Leftarrow) m^2$ es mult. de 3

$$\Rightarrow m^2 = \underbrace{s \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{2k_4}}_{=1}$$

$$\text{con algún } p_i^{2k_i} = 3^{2k_i} = (3^{k_i})^2$$

$$m^2 = \left(s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_4} \right)^2$$

$$\text{con algún } p_i^{k_i} = 3^{k_i}$$

$$\Rightarrow s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \cdot p_n^{k_4} = m$$

es múltiplo de 3

Como ambas implicaciones son verdaderas,

vale la doble implicación.



(b) Probar que $\sqrt{3}$ no es racional. (1º ejemplo del Abbott)
pero con $\sqrt{2}$

Por absurdo:

Supongo que $\sqrt{3}$ es racional.

\Rightarrow puedo escribirlo como cociente de enteros

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \quad (\text{sin factores primos comunes})$$

$$(\sqrt{3})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3q^2 = p^2$$

Reescribo como prod. de primos ($q_1 = q_1^k$ con $k \geq 1$)

$$3 \cdot \left(\underbrace{q_0 \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_n}_{\text{signo}} \right)^2 = \left(\underbrace{p_0 \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_m}_{\text{signo}} \right)^2$$

$$3 \cdot \underbrace{q_0^2 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}_{=1} = \underbrace{p_0^2 \cdot p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}_{=1}$$

$$\underbrace{3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}_{\text{Al menos un factor} = 3} = \underbrace{p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}_{\text{debe haber algún } 3}$$

pero como p y q no tienen factores comunes,
entonces:

- Caso 3 es factor de q y no de p

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}{\overbrace{3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}^{\substack{\text{múltiplo de 3}}} = \overbrace{p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}^{\substack{\text{ningún 3}}}}$$

Junto los 3

$$\frac{3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}{\overbrace{3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2}^{\substack{\text{múltiplo de 3}}} = \overbrace{p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}^{\substack{\text{ningún 3}}}}$$

ningún 3

Abs!

- Caso 3 es factor de p y no de q

$$3 \cdot q_1^2 \cdot \dots \cdot q_n^2 = \overbrace{3 \cdot p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}^{\substack{\text{ningún 3}}} = \overbrace{3 \cdot \underbrace{3^{z_k}}_{\substack{\text{no es mult. de 3}}} \cdot p_1^2 \cdot \dots \cdot p_m^2}^{\substack{\text{es mult. de 3}}} \quad k \geq 1$$

Abs!

$\therefore \sqrt{3}$ no puede ser escrito como cociente de enteros \Rightarrow no es racional

✓

Ideas clave de este ejercicio:

1) Un nro. r es Racional si $\exists p, q \in \mathbb{Z} /$

$$r = \frac{p}{q}$$

2) Descomposición en primos por Teorema Fundamental
de la Aritmética

2. Probar que si $x < y + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

$$x < y + \varepsilon$$

Supongo que $x > y$

$$\Rightarrow -\varepsilon < y - x < 0$$

$$\varepsilon > x - y > 0$$

$$\text{dijo } \varepsilon_0 = x - y$$

$$x - y > x - y$$

Abs! \exists un ε que no cumple!

$$x < y + \varepsilon$$

$$x < y + x - y$$

$$x < x$$

$$\Rightarrow x \leq y \quad \blacksquare$$

Parte b) $|x - y| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$q \vee q \quad x = y$$

Supongo $x \neq y$

$$\Rightarrow |x - y| < \varepsilon$$

$$\text{dijo } \varepsilon_0 = |x - y| > 0 \quad \text{pues } x \neq y$$

$$|x - y| < |x - y|$$

Abs!

$$\Rightarrow x = y \quad \square$$

Ideas de este ejercicio:

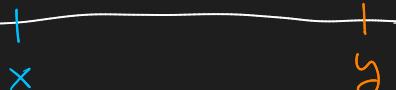
- Suponer opuesto de lo que quiero y llegar a un absurdo.

3. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.
- (b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.
- (c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un número irracional entre s y r .
- (d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y .

a) $y - x > 1$

distancia > 1

$$-x > 1 - y$$



$$x < y - 1$$

$q \vee q \exists k \in \mathbb{Z} /$

distancia > 1



Como $x, y \in \mathbb{R}$, "simplifico" el problema con elementos de \mathbb{Z}

↳ uso parte entera

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$$

Pero primero, separamos en casos

- Si $x \in \mathbb{R}$
 $y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y - x > 1$$

$$\underbrace{y - 1}_{\mathbb{Z}} > x$$

$$y > \underbrace{y - 1}_{\mathbb{Z}} > x$$

$$y > k > x \quad k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

- Si $x \in \mathbb{Z}$
 $y \in \mathbb{R}$

\Rightarrow Análogo :

$$y - x > 1$$

$$y > \underbrace{1 + x}_{\mathbb{Z}} > x$$

$$y > k > x \quad k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

- Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
 \wedge
 $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $(\text{ó } x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z})$

no son enteros!

Tengo

$$y - x > 1$$

uso info de \mathbb{Z} (no es \leq)

$$\lfloor y \rfloor < y \quad \text{con } \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$$

Podría ser la k que busco

Candidato a $k \in \mathbb{Z}$

falta ver que

$$k \stackrel{?}{=} \lfloor y \rfloor$$

$$x < \lfloor y \rfloor$$

Tengo

$$y - x > 1$$

$$x < y - 1$$

si ésto es menor que $\lfloor y \rfloor$, gené
(lo cual es trivialmente cierto si se lo piensa
unos segundos)

pues podré decir que $x < y - 1 < \lfloor y \rfloor$

$$\Rightarrow q \vee \bar{q}$$

$$y - 1 < \lfloor y \rfloor$$

$$y < \lfloor y \rfloor + 1$$

pero sabemos que

$$\lfloor y \rfloor + 1 = y + 1 - \underbrace{\text{Parte Decimal}(y)}_{\substack{y \notin \mathbb{Z} \\ < 1}}$$

$$\lfloor y \rfloor + 1 < y + 1$$

∴

$$y < \lfloor y \rfloor + 1$$

$$\Rightarrow x < \lfloor y \rfloor$$

∴ $x < \lfloor y \rfloor < y$

□

Floshands cósmicas que no supe cómo usar:

[desde acá]

$$\lfloor y \rfloor = \sup \{ n \in \mathbb{Z} : n \leq y \}$$

↑ como $y \notin \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow n < y$

$$= \sup \{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}$$

y construyo otro conjunto para sumar sus supremos

$$\Rightarrow \lfloor y \rfloor - 1 = \sup \{ n \in \mathbb{Z} : n < y \} - \sup \{ 1 \}$$

Como A y B son acotados $\sup A$, uso

$$\sup A - B = \sup A - \sup B$$

$$\text{donde } A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

⊗ misma demo
que vid Teo 1
min 36:00

⊗ obs:

como $A \subset \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \sup A = \max A$$

$$= \sup \{ n \in \mathbb{Z} : n < y - 1 \}$$

↑
Todos los elem's de este
conjunto han incrementado
en 1 wrt. los de A ,
(pensar caso $y = 0,9$)

Def de Parte
entera

$$= \lfloor y - 1 \rfloor$$

$$\lfloor y \rfloor - 1 = \lfloor y - 1 \rfloor$$

[hasta acá]

Otra forma para la 3º parte de la demo:

