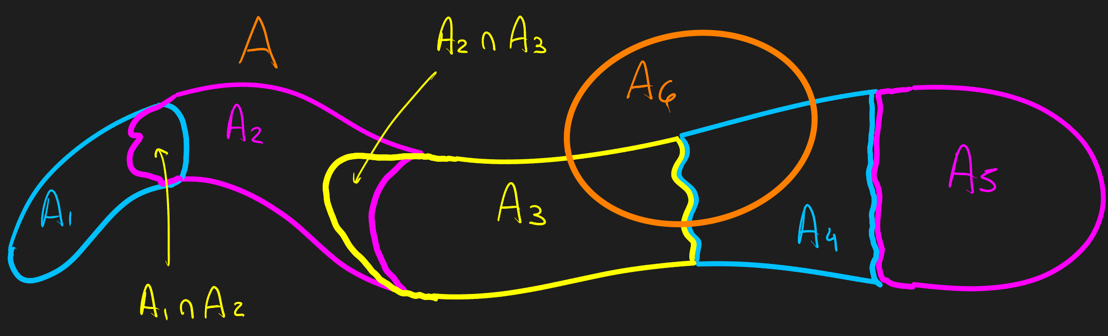
Análisis Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2021

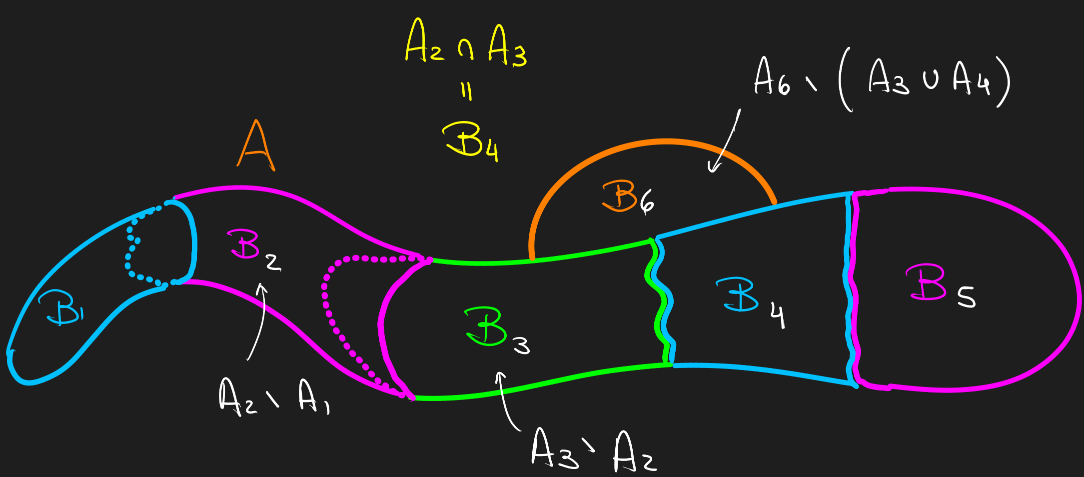
Práctica 2

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Diagrama ((A_n) tiene infinitos conjuntos, no 6)



Quiero



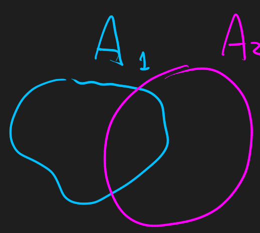
Tomo cada A_n

Lo vuelvo disjunto con los elementos de (A_n) que ya recorrí:

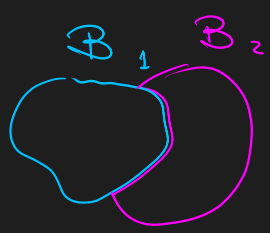
Tengo

$B_1 := A_1$

Ahora, A_2 puede ser $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

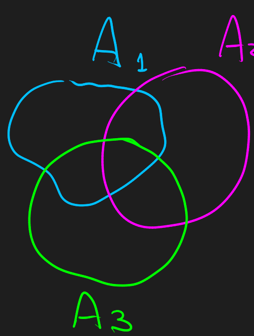


Como quiero que sean disjuntos



$B_2 := A_2 \setminus A_1$

Podría tener el caso



$\Rightarrow B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$

Entonces si

para cada B_n

tomo A_n y le quito todo elemento compartido con los A_i con $i < n$

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{n-1} A_i$$

Caso Base

$B_1 = A_1$ ← disjunto con los anteriores

Paso Inductivo

Si $B_n = A_n \setminus \bigcup_{n-1} A_i$

$A_n = B_n \uplus \left(\biguplus_{n-1} B_i \right)$

↖ También es unión disjunta.

qvq

$$A_{n+1} = B_{n+1} \overset{?}{\uplus} \underbrace{\left(\biguplus_{n} B_i \right)}_{= A_n}$$

Terminar ?

2. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ y subconjuntos A, B de X y C, D de Y, probar que

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. ¿Vale la igualdad?
(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Probar que si f es inyectiva, vale la igualdad.
(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Probar que si f es suryectiva, vale la igualdad.
(g) $f^{-1}(D)^c = f^{-1}(D^c)$.

a) Sea $f(A \cup B)$

qvq

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

Si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$ (o ambas)

- Si $x \in A \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$
- Si $x \in B \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

Junto ambas

$\Rightarrow$ Si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) \in Y$

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$$

$$f(B) = \{ f(b) : b \in B \}$$

$$f(A \cup B) = \{ f(c) : c \in A \cup B \}$$

3. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Basta probar que $\sim$ es

- Reflexiva : Función identidad es biyectiva. ✓
- Simétrica : $A \sim B \equiv B \sim A$ ✓
- Transitiva : Compo de f y g ✓

Probado en Teórica 3 ó 4.

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos

$$\mathbb{Z}_{\leq -3} \qquad 5\,\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \qquad (-1,1)\cap\mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Z}_{\leq -3} = \underbrace{(-\infty, -3] \cap \mathbb{Z}}_{\text{Infinitos numerables}}$$

Como $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

y $\mathbb{Z} \sim X \qquad \forall X \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}_{\leq -3}$

o sea

$$\# \mathbb{Z}_{\leq -3} = \aleph_0$$

b) $5\mathbb{Z} = \{5 \cdot q : q \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\mathbb{Z} \text{ mult. } 5\} \subseteq \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

$$\# 5\mathbb{Z} = \aleph_0$$

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$\exists f$ biyectiva entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(q, m) = \begin{cases} 2^{q} \cdot 3^{m} & \text{si } q \geq 0 \\ 5^{|q|} \cdot 3^{m} & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \# \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \aleph_0$$

d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$

$$\therefore \left((-1, 1) \cap \mathbb{Q} \right) \sim \mathbb{Q}$$

$$\therefore \# (-1, 1) \cap \mathbb{Q} = \aleph_0$$

5. Probar que si A y B son conjuntos entonces:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

6. (a) Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es numerable y $B \setminus A$ es infinito. Probar que $B \setminus A \sim B$.

(b) Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.