

# Medida 1

Queremos

- Integrar más funciones
- Comparar  $\lim \int f_n$  con  $\int f$   $\swarrow \lim f_n = f$

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 5 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 5 & x \notin \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \end{cases}$$


$$\int_0^1 f_n(t) dt = 5$$

$\nwarrow$  vale 5 salvo en finitos puntos

Nota que

$$f_n \rightarrow f$$

↑  
integrar la vale  
5 para cualquier  $n$

←  
será lo mismo  
para el límite?  $\infty$   


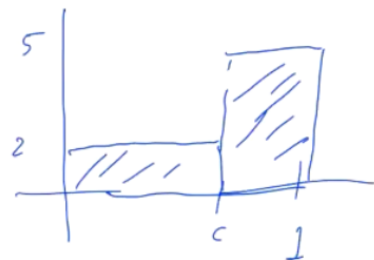
en particular

$f_n \rightarrow f$  puer "pierde" cosas cuando  $n \rightarrow \infty$

## Funciones Simples

Para  $0 < c < 1$ , sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq c \quad \leftarrow \\ 5, & \text{si } c < x \leq 1. \quad \leftarrow \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^c 2 dx + \int_c^1 5 dx$$

$$= 2 \cdot c + 5 \cdot (1 - c) = 2 \text{ long } [0, c] + 5 \text{ long } (c, 1]$$

"medida de  
 $[0, c]$ "

"medida de  
 $(c, 1]$ "

Escribamos el intervalo  $[0, 1]$  como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B, \text{ con } A \cap B = \emptyset.$$

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in A \\ 5, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

IDEA:

$$\int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot \text{"medida de A"} + 5 \cdot \text{"medida de B"}$$



Tomemos  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  y  $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} = [0, 1] \cap \mathbb{I}$ .

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1 \\ 5, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot \text{"medida"}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 5 \cdot \text{"medida"}(\mathbb{I} \cap [0, 1])$$

$\downarrow$   
 DEBERÍA  
 SER

NECESITAMOS UNA NOCIÓN DE MEDIDA PARA  
CONJ. RAROS ..

Queremos definir una noción de medida para conjuntos que no sean necesariamente intervalos y que cumpla algunas propiedades *razonables*.

$$\mu(A) = \text{"medida de } A\text{"}$$

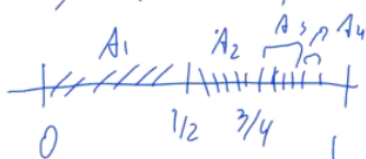
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

↙ intervalo

$$\mu((a, b)) = b - a$$



$$\mu((a, b)) = b - a \quad \quad [0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \leadsto \quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Invariante a traslación

$$\mu(A + c) = \mu(A) \quad \forall A, \forall c \in \mathbb{R}$$

↑ que podemos medir

# Conjuntos Nulos

El primer paso es definir los conjuntos que "miden cero".

Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos.

## Definición

Decimos que  $A \subset \mathbb{R}$  es un **conjunto nulo** si para todo  $\varepsilon > 0$  existen contables intervalos abiertos  $(U_n)_{n \in \mathbb{J}}$  tales que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{J}} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{J}} \text{long}(U_n) < \varepsilon.$$

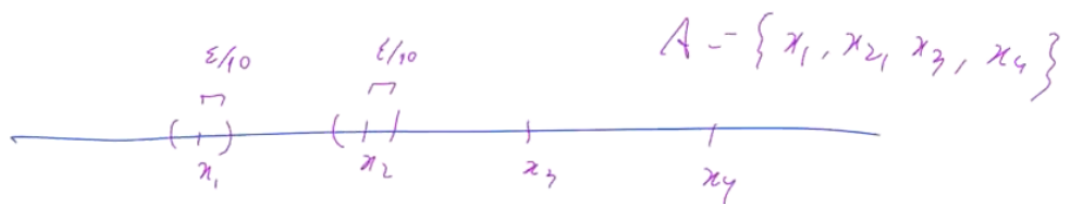
$$A = \{x_0\}.$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \quad U_1 = (x_0 - \varepsilon/3, x_0 + \varepsilon/3)$$

$$A \subset U_1 \quad \text{long}(U_1) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

## Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.
2. Todo conjunto numerable es nulo.
3. Unión numerable de conjuntos nulos es nulo.



$$A \subset (x_1 - \varepsilon/10, x_1 + \varepsilon/10) \cup \dots \cup (x_4 - \varepsilon/10, x_4 + \varepsilon/10)$$

$$\sum_{j=1}^4 \text{long}(U_j) < \varepsilon. \quad (\text{Hacerlo}).$$

Obs: EXISTEN CONJUNTOS NULOS

NO NUMERABLES

(EL CONJ. DE CANTOR).

$\sigma$  - álgebras

### Definición

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$  (o sea,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ).  
Decimos que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra si  $X \in \mathcal{A}$  y es cerrada por complementos (respecto a  $X$ ), uniones numerables e intersecciones numerables.

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ . En part,  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

$X \in \mathcal{A}$  y  $\emptyset = X \setminus X$ .

$A_n \in \mathcal{A} \forall n$ .

ET 1)  $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ .

$\Rightarrow \left[ \bigcup_n A_n \in \mathcal{A} \right], \left[ \bigcap_n A_n \in \mathcal{A} \right]$  ET 2)  $\mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$

ET:  $\{A \subset \mathbb{R} \mid \#A < +\infty \text{ o } \#(\mathbb{R} \setminus A) < +\infty\}$   
 $\Rightarrow$  una  $\sigma$ -alg.

Álgebra generada

$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{CONJUNTOS NULOS} \\ \cdot \text{INTERVALOS ABIERTOS} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{COMPLEMENTOS, UNIONES NUM} \\ \text{E INTERSECC NUM.} \end{array}$

### Definición

La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$  generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de  $\mathbb{R}$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue.

Si  $I$  es un intervalo,  $\mathcal{M}(I)$  es la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos medibles Lebesgue de  $I$ .

$$\mathcal{M}(I) = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(I)$$

QUEREMOS MEDIR LOS  $A \in \underline{\mathcal{M}}$ .

$$\underline{A} \mapsto \underline{\mu(A)} \in [0, +\infty]$$

$$\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

Khe!

### Teorema (existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única función  $\mu$  de  $\mathcal{M}$  en  $[0, +\infty]$  tal que

- Si  $A = (a, b)$ , entonces  $\mu(A) = b - a$ .
- Si  $A_n \in \mathcal{M}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los  $A_n$  son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

" $\sigma$ -aditividad"

unioner e intersecciones  
numerales

- Si  $A \in \mathcal{M}$ , entonces

Importante!  $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}.$  "Regularidad"

### Teorema

Sea  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  la **medida de Lebesgue** dada por el teorema anterior. Entonces,  $\mu$  satisface las siguientes propiedades.

- Si  $A, B \in \mathcal{M}$  cumplen que  $A \subset B$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . "Monotonía"
- Si  $A \subset \mathbb{R}$  es un conjunto nulo, entonces  $A \in \mathcal{M}$  y  $\mu(A) = 0$ .  
Recíprocamente, si  $A \in \mathcal{M}$  es tal que  $\mu(A) = 0$ , entonces  $A$  es un conjunto nulo.
- Dados  $A \in \mathcal{M}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $A + c \in \mathcal{M}$  y  $\mu(A + c) = \mu(A)$ .

"Invariante por Traslación"

$$A + c = \{a + c : a \in A\}$$







