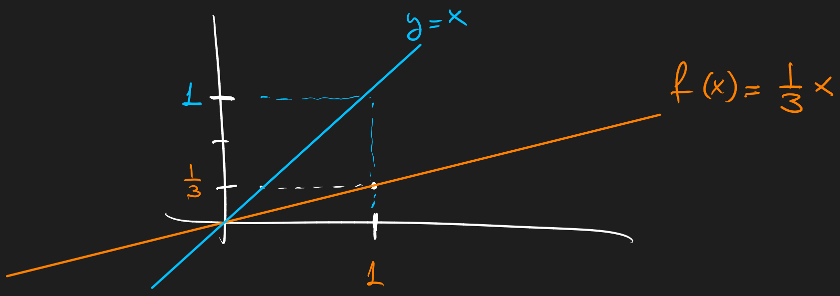
Teo. de Punto Fijo

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?



$$d(f(x), f(y)) \overset{?}{\leq} \alpha \cdot d(x,y) \quad \text{con } \alpha \in (0,1)$$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3} |x-y|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(x,y)$$

$$\uparrow \alpha = \frac{1}{3} \in (0,1) \checkmark$$

$\therefore f$ es <u>contractiva</u>.

Sea $\hat{E} = \mathbb{R}$

Por T. de Pto Fijo de Banach,

¿ Preg. si el proced está bien.

Como $\hat{E} = \mathbb{R}$ es completo

y f es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo en $\hat{E}$

dado por $x=0$,

pues $f(0) = 0$.

Ahora, si quito este $x=0$ de $\hat{E}$,

termino con el E del enunciado,

(que <u>no</u> es completo pues $\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\therefore$ f <u>no</u> puede tener punto fijo, pues de

tenerlo, sería $x=0$.

$\blacksquare$

Otra forma:

Si tuviera p.f.

$$f(x) = \frac{1}{3}x \overset{\downarrow}{=} x \iff x = 0$$

y listo ¡¡ :)

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0,1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

Sabemos que si

$$|f'(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f es lipschitz con constante k

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Como $k \in (0,1)$

f es contracción.

$\boxtimes$

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces). Probar:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de f, entonces es punto fijo de f^n.

(b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

(c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

a) $f^1(x) : f(x) = x$

$f^2(x) : f(f(x)) = f(x) = x$

$\qquad\qquad \parallel$

$f(f^1(x)) = f(f(x)) = f(x) = x$

$f^3(x) : f(f^2(x)) = \ldots$

CB: $n = 1$) $f^1(x) : f(x) = x$ ✓

PI) Sea $f^n(x) = x$

q.v.q $f^{n+1}(x) = x$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \underset{HI}{=} f(x) \underset{\substack{f \text{ tiene} \\ \text{pto fijo}}}{=} x$$ ✓

b) Comienzo por sugerencia

Si $x \in E$ es punto fijo de f^n

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $f(x)$ es punto fijo de f^n

Por a) si $f^n(x) = x$

$$\Rightarrow f^m(x) = x \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^1(x) = f(x) = x \checkmark$$

Por Teorema

Como E es completo

y $\exists n \,/\, f^n(x)$ es contracción

$\Rightarrow \exists$ único punto fijo para $f^n(x)$

o sea

$$\exists!\, x \in E \,/\, f^n(x) = x$$

De antes, probé que si

$$f^n(x) = x \Rightarrow f(x) = x$$

$\therefore$ x es el único punto fijo de $f(x)$. $\blacksquare$

c) $f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$|f'(x)| \overset{?}{\leq} k \in (0,1)$

$|\sin(x)| \overset{?}{\leq} k \in (0,1)$ NO!

pues $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ∄ 1

$|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \underbrace{f}_{\cos(x)}$ no es contractiva

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $\quad |f(x) - f(y)| = \underbrace{|\operatorname{sen}(\xi)|}_{\leq 1}|x-y|$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contrac.

$g'(x) = \operatorname{sen}(\cos(x)) \cdot \operatorname{sen}(x) \leq 1$

Si $g'(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = 1$ (ó -1) $\Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\cos(x)) = 0$

$\operatorname{sen}(\cos(x)) = 1$ (ó -1)

$\Rightarrow g'(x) \neq 1, \neq -1 \Rightarrow |g'(x)| < 1$

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x-y| \leq \alpha|x-y|$

$(0,1) \ni \max|g'| \neq 1$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Afirmo: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

$g(\cos(x_0)) = \cos(\underbrace{\cos(\cos(x_0))}_{g(x_0) = x_0}) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$ es un punto fijo.

