Daniel

Saturno 26 de Marzo

Cardinalidad

- **Def** :

  X, Y tienen el mismo cardinal (o son coordinables)

  si $\exists f: X \to Y$ biyectiva

  correspondencia 1 a 1

$X \quad Y$

- **Notación**

  $X \sim Y$

Ejemplo

Si $X = \mathbb{N}$

$Y = \{\text{naturales pares}\}$ ↙ Y parecería "más chico" que X PERO tienen el mismo cardinal.

$f: X \to Y$

$f(k) = 2k$ ← es biyectiva

$\Rightarrow X, Y$ tienen el mismo cardinal!

Prop:

$\sim$ es relación de equivalencia

Dem :

- Reflexiva?

$X \overset{?}{\sim} X$? sí! la función identidad $f(x) = x$ con $x \in X$ ✓

- Simétrica?

$$X \sim Y \overset{?}{\Rightarrow} Y \sim X$$

Sí, pues $X \sim Y \Rightarrow \exists f$ biyectiva con $f: X \to Y$

entonces también $\exists f^{-1}$ biyectiva con $f^{-1}: Y \to X$

$$\therefore X \sim Y \Rightarrow Y \sim X \quad ✓$$

- Transitiva?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } X \sim Y \\ \text{y } Y \sim Z \end{array}\right\} \Rightarrow X \overset{?}{\sim} Y \text{ ?}$$

$X \sim Y \Rightarrow \exists f$ biy. con $f: X \to Y$

$Y \sim Z \Rightarrow \exists g$ biy. con $g: Y \to Z$

$\Rightarrow \exists h$ biyectiva / $h = g \circ f$ con $h: X \to Z$ ✓

$\therefore \sim$ es relación de equivalencia

▨

Utilidad aplicada:

- Comparo 2 conjuntos contra $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (conjuntos "patrones"/"clásicos")

y si son coordinables $\Rightarrow$ son coordinables entre ellos:

i.e.: $\left.\begin{array}{l} A \sim \mathbb{N} \\ B \sim \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim B$

Ejemplo 2:

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & \text{si es par} \\ -\dfrac{k-1}{2} & \text{si es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 3

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

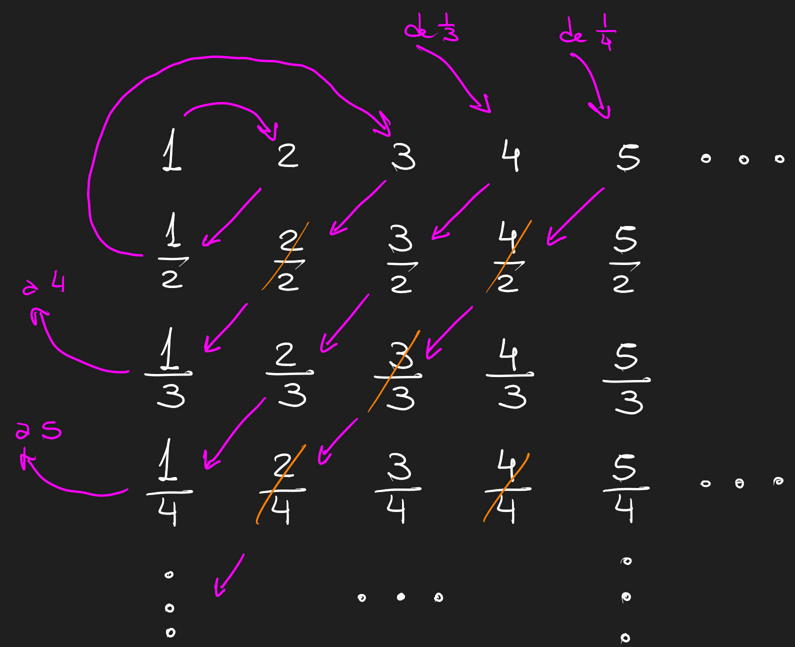
Idea:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\vdots & & \cdots & & \vdots &
\end{array}$$

Tacho repetidos

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \cancel{\frac{4}{2}} & \frac{5}{2} & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{3}{3}} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \\
\frac{1}{4} & \cancel{\frac{2}{4}} & \frac{3}{4} & \cancel{\frac{4}{4}} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\vdots & & \cdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Recorro en Diagonales



Def:

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X

$$\#X = \mathrm{Card}(X) = \{ Y : X \sim Y \}$$

(no es un número como en conjuntos finitos)

Cardinales con nombre

$\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (Aleph cero)

$\#\mathbb{Z} = \aleph_0$

$\#\mathbb{Q} = \aleph_0$

$\#\text{Pares} = \aleph_0$

Biyección

$\#\mathbb{R} = c$

$I_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\} \leftarrow$ finito

$\#I_n = n$

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m \iff n = m$$

(Casi trivial, pero hay que probarlo)

Def:

Un conjunto es finito si

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, A \sim \mathbb{I}_n$$

(y tendrá cardinal $= n$)

Def

Un conjunto es infinito

si no es finito

Def:

Un conjunto A es numerable

si $A \sim \mathbb{N}$

equivalentemente

si $\#A = \aleph_0$

Decimos

"Contable" o "a lo sumo numerable"

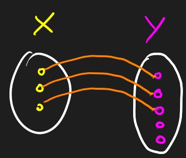
para decir: finito y numerable.

