Análisis Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica 9

En lo que sigue $\mathcal{M}$ será la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue.

1. Probar que dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X y dada $f : X \to \mathbb{R}$, son equivalentes:

(a) $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(d) $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Concluir que si $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{M}$, entonces f es medible si y sólo si vale alguno de (y por lo tanto todos) los items de arriba.

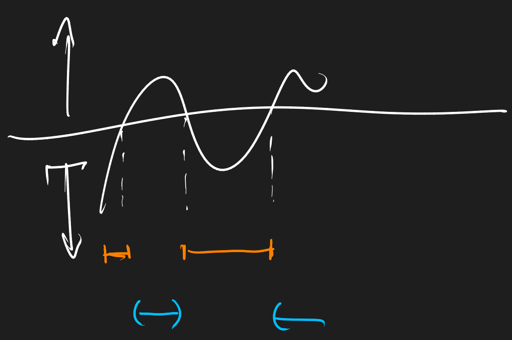
$a \Rightarrow b)$ Como

$$\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$$

y además

$$\{x \in X : f(x) \leq a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) > a\}$$

$$B \qquad\qquad A$$



$$\underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{B \in \mathcal{A}?} = \underbrace{X}_{X \in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{A \in \mathcal{A}}$$

Como A^c es B

y $A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow B \in \mathcal{A}$ ✓

$b \Rightarrow d)$ $B = \{x \in X : f(x) \leq a\}$

$D = \{x \in X : f(x) < a\}$

$$f(x) < a \iff \exists n \in \mathbb{N} \,/\, f(x) \leq a - \frac{1}{n}$$

$$\{x \in X : f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a - \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A} \text{ pues vale } B \text{ por Hip}}$$

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra cerrada por unión numerable

$$\Rightarrow \text{ vale que } D \in \mathcal{A}$$ ✓

Tengo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, bend left] \\
b \arrow[dd, bend left] \\
c \\
d
\end{tikzcd}$$

$d \Rightarrow c$) mismo que $a \Rightarrow b$ pues

$$D^c = C$$ ✓

Falta $c \Rightarrow a$)

Sale igual que $b \Rightarrow d$ ✓

Probé

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, bend left] \\
b \arrow[dd, bend left] \\
c \arrow[uu, bend left] \\
d \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$ ✓

$\therefore$ a, b, c, d son equivalentes $\blacksquare$

Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ si vale a, b, c, ó d

f es medible

y si <u>no</u> vale alguno

$\Rightarrow$ $f \notin \mathcal{M}$ pues <u>no</u>

vale ninguno de los

a, b, c, d equivalentes.

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

a) $\chi_E(x)$ es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \subseteq \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } x \notin E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$) Si $\chi_E(x)$ es medible

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\}$$

si elijo $a=0$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{es medible}}}{\chi_E(x)} > 0\}}_{\text{es medible}} \overset{\substack{\text{def de } \chi_E \\ \downarrow}}{=} E$$

$\therefore$ E es medible. ✓

$\Leftarrow)$ No sé si χ_E es medible pero E sí lo es

defino

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = ?$$

- Si $a < 0$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) \geq 0$$

sucede para todo $x \in \mathbb{R}$ pues

$$\chi_E(x) \in \{0, 1\}$$

- Si $a \in [0, 1)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 0$$

$$\equiv \chi_E(x) = 1$$

- Si $a \in [1, +\infty)$

$$\chi_E(x) > a \equiv \chi_E(x) > 1$$

nunca sucede

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0 \\ E & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ \phi & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Como $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$,

$E \in \mathcal{M}$ (por $\mathcal{H}b$),

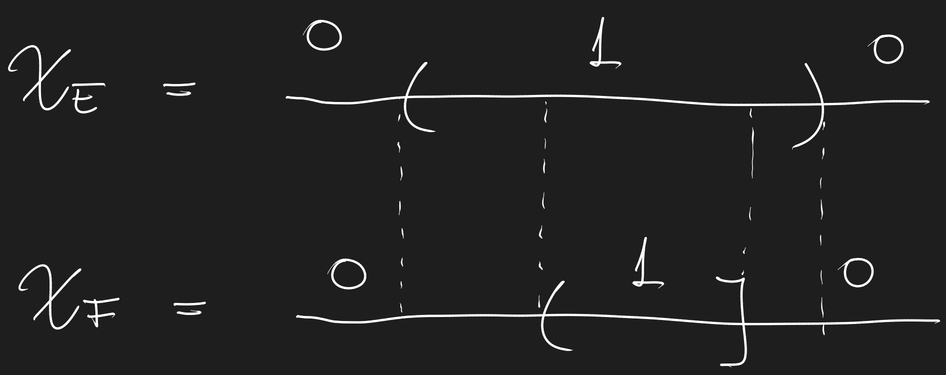
y $\emptyset \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow \{ x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a \} \in \mathcal{M}$$

$\therefore$ $\chi_E(x)$ es medible. $\boxtimes$

Prod.

