Práctica 8

1. Sea $\mathcal{A}$ una una familia no vacía de subconjuntos de X cerrada por complementos y por uniones numerables. Probar que $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables y que $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de conjuntos de X.

(a) Si A, $B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

(b) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de conjuntos de Y.

3. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos σ-álgebras de conjuntos de X. Probar que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ es una σ-álgebra de conjuntos de X.

4. Probar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es nulo.

5. Probar que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcular su medida.

6. Calcular la medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ y la de los irracionales del $[0, 1]$. ¿Por qué son medibles estos conjuntos?

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

7. Probar que todo conjunto acotado de $\mathcal{M}$ tiene medida finita. Mostrar un conjunto de $\mathcal{M}$ que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.

8. (a) Si A, $B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$ y $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(b) Si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$.

10. Probar que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

11. Sea $A \in \mathcal{M}$. Probar que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la vuelta?

12. Sea $A \subseteq [0, 1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Probar que A es denso en $[0, 1]$.

13. Sea $\mathcal{M}(I)$ la σ-álgebra de los conjuntos medibles en $I = [0, 1]$ y μ la medida de Lebesgue. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(I)$ y $B \in \mathcal{M}(I)$ tales que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.