Defino un conjunto cuyo supremo sea y ,
para moverme ϵ a la izquierda y hallar un a
tal que $y - \epsilon < a \leq y$
(b' de Equivalencia 1)

donde elegiré $\epsilon = 1$, obteniendo

$$y - 1 < a \leq y$$

Defino

$$A = \{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \text{ como } y \notin \mathbb{Z} \quad (\text{tampoco es supremo!}) \\ &\Rightarrow n \neq y \\ &\Rightarrow n < y \\ &\quad (y \text{ no } \leq) \end{aligned}$$

esto es importante pues
la condición que busco
es estricta:

$$x < k < y$$

Tengo un candidato a k :

$$\hookrightarrow k = \sup(A)$$

$$\stackrel{A \subset \mathbb{Z}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \max A \in \mathbb{Z} \quad \checkmark \quad \left(\begin{array}{l} \text{notar:} \\ \max A = \lfloor y \rfloor \end{array} \right)$$

este k cumple $k < y$ con $k \in \mathbb{Z}$

Falta ver que

$$x \stackrel{?}{<} k$$

$$x \stackrel{?}{<} \max A$$

se' que

$$y - x > 1$$

$$x < y - 1$$

si encontró que

$$y - 1 \stackrel{?}{<} \max A$$

\Rightarrow gené, pues $x < y - 1$

(es casi trivial si se lo piensa unos segundos)

$$\max A = \lfloor y \rfloor \quad \left(\begin{array}{l} \text{pues es el entero m\'as cercano} \\ \text{en la construcci\'on del conjunto} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{?}{\text{y-1}} < \lfloor y \rfloor$$

$$y < \lfloor y \rfloor + 1$$

$\overbrace{e \in \mathbb{Z}}^{\neq 0} \quad \overbrace{e \in \mathbb{Z}}$

como

$$\lfloor y \rfloor = \sup \{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}$$

$$1 = \sup \{ 1 \}$$

no sé cómo seguir "

Otra forma: Por absurdo

llegué a:

Falta ver que

$$x < k$$

$$x < \max A$$

Supongo que

$$x \geq \max A$$

$$x \geq \lfloor y \rfloor$$

pero

$$x < y - 1 < \lfloor y \rfloor$$

Abs! pues $x \geq \lfloor y \rfloor \wedge x < \lfloor y \rfloor$

o o
x < $\max A$

y puedo decir que

$$x < \max A < y$$

$$x < \lfloor y \rfloor < y$$

$$x < k < y \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

Idea:

- Llegar a algo de lo formado en (a)

$$\text{Si } x < y \Rightarrow y - x > 0$$

$$y \text{ como } y \neq x \Rightarrow y - x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y - x} > 0$$

y además por Arquímedes,

$$\exists n \in \mathbb{N} / n > \frac{1}{y - x}$$

equivalentemente

$$\frac{1}{n} < y - x$$

$$1 < n(y - x)$$

$$1 < ny - nx$$

$$1 < y' - x' \quad \text{con } y' = ny \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{}_{\text{esta es lo que}}$$

$$x' = nx \in \mathbb{R}$$

teníe en (a) !

\Rightarrow Por lo probado en (a)

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad / \quad n \cdot x < k < n \cdot y$$

divido por n

$$x < \underbrace{\frac{k}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y$$

$$x < q < y$$

□

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un número irracional entre s y r .

Parece que "quiere" que use el (b). Lo uso en 2º forma.

1º forma Sé

$$r - s > 0$$

Como por ej. 1 sé que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (es irracional)

y $(r - s) \in \mathbb{Q}$,

$\Rightarrow \frac{r - s}{\sqrt{3}}$ temporal lo estaré (hay que probarlo)

y Además, como $\sqrt{3} > 1$ (por $3 > 1$ y \sqrt{x} es creciente)
 $\Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt{1}$ ie no cambia la
desigualdad

$$0 < \frac{r - s}{\sqrt{3}} < r - s$$

Sumo s

$$\underbrace{s}_{\in \mathbb{Q}} < s + \underbrace{\frac{r - s}{\sqrt{3}}}_{\text{Candidato a irracional}} < \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}$$

