Ricky

Marte 13 Abril

E. M. T. I.

Continuemos con

- Espacios Métricos
- Topología

Repaso

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Definición

Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema

A es cerrado $\iff$ A^c es abierto

Obs!

Esto no dice que A es cerrado ó abierto!

Teorema

- La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.

  La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

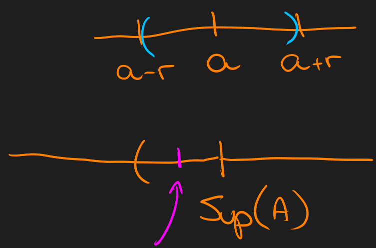
  La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.

  La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

Ejercicio:

1. Sea $a \in E$. Entonces, $\{a\}$ es cerrado.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Entonces, $\overbrace{\sup(A)}^{=:a}$, $\inf(A) \in \bar{A}$.

$$\forall r > 0,\ \underbrace{B(a,r)}_{(a-r,\ a+r)} \cap A \neq \emptyset$$



$$\left.\begin{array}{l} \in A \\ \in B(a,r) \end{array}\right\} \cap \neq \emptyset$$

Topología: continuación

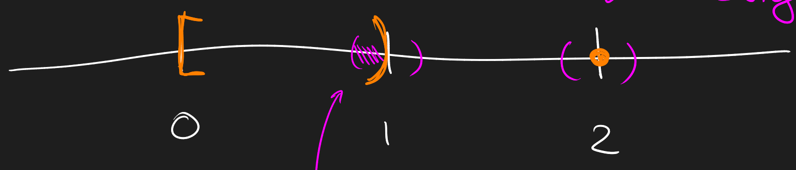
Definición

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x,r)$ es infinito.

$x \in E$ es pda de A si

$\forall r > 0$, $A \cap B(x,r)$ es infinito

Ej. $A = [0,1) \cup \{2\}$



$\forall$ bolita de radio < 1, tengo solo 1 elemento: 2

$B(2,r) \cap A = \{2\}$

$\therefore$ no es p.d.a.

$\forall$ bolita de radio r, tengo infinitos elementos entre $1 - \frac{r}{2}$ y 1

$\therefore$ $x = 1$ es pto de acumulación

Definición

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x,r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x.

Dem

V es entorno de x si $x \in V^\circ$

$\Downarrow$) V es entorno $\Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subseteq V^\circ$

Puedo decir que

$$\underbrace{A \cap B(x,r)} \subseteq A \cap V^\circ \subseteq A \cap V$$

Por hipótesis A es infinito

$$\Rightarrow \exists\, y \in A \cap B(x,r) \;/\; y \neq x$$

$\Uparrow$) Sea $r > 0$,

como $B(x,r)$ es un entorno (abierto que contiene a x)

$$\Rightarrow \exists\, y \in A \cap B(x,r) \;/\; y \neq x$$

Supongo

$$A \cap B(x,r) = \{x, \overset{\text{finito}}{y_1}, y_2, \dots, y_k\}$$

y llego a absurdo:

$\Rightarrow$ si tomo

$$r_0 = \min \{ d(x,y), d(x,y_j) \}_{j=1}^{k}$$

obtengo que

$$B(x,r_0) \cap A = \{x\}$$

(Todos los puntos a $\underbrace{\text{dist} < r_0}_{\text{los } y \text{ están a al menos } r_0}$)

Encontramos un entorno de x

que intersecado con A, solo contiene a x,

pero por Hip: x es punto de acumulación de A

si cada entorno de x contiene

$y \in A$ con $y \neq x$.

Absurdo!

$\therefore$

$B(x,r) \cap A$ es infinito.

y vale la primer definición.

$\boxtimes$

Def:

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Ejemplos

1) $A = (a,b) \Rightarrow A' = [a,b]$

$r > 0$

$$B(x,r) \cap (a,b) = (x-r, x+r) \cap (a,b)$$

Opciones

- Si $x \notin [a,b]$

$$\Rightarrow \exists r \,/\, (x-r, x+r) \cap (a,b) = \emptyset$$

$$r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$$

- Si $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \forall r > 0$,

$$(x-r, x+r) \cap (a,b) = \begin{cases} (c,d) \\ [a,d) \\ (c,b] \end{cases}$$

casos

2) $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} = E$

$B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$ tiene a lo sumo 1 punto

$\uparrow$
$x \in \mathbb{R} = E$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}' = \emptyset$$

Teorema:

Sea $A \subset E$

$\Rightarrow \overline{A} = A \cup A'$

Dem:

$\subseteq)$ $x \in \overline{A} \overset{?}{\Rightarrow} x \in A$ ó $x \in A'$

punto de acumulación

- Si $x \in A$. ✓
- Si $x \notin A$,

como $x \in \overline{A}$

$\Rightarrow \forall r > 0, \; B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

$\underset{x \notin A}{\Rightarrow} \; y \neq x, \; y \in B(x, r) \cap A$

Si V es un entorno de x

$\Rightarrow \exists r > 0 \; / \; B(x, r) \subseteq V^{\circ}$

$\Rightarrow \exists y \neq x,$

$y \in B(x, r) \cap A \subseteq V^{\circ} \cap A \subseteq V$

$\therefore \quad x \in A'$. ✓

2) Siempre que $A \subseteq \bar{A}$,

hay que ver que $A' \subseteq \bar{A}$

$x \in A' \Rightarrow \forall r>0,\ B(x,r) \cap A$ tiene infinitos puntos.

$\Rightarrow B(x,r) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$.

