Luna 5 Abril.

# Cardinalidad I

**Prop:**

$X, Y$ numerables

$\Rightarrow X \cup Y$ es numerable

**Dem:**

Tenemos 2 biyecciones

$f: X \to \mathbb{N}$ biyección

$g: Y \to \mathbb{N}$ biyección

Supongamos

$$X \cap Y = \emptyset$$

**Idea:**

$$X \cup Y = X \cup \overbrace{(Y \setminus X)}^{Y'}$$

$$X \cap Y' = \emptyset$$

Defino

$h : X \cup Y \to \mathbb{N}$

$$h(z) = \begin{cases} 2 \cdot f(z) & \text{si } z \in X \\ 2 \cdot g(z) - 1 & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Afirmo:

h es biyectiva

Dem:

Construyo $h^{-1}$:

Sea $k : \mathbb{N} \to X \cup Y$

$$k(n) = \begin{cases} f^{-1}(m) & \text{si } n = 2m \\ g^{-1}(m) & \text{si } n = 2m - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $h \circ k = id_{\mathbb{N}}$

$k \circ h = id_{X \cup Y}$

$\blacksquare$

En general

Escribamos

$$X \cup Y = X \,\dot\cup\, \underbrace{Y \setminus X}_{=:Y'}$$

Caso $Y'$ es infinito:

$\Rightarrow Y'$ es numerable.

Listo. Por el caso de arriba.

Caso $Y'$ es finito:

$$X \xrightarrow[\sim]{f} \mathbb{N}$$

biyección

$$Y' \xrightarrow[\sim]{} \{m, \dots, -2, -1, 0\} \quad m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

biyección

$\Rightarrow$ Tenemos una biyección

$$X \cup Y' \xrightarrow[\sim]{} \mathbb{N} \cup \{m, \dots, 0\}$$

$$\xrightarrow[\sim]{} \mathbb{N}$$

$$x \longmapsto x - m + 1$$

"desplazo" todos los $\mathbb{N}$ en $(-m+1)$ unidades a derecha

$\blacksquare$

**Prop:** (ej 9)

Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ con $X_n \sim \mathbb{N}$ $\forall n$

entonces

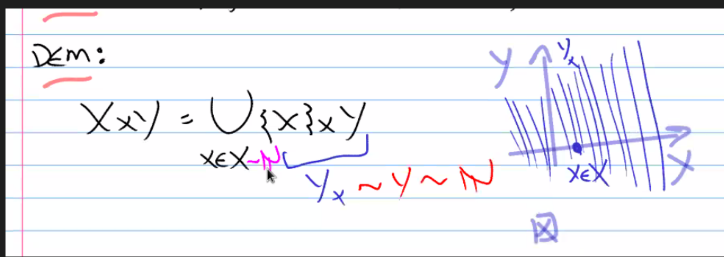
$$\bigcup_{n\geq 1} X_n \sim \mathbb{N}$$

**Corolario:**

$X, Y$ numerables $\Rightarrow$ $X \times Y$ numerables

**Dem:**

Escribo $X \times Y$ como unión de numerables.




