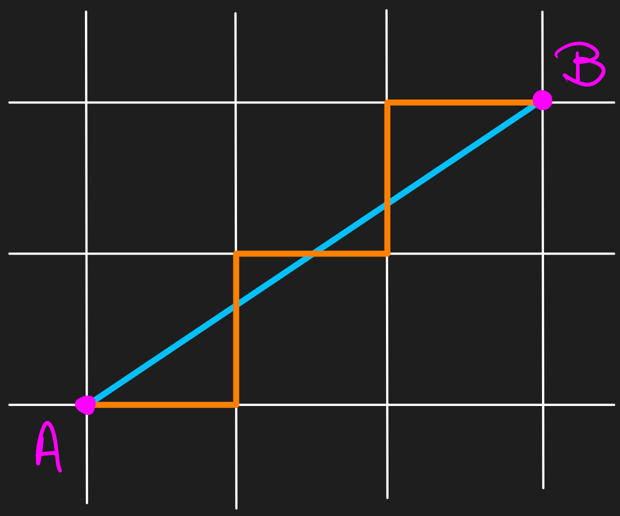
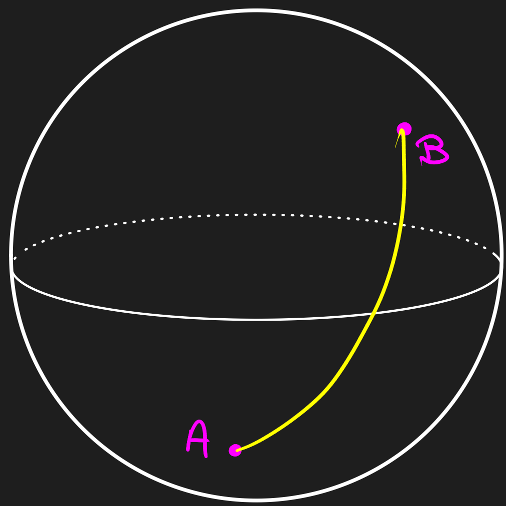
Vicky

Mercurio 7 Abr

# Espacios Métricos 1




## Def.

Sea $E$ un conjunto,

Una función

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

se llama una métrica o una distancia sobre $E$

si cumple:

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in E$ ← se desprende de iii)

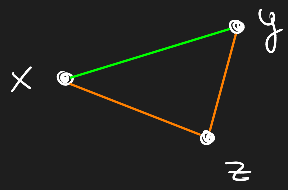
y

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in E$

iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in E$

Desigualdad Triangular




- Al par $(E,d)$ lo llamaremos un Espacio Métrico

Distancias de $\mathbb{R}^n$

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

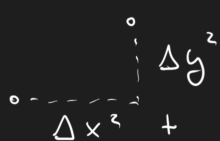
$y = ( \qquad\qquad ) \in \mathbb{R}^n$

Definimos la

Distancia Euclidea

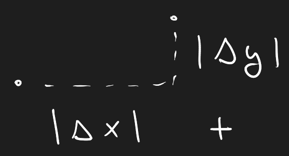
$$d_2(x,y) = \left( \sum_{i=1} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \| x - y \|_2$$



# Distancia 1

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

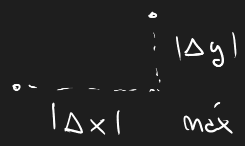



$$= \|x - y\|_1$$

# Distancia Infinito

$$d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

$$= \|x - y\|$$




Dem: $d_1$ cumple (i) - (iii)

(i) $d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - y_i|}_{\geq 0} = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$

$\iff x = y$. ✓

$-(x_i - y_i)$

(ii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$ ✓

(iii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - z_i + z_i - y_i|}_{\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|}$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \left( |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \right) = \underbrace{\sum |x_i - z_i|}_{d_1(x,z)} + \underbrace{\sum |z_i - y_i|}_{d_1(z,y)}$ ⊠

5/13

# Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

llamaremos $C([a,b])$

al conjunto de todas las funciones

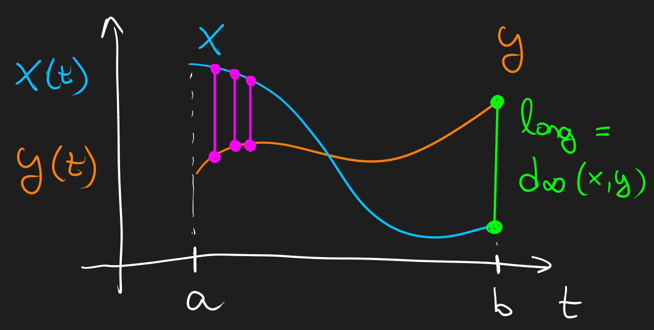
$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{continuas}$$

La métrica

funciones

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

Como usar módulo, estás usando $d_1$ en cada punto?