Falta ver que

$$s + \frac{r - s}{\sqrt{3}} \stackrel{?}{\notin} \mathbb{Q}$$

Similar al ej 1, supongo que sí está en \mathbb{Q} . (y llego a absurdo)

$$\text{Supongamos } i = s + \frac{r-s}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{i - s}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{r-s}{\sqrt{3}}}_{\notin \mathbb{Q}} \} \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{3} = \frac{r-s}{i-s}$$

$$\underbrace{\sqrt{3}}_{\notin \mathbb{Q}} \quad \underbrace{i-s}_{\in \mathbb{Q}} \quad \underline{\text{Abs!}}$$

$\therefore i = s + \frac{r-s}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \underbrace{s}_{\in \mathbb{Q}} < s + \underbrace{\frac{r-s}{\sqrt{3}}}_{\notin \mathbb{R}} < \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}$$

$$s < i < r$$

\blacksquare

2º forma Por 3 b, se que

$$\exists q \in \mathbb{Q} \mid s < q < r \quad \text{con } s, r \in \mathbb{R}$$

y como
 $s < r$

$$\sqrt{3}.s < \sqrt{3}.r$$

y también vale que

$$\exists \tilde{q} \in \mathbb{Q} \quad / \quad \sqrt{3}s < \tilde{q} < \sqrt{3}r \quad \text{con } s, r \in \mathbb{R}$$

pero $\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$

\Rightarrow dividir por $\sqrt{3}$

$$s < \frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} < r$$

$\frac{s}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R} \quad \frac{r}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$

Candidato
irracional

Faltó ver que

$$\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \stackrel{?}{\notin} \mathbb{Q}$$

De nuevo, supongo que sí, y llego a absurdo

$$\text{Si } i = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$$

\Rightarrow escribo $\sqrt{3}$ como

$$\sqrt{3} = \frac{\tilde{q}}{i} = \frac{\tilde{q}}{\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}}} \left. \begin{array}{l} \in \mathbb{Q} \\ \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \in \mathbb{Q} \quad \left. \begin{array}{l} \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \\ \text{Abs!} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} S < \overbrace{\sigma + \beta}^{\infty} < r \\ \underbrace{\epsilon \oplus}_{\in Q} \quad \underbrace{\epsilon \oplus}_{\notin Q} \\ \end{array}$$

$$S < i < r$$

□

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y .

Uso ideas de (b) y (c)

Por (b), sé que $\exists \tilde{q} \in \mathbb{Q}$ entre \tilde{x} e \tilde{y}

$$\tilde{x} < \tilde{q} < \tilde{y}$$

Exijo un número irracional:

$$i = \overline{\pi}$$

Como $\pi > 0$

$$\Rightarrow x < y$$

$$\underbrace{\pi \cdot x}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{\pi \cdot y}_{\in \mathbb{R}}$$

De nuevo, por (b), sé que $\exists q \in \mathbb{Q} /$

$$\pi \cdot x < q < \pi \cdot y$$

divido por π

$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{\frac{q}{\pi}}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}}$$

Candidato a irracional

Feliz ver que $\frac{q}{\pi}$ es irracional

Supongo que $\frac{q}{\pi} \in \mathbb{Q}$ y llego a absurdo:

escribo π como

$$\pi = \left. \begin{array}{c} \frac{q}{1} \\ \frac{q}{2} \end{array} \right\} \in \mathbb{Q} \quad \left. \begin{array}{c} \frac{q}{1} \\ \frac{q}{2} \end{array} \right\} \in \mathbb{Q} \quad \left. \begin{array}{c} \pi \in \mathbb{Q} \\ \text{Abs!} \end{array} \right\}$$

...

$$\frac{q}{\pi} \notin \mathbb{Q} \quad (\text{es irracional})$$

$$\Rightarrow \underbrace{x}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \notin \mathbb{Q}}} < \underbrace{\frac{q}{\pi}}_{\in \mathbb{Q}} < \underbrace{y}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \notin \mathbb{Q}}}$$

$$x < i < y$$

¶

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Probar:

$$\text{i)} s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq s & \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A / s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

$$\text{ii)} i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq a & \forall a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A / i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Lo hizo Vickey en Teóricos 01.

