

Sugerencia :



Daniel Carando

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el $(3,2)$, por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y), (3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 3 y 4 e y está entre 1 y 3.

Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε , tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED)

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en \mathbb{R} es la d_1 , pero en realidad también es la d_2 :

$$d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t).$$

También es la d_∞ , claro.

6:23 PM

6:28 PM

Pruebo que es continua en el $(3,2)$

Def. de f continua $(\forall x,y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f(B((x,y), \delta)) \subseteq B(f(x,y), \varepsilon)$$

Lo pruebo en $(x,y) = (3,2)$

Sea

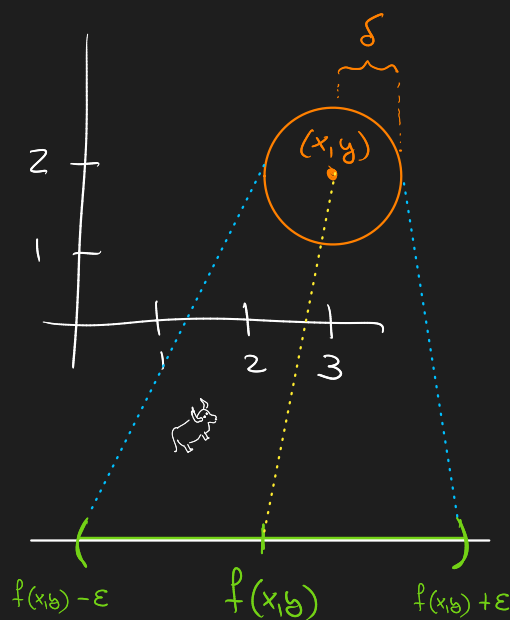
$$(x_0, y_0) \in B((x,y), \delta)$$

me fijo solo en:

$$(x_0, y_0) \in B((3,2), \delta)$$

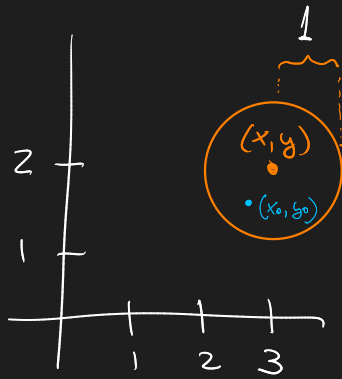
$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x,y), (3,2)) < \delta \right\}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$$



Si $\delta = 1$:

$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x, y), (3, 2)) < 1 \right\}$$



$$\underbrace{(x-3)^2 + (y-2)^2}_{< 1^2}$$

$$f(x-3, y-2) < 1$$

en el caso general sería

$$f(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) < \delta^2$$

con \tilde{x}, \tilde{y} los puntos del dominio de f

Volviendo, quiero que la bola del codominio
contenga a todos estos $f(x_0, y_0)$, o sea

quiero que

donde veo continuidad

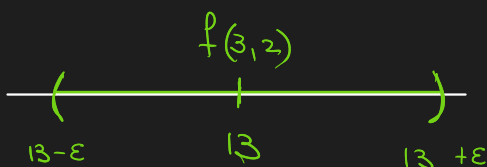
$$f(x_0, y_0) \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(3, 2), \varepsilon)$$

$$\in \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, \underbrace{f(3, 2)}_{3^2 + 2^2}) < \varepsilon \right\}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{|c - 13|}$$

$$|c - 13|$$

$$= |x_0^2 - 3^2 + y_0^2 - 2^2|$$



Como

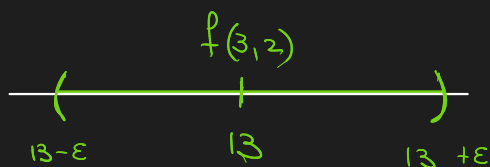
$$f(x-3, y-2) < 1$$

Restringo los valores de x_0, y_0 acotando $f(x_0, y_0)$

$$f(x_0, y_0) < 1$$

y volviendo:

$$\overbrace{f(x_0, y_0)}^{< 1} \stackrel{?}{\in} \left\{ c \in \mathbb{R} : d\left(\overbrace{f(x_0, y_0)}^{< 1}, \underbrace{f(3, 2)}_{13}\right) < \varepsilon \right\}$$



$$\begin{aligned} & \overbrace{|f(x_0, y_0) - 13|} \\ & < |1^2 - 13| = 12 < \varepsilon \end{aligned}$$

• Armo caso general $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

$$|\delta^2 - (x^2 + y^2)| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \delta^2 - (x^2 + y^2) < \varepsilon$$

$$x^2 + y^2 - \varepsilon < \delta^2 < x^2 + y^2 + \varepsilon$$

$$|\delta| < \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon}$$

$$\begin{aligned} & \delta > 0 \\ & \delta < \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon} \end{aligned}$$

Finalmente, obtuve

$\forall \varepsilon > 0$, elijo algún δ / $\delta < \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon$

pej: $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ /

$$f(B((x, y), \delta)) \subseteq B(f(x, y), \varepsilon)$$

□