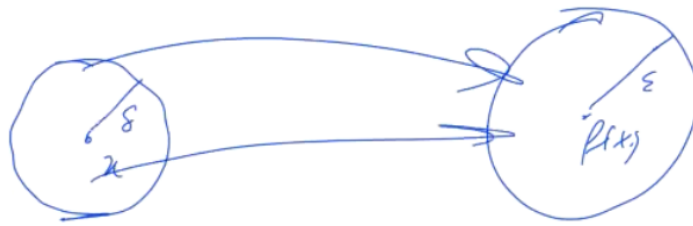


Funciones Continuas

Repaso

Una función $f : E \rightarrow E'$ es continua en un punto $x \in E$ si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.



Importante:

- Entender que

f es cont. en $E \iff f^{-1}(U)$ es abierto
 $\forall U \in E'$ abierto

Observación

Decimos que una función f es continua en E

si:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

- Vemos que δ depende de x y ε

ie: Para cada combinación (x, ε) se corresponde algún δ .

- Puede pasar que un mismo δ sirva $\forall x$.

Definición

Una función $f: E \rightarrow E'$ se dice

uniformemente continua

si:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ /

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

$$\forall x \in E$$

Definición equivalente

Una función $f: E \rightarrow E'$ se dice **uniformemente continua** si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

↑ x e y se mueven independientemente

Obs:

f no es unif. continua

Si

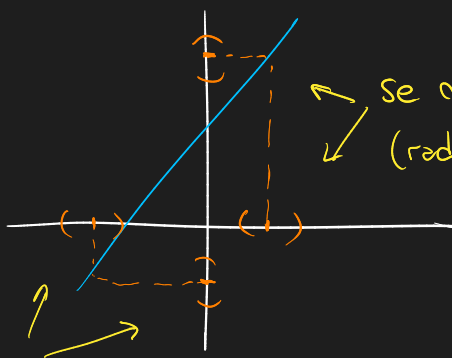
$\exists \varepsilon > 0$ para el cual ningún δ le sirve
a todos los x, y .

(ó son distintos, o no hay δ y no es continua)

Ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 3$$



se mantienen proporciones
(radio de bolitas)

Sea $\varepsilon > 0$

$$d(f(x), f(y)) = |(2x + 3) - (2y + 3)|$$

$$= |2x - 2y|$$

$$= 2|x - y|$$

$$= 2d(x, y)$$

Tomando

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \delta \quad d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

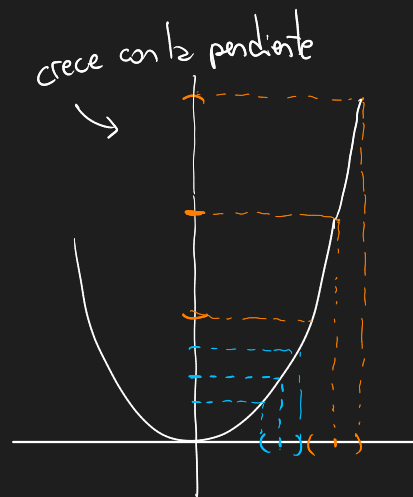
$$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) = 2 \cdot d(x, y)$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

Probamos que un mismo δ vale $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Ejemplo

$$f(x) = x^2$$



Probamos que no es unif. cont.

Armo sucesiones

$$x_n = n$$

$$y_n = n + \frac{1}{n}$$

Vemos que

$$d(x_n, y_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pero

$$d(f(x_n), f(y_n)) = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right|$$

$$= \left| -\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \right|$$

$$= 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$$

¿
Qué significa
este "2"?

Esto contradice la
continuidad uniforme.

para mostrar de

$$d(x_n, y_n) = \frac{1}{n}$$

$$d(f(x_n), f(y_n)) \geq 2 \quad \text{con} \quad f(x) = x^2$$

Proposición

Sea $f : E \rightarrow E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

\Rightarrow) f NO u.c.: $\exists \varepsilon_0$ / ningún δ sirve.

Si $\delta = 1/n \Rightarrow \exists x_n, y_n \in E$ / $d(x_n, y_n) < 1/n$
pero $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

\Leftarrow) Sup. que f es u.c.

\Rightarrow dado el ε_0 , $\exists \delta > 0$ /

$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$

$\exists n_0$ / $d(x_n, y_n) < \delta \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0$

Ejemplo

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{CONT} \Rightarrow$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{\downarrow}$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_{E'}$

INT CERRA Y ACOTADO

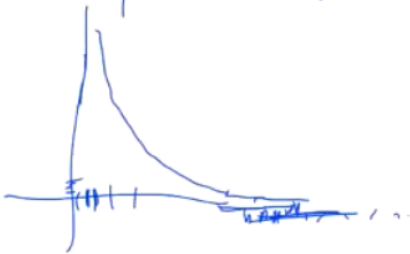
f U.C.

LO VEREMOS \rightarrow SE USAN: LA PROP ANTERIOR

- TODA SUC. ACOT
TIENE SUBSUC. CONV.
SAZE X ABS.

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 1/x$$



1er INTENTO: $x_n = \frac{1}{n}$ $y_n = \frac{1}{n+1}$

$$d(x_n, y_n) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{n+1-n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0$$

$$d'(f(x_n), f(y_n)) = \left| \frac{1}{1/n} - \frac{1}{1/(n+1)} \right| = |n - (n+1)| = 1$$

- TODA SUC. ACOT
TIENE SUBSUC.
SAZE X ABS.

