6. Sean (E, d) e (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

(c) Probar que si D es denso en E y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

Definición: D es *denso* en E si $\overline{D} = E$.

a) $X = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$

Pvq es abierto

Sea $x_0 \in X$

$\Rightarrow$ f es continua en x_0

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

y como ésto vale para cada $x_0 \in X$

tengo una bola abierta en X para cada x_0.

Mal!
Re trucho!
No merezco borrarlo

¿Alcanza? ... sospechoso!

De nuevo:

Defino $h(x) = f(x) - g(x)$

es continua pues f, g cont.

$X = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$

$$X = \{ x \in E : h(x) \neq 0 \}$$

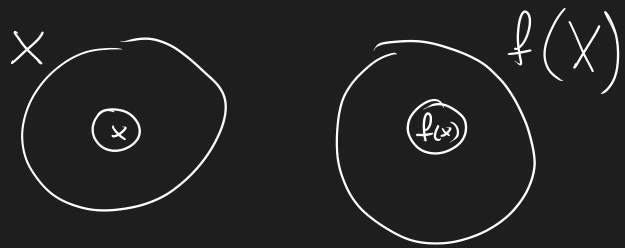
Como h es contínua

Si $x \in X$,

Si $V \subseteq E$ es un abierto / $h(x) \in V$

$\Rightarrow h^{-1}(V)$ es abierto.

$\Rightarrow \exists r$ / si $y \in B(x, r) \Rightarrow y \neq 0$



$\therefore B(x, r) \subseteq X$

Probé que para cada $x \in X$, existe una bola abierta contenida en X ("llena" de elementos en X)

$\therefore X$ es abierto. $\blacksquare$

b) Si X es abierto $\Rightarrow$ X^c es cerrado

$\uparrow$

resulta ser el conj. de b)

c) (c) Probar que si D es denso en E y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

Definición: D es *denso* en E si $\overline{D} = E$.

7. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

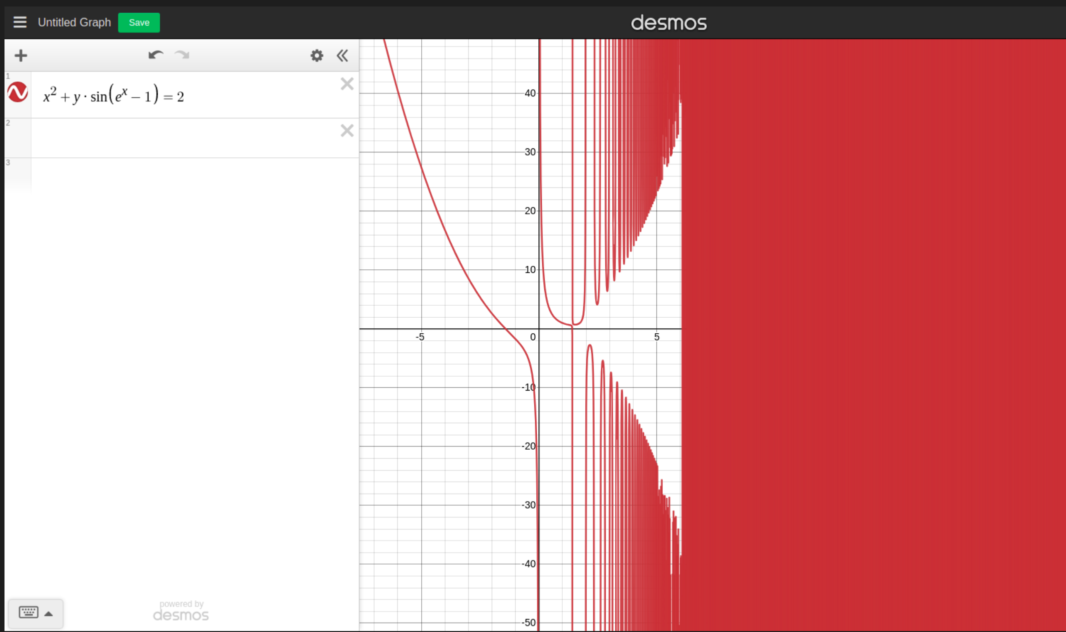
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y\,\mathrm{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x^3 - 3y^4 + z - 2 \le 3\}$ es cerrado.

