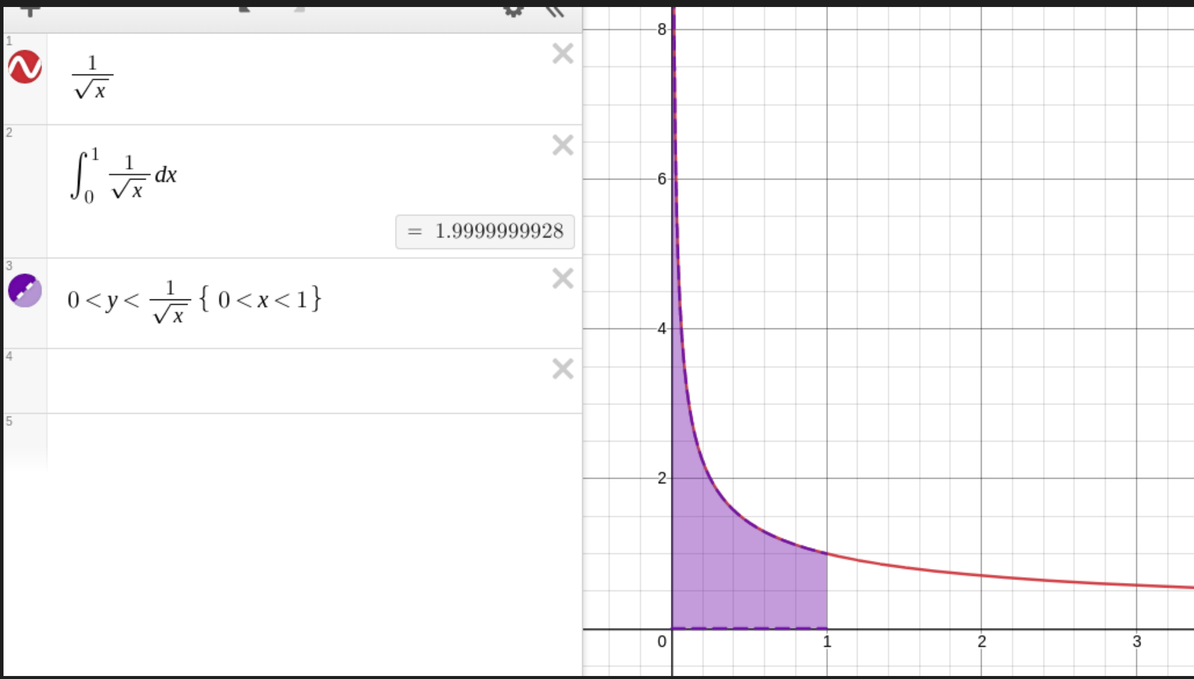
En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

7. Probar que todo conjunto acotado de $\mathcal{M}$ tiene medida finita. Mostrar un conjunto de $\mathcal{M}$ que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.

Uso que puedo cubrir cualquier conjunto acotado con un intervalo abierto, pues todos los abiertos están en M, y como este abierto tiene medida finita, cualquier subconjunto de este abierto tendrá medida finita menor o igual a la del abierto que lo cubre.



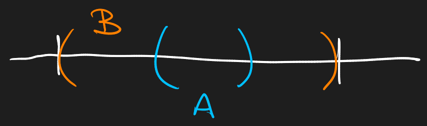
No me sirve :(

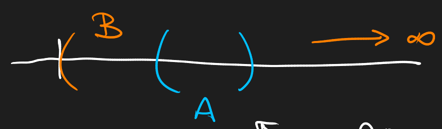
- $\mu((0, +\infty) \cap \mathbb{Q}) = 0$

- $\mu([-4, 0] \cup ((0, +\infty) \cap \mathbb{Q})) = 4$

8. (a) Si $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$ y $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
(b) Si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

a)





← no necesariamente acotado

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \underbrace{\mu(A \cup B)}$$

Como $A \subseteq B$
$\Rightarrow A \cup B = B$

$$\mu(B \setminus A) + \mu(A) = \mu(B)$$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad \checkmark$$

b) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) =$

$$= \mu(A \setminus B) + \mu(B) + \mu(A \cap B)$$

$A \setminus B \cap (A \cap B) = \phi$
$\Rightarrow = \mu(A)$

$$= \mu(A) + \mu(B)$$

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda\mu(A)$.

