COMPACIDAD

RECORDAR:

- $K \subseteq E$ es COMPACTO si $\forall (x_n) \subseteq K$ $\exists x \in K$ y $\exists (x_{n_k}) \,/\, x_{n_k} \to x$
- COMPACTO $\Rightarrow$ CERRADO y ACOTADO; si $E = \mathbb{R}^n$, VALE LA VUELTA

EJEMPLOS:

1) K FINITO $\Rightarrow$ K ES COMPACTO

DE HECHO, SUP $K = \{k_1, \dots, k_m\}$; SEA $(x_n) \subseteq K$. ENTONCES $\exists k_i \in K$ $\exists (x_{n_l})$ SUBS $/$ $x_{n_l} = k_i$ $\forall l$; EN PART, $x_{n_l} \to k_i$

(DIGAMOS, x_n ES ASÍ: SI $i = 1$

$\underbrace{k_1}_{x_{n_1}}, k_2, \underbrace{k_1}_{x_{n_2}}, k_3, k_4, \underbrace{k_1}_{x_{n_3}}, k_3, \dots$)

→ Ej: Repensar, usando compacidad en términos de cub. de abiertos

2) Sup $(x_n) \subseteq E$ / $x_n \to x$

Sea $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

Entonces K es compacto

Dem: Sea $(y_m) \subseteq K$

(e.j. • $x_1, x_{20}, x_3, x, x_2, x, x_4, \ldots$;

• $x_1, x_1, x_1, x_1, \ldots$

• $x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_3 \ldots$)

Sea $A = \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$. • Si A es finito, como (y_m) es una suc. en A, listo! Tiene una subs. conv. a un elem de $A \subseteq K$

• Si no, $A' = \overbrace{A \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}}^{= A \setminus \{x\}}$

→ A' es infinito

→ Tomo $y_{m_1} \in A'$, digamos $y_{m_1} = x_{n_1}$

→ Tomo $y_{m_2} \in A' \setminus \{y_1, \ldots, y_{m_1}, x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ $\left(y_{m_2} = x_{n_2} \right)$

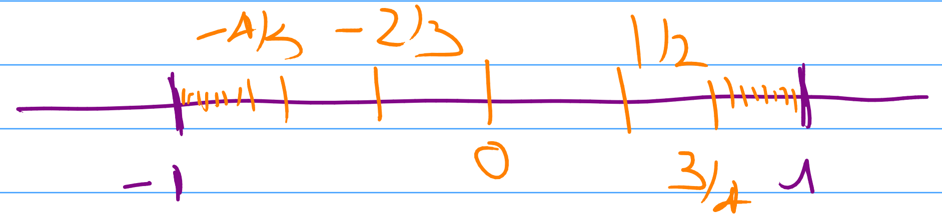
Así $m_2 > m_1$, $n_2 > n_1$

→ Tomo $y_{m_3} \in A' \setminus \{y_1, \dots, y_{m_2}, x_1, \dots, x_{m_2}\}$ $\begin{pmatrix} y_{m_3} = \\ x_{m_3} \end{pmatrix}$

Así $m_3 > m_2$, $m_3 > m_2$

Así (y_{m_ℓ}) es subs de (y_m), y cumple $\lim\limits_{\ell \to \infty} y_{m_\ell} = \lim\limits_{\ell \to \infty} x_{m_\ell} = x \in K$

2) Sea $K = \{(-1)^m (1 - 1/m) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \subseteq \mathbb{R}$



Escribamos

$$K = \overbrace{\{1 - 1/2k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}}^{K_1 \to \text{compacto}} \cup \underbrace{\{-1 + 1/(2k-1) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}}_{K_2 \to \text{compacto}}$$

→ K es compacto

Ej 7

EJERCICIO

TAMBIÉN: K ES CERRADO Y ACOTADO

$\Rightarrow$ K COMPACTO

HEINE-BOREL

3) SI $E = \mathbb{Q}$, Y

$K = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$

- K ES CERRADO Y ACOTADO

$\mathbb{Q}$

$\hookrightarrow$ SI $(x_n) \subseteq K$ / x_n CONVERGE A x EN E $\Rightarrow x \in K$

- K NO ES COMPACTO:

TOMO $(x_n) \subseteq K$ / $x_n \to \sqrt{2}$ EN $\mathbb{R}$;

(x_n) NO TIENE SUBS. CONV. EN K (EN E TAMPOCO)

4) EN $(C[0,1], d_\infty)$, SEA (f_n)

LA SUC. DADA POR $f_n(x) = x^n$

- $f_n \in \overline{B}(f_0, 1)$ $\forall n$:

$$\underbrace{d_\infty(f_n, f_0)}_{\|f_n\|_\infty} = \max_{x \in [0,1]} |x^n| = 1$$

- f_n NO TIENE SUBS. CONV EN E:

SI $f_{n_k} \to f$, ENTONCES (VIMOS)

$$\underline{f_{n_k}(x)} \to f(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$= x^{n_k} \to \begin{cases} 0, & \text{SI } x < 1 \\ 1, & \text{SI } x = 1 \end{cases}$$

ABS! PUES $f \in C([0,1])$

5) PROP: SEA $F \subseteq E$ /

$F \cap K$ ES CERRADO $\forall K \subseteq E$ COMPACTO

ENTONCES F ES CERRADO.

Dem: SEA $(x_n) \subseteq F$ / $x_n \to x$ — PVQ $x \in F$

SEA $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

$\rightsquigarrow$ K ES COMPACTO (2, HOY)

LUEGO, $F \cap K$ ES CERRADO

AHORA, $(x_n) \subseteq F \cap K \overset{\text{LLL}}{\rightsquigarrow} x \in F \cap K \subseteq F$ ✓

$\boxtimes$