(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

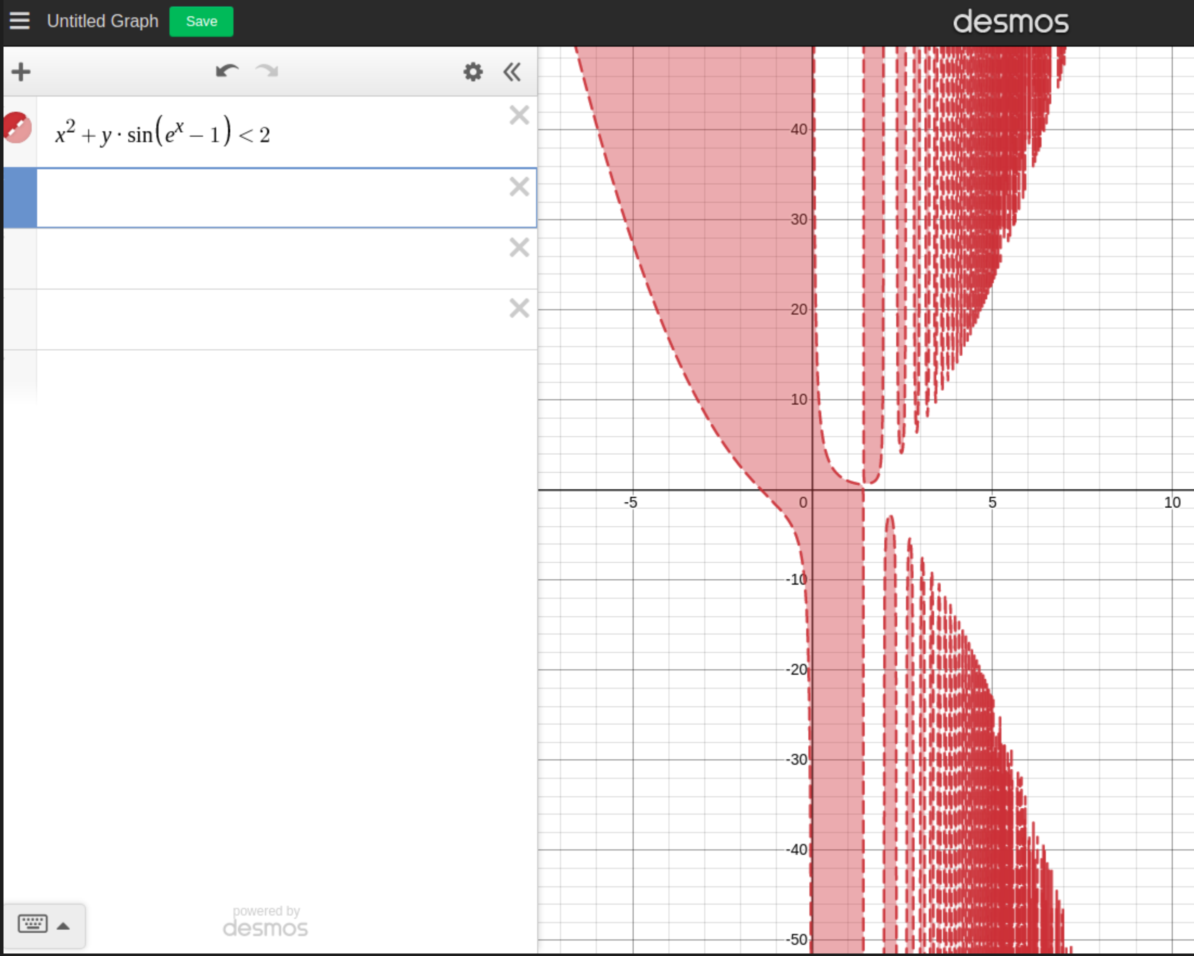
a) Grafico porque 

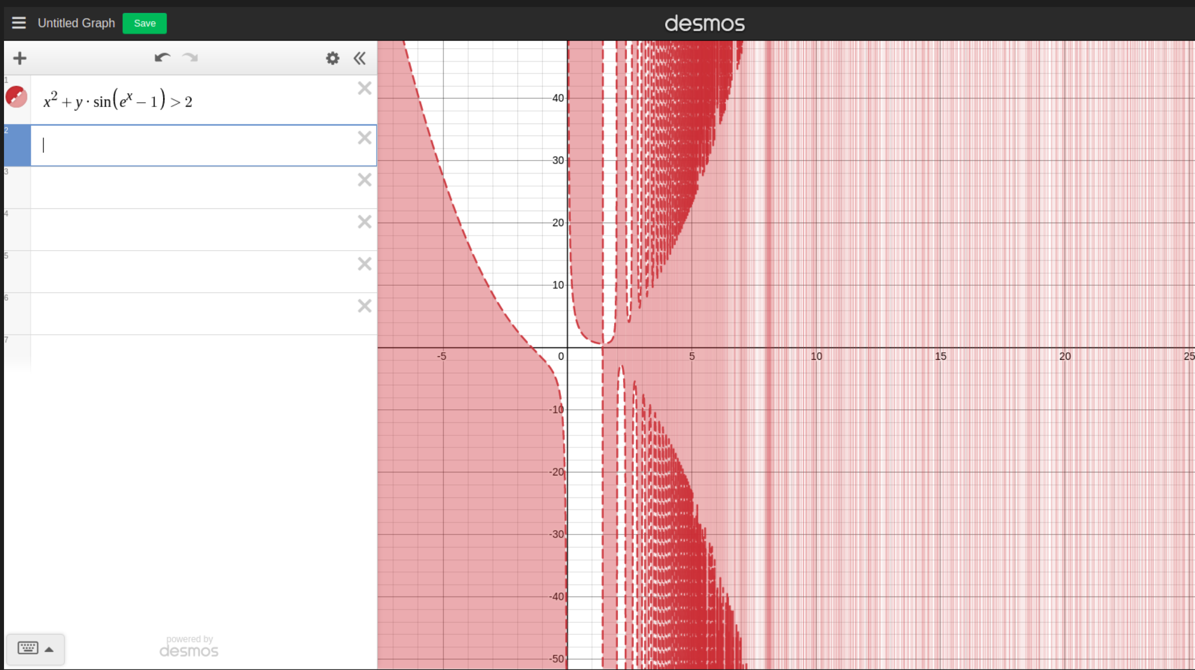


Khe!

Sé que A es cerrado $\iff$ A^c es abierto

Veo $f(x,y) < 2$





Borde punteado $\therefore$ A^c es abierto ... claro u!

Si para cada $(x,y) \in A^c$ puedo meter una bolita abierta contenida en A^c $\Rightarrow$ A^c es abierto

$\Rightarrow$ A es cerrado

Llamo $A_-^c = \{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2 \}$

$A_+^c = \{ (x,y) \in E : x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) > 2 \}$

Pruebo A_-^c abierto

Sea $(x,y) \in A_-^c$

qvq $\overset{?}{\exists} r > 0 \,/\, B((x,y), r) \subseteq A_-^c$

llamo $f(x,y) := x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1)$

Como $f(x,y)$ es continua (pues suma, resta, producto de funciones contínuas en $\mathbb{R}^2$ ... o hay que probarlo?)

$\Rightarrow f(B((x,y), \delta)) \subseteq B(f(x,y), \varepsilon)$

$\Rightarrow$ Si para cada abierto entorno de $f(x,y)$,

tengo una bola abierta centrada en (x,y)

<u>Contenida</u> en $A_-^c \Rightarrow A_-^c$ es abierto

Observación obse:

?

Cuando $f(x,y)$ está "cerca" de 2 en:

$x^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) < 2$

Digo que si:

$$d_2\left(x^2 + y\cdot\sin(e^x-1),\ 2\right) = \varepsilon_0 > 0$$

$$\Rightarrow \exists\, (x,y) \in B(f(x,y),\varepsilon) \overset{?}{\subseteq} A_-^c \ /$$

$$d_2\left(x^2 + y\cdot\sin(e^x-1),\ 2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$$

∴ siempre puedo meter una bola "cerca del borde", pues justamente <u>no</u> hay borde, sino un <u>abierto</u>.