## Veamos que es una distancia :

i) $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$ y $d(x,y) = 0 \overset{?}{\iff} x = y$

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \geq 0 \quad \checkmark$$

$$d(x,y) = 0 \iff \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = 0$$

$$\iff |x(t) - y(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(t) = y(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

✓

ii) $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$$d(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

$$= \sup |-1(y(t) - x(t))|$$

$$= \sup |-1| \cdot |y(t) - x(t)|$$

$$= \sup_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)|$$

$$= d(y,x)$$

iii) $t \in [a,b]$

$$\Rightarrow |x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

$$\leq \underbrace{|x(t) - z(t)|}_{\leq \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)|} + \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{\leq \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)|}$$

$$\Rightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z)$$

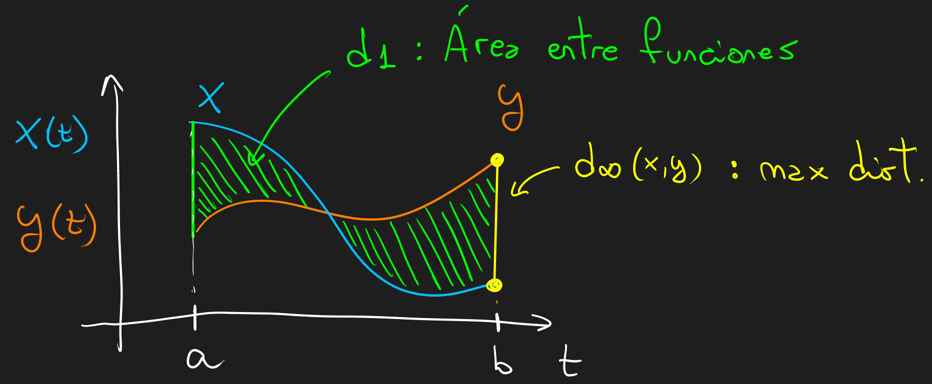
$$\Rightarrow d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z)$$

$\blacksquare$

$C([a,b]), d_\infty$ es un espacio métrico

Otra métrica posible en $C([a,b])$ es

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$$




Veamos que

Las 2 distancias anteriores (en $C([a,b])$)

son muy distintas.

Caso de analisis :

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|$$

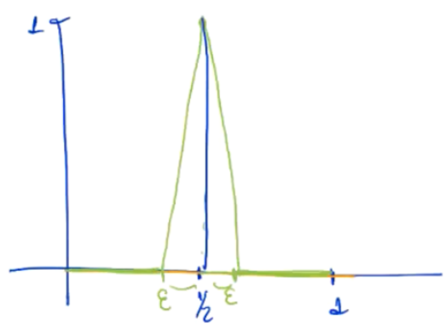
$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

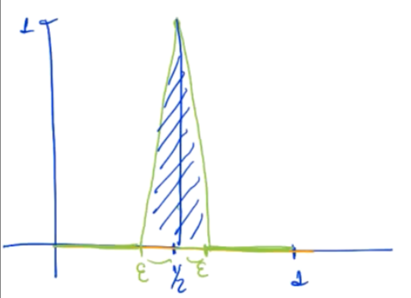
$[a,b] = [0,1]$

$x(t) \equiv 0 \quad \forall t.$

$y(t) \qquad \varepsilon > 0$

$d_\infty(x,y) = 1$






$y(t)$ $\qquad \varepsilon>0$

$d_\infty(x,y)=1$

$d_1(x,y)=\dfrac{2\varepsilon\cdot 1}{2}=\varepsilon$

Puedo hacer $d_1$ tan chico como quiera (eligiendo bien $y(x)$) mientras que $d_\infty$ es siempre 1.

Decimos que

$d_1(x,y)$ y $d_\infty$ no son distancias equivalentes.

Pregunta 2:

Son independientes? en el sentido que no dan info de la otra distancia.

# Distancia Discreta

**Definición**

Sea $E$ un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en $E$ como

$$\delta(x,y)=\begin{cases}0, & \text{si } x=y;\\ 1, & \text{si } x\neq y.\end{cases}$$

(i) $\delta(x,y)=0 \overset{\text{por def.}}{\Longleftrightarrow} x=y \qquad \delta(x,y)\in\{0,1\}$

(ii) $\underset{\substack{\downarrow\\ x\neq y}}{\delta(x,y)}=1=\delta(y,x)$

(iii) $\underbrace{\delta(x,y)}_{\substack{=1\\(x\neq y)}} \overset{(?)}{\leq} \delta(x,z)+\delta(z,y)$

caso x caso.

