Nombre: Leandro Carreira

L.U.: 669/18

1	2	3	4	Calificación
R	B-	R	M	I

Análisis Avanzado - Primer parcial

13/05/2021

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A).$$

- Si A no tiene máximo y es no vacío

$\Rightarrow$ A es infinito

- Como A está acotado superiormente

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, c = \sup(A)$

y como A no tiene máximo

$\Rightarrow c \notin A$

Obs:

no necesariamente es un intervalo como en el dibujo, podría haber agujeros en el medio.

Idea:

Construyo sucesión estrictamente creciente "cerca" de c que converja a c.

Como A es infinito,

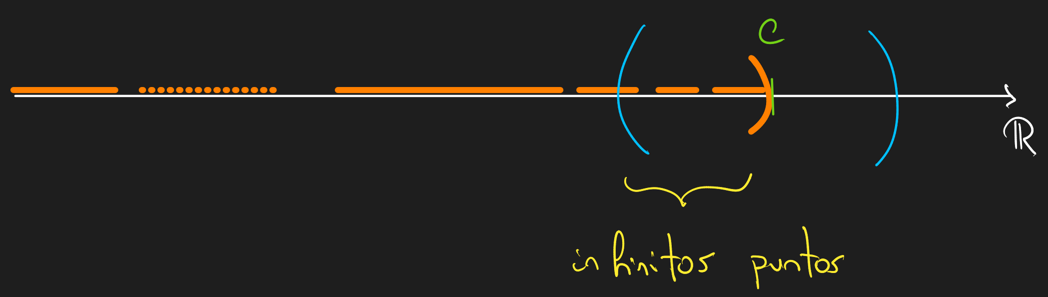
c es supremo de A,

y A no tiene máx.

$\Rightarrow \quad \forall r > 0 \;/\; B(c, r) \cap A$ es infinito

$\Rightarrow$ c es punto de acumulación de A

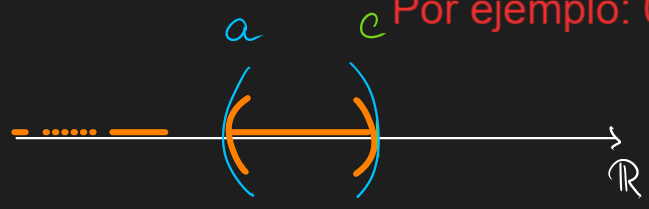
(no puede ser punto aislado, pues de serlo sería un máx)



En particular como c no es punto aislado

$\Rightarrow \quad \exists r_0 > 0 \;/\; B(c, r_0) \cap A = (a, c) \quad a \in \mathbb{R}$

Esto no es necesariamente cierto



Por ejemplo: 0 es punto de acumulación de

$$\left\{ \frac{-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Y también es supremo

Construyo sucesión estrictamente crec. en (a, c)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = c - \frac{(c-a)}{2n}$$

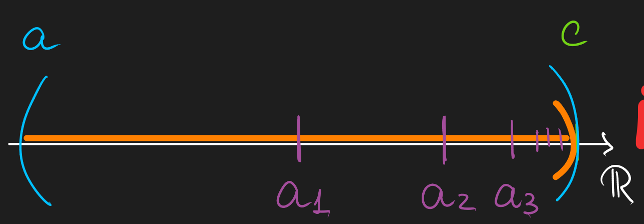
$$n=1 : \quad a_1 = c - \frac{(c-a)}{2} = \frac{a+c}{2}$$

$$n=2 : \quad a_2 = c - \frac{(c-a)}{4} = \frac{3c+a}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

$$\text{y } a_n \in (a, c) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



¡No necesariamente estás en esa situación!

Probé que dadas las condiciones del enunciado, siempre puedo construir $(a_n)_n \subseteq A$ /

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$$

REGULAR

$\blacksquare$

2. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dado por

$$\mathcal{X} = \{E \subseteq \mathbb{N} : \text{ existen } p \text{ primo y } m \in \mathbb{N} \text{ tales que } \#E = p^m\}.$$

Hallar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}$.

