

(E, d) espacios Normados

• Estarán dados por Espacios Vectoriales

$$\boxed{1} \quad \mathbb{R}^n : d_1, d_2, d_\infty$$

$$\boxed{2} \quad \delta \text{ (discreto)}$$

$$\boxed{3} \quad \mathbb{R} : d(s, t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$$

$$\boxed{4} \quad C[0,1] : d_1, d_\infty$$

Notar que

en $\boxed{1}$ y $\boxed{4}$:

$$• \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

↑
Una cuenta con $x - y$
Todavía no definimos "norma."

$$• \quad d(2x, 0) = 2d(x, 0)$$

en $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$:

no vale lo de arriba

$\boxed{1}$ y $\boxed{4}$ son espacios normados

Observar que

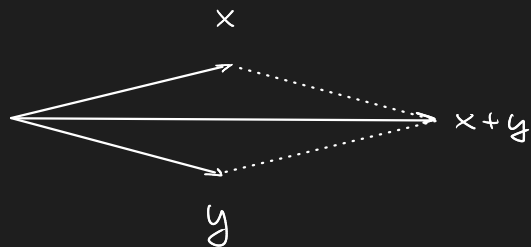
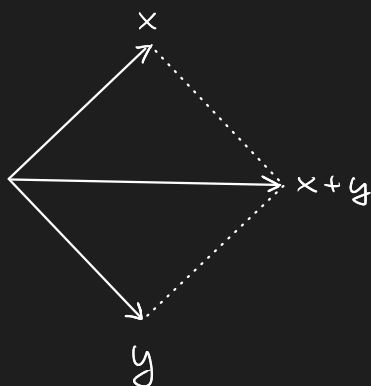
- Para poder calcular " $\|x - y\|$ " necesitamos la operación suma (+)
- Para poder hacer $d(2x, 0)$ necesitamos producto por escalar ($\underset{\uparrow}{2} \cdot x$)
- necesitamos estar en un espacio vectorial (e.v.)

Definición

Sea E espacio vectorial (sobre \mathbb{R} ó \mathbb{C}). Una función $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty)$ es una **norma** si verifica las siguientes propiedades

- (1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- (3) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

1) Desig Triang



Un espacio vectorial E con una norma se llama un **espacio normado**.

Observación

Si E es un espacio normado, entonces es un espacio métrico con la **distancia** $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definición

Un espacio normado que es completo con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$ se llama un **espacio de Banach**.



Stefan Banach
(1892-1945)



Teorema del punto fijo

Observación

Todo espacio normado es métrico, pero no todo espacio métrico es un normado.

Si (E, d) es normado (d viene de una norma)

$\Rightarrow E$ es e.n.

$$\bullet \underline{\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0)}.$$

ET: $\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}^n, d) \text{ NO Normado} \\ (\mathbb{R}, d) \quad d(s, t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right| \end{array} \right.$

Ejemplos de espacios normados:

$$\mathbb{R}^n \text{ con } \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty.$$

son normados

$$C[0,1], \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

$$K \text{ compacto, } C(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ cont}\}.$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

$$\cdot X \text{ l.m.}, \quad C_b(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ cont y acot}\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ No BANACH

Los otros ejemplos son BANACH

Ejercicio

Si E es un espacio normado, la suma es continua en $E \times E$ y el producto es continuo en $\mathbb{R} \times E$.

$$\left. \begin{array}{l} + : E \times E \rightarrow E \\ (x, y) \mapsto x+y \\ \cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{array} \right\} \text{Continuas}$$

Con sucesiones

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \quad \text{en } E \\ y_n \rightarrow y \quad \text{en } E \\ \lambda_n \rightarrow \lambda \quad \text{en } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_n + y_n \rightarrow x + y \\ \lambda_n \cdot x_n \rightarrow \lambda \cdot x \end{array}$$

Observación

En los espacios normados pasan algunas cosas que vemos en \mathbb{R}^n pero no en métricos generales:

$$\bullet \quad \overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$$

$$\bullet \quad \text{diam}(B(x, r)) = 2r$$

$$\bullet \quad x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\lambda x}{\|x\|} \right\| = |\lambda|$$

$$\bullet \quad B(x, r) = x + B(0, r) = \{x+y : y \in B(0, r)\}$$

↑
ejercicios
|

$$\downarrow \\ = x + r \cdot B(0,1) = \{x + ry : y \in B(0,1)\}$$

? este prop de los normados
con dist. en prob. y est
como

$$\mu + \sigma \cdot N(0,1) = N(\mu, \sigma^2)$$

Definición

Dos normas en un espacio vectorial son **equivalentes** si definen distancias equivalentes.