- La usamos para probar propiedades

# Topología en Espacios Métricos

De ahora en adelante, $(E, d)$ es un espacio métrico.

**Definición**

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}.$$

**Definición**

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

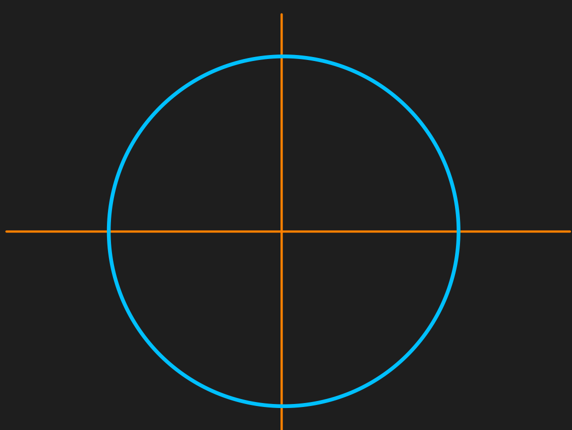
$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}.$$

## Dibujemos las bolas de las distancias

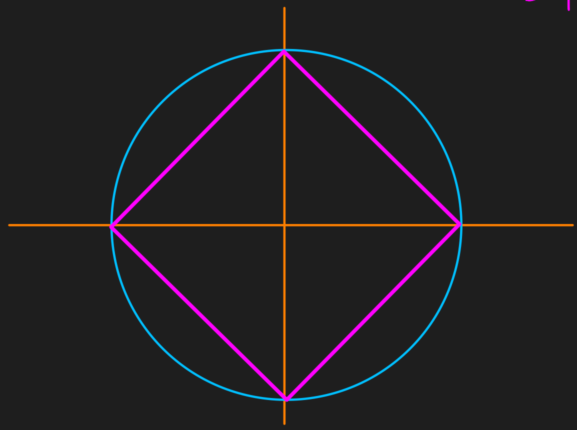
Para

- $E = \mathbb{R}^2$
- $x = (0,0)$
- $r = 1$

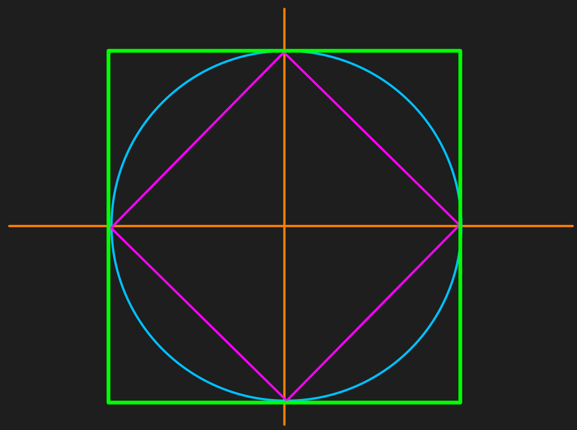
$$B^2((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_2((0,0),(x,y))}_{\sqrt{x^2+y^2}} < 1\}$$



$$B^1((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_1((0,0),(x,y))}_{= |x| + |y|} < 1\}$$



$$B^\infty((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_\infty((0,0),(x,y))}_{\max\{|x|,|y|\}} < 1\}$$



Obs:

$$B^1 \subseteq B^2 \subseteq B^\infty$$

Ejercicio:

¿Cómo son las bolas para $C([a,b])$?

