UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 4

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

¿Qué funciones sabemos integrar?

Repaso

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.

$$\int \sum_i r_i \cdot \chi_{A_i} \cdot d\mu = \sum_i r_i \cdot \mu(A_i)$$

Repaso

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.
- Funciones acotadas.

↳ a partir de las simples

Repaso

¿Qué funciones sabemos integrar?

- Funciones simples.
- Funciones acotadas.
- Funciones no negativas (aunque no sean acotadas).

↳ A partir de las truncadas

Teoremas de convergencia

* Fatou

* Convergencia monótona

* Convergencia Mayorada (2 versiones)

Integración de funciones generales

No acotadas que cambian de signo

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

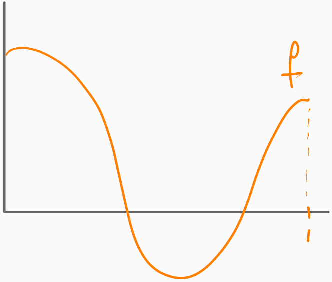
Integración de funciones generales

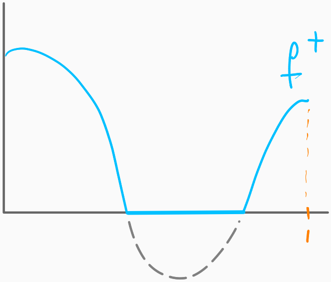
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

puede no ser acotada !

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$





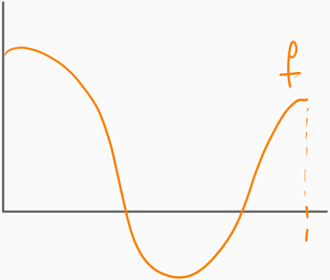
Integración de funciones generales

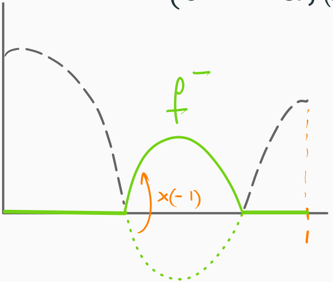
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$





Integración de funciones generales

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

f^+ y f^- son medibles

Integración de funciones generales

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos

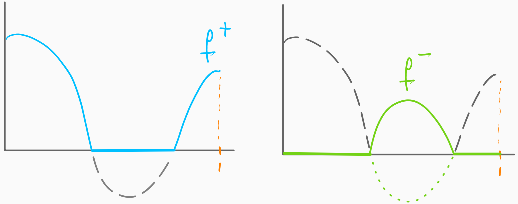
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

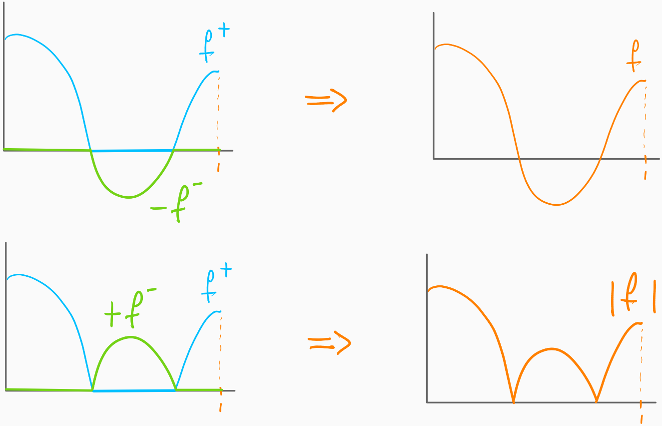
f^+ y f^- son medibles

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$



$$f = f^{+} - f^{-}$$



$$f = f^{+} - f^{-}$$

Definición

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Decimos que f es Lebesgue integrable si f^{+} y f^{-} son integrables (es decir, sus integrales son finitas).

$$f = f^+ - f^-$$

Definición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Decimos que f es Lebesgue integrable si f^+ y f^- son integrables (es decir, sus integrales son finitas).

En ese caso, definimos la integral de Lebesgue de f como

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$$

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f = f^+ - f^-$$
$$|f| = f^+ + f^-$$

Proposición

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}}$) medible. Entonces f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable.

$\Rightarrow$) $|f|$ integrable $\Rightarrow 0 \leq f^+ \leq f^+ + \underbrace{f^-}_{\geq 0} = |f|$

$\Rightarrow \int f^+ \leq \int |f| < +\infty \Rightarrow f^+$ integrable

análogamente para f^-

Como f^+ y f^- integrables $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$ f integrable

$\Rightarrow)$ $\boxed{f^+ \text{ y } f^- \text{ int.}}$

$|f| = f^+ - f^-$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } f^+(x) > 0 \Rightarrow f^-(x) = 0 \\ \text{si } f^-(x) > 0 \Rightarrow f^+(x) = 0 \end{array}}$

TRUNCAMOS

$$g_n = \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \le n \\ n & \text{si } g(x) > n \end{cases}$$

EN GENERAL

OJO: $\rightarrow (g+h)_n \neq g_n + h_n$

con f^+ y f^- sí (EJERC.)

