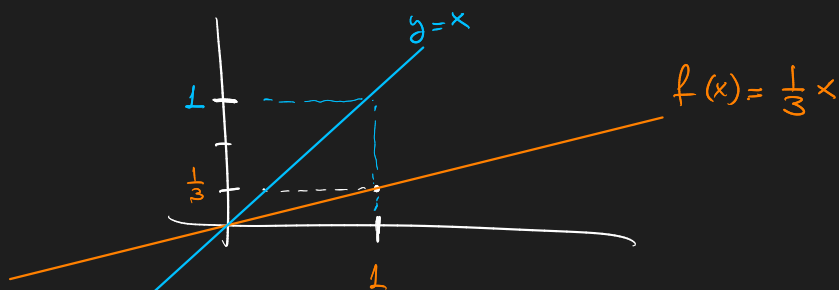


# Teo. de Punto Fijo

14. Sea  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , con la distancia usual de  $\mathbb{R}$ . Sea  $f : E \rightarrow E$  dada por  $f(x) = \frac{1}{3}x$ . Probar que  $f$  es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?



$$d(f(x), f(y)) \stackrel{?}{\leq} \alpha \cdot d(x, y) \quad \text{con } \alpha \in (0, 1)$$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3} |x - y|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(x, y)$$

$$\uparrow \alpha = \frac{1}{3} \in (0, 1) \checkmark$$

$\therefore f$  es contractiva.

$$\text{Sea } \hat{E} = \mathbb{R}$$

Por T. de Pto Fijo de Banach,

Como  $\hat{E} = \mathbb{R}$  es completo

y  $f$  es contracción

$\Rightarrow \exists$  único punto fijo en  $\hat{E}$

¿  
Preg. si el  
proced. está  
bien.

dedo por  $x=0$ ,

pues  $f(0) = 0$ .

Ahora, si quito este  $x=0$  de  $\hat{E}$ ,

termino con el  $E$  del enunciado,

(que no es completo pues  $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

$\therefore f$  no puede tener punto fijo, pues de tenerlo, sería  $x=0$ .



Otra forma:

Si tuviera p.f.

$$f(x) = \frac{1}{3}x \stackrel{\downarrow}{=} x \Leftrightarrow x=0$$

y listo ☺

15. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable. Supongamos que existe  $k \in (0, 1)$  tal que  $|f'(x)| \leq k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  es una contracción.

Sabemos que si

$$|f'(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$  es lipshitz con constante  $k$

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Como  $k \in (0, 1)$

$f$  es contracción.

□

16. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $f : E \rightarrow E$  una función. Para  $n \in \mathbb{N}$  denotemos por  $f^n : E \rightarrow E$  a la función  $f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  veces). Probar:

- (a) Si  $x \in E$  es punto fijo de  $f$ , entonces es punto fijo de  $f^n$ .
- (b) Si  $E$  es completo y existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  es una contracción, entonces existe un único punto fijo de  $f$  en  $E$ .  
Sugerencia: probar que si  $x \in E$  es punto fijo de  $f^n$ , entonces  $f(x)$  también lo es.
- (c) Deducir que existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos(x) = x$ .

$$a) \quad f^1(x) : f(x) = x$$

$$f^2(x) : f(f(x)) = f(x) = x$$

||

$$f(f^1(x)) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$f^3(x) : f(f^2(x)) = \dots$$

$$CB : n=1) \quad f^1(x) : f(x) = x \quad \checkmark$$

$$PI) \quad \text{Sea } f^n(x) = x$$

$$q.v.g \quad f^{n+1}(x) = x$$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \stackrel{H.I.}{=} f(x) \stackrel{\substack{f \text{ tiene} \\ \text{pto fijo}}}{=} x \quad \checkmark$$

b) Comienzo por sugencia

Si  $x \in E$  es punto fijo de  $f^n$

$\stackrel{?}{\Rightarrow} f(x)$  es punto fijo de  $f^n$

Por  $\Rightarrow$  si  $f^n(x) = x$

$$\Rightarrow f^m(x) = x \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^1(x) = f(x) = x \quad \checkmark$$

Por Teorema

Como  $E$  es completo

y  $\exists n / f^n(x)$  es contracción

$\Rightarrow \exists$  único punto fijo para  $f^n(x)$

o sea

$$\exists ! x \in E / f^n(x) = x$$

Deantes, probé que si

$$f^n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$$


$\therefore x$  es el único punto fijo de  $f(x)$ .

$$c) \quad f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$|f'(x)| \stackrel{?}{\leq} k \in (0, 1)$$

$$|\sin(x)| \stackrel{?}{\leq} k \in (0, 1) \quad \underline{\text{NO!}}$$

pues  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$   1

$$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \underbrace{f}_{\cos(x)} \text{ no es contractiva}$$

Sea  $f(x) = \cos(x)$  con  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$  completo  $|f(x) - f(y)| = |\sin(\xi)| |x - y| \stackrel{\leq 1}{\leq}$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$ . Veamos  $g$  contractiva.

