

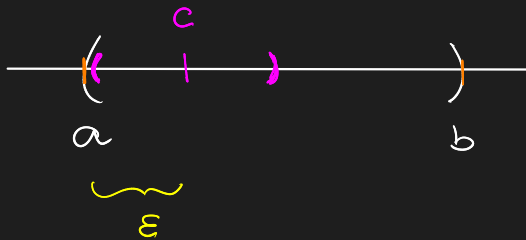
Espacios Métricos 1

Ejemplo :

$$(\mathbb{R}, d)$$

$$d(x, y) = |y - x|$$

- (a, b) es abierto :



$$\text{Sea } \varepsilon = \min \left\{ \underbrace{c-a}_{d(c,a)}, \underbrace{b-c}_{d(c,b)} \right\}$$

Veamos que

$$\underbrace{\mathbb{B}(c, \varepsilon)}_{\mathbb{B}_\varepsilon(c)} \subseteq (a, b)$$

- $\mathbb{B}(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) :$

$$y \in \mathbb{B}(c, \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 y \in B(c, \varepsilon) &\Leftrightarrow d(y, c) < \varepsilon \Leftrightarrow \\
 |y - c| < \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < y - c < \varepsilon \\
 \Leftrightarrow y \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) &\checkmark
 \end{aligned}$$

Hay que ver que

$$c - \varepsilon \geq a$$

$$c + \varepsilon \leq b$$

Só que

$$\varepsilon = \min \{c - a, b - c\}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \varepsilon \leq c - a &\Leftrightarrow c - \varepsilon \geq a \quad \checkmark \\
 \text{y } \varepsilon \leq b - c &\Leftrightarrow c + \varepsilon \leq b \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

∴ (a, b) es abierto \square

Obs:

Veamos que (a, b) es una bola:

$$(a, b)_{\mathbb{R}} = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

$\Rightarrow (a, b)$ es abierto (pues es un bdo abierto)

$\bullet (a, b]^{\circ} = (a, b)$

interior



$\supseteq) \forall c \in (a, b)$, vimos que

$$\exists \varepsilon > 0 \mid B(c, \varepsilon) \subseteq (a, b) \subseteq (a, b] \quad \checkmark$$

Otra forma

$$(a, b) \begin{cases} \nearrow \text{es abierto} \\ \searrow \subseteq (a, b] \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a, b) \subseteq (a, b]^{\circ}$$

Usando que:

$\Sigma: U$ es abierto y $U \subseteq X$

$$\Rightarrow U \subseteq X^{\circ}$$

Veamos $\subseteq) \quad b \stackrel{?}{\notin} (a, b]^{\circ}$

$$\text{ie. } (\nexists \varepsilon > 0) \mid B(b, \varepsilon) \subseteq (a, b]$$

en efecto

$$b + \frac{\varepsilon}{2} \in B(b, \varepsilon)$$

$$\notin (a, b] \quad \checkmark$$

$$\therefore (a, b]^\circ = (a, b)$$

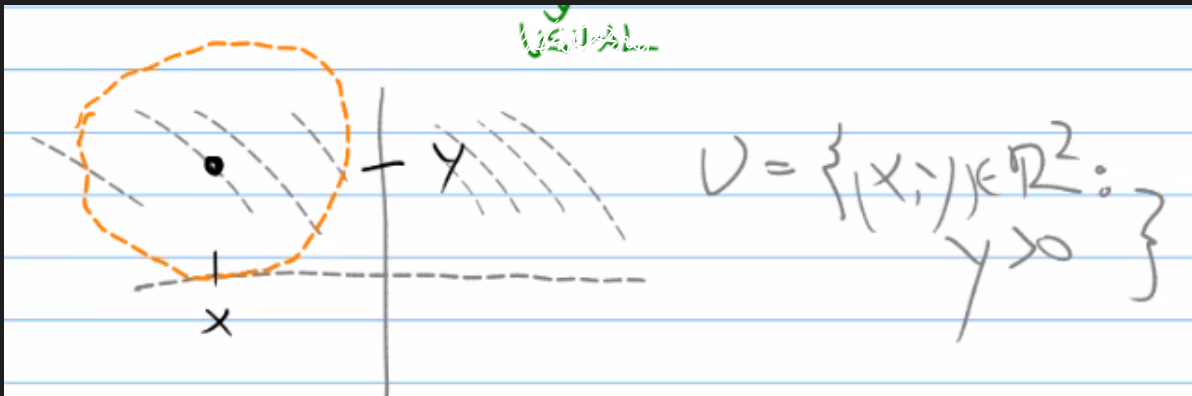
□

Ejemplo :

$$\text{en } (\mathbb{R}^2, d_z)$$

↑
usual

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$



SEA $(x, y) \in U$. TOMEMOS $\varepsilon = y$;
VEAMOS QUE $B((x, y), \varepsilon) \subseteq U$.