TRUNCADO DE $|f|$

EJER

$$(|f|)_n \overset{\downarrow}{=} (f^+)_n + (f^-)_n$$

$$\int |f|_n = \underbrace{\int (f^+)_n + \int (f^-)_n}_{} \longrightarrow \underbrace{\int f^+}_{<+\infty} + \underbrace{\int f^-}_{<+\infty} < +\infty$$

$\Rightarrow \int |f| = \lim \int |f|_n < +\infty$

$\Longrightarrow |f|$ ES INTEG.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y
$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$
- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$
- $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrables.

- **Linealidad**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y
$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$
- **Monotonía**: Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, entonces
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$
- $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$
- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces
$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Teorema (Convergencia mayorada)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0,1]$ y g integrable en $[0,1]$ tales que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si f es una función tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Teorema (Convergencia mayorada)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0,1]$ y g integrable en $[0,1]$ tales que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si f es una función tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Entonces, f es integrable y

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Obs: Vimos casos donde $f_n \to f$ pero $\int f_n \not\to \int f$

DEM: ① Ejercicio: si $f_n \to f$ ctp

$\Rightarrow$ $(f_n)^+ \to f^+$ (hacerlo p/c/ x donde $f_n(x) \to f(x)$)

$(f_n)^- \to f^-$

Análisis Avanzado D. Carando - V. Paternostro DM-FCEN-UBA 7

como $|f_n(x)| \leq g(x)$ p/c/t x.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{(f_n)^+(x)}_{\geq 0} \leq \underbrace{|f_n(x)|}_{= (f_n)^+(x) + \underbrace{(f_n^-)(x)}_{\geq 0}} \leq \underline{g(x)} \\ (f_n)^+(x) \to f^+(x) \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{T.C.M} \\ \text{p/no} \\ \text{neg.}}}{\Longrightarrow} \underbrace{\int (f_n)^+}_{\substack{\leq \\ \int g \, d\mu}} \to \int f^+$$

ANÁLOGAMENTE $\underbrace{\int (f_n)^-}_{\leq \int g} \longrightarrow \int f^-$.

Además:

$\underline{\int f^+} \leq \int g < +\infty$

$\underline{\int f^-} \leq \int g < +\infty$.

$\Rightarrow f^+$ y f^- INT. y $\therefore$ $\boxed{f \text{ INT}}$

$$\int f \underset{\text{DEF}}{=} \int f^+ - \int f^- = \lim_n \int (f_n)^+ - \lim_n \int (f_n)^- =$$

$$= \lim_n \left(\int (f_n)^+ d\mu - \int (f_n)^- d\mu \right) \underset{\text{DEF}}{=} \lim_n \int f_n \, d\mu$$

Análisis Avanzado D. Carando - V. Paternostro DM-FCEN-UBA 8

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas.

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0,1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado.

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0,1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f \, d\mu$$

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0, 1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f \, d\mu = \int_{[-N,N]} f \, \chi_{E_N} \, d\mu.$$

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0,1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f \, d\mu = \int_{[-N,N]} f \, \chi_{E_N} \, d\mu.$$

Como f es no negativa, $(I_N)_N$ es creciente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto tiene límite.

Definimos
$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} I_N(f).$$

Dominios no acotados

¿Cómo definimos la integral de una función en un dominio no acotado?

Lo que hicimos en el $[0,1]$ se puede adaptar a cualquier intervalo.

Empecemos con las no negativas. Sea E un conjunto medible no acotado y sea f una función medible no negativa en E.

Para cada $N \in \mathbb{N}$, $E_N = E \cap [-N, N]$ es medible y acotado. Definimos

$$I_N(f) = \int_{E_N} f \, d\mu = \int_{[-N,N]} f \, \chi_{E_N} \, d\mu.$$

Como f es no negativa, $(I_N)_N$ es creciente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto tiene límite.

Definimos
$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} I_N(f).$$

f es integrable si el límite es finito.

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Definición

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Decimos que f es Lebesgue integrable si f^+ y f^- son integrables en E.

Sea E medible y $f : E \to \mathbb{R}$ (ó $\overline{\mathbb{R}}$).

Definimos las siguientes funciones medibles sobre E:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Definición

Sea $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Decimos que f es Lebesgue integrable si f^+ y f^- son integrables en E.

En ese caso, definimos la integral de Lebesgue de f en E como

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

f med. f INT $\Leftrightarrow$ $|f|$ int.

. linealidad, monotonía.

. FATOU, CONV. MONÓTONA, CONV. MAYORADA

VALE: $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ A_n med., $A_n \cap A_m = \emptyset$ $n \neq m$

$$\Rightarrow \int_E f \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu$$