

# Integral de Lebesgue

Notación:

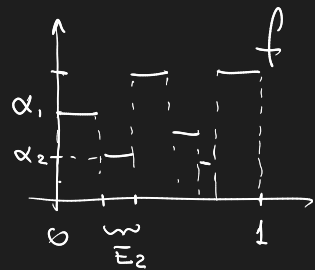
$$I = [0, 1]$$

Recordo

Funciones simples:

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es simple si

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{E_i} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$



con la partición

$$I = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{con } E_i \text{ medibles} \\ (E_i \in \mathcal{M})$$

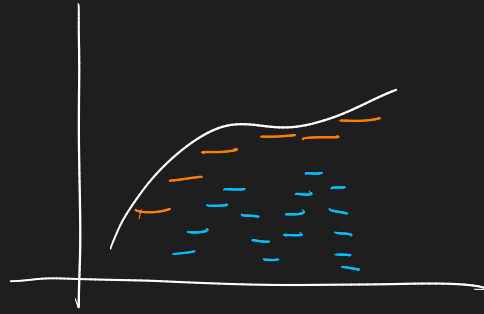
$$\mathcal{I}(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(E_i)$$

Recordo:

Si  $f$  es continua y acotado

$$\Rightarrow \int_I f = \sup \{ \mathcal{I}(g) : g \leq f \} \quad g \text{ simple}$$

$$= \inf \{ \mathcal{I}(g) : g \geq f \} \quad g \text{ simple}$$



Propiedad

$$\text{Si } f \text{ es simple} \Rightarrow \int f = \mathcal{I}(f)$$

Dem : (solo dirigiendo)

$$\forall g \text{ simple}, g \leq f$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f)$$

$$\text{con } f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$$

$$g = \sum_i \beta_i \chi_{D_i}$$

Sabiendo que

$$\mathcal{I} = \bigcup_i E_i$$

$$= \bigcup_i D_i \quad D_i \text{ medibles}$$

además

$$E_i = \mathcal{I} \cap E_i$$

$$= \bigcup_j \mathcal{D}_j \cap E_i$$

y

$$\chi_{E_i} = \chi_{\bigcup_j \mathcal{D}_j \cap E_i}$$

$$= \sum_j \chi_{\mathcal{D}_j \cap E_i}$$

Por ej 2

2. Sean  $E, F \subseteq \mathbb{R}$  Probar:

(a)  $\chi_E$  es medible  $\iff E \in \mathcal{M}$ .

(b)  $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$ .

(c)  $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E \cap F}$ .

$$\chi_{E_i} = \sum_j \chi_{\mathcal{D}_j} \cdot \chi_{E_i}$$

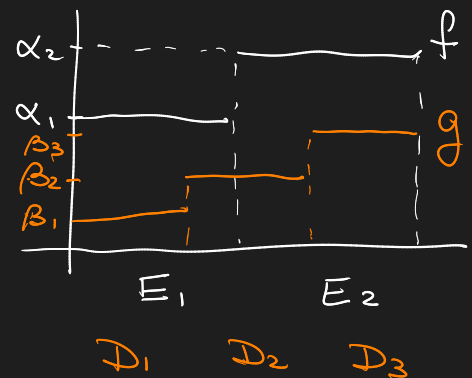
también

$$\begin{aligned} \mu(E_i) &= \mu\left(\bigcup_j \mathcal{D}_j \cap E_i\right) \\ &= \sum_j \mu(\mathcal{D}_j \cap E_i) \end{aligned}$$

como  $g \leq f$

$\Rightarrow$  si  $\mathcal{D}_j \cap E_i \neq \emptyset$

$$\beta_j \leq \alpha_i$$



Multiplico

$$\beta_j \cdot \mu(\mathcal{D}_j \cap E_i) \leq \alpha_i \cdot \mu(\mathcal{D}_j \cap E_i) \quad \forall i, j$$

