

# Análisis Avanzado - Funciones medibles

Primer cuatrimestre de 2021

---

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Escribamos el intervalo  $[0, 1]$  como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B \quad , \text{ con } A \cap B = \emptyset.$$

Escribamos el intervalo  $[0, 1]$  como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B, \text{ con } \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset.$$

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \underline{A} \\ 5, & \text{si } x \in \underline{B}. \end{cases}$$

$$10 \notin A$$

$$\int f = 2\mu(A) + 5\mu(B)$$

$$A = [0, 1/2], B = [1/2, 1]$$

$$\underline{A} = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad \underline{B} = \mathbb{I} \cap [0, 1]$$

En lo que sigue vamos a considerar  $I = [0, 1]$ .

En lo que sigue vamos a considerar  $I = [0, 1]$ .

La función característica de  $A \subset I$  es  $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

En lo que sigue vamos a considerar  $I = [0, 1]$ .

La función característica de  $A \subset I$  es  $\chi_A : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

$$[0, 1] = A \cup B$$

$$A \cap B = \emptyset$$

### Definición

Una partición medible de  $I$  es una familia finita  $A_1, \dots, A_n$  de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

## Definición

SIMPLE

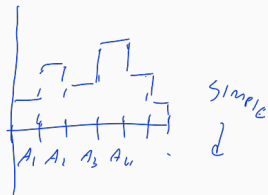
Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible  $A_1, \dots, A_n$  de  $I$  y números  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$  tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_j \\ 0 & x \notin A_j \end{cases}$$

$$f(x) = r_j \quad \text{si} \quad x \in A_j$$

$$f(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x \in A_1 \\ r_2 & \text{si } x \in A_2 \\ r_3 & \text{si } x \in A_3 \\ \vdots & \\ r_n & \text{si } x \in A_n \end{cases}$$



ES CALCONADA

( $A_j$  INTERVALOS

NO NOS INTERESAN MÁS  
SIMPLES NO ESCAL.

## Observación

- Si  $f$  es una función simple, entonces  $|f|$  es una función simple.
- Cualquier combinación lineal de de funciones simples da una función simple.

Si  $f$  simple  $\Rightarrow$   $g(x) = |f(x)|$  es simple

$(h(x) = \underline{f(x)^2}$  TAMBIÉN,  $\underline{\tilde{h}(x)} = \cos(f(x))$  TAMBIÉN)

DEM:  $f(x) = \sum_{i=1}^m r_i \chi_{A_i}$  con  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$   
 $\{A_i\}_{i=1}^m$  partic. m.d. de  $I$

$$|f(x)| = |r_j| \text{ si } x \in A_j$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = r_j \Leftrightarrow x \in A_j}$$


$$\Rightarrow |f(x)| = \sum_{i=1}^m |r_i| \chi_{A_i}$$

$|f|$  es simple



$f$  y  $g$  SIMPLES, QVQ  $\alpha f + \beta g$  SIMPLE.

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} & \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}, \quad \{A_i\}_{i=1}^m \text{ PARTIC. DE } I. \\ g(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j} & \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}, \quad \{B_j\}_{j=1}^m \text{ PARTIC. DE } I. \end{cases}$$

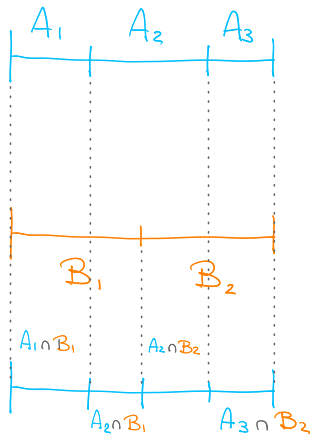
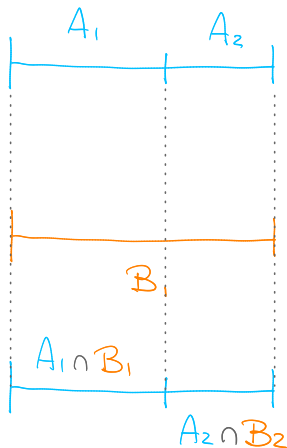
$C_{ij} = A_i \cap B_j$   EJERCICIO :  $\{C_{ij} : i=1, \dots, m; j=1, \dots, m\}$   
ES PARTICIÓN DE  $I$ . MEDIBLE

$x \in C_{ij} \Rightarrow$   $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \alpha_i + \beta \beta_j$

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \chi_{C_{ij}}(x)$$

VALE:  $f \cdot g$  SIMPLE

$\therefore \alpha f + \beta g$  SIMPLE.