Probé que A_-^c es abierto.

De la misma forma se prueba A_+^c.

y como unión de abiertos es abiert@

$$\Rightarrow A_-^c \cup A_+^c = A^c \text{ es abierto}$$

∴ A es cerrado.

∎


Pruebo que $f(x,y)$ es continua

Acoto norma L2 y obtengo δ en función de ε:

$$\Big|\underbrace{f(x,y)}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{f(a,b)}_{\in\mathbb{R}}\Big| = \left|x^2 + y\cdot\sin(e^x-1) - a^2 - b\cdot\sin(e^a-1)\right|$$

$$= \left| x^2 - a^2 + y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1) \right|$$

$$\leqslant \underbrace{|x^2 - a^2|} + \left| y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1) \right|$$

$$\hookrightarrow |(x+a) \cdot (x-a)| \leqslant \underbrace{|x+a|} \cdot \underbrace{|x-a|}_{<\delta}$$

$$\leqslant |x| + |a|$$

$$\leqslant |a| + \delta + |a|$$

elijo $\delta_1 = 1$

$$= 2|a| + 1$$

$$\leqslant (2|a|+1) \cdot \delta$$

← no es unif. continua pues depende de a

y para el 2° término:

$$\left| y \cdot \sin(e^x - 1) - b \cdot \sin(e^a - 1) \right| \leqslant$$

no me sirve usar desig. Δ

$$|y \cdot \sin(e^x - 1)| + |b \cdot \sin(e^a - 1)|$$

No hacía falta probar cont. Very dificil con estas funciones.

Quedan para hacer

b)

c)

(Se ven similares a $\boxed{a}$)

8. Sean (E, d) e (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E'.

D es denso $\iff \overline{D} = E$

$f : E \to E'$ suryectiva (ie cada $y \in E'$ se corresponde con un $x \in E \,/\, f(x) = y$

Si $\overline{D} = E \Rightarrow \overline{f(D)} \overset{?}{=} E'$

Sé que $f(E) = E'$

pues como f suryectiva

para cada $y \in E'$ tengo $x \in E \,/\, f(x) = y$

$\Rightarrow f(\overline{D}) = E'$

$\Rightarrow f(D) \cup f(D') = E'$

quiero llegar a que $\overline{f(D)} = E'$

puedo aplicar clausura a ambos lados!

$\Rightarrow \overline{f(D) \cup f(D')} = \overline{E'}$

$\underbrace{\overline{f(D)}} \cup \underbrace{\overline{f(D')}} = E'$

$\downarrow$ como f es continua

$f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$ $\quad f(\overline{D'}) \subset \overline{f(D')}$

$f(\overline{D})$

$\Rightarrow \overline{f(D) \cup f(\partial D)} = \overline{E'}$

$\underbrace{\overline{f(D)}} \cup \underbrace{\overline{f(\partial D)}} = E'$

$\downarrow$ como f es continua

$f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$

y como $\partial D \subset \overline{D}$

$\Rightarrow$ Como $f(\bar{D}) \subset \overline{f(D)}$

y $\bar{D} = D \cup D'$

$\Rightarrow f(\bar{D}) = f(D \cup D') \subset \overline{f(D)}$

?

$\Rightarrow f(\partial D) \subset f(\bar{D})$

Faltaría ver que

$\overline{f(\partial D)} \subset \overline{f(D)}$

de nuevo, sé que

$f(\bar{D}) \subset \overline{f(D)}$

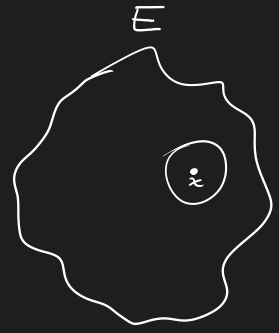
y $\partial D \subset \bar{D}$

$\Rightarrow f(\partial D) \subset f(\bar{D})$

?

