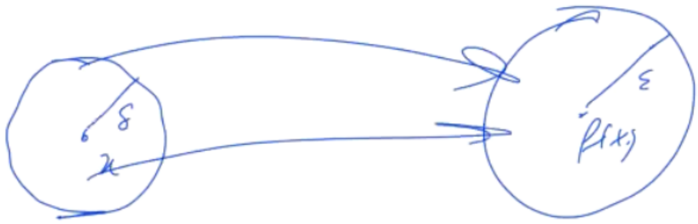
Funciones Continuas ¿?

Repaso

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x $\in E$ si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.



Importante:

- Entender que

$$\boxed{f \text{ es cont. en } E \iff f^{-1}(U) \text{ es abierto } \forall\, U \in E' \text{ abierto}}$$

Observación

Decimos que una función f es continua en E si:

$\forall x \in E, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

- Vemos que δ depende de x y ε

  ie: Para cada combinación (x,ε) se corresponde algún δ.

- Puede pasar que un mismo δ sirva $\forall x$.

Definición

Una función $f: E \to E'$ se dice

uniformemente continua

si:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ /

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

$\forall x \in E$

Definición equivalente

Una función $f: E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon >$ o existe δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

x e y se mueven independientemente

Obs:

f no es unif. continua

si:

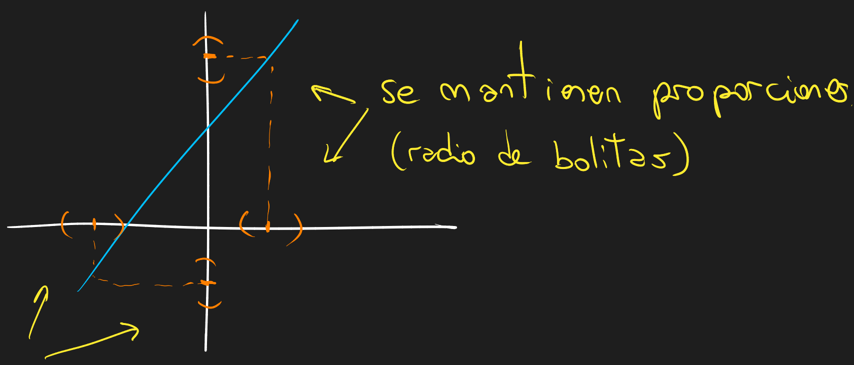
$\exists \varepsilon > 0$ para el cual ningún δ le sirve
a todos los x e y.

(ó son distintos, o no hay δ y no es continua)

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 3$



Sea $\varepsilon > 0$

$$d'(f(x), f(y)) = |(2x+3) - (2y+3)|$$
$$= |2x - 2y|$$
$$= 2|x - y|$$
$$= 2\, d(x, y)$$

Tomando
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ Si $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

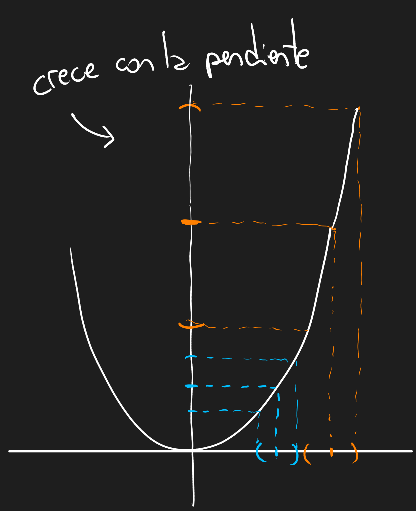
$$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) = 2 \cdot d(x,y)$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

Probamos que un mismo δ vale $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Ejemplo

$f(x) = x^2$



Prueba que no es unif. cont.

Armo sucesiones

$x_n = n$

$y_n = n + \frac{1}{n}$

Vemos que

$$d(x_n, y_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Pero

$$d(f(x_n), f(y_n)) = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right|$$

$$= \left| -\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) \right|$$

$$= 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$$

Ésto contradice la continuidad uniforme.

