Leandro Carreira
669/18

Análisis Avanzado - 3° entrega - Práctica 3

18. Sea (E, d) un espacio métrico. Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \times \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \ , \ b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**:

(a) $\widehat{d}(A, B) = \widehat{d}(\overline{A}, B)$.

(b) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

(c) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(d) $\widehat{d}(A, B) \leq \widehat{d}(A, C) + \widehat{d}(C, B)$.

Concluir que $\widehat{d}$ no es una distancia.

Veamos qué hace $\hat{d}$:

→ Vemos que $\hat{d}$ toma conjuntos como entrada (elementos de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\phi\}$)

→ compara todos los elementos de estos conjuntos de entrada entre sí (2 a 2)

↳ usando distancia del espacio métrico

→ de entre todas las distancias, elije la menor.

a) $d(A, B) \overset{?}{=} d(\bar{A}, B)$

Sospecho que es Falso, pues si A no es cerrado

$\Rightarrow$ $\bar{A}$ tendrá más elementos contra los cuales comparar

$$\left(\text{Pues } \bar{A} = A \cup \partial A \text{ y } \bar{A} \neq A\right)$$

Armo contraejemplo

Sean:

$$E = \mathbb{R} \quad , \quad d(x,y) = |x-y|$$

$$A = (0,1)$$

$$B = \{0\}$$

$$\Rightarrow d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$= \inf\{|a-b| : a \in (0,1) \wedge b = 0\}$$

$$= \inf\{|a-0| : a \in (0,1)\}$$

$$\overset{a>0}{=} \inf\{a : a \in (0,1)\}$$

Como $(0,1)$ es abierto

$$d(A,B) > 0$$

Pero:

$$d(\bar{A},B) = \inf\{d(a,b) : a \in \bar{A} \wedge b \in B\}$$

$$= \inf \{ |a-b| : a \in [0,1] \wedge b = 0 \}$$

$$= \inf \{ |a-0| : a \in [0,1] \}$$

$$\overset{a>0}{=} \inf \{ a : a \in [0,1] \}$$

Como $[0,1]$ es cerrado $\Rightarrow$ Tiene mínimo

$$d(\bar{A}, B) = 0$$

Obtuve

$$d(A, B) > 0$$

y

$$d(\bar{A}, B) = 0$$

$$\therefore \; d(A,B) \neq d(\bar{A}, B)$$

$\therefore$ es Falso.

b) $\hat{d}(A,B) = 0 \overset{?}{\iff} A \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow)$ $\hat{d}(A,B) = 0$

$$\hat{d}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$0 = \inf\{d(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\Rightarrow 0 \in \{d(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\Rightarrow \exists\, a \in A,\ \exists\, b \in B \ /\ d(a,b) = 0$$

y como d es una distancia

$$d(a,b) = 0 \iff a = b$$

$$\Rightarrow \exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B \ /\ a = b$$

Obtuve que

Si $d(A,B) = 0$

$$\Rightarrow \exists\, a \in A \cap B$$

$$\therefore A \cap B \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$\Leftarrow)\quad A \cap B \neq \emptyset$

La vuelta es exactamente igual que antes,
en sentido opuesto

$$\Rightarrow \exists\, a \in A \cap B$$

$$\Rightarrow \exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B \;/\; a = b$$

Como d es una distancia

$$a = b \iff d(a,b) = 0$$

$$\Rightarrow \exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B \;/\; d(a,b) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \in \{ d(a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Como cada elemento $d(a,b)$ del conjunto es mayor o igual a cero (pues d es distancia y $d \geq 0$)

$$\Rightarrow 0 = \inf \{ d(a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$$

$$\Rightarrow 0 \underset{\text{def } \hat{d}}{=} \hat{d}(A,B)$$

Obtuve que

si $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \hat{d}(A,B) = 0$ ✓

$\therefore$ habiendo probado ambas implicaciones

es verdadero

$$\boxed{A \cap B \neq \phi \Leftrightarrow \hat{d}(A,B) = 0}$$

c) $\hat{d}(A,B) = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} \bar{A} \cap \bar{B} \neq \phi$

Idea:

- En el punto anterior vimos que si evaluar la función $\hat{d}$ resultaba en cero

  $\Rightarrow$ debe haber algún elemento compartido entre A y B cuya distancia d sea cero

  (pues $d(x,x) = 0$)

- Pero similarmente a a), si al tomar clausura de un conjunto agregamos elementos de la frontera que no pertenecían al conjunto, podemos medir una distancia menor y perder la igualdad de $\hat{d}$.

