Resumen definiciones primer parcial Analisis Avanzado LCD (05/2021)

Cotas superiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una *cota superior de A* si $c \geq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado superiormente* si tiene una cota superior.

Principio de Arquímedes

Si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$.

A la menor cota superior es de un conjunto A (acotado superiormente y no vacío) la llamamos *supremo de A*

Definición de Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

Observación

- El supremo es único. hay que probarlo (Ejercicio)
- La existencia del supremo se debe al axioma de completitud de $\mathbb{R}$.

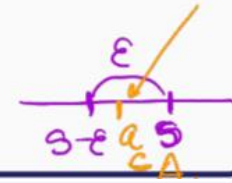
Todo conjunto $\neq \emptyset$ y acotado sup de $\mathbb{R}$ tiene sup.

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a') $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \varepsilon$.



Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Cuando el supremo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *máximo de A* y lo notamos $\max(A)$.

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Si existe $t \in \mathbb{R}$ cota superior de A tal que $t \in A$, entonces A tiene máximo y $\max(A) = t$.

Cotas inferiores

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Decimos que $d \in \mathbb{R}$ es una *cota inferiori de A* si $d \leq x$ para todo $x \in A$.

Un conjunto se dice *acotado inferioirmente* si tiene una cota ~~superior~~. inf.

Definición de Ínfimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Un número $i \in \mathbb{R}$ se dice *ínfimo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

(a) $i \leq x$ para todo $x \in A$; (cota inf).

(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \leq x$ para todo $x \in A$, entonces $t \leq i$.

⇒ t cota inf. i mayor cota inf

Equivalencia 1

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente y sea $i \in \mathbb{R}$. Entonces $i = \inf A$ si y sólo si i cumple:

(a') $i \leq x$ para todo $x \in A$;

(b') para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a < i + \varepsilon$.

Nombre - Notación

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Cuando el ínfimo de A es un elemento de A, entonces lo llamamos *mínimo de A* y lo notamos $\min(A)$.

Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Si existe $t \in \mathbb{R}$ cota inferior de A tal que $t \in A$, entonces A tiene mínimo y $\min(A) = t$.

Sucesiones

Recordemos...

Una sucesión es un función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notación: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición de límite

Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales *converge* a un número $\ell \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\underbrace{|a_n - \ell| < \varepsilon}_{-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Límites a infinito

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *diverge (a +infinito)* si para todo $M > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Notación:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se dice *acotada (sup., inf., a secas)* si el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado (sup., inf, a secas respectivamente).

Equivalentemente (para acotada): existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces,

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$;

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(4) Si $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

(5) Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \leq b$.

Equivalencia 2

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a") $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b") existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice:

- *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona* si es creciente o decreciente.

Teorema

Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.

Subconjuntos de $\mathbb{N}$

Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

Principio de buen ordenación

(i) $\boxed{A \text{ tiene primer elemento;}}$ ≡ ppio de inducción.

(ii) Si A es acotado, tiene último elemento.

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Proposición

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$;
- $\#\mathbb{R} = c$;
- $\#\{1, 2, \ldots, n\} = n$

Definición

Llamemos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ al intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ si y sólo si $n = m$.

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición

Un conjunto A es infinito... si no es finito.

Definición

Un conjunto A es numerable si $A \sim \mathbb{N}$.

Equivalentemente, si $\#A = \aleph_0$.

$\#A = \#B$ significa que existe $f : A \to B$ biyectiva.

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Ejercicio:
Existe $f : X \to Y$ inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ suryectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

Definición
Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de* X es $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subset X\}$.

Teorema (Cantor)
Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

Observación
Si X es numerable si y sólo si X se puede escribir como una sucesión de elementos distintos: $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

Teorema
Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Teorema
Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Observación
Decir que X tiene un subconjunto numerable es lo mismo que decir que existe una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en X. Entonces, el teorema dice que $\aleph_0 \leq \#X$ para todo X infinito.

Proposición
Si X es infinito, existe $Z \subset X$, Z numerable, tal que $X \sim X \setminus Z$.

Proposición
Si X es infinito, existe $Z \subset X$, Z numerable, tal que $X \sim X \setminus Z$.

Ejercicio
Si A es numerable y $B \setminus A$ es infinito, entonces $B \setminus A \sim B$.

Ejercicio
Si X es infinito y A numerable, entonces $X \sim X \cup A$.

Corolario
Un conjunto es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio.

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Corolario
La relación $\leq$ entre cardinales es una relación de orden.

Definición

Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E,d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia euclídea como

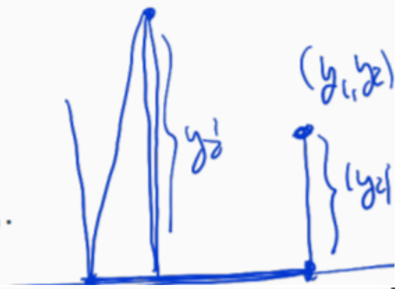
$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

La distancia 1 está dada por

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_1.$$

La distancia infinito está dada por

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty.$$



Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$$d_\infty(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos distancias que definimos en $C([a, b])$ son muy distintas.