$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$. ☑

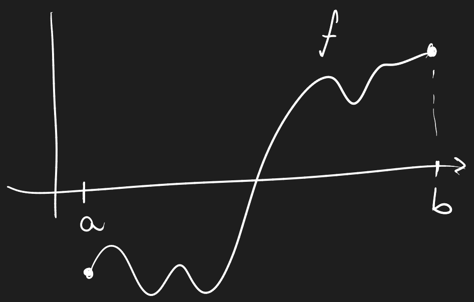
34 / 34

17. Probar el Teorema de Bolzano: "Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o viceversa), existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$".

Sugerencia: Considerar $A = \{x \in [a,b] \;/\; f(x) \leq 0\}$, y ver que es no vacío y acotado superiormente.

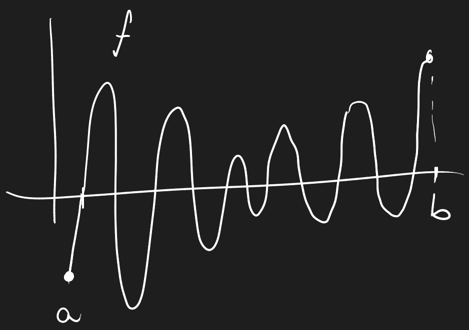
- Tip: <u>No</u> se usa punto fijo.

  Bolzano se usa más abajo.



$$\Big\} \; A = \{ x \in [a,b] \;/\; f(x) \leqslant 0 \}$$

Tambien podría ser



$$f([x_i, y_i]) \leqslant 0 \quad \forall x, y$$

$$\Big\} \; A = \bigcup_{i \in [1,n]} [x_i, y_i] \;\Big/\; \begin{array}{l} x_i, y_i \in [a,b] \\ x_i < y_i \end{array}$$

Sugerencias:

- $A \overset{?}{\neq} \emptyset$

  Como $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

  y $f(a) < 0$

  $$\Rightarrow a \in A = \{ x \in [a,b] : f(x) \leqslant 0 \}$$

$\Rightarrow$ A tiene al menos 1 elemento : a

$\therefore$ es no vacío.

Yapa : más aún :

Como f es contínua de $[a,b] \to \mathbb{R}$,

$f(a) < 0$,

$\Rightarrow$ $f(a)$ no es punto aislado

$\Rightarrow \forall\, U \subseteq [a,b]$ entorno de a,

$\exists\, \underbrace{y \in [a,b],\ y \neq a}_{(a,b]} \ /\ y \in U^\circ$

siempre hay otro elemento en cualquier entorno de a

con bolas

$\forall\, r>0 \ /\ B(a,r) \cap [a,b]$ es infinito.

$\therefore$ A es infinito.

- Es A acotado sup ?

$[a,b] =: E$ es compacto

$\Rightarrow$ E tiene cota superior (tiene máx $= b$)

$\therefore$ Si $A \subseteq E \Rightarrow$ A tiene cota superior

Pruebo el Teo:

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

con $f(a) < 0$

y $f(b) > 0$

$$\Rightarrow \exists\ c \in [a,b] \ / \ f(c) = 0$$

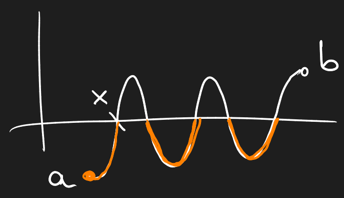
Notar que

Si $\exists c \Rightarrow c \in A$

Rehago abajo

$A = \{x \in [a,b] \ / \ f(x) \leq 0\}$ Mal!

$= [a, x_0]$ $*$ (podría ser una unión de varios intervalos $[a,x] \cup [\quad] \cup [\quad]$)



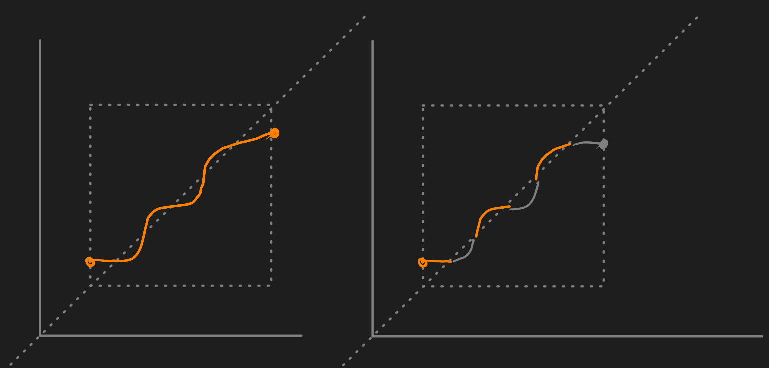
$\Rightarrow x_0 \in [a, x_0] \subset [a,b]$

con $x_0 < b$

$\Rightarrow$ como $f(b) > 0$

$f(a) < 0$

y f es continua



$$f(x_0) = 0$$
$$\parallel$$
$$c$$

$\therefore \exists c \in [a,b] \ / \ f(c) = 0$ $\blacksquare$

De nuevo:

Llamo $c = \sup A$,

el cual existe pues $A \neq \emptyset$

y $A \subseteq [a, b]$ acotado

Hay 3 posibilidades:

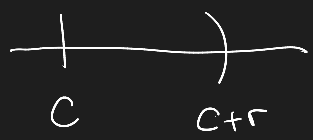
- $f(c) < 0$:

$\Rightarrow c \in A$

y como f es continua en c

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, \underbrace{B(c, r) \cap A} = \{$ todos con el mismo signo $f(x) < 0 \quad \forall x \in \; \}$

Pero entonces hay elementos en la bola que son más grandes que c



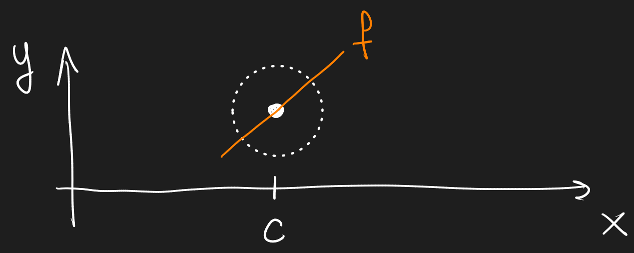
y c es supremo

Abs.

$\therefore f(c) \not< 0$

Caso $f(c) > 0$:

Similarmente, como f es contínua en c



hay todo un entorno a $f(c)$ también positivo

Entonces hay valores menores a c con imagen positiva

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in B(c, r)$$

Absurdo, pues los $x < c$ pertenecen a A

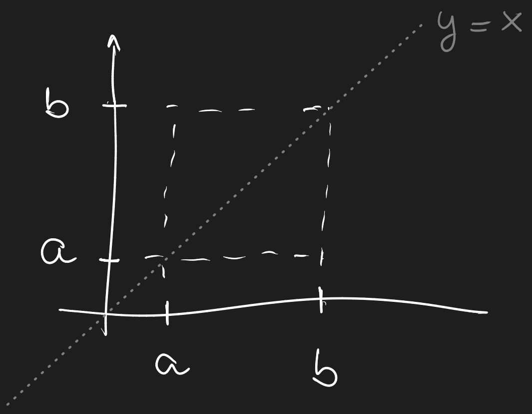
$$\therefore \ f(c) \not> 0$$

Finalmente

- $f(c) = 0$

$\boxtimes$

18. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.



Sé que $\exists\, f(a) \in [a,b]$

$\exists\, f(b) \in [a,b]$

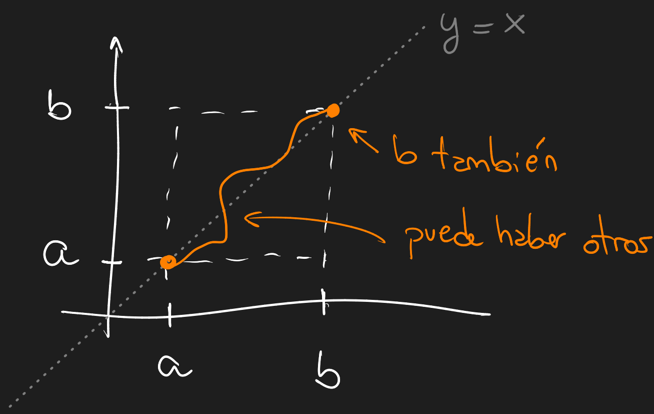
y como f es continua, el gráfico de la función irá de $f(a)$ a $f(b)$ cruzando la recta $y = x$ para algún $c \in [a,b]$