$\lambda . A \overset{?}{\in} \mathcal{M}$ (lo prueba Nico con $\lambda + A$)

<u>Dem</u> :

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \lambda . x$

Como $\lambda > 0$

f es biyectiva

con $f^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \cdot y$

$\Rightarrow$ $f(\mathcal{M}) = \{ f(A) : A \in \mathcal{M} \}$

ej 2

$\overset{f^{-1}}{=} \{ f^{-1}(f(A)) :$

? Preguntar

es una σ-algebra .

que

$f(\mathcal{M}) \overset{?}{=} \mathcal{M}$

- $A \in \mathcal{M}$ es nulo $\iff f(A)$ es nulo

  $\iff f^{-1}(A)$ es nulo

  "f <u>no</u> cambia los nulos"

- $A \in \mathcal{M}$ es intervalo abierto $\iff f(A)$ es intervalo abierto

  $\iff f^{-1}(A)$ es intervalo abierto

  "f <u>no</u> cambia los intervalos abiertos"

Entonces

$$A = f\Big(\underbrace{f^{-1}(\underset{\in \mathcal{M}}{A})}_{\text{nulo o intervalo abierto}}\Big) \in f(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\supseteq) \quad \mathcal{M} \subseteq f^{-1}(\mathcal{M}) \qquad \begin{cases} f(x) = \lambda \cdot x \\ f^{-1}(x) = \overset{>0}{\dfrac{1}{\lambda}} \cdot x \end{cases}$$

$$\underset{\text{aplico } f}{\Rightarrow} \quad f(\mathcal{M}) \subseteq f\big(f^{-1}(\mathcal{M})\big) = \mathcal{M}$$

$$f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$$

y como

$$\mathcal{M} \subseteq f(\mathcal{M})$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M} = f(\mathcal{M})$$

$\boxtimes$

$$\mu(\lambda A) = \lambda\mu(A).$$

Veamos que cumple

Teorema (existencia de la *medida de Lebesgue*)

Existe una única función μ de $\mathcal{M}$ en $[0, +\infty]$ tal que

$\boxed{1}$ • Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.

$\boxed{2}$ • Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$ "σ - aditividad"

uniones e intersecciones numerables

$\boxed{3}$ • Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

Importante! → $$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ abierto}\}.$$ "Regularidad"

$\boxed{1}$ Si $A = (a, b)$

$$\Rightarrow \lambda A = (\lambda a, \lambda b)$$

$$\Rightarrow \mu(\lambda A) = \mu((\lambda a, \lambda b))$$

$$= \lambda b - \lambda a$$

$$= \lambda(b - a)$$

$$= \lambda \cdot \mu((a, b)) \quad \checkmark$$

$\boxed{2}$

$$\lambda.\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \overset{?}{=} \mu\left(\lambda.\bigcup_n A_n\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_n \lambda.A_n\right)$$

intervalos ?

$$\leq \sum_n \mu(\lambda.A_n)$$

?

$$= \lambda.\sum_n \mu(A_n)$$

$$\mu\left(\lambda.\bigcup_n A_n\right) \leq \lambda.\sum_n \mu(A_n)$$

$\boxed{3}$ $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ abierto}\}$

q v q

$$\lambda.\mu(A) \overset{?}{=} \mu(\lambda A) = \inf\{\mu(U) : (\lambda A) \subset U \text{ abierto}\}$$

?

6

10. Probar que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{M}$

Por regularidad de A

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(G) : A \subseteq G \text{ abierto} \}$$

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(F) : A \supseteq F \text{ cerrado} \}$$

Sean

- G algún conjunto abierto / $A \subseteq G$
- F algún conjunto cerrado / $F \subseteq A$

sé que existen pues A es acotado

falta ver que existan F y G que cumplan

- $\mu(G \setminus F) \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Como $F \subseteq G$:

$$\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F)$$

si tomo ínfimo de los G
y supremo de los F
(sé que existen pues A acotado)

$$= \mu(A) - \mu(A)$$

$$= 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Probé $\Rightarrow$) ✓

$\Leftarrow$) Como $F \subseteq G$:

$$\mu(G \setminus F) = \underbrace{\mu(G)}_{\geq 0} - \underbrace{\mu(F)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\mu(G) \geq \mu(F)$$

y además como

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \mu(G) - \mu(F) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(G) = \mu(F)$$

y como

$$F \subseteq A \subseteq G$$

sospechoso!

no sé si A es medible todavía !

$$\Rightarrow \quad \mu(F) \geq \mu(A) \geq \mu(G)$$

$$\overset{\mu(G)=\mu(F)}{\Rightarrow} \quad \mu(F) = \mu(A) = \mu(G)$$

Me gustaría llegar a que A es acotado y medible.

Tal vez solo llegando a que es medible puedo encontrar un caso NO-acotado donde
NO existen F y G (que existan supremo e infimos en el límite, pero no existan tales conjuntos).

Pero me faltaría llegar a que A es medible, y no estoy seguro de cómo probar eso en este caso.

11. Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?