Intersecar todos los elementos devuelve una partición de  $I$  pues

> todos con todos  $=== I$  intersección  $I = I$

> cada  $A_i$  es disjunto con todos los  $A_j$ , por lo cual cada intersección es disjunta de todas las otras

## Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean  $\{A_i\}_{i=1}^n$  una partición medible de  $I$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x)$$

## Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean  $\{A_i\}_{i=1}^n$  una partición medible de  $I$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x)$$

Definimos la integral de Lebesgue de  $f$  como

$$\underbrace{\int f d\mu}_{//} = \underbrace{\sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i)}_{//}$$

$$\int_I f d\mu$$

$$\int_I f(x) d\mu(x)$$

$$\longrightarrow r_1 \mu(A_1) + r_2 \mu(A_2) + \dots + r_n \mu(A_n)$$

## Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si  $f, g$  son funciones simples y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

## Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si  $f, g$  son funciones simples y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía:** Si  $f$  y  $g$  son simples  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in I$ , entonces

$$\underline{\int f \, d\mu} \leq \underline{\int g \, d\mu}.$$

## Teorema

La integral de Lebesgue satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad:** Si  $f, g$  son funciones simples y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

(b) **Monotonía:** Si  $f$  y  $g$  son simples  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in I$ , entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

*ejercicio*

(c) Si  $f$  es simple, entonces

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

*es simple*

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$$

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

$$\alpha f + \beta g(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \chi_{C_{ij}}$$

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\alpha \alpha_i + \beta \beta_j) \mu(C_{ij}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha \alpha_i \mu(C_{ij})}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta \beta_j \mu(C_{ij})}_{\textcircled{2}}$$



$$\textcircled{1} = \alpha \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \underbrace{r_i}_{=} \mu(C_{ij}) = \alpha \sum_{i=1}^m r_i \sum_{\substack{j=1 \\ \text{disjuntos} \\ \text{2 a 2}}}^m \mu(\underbrace{A_i \cap B_j}_{=})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^m \underbrace{A_i \cap B_j}_{=}}_{=}\right) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu\left(A_i \cap \underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right)}_{\substack{= \\ I}}\right) = \alpha \sum_{i=1}^m r_i \mu(A_i) =$$

$$= \alpha \int f \, d\mu.$$

EJERCICIO:  $\textcircled{2} = \beta \int g \, d\mu \quad \boxtimes$

### Definición

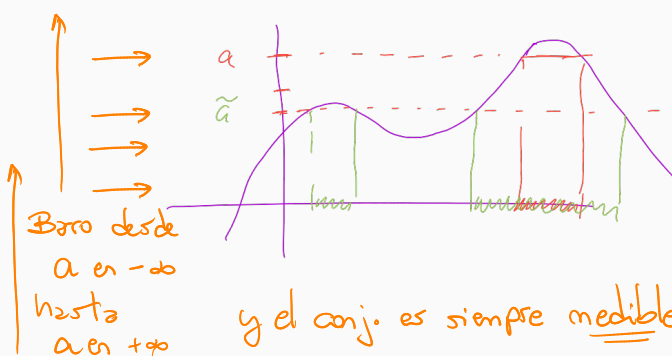
Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un subconjunto y  $f$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  (podemos permitir que  $f$  valga  $+\infty$  o  $-\infty$  en algunos puntos).

## Definición

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un subconjunto y  $f$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  (podemos permitir que  $f$  valga  $+\infty$  o  $-\infty$  en algunos puntos). Decimos que  $f$  es **medible Lebesgue** si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

y el conj. es siempre medible.

