10. Probar que un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{M}$

Por regularidad de A

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(G) : A \subseteq G \text{ abierto} \}$$

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(F) : A \supseteq F \text{ cerrado} \}$$

Sean

- G algún conjunto abierto / $A \subseteq G$
- F algún conjunto cerrado / $F \subseteq A$

sé que existen pues A es acotado

falta ver que existan F y G que cumplan

- $\mu(G \setminus F) \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Como $F \subseteq G$:

$$\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F)$$

si tomo ínfimo de los G
y supremo de los F
(sé que existen pues A acotado)

$$= \mu(A) - \mu(A)$$

$$= 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Probé $\Rightarrow$) ✓

$\Leftarrow)$ Como $F \subseteq G$:

$$\mu(G \setminus F) = \underbrace{\mu(G)}_{\geq 0} - \underbrace{\mu(F)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\mu(G) \geq \mu(F)$$

y además como

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \mu(G) - \mu(F) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(G) = \mu(F)$$

y como

$$F \subseteq A \subseteq G$$

Sospechoso!

no sé si A es medible todavía!

$$\Rightarrow \quad \mu(F) \geq \mu(A) \geq \mu(G)$$

$$\overset{\mu(G)=\mu(F)}{\Rightarrow} \quad \mu(F) = \mu(A) = \mu(G)$$

Me gustaría llegar a que A es acotado y medible.

Tal vez solo llegando a que es medible puedo encontrar un caso NO-acotado donde
NO existen F y G (que existan supremo e infimos en el límite, pero no existan tales conjuntos).

Pero me faltaría llegar a que A es medible, y no estoy seguro de cómo probar eso en este caso.