Mercury 28 Abr

Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas d, d_2 y d_∞ son como en la Práctica 3, y δ representa a la métrica discreta, mientras que en (d) (E, d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$.

a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$

$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \leftarrow$ Paraboloide

qvq

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

$$f(B_{d_2}(\vec{x}, \delta)) \subseteq B_{d_1}(f(\vec{x}), \varepsilon)$$

equiv.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

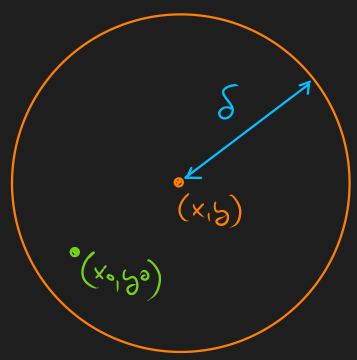
$$f(B_{d_2}((x,y), \delta)) \subseteq B_1(f(x,y), \varepsilon)$$

Sea

$$(x_0, y_0) \in B((x,y), \delta)$$

$$(x_0, y_0) \in \overbrace{\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(x,y)) < \delta \}}$$

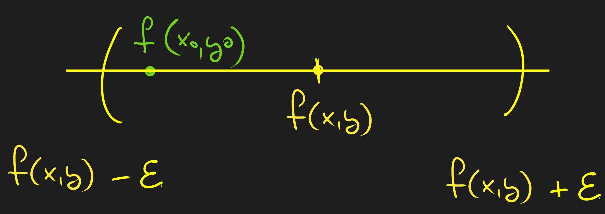
(x_0,y_0) es alguno de estos (a,b)



qvq

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0^2 + y_0^2} \overset{?}{\in} B(f(x,y), \varepsilon)$$

qvq esté adentro!



Sé:

$$B(f(x,y), \varepsilon) = \{ c \in \mathbb{R} : d(c, f(x,y)) < \varepsilon \}$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} : | c - f(x,y) | < \varepsilon \}$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} : | c - (x^2 + y^2) | < \varepsilon \}$$

(acá pregunté en Zulip porque ¯_(·.·)_/¯)

Sugerencia:

Daniel Carando 6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.
Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

6:23 PM

por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y),(3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.
Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε, tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED) 6:28 PM

Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en $\mathbb{R}$ es la d_1, pero en realidad también es la d_2:
$d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t)$.
También es la d_∞, claro.

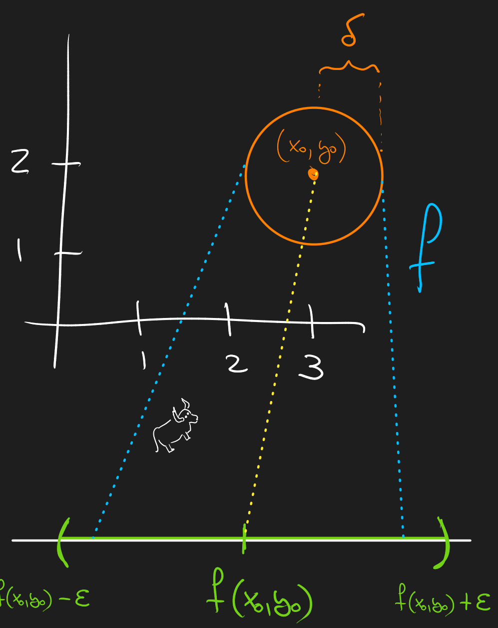
Pruebo que es continua en el $(3,2)$

Def. de f continua $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$

$$f\Big(B\big((x_0,y_0),\delta\big)\Big) \subseteq B\big(f(x_0,y_0),\varepsilon\big)$$

Lo pruebo en $(x_0, y_0) = (3,2)$



Sea

$$(x,y) \in B\big((x_0,y_0),\delta\big)$$

me fijo solo en:

$$(x,y) \in B\big((3,2),\delta\big)$$

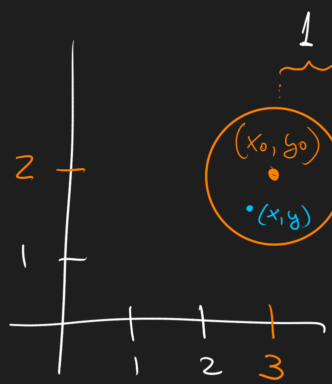
$$(x,y) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2\big((a,b),(3,2)\big) < \delta \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$

Si: $\delta = 1$:

$$(x, y) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2\left((a,b), (3,2)\right) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x, y)$

De nuevo pifio y me pierdo.
Pregunto de nuevo en Zulip.

Daniel Carando (EDITED) 6:48 PM

Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0). Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$.
Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dés que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1.
Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, proque ε puede ser arbitrariamente chico.
Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ, sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces
$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$
Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1. Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\big((x,y),(3,2)\big) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| \overset{\text{sé}}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}$$

quiero acotar ésto

En donde:

$$(x^2 - 3^2) \overset{\text{dif. de cuadrados}}{=} \underbrace{(x+3)}\underbrace{(x-3)}_{<\delta_1 = 1}$$

Como $d(x,3) < 1$

$$\Rightarrow x = 3 \pm d(x,3) < 3 + 1 = 4$$

$$x < 4$$

$$\Rightarrow x+3 < 7$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 \cdot \delta$$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

$$(y^2 - 2^2) = \underbrace{(x+2)}\underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$$