$$\mathcal{I}(g) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mu(D_i)$$

$$= \sum_i \beta_i \cdot \sum_j \mu(D_i \cap E_j)$$

$$= \sum_i \sum_j \beta_i \cdot \mu(D_i \cap E_j)$$

$$\leq \sum_i \sum_j \alpha_i \cdot \mu(D_i \cap E_j)$$

$$= \sum_j \alpha_j \cdot \mu(E_j)$$

$$= \mathcal{I}(f)$$

Prové que si  $g \leq f$ ,  $f, g$  simples

$$\Rightarrow \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f)$$

□

Prop.

Sea  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  medible,  $\varepsilon$  cotada (en particular integrable)

Sea  $a > 0$ ,

Sea  $g: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\underbrace{\quad}_{= a[0, 1]} = a \cdot I$

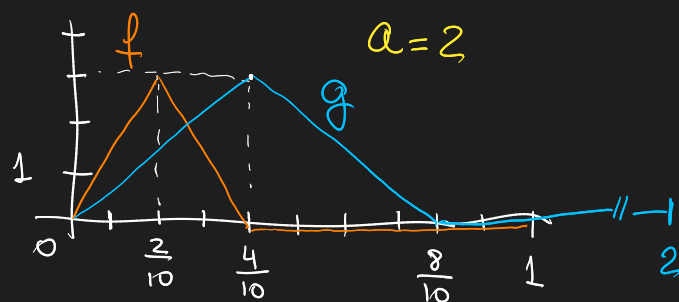
con  $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$

entonces

$g$  es medible y  $\varepsilon$  cotada

y además

$$\int_{a \cdot I} g = a \cdot \int_I f$$



$$\frac{x}{2} = \frac{4}{10} \\ \Rightarrow x = \frac{8}{10}$$

Dem:

- $g$  es  $\varepsilon$  cotada
- $g$  es medible si

$$\begin{aligned} \{x \in aI : g(x) > b\} &= \{x \in aI : f\left(\frac{x}{a}\right) > b\} \\ &= \{a \cdot x \in I : f(x) > b\} \\ &\stackrel{||}{=} a \cdot \{x \in I : f(x) > b\} \end{aligned}$$

9. Para cada  $\lambda > 0$  y cada conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  notamos  $\lambda A$  al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si  $A \in \mathcal{M}$  entonces  $\lambda A \in \mathcal{M}$  y  $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$ .

es medible  
por  $f$  es medible

es medible

$\therefore g$  es  $a$ -cota de  $y$  medible

Falta ver que

$$\int_{a.I} g = a \cdot \int_I f$$

En pasos

1) Supongamos  $f = \chi_E$ ,  $E$  medible  
 $\swarrow x \in [0, a] \Rightarrow x \in a.I$

$$\Rightarrow g(x) = \chi_E\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow \frac{x}{a} \in I$$

$$g(x) = \chi_{aE}(x)$$

Integro

$$\int g = \int \chi_{aE}$$

$$= \mu(a.E)$$

$$\stackrel{\text{ej 9}}{=} a \cdot \mu(E)$$

$$= a \cdot \int \chi_E$$

$$\int_{a.E} g = a \cdot \int_E f \quad \checkmark$$

Caso funciones simples

$$\text{Supongo } f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \chi_{E_i}$$

$$\text{con } I = \bigcup_i E_i \quad \leftarrow \text{partición de } I$$

$\Rightarrow$  usando el resultado anterior

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{a.E_i}$$

Luego

$$\int_{a.I} g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(a.E_i)$$

$$= \sum_i \alpha_i \cdot a \cdot \mu(E_i)$$

$$= a \sum_i \alpha_i \cdot \mu(E_i)$$

$$= a \cdot \int_I f \quad \checkmark$$

Caso  $f$  medible y acotada

•  $\exists f_n$  medibles y simples /

$$f_n \Rightarrow f$$

$$\bullet \int f_n \rightarrow \int f$$

Afirmo que si

$$g_n(x) := f_n\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow g_n \xRightarrow[\text{(ejercicio)}]{\quad} g \quad \text{y } g_n \text{ es simple}$$

