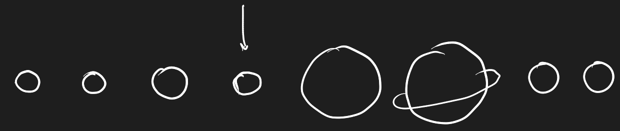
Marte Mar 23/21



Análisis Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica 1

1. (a) Si $m \in \mathbb{Z}$, probar que m es múltiplo de 3 si y sólo si m^2 es múltiplo de 3.
(b) Probar que $\sqrt{3}$ no es racional.

a) Probar

$$m \text{ es mult. } 3 \iff m^2 \text{ es mult. de } 3$$

$\Rightarrow$) m es mult. 3 (TFA)

$$\Rightarrow m = \underset{\substack{\text{signo} \\ \in \{1,-1\}}}{s} \cdot \underbrace{p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}}_{\text{Potencias de primos}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\overset{m \text{ mult } 3}{\Rightarrow} \exists i \in \mathbb{N} \,/\, p_i^{k_i} = 3^{k_i} \quad \text{con } k \geq 1$$

$$\Rightarrow m^2 = \left(s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_4}\right)^2$$

$$= \underbrace{s^2}_{=1} \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{2k_4}$$

$$= p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{2k_4}$$

$$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} \,/\, p_i^{2k} = 3^{2k}$$ que es potencia de 3

$\Rightarrow$ es múltiplo de 3

$\therefore$ si m es mult. de 3 $\Rightarrow m^2$ lo es también

$\Leftarrow$) m^2 es mult. 3

$$\Rightarrow m^2 = \underbrace{s^2}_{=1} \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{2k_4}$$

con algún $p_i^{2k_i} = 3^{2k_i} = (3^{k_i})^2$

$$m^2 = \left(s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_4}\right)^2$$

con algún $p_i^{k_i} = 3^{k_i}$

$$\Rightarrow s \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_4} = m$$

es múltiplo de 3

Como ambas implicaciones son verdaderas,

vale la doble implicación.

$\blacksquare$

(b) Probar que $\sqrt{3}$ no es racional.

(1° ejemplo del Abbott pero con $\sqrt{2}$)

Por absurdo:

Supongo que $\sqrt{3}$ es racional.

$\Rightarrow$ puedo escribirlo como cociente de enteros

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z}$$

(sin factores primos comunes)

$$(\sqrt{3})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$3q^2 = p^2$$

Reescribo como prod. de primos (escribo $q_i = q_i^k$ con $k \geq 1$)

$$3 \cdot (\overset{\text{signo}}{q_0} \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_n)^2 = (\overset{\text{signo}}{p_0} \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m)^2$$

$$3 \cdot \underbrace{q_0^2}_{=1} \cdot q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2 = \underbrace{p_0^2}_{=1} \cdot p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2$$

$$\underbrace{3 \cdot q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2}_{\text{Al menos un factor } = 3} = \underbrace{p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2}_{\text{debe haber algún } 3}$$

pero como p y q no tienen factores comunes, entonces:

• Caso 3 es factor de q y no de p

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot \underbrace{q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2}_{\text{algún } 3^{2k}} = \underbrace{p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2}_{\text{ningún } 3}$$

Junto los 3

$$\underbrace{3^{2k+1} \cdot \overbrace{q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2}^{\text{ningún } 3}}_{\text{múltiplo de } 3} = \underbrace{\overbrace{p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2}^{\text{ningún } 3}}_{\text{no es múltiplo de } 3} \qquad k \geq 1$$

Abs!

• Caso 3 es factor de p y no de q

$$3 \cdot \underbrace{q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2}_{\text{ningún } 3} = \underbrace{p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2}_{\text{algún } 3^{2k}}$$

$$3 \cdot q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2 = 3^{2k} \cdot p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2 \qquad k \geq 1$$

$$3 \cdot \underbrace{q_1^2 \cdot \ldots \cdot q_n^2}_{\text{no es mult 3}} = 3 \cdot \underbrace{3^{\overbrace{2k-1}^{\geq 1}} \cdot p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_m^2}_{\text{es mult. de } 3}$$

Abs!