9. Sea (E,d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

$\Rightarrow)$ $\forall x \in E$, x es punto aislado



$$\exists r>0 \ / \ B(x,r) = \{x\}$$

Sea $f: E \to E'$

qvq f es continua.

uso que:

como x es pto. aislado

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \ /$

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

pues

$$f(\{x\}) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

$$\underline{f(x)} \subseteq B(f(x),\varepsilon)$$

vale siempre pues es el centro de la bola de radio $\varepsilon>0$

Mostré que si

$\forall x \in E$, x es punto aislado $\Rightarrow$

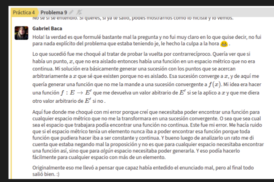
$\Rightarrow$ Toda f definida en $E \to E'$ (arbitrario) será continua.

Falta la vuelta

$(\Leftarrow)$ Si: Toda f definida en $E \to E'$ es continua

qvq todos los $x \in E$ son aislados

(Uso explicación de Gabriel + Dani en Zulip)


Práctica 4 Problema 9

No sé si se entendió. Si querés, si ya te salió, podés mostrarnos cómo lo hiciste y lo vemos.

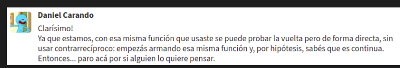
Gabriel Baca

Hola! la verdad es que formulé bastante mal la pregunta y no fui muy claro en lo que quise decir, no fui para nada explícito del problema que estaba teniendo je, le hecho la culpa a la hora 😬.

Lo que sucedió fue me choqué al tratar de probar la vuelta por contrarrecíproco. Quería ver que si había un punto, x, que no era aislado entonces había una función en un espacio métrico que no era continua. Mi solución era básicamente generar una sucesión con los puntos que se acercan arbitrariamente a x que sé que existen porque no es aislado. Esa sucesión converge a x, y de aquí me quería generar una función que no me la mande a una sucesión convergente a $f(x)$. Mi idea era hacer una función $f : E \to E'$ que me devuelva un valor abitrario de E' si se la aplico a x y que me diera otro valor arbitrario de E' si no .

Aquí fue donde me choqué con mi error porque creí que necesitaba poder encontrar una función para cualquier espacio métrico que no me la transformara en una sucesión convergente. O sea que sea cual sea el espacio que trabajara podía encontrar una función no continua. Este fue mi error. Me hacía ruido que si el espacio métrico tenía un elemento nunca iba a poder encontrar esa función porque toda función que pudiera hacer iba a ser constante y continua. Y bueno luego de analizarlo un rato me di cuenta que estaba negando mal la proposición y no es que para cualquier espacio necesitaba encontrar una función así, sino que para *algún* espacio necesitaba poder generarla. Y eso podía hacerlo fácilmente para cualquier espacio con más de un elemento.

Originalmente eso me llevó a pensar que capaz había entedido el enunciado mal, pero al final todo salió bien. :)


Daniel Carando

Clarísimo!
Ya que estamos, con esa misma función que usaste se puede probar la vuelta pero de forma directa, sin usar contrarrecíproco: empezás armando esa misma función y, por hipótesis, sabés que es continua.
Entonces... paro acá por si alguien lo quiere pensar.

Plan:

- Aprovecho que TODA f es continua.
- Para cada punto a, armo una $f_a(x)$ (continua por Hip)
- Supongo que a $\underbrace{\text{no es aislado}}_{\text{es de acumulación}}$, y llego a un absurdo.
- Supongo que $\exists\, x_n \to a$, (pues infinitos x_n en el entorno de a)
  quiero que $f_a(x_n) \to y \neq f_a(a)$
- Muestro que para esta f_a, a es aislado.
- Entonces todos los puntos de E son aislados.

