Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

$$\underbrace{f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \chi_{A_i}(x)}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mu(A_i).$$

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

Y MEDIBLE

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \mu(A_i).$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : \ f(x) \le u(x),\ x \in [0,1]\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : \ v(x) \le f(x),\ x \in [0,1]\}.$

Repaso

Integral de Lebesgue de funciones simples

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i\,\mu(A_i).$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \left\{\text{funciones simples medibles } u : \; f(x) \leq u(x),\, x \in [0,1]\right\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \left\{\text{funciones simples medibles } v : \; v(x) \leq f(x),\, x \in [0,1]\right\}.$

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos su integral de Lebesgue como

$$\int f\,d\mu = \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v\,d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u\,d\mu \right\}.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left|\int f \, d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x.

Si $\exists\, E \,/\, \mu(E) = 0 \,/$ la prop. vale $\forall\, x \in E^c$

$\left(\begin{array}{l} E^c = [0,1] \setminus E \\ E^c = \mathbb{R} \setminus E \\ \text{según el caso} \end{array} \right)$

Definición

Si una propiedad vale para todo x salvo para un conjunto de medida 0, decimos que la propiedad vale en casi todo punto o en casi todo x.

prop se traduce a: $\underbrace{f = g \quad c.t.p.}$ $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

EJERCICIO: f, g med. y acot.

$f \leq g \quad c.t.p. \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$

Obs.: $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$

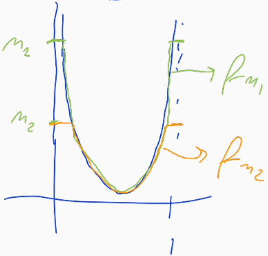
$f = 2 \quad c.t.p. \Rightarrow \int f \, d\mu = \int 2 \, d\mu = 2 \cdot 1 = 2$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0, 1]$. (NO NECESARIAM. ACOTADA)

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$



f_n medible $\forall n$ (EJ)

f_n acotada $\forall n$

$|f_n(x)| \leq n \quad \forall x \in [0,1].$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

(y medible)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

$f_n \leq f_{n+1}$ (PENSAR)

$\Longrightarrow \int f_n \leq \int f_{n+1}$

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

$f_n \geq 0$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

Definimos

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

$\in [0, +\infty]$

(puede ser $+\infty$)

Integral de funciones no acotadas

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Por la propiedad de monotonía de la integral , la sucesión de números $\left(\int f_n \, d\mu\right)_n$ es creciente.

Definimos

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Decimos que f es integrable si el límite es finito.

Ejemplo

$$\boxed{\underline{f} : [0,1] \to [0,+\infty]}$$

$$\to \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (f(0) = +\infty)$$

$$\boxed{f_n(x)} = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 1/\sqrt{x} \leq n \iff 1/n \leq \sqrt{x} \iff 1/n^2 \leq x \\ \underline{n} & \text{si } 1/\sqrt{x} > n \iff \underline{1/n^2 > x} \end{cases}$$

$$\int f_n(x)\, d\mu = \int_{\underline{[0,1/n^2)}} f_n\, d\mu + \int_{[1/n^2,1]} f_n\, d\mu = \underbrace{\int_{[0,1/n^2)} \underline{n}\, d\mu}_{} + \underbrace{\int_{[1/n^2,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\mu}_{2}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n^2} + 2\sqrt{x}\Big|_{1/n^2}^{1} = \frac{1}{n} + 2 - 2\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

↳ "RIEMANN ⇒ LEBESGUE" $\underbrace{\int f\, d\mu}_{} = \lim \int f_n\, d\mu = \underline{2}$.

Proposición MONOTONÍA

Sean f, g medibles no negativas en $[0,1]$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para casi todo x. Si f es integrable, entonces g es integrable y $\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$.

$\exists E \subset [0,1]$ med /

DEM: $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [0,1] \setminus E$ con $\mu(E) = 0$.

Si $x \in [0,1] \setminus E \Rightarrow g_n(x) = \min\{n, g(x)\} \leq \min\{n, f(x)\} = f_n(x)$.

$\Rightarrow \underbrace{g_n \leq f_n}_{\to \text{ med acot}}$ c.t.p. $\xRightarrow{\text{EJERCICIO}}$ $\boxed{\int g_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu}$

$\int g_n\, d\mu \to \int g\, d\mu$, $\int f_n\, d\mu \to \int f$

$\therefore \int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$.

Proposición
Sea f no negativa, integrable en $[0,1]$. Entonces, $\int f\,d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ en casi todo punto

$\Leftarrow)$ Ejercicio.

$\Rightarrow)$ $E = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) > 0\}$ q.v.q. E tiene med. cero.

TRUCO: $E = \bigcup_n \underbrace{\{x \in [0,1] \,/\, f(x) \geq 1/n\}}_{A_n}$.

