11. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.
(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

a) Qvq

$$\mathbb{N} \overset{?}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \text{Primos}$$

Como

$$P \subset \mathbb{N} \Rightarrow \#P \leq \#\mathbb{N}$$

y como

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0 \leq \#X \quad \forall X \text{ infinito}$$

$$\Rightarrow \quad \#P = \#\mathbb{N}$$ si muestro que P es infinito ?

b) (éste es razazo hasta que ves que a) es sobre primos)

Quiero escribir

Conjuntos de elementos disjuntos

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i \in B}^{d} A_i$$

$B \subseteq \mathbb{N}$ num.

Conjunto numerable $B \sim \mathbb{N}$

Todos los elementos $n \in \mathbb{N}$ son de la forma (por TFC):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \quad \text{para cada primo } p_i$$

Entonces

Puedo elegir $\mathcal{B}$ como el conjunto de primos (numerable)

y meter en cada conjunto

nulos

$5^{k>0}$ y 2^0 y 3^0

Comienzo $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^{k_4}, \ldots$

meto todos los que tengan un $2^{k>0}$

meto todos los que tengan un $3^{k>0}$ y 2^0 exponente nulo

$$\Rightarrow A_{p_i} = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = p_i^{k_0} \cdot \prod_{\substack{q_i \in P \\ q_i > p_i \\ k_i \in \mathbb{N}}} q_i^{k_i}, \ \forall k_0 \geq 1, \ k_0 \in \mathbb{N} \right\}$$

primo i

"n divisible por $p_i^{k_i}$, $\forall k_i > 0$ con $k_i \in \mathbb{N}$, y no divisible por primos menores a p_i"

Preguntar.

Bien! :)

?

$$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{\substack{p_i \in P \\ P \subseteq \mathbb{N}}} A_{p_i}$$

con P el conjunto de Primos.

$\# Api \leq \# \mathbb{N}$

Otra :

A partir de Q, armo todas las potencias de primos.

$$\mathbb{N} = \bigcup_{\substack{Q \subseteq \mathcal{P}_r \\ Q \text{ finito}}}^{\cdot} \underbrace{\left\{ \prod_{q \in Q} q^{e_q} : e_q \in \mathbb{N} \right\}}_{\sim \mathbb{N}^{\# Q}} \leftarrow \text{Disjuntos!}$$

$$\# \mathcal{P}_f(\mathcal{P}_r) = \aleph_0$$

ej: si $Q = \{2, 3\}$

12. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Si

$$A \sim \mathbb{N}$$

qvq

$$\mathcal{P}_f(A) := \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\} \overset{?}{\sim} \mathbb{N}$$

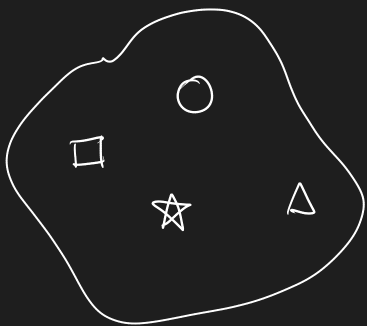
Puedo buscar inyectiva desde

$$g : B_n \longrightarrow \mathbb{N}^n \quad (\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n \text{ veces}})$$

Con $B_n \subset A$ los conjuntos de n elementos

Ej: si $n = 4$:

Conj de 4 elementos



Vectores de 4 elementos

$$\xrightarrow{\;g\;} \begin{array}{cccc} \star & \square & \triangle & \circ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\left[\,1,\ 2,\ 3,\ 4\,\right]$$

en algún orden

Para cada conjunto B_n diferente $\rightarrow$ Puedo armar un vector que esté en $\mathbb{N}^n$ distinto

$\therefore$ g es inyectiva.

$\therefore$

$$\# B_n \leqslant \# \mathbb{N}^n = \aleph_0$$

Puedo escribir $\mathcal{P}_f(A)$ como

$$\mathcal{P}_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Por ejercicio ?, sé que unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

Como $\# B_n \leqslant \aleph_0$

$$\Rightarrow \# \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \Big) = \aleph_0$$

infinitos

$\Rightarrow \mathcal{P}_f(A)$ es numerable.

$\blacksquare$

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.