Sea $a \in E$,

aquí estará el absurdo

si a es punto de acumulación,

$\Rightarrow$ $\exists$ infinitos puntos en todo entorno de a

$\Rightarrow$ $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \;/\; x_n \longrightarrow a$

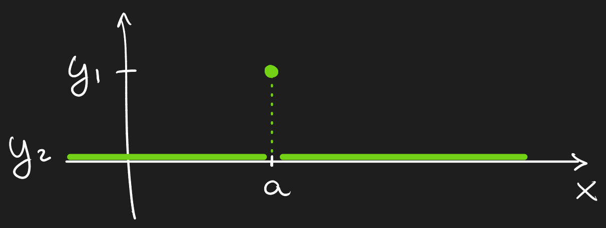
Llamo

$$f_a : E \longrightarrow E' \qquad (\text{contínua por } H_0)$$

$$f_a(x) = \begin{cases} \text{algún elemento } y_1 \in E' & \text{si } x = a \\ \text{algún elemento } y_2 \in E' & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

$$(y_1 \neq y_2)$$

Ilustración (es más general que $\mathbb{R}^2$)



Tengo $x_n \longrightarrow a$

veo que

$$f_a(x_n) = y_2 \quad \text{si } x_n \neq a$$

pero

$$f_a(a) = y_1$$

Absurdo! pues $f_a(x_n) \not\to f_a(a)$

$\therefore$ a es punto aislado.

Como para cada a en E tengo una f_a que muestra un punto aislado en a (pues f_a no puede ser discontinua)

$\Rightarrow$ Todos los $x \in E$ son puntos aislados.

$\boxtimes$

10. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$\mathcal{E}(B(f,\delta)) \overset{?}{\subseteq} B(\underbrace{\mathcal{E}(f)}, \varepsilon)$$

$$B(f(0), \varepsilon)$$

Si $g \in B(f, \delta)$

$\Rightarrow d_\infty(f, g) < \delta$

$\Rightarrow \mathcal{E}(g) = g(0)$

$$d_\infty(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) = d_\infty(f(0), g(0))$$

$$= |f(0) - g(0)|$$

como $\underbrace{d_\infty(f,g)}_{= \sup\{|f(x)-g(x)| \,:\, x \in [0,1]\}} < \delta$

$$|f(0) - g(0)| < \delta < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Para $\mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$\mathcal{I}(B(f,\delta)) \overset{?}{\subseteq} B(\underbrace{\mathcal{I}(f)}, \varepsilon)$$

$$B\left(\int_0^1 f(x)\,dx, \varepsilon\right)$$

Si $g \in B(f, \delta)$

$\Rightarrow d_\infty(f, g) < \delta$

$\Rightarrow \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} < \delta$

Veo

$$d_\infty(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) = d_\infty\left(\int_0^1 \ dx, \int_0^1 \ dx\right)$$

$$\overset{\in \mathbb{R}}{=} \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(y)\,dx \right|$$

$$< \delta < \varepsilon$$

$\boxtimes$

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

Si $g \in B(f, \delta)$

$\Rightarrow d_1(f, g) < \delta$

$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot dx < \delta$

$$d_1(I(f), I(g)) = \int_0^1 |I(f(x)) - I(g(x))| \, dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx \right|}_{\in \mathbb{R}} dx$$

Si lo llamo a

$$= \int_0^1 a \cdot dx$$

$$= a \cdot 1$$

$$= \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx \right|$$

Como sabía que

$\int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot dx < \delta$

$\downarrow$

$< \delta < \varepsilon$

$\boxtimes$

Veamos $\mathcal{E}(f)$

si: $g \in B(f, \delta)$

$\Rightarrow d_1(f, g) < \delta$

$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx < \delta$

Veo:

$$d_1(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) = \int_0^1 |\mathcal{E}(f(x)) - \mathcal{E}(g(x))|\, dx$$

$$= \int_0^1 |f(0) - g(0)|\, dx$$

?

$$\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx < \delta < \varepsilon$$

?

pues sumo términos positivos, entre ellos, el $|f(0) - g(0)|$

Sea $f_0 = f(x) = 0$

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \,/\, f_n(x) \overset{?}{=} \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ ¿? ¿? ¿? ¿?

Con lo que vemos que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0$$

pues

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pero !

$$\mathcal{E}(f_n) = f_n(0) =$$

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.