- Si $f(a) = a$

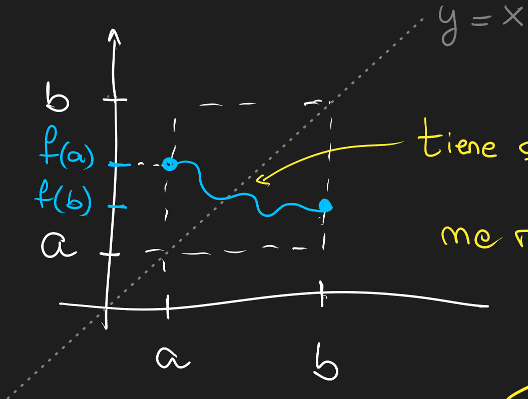
$\Rightarrow$ a es punto fijo de f ✓

Si $f(b) = b$

$\Rightarrow$ b es punto fijo de f



- Si no, $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$

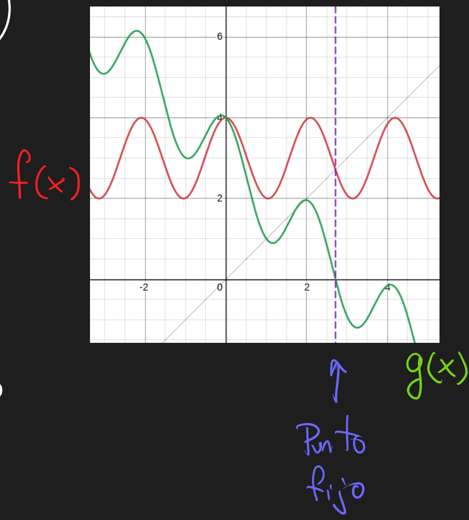


tiene que cruzar $y = x$

me recuerda a ...

Bolzano!

1. $f(x) = \cos 3x + 3$
2. $y = x$
3. $g(x) = f(x) - x$
4. $\cos 3x + 3 = x$



Primero, defino

$$g(x) = f(x) - x \qquad (\text{continua})$$

Como $f(a) > a$

y $f(b) < b$

$$\Rightarrow g(a) = f(a) - a \underset{}{>} 0 \quad \text{estricto}$$

$$g(b) = f(b) - b < 0$$

$\Rightarrow$ Por Teorema de Bolzano

$$\exists c \in [a,b] \,/\, g(c) = 0$$

$$\Rightarrow g(c) = f(c) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) = c$$

$\blacksquare$

19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

$$A = \{ x \in E \ / \ f(x) = x \}$$

qvq $A \overset{?}{=} \overline{A}$

$\overline{A} = A \iff$ Toda sucesión convergente, converge a un elemento de A

? E es acotado pues f es continua en E ?

- Sea $a \in \overline{A}$

qvq

si $a_n \subseteq A$

y $a_n \longrightarrow a \overset{?}{\Rightarrow} a \in A$

(si vale para todo $a \in \overline{A} \Rightarrow A = \overline{A}$)

