

## Práctica 7

1. Sea  $Y$  un espacio métrico y sea  $A$  un conjunto. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : A \rightarrow Y$ . Entonces  $(f_n)_{n \geq 1}$  no converge uniformemente a  $f : A \rightarrow Y$  si y sólo si existen  $\alpha > 0$ , una subsucesión  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  de  $(f_n)_{n \geq 1}$  y una sucesión  $(a_k)_{k \geq 1}$  en  $A$  tales que  $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

en func. cont. 2 vimos:

**Proposición**

Sea  $f : E \rightarrow E'$ . Entonces,  $f$  NO es uniformemente continua si y sólo si existen  $\varepsilon_0 > 0$  y sucesiones  $(x_n)_n$  y  $(y_n)_n$  tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

$\Rightarrow$   $f$  NO U.C.:  $\exists \varepsilon_0$  ningún  $\delta$  sirve.

Si:  $\delta = 1/n \Rightarrow \exists x_n, y_n \in E / d(x_n, y_n) < 1/n$   
 pero  $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

$\Leftarrow$  Sup. que  $f$  es U.C.

$\Rightarrow$  dado el  $\varepsilon_0$ ,  $\exists \delta > 0$   
 $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ . Como  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$   
 $\exists n_0 / d(x_n, y_n) < \delta \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0$

Análisis Avanzado D. Carando - V. Paternostro 8 / 20 DM-FCEN-UBA

y es lo tenemos

$(f_n)_n$  no converge uniformemente a  $f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  existen:

$$\alpha > 0,$$

$$(f_{n_k})_k \subseteq (f_n)_n$$

y

$$(a_k)_k \subseteq A$$

tales que



2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones  $(f_n)_{n \geq 1}$ :

(a)  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ , definida en  $\mathbb{R}$ ;

(b)  $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ , definida en  $\mathbb{R}$ ;

(c)  $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ , definida en  $\mathbb{R}^2$  con valores en  $\mathbb{R}^2$ .

a) Convergencia Puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)}_{\leq 1} = 0 \quad \swarrow \text{no depende de } x$$

Converge puntualmente a  $f(x) \equiv 0$

Convergencia uniforme

$$\begin{aligned} d'(f_n(x), f(x)) &= |f_n(x) - 0| \\ &= \left| \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \right| \\ &= \frac{1}{n} \cdot \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1} \\ &= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$d'(f_n(x), f(x)) = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\text{Si dado } \varepsilon > 0, \text{ tomo } n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

(b)  $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ , definida en  $\mathbb{R}$ ;

CP:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin 0 = 0 \quad \checkmark$$

$\underbrace{\quad}_{=: f}$

C. Unit,

$$|f_n - 0| = \left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n} \right|$$

← depende de  $x$ !  
da la idea de que  
 $f_n \not\rightarrow f$

Uso ej 1:

Busco  $(x_k)_k$  /

$$d'(f_{n_k}(x_k)_k, \underbrace{f}_{=0}(x_k)) \geq \alpha$$

Si elijo  $x_k = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

y  $k = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left( \sin \frac{x_k}{n} - 0 \right)_k = \left( \sin \frac{x_n}{n} - 0 \right)_n$$

$$\stackrel{x_n=n}{=} \left( \sin \frac{n}{n} \right)_n$$

$$= (\sin 1)_n \geq \sin 1 =: \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

?

Preguntar  
Proced.

$$\therefore f_n \not\rightarrow f$$

(c)  $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ , definida en  $\mathbb{R}^2$  con valores en  $\mathbb{R}^2$ .

CPunt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} (x, y) = (x, y) \quad \checkmark$$

$\uparrow$   
identidad

$$\begin{aligned} d' \left( \frac{n}{n+1} (x, y), (x, y) \right) &= \left\| \frac{n}{n+1} (x, y) - (x, y) \right\| \\ &= \left\| (x, y) \cdot \underbrace{\left( \frac{n}{n+1} - 1 \right)}_{\frac{n - n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \rightarrow 0} \right\| \end{aligned}$$

$\nearrow$   
depende de  
 $(x, y)$ ! no puede converger unif.

Dem:

$$f_{n_k} := f_n$$

$$(x, y)_k = (n, n)$$

$$d' \left( f_{n_k}((x, y)_k), f((x, y)_k) \right) =$$



3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  de funciones reales definidas sobre  $A \subseteq \mathbb{R}$  en cada uno de los siguientes casos:

- i.  $f_n(x) = x^n$ ,  $A = (-1, 1]$ ;
- ii.  $f_n(x) = x^{-n}e^x$ ,  $A = (1, +\infty)$ ;
- iii.  $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ ,  $A = [0, 1]$ .

(b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre  $(0, \frac{1}{2})$ , y para la de ii., que es uniforme sobre  $[2, 5]$ .

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre  $A$  en alguno de los casos?

$$a) \text{ i) } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} \cdot e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

4. Sea  $X$  un conjunto y sea  $B(X)$  el conjunto de las funciones acotadas de  $X$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión en  $B(X)$ .
- (a) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge puntualmente a una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿es cierto que  $f \in B(X)$ ?
  - (b) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniforme a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿es cierto que  $f \in B(X)$ ?
  - (c) Mostrar que la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente a una función acotada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si y solo si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge a  $f$  en  $(B(X), d_\infty)$ .
  - (d) Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente en  $X$ , mostrar que existe  $M > 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $x \in X$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ . En otras palabras, la sucesión  $(f_n)_{n \geq 1}$  es *uniformemente acotada* o es *acotada en  $d_\infty$* .