$\therefore \sqrt{3}$ no puede ser escrito como cociente de enteros $\Rightarrow$ no es racional

$\blacksquare$

Ideas clave de este ejercicio:

1) Un nro. r es Racional si $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ /

$$r = \frac{p}{q}$$

2) Descomposición en primos por Teorema Fundamental de la Aritmética

2. Probar que si $x < y+\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x-y| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

$x < y + \varepsilon$

Supongo que $x > y$

$\Rightarrow \quad -\varepsilon < y - x < 0$

$\varepsilon > x - y > 0$

elijo $\varepsilon_0 = x - y$

$x - y > x - y$

Abs! $\exists$ un ε que no cumple!

$x < y + \varepsilon$

$x < y + x - y$

$x < x$

$\Rightarrow \quad x \leq y$ $\blacksquare$

Parte b) $|x-y| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

qvq $x = y$

Supongo $x \neq y$

$\Rightarrow \quad |x-y| < \varepsilon$

elijo $\varepsilon_0 = |x-y| > 0$ pues $x \neq y$

$|x-y| < |x-y|$

Abs!

$\Rightarrow \quad x = y \qquad \blacksquare$

Idea de este ejercicio:

- Suponer opuesto de lo que quiero y llegar a un absurdo.

3. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un número irracional entre s y q.

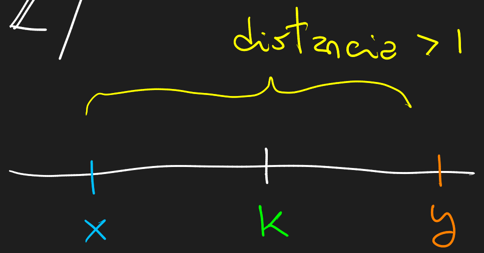
(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y.

a) $y - x > 1$

$-x > 1 - y$

$x < y - 1$

qvq $\exists k \in \mathbb{Z} /$



Como $x, y \in \mathbb{R}$, "simplifico" el problema con elementos de $\mathbb{Z}$

↳ uso parte entera

$\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$

Pero primero, separo en casos

- Si: $x \in \mathbb{R}$
  $y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad y - x > 1$

$$\underbrace{y - 1}_{\mathbb{Z}} > x$$

$$y > \underbrace{y - 1}_{} > x$$

$$y > k > x \qquad k \in \mathbb{Z} \ \checkmark$$

• Si $x \in \mathbb{Z}$
$y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Análogo :

$$y - x > 1$$

$$y > \underbrace{1 + x}_{\mathbb{Z}} > x$$

$$y > k > x \qquad k \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

• Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\wedge$
$y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (ó $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z}$)

no son enteros!

Tengo

$$y - x > 1$$

uso info de $\notin \mathbb{Z}$ (no es $\leq$)

$$\underbrace{\lfloor y \rfloor}_{\text{Podría ser la } k \text{ que busco}} < y \qquad \text{con } \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$$

Candidato a $k \in \mathbb{Z}$

$k \overset{?}{=} \lfloor y \rfloor$

falta ver que

$$x \overset{?}{<} \lfloor y \rfloor$$

tengo

$$y - x > 1$$

$$\underbrace{x < y - 1}$$

si ésto es menor que $\lfloor y \rfloor$, gané
(lo cual es trivialmente cierto si se lo piensa unos segundos)

quiero esta relación $<$

pues podré decir que $x < y-1 < \lfloor y \rfloor$

$\Rightarrow q \vee q$

$$y - 1 \overset{?}{<} \lfloor y \rfloor$$

$$y \overset{?}{<} \lfloor y \rfloor + 1$$

pero sabemos que

$$\lfloor y \rfloor + 1 = y + 1 - \underbrace{\text{ParteDecimal}(y)}_{< 1}$$

$\downarrow y \notin \mathbb{Z}$

$$\lfloor y \rfloor + 1 < y + 1$$

$\therefore$

$$y < \lfloor y \rfloor + 1$$

$$\Rightarrow \quad x < \lfloor y \rfloor$$

$$\therefore \quad x < \lfloor y \rfloor < y$$

$\blacksquare$

Flasheada cósmica que no supe cómo usar:

