Leandro Carreira LU: 669/18

Segunda Entrega

14. Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}.$$

E se compone de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ (llamados B)

tales que

(I) $\#B = \#(\mathbb{N} \setminus B)$

y además

(II) $\#B = \aleph_0$

(II) me dice que B es numerable (infinito)

(I) restringe B / $\mathbb{N} \setminus B$ siga siendo numerable.

(ie $\mathbb{N} \setminus B$ no puede ser finito)

$\therefore$ $E \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

ya que E se compone de subconjuntos

numerables (infinitos) de $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

y como E es infinito

ejercicio 13.c

$$\aleph_0 \leq \#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{\downarrow}{=} c$$

$\Rightarrow$ Tengo dos posibilidades

$$\#E \overset{?}{=} \aleph_0$$

ó

$$\#E \overset{?}{=} c$$

Sé que

$$E = \{ B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0 \}$$

está compuesto de los subconjuntos numerables de $\mathbb{N}$ que cumplen $\# \mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$

y que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{ B : B \subseteq \mathbb{N} \}$$

está compuesto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$

entonces, puedo decir que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ no sea numerable ó } B \text{ es numerable pero } \mathbb{N} \setminus B \text{ no es numerable} \}$$

y como

$$\#B \leq \aleph_0 \quad \forall B \subseteq \mathbb{N}$$

Conj. Naturales no numerables

↓

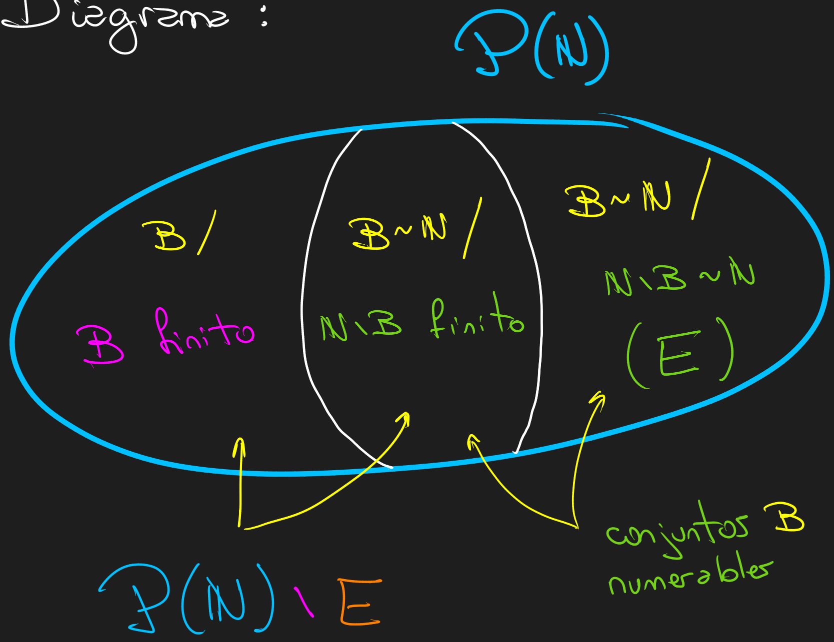
$\#B < \#\mathbb{N}$

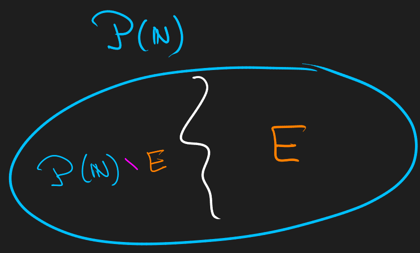
entonces

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito ó}$$

B es numerable con $\mathbb{N}\setminus B$ finito)

Diagrama :





Puedo usar el ejercicio 12 que dice :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } X \text{ es numerable} \\ \Rightarrow \mathcal{P}_f(X) = \{ Y \subseteq X : Y \text{ es finito} \} \text{ es numerable} \end{array}}$$

Con lo que puedo asegurar que es numerable

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \underbrace{\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \}}_{\text{es numerable}} \cup \underbrace{\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \sim \mathbb{N} \text{ con } \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \}}_{?}$$

Basta encontrar este cardinal.