$g'(x) = \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x) \leq 1$

Si  $g'(x) = 1 \Rightarrow \sin(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$   
 $\sin(\cos(x)) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (imposible)

Si  $g'(x) = -1 \Rightarrow \sin(x) = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$   
 $\sin(\cos(x)) = -1 \Rightarrow \cos(x) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (imposible)

$\Rightarrow g$  es contractiva:  $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| |x - y| \leq \alpha |x - y|$  con  $\alpha = \max_{x \in \mathbb{R}} |g'(x)| < 1$

$\Rightarrow g$  tiene un punto fijo,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Afirmamos:  $x_0$  es punto fijo de  $\cos(x) = f(x)$ .

$g(\cos(x_0)) = \cos(\cos(\cos(x_0))) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$  es un punto fijo.

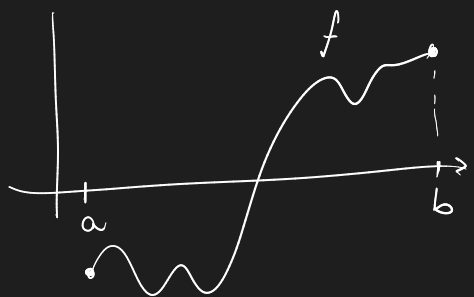
$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$ .  $\square$

17. Probar el Teorema de Bolzano: "Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$  (o viceversa), existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ ".

Sugerencia: Considerar  $A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$ , y ver que es no vacío y acotado superiormente.

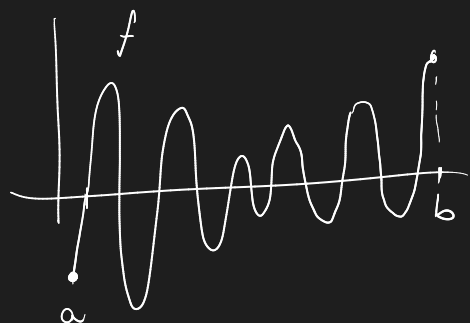
• Tip: No se usa punto fijo.

Bolzano se usa más abajo.



$$\} A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$$

También podría ser



$$\} A = \bigcup_{i \in [1, n]} [x_i, y_i] \quad \left/ \begin{array}{l} x_i, y_i \in [a, b] \\ x_i < y_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \swarrow f(x, y) \leq 0 \quad \forall x, y \end{array}$$

Sugerencias:

•  $A \stackrel{?}{\neq} \emptyset$

Como  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

y  $f(a) < 0$

$$\Rightarrow a \in A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$$

$\Rightarrow A$  tiene al menos 1 elemento:  $a$

$\therefore$  es no vacío.

Yapa: más aún:

Como  $f$  es continua de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(a) < 0,$$

$\Rightarrow f(a)$  no es punto aislado

$\Rightarrow \forall U \subseteq [a, b]$  entorno de  $a$ ,

$$\exists y \in [a, b], y \neq a / y \in U^\circ$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(a, b]}$

↖ siempre hay otro elemento en cualquier entorno de  $a$

con bolas

$\forall r > 0 / B(a, r) \cap [a, b]$  es infinito.

$\therefore A$  es infinito.

• Es  $A$  acotado sup?

$[a, b] =: E$  es compacto

$\Rightarrow E$  tiene cota superior (time máx =  $b$ )

$\therefore$  Si  $A \subseteq E \Rightarrow A$  tiene cota superior



Pruebo el Teo:

Dada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua

con  $f(a) < 0$

y  $f(b) > 0$

$$\Rightarrow \exists c \in [a, b] / f(c) = 0$$

Notar que

$$A = \{x \in [a, b] / f(x) \leq 0\}$$

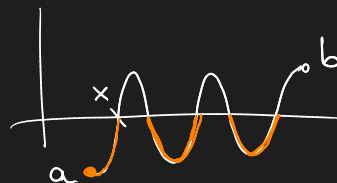
Si  $\exists c \Rightarrow c \in A$

Rehago abajo

~~X~~ =  $[a, x_0]$  \* (podría ser una unión de varios intervalos)  
 $[a, x] \cup [ ] \cup [ ]$