Si $\mu(A) = 0$

$\Rightarrow$ A es nula

$\Rightarrow$ $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon$

Los puntos de A° son aquellos que:

si $a \in A^\circ \Rightarrow \exists \alpha > 0 \,/\, B(a, \alpha) \subset A^\circ$

pero para cada α que se me ocurra, siempre habrá un $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ /

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{long}(X_i) < \varepsilon < \alpha$$

$\therefore \nexists \alpha > 0 \,/\, B(a, \alpha) \subset A^\circ \quad \forall a \in A^\circ$

$\therefore A^\circ = \phi$

$\blacksquare$

- Si $A^\circ = \phi \Rightarrow \mu(A) \overset{?}{=} 0$?

Si $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{A} = \phi$

$\mathbb{Q}$ numerable $\Rightarrow$ es nulo $\Rightarrow$ es medible $\wedge\ \mu(\mathbb{Q}) = 0$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}^c$ es medible $(\in \mathcal{M})$

Además $[0,1]$ es medible (lo probamos al ppio en ejercicio 5).

$\Rightarrow A$ es medible ($\cap$ de 2 medibles).

⋮

$\mu([0,1]) = 1$ ✓

$[0,1] = \underbrace{[0,1] \cap \mathbb{Q}}_{\subseteq \mathbb{Q}} \overset{d}{\cup} [0,1] \cap \mathbb{Q}^c$

$\mathbb{Q}$ nulo $\Rightarrow [0,1] \cap \mathbb{Q}$ nulo

$\Rightarrow \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$

$1 = \mu([0,1]) = \underbrace{\mu([0,1] \cap \mathbb{Q})}_{=0} + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$

$\Rightarrow 1 = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}^c)$

$1 = \mu(A)$

Rta: No

12. Sea $A \subseteq [0,1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0,1]$.

Acá la idea es usar que la medida de A no es cero, o sea, A no es un conjunto nulo, y por lo tanto, no cumple al menos alguna de las condiciones de conjunto nulo.

Recordemos (yo me había olvidado) que un conjunto A es denso $\iff A = \overline{A}$ ← clausura

$A = \overline{A}$ vale si

$\forall a \in A, \forall r > 0 \; /$

$$A \cap B(\underset{\uparrow \text{ centro de la bola}}{a}, r) \neq \emptyset$$

$\underbrace{b \in A \cap B(a,r)}$

$\{a, b\} \subseteq A \cap B(a,r)$

centro de la bola ↑ ↑ otro elemento

Conjunto nulo

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists (U_j)_{j \in J}$ ← de intervalos $/$

$$\underbrace{A \subseteq \bigcup_j U_j}_{\text{numerables intervalos que cubren } A} \wedge \underbrace{\sum_j \operatorname{long}(U_j) < \varepsilon}_{\text{con suma de longitudes menor a cualquier } \varepsilon}$$

Como $\mu(A) = 1$

$$\Rightarrow \sum_j \text{long}(U_j) = \underbrace{\sum_j \mu(U_j) \geq 1}_{\text{intervalos de medida } 0 \text{ ó } \leq 1}$$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \subseteq A \text{ abierto}\}$$

Como

$$A \subseteq \bigcup_j U_j$$

y ?

$$A \cap B(a,r) \neq \emptyset \qquad [(\,,\,) \qquad]$$

$\uparrow$

centro de la bola

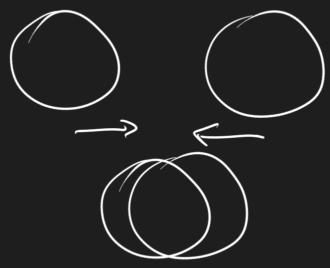
$$\Rightarrow A^c \cap B(a,r) =$$

Como $\mu(A) = 1$ y $A \subseteq [0,1]$

$$\Rightarrow \mu(A^c) = 0 \Rightarrow (A^c)^\circ = \emptyset$$

13. Sea $\mathcal{M}(I)$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles en $I = [0,1]$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$ y $B \in \mathcal{M}(I)$ tales que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

¿Cuáles quedan fuera de $\mathcal{P}([0,1]) \setminus \mathcal{M}(I)$?



$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$$

$$A_n \triangle B = (A_n \cup B) \setminus (A_n \cap B)$$
$$= (A_n \setminus B) \cup (B \setminus A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus B) + \mu(B \setminus A_n) = 0$$

disjunto

$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\big(A_n \setminus (A_n \cap B)\big)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu\big(B \setminus (A_n \cap B)\big)}_{\geq 0} = 0$$

pues $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$

(Suma de sucesiones convergentes converge)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \overbrace{\mu(A_n) - \mu(A_n \cap B)}^{\text{disjuntos}} = 0 & \text{(I)} \\ \lim_{n\to\infty} \mu(B) - \mu(A_n \cap B) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap B) \overset{(\star)}{=} \mu(B)$$

pues B no depende de n

(I.) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A_n \cap B) = 0$

(☆) $= \lim \mu(A_n) - \mu(B) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

$\blacksquare$