Dani

Viernes 2 Abril

Cardinalidad #2

Conjuntos numerables

X es numerable $\iff \exists f : \mathbb{N} \to X$ Biyectiva

Observación

X es numerable $\iff$ X se puede escribir como una sucesión de elementos distintos

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

Dem:

$\Rightarrow$) Si X numerable

$\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva

f es una sucesión!

Sea $x_n = f(n)$

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

que es lo mismo que

Como f es suryectiva (es biyectiva)

$$X = \operatorname{Im} f = \{ f(n) : n \in \mathbb{N} \}$$

Falta 2° propiedad

$$\text{Si } n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$$

f inyectiva
(biyectiva)

$$\Rightarrow x_n \neq x_m$$

($\Leftarrow$) Pensar. Muy parecido. Lo hago:

Si $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$$= \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Sea $f : \mathbb{N} \to X$

$$f(n) = x_n$$

Como $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$\Rightarrow f$ es biyectiva (a cada natural le asigna un elemento distinto de X)

$\Rightarrow \quad \mathbb{N} \sim X$

$\therefore$ X es numerable

$\boxtimes$

Ejemplo

- $\mathbb{R}$ no es numerable.

$\mathbb{R}$ no es una sucesión.

Sea $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ alguna sucesión cualquiera

y veamos que

$$\exists\, y \in \mathbb{R} \ / \ y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Desarrollo decimal de los x_n:

$$\begin{array}{l}
\quad\ \ \overset{\text{Parte entera} \in \mathbb{Z}}{\downarrow} \\
x_1 = m_1 , \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \ldots \\
x_2 = m_2 , \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ \ldots \\
x_3 = m_3 , \ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ \ldots \\
\quad \vdots
\end{array}$$

Sea

$$y = 0, \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4$$

eligiendo

$b_1 \neq a_{11}$

$b_2 \neq a_{22}$

$b_3 \neq a_{33}$

$b_4 \neq a_{44}$

$\vdots$

más precisamente

$$b_n = \begin{cases} 3 & a_{nn} \neq 3 \\ 5 & a_{nn} = 3 \end{cases}$$

lo fuerzo a que sea distinto

Con esto,

y tiene desarrollo único (no es $0,\widehat{99}$)

$\Rightarrow y \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pues el n-ésimo dígito de y

es $\neq$ al n-ésimo dígito de x_n

$\therefore \nexists f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Biyectiva

$\therefore \mathbb{R}$ no es numerable.

$\blacksquare$

Otra manera es mostrar que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$$

Propiedades Fundamentales de Conjuntos Infinitos

Teorema

Sea X infinito

$\Rightarrow \exists\, Y \subset X$ numerable.

Dem

Solo basta encontrar una sucesión dentro de X

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\, x_1 \in X$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\, x_2 \in X \setminus \{x_1\} \quad \left(\text{notar que } x_1 \neq x_2\right)$$

Como

$$X \text{ infinito} \Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\, x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$$

y así puedo seguir

Inductivamente

Si ya elegimos

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ distintos

$\Rightarrow X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$

con $x_n \neq x_i$

con $i \in [1, n-1]$

Defino

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ $\quad x_n \neq x_m$ si $n \neq m$

$\therefore$

$$Y = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$$

$\uparrow$

es numerable!

$\blacksquare$

Observación

Decir

"X tiene un subconjunto numerable"

es lo mismo que decir

$$\exists f : \mathbb{N} \to X \quad \text{Inyectiva}$$

Entonces, el Teorema dice que

$$\overset{\swarrow \text{Aleph}}{\aleph_0} \leq \# X \qquad \forall X \text{ infinito}$$

Obs:

Aleph$_0$ es el <u>menor</u> de todos los cardinales infinitos.