$$\Rightarrow x_0 \in [a, x_0] \subset [a, b]$$

$$\text{con } x_0 < b$$



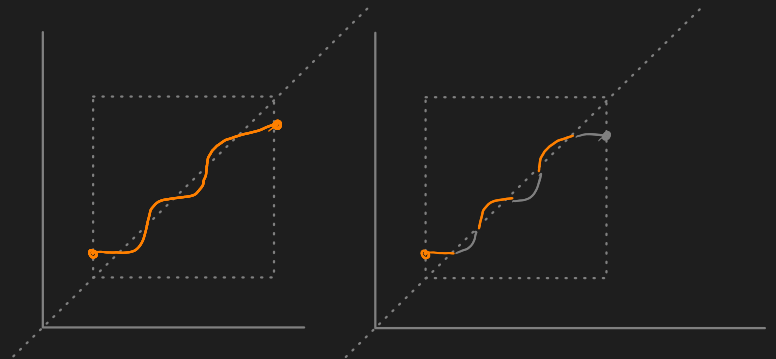
$$\Rightarrow \text{como } f(b) > 0$$

$$f(a) < 0$$

y  $f$  es continua

$$f(x_0) = 0$$

$$\vdots \\ c$$



$$\therefore \exists c \in [a, b] / f(c) = 0$$



De nuevo:

Llevo  $c = \sup A$ ,

el cual existe pues  $A \neq \emptyset$

y  $A \subseteq [a, b]$  acotado

Hay 3 posibilidades:

•  $f(c) < 0$ :

$\Rightarrow c \in A$

y como  $f$  es continua en  $c$

$\Rightarrow \exists r > 0 \mid \underbrace{B(c, r) \cap A}_{\substack{\text{todos con el mismo} \\ \text{signo } f(x) < 0 \\ \forall x \in \text{---}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{todos con el mismo} \\ \text{signo } f(x) < 0 \\ \forall x \in \text{---} \end{array} \right\}$

Pero entonces hay elementos en la bola  
que son más grandes que  $c$

$\begin{array}{c} | \text{---} ) \\ c \quad c+r \end{array}$

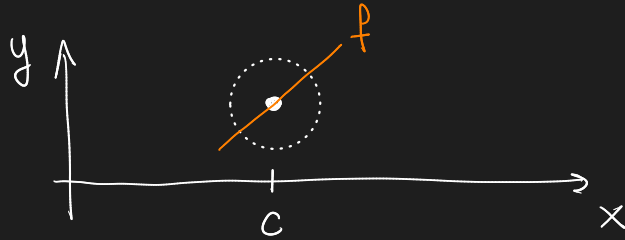
y  $c$  es supremo

Abs.

$\therefore f(c) \neq 0$

Caso  $f(c) > 0$  :

Similarmemente, como  $f$  es continua en  $c$



hay todo un entorno a  $f(c)$  también positivo

Entonces hay valores menores a  $c$  con imagen positiva

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in B(c, r)$$

Aburdo, pues los  $x < c$  pertenecen a  $A$

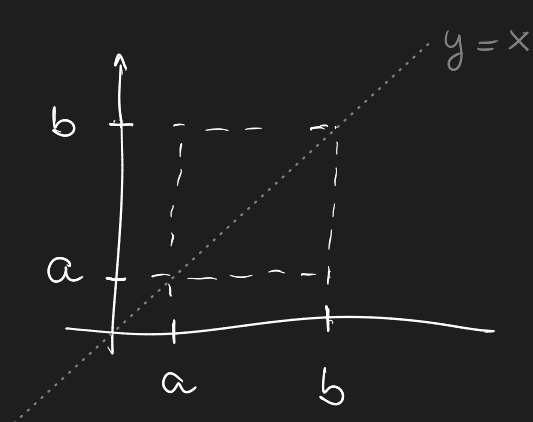
$$\therefore f(c) \neq 0$$

Finalmente

- $f(c) = 0$



18. Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Probar que  $f$  tiene un punto fijo.



Sé que  $\exists f(a) \in [a, b]$

$\exists f(b) \in [a, b]$

y como  $f$  es continua, el gráfico de la función irá de  $f(a)$  a  $f(b)$  cruzando la recta  $y=x$  por algún