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \\ d_1(x, y) &= \int_a^b |x(t) - y(t)| dt. \end{aligned}$$

Definición

Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en E como

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}.$$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación $\Longleftrightarrow G = G^\circ = \{x \in G : x \text{ es int}\}$

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

Observación

El conjunto E es abierto.

El conjunto $\emptyset$ es abierto.

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(iii) A° es un conjunto abierto.

(iv) Si G es abierto y $G \subset A$, entonces $G \subset A^\circ$.

A° es el MAYOR abierto contenido en A.

Teorema

La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.

↳ FINITA O INFINITA

La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

Definición

Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Observación

El conjunto V es un entorno de x si y sólo si $x \in V^o$.

Un conjunto G es abierto si y sólo si es un entorno de cada $x \in G$.

EOBRE.

Definición
Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, existe $a \in A$, tal que $a \in B(x,r)$.

Definición
La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Proposición
Sean $A, B \subset E$.

(i) $A \subset \bar{A}$.

(ii) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema
A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

$\boxed{A^c = E \setminus A}$

Observación
(i) $\bar{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

Teorema
(i) La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.

(ii) La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

Definición

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x.

Definición

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Teorema

Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

Corolario

A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

Definición

Dado $A \subset E$, decimos que x es un punto de la frontera de A si para todo $r > 0$, se cumple

$$\boxed{B(x, r) \cap A \neq \emptyset,} \quad \boxed{B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset.}$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos ∂A. ∂A.

Proposición

Sea $A \subset E$. Entonces $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Definición

$f : E \to \mathbb{N} \quad f(n) = x_n.$

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in B(x, \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$

Definición

Sean d, d' dos métricas sobre E. Decimos que son topológicamente equivalentes si los conjuntos abiertos de (E, d) y de (E, d') son los mismos.

Teorema

Sean d, d' dos métricas sobre E.
Las métricas son equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$, y $r > 0$, existen r_1 y r_2 tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subset \boxed{B_d(x, r)} \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subset B_{d'}(x, r).$$

Proposición

Sean d, d' dos métricas equivalentes sobre E y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente para d si y sólo si es convergente para d'.

Sean d, d' dos métricas sobre E. Si existen $C_1, C_2 > 0$ tale que

$$\boxed{C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \overset{(\leq)}{\,} C_2 d(x, y)}$$

para todos $x, y \in E$, entonces d y d' son equivalentes.

Definición
Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Observación
Un punto aislado de A pertenece a A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué (siempre está en $\bar{A}$).

Proposición
Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = x$.

(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos distintos tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = x$. Ejercicio

Definición
Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice es acotada si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $x_n \in B(x, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema
Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Definición

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno V de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un entorno de x.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.

En otras palabras, f es continua en x si y sólo si cumple:

- para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a x, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset E'$ converge a $f(x)$.

Definición

Una función $f : E \to E'$ es continua en E si es continua en todo punto $x \in E$.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de E' es abierto en E.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si para todo $A \subset E$,

$$\boxed{f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.}$$

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

Definición equivalente

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposición

Sea $f : E \to E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Teorema

Sea $f : E \to E'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$\boxed{d'(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y),}$$

$\forall x, y \in E$

entonces f es uniformemente continua.

f es LIPSCHITZ CON CONSTANTE C.

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Observación

Si E y E' son espacios métricos homeomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de E y E'

$f : E \to E'$. HOMEOMORFISMO.

Definición

Si $f : E \to E'$ satisface $\boxed{d(x, y) = d'(f(x), f(y))}$, $\forall x, y \in E$ diremos que f es una isometría.

Observación

Toda isometría es uniformemente continua.

Si $f : E \to E'$ es una isometría biyectiva, entonces ~~tanto~~ f^{-1} también es una isometría (y por lo tanto es uniformemente continua).

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice denso (en E) si $\overline{D} = E$.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Es decir: K es compacto si y sólo si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in K$ tal que $\boxed{\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x}$.

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto $\boxed{\text{si y sólo si}}$ es cerrado y acotado.

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

- E es cerrado:
- E es acotado:
- E no es compacto. $\boxed{E \cap 3}$ los sec. convergentes

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ un compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.

Corolario

Intersección (arbitraria) de conjuntos compactos, es compacta.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo $A \subset K$ infinito tiene un punto de acumulación en K.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición

Un *cubrimiento por abiertos* de K es una familia $(V_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de E tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Definición

Cuando existen $i_1, i_2, \ldots, i_N \in I$ tales que

$$K \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_N}$$

decimos que $(V_{i_k})_{k=1}^{N}$ es un *subcubrimiento finito* de $(V_i)_{i \in I}$.

Teorema

Sean (E, d), (E', d') e.m. y sea $f : E \to E'$ continua. Si $K \subset E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E'.

Corolario

Sea $K \subset E$ compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,

- f es acotada en K: existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$.
- f alcanza su máximo y su mínimo en K.

Teorema

Sean (E, d), (E', d') e.m., y sea $f : E \to E'$. Si f es continua y E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

¡Éxitos!