

Práctica 9

En lo que sigue \mathcal{M} será la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de \mathbb{R} y μ la medida de Lebesgue.

1. Probar que dada una σ -álgebra \mathcal{A} de subconjuntos de X y dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

→ (b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Concluir que si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los ítems de arriba.

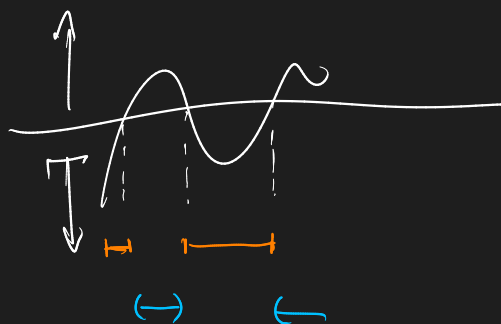
$a \Rightarrow b$) Como

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$$

y además

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > a\}$$

!!
..
 \mathcal{B}



!!
..
 \mathcal{A}

$$\underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{\mathcal{B} \in \mathcal{A} ?} = \underbrace{X}_{X \in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{A \in \mathcal{A}}$$

Como $A^c \in \mathcal{B}$

$$\text{y } A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{A} \quad \checkmark$$

$$b \Rightarrow d) \quad B = \{x \in X : f(x) \leq a\}$$

$$D = \{x \in X : f(x) < a\}$$

$$f(x) < a \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad / \quad f(x) \leq a - \frac{1}{n}$$

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}}_{\substack{\in \mathcal{A} \quad \text{pues} \\ \text{vale } B \text{ por } 7b}}$$

Como A es σ -álgebra cerrado por unión numerable

\Rightarrow vale que $D \in A$ ✓

Tengo



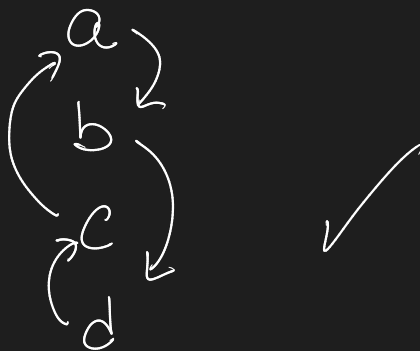
$d \Rightarrow c$) mismo que $a \Rightarrow b$ pues

$$D^c = C \quad \checkmark$$

Falta $c \Rightarrow a$)

Sale igual que $b \Rightarrow d$ ✓

Pro b é



$\therefore a, b, c, d$ son equivalentes

Si $A = M \Rightarrow$ si vale a, b, c , ó d
 f es medible

y si no vale alguno

$\Rightarrow f \notin M$ pues no
vale ninguno de los
 a, b, c, d equivalentes.

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff E \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

(c) $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$.

a) $\chi_E(x)$ es medible $\iff E \in \mathcal{M}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \subseteq \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x \notin E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

\Rightarrow) Si $\chi_E(x)$ es medible

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\}$$

si elijo

$a=0$

\Rightarrow

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > 0\}$$

def de χ_E

$$\downarrow = E$$

\uparrow
es medible

$\underbrace{\hspace{10em}}$
es medible

$\therefore E$ es medible. \checkmark

\Leftarrow) No sé si χ_E es medible
pero E sí lo es

Defino

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = ?$$

• Si $a < 0$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) \geq 0$$

sucede para todo $x \in \mathbb{R}$ pues

$$\chi_E(x) \in \{0, 1\}$$

• Si $a \in [0, 1)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 0$$

$$\equiv \chi_E(x) = 1$$

• Si $a \in [1, +\infty)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 1$$

nunca sucede

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Come $R \in M_I$

$$E \in \mathcal{M} \quad (\text{por } \mathcal{H}),$$
$$\varphi \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a \right\} \in \mathcal{M}$$

$$\chi_E(x) \text{ est mesurable.}$$


Prod.

(b) $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

$$\begin{array}{l} \chi_E = \text{diagram with 1 top vertex and 4 bottom vertices} \\ \chi_F = \text{diagram with 4 top vertices and 1 bottom vertex} \end{array}$$

"Compuerto lógica AND"

$$\chi_{E \cap F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \cap F \\ 0 & \text{if } x \notin E \cap F \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \chi_E(x) = 1 & \Leftrightarrow x \in E \\ \chi_E(x) = 0 & \Leftrightarrow x \notin E \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} \chi_F(x) = 1 & \Leftrightarrow x \in F \\ \chi_F(x) = 0 & \Leftrightarrow x \notin F \end{cases}$$

χ_E	χ_F	$\chi_{E \cap F}$	$\chi_E \cdot \chi_F$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Como sus valores son iguales
en todos los casos

$$\Rightarrow \chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F.$$

□

(c) $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$.

"OR"

χ_E	χ_F	$\chi_{E \cap F}$	$\chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$	$\chi_{E \cup F}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	$2 - 1 = 1$	1

↖ ↗
Gleiches



3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona. Probar que f es medible.

Pruebas monótona creciente:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x > x_0$$

Entonces

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$$

Si llamamos

$$a := f(x_0)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(a)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq f^{-1}(a)\}$$

$$= [f^{-1}(a), +\infty) \quad \text{que es cerrado } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore [f^{-1}(a), +\infty) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow es medible. \square

f medible $\Leftrightarrow \{x: f(x) \geq a\}$ es medible $\forall a$.

Sug: monótona creciente $\Rightarrow \{x: f(x) \geq a\}$ es un intervalo.

$\{x: f(x) \geq a\} \ni x_0 \Rightarrow a \leq f(x_0)$
 \Rightarrow cualquier $y \geq x_0 \Rightarrow f(y) \geq f(x_0) \geq a$
 $\Rightarrow [x_0, +\infty) \subseteq \{x: f(x) \geq a\}$ si $x_0 \in$.
 si $\{x: f(x) \geq a\}$ es acotado $\sup f \geq a$ por lo tanto $\sup f$.