- Además sé que como

$a_n \subseteq A \Rightarrow a_n$ es punto fijo de f

$\Rightarrow f(a_n) = a_n =: \boxed{1}$

y como f es contínua

y $a_n \longrightarrow a$

$$\Rightarrow \quad f(a_n) \longrightarrow f(a)$$

$$\| \ \boxed{1}$$

$$a_n \longrightarrow a$$

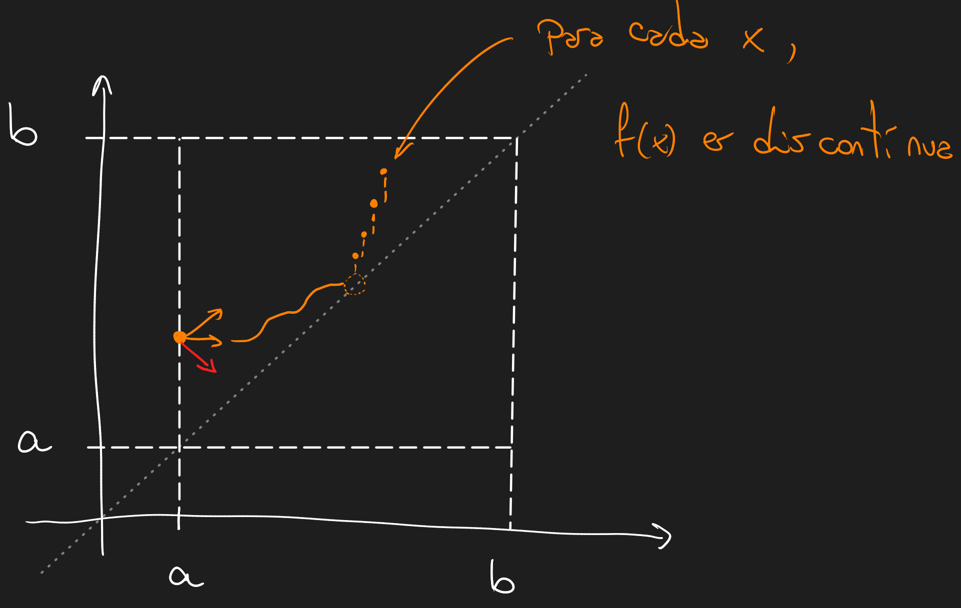
$$\therefore \quad f(a) = a$$

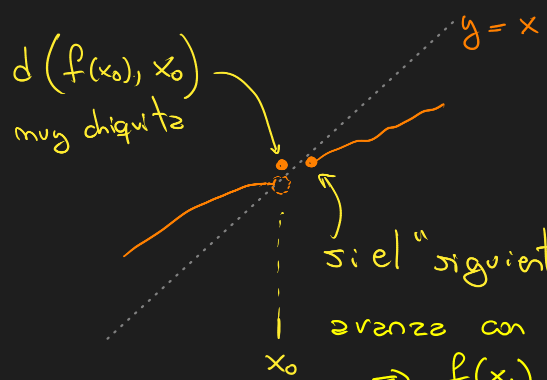
$$\Rightarrow \quad a \in A$$

Finalmente

$$A = \overline{A}$$

$\blacksquare$



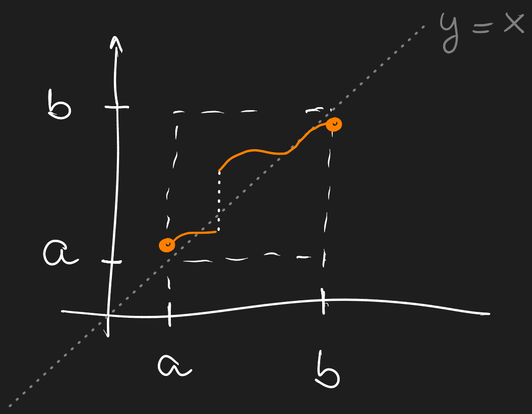


si el "siguiente" número a x_0 (sea x_1)
avanza con pendiente menor a 1,

$\Rightarrow$ $f(x_1)$ es menor a la recta $y = x$

$\Rightarrow$ f no tendría PF.

20. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.



- Si $f(a) = a$

  ó $f(b) = b$

  $\Rightarrow f$ tiene P.F.

- Si no :

  Como f es creciente

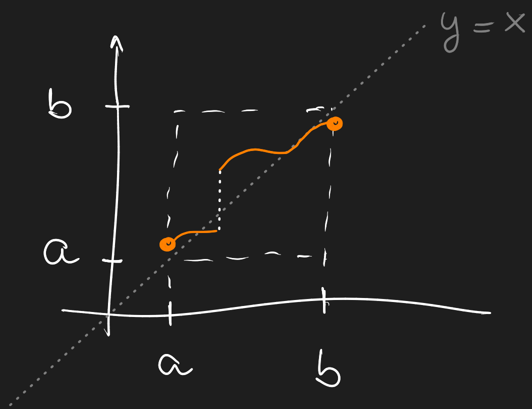
  $f(b) \geq f(a)$

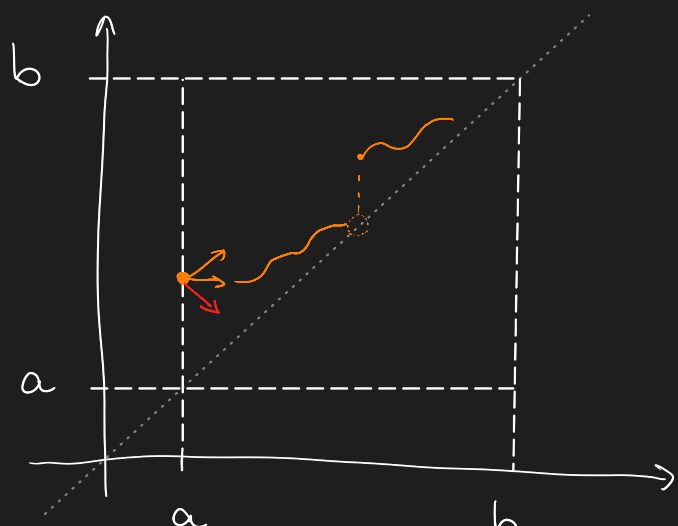
! Pero no sé si es continua

- Si f es continua

  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ej. 18}}$

- Si no es continua :