$$\text{i)} \Rightarrow s = \sup A$$

$\Rightarrow a \leq s \quad \forall a \in A$ pues s es cota sup. ✓i

\Rightarrow como s es supremo de A ,

$s - \varepsilon$ no puede ser supremo de A pues

$$s - \varepsilon < s$$

$$\Rightarrow \exists a \in A / s - \varepsilon < a \leq s \quad \checkmark \text{ii}$$

$$\Leftarrow \text{Vale } \{ \text{ii} \quad q \vee q \quad s \text{ es } \sup A : \quad$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ cota superior de A

$q \vee q \quad t \geq s \quad (s \text{ es la menor de las cotas})$

Supongamos que $t < s$

$$\Rightarrow t = s - \varepsilon \quad \left. \right\downarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = s - t > 0$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \mid t = s - \varepsilon < a \leq s$$

ii

Abs! pues t era cota sup.

$$\therefore t \geq s \quad \forall t \text{ cota superior de } A \quad (t \geq s \times \forall x \in A)$$

III

II) Igual pero al revés

$$\Rightarrow i = \inf A$$

$$\Rightarrow i \text{ es cota inf}$$

$$\Rightarrow i \leq a \quad \forall a \in A \quad \checkmark_i$$

Como i es $\inf A$

$\Rightarrow i + \varepsilon$ no es ínfimo de A pues

$$i < i + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid i \leq a < i + \varepsilon \quad \checkmark_{ii}$$

\Leftarrow Vale $\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \text{que vale } i = \inf A \end{array} \right.$

Problema 2 condiciones de Infimo

$$\boxed{a)} i \leq a \quad \forall a \in A \quad (\text{es cota inferior}) \quad \checkmark$$

[b] Supongo que \exists otra cota inf. $t / t > i$
(t sea mejor que i)

$$\Rightarrow t = i + \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = (t - i) \stackrel{t > i}{\downarrow} > 0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / i \leq a < t = i + \varepsilon$$

Abs! pues t era cota
inferior, pero $\exists a < t$

\therefore no existe una mejor cota : $i \leq t \quad \forall t / t < a$
 $\forall a \in A$

$\Rightarrow i$ es único de A

□

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} , y probar que lo son:

$$(a, b] \quad B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad B \cup \{0\} \quad \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$$

$(a, b]$
 ↓ ↑
 ínfimo Supremo y máximo
 (no es mínimo)

Demo

• es b supremo?

• es cota sup pues $b \geq c \quad \forall c \in (a, b]$ ✓

• $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in (a, b) / b - \varepsilon < c \leq b$ ✓
 $\underbrace{\in (a, b)}_{\varepsilon} \quad \underbrace{c}_{\in (a, b)} \quad \underbrace{b}_{\in (a, b)}$

como $b \in (a, b] \Rightarrow$ es máximo!

• es a ínfimo?

igual que arriba.

Similmente para el ínfimo.

Demo

$(a, b]$

b es supremo pues $b \geq c \quad \forall c \in (a, b)$ ✓

y todas las cotas superiores son $\geq b$

$b \leq t \quad \forall t$ cota superior ✓

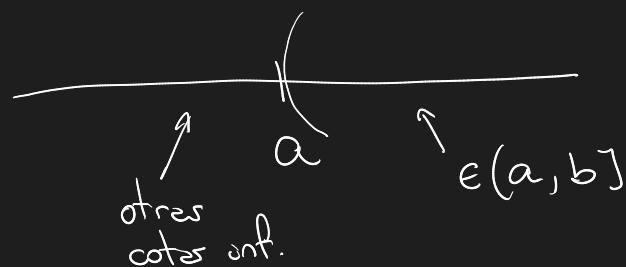
a es ínfimo pues $a < c \quad \forall c \in (a, b]$