Proposición

Si X es infinito,

Por qué los primos son numerables?

$$\exists Z \subset X, \; Z \text{ numerable} \; / \; X \sim X \setminus Z$$

Dem

$$X \text{ infinito} \overset{\text{Teo}}{\Rightarrow} \exists Y \subset X \text{ numerable}$$

Idea

$$X = (X \setminus Y) \cup Y$$

$$= (X \setminus Y) \cup Y_{\text{Pares}} \cup Y_{\text{Impares}}$$

con

$$Y_{\text{Pares}} = \{ y_{2n} : n \in \mathbb{N} \}$$

$$Y_{\text{Impares}} = \{ y_{2n+1} : n \in \mathbb{N} \}$$

$$= (X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}}$$

Disjuntas

y además

$$\overbrace{\left(Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}} \right)}^{Y} \sim Y_{\text{Pares}}$$

Pues
$$\left.\begin{aligned} f : Y &\to Y_{\text{Pares}} \\ f(y_n) &= y_{2n} \end{aligned}\right\} \text{Biyectiva}$$

Entonces

$$(X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}} \overset{d}{\cup} Y_{\text{Impares}} \sim (X \setminus Y) \overset{d}{\cup} Y_{\text{Pares}}$$

$$\parallel$$

$$\sim X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

Si llamo $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un $Z \subset X \ / \ X \sim X \setminus Z$

$\blacksquare$

Otra forma:

Puedo definir

$$h : X \to X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin Y \\ f(x) & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

que es Biyectiva

$$\therefore \quad X \sim X \setminus Y_{\text{Impares}}$$

Si llamo $Z = Y_{\text{Impares}}$

encontré un $Z \subset X \ / \ X \sim X \setminus Z$

$\blacksquare$

Ejercicio (de la práctica 2)

Si A es numerable

y $B \setminus A$ es infinito

$\Rightarrow B \setminus A \sim B$

Ejercicio

Si X es infinito

y A es numerable

$\Rightarrow X \sim X \cup A$

Obs

Puedo unir numerable numerables, y obtener un numerable ¡!

Subconjuntos Propios

Corolario

Un conjunto es infinito $\Leftrightarrow$ es coordinable con un subconjunto propio

$\mathbb{R} \sim [1, \pi)$

$\mathbb{R} \sim$ Cualquier intervalo

$\mathbb{R} \sim \{ e^x : x \in \mathbb{R} \}$

Dem

$\Rightarrow$) Vimos que si

X es infinito

$\Rightarrow \exists Z \subset X \;/\; X \sim \underbrace{X \setminus Z}_{\text{subconj propio de } X}$ ✓

$\Leftarrow$) No es tan fácil de mostrar (sale con inducción)

Idea:

Si X es finito $\Rightarrow$ X no es coordinable con ningún subconj propio.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Si:

$$\left.\begin{array}{l} \exists f : X \to Y \text{ inyectiva} \\ \exists g : Y \to X \text{ inyectiva} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists h : X \to Y \text{ biyectiva}$$

Corolario

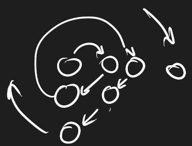
La relación $\leq$ entre cardinales

es una relación de orden.

Ejemplo

Sirve para mostrar que

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

sin definir la función biyectiva : 

Defino

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$f(n) = n$ inyectiva

$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

sea $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \dfrac{m}{n}$ con $\overbrace{m, n}^{\text{únicos!}} \in \mathbb{Z}$

y $\underbrace{(m, n)}_{\substack{\text{MCD} \\ \text{(coprimos)}}} = 1$

Primos

$$g(q) = \begin{cases} 2^{m} \cdot 3^{n} & \text{si } m \geq 0 \\ 5^{|m|} \cdot 3^{n} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Por descomposición única :

$\Rightarrow g$ es inyectiva !

$\therefore$ Por C-S-B

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ $\blacksquare$

Ejemplo :

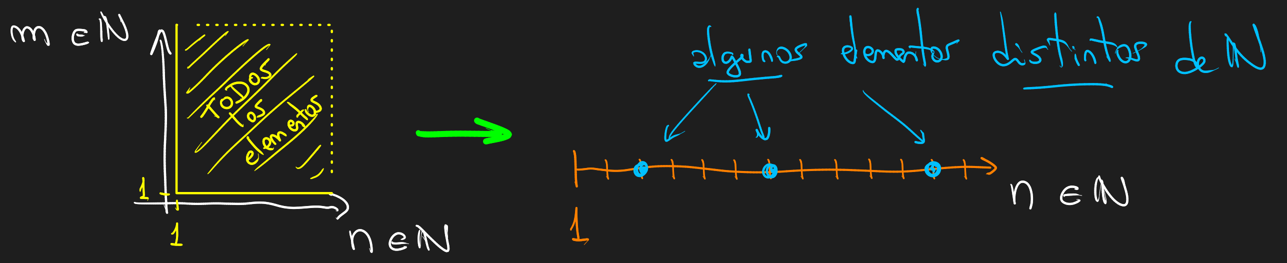
$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Armo 2 funciones inyectivas

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$f(n) = (n, 1)$ inyectiva

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



$g(n, m) = 2^n \cdot 3^m$ inyectiva.

primos

(Para cada n, m, tengo una descomposición distinta en primos)

$\therefore$ Por C.S.B.