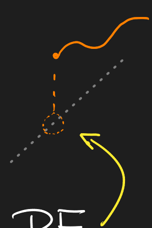




$\Rightarrow$ Si cruza $x = y$ donde es continua

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ej. 18}}$

$\Rightarrow$ Si "cruza" $x = y$ en un punto donde f es discontinua



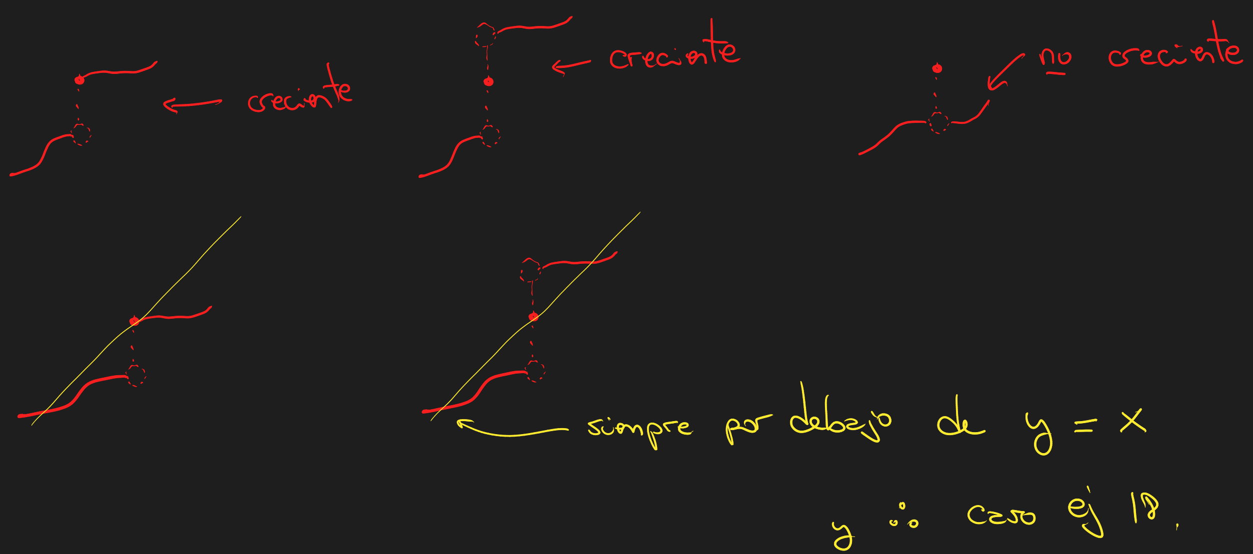
$\Rightarrow$ ese punto no es PF

y como f siempre aumenta o se mantiene, y está acotado por b

$\Rightarrow$ sólo puede cruzar $y = x$ en algún c

tal que $\forall r > 0$, $B(c, r) \cap [a, b]$ es infinito.

notar que: no puede ser punto aislado, ya que $f(x)$ sólo puede mantenerse o aumentar y en ningún caso puede cruzar $y = x$ sin antes haberla cruzado con una porción de f continua:



∴ no modifica en nada el resultado cambiar función continua (ej 18) por creciente (ej 20)

∴ f tiene punto fijo.

$\boxtimes$

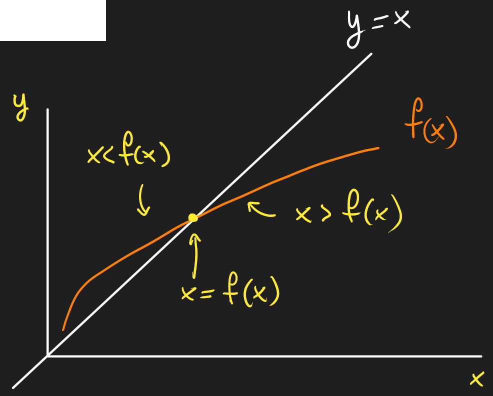
Victoria Paternostro

Hola! Esta buenísimo todo lo que pensaste. Pero estoy de acuerdo en que falta formalidad.

Va una sugerencia:
Consideremos el conjunto
$\{x \in [a,b] : x \leq f(x)\}$. Seguro que es un conjunto no vacío (a pertenece) y es acotado porque está contenido en $[a,b]$. Yo diría que el supremo tiene que se un punto fijo.

👌 1

Seamos más formales



$$A = \{x \in [a,b] : x \leq f(x)\}$$

- $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$
  pues $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$
  pues f es creciente

- A es acotado (sup e inf.) pues $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$
  y $f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$
  $\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
  pues f es creciente.

$\therefore$ A tiene supremo $c = \sup A$

qvq $c \overset{?}{\in} A$

Armo sucesiones que converjan a $c = \sup A$

Sé que $c \in \overline{A}$

Sea $(x_n) \subset A$, $x_n \longrightarrow c$ (Como c es supremo, (x_n) se acerca siempre por izquierda)

qvq $c \overset{?}{\in} A$

Como

$$x_n \longrightarrow c$$

y como f creciente

$$\dots \leq f(x_{n-1}) \leq f(x_n) \leq \dots \leq f(c)$$

- Caso f continua en c

Si $x_n \longrightarrow c$

$$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(c)$$

- Veamos que $c \not< f(c)$

Si $c < f(c) \Rightarrow$

inclusión

$$\Rightarrow \exists r > 0 \;/\; B(c, r) \subset A$$

$\Rightarrow \quad c + \frac{r}{2} \in B(c,r) \subset A$

Pero c era supremo, y $c + \frac{r}{2} > c$

Abs!