(b) $\chi_{E \cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.



"Compuerta lógica AND"

$$\mathrm{I} \begin{cases} \chi_{E \cap F}(x) = 1 \iff x \in E \cap F \\ \chi_{E \cap F}(x) = 0 \iff x \notin E \cap F \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} \chi_E(x) = 1 & \Longleftrightarrow \quad x \in E \\ \chi_E(x) = 0 & \Longleftrightarrow \quad x \notin E \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} \chi_F(x) = 1 & \Longleftrightarrow \quad x \in F \\ \chi_F(x) = 0 & \Longleftrightarrow \quad x \notin F \end{cases}$$

χ_E	χ_F	$\chi_{E\cap F}$	$\chi_E \cdot \chi_F$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Como sus valores son iguales en todos los casos

$$\Rightarrow \chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F.$$

$\boxtimes$

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

"OR"

χ_E	χ_F	$\chi_{E\cap F}$	$\chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$	$\chi_{E\cup F}$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	$2 - 1 = 1$	1

Iguales

$\boxtimes$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona. Probar que f es medible.

Pruebo monótona creciente:

f medible $\Leftrightarrow \{x : f(x) \geq a\}$ es medible $\forall a$.

Sug: monótona creciente $\Rightarrow \{x : f(x) \geq a\}$ es un intervalo.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall\, x > x_0$$

$\cdot\ \{x : f(x) \geq a\} \ni x_0 \Rightarrow a \leq f(x_0)$

$\Rightarrow$ cualquier $y \geq x_0 \Rightarrow f(y) \geq f(x_0) \geq a$

$\Rightarrow [x_0, +\infty) \subseteq \{x : f(x) \geq a\}$ si $x_0 \in$.

si $\{x : f(x) \geq a\}$ es acotado inf y no vacío $\Rightarrow$ tiene inf.

Armo

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}\}$$

$\exists\ \alpha = \inf \{x : f(x) \geq a\}$

si $\alpha \notin \{x : f(x) \geq a\} \Rightarrow \{x : f(x) \geq a\} = (\alpha, +\infty)$

tomo $(x_n)_n \subseteq \{x : f(x) \geq a\}$ / $x_n \searrow \alpha$.

$(\alpha, +\infty) = \bigcup_n [x_n, +\infty)$

si llamo

$$a := f(x_0)$$

Falta no acotado $\Rightarrow$ es todo $\mathbb{R}$

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : f^{-1}(f(x)) \geq f^{-1}(a)\}$$

?

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq f^{-1}(a)\}$$

$$= [f^{-1}(a), +\infty) \quad \text{que es cerrado } \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\therefore [f^{-1}(a), +\infty) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ es medible. $\boxtimes$

4. Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si f es medible

$\Rightarrow \quad A := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible

y

$B := \{x \in X : f(x) < a\}$ es medible

$\Rightarrow \quad A \setminus B \equiv A \cap B^c$

operaciones de σ-álgebra

$\Rightarrow \quad A \setminus B$ es medible

con $\quad A \setminus B = \{x \in X : f(x) = a\}$

$\blacksquare$

5. Probar que si f y g son medibles entonces $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{M}$.

f es medible

$$A := \{ x \in X : f(x) \leq a \} \text{ es medible}$$

g es medible

$$B := \{ x \in X : a \leq g(x) \} \text{ es medible}$$

$\Rightarrow$ vale la intersección (para un mismo a)

$$A \cap B = \bigcup_a \{ x \in X : f(x) \leq a \leq g(x) \}$$

Preguntar

!

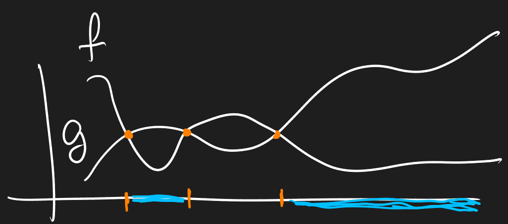
$$\cancel{\therefore \{ x \in X : f(x) \leq g(x) \} \text{ es medible.}}$$

!

No puedo hacer esto pues cuando quiera unir sobre todos los a en R, ésta unión será de NO NUMERABLES elementos, por lo que no vale que es medible por ser unión de medibles.