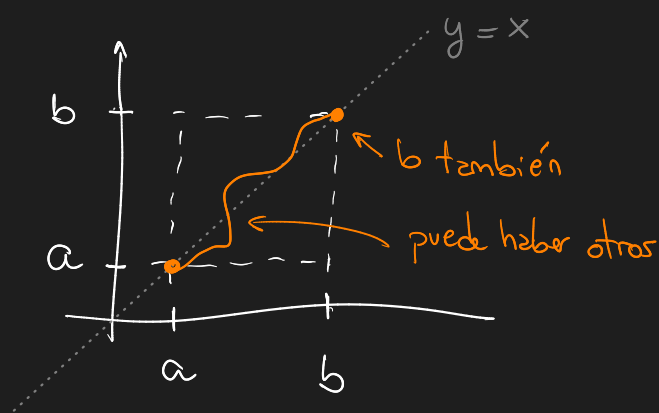
$c \in [a, b]$

• Si:  $f(a) = a$

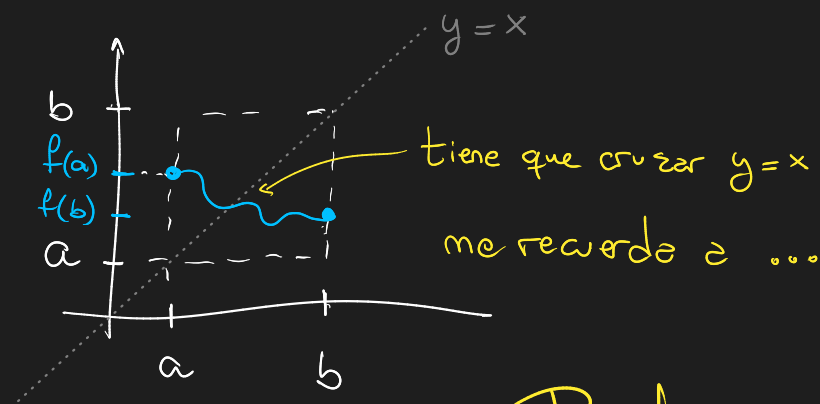
$\Rightarrow a$  es punto fijo de  $f$  ✓

Si:  $f(b) = b$





$\Rightarrow b$  es punto fijo de  $f$



• Si no,  $f(a) \neq a$  y  $f(b) \neq b$



Bolzano!

1		$f(x) = \cos 3x + 3$
2		$y = x$
3		$g(x) = f(x) - x$
4		$\cos 3x + 3 = x$

Primero, definio

$$g(x) = f(x) - x \quad (\text{continua})$$

Como  $f(a) > a$

y  $f(b) < b$

$$\Rightarrow g(a) = f(a) - a > 0 \quad \text{estricto}$$

$$g(b) = f(b) - b < 0$$

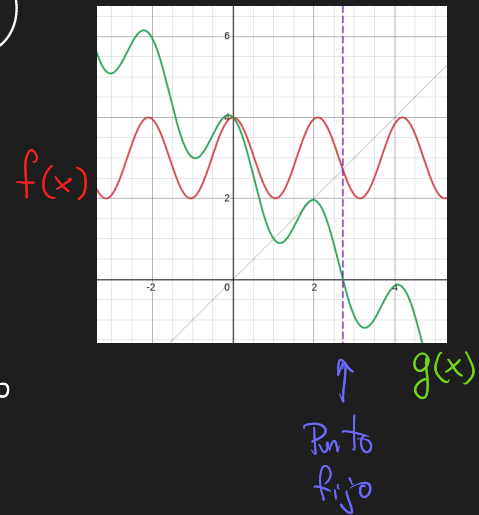
$\Rightarrow$  Por Teorema de Bolzano

$$\exists c \in [a, b] / g(c) = 0$$

$$\Rightarrow g(c) = f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) = c$$

Q.E.D.



19. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $f: E \rightarrow E$  continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de  $f$  es cerrado.

$$A = \{ x \in E \mid f(x) = x \}$$

$$? \vee ? \quad A \stackrel{?}{=} \bar{A}$$

$\bar{A} = A \Leftrightarrow$  Toda sucesión convergente,  
converge a un elemento de  $A$

?  $E$  es acotado pues  $f$  es continua  
en  $E$ ?