[desde acá]

$$\lfloor y \rfloor = \sup\{ n \in \mathbb{Z} : n \leq y \}$$

como $y \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n < y$

$$= \sup\{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}$$

y construyo otro conjunto para sumar sus supremos

$$\Rightarrow \lfloor y \rfloor - 1 = \underbrace{\sup\{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}}_{A} - \underbrace{\sup\{ 1 \}}_{B}$$

Como A y B son acotados sup ⊛, uso
$\sup A - B = \sup A - \sup B$
donde $A - B = \{ a - b : a \in A, b \in B \}$

⊛ misma demo que vid Teo 1 min 36:00

⊛ Obs:

Como $A \subset \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sup A = \max A$

$$= \sup\{ n \in \mathbb{Z} : n < y - 1 \}$$

Todos los elems de este conjunto han incrementado en 1 wrt. los de A. (pensar caso $y = 0{,}9$)

Def de Parte entera

$$= \lfloor y - 1 \rfloor$$

$$\lfloor y \rfloor - 1 = \lfloor y - 1 \rfloor$$

[hasta acá]

Otra forma para la 3° parte de la demo:

Defino un conjunto cuyo supremo sea y, para moverme Eps. a la izquierda y hallar un a tal que $y-\varepsilon < a \leq y$

(b' de Equivalencia 1)

donde elegiré $\varepsilon = 1$, obteniendo

$$y-1 < a \leq y$$

Defino

$$A = \{ n \in \mathbb{Z} : n < y \}$$

como $y \notin \mathbb{Z}$ (tampoco es supremo!)

$\Rightarrow n \neq y$

$\Rightarrow n < y$

(y no $\leq$)

esto es importante pues la condición que busco es estricta:

$$x < k < y$$

Tengo un candidato a k:

↳ $k = \sup(A)$

$A \subset \mathbb{Z}$

$\overset{\downarrow}{=} \max A \in \mathbb{Z}$ ✓ $\left(\begin{array}{l}\text{notar:}\\ \max A = \lfloor y \rfloor\end{array}\right)$

este k cumple $k < y$ con $k \in \mathbb{Z}$

Falta ver que

$$x \overset{?}{<} k$$

$$x \overset{?}{<} \max A$$

sé que

$$y - x > 1$$

$$x < y - 1$$

si encuentro que

$$y - 1 \overset{?}{<} \max A$$

$\Rightarrow$ gané, pues $x < y - 1$

(es casi trivial si se lo piensa unos segundos)

$\max A = \lfloor y \rfloor$ (pues es el entero más cercano en la construcción del conjunto)

qvq

$$y - 1 \overset{?}{<} \lfloor y \rfloor$$

$$y \overset{?}{<} \underbrace{\lfloor y \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{1}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \neq 0}}$$

como

$$\lfloor y \rfloor = \sup\{ n \in \mathbb{Z} : n \overset{y \notin \mathbb{Z}}{<} y \}$$

$$1 = \sup\{1\}$$

no sé cómo seguir !!

Otra forma: Por absurdo

llegué a:

Falta ver que

$$x \overset{?}{<} K$$

$$x \overset{?}{<} \max A$$

Supongo que

$$x \geq \max A$$

$$x \geq \lfloor y \rfloor$$

pero

$$x < y - 1 \overset{y \notin \mathbb{Z}}{<} \lfloor y \rfloor$$

Abs! pues $x \geq \lfloor y \rfloor \wedge x < \lfloor y \rfloor$

$\therefore \quad x < \max A$

y puedo decir que

$$x < \max A < y$$

$$x < \lfloor y \rfloor < y$$

$$x < k < y \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$\blacksquare$

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

Idea:

- Llegar a algo de la forma de (a)

Si $x < y \Rightarrow y - x > 0$

y como $y \neq x \Rightarrow y - x \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x} > 0$$

y además por Arquímedes,

$$\exists n \in \mathbb{N} \;/\; n > \frac{1}{y-x}$$

equivalentemente

$$\frac{1}{n} < y - x$$

$$1 < n(y-x)$$

$$1 < ny - nx$$

$$\underbrace{1 < y' - x'}_{\text{ésto es lo que tenía en (a)!}} \qquad \text{con } \begin{array}{l} y' = ny \in \mathbb{R} \\ x' = nx \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Por lo probado en (a)

$$\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n \cdot x < k < ny$$

divido por n

$$x < \underbrace{\frac{k}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < y$$

$$x < q < y$$

$\boxtimes$

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un número irracional entre s y q.