Teorema

Sea $f: E \rightarrow E'$. Si existe $C \geq 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y),$$

entonces f es uniformemente continua.

f es LIPSCHITZ
CON CONSTANTE
 C .

$\forall x, y$

DEM: Dado $\varepsilon > 0$, [Buscamos $\delta > 0$ / $d(x, y) < \delta$
 $\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$]

$$d'(f(x), f(y)) \leq \underbrace{c \cdot d(x, y)}_{< \delta} < c \cdot \varepsilon / c = \varepsilon.$$

Tomamos $\delta = \varepsilon / c$

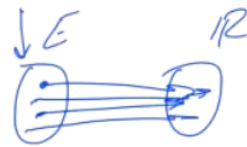
SOLO DEPENDE
DE ε .

Ejemplo

Consideremos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ .

Sea $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_0^1 x(t) dt.$$



$$d'(F(x), F(y)) = \left| \int_0^1 x(t) dt - \int_0^1 y(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 x(t) - y(t) dt \right| \leq \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

$$\leq \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$$

$$= d_\infty(x, y)$$

$$\leq \int_0^1 d_\infty(x, y) dt =$$

$$= 1 \cdot d_\infty(x, y)$$

F ES LIPSCHITZ

CON CTE 1.

\Rightarrow U.C.

Ejemplo

Consideremos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ .

Sea $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$F(x) = (x(0), x(1/2), x(1)).$$

$$\underline{C[0,1]} \rightarrow \underline{\mathbb{R}^3}$$

$$[x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}]$$

EXERCICIO : VER QUE ES LIPSCHITZ

$$d(a, b) = |a - b|$$
$$d'(F(x), F(y)) = (|x(0) - y(0)|, |x(\frac{1}{2}) - y(\frac{1}{2})|, |x(1) - y(1)|)$$

quiero llegar a

$$d_\infty(x(t), y(t)) = \sup \{ |x(t) - y(t)| : t \in [0, 1] \}$$

$$= (|x(0) - y(0)|, |x(\frac{1}{2}) - y(\frac{1}{2})|, |x(1) - y(1)|)$$

$\wedge \quad \quad \quad \wedge \quad \quad \quad \wedge$

$$\leq (d_\infty(x, y), d_\infty(x, y), d_\infty(x, y))$$

$$\leq (1, 1, 1) \cdot d_\infty(x, y)$$

es Lipschitz con constante $C = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Definición

- Una función $f : E \rightarrow E'$ se llama **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen **homeomorfos** si existe un homeomorfismo $f : E \rightarrow E'$.

Observación

Si E y E' son espacios métricos homeomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de E y E'

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow E' \text{ HOMEOMORFISMO.} \\ \underline{V \subset E'} \text{ abr} &\Rightarrow f^{-1}(V) \text{ es abr.} \\ &\quad \hookrightarrow f \text{ cont.} \\ \underline{U \subset E}, \quad f(U) &= \underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{\text{cont}}(U) \text{ es abr.} \\ \text{PENSAR} \quad \text{abr. de } E &\xrightarrow{\quad} \text{abr. de } E' \\ U &\xrightarrow{\quad} f(U) \quad \text{biyectivo} \end{aligned}$$

- Biyección entre abiertos de un conjunto con los abiertos del otro.
- Biyección entre sucesiones convergentes
- ✗ Cauchy NO

Observación

Dada f biyectiva, ¿es posible que f sea continua pero que su inversa no lo sea?

$$f_r: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$



Si

$$f: (12, 8) \rightarrow (12, 1.1)$$

$$f(x) = x.$$

ES ONT PERO f^{-1} NO
(EJERCICIO).

Definición

Si $f : E \rightarrow E'$ satisface $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una **isometría**.

es Lipschitz de constante 1

Observación

Toda isometría es uniformemente continua.

Si $f : E \rightarrow E'$ es una isometría biyectiva, entonces tanto f^{-1} también es una isometría (y por lo tanto es uniformemente continua).

$$\begin{aligned}
 v, w \in E' \quad & d(\underbrace{f^{-1}(v)}, \underbrace{f^{-1}(w)}) = \\
 & \stackrel{\downarrow}{=} d'(f(\underbrace{f^{-1}(v)}), f(\underbrace{f^{-1}(w)})) = \\
 & \quad \underline{f \text{ isom}} \quad \quad \quad = \underbrace{d'(v, w)}
 \end{aligned}$$

$\circ \circ f^{-1}$ es isometría.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\overline{D} = E$.

EJEMPLOS: \mathbb{Q} denso en \mathbb{R} .

(a, b) denso en $E = [a, b]$

$(a, b) \cap \mathbb{Q}$ denso en $[a, b]$

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\bar{D} = E$.

Observación. ES GUÍA : $f, g: E \rightarrow F$ CONT.,
 $D \subset E$ DENSO. Si $f|_D = g|_D \Rightarrow f(x) = g(x)$
 $\forall x \in E$

• VALE E métrico, D denso en E .

$f_0: D \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont. $\Rightarrow \exists f: E \rightarrow \mathbb{R}$
unif. cont / $f|_D = f_0$ [f_0 SE EXTIENDE
A UNA FUNC. U.C. EN E]

EXERCICIO: Si $f_0: D \rightarrow \mathbb{R}$ ES CONT
PERO NO U.C. NO tiene por qué extenderse
a una f CONTINUA