FIJAMOS n

$x \in A_n \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 1/n}$

$\frac{1}{n}\chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1/n & x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{n}\chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in [0,1]$

$\overset{\text{PROP}}{\Rightarrow} 0 = \int f\,d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} = \underbrace{\overset{\neq 0}{\frac{1}{n}}\mu(A_n)} \Rightarrow \mu(A_n) = 0.$

$E = \bigcup A_n \Rightarrow \mu(E) \leq \sum \mu(A_n) = 0$

Continuidad absoluta de la integral

Obs: f med. y acot en $[0,1]$. $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [0,1]$

$A \subset [0,1] \Rightarrow \left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \le \int_A |f(x)|\,d\mu \le \int_A M\,d\mu = M\mu(A)$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/M$ / si $\mu(A) < \delta \Rightarrow \left|\int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$.

f MED. NO NEGAT., $A \subset [0,1]$ MED

$\Rightarrow \int_A f := \int f \cdot \chi_A \,d\mu$.

EJERCICIO $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \ne j$

$\Rightarrow \boxed{\int f = \sum_j \int_{B_j} f\,d\mu}$

Continuidad absoluta de la integral

Teorema

$\nearrow$ en $[0,1]$.

Sea f no negativa e integrable. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_A f\,d\mu < \varepsilon$$

$\hookrightarrow$ δ depende de ε.

para todo medible $A \subset [0,1]$ con $\mu(A) < \delta$.

DEM.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } f(x) > n \iff \text{si } x \in E_n \\ f(x) & \text{si } f(x) \leq n. \iff \text{si } x \in E_n^c \end{cases}$$

$$\boxed{E_n = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) > n\}}$$

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \implies 0 \leq \int f\,d\mu - \int f_n\,d\mu \to 0$$

$E_n = \{x \in [0,1] / f(x) > n\}$ $\qquad f_n(x) = \begin{cases} n & \forall x \in E_n \\ f(x) & \forall x \in E_n^c \end{cases}$

$\int f \, d\mu - \int f_n \, d\mu \longrightarrow 0$

$= \int_{E_n} f + \int_{E_n^c} f - \underbrace{\int_{E_n} f_n}_{} - \int_{E_n^c} f_n = \int_{E_n} f + \cancel{\int_{E_n^c} f} - \int_{E_n} n - \cancel{\int_{E_n^c} f}$

$= \int_{E_n} f - \int_{E_n} n \longrightarrow \underbrace{\int_{E_n} f - \int_{E_n} n}_{} \longrightarrow 0$

$\exists N / \boxed{0 \leq \int_{E_N} f - \int_{E_N} N < \varepsilon/2}$

Sea $A \subset [0,1]$ med con $\underbrace{\mu(A) < \delta}_{} = \varepsilon/2N$.

QVQ $\int_A f < \varepsilon$.

$$\int f\,d\mu = \int_{A\cap E_N} f + \int_{A\cap E_N^c} f = \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N^c} \widehat{f}$$

$$\underset{f\leq N \text{ en } E_N^c}{\leq} \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \underbrace{\int_{A\cap E_N} N + \int_{A\cap E_N^c} \widehat{N}}_{=\int_A N\,d\mu = N\mu(A) < N\cdot\delta = N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon/2} <$$

$$< \int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N + \varepsilon/2 =: (*)$$

$\boxed{m: m \geq N \;\; \geq 0 \text{ (VER)}}$

PENSAR

$$\boxed{\int_{A\cap E_N} f - \int_{A\cap E_N} N} = \lim_m \int_{A\cap E_N} f_m - \int_{A\cap E_N} N = \lim_{m\to\infty} \int_{A\cap E_N} (f_m - N)\,d\mu$$

L

$$\leq \lim_{m\to+\infty} \int_{E_N} (f_m - N)\,d\mu = \lim_{m\to+\infty} \int_{E_N} f_m - \int_{E_N} N\,d\mu = \int_{E_N} f - \int_{E_N} N\,d\mu < \varepsilon/2$$

$$\therefore \int f\,d\mu < (*) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Corolario

Sea f no negativa e integrable. La función

$$\underline{F(x)} = \int_{[0,x]} f \, d\mu$$

es uniformemente continua en $[0,1]$.

LEBESGUE

$$F(x) = \int_{[0,x]} f \, d\mu$$

$$F(0) = \int_{[0,0]} f \, d\mu = 0$$

$$F(1) = \int_{[0,1]} f \, d\mu$$

$$F(1/2) = \int_{[0,1/2]} f \, d\mu$$

$$\underbrace{\int_{[0,1/2]} f \, d\mu}_{\text{LEBESGUE}} \neq \underbrace{\int_0^{1/2} f \, dx}_{\text{RIEMANN}}$$