Parece que "quiere" que use el (b). Lo uso en 2° forma.

1° forma

Sé

$$r - s > 0$$

Como por ej. 1 sé que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ (es irracional)

y $(r-s) \in \mathbb{Q}$,

$\Rightarrow$ $\dfrac{r-s}{\sqrt{3}}$ tampoco lo estará (hay que probarlo)

y además, como $\sqrt{3} > 1$ (pues $3 > 1$ y $\sqrt{x}$ es creciente $\Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt{1}$ ie no cambia la desigualdad)

$$0 < \frac{r-s}{\sqrt{3}} < r - s$$

sumo s

$$\underbrace{s}_{\in \mathbb{Q}} < \underbrace{s + \frac{r-s}{\sqrt{3}}}_{\text{Candidato a irracional}} < \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}$$

Falta ver que

$$s + \frac{r-s}{\sqrt{3}} \overset{?}{\notin} \mathbb{Q}$$

Similar al ej 1, supongo que sí está en $\mathbb{Q}$ (y llego a absurdo)

Supongo $i = s + \frac{r-s}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \underbrace{i - s}_{\in \mathbb{Q}} = \frac{r-s \;\}\in \mathbb{Q}}{\sqrt{3} \;\}\notin \mathbb{Q}}$$

$$\underbrace{\sqrt{3}}_{\notin \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{r-s}{i-s}}_{\in \mathbb{Q}} \qquad \text{Abs!}$$

$$\therefore \quad i = s + \frac{r-s}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \underbrace{s}_{\in \mathbb{Q}} < \underbrace{s + \frac{r-s}{\sqrt{3}}}_{\notin r} < \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}$$

$$s < i < r$$

$\boxtimes$

$\boxed{2^\circ \text{ forma}}$ Por 3b, sé que

$$\exists q \in \mathbb{Q} \;/\; s < q < r \quad \text{con } s, r \in \mathbb{R}$$

y como

$$s < r$$

$$\sqrt{3}.s < \sqrt{3}.r$$

y también vale que

$$\exists \tilde{q} \in \mathbb{Q} \;/\; \underbrace{\sqrt{3}\,s}_{\in\mathbb{R}} < \tilde{q} < \underbrace{\sqrt{3}\cdot r}_{\in\mathbb{R}} \quad \text{con } s, r \in \mathbb{R}$$

pues

$\Rightarrow$ divido por $\sqrt{3}$

$$\underbrace{s}_{\in\mathbb{R}} < \underbrace{\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}}}_{\text{Candidato a irracional}} < \underbrace{r}_{\in\mathbb{R}}$$

Falta ver que

$$\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \overset{?}{\notin} \mathbb{Q}$$

De nuevo, supongo que sí, y llego a absurdo

Si $\quad i = \dfrac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ escribo $\sqrt{3}$ como

$$\sqrt{3} = \frac{\tilde{q}}{i} = \frac{\tilde{q} \;\}\in\mathbb{Q}}{\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \;\}\in\mathbb{Q}} \quad \Bigg\} \; \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$$

Abs!

$\therefore \quad \dfrac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{s}_{\in \mathbb{Q}} < \underbrace{\frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}}}_{\notin \mathbb{Q}} < \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}$$

$$s < i < r$$

$\blacksquare$

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y.

Uso ideas de (b) y (c)

Por (b), sé que $\exists\, \tilde{q} \in \mathbb{Q}$ entre $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$

$$\tilde{x} < \tilde{q} < \tilde{y}$$

Elijo un número irracional:

$$i = \pi$$

Como $\pi > 0$

$$\Rightarrow \quad x < y$$

$$\underbrace{\pi \cdot x}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{\pi \cdot y}_{\in \mathbb{R}}$$

De nuevo, por (b), sé que $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ /

$$\pi \cdot x < q < \pi \cdot y$$

divido por π

$$\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{\frac{q}{\pi}} < \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}}$$