$\therefore c \not< f(c)$

- Veamos que $c \not> f(c)$

Si $c > f(c)$

$\Rightarrow \exists r > 0 \mid B(c,r)$ está compuesto de elementos $> f(c)$

Pero $c - \frac{r}{2} \in B(c,r)$ y no es $> f(c)$

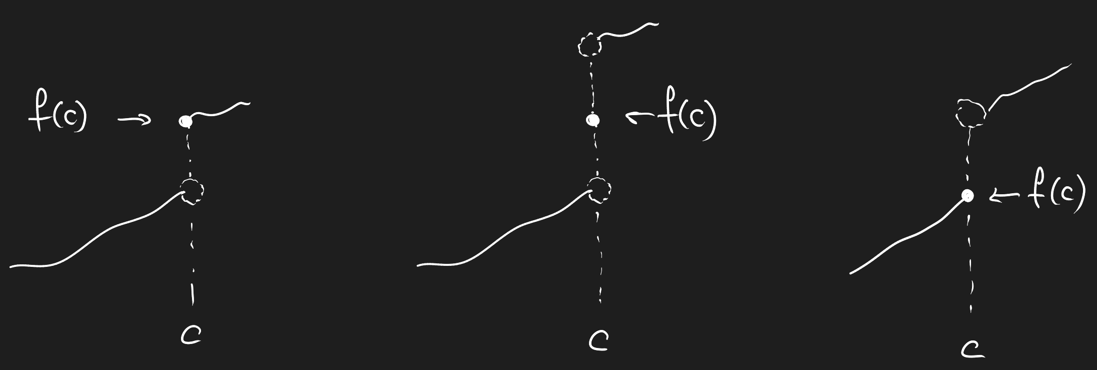
pues está en A, pues c era supremo

$\therefore c \not> f(c)$

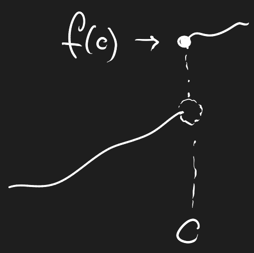
Finalmente:

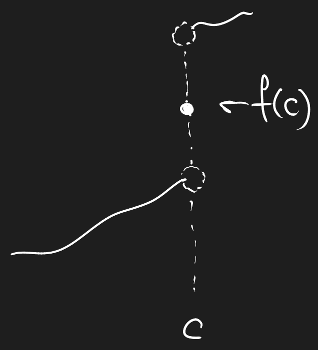
$c = f(c)$ ✓

- Caso f discontinua en c



Caso $f(c) > c$





$$c < f(c) < f(f(c))$$

$\Rightarrow$ Como f creciente

$$\forall \varepsilon > 0, \quad f(c) \leq f(c+\varepsilon)$$

$c < f(c)$

$c+\varepsilon < f(c) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ me gustaría decir que

$$c+\varepsilon < f(c+\varepsilon) \qquad f(c+\varepsilon) < f(f(c)+\varepsilon)$$

para concluir que $c+\varepsilon$ está en A, y llegar a un absurdo

Caso $f(c) < c$

Como f creciente

$$\forall \varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0, \quad f(c-\varepsilon) \leq f(c) \leq f(c+\tilde{\varepsilon})$$

Daniel Carando 12:10 PM

Hola! Si tenemos los x_n en A que tienden a c, como f es creciente podemos afirmar lo siguiente:
$x_n \leq f(x_n) \leq f(c)$.
Fijate si a partir de esto podés demostrar una de las desigualdades. Ah, no hacía falta pedir que los x_n formen una sucesión creciente.

Como verás, acá no importa si la f es continua o no en c (ni qué tipo de discontinuidad tiene).

Con respecto a si A es unión de intervalos, no es necesariamente cierto aunque f fuera continua. Por ejemplo, f podrá estar siempre por abajo de la recta $y = x$ y tocarla sólo en contables puntos, pero sin cruzarla (podés pensar en una función tipo serrucho). En ese caso A estaría formado por esos puntos de contacto y no sería unión de intervalos.

ahora sí !!

- Si $c < f(c)$:

Si $c < f(c) \Rightarrow c \in A$

y si aplico f, como es creciente, mantiene desig.

$f(c) < f(f(c)) \Rightarrow f(c) \in A$

Pero por H6 :

$c < f(c)$

y c es supremo.

Abs!

$c \not< f(c)$

$(c \geq f(c))$

- Caso $c > f(c)$:

$\Rightarrow c \notin A$

i.e. $x \leq c \quad \forall x \in A$

Si aplico f (creciente)

$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in A$

Como $x \in A$

$x \leq f(x) \leq f(c)$ es cota sup.

