1	2	3	4	Calificación

Análisis Avanzado - Segundo parcial

12/07/2021

---

1. Consideremos el espacio normado

$$E = \{a \in \ell^\infty \ : \ \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\},$$

dentro del cual consideramos el subespacio

$$S = \left\{ a \in E \ : \ \sum_{n \geq 1} a_n = 0 \right\}.$$

Probar que S es denso en E.

2. Sea X un espacio métrico, y sean $f_n : X \to \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua f.

a) Probar que si $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$ es tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

b) Mostrar que *a*) es falso si la convergencia de las f_n a f es solamente puntual.

3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ acotado. Probar que E es medible si y sólo si existen conjuntos $A, H \subseteq E$ tales que A es unión numerable de cerrados, H es un conjunto nulo y $E = A \cup H$.

4. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos medibles del intervalo $[0,1]$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $0 \leq f(x) < 1$ para casi todo x.

Consideremos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por $f_n = (1 + f^n)\, \chi_{A_n}$. Probar que f_n es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$, y que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.