$\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ equiv.

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1, \quad d_2(x,y) = \|x-y\|_2$$

son distancias equivalentes

en \mathbb{R}^n d_1, d_2, d_∞ son equiv.

$$\Rightarrow \| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty \text{ son equiv.}$$

$C[0,1]$, d_1, d_∞ no equiv.

Análisis Avanzado

D. Carando - V. Paternostro

<

14

/ 27

>

Si $\exists c, \tilde{c} /$

$$c \cdot d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \tilde{c} d_2(x,y)$$

$\Rightarrow d_1$ y d_2 son equivalentes

Pero la vuelta no vale.

Con normas sí vale!

Proposición

Dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ sobre E son equivalentes si y sólo si existen $c, \tilde{c} > 0$ tales que

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c}\|x\|_2.$$



$$c \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \tilde{c} d_2(x, y)$$

d_1 y d_2 son uniformemente equivalentes

Dist equivalentes comparten

- Abiertos
- Cerrados
- Sucesiones convergentes

Dist uniformemente equivalentes comparten también

- Acotados
- Sucesiones de Cauchy

entre otras

Observación

Dos normas equivalentes dan métricas *uniformemente* equivalentes.

Dem:

\Leftarrow) ya lo hicimos

\Rightarrow) Queda $\exists c, \tilde{c} /$

$$c \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c} \cdot \|x\|_2 \quad \forall x$$

Notamos

$$B_1(x, r) = \text{"bola con } \|x\|_1 \text{"}$$

$$B_2(x, r) = \text{"bola con } \|x\|_2 \text{"}$$

Vo y a probar:

$$\|x\|_1 \stackrel{?}{\leq} \tilde{c} \cdot \|x\|_2 \quad \forall x$$

$0 \in B_1(0, 1)$ es abierto para d_2 , pues $d_2 \sim d_1$
(pero deja de ser bola!)

B_1 abierto

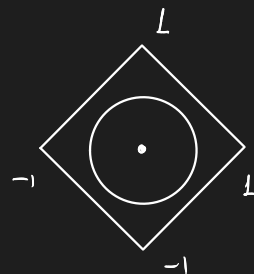
$$\Downarrow \Rightarrow \exists r > 0 / B_2(0, r) \subset B_1(0, 1)$$

Sea $x \in E$, $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1$$

$$\Rightarrow \left\| r \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \frac{r}{2} < r$$



$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \in B_2(0, r) \subset B_1(0, 1)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_1 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2\|x\|_2} \|x\|_1 < 1$$

$$\Rightarrow \|x\|_1 < \underbrace{\frac{2}{r}}_{\tilde{c}} \|x\|_2 \quad \checkmark$$

• Probé lo que quería $\forall x \neq 0$

• Si $x=0 \Rightarrow \|0\|_1 = 0 = \tilde{c} \|0\|_2 \quad \checkmark$

$$\therefore \|x\|_1 \leq \tilde{c} \|x\|_2 \quad \checkmark$$

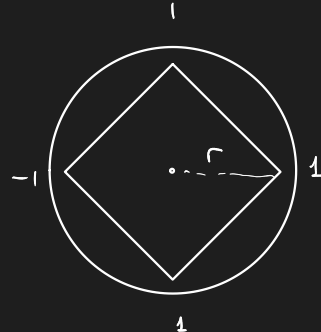
Falta probar

$$c \|x\|_2 \stackrel{?}{\leq} \|x\|_1$$

Sea $0 \in B_2(0, 1)$

\Rightarrow Como es abierta para d_1 pues $d_2 \sim d_1$

$$\exists r > 0 \mid B_1(0, r) \subset B_2(0, 1)$$



Sez $x \in E$

• Si $x=0 \Rightarrow C \cdot \|x\|_2 = 0 = \|x\|_1$ ✓

• Si $x \neq 0$:

$$\Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$$

$$\Rightarrow \left\| r \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = \frac{r}{2} < r$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 < r$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \in B_1(0, r) \subset B_2(0, 1)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|_2 < 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \|x\|_2 < \|x\|_1 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\quad}_{c}$

$$\therefore c \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

y juntando todo

$$c \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \tilde{c} \cdot \|x\|_2$$

