Vicky

Mercury 21 Abr

O O O

↑

vs!

Funciones Continuas

Def

Una función

$$f : E \to E'$$

es continua en el punto

$$x \in E$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ \text{si } y \in E \wedge d(x,y) < \delta$$

$$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

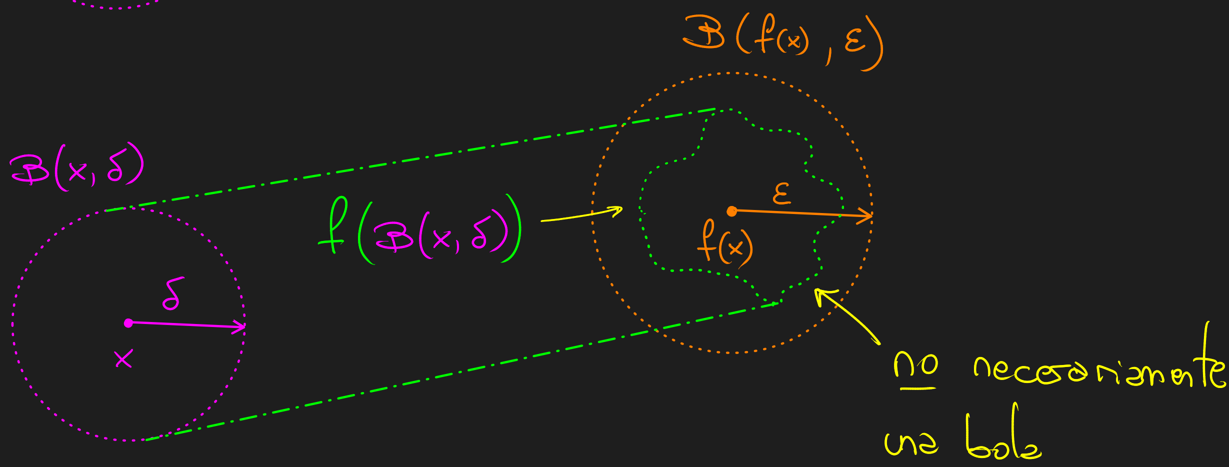
Equivalentemente

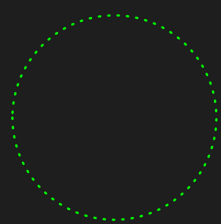
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$$

$$\forall y \in B(x, \delta)$$

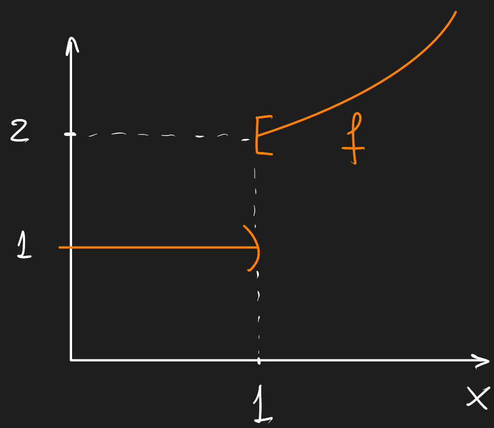
es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ / \ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$





Ej de no continua

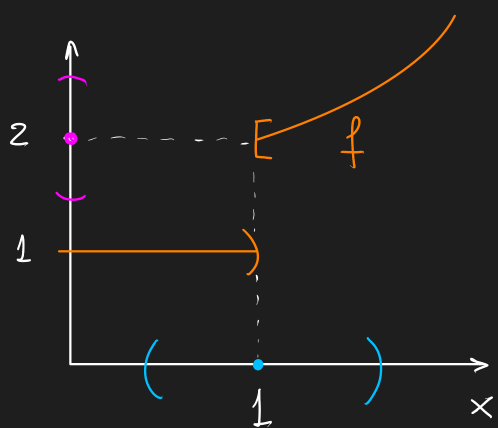


f no es continua en $x = 1$

pues:

$$f(1) = 2$$

$$\Rightarrow B(x, \delta) \underset{\substack{\uparrow \\ x=1 \\ \delta = ?}}{=} B(1, \delta)$$



y

$$B(f(x), \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ f(1) = 2 \\ \underbrace{\varepsilon = \frac{1}{2}}_{\text{elijo}}}}{=} B\left(2, \tfrac{1}{2}\right)$$

¿Vale que

$$f\big(B(1,\delta)\big) \overset{?}{\subset} B\left(2,\tfrac{1}{2}\right)$$

para algún δ?

No pues

$$1 \in f\big(B(1,\delta)\big)$$

pero

$$1 \notin B\left(2,\tfrac{1}{2}\right)$$

Borrador Texto Deshacer Rehacer

Observación

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Dem: $\Rightarrow$) V ent. de $f(x)$. Qvq $\exists\, U$ ent. de x / $f(U) \subseteq V$.