Candidato a irracional

Falta ver que $\frac{q}{\pi}$ es irracional

Supongo que $\frac{q}{\pi} \in \mathbb{Q}$ y llego a absurdo:

escribo π como

$$\left.\begin{array}{l} \pi = \left.q\right\} \in \mathbb{Q} \\ \quad\ \left.\frac{q}{\pi}\right\} \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \pi \in \mathbb{Q} \quad \text{Abs!}$$

$\therefore$

$$\frac{q}{\pi} \notin \mathbb{Q} \quad (\text{es irracional})$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x}_{\in\mathbb{R}} < \underbrace{\frac{q}{\pi}}_{\notin\mathbb{Q}} < \underbrace{y}_{\in\mathbb{R}}$$

$$x < i < y$$

$\blacksquare$

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Probar:

I) $$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq s \quad \forall\, a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0\, \exists\, a \in A \,/\, s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

II) $$i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i \leq a \quad \forall\, a \in A, \\ \forall \varepsilon > 0\, \exists\, a \in A \,/\, i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

Lo hizo Vicky en Teórico 01.

I) $\Rightarrow$) $s = \sup A$

$\Rightarrow a \leq s \;\; \forall a \in A$ pues s es cota sup. ✓i

$\Rightarrow$ como s es supremo de A,

$s - \varepsilon$ no puede ser supremo de A pues

$s - \varepsilon < s$

$\Rightarrow \exists a \in A \,/\, s - \varepsilon < a \leq s$ ✓ii

$\Leftarrow$) Vale $\begin{cases} i \\ ii \end{cases}$ qvq s es sup A:

Sea $t \in \mathbb{R}$ cota superior de A

qvq $t \geq s$ (s es la menor de las cotas)

Supongo que $t < s$

$\Rightarrow t = s - \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = s - t > 0$

$\Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, t = s - \varepsilon < a \leq s$

¡¡ Abs! pues t era cota sup.

$\therefore$ $t \geq s$ $\forall t$ cota superior de A $(t \geq x \ \forall x \in A)$

$\blacksquare$

II) Igual pero al revés

$\Rightarrow)$ $i = \inf A$

$\Rightarrow$ i es cota inf

$\Rightarrow$ $i \leq a \ \forall a \in A$ ✓ i

Como i es $\inf A$

$\Rightarrow$ $i + \varepsilon$ no es ínfimo de A pues

$i < i + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A \,/\, i \leq a < i + \varepsilon$ ✓ ii

$\Leftarrow)$ Vale $\begin{cases} i \\ ii \end{cases}$ qvq vale $i = \inf A$

Pruebo 2 condiciones de Ínfimo

$\boxed{a}$ $i \leq a \ \forall a \in A$ (es cota inferior) ✓

$\boxed{b}$ supongo que $\exists$ otra cota inf. t / $t > i$

(t sería mejor que i)

$\Rightarrow t = i + \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

$$\varepsilon = (t - i) \overset{t>i}{\downarrow}{>} 0$$

$\underset{ii}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \;/\; i \leqslant a < t = i + \varepsilon$

Abs! pues t era cota inferior, pero $\exists\, a < t$

$\therefore$ no existe una mejor cota : $i \leqslant t \quad \forall t \;/\; t < a \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow$ i es ínfimo de A

$\blacksquare$

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y probar que lo son:

$$(a, b] \qquad B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B \cup \{0\} \qquad \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$$

$(a, b]$

ínfimo (no es mínimo)

supremo y máximo

Demo

- es b supremo?
  - es cota sup pues $b \geq c \quad \forall c \in (a, b]$ ✓
  - $\forall \varepsilon > 0, \ \exists c \in (a,b] \ / \ \underbrace{b - \varepsilon}_{\in (a,b)} < \underbrace{c}_{\in (a,b]} \leq b$ ✓

como $b \in (a,b] \Rightarrow$ es máximo!

- es a ínfimo?

igual que arriba.

Similarmente para el ínfimo.

