Nicolás Sirolli

Lunes Mar 22/21

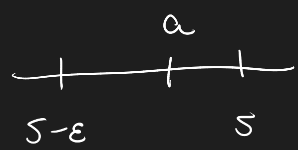
# Supremos e Ínfimos

## Recordar:

$A \subseteq \mathbb{R}$, Acotado superiormente

$\Rightarrow s = \sup A$ sii

- $s \geq a \quad \forall a \in A$
- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ / \ a > s - \varepsilon$




equivalentemente para el ínfimo.

## (Propiedad / Axioma)

## Principio de Arquímedes

(no es un "principio" para nos.)

↳ $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente

Demo: (Por absurdo)

Sup. que $\exists x \in \mathbb{R} \ /$

$n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists s = \sup \mathbb{N}$

elijo $\varepsilon = 1$


Luego, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ con $s-1 < n$

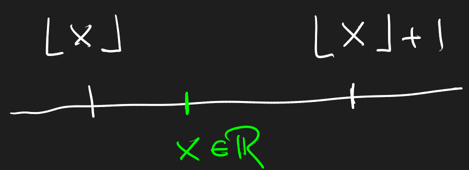
$+1$

$\therefore \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sup}}}{s} < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ Abs!

$\Rightarrow$ Los naturales no están acotados $\boxtimes$

Obs:
Sí es un principio que cada natural tiene un siguiente.

## Parte entera




$\lfloor 3,1 \rfloor = 3$

$\lfloor -3,1 \rfloor = 4$

Prop

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists!\, n \in \mathbb{Z} \, /$$

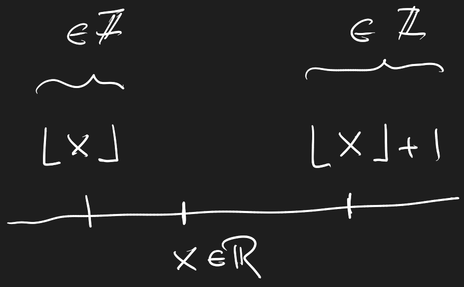
$$n \leq x < n+1$$

Nombre / Not:

$n =$ Parte entera de $x$

$n$ = Piso de $x$

$n = \lfloor x \rfloor$




Dem :

Sea :

$$A = \{ n \in \mathbb{Z} : x < n+1 \}$$

- $A \neq \emptyset$ (Arquímedes)
- $A$ está acotada inferiormente $\Rightarrow$ $n > x-1 \;\; \forall n \in A$

$\Rightarrow \exists\, n = \inf A$

Afirmo :

$\boxed{i}$ $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{ii}$ $n \leq x < n+1$

Pruebo

$\boxed{i}$ luego

$\boxed{ii}$ como $n \in A$, $x < n+1$

qvq $n \leq x$

( y sino, $n > x$ y luego
$n-1 > x-1$ )

$$\Downarrow$$

$n-1 \in A$ Abs!

Imposible, pues $n \leq m \ \forall m \in A$

Recuerdo

"Todo subconjunto de Naturales tiene un 1° elemento"

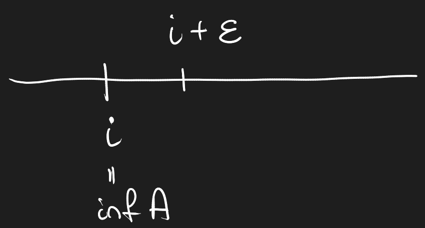
$\boxed{i}$ Lema:

Si $A \in \mathbb{Z}$ es acotado inferiormente
$\neq \emptyset$

$\Rightarrow \inf \in A$

(equivalentemente, A tiene mínimo)

Demo:

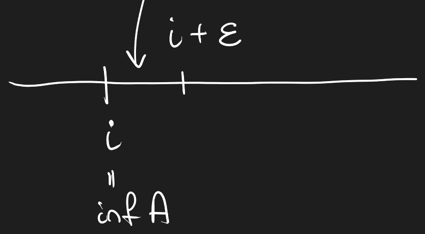



Afirmo:

Si $\varepsilon \geq 0$ es suf. chico

$$\Rightarrow (i, i+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

no hay enteros en el intervalo




Pero:

$$\exists\, \alpha \in A \,/\, \alpha < i+\varepsilon$$

$$\therefore\ \alpha = i$$

$\boxtimes$

Unicidad:

Sup $\quad n \leqslant x < n+1$

$\qquad\quad m \leqslant x < m+1$

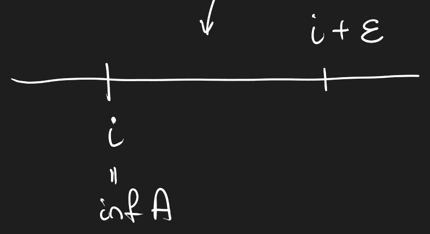
con $\ n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\ n < m+1 \Rightarrow n \leqslant m \\ \quad\ \ m < n+1 \Rightarrow m \leqslant n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

No vale restar desigualdades !