SEA (z, w) /

$$\varepsilon > d((z, w), (x, y)) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{q \cdot q}{w \geq 0} \\
& = \sqrt{(z-x)^2 + (w-y)^2} \\
& \geq \sqrt{(w-y)^2} \\
& = |w-y|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -y < w-y < y$$

$$\Rightarrow w \geq 0$$

□

Consideremos, en \mathbb{R}^2 , d_∞ , ¿es U abierto?

¡Sí! veámoslo:

Sea $(x, y) \in U$,

elijo $\varepsilon = y$

$$y = \varepsilon > d((x, y), (z, w))$$

$$= \max\{|x-z|, |y-w|\}$$

$$\geq |y-w|$$

mismo desig. de antes

$$\leadsto w \geq 0$$

\square

$$\begin{aligned} & \geq \sqrt{(w-y)^2} = |w-y| \\ \Rightarrow & -\gamma < w-y < \gamma \\ \Rightarrow & w > 0 \end{aligned}$$

$d_2((2,w), (x,y)) > d_\infty((2,u), (x,y))$

← notar que

Ej 3 :

Concluir que $(\forall U \subseteq \mathbb{R}^2)$

U es abierto para $d_2 \Leftrightarrow$

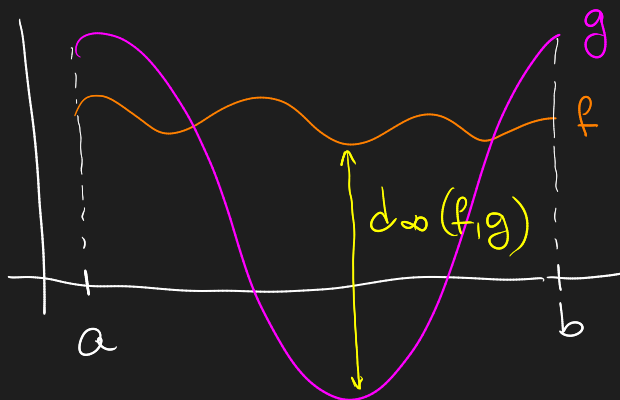
U es abierto para $d_\infty \Leftrightarrow$

U es abierto para d_1

Ejemplo :

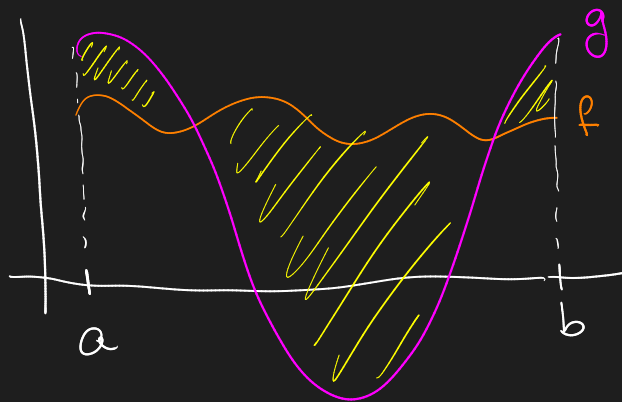
En $E = C([0,1])$ hay distintas métricas

• d_∞ :



$$d_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

• d_1 :



$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g|$$

Sea $f \in E$,

$$f \equiv 0$$

Sea $d \geq 0$

$f \in B^{\infty}(f, d)$ ^{Bola wrt d_{∞}}

→ es un abierto de (E, d_{∞})
(las bolas son siempre abiertas)

→ No es abierto de (E, d_1)

Más aún, vemos que

$$f \notin \left(B_{\infty}(f, d) \right)^{\circ} \leftarrow \text{interior wrt } d_1.$$

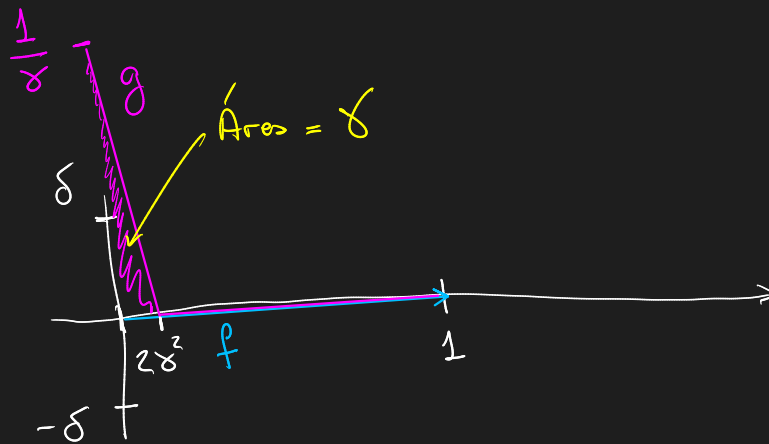
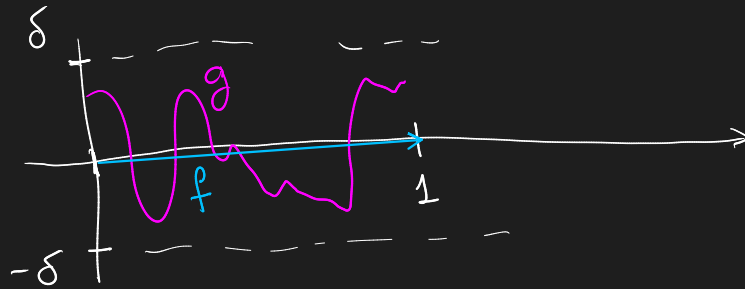
$\forall \varepsilon > 0$

