

Práctica 6

- ☒ 1. Probar que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en \mathbb{R}^n , donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- ☒ 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

- (a) Las operaciones $+: E \times E \rightarrow E$ y $\times: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ son continuas.
- (b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- (c) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$.
- (d) Si $y \in B(x, r)$ entonces para todo $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in B(x, r)$ (es decir, la bola es *convexa*).

- ☐ 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Probar que si definimos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ por

?

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$.

- ☐ 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

- (a) \overline{S} también es un subespacio.
- (b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.
- (c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.
- (d) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E .

- ☐ 5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{R} . Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

- ☒ (a) Probar que $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ son espacios de Banach.
- ☒ (b) Probar que ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ? (c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{R} , probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el ítem anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n **para todo** $n \in \mathbb{N}$?

- 6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

- (a) Probar que la bola de ℓ^∞ no es compacta.
 (b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞ .

- ✓ □ 7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

✓ichy

- (a) T es continuo en 0.
 (b) Existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0 .
 (c) T es continuo.
 (d) T es uniformemente continuo.
 (e) Existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ (T es acotada).
 (f) Para todo $A \subseteq E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Sigo en archivo v.2

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ y sea $T : E \rightarrow F$ lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf \{M > 0 : \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E\}.$$

9. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Probar que si consideramos en $C([0, 1])$ la norma infinito definida como $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$, entonces K es lineal y continua. Acotar su norma.

10. Sea $(\mathbb{R}[t], \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de polinomios definido en el Ejercicio 5. Sea $\delta : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$ dado por $(\delta p)(t) = p'(t)$, donde p' denota el derivado de p . Probar que δ es un operador lineal que no es continuo.
 11. Sea $\mathcal{E} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0, 1])$ la norma infinito, entonces \mathcal{E} es un funcional lineal continuo.

Continuará...