Demo

$(a, b]$

b es supremo pues $b \geq c \quad \forall c \in (a,b]$ ✓

y todas las cotas superiores son $\geq b$

$b \leq t \quad \forall t$ cota superior ✓

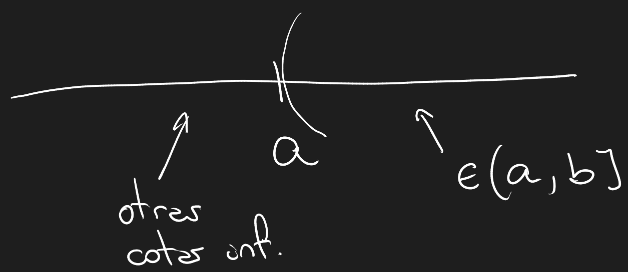
a es ínfimo pues $a < c \quad \forall c \in (a,b]$

qvq $a \geq t \quad \forall t$ cota inferior

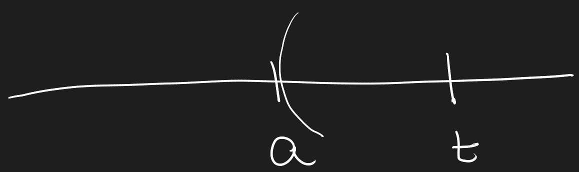
Supongo

$a < t$

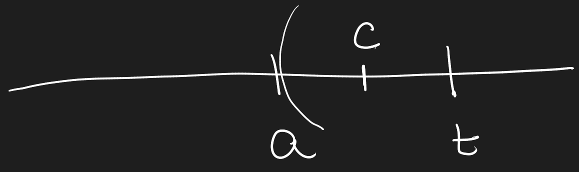
entonces, como a es cota inferior



como $a < t$



pero entonces existe $c = \dfrac{t-a}{2} \in (a,b]$



Absurdo! pues

a es cota inferior

$\left(a < c \quad \forall c \in (a, b] \right)$

$\therefore$ a es ínfimo de $(a, b]$.

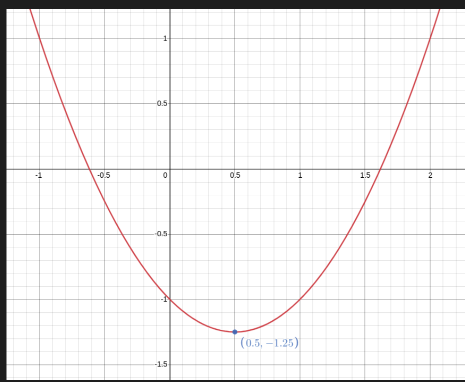
$\blacksquare$

$B \cup \{0\}$

Lo mismo que B, pero con

$$\operatorname{Inf}(B \cup \{0\}) = \min(B \cup \{0\}) = 0$$

$$D = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$$



No tiene supremo pues no está acotado superiormente

$$\operatorname{Inf}(D) = -\frac{5}{4} = \min(D)$$

↑
Pues si $f(x) = x^2 - x - 1$

$f'(x) = 2x - 1$

$\Rightarrow 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ } Punto crítico en $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \underbrace{- \frac{1}{2}}_{-\frac{2}{4}} \underbrace{- 1}_{-\frac{4}{4}} = -\frac{5}{4}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

sucesión monótona decreciente

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^\circ \text{ elemento}}}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots$$

$$\text{Supremo}(B) = \frac{1}{2} = \max(B)$$

$\text{Ínfimo}(B) = 0 \leftarrow$ <u>no</u> es mínimo pues $0 \notin B$

Demo (Supremo)

- $\frac{1}{2}$ es cota sup pues $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

- $\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B \,/\, \underbrace{\frac{1}{2} - \varepsilon}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{b}_{\in B \subseteq \mathbb{Q}} \leq \frac{1}{2}$ ✓

$\frac{1}{2}$ es máx elemento $\left(\frac{1}{2} \in B\right)$

Demo

$$\frac{1}{2} \in B \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n}$$

y como, dado $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} - \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \text{estricto}}}{<} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b \in B \,/\, \frac{1}{2} - \varepsilon < b \leq \frac{1}{2}$$

Pues b puede ser $\frac{1}{2}$

o $\dfrac{b-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}{2}$

6. Si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, probar:

(a) Si B está acotado superiormente, A también y $\sup A \leq \sup B$.

(b) Si B está acotado inferiormente, A también e $\inf B \leq \inf A$.