- Sea  $a \in \bar{A}$

$q \vee q$

si  $a_n \in A$

y  $a_n \rightarrow a \stackrel{?}{\Rightarrow} a \in A$

(si vale para todo)  
 $a \in \bar{A} \Rightarrow A = \bar{A}$

- Además sé que como

$$a_n \in A \Rightarrow a_n \text{ es punto fijo de } f$$

$$\Rightarrow f(a_n) = a_n =: \boxed{1}$$

y como  $f$  es continua

$$y \quad a_n \rightarrow a$$

$$\Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$$

$$\parallel \boxed{1}$$

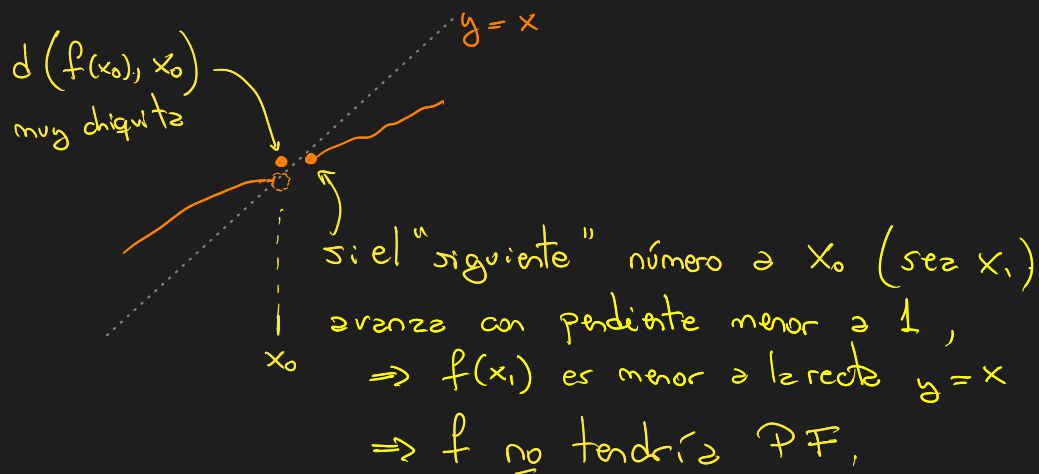
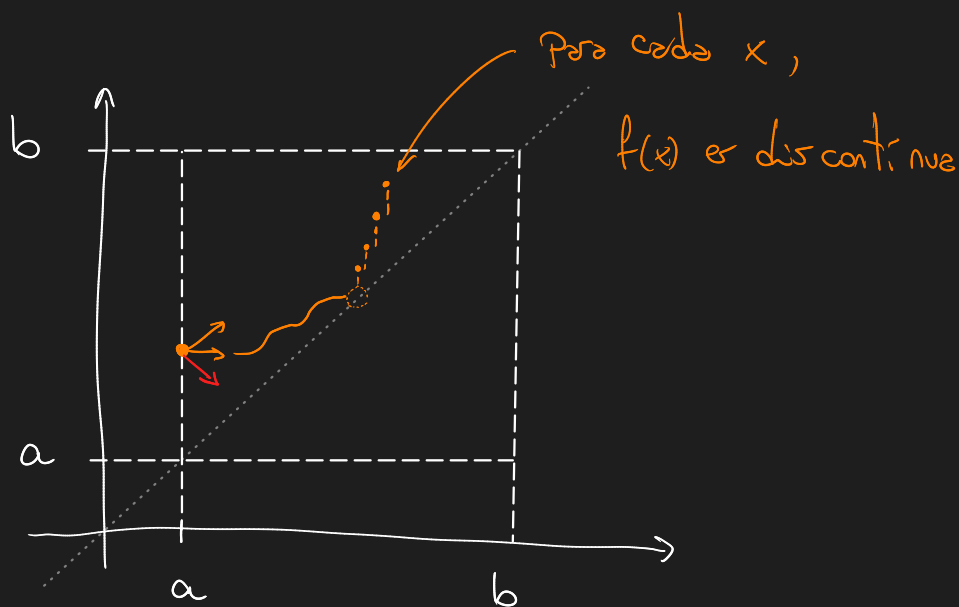
$$a_n \rightarrow a$$

$$\therefore f(a) = a$$

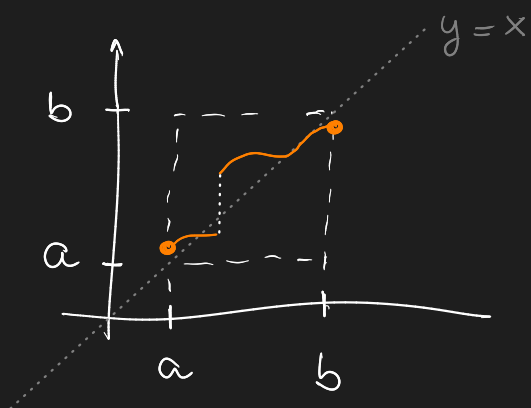
$$\Rightarrow a \in A$$

Finalmente

$$A = \overline{A}$$



20. Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función creciente. Probar que  $f$  tiene un punto fijo.



• Si  $f(a) = a$

ó  $f(b) = b$

$\Rightarrow f$  tiene P.F.

• Si no :

Como  $f$  es creciente

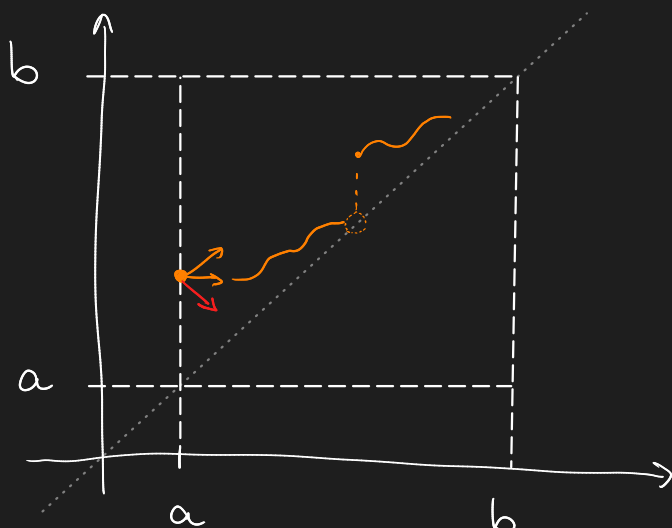
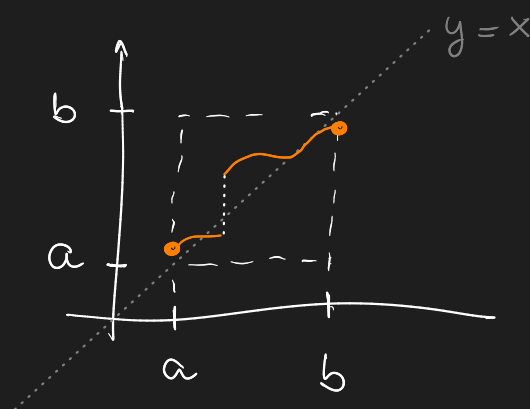
$$f(b) \geq f(a)$$