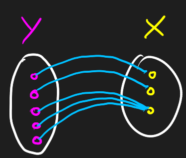
Quiero definir un orden entre cardinales

$\#X = \#Y$: $\exists f$ Biyectiva

Def. clásica ?

$$\#X \leq \#Y : \begin{cases} \exists f \text{ inyectiva} \quad f: X \to Y \\ \exists g \text{ suryectiva} \quad g: Y \to X \end{cases}$$





equivalentes

$\#X < \#Y$: $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$

(no hay f biyectiva)

Notar:

que pueden existir funciones no biyectivas

y otras biyectivas entre los mismos conjuntos

ej: $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$f_1(k) = k$ ← inyectiva, no biyectiva (no suryectivas)

pero

$$f_2(k) = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{pares} \\ \frac{k-1}{2} & \text{impares} \end{cases}$$ ← biyectiva.

También hay suryectivas, no biyectivas (no inyectivas)

Resumiendo, puedo tener los 3 casos entre mismos conj:

- Inyectivas, NO Biyectivas (NO sobre)
- Suryectivas, NO Biyectivas (NO inyect)
- Biyectivas

Preguntas

$\boxed{1}$

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

$\boxed{2}$

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

si a $\mathbb{N}$ le agregamos un montón de números para obtener $\mathbb{Q}$, el cardinal ni se entera.

$\boxed{3}$

Supongamos que $\#A \leq \#B$ y que $\#B \leq \#A$.

¿Es cierto que $\#A = \#B$?

Si $\exists f : A \to B$ inyectiva

y $\exists g : B \to A$ inyectiva

Habrá una

$h : A \to B$ biyectiva?

ésto lo contestaremos más adelante

$\boxed{1}$

De f

Dado un conjunto X,

el conjunto de partes de X es

$$\mathcal{P}(X) = \{ A : A \subset X \}$$

Teorema de Cantor

Sea X un conjunto,

$\Rightarrow \quad \# X < \# \mathcal{P}(X)$

estricto!

Dem:

2 partes

1) Probar que

$$\# X \leq \# \mathcal{P}(X)$$

eg: Buscar alguna función inyectiva

$$f : X \to \mathcal{P}(X)$$

2) $\# X \neq \# \mathcal{P}(X)$

eg: Mostrar que no hay ninguna biyectiva

Siempre que querramos probar desigualdad entre cardinales, son esos dos pasos.

1) qvq $\quad \# X \overset{?}{\leq} \# \mathcal{P}(X)$

Busco f inyectiva

$f : X \to \mathcal{P}(X)$

$f(x) = \{x\}$ inyectiva ✓

otra función

$g(x) = \underbrace{X \setminus \{x\}}_{\text{complemento de } \{x\}}$ inyectiva ✓

$\therefore$

$\# X \leq \# \mathcal{P}(X)$

2) ¿$\nexists g : X \to \mathcal{P}(X)$ Biyectiva?

Sea $g : X \to \mathcal{P}(X)$ una función

Veremos que g no puede ser suryectiva

Obs:

- $x \in X$ "x es elemento de X"
- $g(x) \subset X$ (pues $a \subset X$ $\forall a \in \mathcal{P}(X)$)

"$g(x)$ es subconjunto de X"

Pueden pasar 2 cosas

$$x \in g(x) \quad ó \quad x \notin g(x)$$

Armo

$$B = \{ x \in X \; / \; x \notin g(x) \} \subset X$$

$$(B \in \mathcal{P}(X))$$

Veamos que

$B \notin \operatorname{Im}(g)$ $\quad$ ($\therefore$ g no es suryectiva)

Supongo que

$$B \in \operatorname{Im}(g)$$

y llego a un absurdo

(proceso similar al de la Paradoja de Rasell)

Supongo

$$\exists\, y \in X \; / \; g(y) = B$$

- Si $y \in B$

$\Rightarrow \quad y \in B$

pero

$$B = g(y)$$

$\Rightarrow \quad y \in g(y)$

donde B era de la forma

$$B = \{ x \in X \ / \ x \notin g(x) \}$$

por lo que

$$y \notin B$$

- Si $y \notin B$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{y \notin g(y)}_{\text{condición para estar en } B}$$

$\Rightarrow \quad y \in B$

$$\therefore \quad y \notin B \ \wedge \ y \in B$$

Abs!

$\therefore$

$$\nexists\, y \in X \ / \ g(y) = B$$

Preguntar

- Sabemos que siempre podemos encontrar un conj. con mayor cardinalidad.

$$\# X < \# \mathcal{P}(X) < \# \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) < \dots$$

Pero siempre hay "algo" intermedio entre 2 cardinales?

o tenemos una noción similar a $\mathbb{Z}$?

- Hay muchos conj. vacíos?

Sí, pues $A \cap B$ no tendría sentido si $A \subseteq X$

y $B \subseteq Y$

con $X \cap Y = \phi$