(c) Si A no está acotado, B tampoco.

a) $\exists S_B \in \mathbb{R} \,/\, S_B \geqslant b \quad \forall b \in B$

como $A \subseteq B$, qvq

$$\exists S_A \in \mathbb{R} \,/\, S_A \geqslant a \quad \forall a \in A$$

Como $A \subseteq B$, sé que

$$\exists S_B \in \mathbb{R} \,/\, S_B \geqslant b \quad \forall b \in B$$

$$\underset{A \subseteq B}{\Rightarrow} \quad S_B \geqslant a \quad \forall a \in A$$

A esta acotado superiormente por S_B

$\blacksquare$

qvq $\operatorname{Sup} A \leqslant \operatorname{Sup} B$

supongo $\operatorname{Sup} A > \operatorname{Sup} B$

Supremo de A

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, S_A - \varepsilon < a \leqslant S_A$$

Supremo de B

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b \in B \, / \, s_B - \varepsilon < b \leq s_B$$

Como $s_A > s_B$

y como supuse $s_A > s_B$

$$\Rightarrow s_A > s_B$$

Por sabía que $s_B \geq a \quad \forall a \in A$

y $s_B \geq b \quad \forall b \in B$

$$\Rightarrow s_A > s_B > b$$

7. Dados un conjunto de números reales A y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

(a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

a) A está acotado superiormente :

$$\exists s \in \mathbb{R} \,/\, s \geq a \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow -A = -1 . A = \{-a : a \in A\}$$

qvq $\exists i \in \mathbb{R} \,/\, i \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$

sabiendo que

$$\exists s \in \mathbb{R} \,/\, s \geq a \quad \forall a \in A$$

$\cdot (-1)$

$$-s \leq -a \quad \forall a \in A$$

pero $-A = \{(-1) . a : a \in A\}$

$$\underbrace{-s}_{} \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$$

llamo $i = -s$ pues es cota inferior de $-A$

$$\exists i \in \mathbb{R} \,/\, i \leq \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in -A$$

$\blacksquare$

Lo que muestra que

- $-A$ está acotado inferiormente

- $\inf(-A) = -\sup(A)$ (pues $i = -s$)

que es lo que quería.

b) Si $\begin{cases} c > 0 \\ A \text{ acotado superiormente} \end{cases}$

qvq 1) $c \cdot A$ está acotado superiormente

2) $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$

1) $\exists s \in \mathbb{R} \,/\, s \geq a \quad \forall a \in A$ (A acotado sup.) (hipótesis)

$A \subset \mathbb{R}$

$c \cdot A = \{c \cdot a : a \in A\}$

qvq

$\exists \tilde{s} \in \mathbb{R} \,/\, \tilde{s} \geq \tilde{a} \quad \forall \tilde{a} \in c \cdot A$

Comienzo por

$\exists s \in \mathbb{R} \,/\, s \geq a \quad \forall a \in A$

multiplico por $c > 0$

$c \cdot s \geq \underbrace{c \cdot a \quad \forall a \in A}$

$c \cdot s \geq \tilde{a} \quad \forall \tilde{a} \in c \cdot A$ $\boxtimes$

$\therefore$ $c.A$ está acotado

y además, $c.s$ es cota superior de $c.A$

2) Ya sé que $\text{cotaSup}(c.A) = c.\,\text{cotaSup}(A)$ (por 1))

Falta mostrar que se mantiene la segunda condición de supremo para $c.A$:

$\boxed{b}$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ a \in A \ /\ c.s - \varepsilon < c.a \leq c.s$

$c.s = c.\,\text{Sup}(A)$:

$\boxed{b}$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A \ /\ s - \varepsilon < a \leq s$

mult. por $c > 0$

$c.(s-\varepsilon) < c.a \leq c.s$

$c.s - \underbrace{c.\varepsilon} < \tilde{a} \leq c.s \qquad \tilde{a} \in c.A$

$c.s - \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} \leq c.s$

Reformulo

$\forall \tilde{\varepsilon} > 0,\ \exists\, \tilde{a} \in c.A \ /\ cs - \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} \leq cs$

Demostré que: $\blacksquare$

$\sup(c.A) = \underbrace{c.\,\text{Sup}(A)}_{c.s}$