$\Rightarrow f(x) \in V^{\circ}$, $\exists\, \varepsilon > 0$ / $B(f(x),\varepsilon) \subseteq V^{\circ} \subseteq V$.

Como f cont en x, $\exists\, \delta > 0$ / $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$

$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V$ tomo $U = B(x,\delta)$.

$\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, \delta > 0$ / $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$.

Tomo $V = B(f(x),\varepsilon)$ q' es ent. de $f(x)$. Se q' $\exists\, U$ ent de x / $f(U) \subseteq B(f(x),\varepsilon))$. Ahora, U ent. de $x \Rightarrow x \in U^{\circ}$ y:

$\exists\, \delta > 0$ / $B(x,\delta) \subseteq U^{\circ} \subseteq U \Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq B(f(x),\varepsilon))$

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno V de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un entorno de x.

Ejemplo

1) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ los de análisis I.
$\downarrow d(x,y) = \|x-y\|$

2) E espacio métrico $\wedge$ $x_0 \in E$ aislado.
(ie: $\exists r > 0 \,/\, B(x_0, r) = \{x_0\}$.)
$\Rightarrow$ Toda función def. en E es cont. en x_0.

Si $\varepsilon > 0$, tomo $\delta = r \Rightarrow f(B(x_0, r)) = f(\{x_0\})$
$= \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

?

3) E es discreto $\Rightarrow$ toda función def en E es continua en todo punto de E.
D/ $x \in E$ $\wedge$ $f: E \to E'$
$B(x, 1/2) = \{x\} \to$ sigo como en 2).

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.

En otras palabras, f es continua en x si y sólo si cumple:

- para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a x, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset E'$ converge a $f(x)$.

Dem: $\Rightarrow$) f cont. en x. y sea $(x_n)_n \subseteq E / x_n \to x$

Qvq $f(x_n) \to f(x)$. $\equiv$ $f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)$.

$\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

$\exists \delta > 0$ / $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ (cont.).

Como $x_n \to x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $x_n \in B(x,\delta)$ $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow$ $f(x_n) \in f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, $\forall n \geq n_0$

$x_n \to x$; $\hookrightarrow$ continuidad.

$\Leftarrow$) Sup. que f no es cont. en x. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ / no hay $\delta > 0$ que cumpla q' $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

$\forall \delta > 0$ $\exists$ $y \in B(x,\delta)$ / $f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$\delta = 1/n \Rightarrow \exists$ $y_n \in B(x, 1/n)$ / $f(y_n) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$d(x, y_n) < 1/n \to y_n \to x$.

$d(f(x), f(y_n)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(y_n) \not\to f(x)$ } ABS!

Ejemplo

$E = \mathcal{C}([0,1])$ d_∞.

$\varepsilon_{1/2} : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$f \longmapsto f(1/2)$

$\varepsilon_{1/2}$ es continuo $\forall f$.

Sea $f_n \to f$ en d_∞ qvq $\varepsilon_{1/2} f_n \to \varepsilon_{1/2} f$.

$$|\varepsilon_{1/2} f_n - \varepsilon_{1/2} f| = |f_n(1/2) - f(1/2)|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)|$$

$$= d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$$

$(f_n \to f)$

Def :

Una función $f : E \to E'$ es continua en E si es continua en todo punto $x \in E$.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de E' es abierto en E.

f cont $\iff$ $\underset{\underset{E}{\cap}}{f^{-1}(U)}$ es abierto $\forall\, U \subseteq E'$ abierto

Las funciones continuas tiran abiertos hacia atrás en abiertos

Dem:

sup f cont

Dem: $\Rightarrow$) Sea $U \subseteq E'$ abto qvq $f^{-1}(U)$ es abto en E.

Sea $x \in f^{-1}(U)$. Como $f(x) \in U$, $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$

(U abto) $\underset{\text{cont}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta > 0 \,/\, f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$.

$\Rightarrow B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subseteq \underline{f^{-1}(U)}$. $\therefore$ es abto.

Preimagen

Por qué es abierto?

$\odot \subseteq \square$ y no ser abierto

?

Sup $f^{-1}(U) \subseteq E$ es abierto $\forall\, U \subseteq E'$ abierto

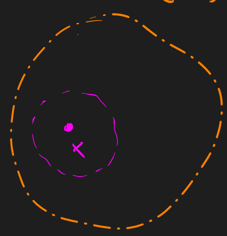
$\Leftarrow$) Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, qvq $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(B(x,\delta)) \subseteq \underline{B(f(x),\varepsilon)}$

$U = B(f(x),\varepsilon)$ es abto $\Rightarrow f^{-1}(U)$ también y

$x \in f^{-1}(U) \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq U = B(f(x),\varepsilon)$.

$f^{-1}(U)$



Prop: f cont. en E $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ es cerrado en E $\forall F \subseteq E'$ cerrado.

Ejercicio

Ver que lo mismo vale cambiando abiertos por cerrados.

Ejercicio! Probar ↑.