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

Obs:

Se puede usar para probar que unión numerable de numerables es numerable.

Dem. de

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Idea

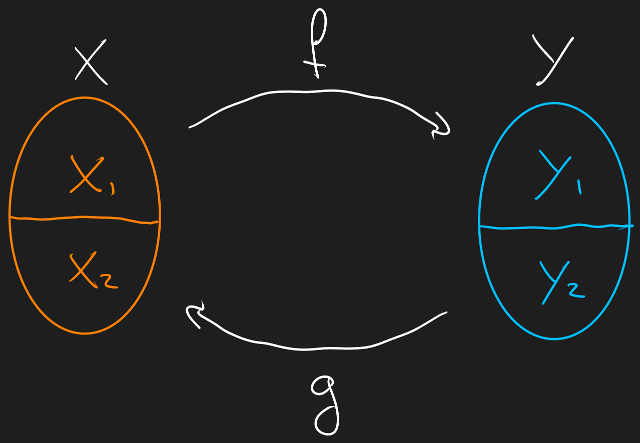
Tenemos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

queremos h biyectiva

Entonces

Si partimos X e Y, de forma que



$$X = X_1 \,\dot\cup\, X_2$$

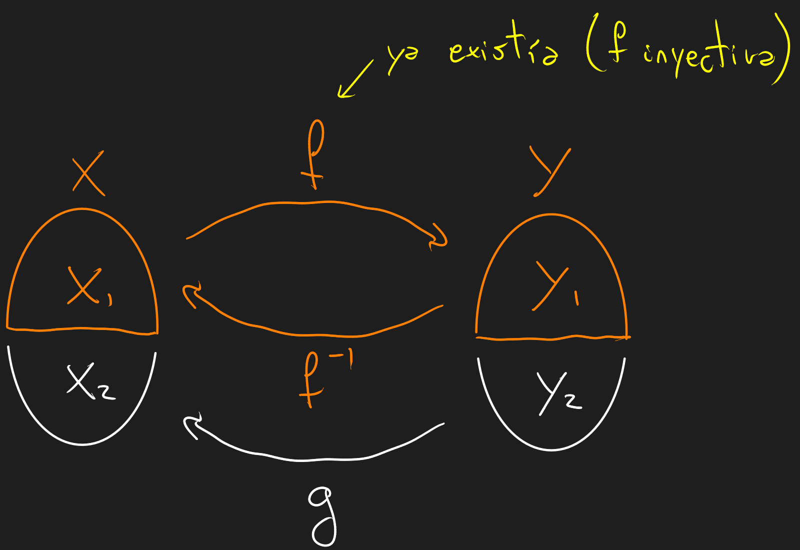
$$Y = Y_1 \,\dot\cup\, Y_2$$

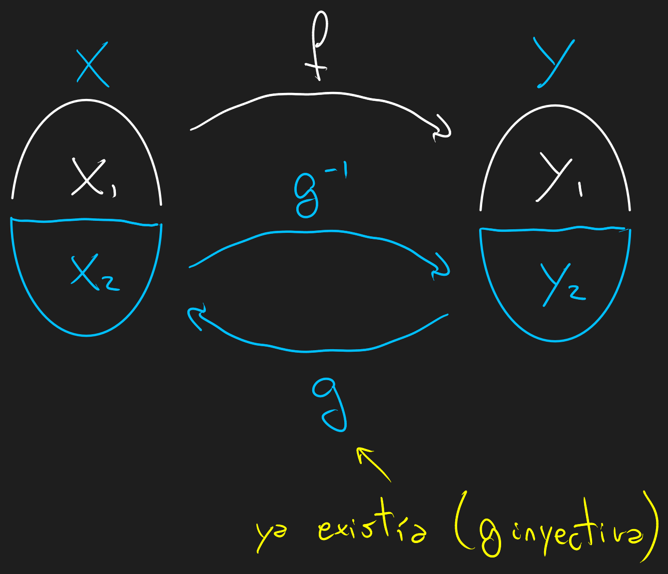
y además, si encuentro

$f : X_1 \to Y_1$ Biyectiva

$g : Y_2 \to X_2$ Biyectiva

Entonces, busco f y g /





Con ésto, puedo definir

$$h : X \to Y$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in X_2 \end{cases}$$

Que es biyectiva, y listo.