! Pero no sé si es continua

• Si  $f$  es continua

$\Rightarrow$  ej. 18

• Si no es continua :

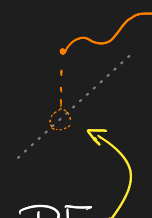


$\Rightarrow$  Si cruza  $x = y$  donde es continua

$\Rightarrow$  ej. 18

$\Rightarrow$  Si "cruza"  $x = y$  en un punto donde  $f$  es discontinua

$\Rightarrow$  ese punto no es PF





y como  $f$  siempre aumenta o se mantiene, y estar acotado por  $b$

$\Rightarrow$  solo puede cruzar  $y = x$  en algún  $c$

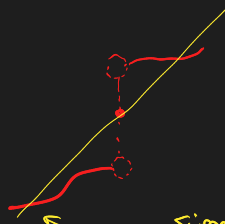
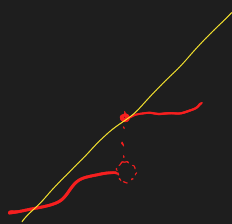
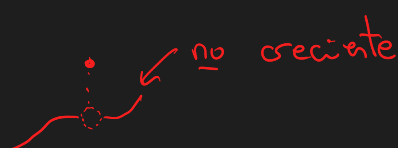
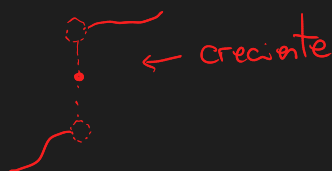
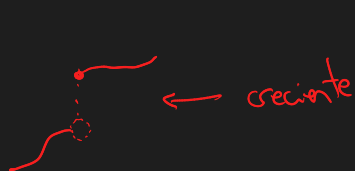
tal que  $\forall r > 0, B(c, r) \cap [a, b]$  es infinito.

notar que: no puede ser punto aislado, ya que

$f(x)$  solo puede mantenerse o aumentar

y en ningún caso puede cruzar  $y = x$

sin antes haberla cruzado con una porción de  $f$  continua:



siempre por debajo de  $y = x$

y  $\therefore$  caso ej 18,

$\therefore$  no modifica en nada el resultado cambiar función continua (ej 18) por creciente (ej 20)

$\therefore f$  tiene punto fijo.



**Victoria Paternostro**

Hola! Esta buenísimo todo lo que pensaste. Pero estoy de acuerdo en que falta formalidad.

Va una sugerencia:

Consideremos el conjunto

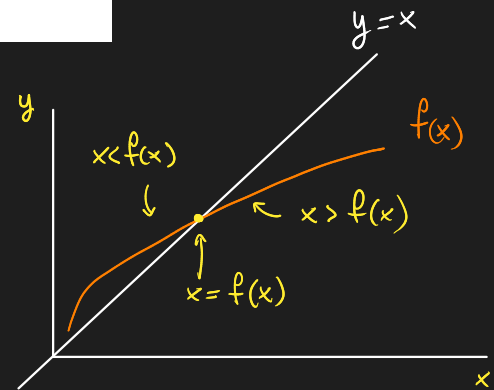
$\{x \in [a, b] : x \leq f(x)\}$ . Seguro que es un conjunto no vacío ( $a$  pertenece) y es acotado porque está contenido en  $[a, b]$ . Yo diría que el supremo tiene que ser un punto fijo.



1

Seamos más formales

$$A = \{x \in [a, b] : x \leq f(x)\}$$



- $A \neq \emptyset$  puer  $a \in A$   
puer  $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$   
puer  $f$  es creciente

- $A$  es acotado <sup>sup e inf.</sup> puer  $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$   
y  $f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b]$   
 $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$   
puer  $f$  es creciente.

$\therefore A$  tiene supremo  $c = \sup A$

$\nexists \forall c \stackrel{?}{\in} A$ .

Armo sucesiones que converjan a  $c = \sup A$

Sé que  $c \in \overline{A}$

Sea  $(x_n) \subset A$ ,  $x_n \rightarrow c$  ( Como  $c$  es supremo,  
 $(x_n)$  se acerca siempre  
por izquierda )

¿ $c \in A$ ?