que $a \geq t \quad \forall t$ cota inferior

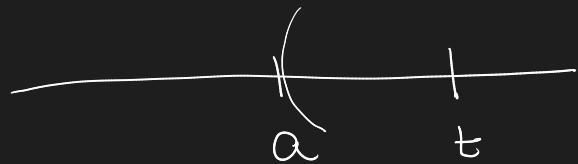
Supon go

$a < t$

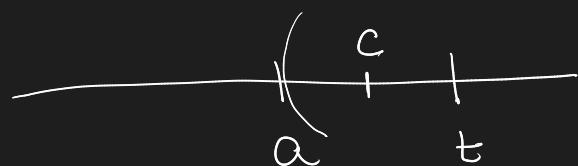
entonces, como a es cota inferior



como $a < t$



pero entonces existe $c = \frac{t-a}{2} \in (a, b]$



Absurdo ! pues

a es cota inferior

$$(a < c \quad \forall c \in (a, b])$$

∴ a es ínfimo de $(a, b]$.

■

$$\mathcal{B} \cup \{0\}$$

Lo mismo que \mathcal{B} , pero con

$$\text{Inf}(\mathcal{B} \cup \{0\}) = \min(\mathcal{B} \cup \{0\}) = 0$$

$$\mathcal{D} = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

No tiene supremo pues no está
acotado superiormente

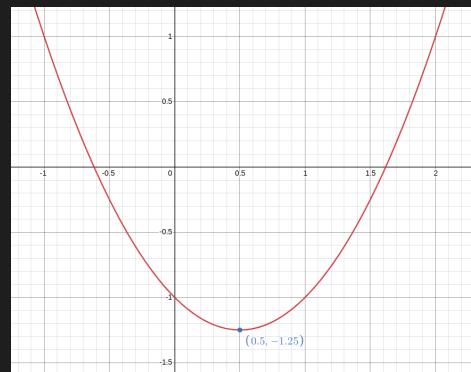
$$\text{Inf}(\mathcal{D}) = -\frac{5}{4} = \min(\mathcal{D})$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Pues si } f(x) = x^2 - x - 1 \\ f'(x) = 2x - 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \} \text{ Punto crítico en } x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{-\frac{2}{4}} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{4}{4}} - 1 = -\frac{5}{4}$$



$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

↑ sucesión monótona decreciente

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

↑
1º elemento

$$\text{Supremo } (\mathcal{B}) = \frac{1}{2} = \max (\mathcal{B})$$

$$\text{Infimo } (\mathcal{B}) = 0 \rightarrow \underline{0} \text{ es mínimo por } 0 \notin \mathcal{B}$$

Demo (Supremo)

- $\frac{1}{2}$ es cota sup por $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓
- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathcal{B} / \frac{1}{2} - \varepsilon < b \leq \frac{1}{2}$ ✓
 $\underbrace{\varepsilon}_{\in \mathbb{R}} \quad \underbrace{\in \mathcal{B} \subset \mathbb{Q}}_{\text{estricto}} \quad \frac{1}{2} \text{ es máx elemento}$
 $(\frac{1}{2} \in \mathcal{B})$

Demo

$$\frac{1}{2} \in \mathcal{B} \quad \& \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n}$$

y como, dado $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2}$$

↑
estricto

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathcal{B} / \frac{1}{2} - \varepsilon < b \leq \frac{1}{2}$$

Pues b puede ser $\frac{1}{2}$

$$0 \quad \frac{b - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{2}$$

6. Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, probar:

- (a) Si B está acotado superiormente, A también y $\sup A \leq \sup B$.
- (b) Si B está acotado inferiormente, A también e $\inf B \leq \inf A$.
- (c) Si A no está acotado, B tampoco.