□

Teorema

En \mathbb{R}^n todas las normas son equivalentes.

Dem:

• Idea:

Toda norma $\|\cdot\|_?$ es equiv. a $\|\cdot\|_1$

donde

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

• Qvq:

$$\exists c, \tilde{c} /$$

↙ cualquier norma,

$$c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \leq \tilde{c} \cdot \|x\|_1$$

$$\text{Sea } e_k = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pos. } k}}{1}, \dots, 0, 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{vector} \\ \text{canónicos} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x = e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2 + \dots + e_n \cdot x_n$$

$$\Rightarrow \|x\| = \|e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2 + \dots + e_n \cdot x_n\|$$

diag.
triang.

$$\leq \|e_1 \cdot x_1\| + \|e_2 \cdot x_2\| + \dots + \|e_n \cdot x_n\|$$

$$= \|e_1\| \cdot |x_1| + \|e_2\| \cdot |x_2| + \dots + \|e_n\| \cdot |x_n|$$

Como estoy en \mathbb{R}^n ,

$$\exists M = \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq M \cdot (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)$$

$$\|x\| \leq \tilde{C} \cdot \|x\|_1 \quad \checkmark$$

Fal tener que

$$\exists c / c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in E$$

$$\text{Si } x = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Si } x \neq 0 :$$

$$\text{Sea } g: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \|x\|$$

← norma desconocida

Notar que

g es continua por

$$|g(x) - g(y)| = | \|x\| - \|y\| |$$

$$\leq \|x - y\|$$

↑ ejercicio.

$$|g(x) - g(y)| \leq \tilde{C} \cdot \|x - y\|_1$$

↑ de antes

$\Rightarrow g$ es Lipschitz

$\Rightarrow g$ es continua.

Sea

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_1 = 1 \} : \text{"Borde de la } B_1(0, 1)\text{"}$$

S es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

$\Rightarrow S$ es compacto en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

Harta ahora tenemos

- g continua
- que sale de un compacto

$\Rightarrow g(x)$ tiene máx y mín en $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1 \}$

$$\text{Lemo } m = \min_{x \in S} g(x)$$

$$\text{Como } g(x) = \|x\|$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow m \geq 0$$

$$\text{Si } m = 0 :$$

$$\exists y \in S / g(y) = 0$$

$$\Rightarrow \|y\| = 0$$

$$\Rightarrow y = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \|y\|_1 = 0$$

$$\text{Pero } \Rightarrow y \notin S$$

Abs

$$\therefore m > 0$$

$$\text{Sea } x \neq 0$$

$$\frac{x}{\|x\|_1} \in S \Rightarrow m \leq g\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)$$

$$\Rightarrow m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|$$

norma
descartada.

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|$$

$$\therefore \| \cdot \| \sim \| \cdot \|_1$$



Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces existen un isomorfismo lineal de $T: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ y una norma en \mathbb{R}^n tal que T es una isometría.

