Nico

Abr 15

# Espacios Métricos

## Recordar

$A \subseteq E$, $E$ métrico

- $\overline{A} = \{ x \in E : B(x,r) \cap A \neq \emptyset \ \ \forall r > 0 \}$
- $A$ es cerrado $\iff A = \overline{A}$

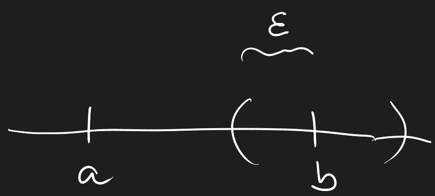
Ejemplos:

1) $\overline{(a,b)} = [a,b]$

$\supseteq$) ya sabemos que $(a,b) \subseteq \overline{(a,b)}$

Veamos que

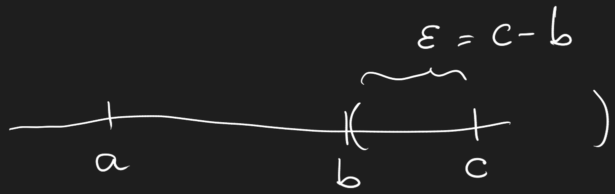
$$b \in \overline{(a,b)}$$




$$\forall \varepsilon > 0, \quad b - \frac{\varepsilon}{2} \in (a,b) \cap B(b,\varepsilon) \ \checkmark$$

$\subseteq$) Sea $c > b$, veamos que (por contrarecíproco)

$$c \overset{?}{\notin} \overline{(a,b)}$$




Afirmo

$$\underbrace{B(c, c-b)}_{(b,\, 2c-b)} \cap (a,b) = \phi$$

$$\Rightarrow \quad c \notin \overline{(a,b)}$$

en particular, $[a,b]$ es cerrado.

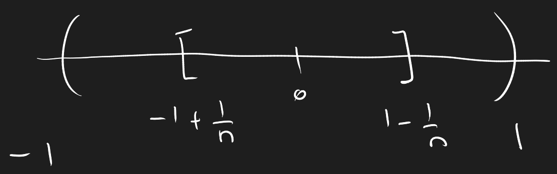
También:

$$\mathbb{R} \setminus [a,b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{Abierto}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{Abierto}}$$

Obs:

- $$\underbrace{[-1,1]}_{\text{No es abierto}} = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{Abiertos}}$$

$$\bullet\ \underbrace{(-1,1)}_{\underline{\text{no}}\text{ es cerrado}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-1+\frac{1}{n}\ ,\ 1-\frac{1}{n}\right]$$




2) $[a,b)$ (con $b>a$) $\underline{\text{no}}$ es cerrado ni abierto

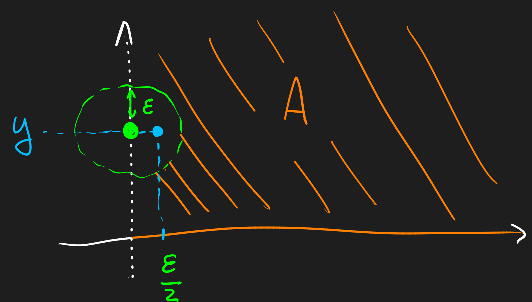
$$\overline{[a,b)} = [a,b]$$

3) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\geq 0\}$


A firmo

$$\overline{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y\geq 0\} =: F$$

$\supseteq$) Sea $(0,y)\in F$, $\varepsilon>0$



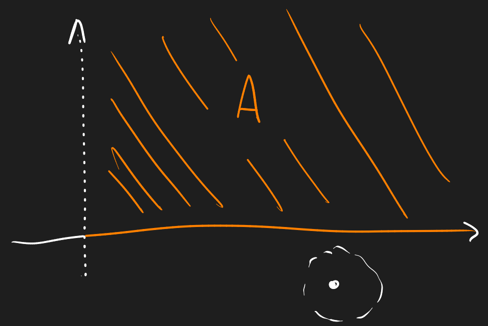
$$\Rightarrow \underbrace{(\underbrace{\varepsilon/2}_{>0}, \underbrace{y}_{\geq 0})}_{\in A} \in B((0,y), \varepsilon) \cap A$$

$$\Rightarrow d((\varepsilon/2, y), (0,y)) = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| < \varepsilon \quad \checkmark$$

$\subseteq$) Uso contrarecíproco

Sea $(x,y) \notin F$

v.q. $(x,y) \notin \overline{A}$




Sup. $x \geq 0$, $y < 0$

Afirmo:

$$\underbrace{B((x,y), |y|)} \cap A = \phi$$

más aún, si $(z,w) \in$

$\Rightarrow w < 0$

Sea $(z,w)$ en la bola

$$|y| > d\big((z,w),(x,y)\big) = \sqrt{(z-x)^2+(w-y)^2}$$

$$\geq \sqrt{(w-y)^2}$$

$$= |w-y| < |y|$$

Como

$$|w-y| < |y|$$

$\Rightarrow$ $w$ es negativo.

