Dani

Merc 9 Jun

Medida 1

Queremos

- Integrar más funciones
- Comparar $\lim \int f_n$ con $\int f$ $\quad$ $\lim f_n = f$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \quad x \in [0,1] \\ 5 & x \notin \mathbb{Q} \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_k : k \in \mathbb{N} \}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & x \in \{ q_1, q_2, \dots, q_n \} \\ 5 & x \notin \{ \quad \} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 5$$

vale 5 salvo en finitos puntos

Nota que

$$f_n \longrightarrow f$$

integral la vale 5 para cualquier n

¿será lo mismo para el límite?

en particular

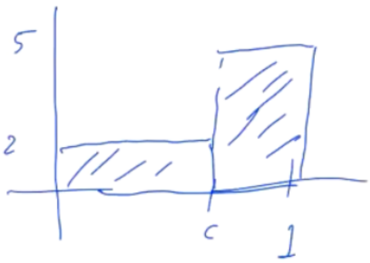
$$f_n \searrow f$$

pues "pierde" cosa cuando $n \to \infty$

Funciones Simples

Para $0 < c < 1$, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \le x \le c \\ 5, & \text{si } c < x \le 1. \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^c 2\,dt + \int_c^1 5\,dt$$

$$= 2\cdot c + 5\cdot(1-c) = 2\,\underbrace{\text{long}\,[0,c]}_{\text{"medida de } [0,c]\text{"}} + 5\,\underbrace{\text{long}\,(c,1]}_{\text{"medida de } (c,1]\text{"}}$$

Escribamos el intervalo $[0,1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

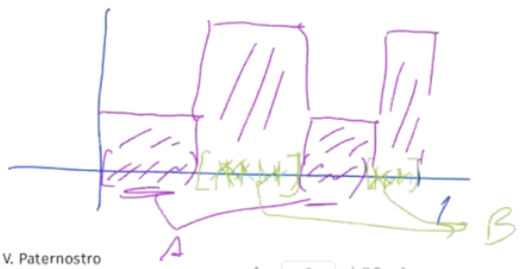
$$[0,1] = A \cup B \quad , \text{con } A \cap B = \emptyset.$$

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in A \\ 5, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

IDEA:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 2 \cdot \text{"medida de } A\text{"} + 5 \cdot \text{"medida de } B\text{"}$$



Tomemos $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q} = [0,1] \cap \mathbb{I}$.
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ 0 \le x \le 1 \\ 5, & \text{si } x \notin \mathbb{Q},\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DEBERÍA SER}}}{=} 2 \cdot \text{"medida} \left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right)\text{"} + 5 \cdot \text{"medida} \left(\mathbb{I} \cap [0,1]\right)\text{"}$$

NECESITAMOS UNA NOCIÓN DE MEDIDA PARA CONJ. RAROS..

Queremos definir una noción de medida para conjuntos que no sean necesariamente intervalos y que cumpla algunas propiedades *razonables*.

$$\mu(A) = \text{“medida de } A\text{”}$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

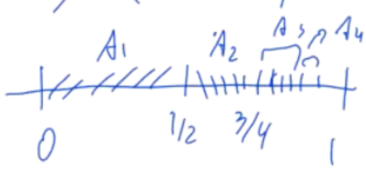
$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

intervalo

$$\mu((a,b)) = b - a$$

$$\mu((a,b)) = b - a$$



$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rightsquigarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Invariante a traslación

$$\mu(A + c) = \mu(A) \quad \forall A, \ \forall c \in \mathbb{R}$$

que podamos medir

Conjuntos Nulos

El primer paso es definir los conjuntos que "miden cero".
Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos.

Definición

Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo si para todo $\varepsilon > 0$ existen contables intervalos abiertos $(U_n)_{n \in J}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{n \in J} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in J} \text{long}(U_n) < \varepsilon.$$

$\underbrace{A = \{x_0\}.}$

dado $\varepsilon > 0$, $\quad U_1 = (x_0 - \varepsilon/3 , x_0 + \varepsilon/3)$

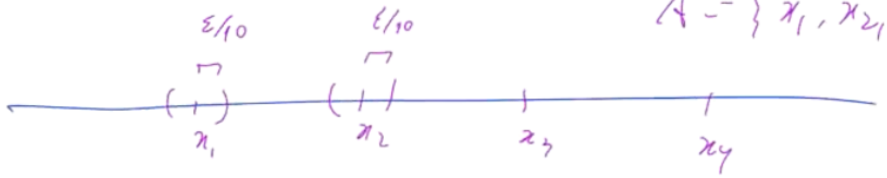
$A \subset U_1 \quad \text{long}(U_1) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.
2. Todo conjunto numerable es nulo.
3. Unión numerable de conjuntos nulos es nulo.

?

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$



$A \subset (x_1 - \varepsilon/10 , x_1 + \varepsilon/10) \cup \ldots \cup (x_4 - \varepsilon/10 , x_4 + \varepsilon/10)$

$\sum_{j=1}^{4} \text{long}(U_j) < \varepsilon.$ (HACERLO).

OBS: EXISTEN CONJUNTOS NULOS NO NUMERABLES (EL CONJ. DE CANTOR).

σ - álgebras

Definición
Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). Decimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X), uniones numerables e intersecciones numerables.

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$. En part, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

$X \in \mathcal{A}$ y $\emptyset = X \setminus X$

$A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n$.

$\Rightarrow \boxed{\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}}, \boxed{\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}.}$

EJ 1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.

EJ 2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$

EJ: $\{A \subset \mathbb{R} \mid \# A < +\infty$ ó $\#(\mathbb{R} \setminus A) < +\infty\}$ es una σ-alg.

Álgebra generada

- CONJUNTOS NULOS
- INTERVALOS ABIERTOS

$\Big] \rightarrow$ COMPLEMENTOS, UNIONES NUM E INTERSECC NUM.

Definición
La σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ es la σ-álgebra de de conjuntos medibles Lebesgue.
Si I es un intervalo, $\mathcal{M}(I)$ es la σ-algebra de subconjuntos medibles Lebesgue de I.

$M(I) = M \cap P(I)$

QUEREMOS MEDIR LOS $A \in \underline{\mathcal{M}}$.

$\underline{A} \longmapsto \underline{\mu(A)} \in [0, +\infty]$

Khe!

$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

  Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

"σ - aditividad"

uniones e intersecciones numerables

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

!

Importante! $\rightarrow$ $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ abierto}\}$. "Regularidad"

Teorema

Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la medida de Lebesgue dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. "Monotonía"
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$. Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.
- Dados $A \in \mathcal{M}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{M}$ y $\mu(A + c) = \mu(A)$.

"Invariante por Traslación"

$A + c = \{a + c : a \in A\}$

Proof:

$$\mu(\phi) = 0$$