$$\text{a)} \quad \exists s_B \in \mathbb{R} \quad / \quad s_B \geq b \quad \forall b \in B$$

como $A \subseteq B$, $\exists s_B \in \mathbb{R} \quad / \quad s_B \geq b \quad \forall b \in B$

$$\exists s_A \in \mathbb{R} \quad / \quad s_A \geq a \quad \forall a \in A$$

Como $A \subseteq B$, sé que

$$\exists s_B \in \mathbb{R} \quad / \quad s_B \geq b \quad \forall b \in B$$

$$\Rightarrow s_B \geq a \quad \forall a \in A$$

$$A \subseteq B$$

↑ A está acotado superiormente

por s_B

□

$$\text{y } \sup A \leq \sup B$$

$$\text{Supongamos } \sup A > \sup B$$

Supremo de A

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \quad / \quad s_A - \varepsilon < a \leq s_A$$

Supremo de \mathcal{B}

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathcal{B} \mid s_{\mathcal{B}} - \varepsilon < b \leq s_{\mathcal{B}}$$

Como $s_A > s_B$

y como supuse $s_A > s_B$

$$\Rightarrow s_A > s_B$$

Pero sabíamos que $s_B \geq a \quad \forall a \in A$

y $s_B \geq b \quad \forall b \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow s_A > s_B > b$$

7. Dados un conjunto de números reales A y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

- (a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.
- (b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

a) A está acotado superiormente :

$$\exists s \in \mathbb{R} / s \geq a \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow -A = -1 \cdot A = \{-a : a \in A\}$$

$$\text{que } \exists i \in \mathbb{R} / i \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$$

sabiendo que

$$\exists s \in \mathbb{R} / s \geq a \quad \forall a \in A$$

$$\cdot (-1)$$

$$-s \leq -a \quad \forall a \in A$$

$$\text{Pero } -A = \{(-1)a : a \in A\}$$

$$-s \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$$

↔

llamemos $i = -s$ pues es cota inferior de $-A$

$$\exists i \in \mathbb{R} / i \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$$

□

Lo que muestra que

- $-A$ está acotado inferiormente

$$\bullet \inf(-A) = -\sup(A) \quad (\text{pues } i = -s)$$

que es lo que quería.

b) Si: $\begin{cases} c > 0 \\ A \text{ acotado superiormente} \end{cases}$

que 1) c. A está acotado superiormente

$$2) \sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$$

$$1) \exists s \in \mathbb{R} / s \geq a \quad \forall a \in A \quad (A \text{ acotado sup.})$$

(hipótesis)

$$A \subset \mathbb{R}$$

$$c \cdot A = \{c \cdot a : a \in A\}$$

que

$$\exists \tilde{s} \in \mathbb{R} / \tilde{s} \geq \tilde{a} \quad \forall \tilde{a} \in c \cdot A$$

Comienzo por

$$\exists s \in \mathbb{R} / s \geq a \quad \forall a \in A$$

multiplico por $c > 0$

$$c \cdot s \geq \underbrace{c \cdot a}_{\forall a \in A}$$

$$c \cdot s \geq \tilde{a} \quad \forall \tilde{a} \in c \cdot A$$

∴ $c \cdot A$ es té scotado

y ademas, $c \cdot s$ es cota superior de $c \cdot A$

2) Y se sé que $\text{cotaSup}(c \cdot A) = c \cdot \text{cotaSup}(A)$ (por 1)

Falta mostrar que se mantiene la segunda condición

de Supremo para $c \cdot A$:

[b] $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / c \cdot s - \varepsilon < c \cdot a \leq c \cdot s$

$c \cdot s = c \cdot \text{Sup}(A) :$

[b] $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / s - \varepsilon < a \leq s$

mult. por $c > 0$

$c \cdot (s - \varepsilon) < c \cdot a \leq c \cdot s$

$c \cdot s - \underbrace{c \cdot \varepsilon} < \tilde{a} \leq c \cdot s \quad \tilde{a} \in c \cdot A$

$c \cdot s - \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} \leq c \cdot s$

Reformulo

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \tilde{a} \in c \cdot A / c \cdot s - \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} \leq c \cdot s$

Demonstre que:

$$\text{sup}(c \cdot A) = \underbrace{c \cdot \text{Sup}(A)}_{c \cdot s}$$