Puedo escribir el conjunto como

$$\{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ es finito} \}$$

(pues si $\mathbb{N}\setminus B$ es finito $\Rightarrow B$ debe ser infinito)

Llamo

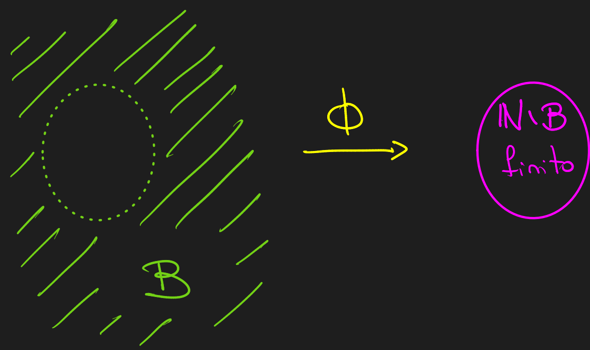
$$X := \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}$$

$$Y := \{B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N}\setminus B \text{ es finito}\}$$

Busco una función Biyectiva:

$$\phi : Y \to X$$

$$B \mapsto \mathbb{N}\setminus B$$



Dem

ϕ es inyectiva pues:

$\forall B \in Y, \forall D \in Y,$

- Si $B = D$:

$B = D$

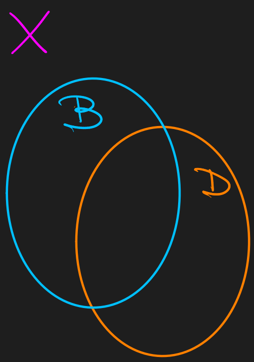
$$\phi(B) = \mathbb{N}\setminus B \underset{B=D}{=} \mathbb{N}\setminus D = \phi(D)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(B) = \phi(D) \quad \checkmark$$

- Si $B \neq D$:

$$\phi(B) = \mathbb{N}\setminus B$$

$$\phi(D) = \mathbb{N} \setminus D$$



qvq

$$\mathbb{N} \setminus B \neq \mathbb{N} \setminus D \quad \text{si} \quad B \neq D$$

supongo

$$\mathbb{N} \setminus B = \mathbb{N} \setminus D \quad \text{con} \quad B \neq D$$

$\Rightarrow$ si $B \neq D$

$$\exists x \in \mathbb{N} \,/\, x \in B \wedge x \notin D$$

$\Rightarrow$ como $x \in B$ y $B \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \notin \mathbb{N} \setminus B$

y como $x \notin D$ y $D \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \setminus D$

Abs!

Pues $\mathbb{N} \setminus B = \mathbb{N} \setminus D$

$\therefore \mathbb{N} \setminus B \neq \mathbb{N} \setminus D$ ✓

Demostré que

$\forall B, D \in Y$,

si $\phi(B) = \phi(D) \Rightarrow B = D$

$\therefore \phi$ es inyectiva.

ϕ es suryectiva si :

$$\forall G \in X \, , \, \exists B \in Y \, / \, \phi(B) = G$$

lo cual es casi inmediato de ver, sabiendo

$$Y := \{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ es finito} \}$$

$$X := \{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \}$$

$$\underbrace{\phi(B)}_{\substack{\text{elemento} \\ \text{infinito} \\ \text{de } Y}} \overset{\substack{\text{def de } \phi \\ \downarrow}}{=} \underbrace{\mathbb{N} \setminus B}_{\text{elemento finito de } X}$$

- Todos los $G \in X$ son finitos y todos los $B \in Y$ son tales que $\mathbb{N} \setminus B$ sea finito.

- Además, X es el conjunto de todos los conjuntos finitos,

- y como cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ se puede escribir como $\mathbb{N} \setminus B$, para algún B infinito en $\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \forall G \in X \, , \, \exists B \in Y \, / \, \phi(B) = G = \mathbb{N} \setminus B$$

$\therefore\ \phi$ es sobreyectiva

$\therefore\ \phi$ es Biyectiva

y

$$X \sim Y$$

Volviendo, tenía

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \underbrace{\overbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}}^{X}}_{X \text{ es numerable}} \cup \underbrace{\overbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito}\}}^{Y}}$$

Como $Y \sim X$

$\Rightarrow Y$ es numerable

Sabemos que la unión finita de conjuntos numerables es numerable (por ej 9):

$$\Rightarrow \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E\right) \sim \mathbb{N}$$

Además, tengo que

$$\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

y

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)$$

$$\Rightarrow \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\left(E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)\right)$$

$$c = \#\left(E \cup \underbrace{(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)}_{\substack{\text{obtuve} \\ \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E \,=\, \#\mathbb{N}}}\right)$$

Supongo que

$$E \sim \mathbb{N}$$

y llego a un absurdo.

Obtuve que

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Como la unión de finitos numerables es numerable:

$$E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

Abs! Pues $E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

$$\therefore \#E = c$$

$\blacksquare$