UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Teoremas de Convergencia

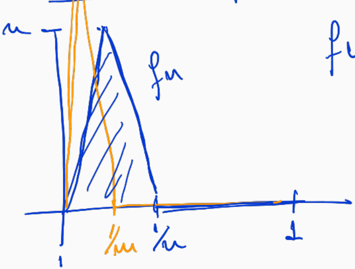
Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

- $f_n \longrightarrow f \overset{?}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu \boxed{=} \int f \, d\mu$

- No siempre



$f_n \longrightarrow 0 = f$ puntualmente.

$x \in [0,1] \quad \exists\, n_0 \,/\, \frac{1}{n_0} < x \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq n_0.$

$$\int f_n \, d\mu = \int_0^{1/n} f_n(x)\, dx = \text{área}(\Delta) = \frac{1}{2} \quad \forall n$$

$$\int f_n \not\longrightarrow \int f = 0$$

Teorema (Convergencia mayorada para acotadas)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0, 1]$ tales que $|f_n(x)| \leq M$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$ y f una función tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Teorema (Convergencia mayorada para acotadas)

Sean f_n funciones medibles definidas en $[0,1]$ tales que $|f_n(x)| \leq M$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$ y f una función tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Entonces, f es medible y acotada y

$$\boxed{\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.}$$

Dem: 1º f medible (lo vimos en la práctica).

2º Si x es tal que $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\Rightarrow |f(x)| \leq M$. $\Rightarrow f$ es acotada x M en ctp.

qvq $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. $\Rightarrow \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right|$

$\leq \int \underbrace{|f_n - f|} \, d\mu$.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos $E_n = \{ x \in [0,1] \, / \, |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \ \forall m \geq n \}$

$E_n \in \mathcal{B} \ \forall n$, $E_n \subseteq E_{n+1} \ \forall n$, $\bigcup_n E_n = E = \{ x \in [0,1] :$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \, / \, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \ \forall n \geq n_0 \}$. $\Rightarrow E \subseteq [0,1]$ $\wedge$

$\mu(E) = 1$ (pues $f_n \to f$ en ctp).

Vimos q' bajo estas condiciones, $\mu(E_n) \nearrow \mu(E) = 1$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \, / \, \mu(E_{n_0}) > 1 - \varepsilon/4M \Rightarrow \mu([0,1] \setminus E_{n_0}) < \varepsilon/4M$.

Sea $n \geq n_0$.

$$\int |f_n - f| \, d\mu = \int_{E_{n_0}} \underbrace{|f - f_n|}_{< \varepsilon/2} \, d\mu + \int_{I \setminus E_{n_0}} \underbrace{|f - f_n|}_{\leq 2M} \, d\mu$$

$$\leq \int_{E_{n_0}} \varepsilon/2 \, d\mu + \int_{I \setminus E_{n_0}} 2M \, d\mu = \varepsilon/2 \, \underbrace{\mu(E_{n_0})}_{\leq 1} + 2M \, \underbrace{\mu(I \setminus E_{n_0})}_{< \varepsilon/4M}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \cancel{2M} \cdot \varepsilon/\cancel{4M}_{2} = 2\,\varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0 \qquad \boxtimes$$

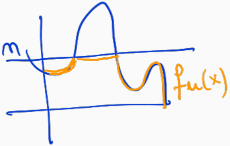
Recordemos:

Recordemos:

Sea f medible no negativa en $[0,1]$.

Recordemos:

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos



$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Recordemos:

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Definimos
$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Recordemos:

Sea f medible no negativa en $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \end{cases}$$

Como cada f_n es acotada, tenemos definida su integral $\int f_n \, d\mu$.

Definimos
$$\int f \, d\mu = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu}.$$

Decimos que f es integrable si el límite es finito.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como (lim an: lim sup an inf sup)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\liminf_{n\to+\infty} a_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

$n \to \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$\inf_{k\geq n} \{a_k\} = \alpha_n$

$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Rightarrow \sup_n \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Obs si $\exists \lim a_n \to \underline{\lim}\, a_n = \lim a_n$.

Lema de Fatou

Supongamos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesiín de funciones no negativas y medibles definidas en $[0,1]$. Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ en casi todo x, entonce

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n\, d\mu.$$

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos el límite inferior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Lema de Fatou

Supongamos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesiín de funciones no negativas y medibles definidas en $[0,1]$. Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ en casi todo x, entonce

$$\int f\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n\, d\mu.$$

- Si en particular, $\liminf_{n\to+\infty} \int g_n\, d\mu < \infty$, entonces f es integrable.

