7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de f.

8. Sea $(f_n)_{n\geq 1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $x \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

Puedo usar Weierstrass ?

Sé :

$f_n \longrightarrow f$

f_n es derivable $\Rightarrow$ f_n es continua

y como $f_n : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cerrado}}}{[a,b]} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f_n es unif. continua.

qvq

Si $\exists\, c>0 \;/\; |f_n'(x)| \leq c \overset{?}{\Rightarrow} f$ es continua.

$\begin{pmatrix} \forall x \in [a,b] \\ \text{y} \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$

Comienzo intentando probar que f es continua, y uso Hc a medida que las necesite

Si f fuese continua

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/\;$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Quiero acotar esto!

$$|f(x) - f(y)| =$$

$$= |\underbrace{f(x) - f_n(x)} + f_n(x) - f_n(y) + \underbrace{f_n(y) - f(y)}|$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{\star}$$

Uso convergencia uniforme para acotar estos dos módulos

$\star$

Si $|f'_n(x)| \leq c \quad \forall x \in [a,b]$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_a^b |f'_n(x)|\, dx \leq \int_a^b c\, dx = (b-a) \cdot c$$

$$\left| \int_a^b f'_n(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f'_n(x)|\, dx \leq (b-a) \cdot c$$

$$|f_n(b) - f_n(a)| \leq \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot c$$

$$\therefore \; |f_n(x) - f_n(y)| \leq |y-x| \cdot c \leq (b-a) \cdot c$$

Ya tengo cotas para los 3 módulos

$$\left.\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &< \alpha \\ |f_n(y) - f(y)| &< \alpha \end{aligned}\right\} \text{Para } n \geq n_0$$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < (b-a).c$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variable}}}{2.\alpha} + \underbrace{(b-a).c}_{\text{fijo} > 0} \overset{\substack{\text{quiero} \\ \downarrow}}{<} \varepsilon$$

$$\alpha < \frac{\varepsilon - (b-a).c}{2}$$

$$\therefore \ f \text{ es continua}$$

$\boxtimes$

Pues si elijo un alpha tal que valga la desigualdad de arriba, vale la continuidad de f.

Alpha lo elijo a partir de elegir el n0 correspondiente que cumpla que la distancia entre fn y f sea menor a este alpha, lo cual sé que vale porque fn converge UNIFORMEMENTE a f, con lo cual siempre existe un n0 para cualquier alpha.

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua}$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

¿Vale para

$$S_N = \sum_{n\geq 1}^{N} f_n \rightrightarrows f \iff \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$$

a) Sé

$$\sum_{n\geq 1}^{N} f_n \rightrightarrows f$$

$$\left| \sum_{n\geq 1}^{N} f_n(x) - f(x) \right| < \alpha \qquad \text{con } \alpha > 0 \qquad \forall x \in X$$

$$N \geq N_0$$

qvq

si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /

$$\text{si } |x-y| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(y) \right| < \varepsilon$$

hago lo mismo que en ej anterior: sumo y resto S_N

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_n(y)\right|$$

$$= \left|\underbrace{f(x)-S_N(x)}+S_N(x)\ \underbrace{-f(y)+S_N(y)}-S_N(y)\right|$$

$$\leq \underbrace{|S_N(x)-f(x)|}_{\substack{\leq\alpha \\ \text{a partir de} \\ \text{algún } N_0}} + \underbrace{|S_N(y)-f(y)|}_{\substack{\leq\alpha \\ \text{a partir de} \\ \text{algún } N_0}} + \underbrace{|S_N(x)-S_N(y)|}_{?}$$

$$|S_N(x)-S_N(y)| = \left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f_n(y)\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{|f_n(x)-f_n(y)|}_{<\tilde{\varepsilon}_n \text{ por continuidad de las } f_n}$$

Finalmente

quiero

$$|f(x)-f(y)| < \underbrace{2\alpha}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{N.\tilde{\varepsilon}_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Vale si:

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$\tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2N}$$

$\Rightarrow$ f es continua. $\blacksquare$

10. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$$

convergen absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$ a funciones continuas.

11. Probar que:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

serie de Taylor del sin.

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo acotado. ¿Qué sucede en $\mathbb{R}$?

(b) La función $f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ está bien definida en $\mathbb{R}$ y es continua.

12. Sea $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

(a) Calcular el límite puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y probar que la convergencia es uniforme sobre $\mathbb{R}$

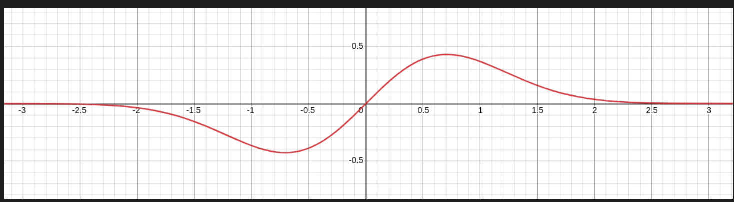
(b) Probar que la serie de término general f_n converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma de $[a, +\infty)$ pero no en $(0, +\infty)$.

a) $f_n \to 0$

Veo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{nx^2}} \overset{L'H}{=} \lim \frac{1}{2nx \cdot e^{nx^2}} = 0$$

Busco extremos de f_n



$$f_n'(x) = e^{-nx^2} - 2x^2 \cdot n \cdot e^{-nx^2} = 0$$

$$= \underbrace{e^{-nx^2}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\left(1 - 2nx^2\right)}_{\text{Debe ser } 0}$$

$$\Rightarrow 2nx^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

extremos

$$f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$n=1$

$$\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $|f_n(x)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

y además $f_n(x) \longrightarrow f$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

$\sum_{m=1} f_m$ CONV ...

$\forall a > 0$

SI VEMOS QUE $\sum_{m=1}^{+\infty} \|f_m\|_\infty$ CONV, ENTONCES "ESTAMOS"

PERO $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2me}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} = +\infty$ NO CONV

$\left(\sum \frac{1}{m^p} \text{ CONV} \Leftrightarrow p > 1\right)$

NO PODEMOS APLICAR WEIERSTRASS.

INTENTEMOS VER CUAL ES EL LIMITE PUNTUAL DE $\sum_{m=1}^{+\infty} f_m$. SEA $x \in \mathbb{R}$ FIJO $\quad \sum r^m \; |r|<1$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} x e^{-mx^2} = x \sum_{m=1}^{+\infty} e^{-mx^2} = x \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\overset{r}{e^{-x^2}}\right)^m$$

USANDO QUE $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$ $\forall\, |r|<1$

Si $x \neq 0$ $\quad 0 < e^{-x^2} < 1$

$$0 < \frac{1}{e^{x^2}} < 1$$

EN ESE CASO $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = x \cdot \frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \frac{x}{e^{x^2}-1}$

Si $x=0$ $\quad f_n(x)=0$ $\forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ CONV PUNTUALMENTE EN $\mathbb{R}$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^{x^2}-1} & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Sigue! ver notas de consultas de Fer.