Luego :

$$\int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \int f_n$$

$$= a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

$$\int g = a \cdot \int f \quad \checkmark$$



Ejercicio :

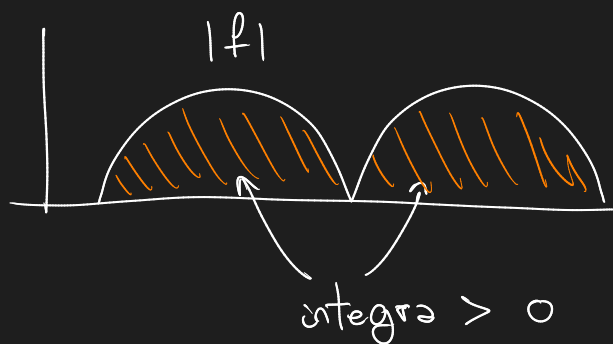
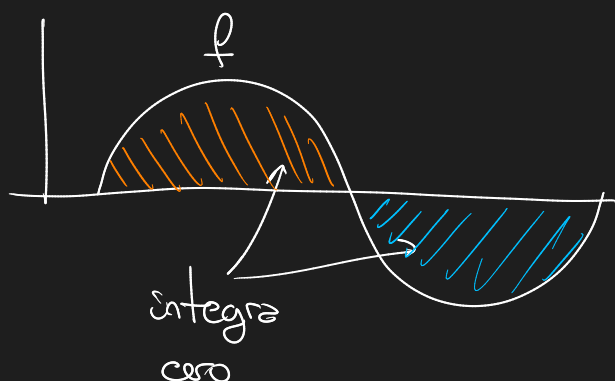
$f$  medible y acotada

Si

$$\left| \int f \right| = \int |f|$$

entonces

$$f \geq 0 \text{ A.E.} \quad \text{ó} \quad f \leq 0 \text{ A.E.}$$



Don :

$$f = f \cdot \chi_{\{f \geq 0\}} - (-f) \cdot \chi_{\{f < 0\}}$$

llamo  $f^+$

"Parte positiva  
de  $f$ "

llamo  $f^-$

"Parte negativa"

$$\bullet f^+ \geq 0 \text{ y } f^- \geq 0$$

$\bullet f^+$  y  $f^-$  son medibles (por producto de medibles)

$$\bullet f^+ + f^- = |f|$$

Also :

$$\begin{aligned} \bullet \int |f| &= \int f^+ + f^- \\ &= \int f^+ + \int f^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int f &= \int f^+ - \int f^- \\ &=: \underbrace{A}_{\geq 0} - \underbrace{B}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Lemma



$$A, B \geq 0 \quad / \quad |A - B| = A + B$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$$

∴

$$\text{So } \int |f| = \left| \int f \right|$$

$$\underbrace{\int f^+}_A + \underbrace{\int f^-}_B = \left| \int f^+ - \int f^- \right| = |A - B|$$

Por lema  $\Rightarrow \int f^+ = 0 \quad \text{ó} \quad \int f^- = 0$

$\Leftrightarrow f^+ = 0 \text{ AE} \quad \text{ó} \quad f^- = 0 \text{ AE}$

11. Sean  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funciones medibles e integrables tales que para todo  $E \subseteq [0, 1]$  medible, se tiene que  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ . Probar que  $f = g$  en casi todo punto.

$f^+ = 0 \text{ AE} \quad \xleftarrow{\text{"g"}} \quad \Leftrightarrow \quad f \leq 0 \text{ AE} \quad \xleftarrow{\text{"g"}}$

$f^- = 0 \text{ AE} \quad \Leftrightarrow \quad f \geq 0 \text{ AE}$

□







