14. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

- Sea el límite de la sucesión (x_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

- y sea el límite de toda subsucesión (x_{n_k})

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell \qquad \forall (x_{n_k})$$

- qvq

$$L \overset{?}{=} \ell$$

Sea $\varepsilon > 0$

$$|\ell - L| = |\ell - x_{n_k} + x_{n_k} - L|$$

$$\overset{DT}{\leq} |\ell - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L|$$

reescribo como

$$= \underbrace{|x_{n_k} - \ell|}_{\text{Dato}} + \underbrace{|x_{n_k} - L|}_{\text{Dato (casi)}}$$

Tomo

sé que vale $\forall \varepsilon > 0$

$$k_1 \in \mathbb{N} \;/\; |x_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_1 \quad (\forall n_k \geq n_{k_1})$$

y tomo

$$k_2 \in \mathbb{N} \;/\; |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_2 \quad (\forall n_k \geq n_{k_2})$$

Tomo

$$k_0 = \text{máx}\{k_1, k_2\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x_{n_{k_0}} - \ell|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{pues } n_{k_0} \geq n_{k_1}}} + \underbrace{|x_{n_{k_0}} - L|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{pues } n_{k_0} \geq n_{k_2}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$

$$|\ell - L| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

(en el límite: $\ell = L$)

15. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, y sea $\ell \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Sea

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = \ell \qquad \underbrace{\forall\, (x_{n_k})}_{\text{subsucesiones}}$$

qvq

$$\lim_{n\to\infty} x_n \overset{?}{=} \ell$$

Mal!

Como toda subsución $(x_{n_{k_j}})$ de (x_{n_k}) es a su vez una subsucesión de (x_n), cuando se habla de TODA subsuc. (x_{n_k}), también se incluyen todas las $(x_{n_{k_j}})$

$\therefore$ es equivalente a preguntar:

"Si toda subsuc (x_{n_k}) converge a ℓ entonces (x_n) converge a ℓ"

Lo cual es verdadero por el ejercicio 14.

$\blacksquare$

Por absurdo:

Supongo que $x_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Si $a_n \to \ell$

$\Rightarrow$ Sea $\underbrace{\varepsilon>0}_{\forall}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

niego todo

$\neg \Big(\qquad\qquad \Big)$

$\exists \varepsilon > 0, \; \neg \Big(\qquad\qquad \Big)$

$$\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N}, \; \exists n \geq n_0 \;/\; |a_n - \ell| \geq \tilde{\varepsilon} \qquad (*)$$

esto implica que $\exists$ una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tal que

$$|x_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si elijo $n_0 = 1$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists n_1 \geq 1 \;/\; |a_{n_1} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon}$

elijo $n_0 = n_1 + 1$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists n_2 \geq n_1 + 1 \;/\; |a_{n_2} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon}$

elijo $n_0 = n_2 + 1$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\, n_3 \geq n_2+1 \;/\; |a_{n_3} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon}$

Así, inductivamente, construimos

$$\underbrace{(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}}_{\text{Sub suc. de } (a_n)} \;/\; |a_{n_k} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon}$$

Paso inductivo:

Si tenemos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$

con $|a_{n_j} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon} \quad \forall\, 1 \leq j \leq k$

Para obtener n_{k+1} :

$n_0 = n_k + 1$ en (*)

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \exists\, n_{k+1} \in \mathbb{N} \geq n_k + 1 \;/\; |a_{n_{k+1}} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon}$

Esto muestra como construir (a_{n_k}) inductivamente.