De nuevo:

Escribo:



$$\{ x \in X : f(x) \leq g(x) \} = \{ x \in X : f(x) = g(x) \} \overset{d}{\cup} \{ x \in X : f(x) < g(x) \}$$

y además

$$\{ x \in X : f(x) \leq g(x) \}^c = X \setminus \{ x \in X : f(x) \leq g(x) \}$$

$$= \{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

$\therefore$

$$X = \underbrace{\{ x \in X : f(x) < g(x) \} \overset{d}{\cup} \{ x \in X : f(x) = g(x) \}}_{\text{Complemento de}} \overset{d}{\cup} \underbrace{\{ x \in X : f(x) > g(x) \}}_{\text{es medible?}}$$

Tengo

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \}$$

y como $f(x) > g(x)$ con $f(x), g(x) \in X \subseteq \mathbb{R}$

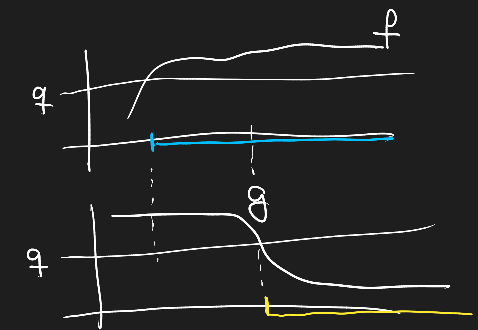
$\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} \ / \ f(x) > q > g(x)$ para cada x

$$\{ x \in X : f(x) > g(x) \} = \bigcup_{q} \{ x \in X : f(x) > q > g(x) \}$$

es una unión numerable!

Separo

$$\{ x \in X : f(x) > q > g(x) \} = \underbrace{\{ x \in X : f(x) > q \}}_{\text{es medible pues } f \text{ medible}} \cap \underbrace{\{ x \in X : q > g(x) \}}_{\text{es medible pues } g \text{ medible}}$$



entonces

$\{x \in X : f(x) > q > g(x)\}$ es medible

$\Rightarrow$ unión numerable de $\uparrow$ es medible

$\Rightarrow \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ es medible

$\Rightarrow$ su complemento es medible

$$\{x \in X : f(x) > g(x)\}^c = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$$

$\blacksquare$

6. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Probar que:

(a) Si f es continua en $[0,1]$, entonces es medible.

(b) Si f es continua en casi todo punto de $[0,1]$ entonces es medible.

a) Como f es continua

$$f^{-1}((-\infty, a]) \text{ es cerrado } \forall a \in \mathbb{R} \text{ en } [0,1]$$

pues $(-\infty, a]$ es cerrado $\forall a \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}((-\infty, a]) \subseteq [0,1]$$

? qvq

$$f \text{ es medible} \equiv \{x \in [0,1] : f(x) < a\} \ \forall a \in \mathbb{R} \text{ es medible}$$

veo que para cada cerrado de esta forma

$$f^{-1}((-\infty, a]) = [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$$

I

obtengo un intervalo cerrado, que es medible por ser complemento de abierto $\in \mathcal{M}$

y además

$$\underset{\forall a \in \mathbb{R}}{f^{-1}((-\infty, a])} = \{x \in X : f(x) \in (-\infty, a]\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$= \{x \in X : f(x) < a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

por I es un intervalo cerrado

$\therefore$ es medible.

$\blacksquare$

b) Me gustaría restar un conjunto nulo y concluir que sigue siendo medible.

?

7. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Probar que:

(a) $f + g$ es medible.

(b) f^2 es medible.

(c) $f \cdot g$ es medible.

$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) < a \ \forall a \in \mathbb{R} \}$ $\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a \ \forall a \in \mathbb{R} \}$

$\{ x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x) \ \forall a \in \mathbb{R} \}$ $\{ x \in \mathbb{R} : h(x) = a \ \forall a \in \mathbb{R} \}$

Llamo

$$h(x) := \underbrace{f(x)}_{\text{med}} + \underbrace{g(x)}_{\text{medible}} \Rightarrow h(x) \text{ es medible}$$

ej **4.** Probar que si f es medible entonces $\{x \in X : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \{ x \in X : h(x) = a \}$ es medible

8. Dada una sucesión $(f_n)_n$ de funciones en $[0,1]$, consideremos las funciones

$$S(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \text{y} \qquad I(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Probar que si las funciones f_n son medibles, entonces S e I también lo son.

limite de medibles es medible? lo probamos en alguna teórica?

9. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[0, 1]$ tales que convergen en casi todo punto a una función f. Probar que f es medible.