$\blacksquare$

Corolario

A es cerrado $\Leftrightarrow A' \subset A$

Dem:

$$A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \underbrace{\bar{A}}_{\substack{\text{Por Teorema} \\ = A' \cup A}} = A$$

$\Rightarrow)$ A es cerrado $\Rightarrow A' \subseteq A' \cup A = \bar{A} = A$

$(\Leftarrow)\quad A' \subseteq A \Rightarrow \underbrace{A' \cup A}_{=\bar{A}} = A$

Definición

Dado $A \subset E$, decimos que x es un punto de la frontera de A si para todo $r > 0$, se cumple

$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos ∂A.

$$x \in \partial A \Rightarrow x \in \bar{A} \;\wedge\; x \in \overline{A^c}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

$\partial A \overset{?}{=} \bar{A} \cap \overline{A^c}$ sí, ej de la práctica.

Proposición

Sea $A \subset E$

$$\Rightarrow \bar{A} = A \cup \partial A$$

Dem:

$\supseteq)\quad A \subseteq \bar{A}$

Si $x \in \partial A$

$\Rightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

$\Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \bar{A}$ ✓

$\supseteq)$ $x \in \bar{A}$, $x \notin A$

$\hookrightarrow \forall r > 0,\ \underbrace{B(x,r) \cap A^c}_{x \in} \neq \emptyset$

pues $x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$

$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial A$ $\blacksquare$

Pregunta:

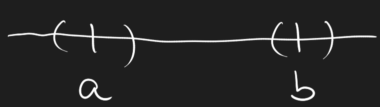
Se parecen A' y ∂A ?

$\bar{A} = A \cup A' = A \cup \partial A$

ejemplos

- $[a,b]' = [a,b]$

$\partial [a,b] = \{a, b\}$



Vemos que

$\partial A \subseteq A'$

¿Será cierto siempre?

- $\mathbb{Z}' = \phi$

$\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Si $r < \frac{1}{2}$

$x \in \mathbb{R}, \quad (x-r, x+r) \cap \mathbb{Z}$

y $\cap \mathbb{Z}^c$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Vemos que

$\partial A \nsubseteq A'$

$\therefore$ Respuesta:

No siempre vale que $\partial A \subseteq A'$

Ejemplo de iguales

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \\ \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{son iguales!}$$

Sucesiones en EM

Definición $f: \mathbb{N} \to E$, $f(n) = x_n$

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ d(x, x_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in B(x, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

Notación

$$\lim_{x \to \infty} x_n = x$$

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$$

Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ dado cualquier entorno V de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Ejer: Demo.

Consideremos

(E,δ) con E conjunto infinito

y δ la distancia discreta.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \;/\; x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$

Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \underbrace{\delta(x, x_n)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_n \\ 1 & \text{si } x \neq x_n \end{cases}} < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow x_n = x \quad \forall n \geq n_0$$

Constante a partir de n_0

Definición

Sean d, d' dos métricas sobre E.

Decimos que son

Topológicamente equivalentes si

los conjuntos abiertos de (E,d) y (E,d')

son los mismos.

Teorema

Sean d, d' dos métricas sobre E.
Las métricas son equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$, y $r > 0$, existen r_1 y r_2 tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subset B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subset B_{d'}(x, r).$$

Dem:

$\Rightarrow)$ d y d' son equivalentes.

Si $x \in E$ y $r > 0$, buscamos r_1 y r_2

- $B_d(x, r)$ es un abierto en (E, d)

$\underset{\text{son equiv.}}{\Longrightarrow}$ es abierto para d'

$\Rightarrow \exists\, r_1 > 0 \,/\, B_{d'}(x, r_1) \subseteq B_d(x, r)$ ✓

Hago lo mismo para d'

- $B_{d'}(x, r)$ es un abierto en (E, d')

$\underset{\text{son equiv.}}{\Longrightarrow}$ es abierto para d

$\Rightarrow \exists\, r_2 > 0 \,/\, B_d(x, r_2) \subseteq B_{d'}(x, r)$ ✓

$\Leftarrow)$ U abierto para d

$\Rightarrow x \in U,$

$\exists r > 0 \ / \ B_d(x, r) \subseteq U$

$\Rightarrow \ B_{d'}(x, \tilde{r}) \subseteq B_d(x, r) \subseteq U$
$\exists \tilde{r} > 0$

$\Rightarrow \ B_{d'}(x, \tilde{r}) \subseteq U$

$\Rightarrow$ U es abierto wrt d'

Lo mismo para U abierto para d' $\Rightarrow$ vale para d

$\blacksquare$

Proposición

Sean d, d' dos métricas equivalentes sobre E y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para d si y sólo si es convergente para d'.

"Las métricas equivalentes mantienen las sucesiones convergentes"

Dem: Ejercicio. Lo hago 😉

$\Rightarrow)$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para d

$$\left(\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \underbrace{|x_n - \ell|}_{d_1} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \right)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in B_d(\ell, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

Como d y d' son equivalentes:

Teorema

Sean d, d' dos métricas sobre E.
Las métricas son equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$, y $r > 0$, existen r_1 y r_2 tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subset B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subset B_{d'}(x, r).$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_1 \ / \ B_{d'}(\ell, r_1) \subset B_d(\ell, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}, \ n_1 \geq n_0 \ / \ x_n \in B_{d'}(\ell, r_1) \subset B_d(\ell, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_1$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente para d'

Preguntar

Convergen ambas a ℓ?

si sí, a distintas "velocidades"?

Sean d, d' dos métricas sobre E. Si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C_2 \cdot d(x,y)$$

para todos $x, y \in E$, entonces d y d' son equivalentes.

Esto nos permite operar con radios