# Sobre los Reales

quiero un $\varepsilon$ / no haya enteros adentro.




$i \in \mathbb{R}$

Idea:

Como $i \in \mathbb{R}$

tiene desarrollo decimal

$$i = a_0 , a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\Big( \text{Obs}: \underbrace{0,3 = 0,\widehat{99}}_{\text{no considero las "colas de 9"}} \Big)$$

Tomo $j \geq 1$ mínimo / $a_j \neq 9$

Así,

$$i = a_0 , 99 \dots 9 \underbrace{a_j}_{\neq 9} a_{j+1} \dots$$

$\Rightarrow$ Tomo

$$\varepsilon = 0,00 \dots 010$$

Así,

$$i + \varepsilon = a_0 , 99 \dots 9 (a_j + 1) a_{j+1}$$

Luego,

$$i + \varepsilon - i = \varepsilon$$

$\boxtimes$

# Problemas

1) Sea $A = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \}$

Hallar, si existen, sup, máx, Inf, mín de A

Por la definición de A:

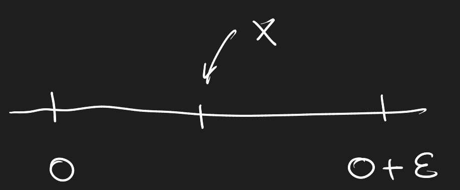
- $\sqrt{2}$ es cota superior $\Rightarrow \exists$ supremo de A
- $0$ es cota inferior $\Rightarrow \exists$ ínfimo de A

- Ínfimo(A) $= 0$, pues

  ↳ $0 \leq x \quad \forall x \in A$ ✓

  candidato a inf

  ↳ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in A \ / \ 0 + \varepsilon > x$




Si elijo $x = 0$

$\Rightarrow \varepsilon > 0$ ✓

Ahora el mín:

$\inf A \in A \Rightarrow \exists \min A = \inf A = 0$

Supremo (ver ej 3 de guía 1)

hay racionales? sí


- Si $\sqrt{2}-\varepsilon < 0$, tomo $q=0$ y listo

Si $\sqrt{2}-\varepsilon \geq 0$, (cito ej 3 de la práctica)

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists q \in \mathbb{Q}$ con $\underbrace{\sqrt{2}-\varepsilon < q < \sqrt{2}}_{\text{Luego } q \in A}$

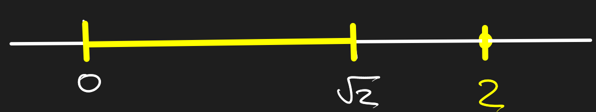
Conclusión

$\operatorname{Sup} A = \sqrt{2} \notin A$

$\Rightarrow \nexists \max A$

2) idem, para

Sea $A = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \} \cup \{2\}$




- El ínfimo es el mismo que antes

- $0$ es cota inf.
- $0 \in A \Rightarrow 0 = \text{ínfimo} A = \text{mín } A$

- $2$ es cota superior

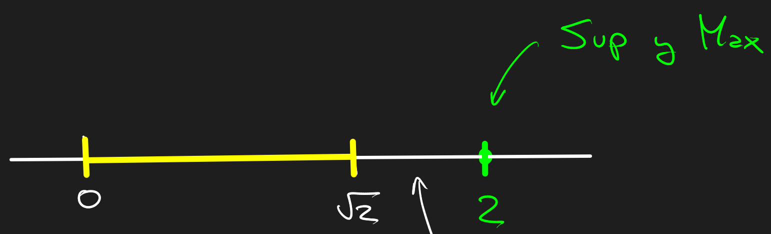
  $2 \geq \sqrt{2}$ pues $\underbrace{2^2 \geq (\sqrt{2})^2}$

  Puedo hacer esto pues son **no** negativos.

  Computacionalmente más viable que desarrollo decimal.

  $2 \in A \Rightarrow 2 = \max A$

  $= \text{Sup } A$




no hay elementos cerca del supremo

3) $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ x = \dfrac{y}{5^k} \text{ con } y \in \mathbb{Z},\ k \geq 0, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- $\exists$ mín $A$, y es $0$ ($0$ cota inf, $0 \in A$)

Obs:

Si $A_1$ es el del ej 1,

tenemos $A \subseteq A_1$

$\Rightarrow \operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} A_1$

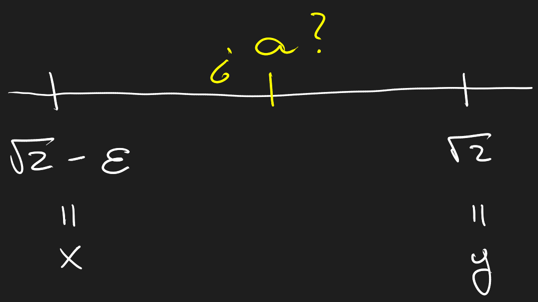
$\operatorname{Inf} A \geq \operatorname{Inf} A_1$