$$\underset{\text{centro}}{B(x(t), r)} = \{ y \in E : d(x, y) < r \}$$

funciones

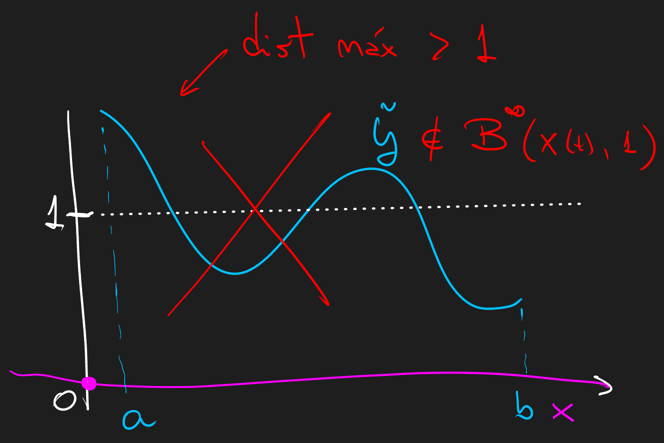
Para $d_\infty$ en $C([a,b])$

Centro

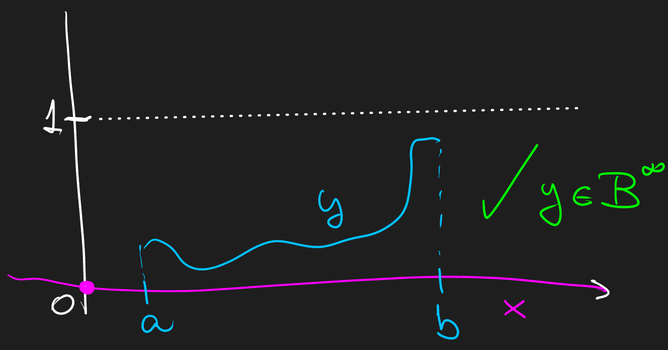
$x(t) = 0$

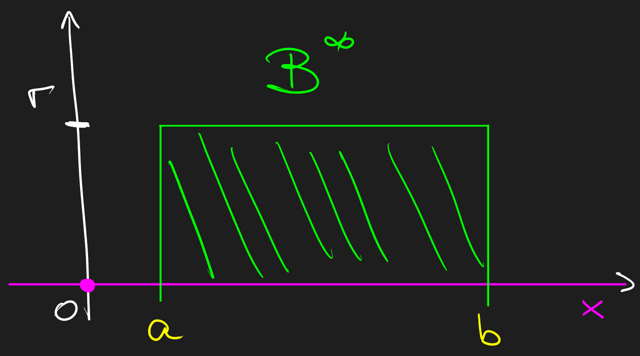
Radio

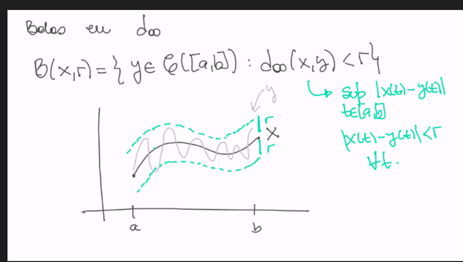
$r = 1$




en $B^\infty$ solo están las funciones con valores < r





Bolas en $d_\infty$

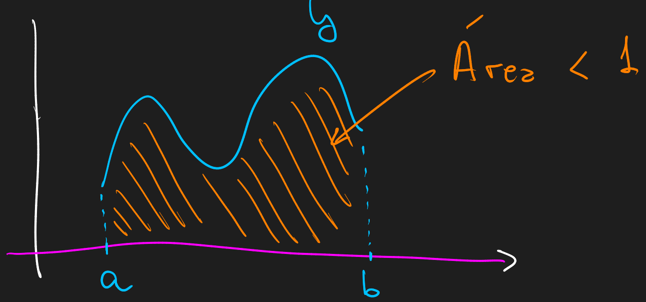
$B(x,r) = \{ y \in \mathcal{C}([a,b]) : d_\infty(x,y) < r \}$

$\hookrightarrow \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$

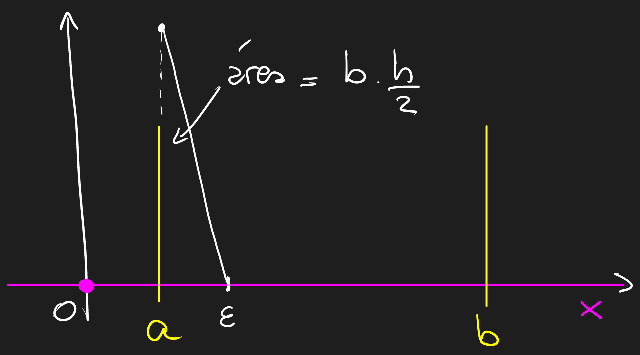
$|x(t) - y(t)| < r \quad \forall t.$

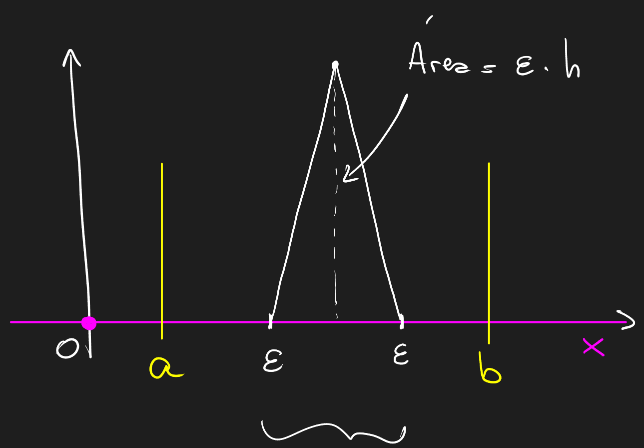


Para $d_1 = \int_a^b |x - y| \, dt$



• Como el área de las funciones no puede ser $> 1$, y como el intervalo en $x$ es fijo: $[a,b]$, puedo encontrar infinitas funciones con $y(t)$ tan grande como yo quiera:



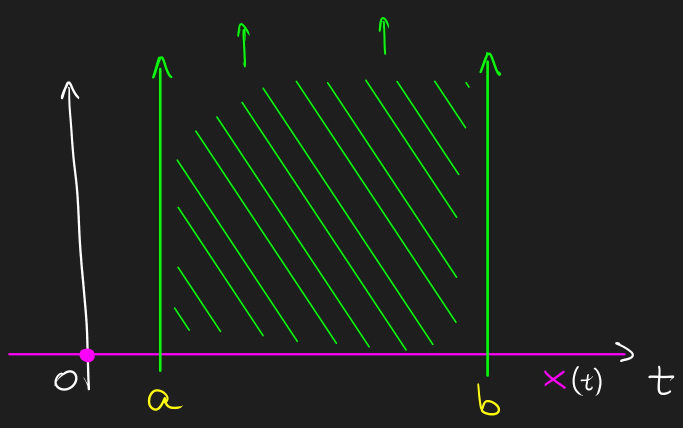

Si quiero $A < 1$

$$\Rightarrow \varepsilon . h < 1$$

$$\overset{h>0}{\Rightarrow} \varepsilon < \frac{1}{h}$$

Con esto vemos que puedo construir cualquier función de Área 1 con una altura particular, por lo que en este caso, la Bola no está acotada.

$B^1$



$\cdot$ E conj $\delta$ = discreta

$B(x,1) = \{y \in E : \delta(x,y) < 1\} = \{x\}$

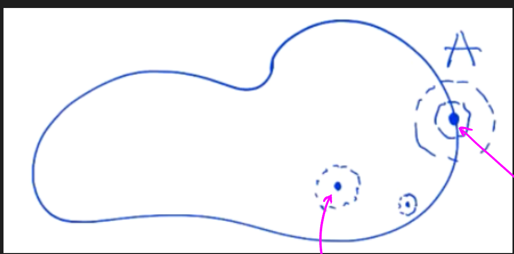
$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ E & r > 1 \end{cases}$$

← Solo x

← Todo E

Def :

Sea $A \subset E$. Decimos que $x$ es un punto interior de $A$ si existe algún $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$.




no es interior

es interior

**Definición**

Sea $A \subset E$. El interior de $A$ es el conjunto de todos los puntos interiores de $A$, y lo notamos $A^\circ$.

A interior

Obs

$$A^\circ \subseteq A$$

**Definición**

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de $G$ es un punto interior de $G$ (análogamente, si $G = G^\circ$).

**Observación**

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

$\Longleftrightarrow G = G^\circ = \{x \in G : x \text{ es int}$

**Observación**

El conjunto $E$ es abierto. (pues contiene todas las bolas)

El conjunto $\emptyset$ es abierto.

Ej: $E = \mathbb{R}$

$d = |\cdot|$

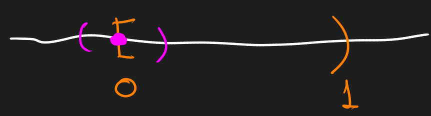
$A = [0,1)$

¿$A^\circ$?

Veamos que $0 \notin A^\circ$ (interior)

$r > 0$,

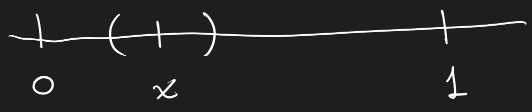
$B(0,r) = \{y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0,y)} < r\}$

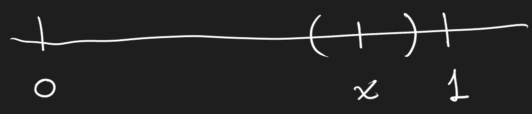


$= (-r, r) \Rightarrow$ n°s negativos

$$\therefore \quad B(0,r) \not\subseteq A$$

• Sea $x \in A$ y $x \neq 0 \Rightarrow x \in A^{\circ}$




Si elijo $r$ como

$r > 0$,

$$B(0,r) = \{ y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0,y)} < r \}$$

$$r < \min \{ x - 0, 1 - x \}$$

$$r < \min \{ x, 1 - x \}$$

$$\Rightarrow B(0,r) = \{ y \in \mathbb{R} : |y| < \min \{ x, 1 - x \} \}$$