

Vicky

Buena Definición de dos

$$1.) \quad x \in \mathcal{C}([a, b]) \Rightarrow \bullet |x| \in \mathcal{C}([a, b])$$

Componer continuas da continua.

- $|x|$ es continua en $[a, b]$
está acotada (alcanza max
y min por ser continua en
compacto: Weierstrass)

$$2.) \quad x, y \in \mathcal{C}([a, b]) \Rightarrow (x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

\uparrow
+ que definio
en $\mathcal{C}([a, b])$

$\uparrow + \text{de } \mathbb{R}$

Juntando 1 y 2

$$\Rightarrow |x - y| \text{ alcanza m\u00e1x y min en } [a, b]$$

$$\Rightarrow \{ |x(t) - y(t)| : t \in [a, b] \} \subseteq \mathbb{R} \text{ es acotado}$$

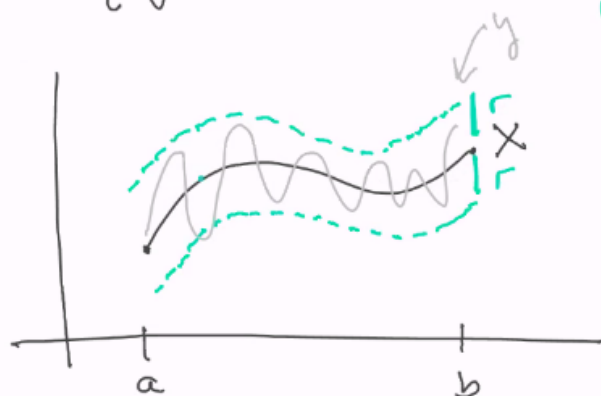
\therefore tiene supremo

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

Bien definido! \uparrow es siempre max.

Bolas en d_{∞}

$$B(x, r) = \{ y \in C([a, b]) : d_{\infty}(x, y) < r \}$$



$$\hookrightarrow \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| < r \quad \forall t.$$

en \mathbb{R}^n
($p \geq 1$) d_p : $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$

en $C([a, b])$ $d_1(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \right)^{1/p}$

$$d_p(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

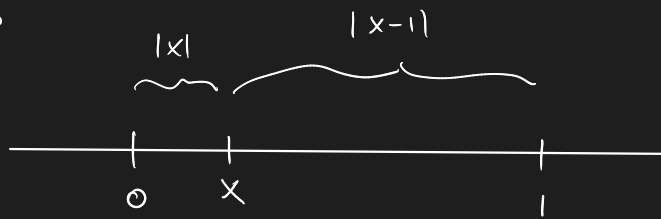
$$A = [0, 1) \quad 0 \notin A^\circ$$

$$B = (0, 1) \rightarrow B^\circ = B \quad \subseteq) \quad \checkmark$$

Falta ver que

$$B \subseteq B^\circ \quad \text{con} \quad B^\circ = \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists r > 0 \mid \underbrace{B(y, r)}_{\text{Bolita en } \mathbb{R}} \subseteq B \right\}$$

$$\bullet x \in B$$



Bolita en \mathbb{R}
 $(y-r, y+r)$

$$\text{Como } x \in B, \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

$$\Rightarrow |x|, |x-1| > 0$$

Tomo candidato:

$$r = \min \left\{ |x|, |x-1| \right\}$$

modulos para hacer en fesis
 $\frac{\quad}{2}$ sin esto también sirve.

Afirmo que

$$B(x, r) \stackrel{?}{\subseteq} B$$

Dem:

$$y \in B(x, r) \quad \text{y} \quad y \in (0, 1)$$

$$0 < y < 1$$

$$\Rightarrow |x-y| < r$$

$$\Rightarrow -r < x-y < r$$

$$\Rightarrow -r - x < -y < r - x$$

$$\Rightarrow x+r > y > x-r$$

$$\Rightarrow x-r < y < x+r$$

~~~~~

si pruebo que es positivo, listo!

$$r = \frac{1}{2} \min \{ |x|, |x-1| \}.$$

$$= \frac{1}{2} \min \{ x, x-1 \}$$

$$\uparrow$$

$$x \in B$$

$$x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \leq \frac{x}{2} \\ r \leq \frac{1-x}{2} \end{cases}$$

miramos

$$\textcircled{*} \quad x-r \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$$

$\uparrow$

$$r \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow -r \geq -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow y > x-r > 0$$

$$\Rightarrow y > 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \otimes \quad x + \frac{1}{2} &\leq x + \frac{1-x}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad x \in B, x < 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$  - -

Asumiendo:

siempre puedo definir distancia discreta.

$(E, d)$  es un espacio métrico

$$\mathcal{C}(E) := \{ f: E \rightarrow \mathbb{R} : \underbrace{\text{continua}} \}$$

?

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

¿está bien definido?

Y lo veremos.