$\mathcal{X}$ está compuesto de conjuntos finitos que cumplen que si $E \in \mathcal{X} \Rightarrow \#E = p^m$

Además, $\mathcal{X}$ es un subconj. de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

donde $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}$:

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$$

Afirmo:

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N} \quad (\text{lo pruebo abajo} \star)$$

Es un ejercicio de la práctica. No era necesario probarlo, alcanzaba con citarlo

y como

$\#\mathcal{X}$ es infinito

pues hay infinitos primos p

$\Rightarrow$ hay infinitos $E \subseteq \mathbb{N} \,/\, \#E = p^m$

infinitos conjuntos finitos E de distinto cardinal

y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$

$\Rightarrow \quad \# \mathcal{X}$ es infinito ✓

y $\quad \# \mathcal{X} \leqslant \# \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$
$$\|$$
$\quad \# \mathcal{X} \leqslant \# \mathbb{N}$

$\mathcal{X}$ es infinito
$\downarrow$

$\Rightarrow \# \mathbb{N} \leqslant \# \mathcal{X} \leqslant \# \mathbb{N}$

$\therefore \# \mathcal{X} = \# \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{X} \sim \mathbb{N}$ ✓

y como cualquier conjunto infinito menos un conjunto numerable, mantiene su cardinal

¡Esto no es necesariamente cierto!

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}$

Ejemplo: $\mathbb{N}$ es infinito, $\mathbb{N}_{\geq 4}$ es numerable

sinembargo $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\geq 4} = \{1,2,3\}$ es finito

y sabemos que

$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$

$\Rightarrow \boxed{\# \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}\right) = c}$

Falta mostrar ☆ : $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$

del ejercicio 12 de la práctica 2:

12. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Si

$$A \sim \mathbb{N}$$

qvq

$$\mathcal{P}_f(A) := \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\} \overset{?}{\sim} \mathbb{N}$$

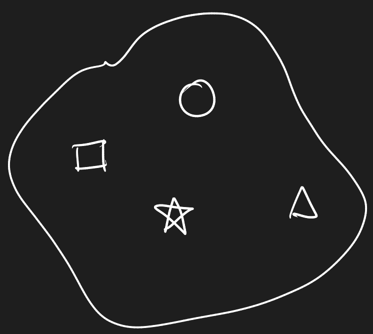
Puedo buscar inyectiva desde

$$g : B_n \longrightarrow \mathbb{N}^n \qquad (\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n \text{ veces}})$$

Con $B_n \subset A$ los conjuntos de n elementos

Ej: si $n = 4$:

Conj de 4 elementos



$\xrightarrow{g}$

Vectores de 4 elementos

$$\begin{array}{cccc} ☆ & □ & △ & ○ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$[\,1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,]$$

en algún orden

Para cada conjunto B_n diferente → Puedo armar un vector que esté en $\mathbb{N}^n$ distinto

$\therefore$ g es inyectiva.

$$\# B_n \leq \# \mathbb{N}^n = \aleph_0$$

Puedo escribir $P_f(A)$ como

$$P_f(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Sabemos que unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

Como $\# B_n \leq \aleph_0$

$$\Rightarrow \# \Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{infinitos}} B_n \Big) = \aleph_0$$

$\Rightarrow P_f(A)$ es numerable. ■

BiEN MENOS

3. Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos acotados no vacíos de E tales que

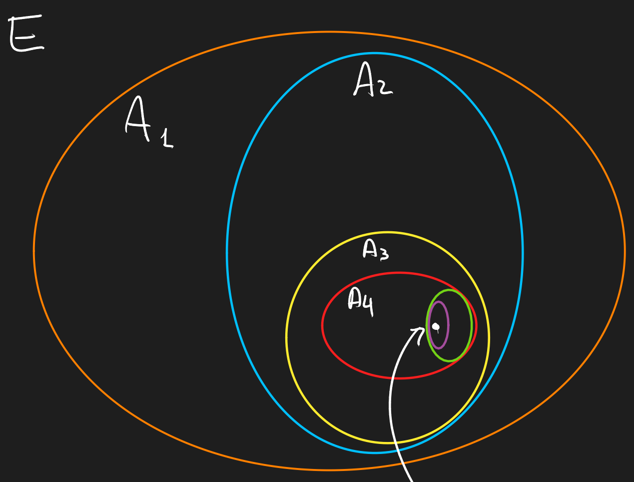
- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe $x \in E$ tal que toda bola centrada en x contiene a algún A_n.

$$\operatorname{diam}(A_n) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\}$$

los elementos de A_n se acercan cada vez más entre sí a medida que $n \to \infty$

Idea



quiero un $x \in E$ que esté en cada bola

No necesariamente va a existir

Sea $x \in A_n \quad \forall n \geq 1$ $\quad (A_n \neq \emptyset)$

Ejemplo: $A_n = (0, \frac{1}{n})$

$\nexists x \in A_n \, \forall n \in \mathbb{N}$

¿Cómo sabés que existe un x que cumple eso?

qvq

$\forall r > 0, \overset{?}{\exists} n \in \mathbb{N} \;/\; A_n \subseteq B(x, r)$

Como $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$

$$\sup\{d(x,y) : x,y \in A_n\} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x,y \in A_n$$