$$\nexists \varepsilon > 0 \mid B^1(f, \varepsilon) \subseteq B^{\infty}(f, d)$$

equivalen, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in E /$$

$$g \in \mathcal{B}^1(f, \varepsilon) \wedge g \notin \mathcal{B}^\infty(f, g)$$



$$\bullet d_1(f, g) = \int_0^1 |g(x)| dx$$

$$= \text{Área del } \Delta$$

$$= 2\delta^2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \delta < \varepsilon$$

↑
quero

$$\bullet d_1(g, f) = \int_0^1 |g(x)| dx = \gamma < \varepsilon$$

\downarrow
puedo

$$\bullet d_\infty(g, f) = \max_{x \in [0,1]} |g(x)| = 1/\gamma \geq \delta$$

\uparrow
puedo

$\Leftrightarrow 1/\gamma \geq \gamma$

\leadsto 1

\leadsto Puedo tomar

$$\gamma = \min \left\{ \frac{1}{8}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Encontré pto de B' que no esté en B^∞

□

Para Pensar

Calcular $B_\infty(f, g) \leftarrow \text{wrt } d_1$

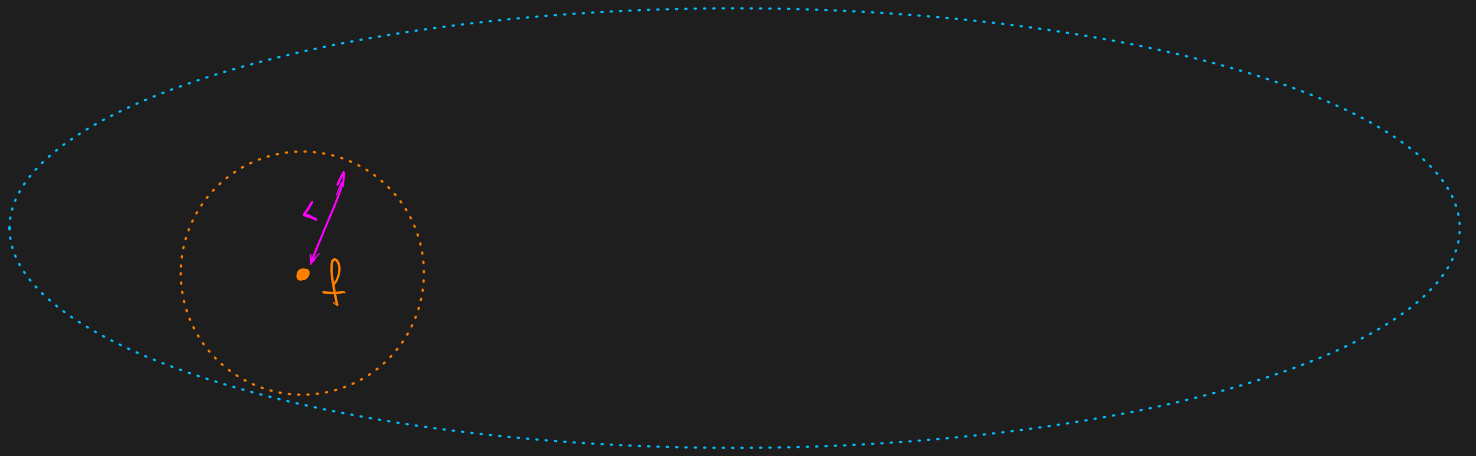
Prop:

Todo abierto de (E, d_1)

es abierto de (E, d_∞)

Dem:

U



Seja $U \subset \mathbb{B}_\infty(C, A, d_1)$. Seja $f \in U$
($\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \mathbb{B}_\infty(f, \delta) \subseteq U$)

Sé que

$$\exists r > 0 \mid \mathbb{B}_1(f, r) \subseteq U$$

$\leadsto \forall \epsilon$

$$\exists \delta > 0 \mathbb{B}_\infty(f, \delta) \subseteq \mathbb{B}_1(f, r)$$

Seja

$$g \in \mathbb{B}_\infty(f, \delta)$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq d_\infty(f, g)} dx$$

$$\leq d_\infty(f, g) \cdot \int_0^1 1 dx$$

$$d_1(f, g) \leq \underbrace{d_\infty(f, g)}_{< \varepsilon \text{ per } g \in \mathring{B}(f, \varepsilon)}$$

\leadsto Tomo $\varepsilon =$

\leadsto Tomo $\varepsilon = r/2$, γ Asi

$$d_1(f, g) \leq r/2 < \varepsilon$$