¿Qué significa este "2"?

pasamos de $d(x_n, y_n) = \frac{1}{n}$

a $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq 2$ con $f(x) = x^2$

Proposición

Sea $f : E \to E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

$\Rightarrow$) f NO U.C.: $\exists\, \varepsilon_0 /$ ningún δ SIRVE.

Si $\delta = 1/n \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in E / \underbrace{d(x_n, y_n) < 1/n}_{\Downarrow\; d(x_n, y_n) \to 0}$

pero $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

$\Leftarrow$) $\boxed{\text{Sup. que } f \text{ ES U.C.}}$

$\Rightarrow$ dado el ε_0, $\exists\, \delta > 0 /$

$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Como $d(x_n, y_n) \to 0$

$\exists\, n_0 / d(x_n, y_n) < \delta \;\; \forall n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0}_{\substack{\text{VI} \\ \varepsilon_0}}$ ABS $\forall n \geq n_0$

Ejemplo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONT $\Longrightarrow$ f U.C.

$[a,b]$: INT CERR Y ACOTADO $\qquad$ $\mathbb{R}$: E'

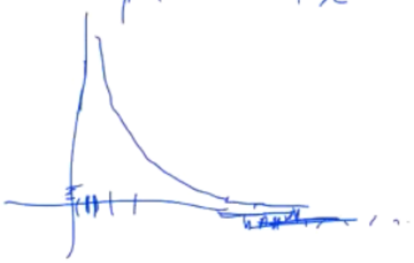
LO VEREMOS → SE USAN: - LA PROP ANTERIOR

- TODA SUC. ACOT TIENE SUBSUC. CONV. SALE X ABS.

- TODA SUC. AC TIENE SUBSUC. SALE X ABS.

· $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=1/x$.



1er INTENTO: $x_n=\frac{1}{n}$ $\quad y_n=\frac{1}{n+1}$

$$d(x_n,y_n)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\left|\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}\to 0$$

$$d'(f(x_n),f(y_n))=\left|1/\tfrac{1}{n}-1/\tfrac{1}{n+1}\right|=|n-$$

Teorema
Sea $f:E\to E'$. Si existe $C>0$ tal que

$$\boxed{d'(f(x),f(y))\le Cd(x,y),}\quad \forall x,y$$

entonces f es uniformemente continua.

f es LIPSCHITZ CON CONSTANTE C.

DEM: Dado $\varepsilon > 0$, [BUSCAMOS $\delta > 0$ / $d(x,y) < \delta$

$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$]

$$d'(f(x), f(y)) \leq C \cdot \underbrace{d(x,y)}_{< \delta} < C \cdot \varepsilon / C = \varepsilon.$$

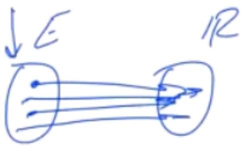
$\boxed{\text{TOMANDO } \delta = \varepsilon / C}$ → SÓLO DEPENDE DE ε.

Ejemplo

Consideremos en $\overbrace{C([0,1])}^{E}$ la distancia d_∞.

Sea $F : \underbrace{C([0,1])}_{E} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$



$$d'(F(x), F(y)) = \left| \int_0^1 x(t)\,dt - \int_0^1 y(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 x(t) - y(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|x(t) - y(t)|}_{\leq \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)| = d_\infty(x,y)}\,dt$$

$$\leq \int_0^1 d_\infty(x,y)\,dt =$$

$$= 1 \cdot d_\infty(x,y)$$

F ES LIPSCHITZ CON CTE 1.

$\Rightarrow$ ES U.C.

Ejemplo

Consideremos en $C([0,1])$ la distancia d_∞.

