

Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- (a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- (b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.
- (c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.
- (d) $i : (A, d) \rightarrow (E, d)$, la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas d , d_2 y d_∞ son como en la Práctica 3, y δ representa a la métrica discreta, mientras que en (d) (E, d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$.

$$a) f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

← Paraboloide



q.v.g

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$$

$$f(B_{d_2}(\vec{x}, \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(\vec{x}), \varepsilon)$$

equiv.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid$$

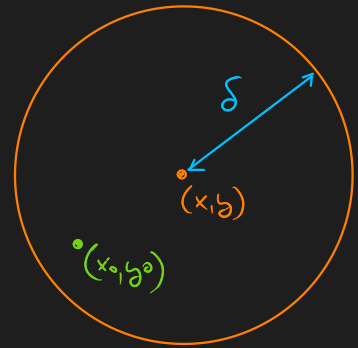
$$f(B_{d_2}((x, y), \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(x, y), \varepsilon)$$

Sea

$$(x_0, y_0) \in B((x, y), \delta)$$

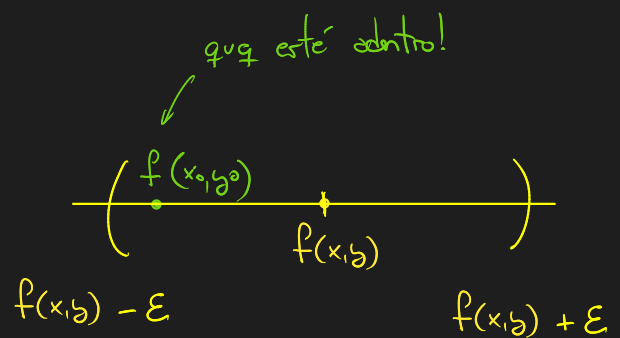
$$(x_0, y_0) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (x, y)) < \delta \right\}$$

\uparrow
 (x_0, y_0) es alguno de
 estos (a, b)



q u q

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0^2 + y_0^2} \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(x, y), \varepsilon)$$



Se:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(f(x, y), \varepsilon) &= \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, f(x, y)) < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ c \in \mathbb{R} : |c - f(x, y)| < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ c \in \mathbb{R} : |c - (x^2 + y^2)| < \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

(acá pregunté en Zulip porque $\sqrt{\cdot}$)

Sugerencia :



Daniel Carando

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el $(3,2)$, por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x, y), (3, 2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.

6:23 PM

Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε , tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED)

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en \mathbb{R} es la d_1 , pero en realidad también es la d_2 :

6:28 PM

$d_1(s, t) = |s - t| = \sqrt{(s - t)^2} = d_2(s, t)$.

También es la d_∞ , claro.

Pruebo que es continua en el $(3, 2)$

Def. de f continua $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f(B((x_0, y_0), \delta)) \subseteq B(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

Lo pruebo en $(x_0, y_0) = (3, 2)$

Sea

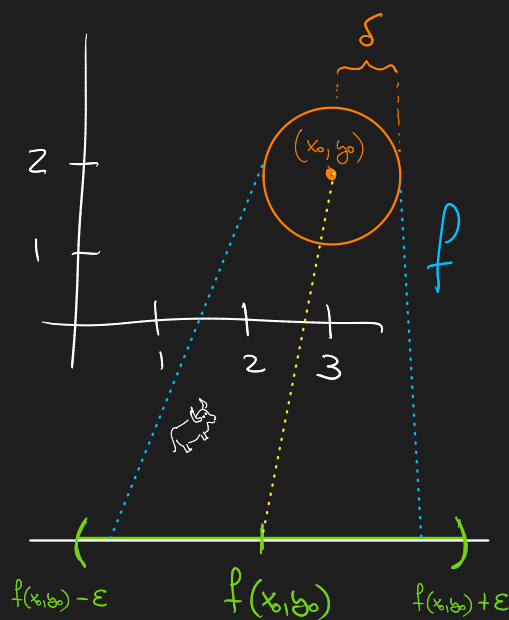
$$(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$$

me fijo solo en:

$$(x, y) \in B((3, 2), \delta)$$

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < \delta \right\}$$

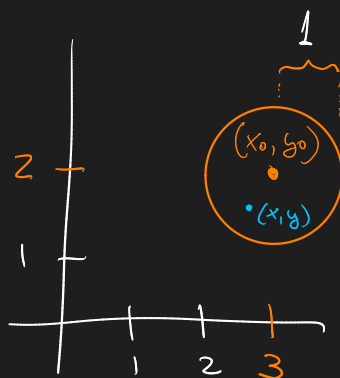
$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$



Si $\delta = 1$:

$$(x, y) \in \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a, b), (3, 2)) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio
contenga a todos estos $f(x, y)$

De nuevo pifio y me pierdo.
Pregunto de nuevo en Zulip.

Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0) . Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$. Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dás que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1. Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, porque ε puede ser arbitrariamente chico.

Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ , sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces $|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$

Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1 . Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2((x, y), (3, 2)) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| < \varepsilon$$

se
↓

$$\Rightarrow |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{\text{quiero acotar esto}} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{\text{quiero acotar esto}}$$

En donde:

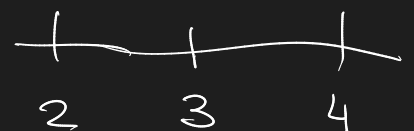
$$(x^2 - 3^2) \overset{\text{dif. de cuadrados}}{=} (x+3)(x-3)$$

$$\underbrace{(x+3)}_{< \delta_1 = 1} \underbrace{(x-3)}_{< \delta_1 = 1}$$

$$\text{Como } d(x, 3) < 1$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm d(x, 3)$$

$$< 3 + 1 = 4$$



$$x < 4$$

$$\Rightarrow x + 3 < 7$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

↑ dejo este δ (y no uno 1)
para que dependa de δ

$$(y^2 - 2^2) = (x+2)(x-2)$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}} \leq \delta = 1$$

$$\hookrightarrow \text{Como } d(x, 2) < \delta_1 = 1$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x, 2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x + 2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

↑ dejo este δ (y no uno 1)

Reemplazando en lo que tenia para que dependa de δ

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero controlar todo por ϵ

$$\Rightarrow 12\delta < \epsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \epsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3, 2)$ encontré un $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f\left(\mathcal{B}\left((3, 2), \delta\right)\right) \subseteq \mathcal{B}\left(f(3, 2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2((x, y), (x_0, y_0)) < \delta_1$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| = \left| x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2 \right| \leq \left| x^2 - x_0^2 \right| + \left| y^2 - y_0^2 \right|$$

En donde:

$$\left| x^2 - x_0^2 \right| = \underbrace{|x + x_0|}_{< \delta} \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x_0 - d(x, x_0) < x < x_0 + d(x, x_0)$$

$$\Rightarrow |x + x_0| < |x| + |x_0|$$

$$\leq |x_0| + |x - x_0|$$

$$< 2|x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

Mismo procedimiento para

↑ elijo este $\delta = 1$

$$|y^2 - y_0^2| < (2|y_0| + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$$

$$< (2|x_0| + 1) \cdot \delta \quad < (2|y_0| + 1) \cdot \delta$$

$$< \delta (2|x_0| + 2|y_0| + 2)$$

$$< 2\delta \left(\underbrace{|x_0|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_0|}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{\geq 0} \right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)}$$

∴ mos tré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ dado por

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)} \right\}$$

tal que

$$f\left(\mathcal{B}((x_0, y_0), \delta)\right) \subseteq \mathcal{B}(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

∴ muestre continuidad en cada (x_0, y_0) de $E = \mathbb{R}^2$

∴ f es continua en $(\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$

□

Resumen:

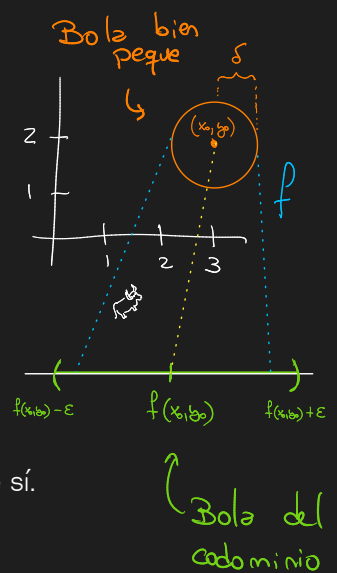
Quiero que para toda bola del codominio de f , pueda pasar una bola del dominio por f , y que quede contenida en la primera:

$f(\text{AlgunaBolaBienPeque}) \text{ dentro_de CadaBolaDelCodominio}$

Pasos:

- * Se que la bola del codominio tiene radio epsilon
- * Entonces sé que los elementos de la bola están acotados por epsilon de distancia entre sí.
- * Planteo $|f(x, y) - f(a, b)| < \text{epsilon}$
- * Quiero $|f(x, y) - f(a, b)| < \dots$ meter un delta acá $\dots < \text{epsilon}$
- * Usando las distancias/cotas de la bola del dominio, opero acotando la norma del paso anterior hasta poder acotar por delta.
- * De haber varios términos delta en algún producto, puedo elegir un valor fijo para alguno (ya que el otro delta podrá seguir tendiendo a cero, "arrastrando consigo" el otro término) y tener un despeje más sencillo.
- * Finalmente, despejo delta en función de epsilon, obteniendo el delta que buscaba que depende de epsilon y (posiblemente) de los x, y sobre los cuales se analice continuidad.
- * Probé continuidad para todo x, y de $E = \mathbb{R}^2$

fin



Otra forma

f es continua \Leftrightarrow cuando sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a x
 \Rightarrow sucesiones $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a $f(x)$

Las sucesiones de \mathbb{R}^2 son de la forma

$$(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

y si son convergentes a (x, y) , las escribo como

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$$

q.v.q

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{?} f(x, y)$$

Primero muestro que si

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$$

$$\Rightarrow d_2((x_n, y_n), (x, y)) = \sqrt{\underbrace{(x_n - x)^2}_{>0} + \underbrace{(y_n - y)^2}_{>0}} \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n - x \rightarrow 0 \\ y_n - y \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \end{cases}$$

Volviendo :

$$f(x_n, y_n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def}}}{=} x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2 + y^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def}}}{=} f(x, y)$$

Q.E.D.

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

Acá parece ser buena idea usar sucesiones

$$(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Como (\mathbb{R}^2, δ) tiene dist. discreta

Todas las sucesiones que convergen serán de la forma

$$\text{Si } (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = x \\ y_n = y \end{cases} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{pues lo dijo Vicky.}$$

$$\underline{\text{No!}} \text{ pues } \delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{y } \delta(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \neq b$$

∴ si (x_n) converge en δ , es porque
es constante a partir de un n_0 .

- Con esto sé que todas las sucesiones convergentes
en (\mathbb{R}^2, δ) son constantes a partir de un n_0 .

Formalmente

$$\delta((x_n, y_n), (x, y)) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_n, y_n) = (x, y) \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta((x_n, y_n), (x, y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid (x_n, y_n) = (x, y) \quad \forall n \geq n_0$$

Volviendo, la función del ejercicio es

$$f(x, y) = (x, y)$$

entonces si lo aplico a $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$f(x_n, y_n) = (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y) = f(x, y)$$

~~QED~~

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

$$d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) = \max \{ |x_n - x|, |y_n - y| \}$$

$$\text{Si } (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$$

$$\Rightarrow d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) = \max \{ |x_n - x|, |y_n - y| \}$$

$$\max \{ |x_n - x|, |y_n - y| \} \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\nwarrow \nearrow$
 \Leftrightarrow ambos tienden a cero

$$\text{o sea } \begin{cases} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{cases}$$

ya sé cómo convergen en (\mathbb{R}^2, d_∞)

si hago

$$f(x_n, y_n) = (x_n, y_n) \xrightarrow{?} (x, y) = f(x, y)$$

Pero no toda

$$(0, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (0, 0) \text{ pero}$$

$$\delta\left(f(0, \frac{1}{n}), f(0, 0)\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos.} \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0, 1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0, 1)$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

- (a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.
- (b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en x_0 . Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

Como f es continua en x_0 :

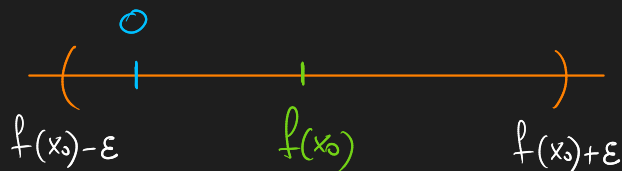
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

Si

$$f(x_0) > 0$$

$\Rightarrow B(f(x_0), \varepsilon)$ tiene centro en:



Si tomamos

$$r = d(f(x_0), 0) > 0$$

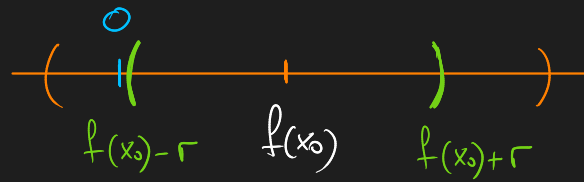
Como f es continua en x_0

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

en particular

$$\text{vale para } \varepsilon = r = d(f(x_0), 0) > 0$$



∴ Todos los elementos de la bola

$$\mathbb{B}(f(x_0), d(f(x_0), 0))$$

||

$$\{y \in E = \mathbb{R} : d(f(x_0), y) < d(f(x_0), 0)\}$$