$\exists \alpha = \inf \{x: f(x) \geq a\}$
 si $\alpha \notin \{x: f(x) \geq a\} \Rightarrow \{x: f(x) \geq a\} = (\alpha, +\infty)$
 tomamos $(x_n)_n \in \{x: f(x) \geq a\} / x_n \searrow \alpha$.
 $(\alpha, +\infty) = \bigcup_n [x_n, +\infty)$ ~~iff~~

Falta no está en \mathbb{R}
 \Rightarrow es todo \mathbb{R}

4. Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si f es medible

$\Rightarrow A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible
y

$B := \{x \in X : f(x) < a\}$ es medible

$\Rightarrow A \setminus B \equiv A \cap B^c$
 \uparrow operaciones de σ -álgebra

$\Rightarrow A \setminus B$ es medible

con $A \setminus B = \{x \in X : f(x) = a\}$

□

5. Probar que si f y g son medibles entonces $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.

f es medible

$A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible

g es medible

$B := \{x \in X : a \leq g(x)\}$ es medible

\Rightarrow vale la intersección (para un mismo a)

$$A \cap B = \bigcup_a \{x \in X : f(x) \leq a \leq g(x)\}$$

Pregunta

$$\therefore \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \text{ es medible.}$$

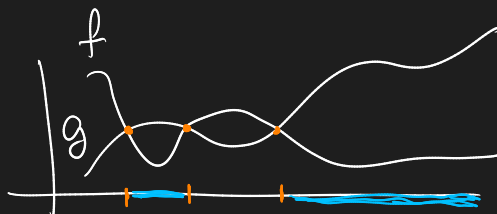


No puedo hacer esto pues cuando quiera unir sobre todos los a en \mathbb{R} , ésta unión será de NO NUMERABLES

elementos, por lo que no vale que es medible por ser unión de medibles.

De nuevo :

Escribo :



$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \cup \{x \in X : f(x) < g(x)\}$$

y además

$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}^c = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

$$= \{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

o
o o

$$X = \underbrace{\{ x \in X : f(x) < g(x) \} \cup \{ x \in X : f(x) = g(x) \}}_{\text{Complemento de}} \overset{d}{\cup} \underbrace{\{ x \in X : f(x) > g(x) \}}_{\text{es medible?}}$$

Tengo

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

y como $f(x) > g(x)$ con $f(x), g(x) \in X \subseteq \mathbb{R}$

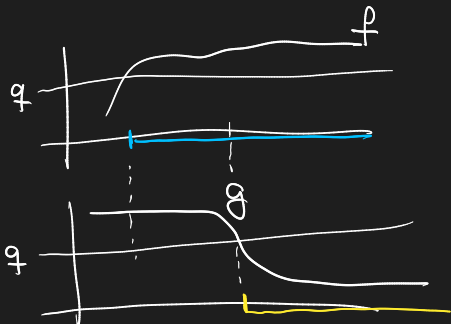
$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} / f(x) > q > g(x) \text{ para cada } x$$

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \} = \bigcup_q \{ x \in X : f(x) > q > g(x) \}$$

↖ es una unión numerable!

Separo

$$\{ x \in X : f(x) > q > g(x) \} = \underbrace{\{ x \in X : f(x) > q \}}_{\text{es medible por } f \text{ medible}} \cap \underbrace{\{ x \in X : q > g(x) \}}_{\text{es medible por } g \text{ medible}}$$



es medible
por f medible

es medible
por g medible

entonces

$\{x \in X : f(x) > q > g(x)\}$ es medible

\Rightarrow unión numerable de \uparrow es medible

$\Rightarrow \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ es medible

\Rightarrow su complemento es medible

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}^c = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

□

6. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Probar que:

(a) Si f es continua en $[0, 1]$, entonces es medible.

(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0, 1]$ entonces es medible.

a) Como f es continua

$f^{-1}((-\infty, a])$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$ en $[0, 1]$

pues $(-\infty, a]$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$

? $f^{-1}((-\infty, a]) \subseteq [0, 1]$

q.v.q

$$f \text{ es medible} \equiv \left\{ x \in [0, 1] : f(x) < a \right\} \forall a \in \mathbb{R} \text{ es medible}$$

veo que para cada cerrado de esta forma

$$f^{-1}((-\infty, a]) = [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$$

(I)

↑ obtengo un intervalo cerrado,

que es medible por ser

complemento de abierto en \mathcal{M}

y además

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty, a]) &= \left\{ x \in X : f(x) \in (-\infty, a] \right\} \forall a \in \mathbb{R} \\ &= \left\{ x \in X : f(x) < a \right\} \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

por \textcircled{I} es un intervalo cerrado
 \therefore es medible.

\square

b) Me gustaría saber un conjunto nulo y admirar que sigue siendo medible.

?

7. Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:

(a) $f + g$ es medible.

(b) f^2 es medible.

(c) $f \cdot g$ es medible.

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a \quad \forall a \in \mathbb{R}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a \quad \forall a \in \mathbb{R}\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : h(x) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}\}$$

Llamo

$$h(x) := f(x) + g(x)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{med}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{medible}} \Rightarrow h(x) \text{ es medible}$

ej 4. Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

\downarrow

$\Rightarrow \{x \in X : h(x) = a\} \text{ es medible}$

8. Dada una sucesión $(f_n)_n$ de funciones en $[0, 1]$, consideremos las funciones

$$S(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{y} \quad I(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

límite de medibles es medible? lo probamos en alguna teórica?

9. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[0, 1]$ tales que convergen en casi todo punto a una función f . Probar que f es medible.