Sea $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$F(x) = (x(0), x(1/2), x(1)).$$

$[x : [0,1] \to \mathbb{R}]$

$C[0,1] \to \mathbb{R}^3$

EJERCICIO: VER QUE ES LIPSCHITZ

$d(a,b) = |a-b|$

$$d'(F(x), F(y)) = \left(|x(0)-y(0)|, |x(\tfrac{1}{2})-y(\tfrac{1}{2})|, |x(1)-y(1)|\right)$$

quiero llegar a

$$d_\infty(x(t), y(t)) = \sup\{|x(t)-y(t)| : t \in [0,1]\}$$

$$= \left(|x(0)-y(0)|, |x(\tfrac{1}{2})-y(\tfrac{1}{2})|, |x(1)-y(1)|\right)$$

$$\leq \left(d_\infty(x,y), d_\infty(x,y), d_\infty(x,y)\right)$$

$$\leq (1,1,1) \cdot d_\infty(x,y)$$

es Lipschitz con constante $C = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Observación

Si E y E' son espacios métricos homeomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de E y E'

$f : E \to E'$. HOMEOMORFISMO.

$V \subset E'$ ab $\Rightarrow$ $f^{-1}(V)$ es ab.
↳ f cont.

$U \subset E$, $f(U) = \underbrace{(f^{-1})}_{\text{cont}}{}^{-1}(\underbrace{U}_{\text{ab}})$ es ab.

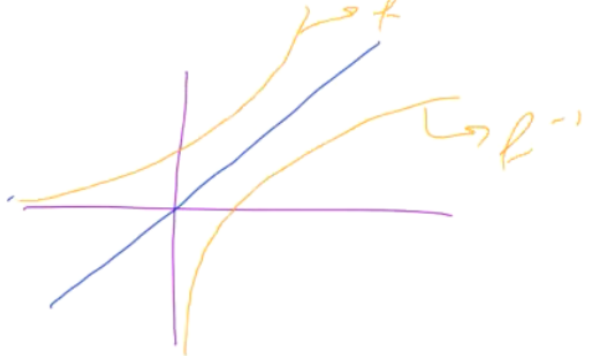
PENSAR ab. de $E \longrightarrow$ ab. de E'
$U \longmapsto f(U)$ biyectivo

- Biyección entre abiertos de un conjunto con los abiertos del otro.
- Biyección entre sucesiones convergentes
- Cauchy NO

Observación

Dada f biyectiva, ¿es posible que f sea continua pero que su inversa no lo sea?

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$



$\boxed{\text{SÍ}}$ $f : (\mathbb{R}, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$f(x) = x.$$

ES CONT PERO f^{-1} NO

(EJERCICIO).

Definición

Si $f : E \to E'$ satisface $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isometría.

es Lipschitz de constante 1

Observación

Toda isometría es uniformemente continua.

Si $f : E \to E'$ es una isometría biyectiva, entonces tanto f^{-1} también es una isometría (y por lo tanto es uniformemente continua).

$v, w \in E'$ $\boxed{d(f^{-1}(v), f^{-1}(w))} =$

$\underset{f \text{ isom}}{=} d'(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))) =$

$= \boxed{d'(v, w)}$

$\therefore f^{-1}$ es isometría.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice denso (en E) si $\overline{D} = E$.

EJEMPLOS: $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$.

(a, b) denso en $E = [a, b]$

$(a, b) \cap \mathbb{Q}$ denso en $[a, b]$

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\overline{D} = E$.

Observación. EJ GUÍA: $f, g : E \to F$ CONT, $D \subset E$ DENSO. SI $f|_D = g|_D \Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$

• VALE E métrico, D denso en E.

$f_0 : D \to \mathbb{R}$ unif. cont $\Rightarrow \exists f : E \to \mathbb{R}$ unif cont / $f|_D = f_0$ [f_0 SE EXTIENDE A UNA FUNC. U.C. EN E]

EJERCICIO: SI $f_0 : D \to \mathbb{R}$ ES CONT PERO NO U.C NO tiene por qué extenderse a una f CONTINUA