De las diapos de **Juan Pablo Pinasco** (jpinasco@dm.uba.ar)

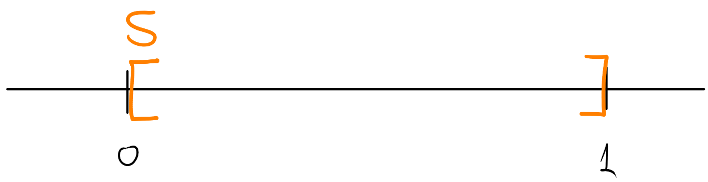
Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

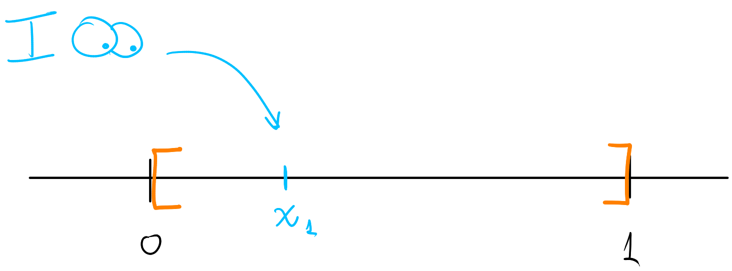
**Teorema (Cantor)**

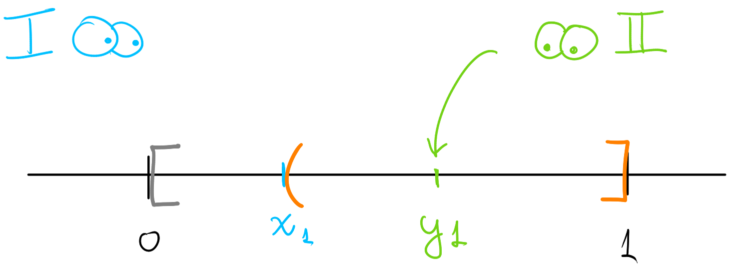
*Los números reales no son numerables.*

**Demostración:** Consideremos el siguiente juego de dos jugadores:

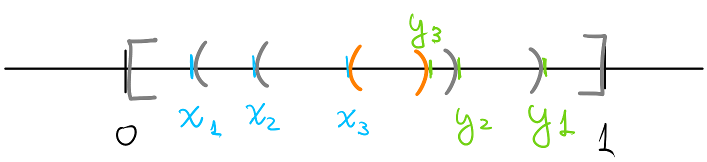
Se fija un conjunto $S \subset [0,1]$. Comienza $I$ eligiendo un número $x_1 \in [0,1]$; y luego $II$ elige un número $y_1 \in (x_1, 1]$.



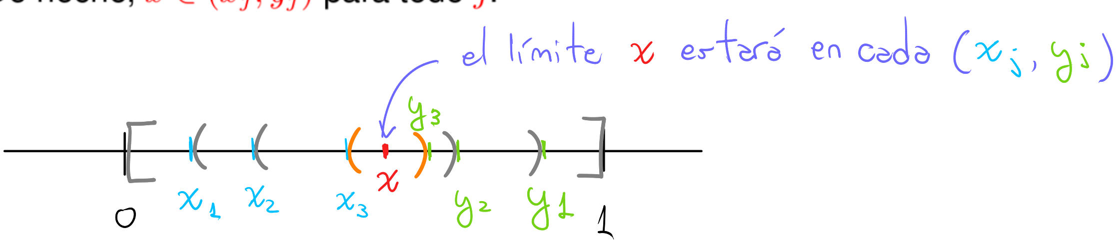




Luego se alternan para elegir números, $I$ elige $x_{j+1} \in (x_j, y_j)$, $II$ elige $y_{j+1} \in (x_{j+1}, y_j)$.



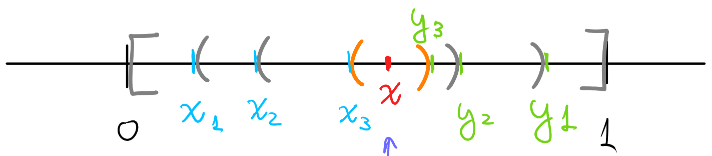

La sucesión $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es monótona creciente y acotada, con lo cual tiene límite $x \in [0,1]$. De hecho, $x \in (x_j, y_j)$ para todo $j$.



El jugador $I$ gana si $x \in S$, de lo contrario pierde.

Supongamos que $[0,1] = \{q_k\}_{k\geq 1}$ es numerable, y que $S = [0,1]$.

Como la sucesión $\{x_j\}_{j\geq 1}$ es monótona creciente y acotada, tenía límite $x \in [0,1] = S$, y el jugador $I$ gana.



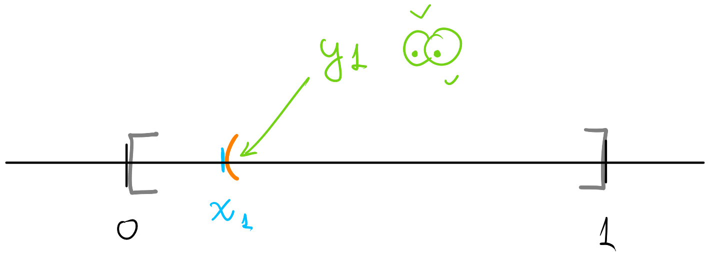

$x \in [0,1] = S \Rightarrow I$ gana!

Pero el jugador $II$ tiene una estrategia ganadora: en el turno $j+1$, va a elegir

$$y_{j+1} = q_n \text{ tal que } n = \min\{k \in \mathbb{N}, q_k \in (x_{j+1}, y_j)\}$$

el índice más chico tal que $q_k$ sea "el más pegado" a $x_{j+1}$

que existe pues supusimos que todos los números reales entre 0 y 1 podían ser indexados en una sucesión $\{q_k\}_{k\geq 1}$




El límite es $x = q_i$ para algún $i$, pero en el turno $i$, $II$ lo hubiese elegido si estaba disponible, así que $x$ no puede ser un elemento de $S$.

$\Rightarrow x \notin S$

pero $x \in S$ pues $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada en $[0,1]$

Abs!

Conclusión: llegamos a un absurdo, $[0,1]$ no puede ser numerable.