**Dem**

Puedo escribir $X$ como

$$X = \{x : x \in X\}$$

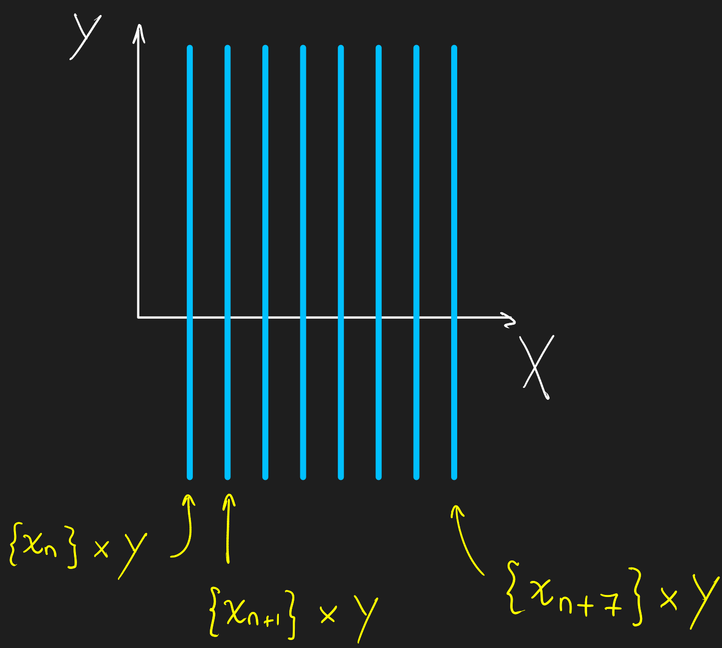
$$\Rightarrow \quad X \times Y = \{x : x \in X\} \times Y$$

↑
Como $X$ es numerable, puedo escribirlo como la unión de numerables partes.

$$= \left( \bigcup_{x \in X \sim \mathbb{N}} \{x\} \right) \times Y$$

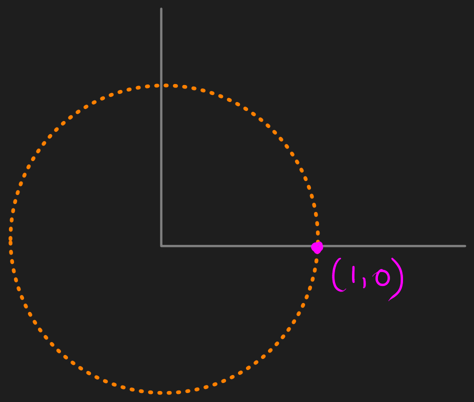
$$= \bigcup_{x \in X \sim \mathbb{N}} \{x\} \times Y$$

Como es un producto cartesiano, puedo graficarlo en el plano:



Ejemplos:

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = 1\}$




"Conjunto de Ternas Pitagóricas Enteras"

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \in A$$

Pues

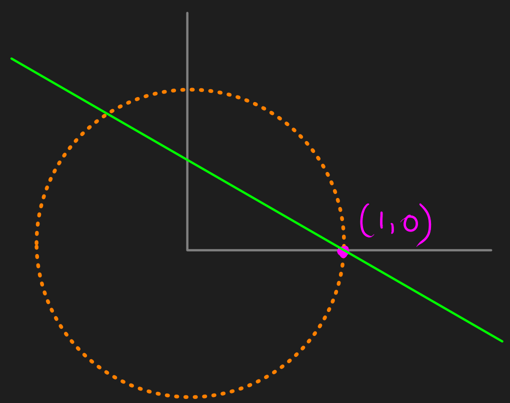
$$3^2 + 1^2 = 5^2$$

Cuántas de estas Ternas tenemos

- $\#A \leq \# \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \aleph_0$

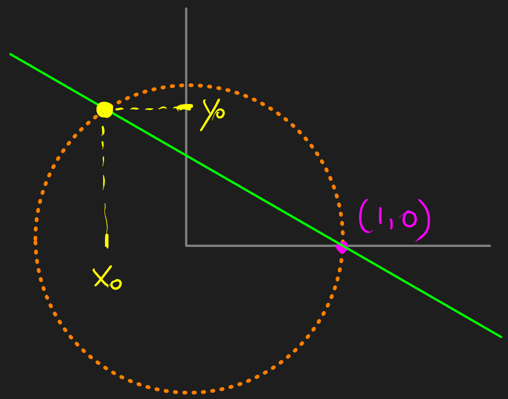
Prop anterior

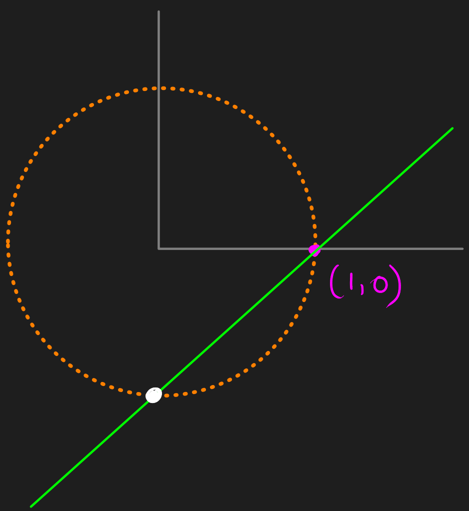
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}$ numerables

