

1. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Denotemos

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Probar que  $E$  es un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq S$  converge.

$\Rightarrow$ )  $\mathcal{H} : E$  es un espacio de Banach :

•  $E$  es completo

$\Rightarrow$  Toda sucesión de Cauchy

$(y_n)_n \subseteq E$  converge en  $E$

Como  $S \subseteq E$

$\Rightarrow$  Toda sucesión de Cauchy

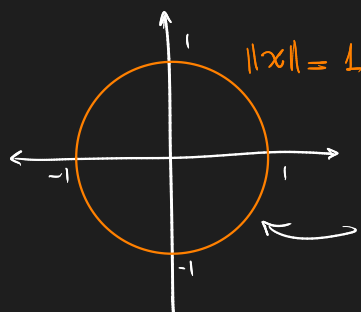
$(x_n)_n \subseteq S \subseteq E$  converge  $\checkmark$

$\Leftarrow$ )  $\mathcal{H} : Toda$  sucesión  $(x_n)_n$  de Cauchy en  $S$  converge

donde :

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

ej:  $S \subseteq E = \mathbb{R}^2$ ,  $x \in E$



Suc. de Cauchy sobre la circunferencia, (solo el borde!)

Por  $\mathcal{I}_0$ , a partir de un  $n_0$ ,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

$\Rightarrow$  Toda sucesión de Cauchy en  $S$  converge en  $S$   $\leftarrow$  ? *hace falta justificar?*

$\Rightarrow S$  es completo

? *Cómo llego a que  $E$  es completo?*

2. Consideremos la serie

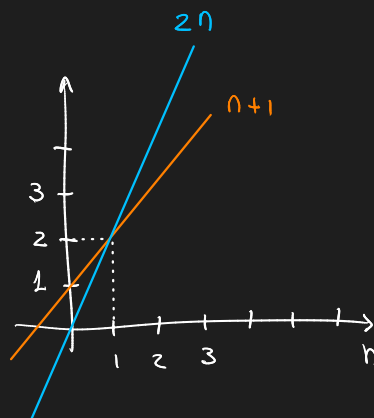
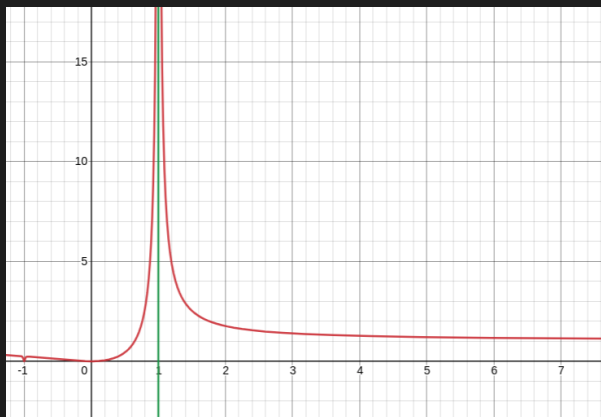
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}.$$

(a) Probar que converge uniformemente en  $[a, +\infty)$  para todo  $a > 1$ .

(b) ¿Es uniforme la convergencia en  $(1, +\infty)$ ?

$$x > 1$$

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}$$



a partir de  $n = 1$ :

$$2n > n+1$$

$$\Rightarrow x^{2n} > x^{n+1}$$

$$\forall x > 1$$

$$\forall n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} < \frac{1^{n+1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$$

1 es inf. de  $(1, +\infty)$

- pues si  $x > 1$ , el denominador crece en mayor proporción que el numerador (pues son exponenciales)

Ahora, cuando sumo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}} = \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{\text{si } x=1} + \underbrace{\frac{x^3}{1+x^4}} + \underbrace{\frac{x^4}{1+x^6}} + \dots$$

$\Rightarrow f(1) \rightarrow \infty$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{1 + x^{2n}} \stackrel{x > 1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{x^n} \cdot \left(\frac{1}{x^n} + x^n\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} \cdot 1}{\cancel{x} \cdot \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^{n-1}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 + x^{2(n-1)}}{x^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n-2}}$$

3. Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones medibles,  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que el conjunto

$$E = \{x \in [0, 1] : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge}\}$$

es medible.

$$(f_n(x)) \text{ converge} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}_{\text{converge}}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x)$$