← dim del e.v.

$$(E, \| \cdot \|_E) \ni T: E \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \| \cdot \|_0 \text{ norma en } \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} \|Tx - Tz\|_0 & = & \|x - z\|_E \\ \text{"} & & \text{"} \\ d_0(T(x), T(z)) & & d_E(x, z). \end{array}$$

Armo norma:

$$\exists T: E \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{ISOMORF. LINEAL.}$$

$$z \in \mathbb{R}^n : \quad \|z\|_0 := \|T^{-1}z\|_E$$

$\| \cdot \|_0$ es una norma (EJERCICIO).

$$d_0(Tx, Ty) = \underbrace{\|Tx - Ty\|_0}_{=} = \underbrace{\|T^{-1}(Tx - Ty)\|_E}_{=} \\ = \underbrace{\|T^{-1}Tx - T^{-1}Ty\|_E}_{=} = \underbrace{\|x - y\|_E}_{=} = d_E(x, y)$$

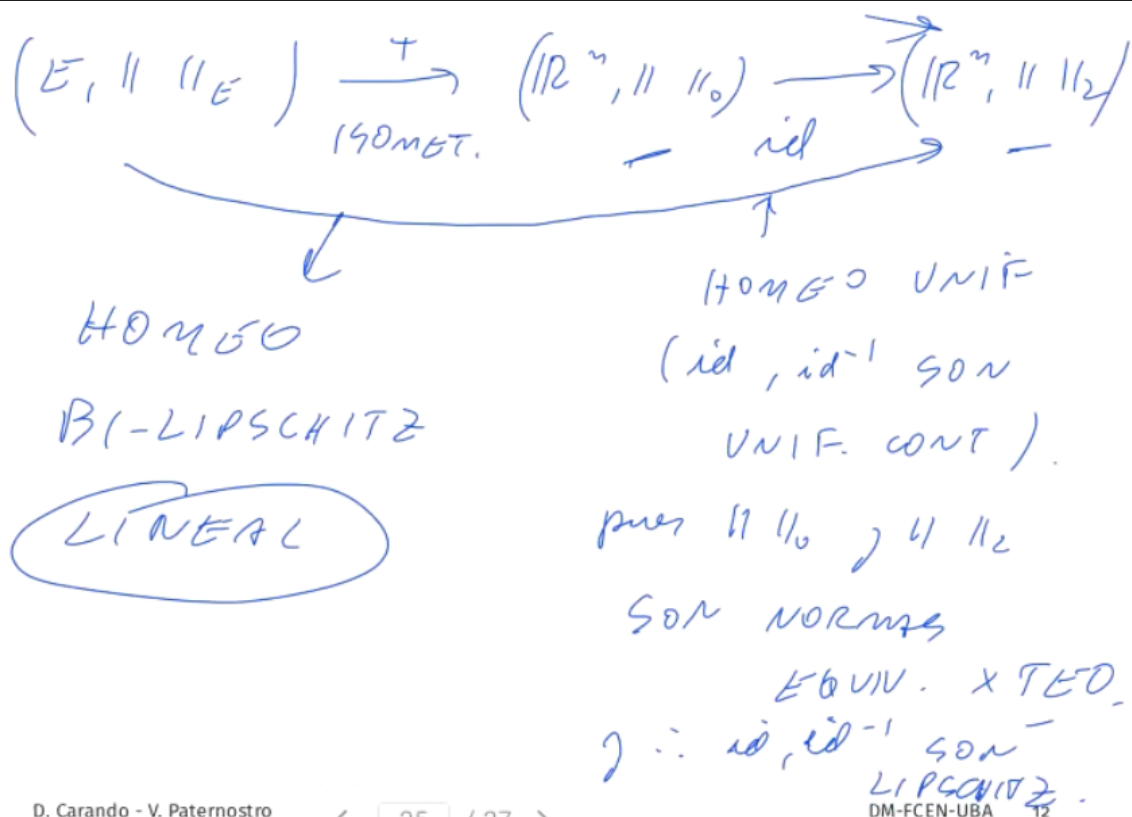
$$T: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_0)$$

BIY. ISOMETRÍA.

"ISOMORFISMO ISOMÉTRICO"

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ (donde el homeomorfismo es un isomorfismo lineal).



Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

$$\begin{array}{ccc} (E, \| \cdot \|_E) & \sim & (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2) \\ \downarrow & & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ & & \text{Completo} \\ & & \text{Homes.} \\ & & \text{Unif.} \end{array}$$

Corolario

En un espacio normado de dimensión finita, los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

VALLE LA VUELTA (NO LA VENOS)
VALLE [Si E es normado de dim infinita,
 $\bar{B}(0,1)$ es cerrado y acot pero NO compacto.