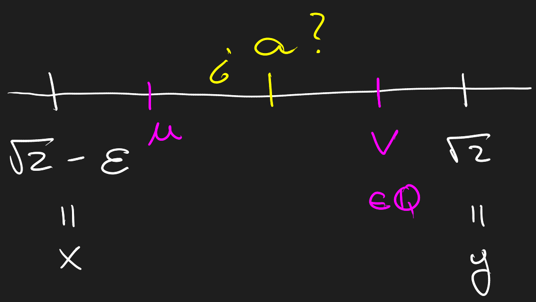
- Afirmo:

$\operatorname{Sup} A = \sqrt{2}$ ← es cota superior

Es decir:

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / a > \sqrt{2} - \varepsilon$




Tomo

- $v \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$
- $\mu \in (x, v) \cap \mathbb{Q}$

"Puedo suponer que $x, y$ son racionales"

Tengo:

$u, v \in \mathbb{Q}$ , $u < v$

escribo

$$u = \frac{r}{s} \quad , \quad v = \frac{m}{n}$$

con $r, m \in \mathbb{Z}$ ,

$s, n \in \mathbb{N}$

Busco :

$y \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 0$ /

$$\frac{r}{s} < \frac{y}{5^k} < \frac{m}{n}$$

$$u < \frac{y}{5^k} < v$$

equivalentemente ( saco denominadores )

$(. s . n . 5^k)$

incógnitas

$$\underbrace{n.r}_{a \in \mathbb{Z}} . 5^k < y . \underbrace{s.n}_{c \in \mathbb{N}} < \underbrace{s\, m}_{b \in \mathbb{Z}} . 5^k$$

Dato

$$u < v \Rightarrow \frac{r}{s} < \frac{m}{n} \underset{s, n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} n.r < s.m$$

Lema

- Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$ ,

  y dado $c \in \mathbb{N}$ ,

existen $k, y$ /

$$a \cdot 5^k < c \cdot y < b \cdot 5^k$$

Dem :

Tomo $k$ /

$$5^k \cdot (b - a) > c$$

(Propiedad) "Principio de Arquímedes"

$$5^k > \frac{c}{\underbrace{b-a}_{\in \mathbb{N}}}$$

$5^{\mathbb{Z}}$ no está acotado

Tomo :

$$y = \min \{ z \in \mathbb{Z} / a \cdot 5^k < c \cdot z \}$$

Así, $a \cdot 5^k < c \cdot y$ ← primera desigualdad! ✓

qvq : $c \cdot y < b \cdot 5^k$ ← segunda y última desigualdad

- Supongo que no :

$$\Rightarrow c \cdot y \geq b \cdot 5^k$$

uso los datos que tengo $5^k \cdot (b - a) > c$

$$c < \underbrace{b \cdot 5^k}_{\leq c \cdot y} - 5^k \cdot a \leq c \cdot y - 5^k \cdot a$$

estricto
(todo depende de que sea estricto)

Como:

$y = \min \{ z \in \mathbb{Z} \,/\, a \cdot 5^k < c \cdot z \}$

$\Rightarrow$ $y - 1$ no cumplirá

siendo entonces que:

$$a \cdot 5^k \geq c \cdot (y-1)$$

$$-a \cdot 5^k \leq c \cdot (1-y)$$

$$\leq c\, y + c \cdot (1-y) = c$$

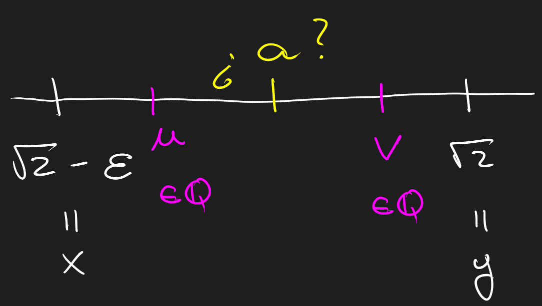
$$c < c \quad \text{Abs!}$$

$\Rightarrow c \cdot y < b \cdot 5^k$

y queda demostrado que

$$a \cdot 5^k < c \cdot y < b \cdot 5^k$$

que aseguraba la existencia de $u, v$ en el intervalo $\forall \varepsilon > 0$, probando la segunda condición de propiedad de supremo:



Así, como

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, a > \sqrt{2} - \varepsilon$ $\boxed{b}$

y como $\sqrt{2}$ es cota superior $\boxed{a}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ es supremo de A

$\blacksquare$