$\Rightarrow x \leq f(c) \quad \forall x \in A$

y como $c = \sup A$ (la menor de las cotas sup.)

$\Rightarrow c \leq f(c)$

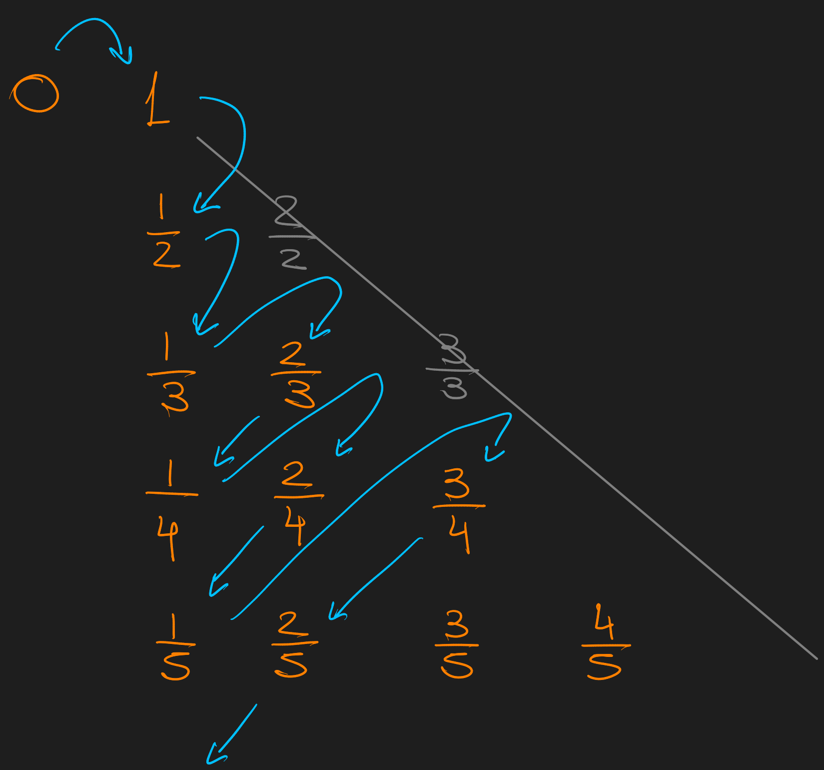
Abs! Pues por H_0 : $c > f(c)$

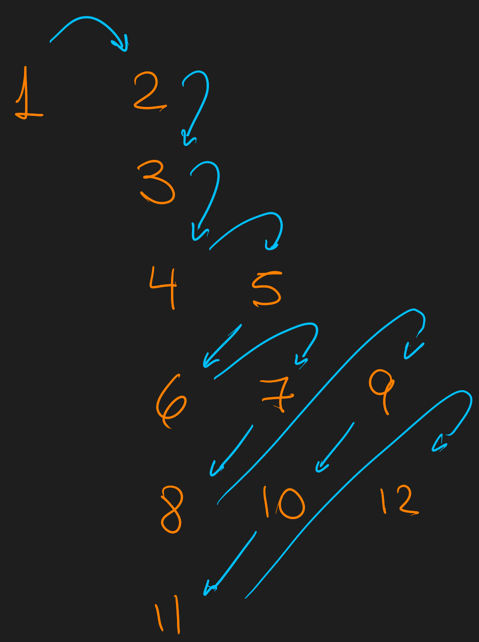
$\therefore \; c \not> f(c)$

Finalmente

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \; c \not< f(c) \\ \cdot \; c \not> f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow c = f(c)$$

$\blacksquare$





1°	2°	3°	4°	. . .
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
0	1			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$		
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

$$q_1 \rightsquigarrow 0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

$$A_0 = \{ n \in \mathbb{N} : q_n \leq 0 \}$$

$$A_0 = \{ 1 \}$$

$$A_1 = \{ \text{índices de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq 1 \}$$

$$A_{\frac{1}{2}} = \{ \text{índices de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \tfrac{1}{2} \}$$

$$A_1 = \underbrace{\{ \text{índices de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } \leq \tfrac{1}{2} \}}_{\substack{A_{\frac{1}{2}} \\ \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N}}} \cup \underbrace{\{ \text{índices de } \underline{\text{Todos}} \text{ los racionales } > \tfrac{1}{2} \text{ y } \leq 1 \}}_{\#^{\uparrow} = \# A_{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \# A_1 = 2 \# A_{\frac{1}{2}}$$

y como es infinito

$$\# A_1 = \# A_{\frac{1}{2}} = \# \mathbb{N} = \# A_x \qquad \forall x \in (0,1]$$

$$\sum_{n \in A_x} \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \overset{\to 0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{1 - \underset{\to 0}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$