Como $|a_{n_k} - \ell| \geq \tilde{\varepsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ <u>ninguna</u> subsucesión de (a_{n_k})

puede converger a l, ya que si hubiera

una subsuc. $(a_{n_{k_j}})$ convergente a l,

$\Rightarrow$ habría términos de $(a_{n_{k_j}})$ a

distancia menor que $\tilde{\varepsilon}$ de l.

$$\therefore (x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$$

$\blacksquare$

16. Probar:

(a) Si $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

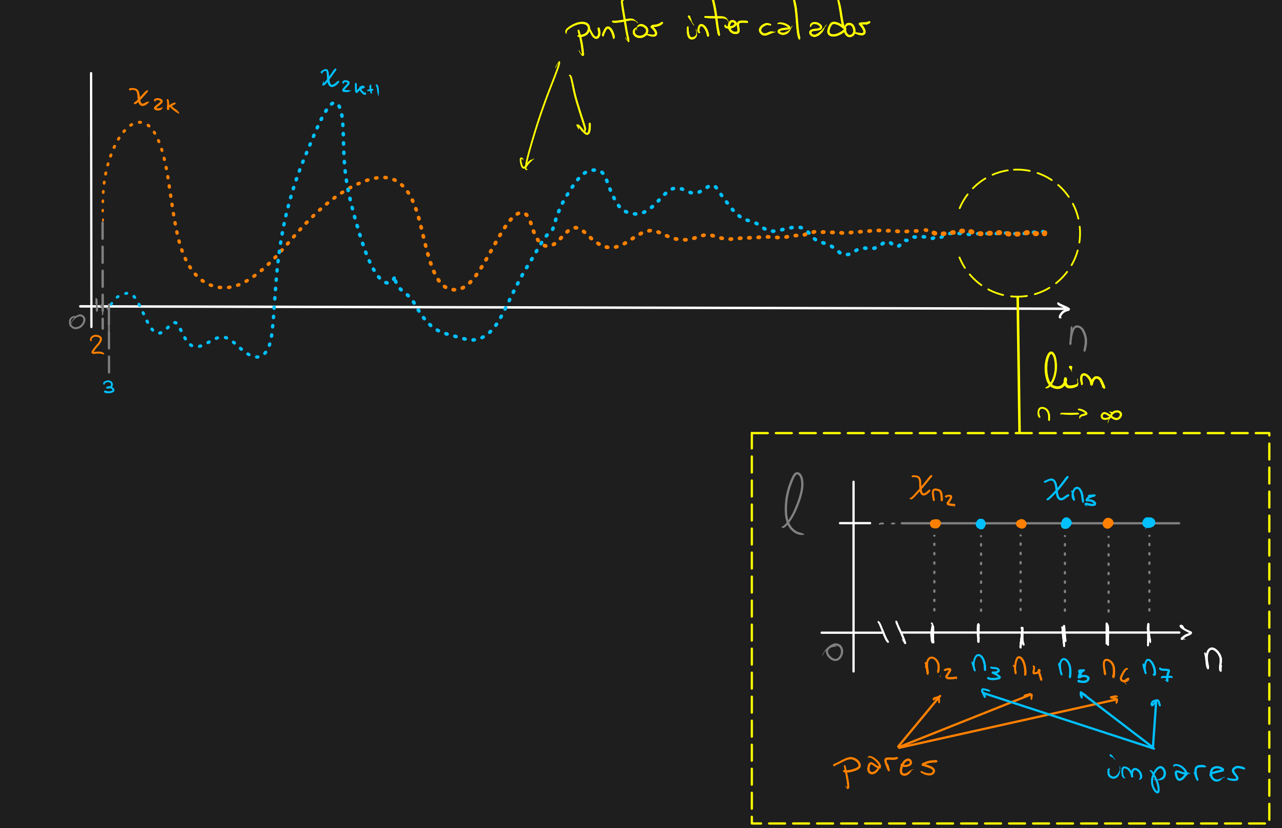
a) Asumo $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} < \infty$, pues sino es falso.

$n_1 = g(k) = 2k$ ← naturales pares desde 2

$n_2 = h(k) = 2k+1$ ← naturales impares desde 3

$= g(k)+1$

Idea



• Intuitivamente,

Si $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$

no sólo nos dice que tomando índices pares e impares resulta en el mismo límite,

sino que tomando todos los índices pares y (casi) todos los impares se obtiene el mismo límite,

con lo que uno esperaría que intercalando elementos de de cada sucesión obtendríamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite siendo el mismo que el de las subsucesiones,

pues puedo escribir $\mathbb{N}$ como

$$\mathbb{N} = \{\mathbb{N} \text{ pares}\} \cup \{\mathbb{N} \text{ impares}\}$$

$$= \{2k : k\in\mathbb{N}\} \cup \{2k+1 : k\in\mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

No me interesa que quede afuera, pues solo me interesa el límite.