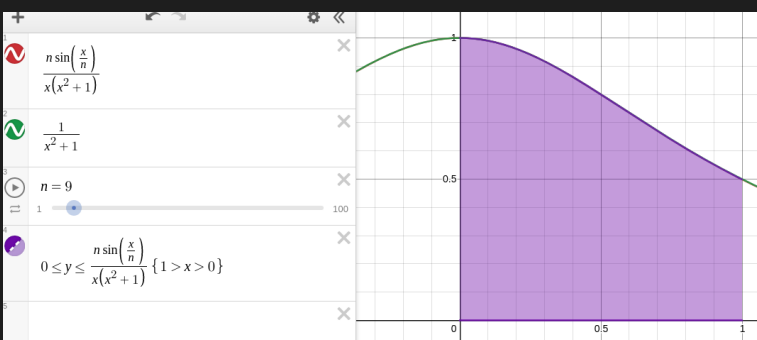
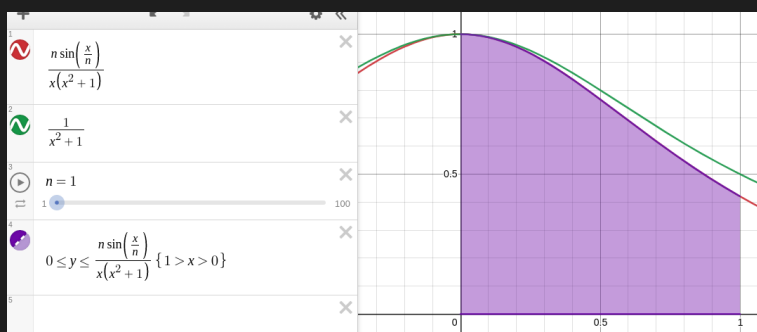
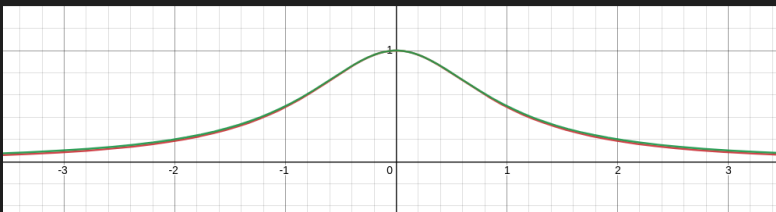
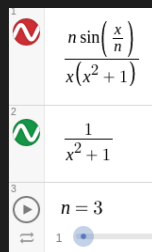
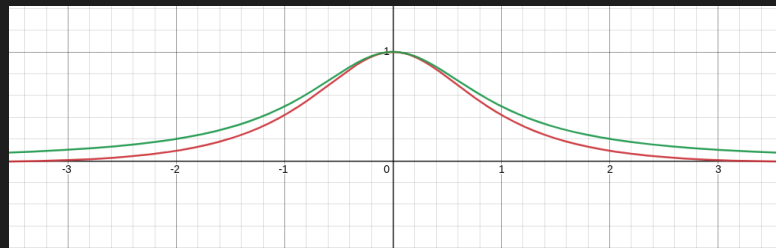
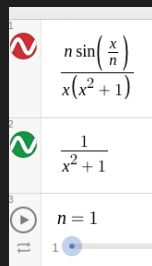
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

4. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} dx.$$

$$\left| \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} \right| \leq \left| \frac{\cancel{n} \cdot \sin\left(\frac{x}{\cancel{n}}\right)}{\cancel{x} \cdot (x^2+1)} \cdot \frac{x}{\cancel{x}} \right| = \frac{1}{x^2+1}$$

$\underbrace{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}_{\substack{< \frac{x}{n} \\ \geq 0 \geq 1}} \leq \frac{x}{n}$



$$\lim \int \square = \int \lim \square ?$$

**Criterio de Weierstrass**  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$   $X$  conj.

Supongamos dado n existe  $c_n \geq 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq c_n$  para todo  $x \in X$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de  $X$  en  $\mathbb{R}$ .

$$\underbrace{\left| \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x^2+1} \right|}_{=: g_n(x)} = \left| \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x}{x(x^2+1)} \right|$$

$\underbrace{x \in [0,1] \Rightarrow 0 < \sin x < 1}_{\substack{\geq 1 \\ 0 < x < 1}}$

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \left| \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right| = 0$$

en el límite,  $\sin \frac{x}{n}$  y  $\frac{x}{n}$  son iguales

por lo que la cota mejora cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\leq \left| \frac{\cancel{n} \cdot \frac{x}{\cancel{n}} - x}{x(x^2+1)} \right| = 0$$

$\therefore \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)}$  converge puntualmente a  $\frac{1}{x^2+1}$ .

Llamo

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Como  $0 < \frac{n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(x^2+1)} \leq f(x) \leq 1$

$$g_n(x) \leq f(x)$$

**Teorema (Convergencia mayorada para no negativas)**

Sean  $g_n$  funciones medibles y no negativas definidas en  $[0,1]$  tales que  $g_n(x) \leq \phi(x)$  para casi todo  $x$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\phi$  es una función integrable. Supongamos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x), \text{ en casi todo } x.$$

Entonces,  $f$  es integrable

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Con el otro teo sale mejor o sea (Conv. monótona)



Por Teorema de Convergencia mayorada para no negativos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{n \cdot \sin(\frac{x}{n})}{x(x^2+1)} d\mu = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+x^2} d\mu$$

↗  
Puedo usar Riemann acá?

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{tg}(x) \Big|_0^1$$