Si vale:

$$f^{-1}(F) \text{ es cerrado en } E \quad \forall F \subseteq E' \text{ cerrado}$$

qvq:

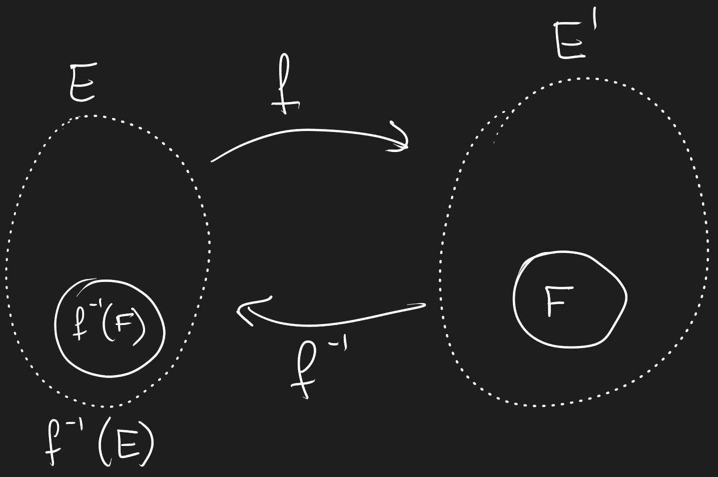
- es continua:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; / \; \underbrace{f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)}$$

la def de cont. no usa los bordes del intervalo / conj.

ó

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1}\big(B(f(x),\varepsilon)\big)$$



Si F es cerrado

$\Rightarrow F^c = E' \setminus F$ es abierto

Como

F^c abierto,

$f^{-1}(F^c)$ es abierto

$\Rightarrow$ vale lo mismo que con abiertos a abiertos

Si

$f^{-1}(F)$ es cerrado en E $\forall F \subseteq E'$ cerrado

$\updownarrow ?$

$\Rightarrow f^{-1}(F^c)$ es abierto en E $\forall F^c \subseteq E'$ abierto

$\Rightarrow$ Por Teorema "de abiertos a abiertos"

f es continua.

Si

f es continua

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ es abierto en E $\forall F \subseteq E'$ abierto

Por Teorema de abiertos a abiertos

- Como F abierto en E'

  $\Rightarrow F^c$ es cerrado en E'

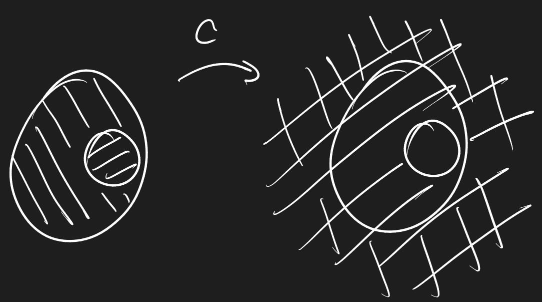
- Como $f^{-1}(F)$ es abierto en E

  $\Rightarrow f^{-1}(F^c)$ Falta probar!

$f^{-1}(F)$ es cerrado $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F^c)$ es abierto

$\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(F) \text{ es cerrado}}_{[f^{-1}(F)]^c \text{ es abierto}}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f^{-1}(F^c)$ es abierto

$\forall\, x \in f^{-1}(F^c)$, $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \subseteq f^{-1}(F^c)$



$f(B(x,\varepsilon)) \subseteq F^c$

$[f(B(x,\varepsilon))]^c \supseteq F$

$f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}[f(B(x,\varepsilon))]^c$

Ejemplo

- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |\text{sen}(xyz)| < 1/2\}$

afirmo que A es abierto.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = |\text{sen}(xyz)|$

q' es cont.

$(x,y,z) \to x.y.z$ es cont.

y sen(.) y |.| son cont $\Rightarrow$ ✓.] Ej.

$A = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ es abto.

- $\{x \in \mathcal{C}([0,1]) : x(1/2) > 0\}$ es abto.

(dos). $= \varepsilon_{1/2}^{-1}((0,+\infty))$

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si para todo $A \subset E$,

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Dem: $\Rightarrow$) $y \in f(\bar{A}) \Rightarrow y = f(x)$ para algún $x \in \bar{A}$.

Como $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A / x_n \to x$.

$\underset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{f(x_n)}_{\in f(A)} \to \underbrace{f(x)}_{= y}$, $(f(x_n))_n \subseteq f(A) /$

$f(x_n) \to y$.

$\Rightarrow y \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$) Sea $F \subseteq E'$ cerrado q.v.q. $f^{-1}(F) \subseteq E$ es cerrado.

$A = f^{-1}(F)$ q.v.q. A es cerrado. Es decir $\overline{A} \subseteq A$

$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(F)} \Rightarrow f(\overline{A}) \underset{\text{Hip.}}{\subseteq} \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F.$$

$$f(A) = f(f^{-1}(F)) \subseteq F$$

en resumen,

$$f(\overline{A}) \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(F) = A$$

$\boxtimes$