## Definición

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un subconjunto y  $f$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  (podemos permitir que  $f$  valga  $+\infty$  o  $-\infty$  en algunos puntos). Decimos que  $f$  es **medible Lebesgue** si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\boxed{\{x \in X : f(x) \leq a\}} = f^{-1}((-\infty, a])$$

es medible.

$$(Im f \subset \overline{\mathbb{R}}) \quad f^{-1}([-\infty, a])$$

## Ejemplo

- Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es medible.

$$f^{-1}((-\infty, a]) \rightarrow \text{CERRADO} \quad \text{Y } \therefore \text{MEDIBLE}$$

$\hookrightarrow$  CERRADO

## Definición

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un subconjunto y  $f$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  (podemos permitir que  $f$  valga  $+\infty$  o  $-\infty$  en algunos puntos). Decimos que  $f$  es **medible Lebesgue** si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

## Ejemplo

- Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es medible.
- Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es creciente, entonces es medible.

PENSAR:  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\} \rightarrow$  es un intervalo  
 $\forall a \in \mathbb{R}$ .

## Definición

Sea  $X \subset \mathbb{R}$  un subconjunto y  $f$  de  $X$  en  $\mathbb{R}$  (podemos permitir que  $f$  valga  $+\infty$  o  $-\infty$  en algunos puntos). Decimos que  $f$  es **medible Lebesgue** si para todo  $a \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$\{x \in X : f(x) \leq a\}$$

es medible.

## Ejemplo

- Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces es medible.
- Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es creciente, entonces es medible. (DECREC TAMBIÉN)
- Si  $f$  es simple medible entonces es medible. → EJERCICIO

### Proposición

$X$  MEDIBLE

Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

(a) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : \underline{f(x)} \leq a\}$  es medible.  $[f \text{ medible}]$

### Proposición

$X$  MEDIBLE

Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:



- (a) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  es medible.
- (b) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < a\}$  es medible.



### Proposición

$X$  MEDIBLE

Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

- (a) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  es medible.
- (b) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < a\}$  es medible.
- (c) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq a\}$  es medible.

✓

### Proposición $X$ medible

Sea  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Son equivalentes:

- (a) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \leq a\}$  es medible.
- (b) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) < a\}$  es medible.
- (c) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq a\}$  es medible.
- (d) Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) > a\}$  es medible.

$$(a) \Rightarrow (b) \quad \{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$\underbrace{f(x) < a} \Leftrightarrow \exists n / \underbrace{f(x) \leq a - \frac{1}{n}}$$

ES MEDIBLE X SER UNIÓN DE MEDIBLES.

$$(b) \Rightarrow (c) \quad \{x \in X : f(x) \geq a\} = X \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) < a\}}_{\text{MEDIBLE}} \quad \text{MEDIBLE}$$

$$\boxed{(c) \Rightarrow (a), (d) \Rightarrow (a) \text{ ET}} \quad \downarrow \quad \text{MED} \quad \text{MED}$$

- Combinación lineal de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.

- Combinación lineal de medibles es medible.
- Producto de medibles es medible.
- Supremo o ínfimo de una suc. de funciones medibles es medible.
- Límite puntual de una suc. de funciones medibles es medible.

X MEDIBLE

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

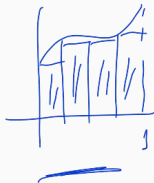
$$\rightarrow \{x \in X : g(x) \leq a\} = \textcircled{\times}$$

$$g(x) \leq a \Leftrightarrow \sup_n f_n(x) \leq a \Leftrightarrow \underbrace{f_n(x) \leq a}_{\text{MEDIBLE}} \quad \forall n$$

$$\textcircled{\times} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\} \rightarrow \text{MEDIBLE } \forall a \in \mathbb{R}$$

¿Cómo definimos la integral de una función medible?

¿Cómo definimos la integral de una función medible?  
Empecemos por funciones medibles, acotadas y no negativas.



$$\underline{L_\mu(f) = \{ g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ simple medible} / } \\ g(x) \leq f(x) \ \forall x \in I \}$$

(NO NECESARIAM. ESCALONADAS)

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in L_\mu} \left[ \int g \, d\mu \right]$$

LA CONOCIMOS