Como

$$x_n \rightarrow c$$

y como  $f$  creciente

$$\dots \leq f(x_{n-1}) \leq f(x_n) \leq \dots \leq f(c)$$

• Como  $f$  continua en  $c$

$$\text{Si } x_n \rightarrow c$$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(c)$$

• Veamos que  $c \neq f(c)$

$$\text{Si } c < f(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \mid \overset{\text{inclusión}}{B(c, r)} \subset A$$

$$\Rightarrow c + \frac{r}{2} \in B(c, r) \subset A$$

Pero  $c$  era supremo, y  $c + \frac{r}{2} > c$

Abso!

$$\therefore c \neq f(c)$$

• Veamos que  $c \neq f(c)$

$$\text{Si: } c > f(c)$$

$$\Rightarrow \exists r > 0 \mid B(c, r) \text{ est\u00e1 compuesto de elementos } > f(c)$$

$$\text{Pero } c - \frac{r}{2} \in B(c, r) \text{ y } \underline{\text{no}} \text{ es } > f(c)$$

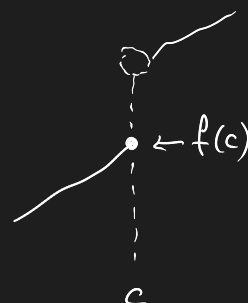
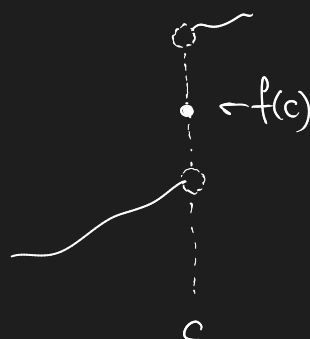
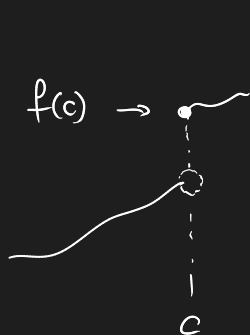
por est\u00e1 en  $A$ , por  $c$  era supremo

$$\therefore c \neq f(c)$$

Finalmente:

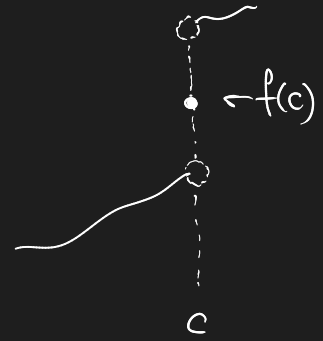
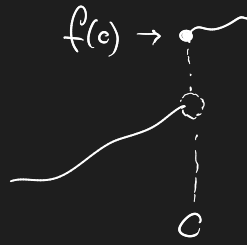
$$c = f(c) \quad \checkmark$$

• Caso  $f$  discontinua en  $c$



Caso  $f(c) > c$

$$c < f(c) < f(f(c))$$



$\Rightarrow$  Como  $f$  creciente

$$\forall \varepsilon > 0, f(c) \leq f(c + \varepsilon)$$

$\Rightarrow$  me gustaría decir que

$$c + \varepsilon < f(c + \varepsilon)$$

$$c < f(c)$$

$$c + \varepsilon < f(c) + \varepsilon$$


$$f(c + \varepsilon) < f(f(c) + \varepsilon)$$

para concluir que  $c + \varepsilon$  está en  $A$ , y llegar a un absurdo

Caso  $f(c) < c$

Como  $f$  creciente

$$\forall \varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0, f(c - \varepsilon) \leq f(c) \leq f(c + \tilde{\varepsilon})$$


**Daniel Carando**
12:10 PM

Hola! Si tenemos los  $x_n$  en  $A$  que tienden a  $c$ , como  $f$  es creciente podemos afirmar lo siguiente:  
 $x_n \leq f(x_n) \leq f(c)$ .  
 Fijate si a partir de esto podés demostrar una de las desigualdades. Ah, no hacía falta pedir que los  $x_n$  formen una sucesión creciente.

Como verás, acá no importa si la  $f$  es continua o no en  $c$  (ni qué tipo de discontinuidad tiene).

Con respecto a si  $A$  es unión de intervalos, no es necesariamente cierto aunque  $f$  fuera continua. Por ejemplo,  $f$  podrá estar siempre por abajo de la recta  $y = x$  y tocarla sólo en contables puntos, pero sin cruzarla (podés pensar en una función tipo serrucho). En ese caso  $A$  estaría formado por esos puntos de contacto y no sería unión de intervalos.

ahora sí !!



• Si  $c < f(c)$  :

$$\text{Si } c < f(c) \Rightarrow c \in A$$

y si aplico  $f$ , como es creciente, mantiene desig.

$$f(c) < f(f(c)) \Rightarrow f(c) \in A$$

Pero por  $\mathcal{H}$  :

$$c < f(c)$$

y  $c$  es supremo.