$\Rightarrow$ Si fijo el centro de una bola en $x \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall r>0$ podré hallar un $A_{n_0} \subseteq B(x,r)$

Eso es justamente lo que querés probar

Que sea acotado no te lo garantiza

pues

A_{n_0} es acotado (por $\mathcal{H}_6$)

A_{n_0} no sabés quien es todavía. Para ver PARA TODO r>o existe n_0

$\Rightarrow$ existe una bola que lo contiene

primero fijás un r>0 y luego buscás un n_0 en función del fijado anteriormente

y además

No sabés quien es c porque no sabés todavía si existe dicho A_{n_0}

si $c = \operatorname{diam}(A_{n_0})$

$= \sup\{d(x,y) : x,y \in A_{n_0}\}$

y el radio de esta bola es $2c$, de forma que la bola contenga todos los valores de A_{n_0} que sabemos distan en a lo sumo c

(uso $2c$ como radio por si A_{n_0} es cerrado, i.e: incluye borde)

$\Rightarrow$ $\forall r > 0$, siempre habrá un A_{n_0} /

$\text{diam}(A_{n_0}) < \frac{r}{2}$ ✓

$\Rightarrow$ $A_{n_0} \subseteq B(x, r)$ con $x \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ni siquiera sabés si existe un x que cumpla eso

$\therefore$ mostré que eligiendo $x \in E$ perteneciente a todos los A_n (no vacíos), para toda bola centrada en este x, siempre habrá un A_{n_0} contenido en ella.

REGULAR

Ejemplo: $f: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \text{sen}(x)$ es continua

$F = (0, 4\pi)$, $f(F) = [0, 1]$ es cerrado

Sinembargo $F = (0, 4\pi)$ no es cerrado

4. Sean $(E, d), (E', d')$ espacios métricos. Sea $f : E \to E'$ continua tal que $f^{-1}(K')$ es compacto para todo $K' \subseteq E'$ compacto.

Probar que $f(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq E$ cerrado.

Como f es continua:

$\boxed{1}$ Si $K \subseteq E$ es compacto $\Rightarrow f(K)$ es compacto

$\boxed{2}$ Si $f(F) \subseteq E'$ es cerrado $\Rightarrow F$ es cerrado

Eso no es cierto, lo que sabés es que si $F' \subseteq E'$ es cerrado $\Rightarrow f^{-1}(F') \subseteq E$ es cerrado

H:

$\boxed{3}$ Si $K' \subseteq E'$ es compacto $\Rightarrow f^{-1}(K')$ es compacto

qvq:

Si $F \subseteq E$ es cerrado $\Rightarrow f(F)$ es cerrado

Por Teo

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

qvq

Si $F \subseteq E$ es cerrado $\overset{?}{\Rightarrow} f(F)$ es cerrado

o sea que

si $F = \overline{F} \overset{?}{\Rightarrow} f(F) = \overline{f(F)}$

Si $F = \overline{F}$

$\Rightarrow f(F) = f(\overline{F}) \subseteq \overline{f(F)} = \overline{f(\overline{F})}$

Ejemplo: F=[0,1]

$f: [-2,2] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f(\overline{F}) = [0,1]$

$f^{-1}(f(F)) = [-1,1]$

f^{-1} ¿Por qué $f^{-1}(f(\overline{F})) = \overline{F}$?

$\overline{F} \subseteq f^{-1}(\overline{f(F)})$

¿ que ésto sea una igualdad.

OJO: $\boxed{f^{-1}(f(K)) \neq K}$

Por $\boxed{1}$ y $\boxed{3}$ sé que:

$K \subseteq E$ es compacto $\Leftrightarrow$ $f(K) \subseteq E'$ es compacto

¡Eso no lo sabés!

Me gustaría obtener alguna propiedad de f a partir de ☆ (en particular la vuelta) que generalice a conjuntos cerrados.

Uso Teorema de subcubrimientos finitos sobre compactos

Sé que para cada $f(K)$ compacto, $\exists$ subcub. finito de abiertos

si $f(K)$ compacto $\Rightarrow f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ abiertos

y como cada K también es compacto, $\exists$ subcub. finito de abiertos

si K compacto $\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ abiertos

MAL

no sé cómo seguir ¡¡

Si $f:(E,d) \longrightarrow (E',d')$ $A \subseteq E$ Fin

En general $f^{-1}(f(A))$ es la preimagen de $f(A)$

$= \{x \in E, f(x) \in f(A)\} \supseteq A$ pues $a \in A \Rightarrow f(a) \in f(A)$, pero $\subseteq$ no vale siempre

Porque otro elemento afuera podría también caer en $f(A)$