Formalmente

Sea $\varepsilon > 0$,

(Para impares)

① $\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, |\underbrace{x_n}_{x_{2k+1}} - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1, \; n = 2k_1+1, \; k_1 \in \mathbb{N}$

y además (pares)

② $\exists n_2 \in \mathbb{N} \,/\, |\underbrace{x_n}_{x_{2k}} - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2, \; n = 2k_2, \; k_2 \in \mathbb{N}$

Por claridad, reescribo índices en función de k

I $\quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \;/\; |x_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_1$

y además (pares)

II $\quad \exists k_2 \in \mathbb{N} \;/\; |x_{2k} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_2$

qvq

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \;/\; |x_k - \ell| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

$\Rightarrow$ si tomo

$$k_0 = \max\{k_1, k_2\}$$

valen tanto I como II, siendo

vale para todos los subíndices impares

I $\quad |x_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

vale para todos los subíndices pares

II $\quad |x_{2k} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

Juntando I y II obteniendo $n = k$ con $k \in \mathbb{N} \wedge k > 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; |x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\blacksquare$

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Reescribo datos

Sea $\varepsilon > 0$

(x_{2k}) converge $\Rightarrow |x_{2k} - l_2| < \varepsilon$ a partir de un $n_1 = 2k$

(x_{2k+1}) converge $\Rightarrow |x_{2k+1} - l_1| < \varepsilon$ a partir de un $n_2 = 2k+1$

(x_{3k}) converge $\Rightarrow |x_{3k} - l_3| < \varepsilon$ a partir de un $n_3 = 3k$

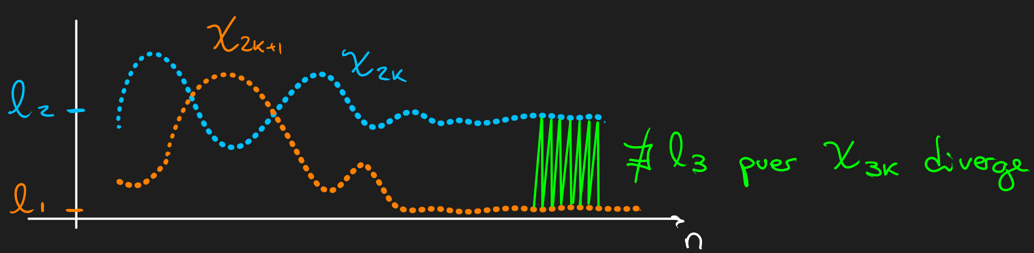
Intuitivamente

- $2k$: pares
- $2k+1$: impares
- $3k$: mult de 3 : impar, par, impar, par, ...

- Aquí puedo ver que (x_{3k}) está compuesto de los elementos de (x_{2k+1}) y de (x_{2k}) intercalados.