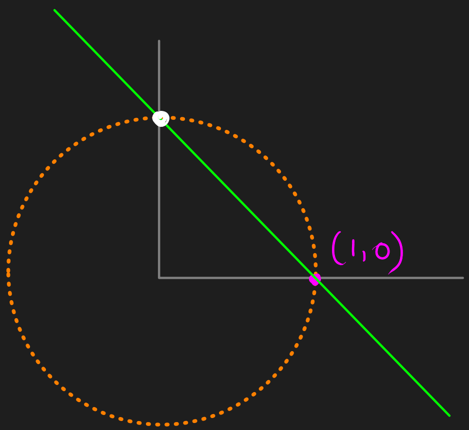



$y = t.(1-x) \qquad t \in \mathbb{Q}$

quiero puntos en $\mathbb{Q}$ !




- Sea $t \in \mathbb{Q}$

Sea $y = t(x-1)$

Resolvamos

$$1 = x^2 + t^2 \cdot (x-1)^2$$

$$= x^2 + t^2 x^2 - 2xt^2 + t^2$$

$$= (1+t^2)\, x^2 - 2t^2 + t^2$$

$$\iff (1+t^2)\, x^2 - 2t^2 + (t^2 - 1) = 0$$

Soluciones : $\begin{cases} 1 \\ x_0 = \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ¡!

Así, $y_0 = t\left(1 - \dfrac{t^2-1}{1+t^2}\right) \in \mathbb{Q}$

$$= \frac{2t}{1+t^2}$$

$\therefore$ Tenemos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\longrightarrow A \setminus \{(1,0)\} \\ t &\longmapsto \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{aligned}$$

Afirmo :

$f$ es inyectiva.

y con esto, queda demostrado que

$$\aleph_0 \leq \# A \setminus \{(1,0)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pensar}}}{=} \# A$$

Dem :

$$y_0 = t(x_0 - 1) \Rightarrow t = \frac{y_0}{x_0 - 1}$$

$\blacksquare$

2) $A = \{ z \in \mathbb{C} : (\exists f \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}) , f(z) = 0 \}$

Polin. con coefs. racionales sin el polinomio nulo.

"Números algebraicos"

Ej:
- $z \quad \forall z \in \mathbb{Q} \quad (f = X - z)$
- $\sqrt{2} : X^2 - 2$
- $i : X^2 + 1$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} : X^4 - 10X^2 + 1$

Prop:

A es numerable,

más aún, $A \cap \mathbb{R}$ es numerable.

Corolario:

$$\underbrace{\mathbb{R} \setminus A \cap \mathbb{R}}_{=: \text{ números Trascendentes}} \sim \mathbb{R}$$

ej 6.

Ejemplos:
- $e$
- $\pi$
- ($\pi^e$ no se sabe!)

Dem :

Parto $A$ por grados de polinomios.

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

con $A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\exists f \in \mathbb{Q}_n[x]\right) f(z) = 0 \right\}$

Obs :

$$\mathbb{Q}_n[x] \sim \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{n+1 \text{ veces}} \sim \aleph_0$$

$$A_n = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}_n[x] \setminus \{0\}} \underbrace{\left\{ z \in \mathbb{C} : f(x) = 0 \right\}}_{\text{es finito}}$$

$$\Rightarrow \# A_n \leq \aleph_0$$

$$\Rightarrow \# A_n = \aleph_0$$

$\blacksquare$