

# Sucesiones y Series de Funciones II

Dado  $X$  espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{continuas y acotadas sobre } X\}$$

y

$$B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{acotadas sobre } X\}$$

ambos con  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

## Proposición

$(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$  y  $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$  son espacios normados completos, es decir Banach.

$$(f_n)_n \subseteq C_b(X) \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$(f_n)_n$  es de Cauchy c/  $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow (f_n)_n$  es uniformemente de Cauchy.  $\Rightarrow \exists f : X \rightarrow \mathbb{R} / f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ .

•  $f$  es continua: Rta si  $x_0$  lim unif. de continuas es continua

•  $f$  es acot:  $\exists \epsilon > 0 \exists n_0 / \forall n > n_0, \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f_{n_0}(x)|}_{\leq M_{n_0}} \leq \epsilon + M_{n_0} \quad \forall x \Rightarrow f \text{ acot.}$$

$\Rightarrow f \in C_b(X) \wedge f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \quad \therefore C_b(X) \text{ completo.}$

Página siguiente

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach.

Veamos otros espacios de Banach:

# Sucesión de las Sumas Parciales

Sea  $E$  esp. de Banach

y  $(x_n)_n \subset E$  una sucesión

Definimos

$$S_N = \sum_{n=1}^N x_n$$

↑ "N-ésima suma parcial de  $(x_n)_n$ "

con

$$(S_N)_N \subset E$$

La sucesión  $(S_N)_N$  es la **sucesión de sumas parciales de  $(x_n)_n$** .

## Definición

Decimos que **la serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

**converge** cuando existe el límite  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$ .  
A ese límite, que es un elemento de  $E$ , lo llamamos  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .

Notar que es creciente si los  $x_n$  son  $\geq 0$

Observación:

Sea  $E$  es un espacio de Banach,  $(x_n)_n \subset E$  una sucesión y  $(S_N)_N$  la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge si y sólo si la sucesión  $(S_N)_N$  converge.

Como  $E$  es completo, esto sucede si y sólo si  $(S_N)_N$  es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} / \|S_N - S_M\|_E < \varepsilon \quad \forall N, M \geq N_0.$$

$$\equiv \left\| \sum_{m=N+1}^M x_m \right\| < \varepsilon$$

$$\sum_{m=N+1}^M x_m = \sum_{m=1}^M x_m - \sum_{m=1}^N x_m$$

$$\forall N, M \geq N_0.$$

Recordemos...

En  $\mathbb{R}$ ,  $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ ,  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right| < \infty$  convergente absoluta.

### Definición

Decimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge absolutamente en  $E$  si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Serie de números reales!

### Proposición

Sea  $E$  es un espacio de Banach y  $(x_n)_n \subset E$  una sucesión. Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge absolutamente, entonces converge.

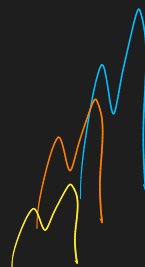
Def: qvq  $\sum_{u=1}^{\infty} x_u$  conv en  $E$  es decir qvq  
 $S_N = \sum_{u=1}^N x_u \Rightarrow (S_N)_N$  es de Cauchy en  $E$   
 $\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{u=N+1}^M x_u \right\| \leq \boxed{\sum_{u=N+1}^M \|x_u\|}$   
 $\sum_{u=1}^M \|x_u\| - \sum_{u=1}^N \|x_u\|$

↑  
 ↑  
 Convergencia Absolutamente

Como  $\sum_{u=1}^{\infty} \|x_u\|$  conv  $\Rightarrow \left(\sum_{u=1}^N \|x_u\|\right)_N$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}$   
 Dado  $\varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} / N, M \geq N_0 \Rightarrow$   
 $\sum_{u=N+1}^M \|x_u\| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow \|S_M - S_N\| \leq \sum_{u=N+1}^M \|x_u\| < \varepsilon$  si  $N, M \geq N_0$ .  
 $\therefore (S_N)_N$  es de Cauchy en  $E$  y  $\therefore$  converge.

□

## Series de Funciones



Sea  $X$  un conjunto y consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  una función  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

$E_f$ :  
 $\mathcal{C}_b(X)$ ,  $\mathcal{B}(X)$   
 ↑  $f$  continuas y acotadas  
 ↙  $f$  acotadas

Para cada  $N$ , tenemos la función:

"Suma Parcial"

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge (puntual o uniformemente) en  $X$  si la sucesión de funciones  $(S_N)_N$  converge (puntual o uniformemente) en  $X$ .

Si tenemos la suerte de que las  $f_n$

sean:

- Continuas y Acotadas
- Acotadas
- Están definidas en un  $E'$  compacto

$\Rightarrow$  Podemos usar herramientas de espacios de Banach

**Criterio de Weierstrass**  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$   $X$  conj.

Supongamos dado  $n$  existe  $c_n \geq 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq c_n$  para todo  $x \in X$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  converge, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de  $X$  en  $\mathbb{R}$ .

Dem:

- Notar que como todos los  $|f_n(x)| \leq C_n$  ↙ todos acotados!

$$\Rightarrow f_n \in \mathcal{B}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↑  
espacio de Banach de funciones acotadas

- Notar además que

$$S_N = \sum_{n=1}^N f_n \leq \sum_{n=1}^N C_n$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N f_n \in \mathcal{B}(X)$$

Ahora, qvq

$(S_N)_N$  es de Cauchy en  $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$

y de este espacio, sé que

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$  Convergencia uniforme de funciones

1°) Como  $|f_n(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X$

$$\Rightarrow \|f_n(x)\|_\infty \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• Si miro

$$\|S_M - S_N\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^M f_n(x) \right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^M \|f_n(x)\|_\infty$$

$$\textcircled{\star} \leq \sum_{n=N+1}^M C_n$$

?  
Converge porque  
 $M-N$  es finito?

Como  $\sum_{n=N+1}^M C_n$  converge (en  $\mathbb{R}$ )

$\Rightarrow \left( \sum_{n=N+1}^M C_n \right)_N$  es de Cauchy wat?

• sea:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid N, M \geq N_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^M C_n < \varepsilon$$

← A partir de un punto la cota  
se hace pequeña? esto  
es cond. sobre las  $f$

que se da para que la suma converja?  
de las cotas

$\Rightarrow (S_N)_N$  es de Cauchy en  $\mathcal{B}(X)$



donde  $S_N = \sum_{n=1}^N f_n$

$\Rightarrow S_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{?} f \in \mathcal{B}(X)$

$\Rightarrow \sum f_n$  converge uniformemente a  $f$

$$\left(\sum f_n\right) \Rightarrow f$$

y además

$f$  es continua

Falta mostrar Convergencia Absoluta

Pero ya fué hecho en resultando

$$\sum_{n=N+1}^M \|f_n(x)\|_{\infty} \leq \sum_{n=N+1}^M C_n < \infty$$

Si  $\uparrow$  converge

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^M |f_n(x)| < \infty$$

Converge absolutamente.





Micro resumen:

Primero vimos que en un espacio de Banach, la norma infinito era exactamente la convergencia uniforme.

Luego vimos series y sucesiones de funciones, en el contexto de espacios de Banach donde vale la propiedad anterior.