Armo contraejemplo:

Sean:

$$E = \mathbb{R} \quad , \quad d(x,y) = |x-y|$$

$$A = (0,1) \implies \bar{A} = [0,1]$$

$$B = \{0\} \implies \bar{B} = \{0\}$$

De b) tenemos que

$$d(A,B) > 0$$

Pero

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{0\}$$

A partir de A, B particulares, obtuve

$$\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

Pero también

$$d(A,B) > 0$$

$$\therefore \hat{d}(A,B) = 0 \not\Leftarrow \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

$\therefore$ es Falso.

d) $\hat{d}(A,B) \overset{?}{\leq} \hat{d}(A,C) + \hat{d}(C,B)$

Idea:

- Al final del ejercicio se pide concluir que $\hat{d}$ no es una distancia.

- Pero sí valen las primeras dos condiciones de distancia:

1) $\hat{d}(A,B) \geq 0 \quad \forall a,b \in A,B$

y $\hat{d}(A,B) = 0$

2) $\hat{d}(A,B) = \hat{d}(B,A)$

- Por lo que debe darse el caso en que no se cumple la desigualdad triangular.

Idea para construir contraejemplo

Quiero probar que:

$$\hat{d}(A,B) \not\leq \hat{d}(A,C) + \hat{d}(C,B)$$

o sea

$$\hat{d}(A,B) > \hat{d}(A,C) + \hat{d}(C,B)$$

para alguna elección de $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Sé que

$$\hat{d}(X,Y) = 0 \quad \text{si} \quad X \cap Y \neq \phi$$

y

$$\hat{d}(X,Y) > 0 \quad \text{si} \quad X \cap Y = \phi$$

Con lo que quiero obtener

$$\underbrace{\hat{d}(A,B)}_{\substack{\text{Quiero} \\ >0}} > \underbrace{\hat{d}(A,C)}_{\substack{\text{Quiero} \\ =0}} + \underbrace{\hat{d}(C,B)}_{\substack{\text{Quiero} \\ =0}}$$

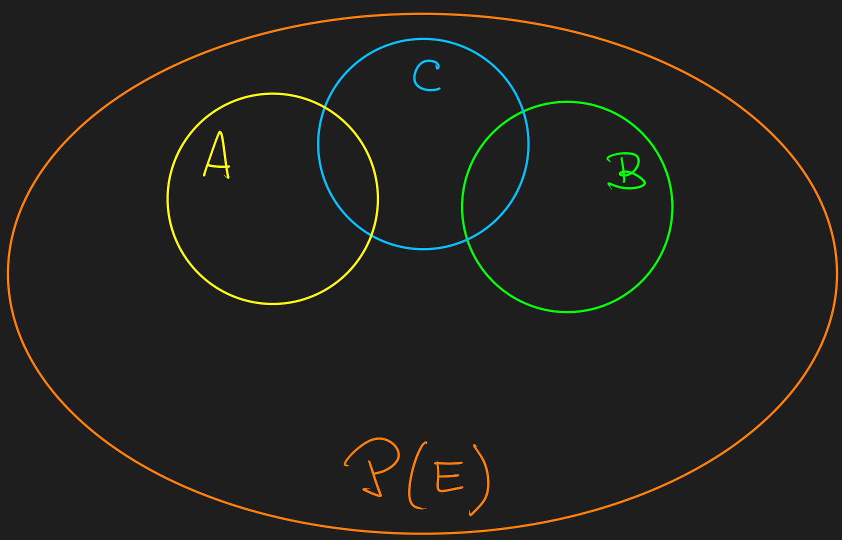
Quiero:

$$\hat{d}(A,B) > 0 \iff A \cap B = \phi$$

$$\hat{d}(A,C) = 0 \iff A \cap C \neq \phi$$

$$\hat{d}(C,B) = 0 \iff C \cap B \neq \phi$$

Graficamente



Concretamente

$E = \mathbb{R}$

$A = \{1\}$

$B = \{99\}$

$C = \{1, 99\}$

$$\underbrace{\hat{d}(A,B)}_{>0} > \underbrace{\hat{d}(A,C)}_{=0} + \underbrace{\hat{d}(C,B)}_{=0}$$

$A \cap B = \phi$ $\quad$ $A \cap C = \{1\} \neq \phi$ $\quad$ $C \cap B = \{99\} \neq \phi$

$$\therefore \hat{d}(A,B) \not\leq \hat{d}(A,C) + \hat{d}(C,B)$$

con lo que d) es Falso.

Y con esto, como no vale la desigualdad triangular,

$\Rightarrow$ $\hat{d}$ no es una distancia.