Abs!

$$c \not< f(c)$$

$$(c \geq f(c))$$

• Caso  $c > f(c)$  :

$$\Rightarrow c \notin A$$

$$\text{i.e. } x \leq c \quad \forall x \in A$$

Si aplico  $f$  (creciente)

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in A$$

Como  $x \in A$

$$x \leq f(x) \leq f(c) \quad \leftarrow \text{es cota sup.}$$

$$\Rightarrow x \leq f(c) \quad \forall x \in A$$

y como  $c = \sup A$  (la menor de las cotas sup.)

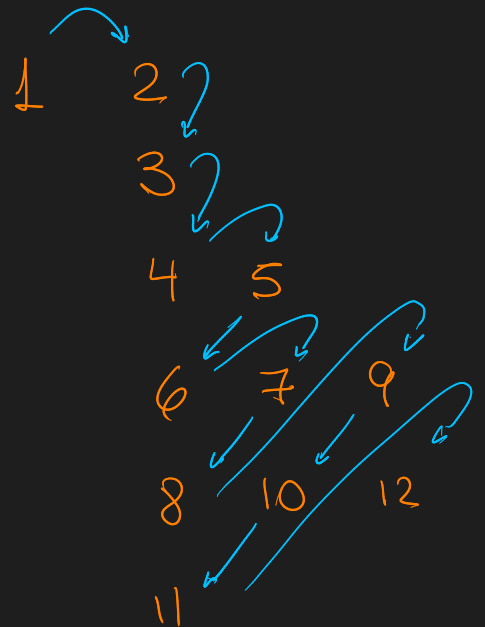
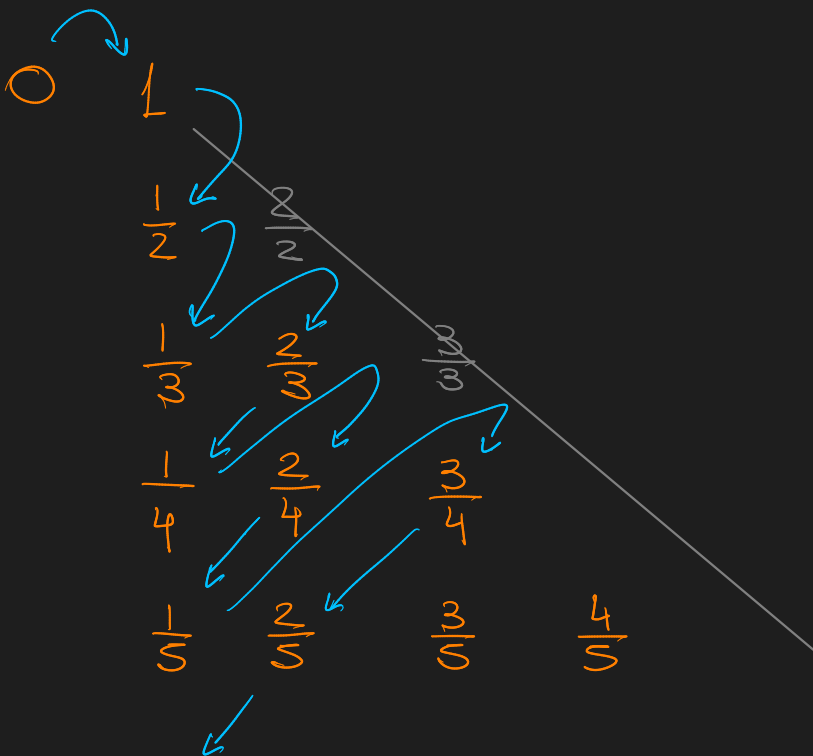
$$\Rightarrow c \leq f(c)$$

Abs! Per por  $f_b : c > f(c)$

$$\therefore c \neq f(c)$$

Finalmente

$$\left. \begin{array}{l} \bullet c \neq f(c) \\ \bullet c \neq f(c) \end{array} \right\} \Rightarrow c = f(c)$$







$$q_1 \leftrightarrow 0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$A_0 = \{ n \in \mathbb{N} : q_n \leq 0 \}$$

$$A_0 = \{ 1 \}$$

$$A_1 = \{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq 1 \}$$

$$A_{\frac{1}{2}} = \{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \frac{1}{2} \}$$

$$A_1 = \underbrace{\{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \frac{1}{2} \}}_{\substack{A_{\frac{1}{2}} \\ \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N}}} \cup \underbrace{\{ \text{índice de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } > \frac{1}{2} \text{ y } \leq 1 \}}_{\# = \# A_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \# A_1 = 2 \# A_{\frac{1}{2}}$$

y como es infinito

$$\# A_1 = \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N} = \# A_x \quad \forall x \in (0,1]$$

$$\sum_{n \in A_x} \frac{1}{2^n} = \sum \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{\overset{0}{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}}{\underset{0}{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