Falta ver otros casos

| | |
|---|---|
| 2 | A |
| 3 | 1 |

Sup. $x$ $0$, $y$ $0$

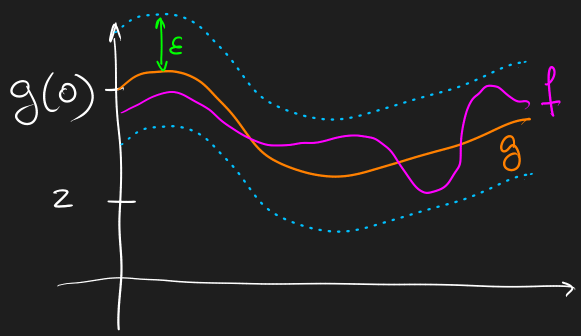
Sup. $x$ $0$, $y$ $0$

EJERCICIO: $A^\circ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\}$

3) $A = \{ f \in C([0,1]) : f(0) = 2 \}$

Probar:

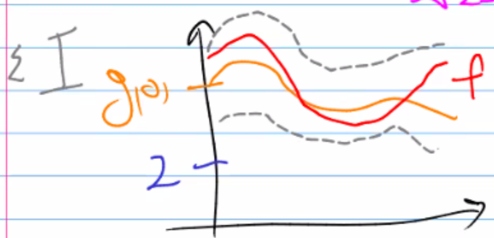
- $\underbrace{A \text{ es cerrado}}_{A^c \text{ es Abierto}}$ para $d_\infty$




Sea $g \in A^c$,

q.v.q. $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(g,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(g,\varepsilon) \cap A = \emptyset$




$d_\infty(f,g) < \varepsilon$

$\Rightarrow f(0) \neq 2$

Tomo $\varepsilon = |g(0) - 2|$. Así

$$\varepsilon > d_\infty(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$$\geq |f(0) - g(0)|$$

$$\Rightarrow |\underbrace{f(0)}_{\neq 2} - g(0)| < |g(0) - 2| \quad \checkmark$$

pues $|y| < |y|$ abs!

Probar

- $A$ no es cerrado para $d_1$

$\underbrace{\phantom{A \text{ no es cerrado}}}$

$A^c$ no es abierto: Bvq

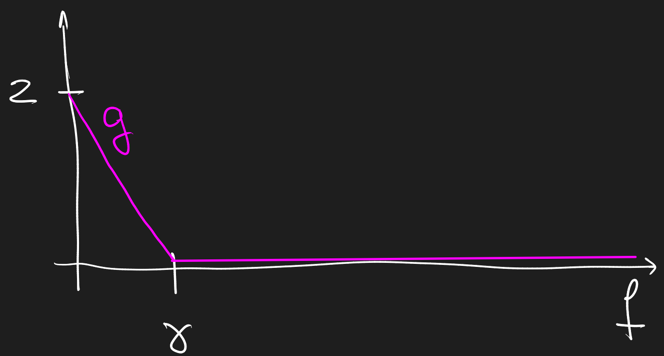
$$\exists\, f \in A^c \,/\, \forall \varepsilon > 0,\ B(f,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

es decir

$$B(f, \varepsilon) \not\subseteq A^c$$

$$\Rightarrow \exists g \in B(f, \varepsilon) \ / \ g(0) = 2$$

Tomo $f \equiv 0$




Así, $g \in A$

Área

y $d_1(f, g) = \gamma < \varepsilon$ si tomo $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$

Prop:

Si $F \subseteq C([0,1])$ cerrado

para $d_1$, lo es para todo $d_\infty$

Ejercicio: Probar

Recordar:

Sea $(E, d)$ métrico

$$\overline{B}(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) \leq r \}$$

$$\left( \Rightarrow \overline{B}(x,r) \supseteq \overline{B(x,r)} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Afirmo:} \\ \quad \text{en } C([0,1]) \text{ con } d_\infty, \\ \quad \forall f, \forall r, \quad \overline{B}(f,r) = \overline{B(f,r)} \end{array}}$$

Para $d_1$ también vale

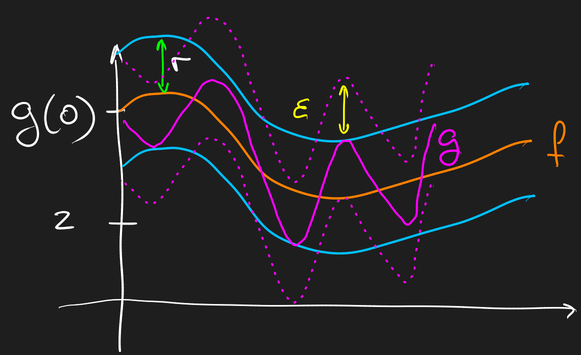
Dem:

$\supseteq$) Vale siempre

$\subseteq$) qvq si $d_\infty(f,g) \leq r$

Ptos de adherencia

$$\overset{?}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0, \; B(g,\varepsilon) \cap B(f,r) \neq \emptyset$$



$$\text{Tomo } h(x) = g(x) + \big(f(x) - g(x)\big)\cdot\delta$$

$\delta > 0$
a determinar

$$\bullet\ d_\infty(h,g) = \max_{x\in[0,1]} |h(x) - g(x)|$$

$$= \delta \cdot \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$$= \delta \cdot \underbrace{d_\infty(f,g)}_{\leq r}$$

$$\leq \delta \cdot r < \varepsilon$$

si tomo

$$\delta < \frac{\varepsilon}{r}$$

$$\bullet\ d_\infty(h,f) = \max_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x) + (f(x) - g(x))\delta|$$

$$= \max |(g(x) - f(x))\cdot(1-\delta)|$$

$$\overset{\delta<1}{=} (1-\delta)\cdot \max |g(x) - f(x)|$$

$$= (1-\delta)\cdot \underbrace{d_\infty(g,f)}_{\leq r}$$

$< r \quad \forall \delta$ con $\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{r}\right\}$

$\boxtimes$