Dem: 1º f med ✓.

. Sup h es un función medible y acotada / $h(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. $\Rightarrow$ defino p/c/ $n \in \mathbb{N}$ $h_n(x) = \min\{h(x), g_n(x)\}$

Fijo x / $g_n(x) \to f(x)$ y $h(x) < f(x)$ $\Rightarrow$ para $\varepsilon = f(x) - h(x)$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

$$f(x) < \varepsilon + g_n(x) = f(x) - h(x) + g_n(x) \Rightarrow h(x) < g_n(x)$$

$\Rightarrow h_n(x) = h(x)$.

Ej verif si x / $h(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ $h_n(x) \to h(x)$

$\Rightarrow h_n(x) \to h(x)$ en ctp. como $h_n \leq \underbrace{h}_{\text{acotado}}$, $\Rightarrow$ por el teorema de conv mayorado p/acotados,

$$\int h\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int h_n\,d\mu}_{\leq \int g_n d\mu} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Como esto vale $\forall h \leq f$ acotado, vale p/ $h = f_n$ truncadas

$$\Rightarrow \int f_n\,d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu \quad \forall n \Rightarrow \int f\,d\mu \leq \underline{\underline{\lim} \int g_n d\mu}.$$

Además si $\underline{\lim} \int g_n d\mu < \infty \Rightarrow f$ integrable.

$\boxtimes$

Teorema (Convergencia mayorada para no negativas)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0, 1]$ tales que $g_n(x) \leq \phi(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$, donde ϕ es una función integrable. Supongamos que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Teorema (Convergencia mayorada para no negativas)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0,1]$ tales que $g_n(x) \leq \phi(x)$ para casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$, donde ϕ es una función integrable. Supongamos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x), \quad \text{en casi todo } x.$$

Entonces, f es integrable

$$\boxed{\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu.}$$

Teorema (Convergencia monótona)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0, 1]$ tales que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ en casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Convergencia monótona)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0,1]$ tales que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ en casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Entonces,

Teorema (Convergencia monótona)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0, 1]$ tales que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ en casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Entonces,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Teorema (Convergencia monótona)

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0,1]$ tales que $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ en casi todo x y para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Entonces,

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu.$$

En particular, f es integrable si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu < \infty$.

Dem: $f = \lim\limits_{n\to\infty} g_n \Rightarrow f$ medible

Si f es integrable, como $g_n(x) \leq f(x)$ pct x

$\Rightarrow$ $\int g_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$.

Conv mayorada

Si f no es integrable $\Rightarrow \lim \int g_n = +\infty$

Fatou $\Rightarrow \int f \, d\mu \leq \underline{\lim} \int g_n = \lim \int g_n \Rightarrow \boxtimes$.

—o—

- Conv mayorado p/ acotados.
- Fatou (no-neg)
- Conv mayorado p/ no neg (sin dem).
- Conv. monótona

Corolario

Sean g_n funciones medibles y no negativas definidas en $[0, 1]$. Entonces

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int g_n \, d\mu.$$

Dem: $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \to$ medible $\forall N$.

$S_N(x) \leqslant S_{N+1}(x) \quad \forall x \Rightarrow$ como monótona tenemos

$$\int \lim_{N\to\infty} S_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int S_N \, d\mu$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n \, d\mu$$

$$\int S_N \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{N} g_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\int g_n \, d\mu}_{\geq 0}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{ojo}}$ vale pero no lo vimos.

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu \quad \boxtimes$$

Ejercicio: f no negativa $\Rightarrow \int f d\mu = \sup_{v \in \mathcal{S}_\mu(f)} \int v \, d\mu$

De acá sale q' $\int f+g \, d\mu = \int f d\mu + \int g \, d\mu$ $\boxtimes$

Corolario

Sea f una función no negativa e integrable definida en $[0, 1]$. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos medibles del $[0, 1]$ disjuntos 2 a 2, entonces

Corolario

Sea f una función no negativa e integrable definida en $[0,1]$. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos medibles del $[0,1]$ disjuntos 2 a 2, entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu,$$

donde $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Dem: Ejercicio: $f_n = f\chi_{E_n}$. Usar el corolario anterior $\boxtimes$