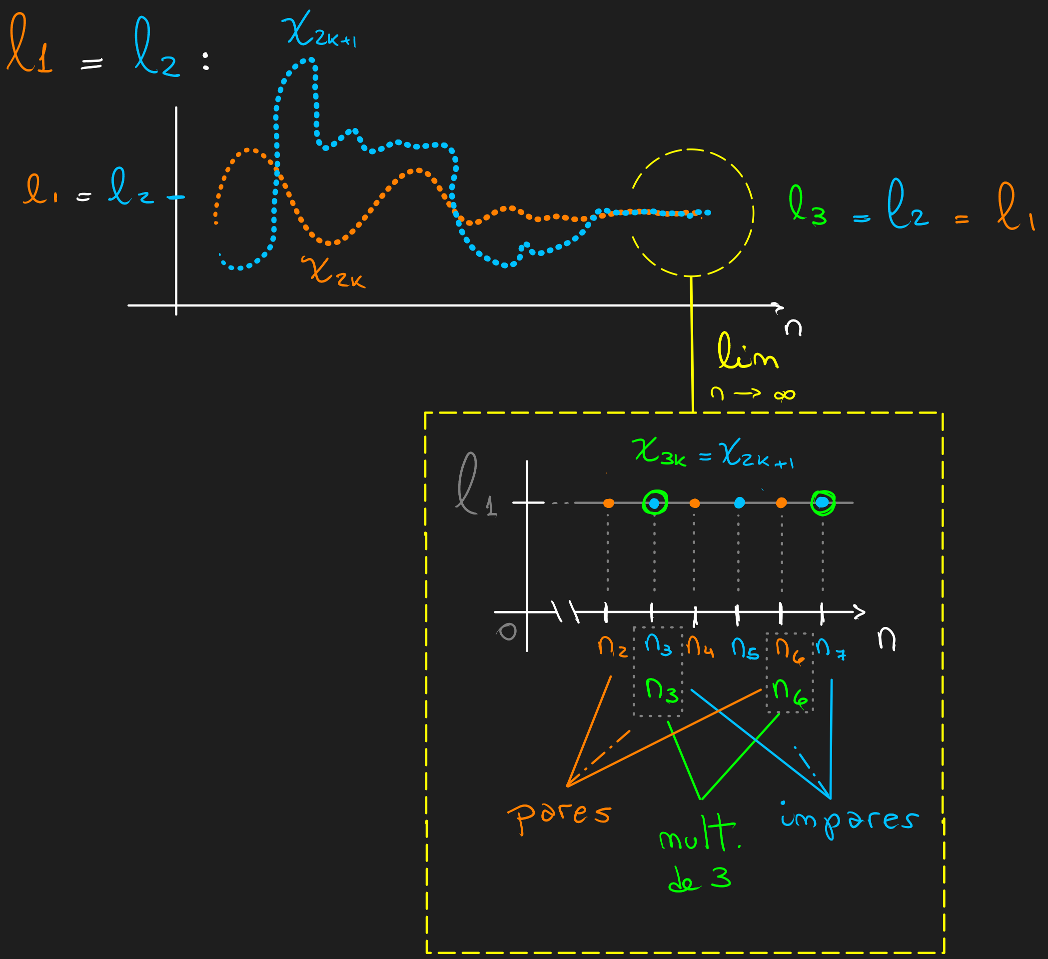
- Si l_1 fuera distinto a $l_2 \Rightarrow l_3$ no podría converger.

$l_1 \neq l_2$:



$\therefore$ l_1 debe ser igual a l_2

en cuyo caso, l_3 también deberá ser el mismo:



Formalmente

Debo probar que

$$\text{si: } \lim_{k \to +\infty} x_{2k} \neq \lim_{k \to +\infty} x_{2k+1} \overset{?}{\Rightarrow} (x_{3k}) \text{ diverge}$$

Teniendo esto, puedo usar (a) para afirmar que

$$\text{si: } \lim_{k \to +\infty} x_{2k} = \lim_{k \to +\infty} x_{2k+1} \Rightarrow (x_n) \text{ converge}$$

y como converge, todas las subsuceciones de (x_n) deberán converger al mismo límite, incluída (x_{3k})

Supongo $l_1 \neq l_2$

$$|x_{2k} - l_2| < \varepsilon$$

$$|x_{2k+1} - l_1| < \varepsilon$$

Armo subsucesiones de cada una, tomando sólo los subíndices múltiplos de 3

$|x_{6k} - l_2| < \varepsilon \leftarrow$ debe converger a l_2 por ser subsuc. de x_{2k}

$|x_{3(2k+1)} - l_1| = |x_{6k+3} - l_1| < \varepsilon$

$\uparrow$ debe converger a l_1 por ser subsuc. de x_{2k+1}

$\therefore$ conseguí 2 subsucesiones de (x_{3k}) que convergen a distintos valores $(l_1 \neq l_2)$

$\therefore$ (x_{3k}) diverge.

Abs! pues (x_{3k}) converge (es dato)

$\therefore$ $l_1 = l_2$

y por el mismo razonamiento que arriba

$$l_1 = l_2 = l_3$$

Además, como $l_1 = l_2$, por (a), (x_n) converge.

$\blacksquare$