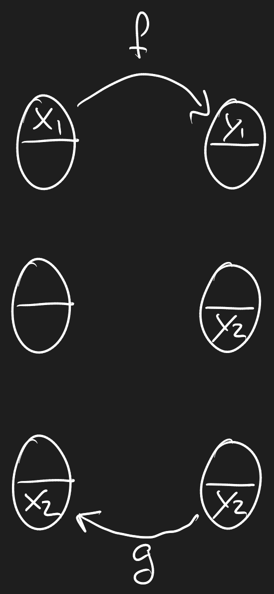
Dado cualquier $x_i \in X_1$

le aplico f a cada $x_i \in X_1$

$\Rightarrow Y_1 = f(X_1)$

$\Rightarrow Y_2 = Y \setminus f(X_1)$

$\Rightarrow X_2 = g(Y \setminus f(X_1))$



$\Rightarrow X_1 \overset{?}{=} X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$

queremos ver ésto

El "Truco" será elegir bien el X_1 inicial.

Buscamos

$$\underbrace{X_1}_{\text{solo basta encontrar } X_1 \text{ que cumpla esto}} \subset X \;/\; X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$$

Defino

$$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

$$\phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

y buscamos $X_1 \subset X$ /

$$\phi(X_1) = X_1$$

Punto fijo.

Prop de ϕ

Si $A \subseteq B \subset X$

$\Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$

$\Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B)$

$\Rightarrow g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B))$

$\Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subseteq X \setminus g(Y \setminus f(B))$

$$\Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)$$

$\therefore$ ϕ es una función creciente

$$\boxed{\text{Si } A \subseteq B \subset X \Rightarrow \phi(A) \subseteq \phi(B)}$$

Volviendo, buscamos

$$X_1 \subset X \ / \ \phi(X_1) = X_1$$

Defino

$$\mathcal{C} = \{ C \subseteq X \ / \ \phi(C) \subseteq C \}$$

solo una desigualdad.

Obs!

Si de todos los $C \in \mathcal{C}$ me quedo con los más chicos ó los más grandes

$\Rightarrow$ tengo grandes chances

de que cumplan la igualdad

Para eso, elijo

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

y veamos que sirve.

Como $X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

$\Rightarrow X_1 \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \phi(C) \underset{\uparrow \text{def. de } \mathcal{C}}{\subseteq} C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq C \quad \forall C \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

y como definimos

$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

$\Rightarrow \boxed{\phi(X_1) \subseteq X_1}$ Tenemos $\subseteq$, falta $\supseteq$

Si aplico ϕ de nuevo

$\Rightarrow \phi(\phi(X_1)) \subseteq \phi(X_1)$

De nuevo, por def. de $\mathcal{C} = \{C \subseteq X \,/\, \underbrace{\phi(C)}_{\phi(\phi(X_1))} \subseteq \underbrace{C}_{\phi(X_1)}\}$

$\Rightarrow \phi(X_1) \in \mathcal{C}$

y como definimos

$$X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

$\phi(X_1)$ es uno de ellos

$$\Rightarrow X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \phi(X_1)$$

$\Rightarrow \boxed{X_1 \subseteq \phi(X_1)}$ que es lo que buscábamos

$$\therefore \quad X_1 = \phi(X_1)$$

$\therefore$ Tengo $Y_1 = f(X_1)$

$\therefore$ Tengo $Y_2 = Y \setminus f(X_1)$

$\therefore$ Tengo $X_2 = g\left(Y \setminus f(X_1)\right)$

$\therefore$ Si $\exists f : X \to Y$ inyectiva

y $\exists g : Y \to X$ inyectiva

$\Rightarrow \exists h : X \to Y$ Biyectiva

$\blacksquare$