Como $d(x,2) < \delta_1 = 1$

$$\Rightarrow x = 2 \pm d(x,2)$$

$$x < 3$$

$$\Rightarrow x+2 < 5$$

$$(y^2 - 2^2) < 5 \cdot \delta$$

dejo este δ (y no uso 1) para que dependa de δ

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero acotar todo por ε

$$\Rightarrow 12\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3, 2)$ encontré un $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{12}\right\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

$$f\left(B\left((3,2), \delta\right)\right) \subseteq B\left(f(3,2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\left((x,y), (x_0,y_0)\right) < \delta_1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| = \left|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2\right| \leq \left|x^2 - x_0^2\right| + \left|y^2 - y_0^2\right|$$

En donde:

$$\left|x^2 - x_0^2\right| = \underbrace{|x + x_0|}_{} \ \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow x_0 - d(x,x_0) < x < x_0 + d(x,x_0)$$

$$\Rightarrow |x+x_0| < \underbrace{|x|}_{\leq |x_0| + |x-x_0|} + |x_0|$$

$$< 2|x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + \delta)\cdot\delta$$

elijo este $\delta = 1$

Mismo procedimiento para

$$|y^2 - y_0^2| < (2|x_0| + \delta)\cdot\delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< (2|x_0|+1)\cdot\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< (2|y_0|+1)\cdot\delta}$$

$$< \delta\left(2|x_0| + 2|y_0| + 2\right)$$

$$< 2\delta\left(\underbrace{|x_0|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_0|}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0}\right) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)}$$

$\therefore$ mostré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ dado por

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)} \right\}$$

tal que

$$f\left(B((x_0, y_0), \delta)\right) \subseteq B\left(f(x_0, y_0), \varepsilon\right)$$

$\therefore$ mostré continuidad en cada (x_0, y_0) de $E = \mathbb{R}^2$

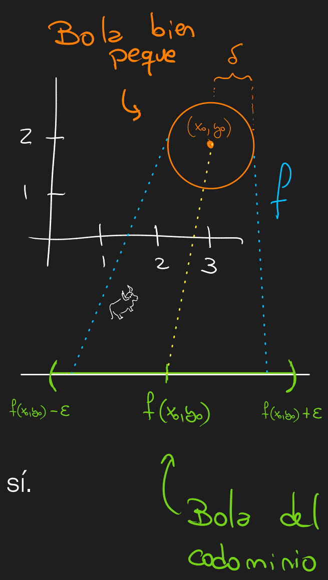
$\therefore$ f es continua en $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$

$\blacksquare$

Resumen:

Quiero que para toda bola del codominio de f, pueda pasar una bola del dominio por f, y que quede contenida en la primera:

f(AlgunaBolaBienPeque) dentro_de CadaBolaDelCodominio



Pasos:

* Se que la bola del codominio tiene radio epsilon
* Entonces sé que los elementos de la bola están acotados por epsilon de distancia entre sí.
* Planteo |f(x,y) - f(a,b)| < epsilon
* Quiero |f(x,y) - f(a,b)| < ... meter un delta acá ... < epsilon
* Usando las distancias/cotas de la bola del dominio, opero acotando la norma del paso anterior hasta poder acotar por delta.
* De haber varios términos delta en algún producto, puedo elegir un valor fijo para alguno (ya que el otro delta podrá seguir tendiendo a cero, "arrastrando consigo" el otro término) y tener un despeje más sencillo.
* Finalmente, despejo delta en función de epsilon, obteniendo el delta que buscaba que depende de epsilon y (posiblemente) de los x,y sobre los cuales se analice continuidad.
* Probé continuidad para todo x,y de E=R^2

fin

Otra forma

f es continua $\Leftrightarrow$ manda sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a x

a sucesiones $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes a $f(x)$

Las sucesiones del em son de la forma

$$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

y si son convergentes a (x,y), las escribo como

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$$

qvq

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{?} f(x, y)$$

Primero muestro que si

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$$

$$\Rightarrow d_2((x_n, y_n), (x,y)) = \sqrt{\underbrace{(x_n - x)^2}_{>0} + \underbrace{(y_n - y)^2}_{>0}} \to 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n - x \to 0 \\ y_n - x \to 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \end{cases}$$

Volviendo:

$$f(x_n, y_n) \underset{\uparrow \atop \text{def}}{=} \underbrace{x_n^2}_{\to x} + \underbrace{y_n^2}_{\to y} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2 + y^2 \underset{\uparrow \atop \text{def}}{=} f(x, y)$$

$\blacksquare$

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

Acá parece ser buena idea usar sucesiones

$$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Como $(\mathbb{R}^2, \delta)$ tiene dist. discreta

Todas las sucesiones que convergen serán de la forma

$$\text{Si: } (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = x \\ y_n = y \end{cases} \forall n \geq n_0 \quad \text{pues lo dijo Vicky} \underset{?}{}.$$

$\underline{\text{No}}$! pues $\delta(a,b) = 0 \iff a = b$

y $\delta(a,b) = 1 \iff a \neq b$

$\therefore$ si (x_n) converge en δ, es porque es constante a partir de un n_0.

- Con esto sé que $\underline{\text{todas}}$ las sucesiones convergentes en $(\mathbb{R}^2, \delta)$ son $\underline{\text{constantes}}$ a partir de un n_0.

Formalmente

$$\delta\big((x_n, y_n), (x, y)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x_n, y_n) = (x, y) \\ 1 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta\big((x_n, y_n), (x, y)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; (x_n, y_n) = (x, y) \quad \forall n \geq n_0$$

Volviendo, la función del ejercicio es

$$f(x, y) = (x, y)$$

entonces si la aplico a $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f(x_n, y_n) = (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y) = f(x, y)$$

$\boxtimes$

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

$$d_\infty\big((x_n, y_n), (x, y)\big) = \max\{|x_n - x|, |y_n - y|\}$$

Si $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$

$$\Rightarrow \quad d_\infty\big((x_n, y_n), (x, y)\big) = \max\{|x_n - x|, |y_n - y|\}$$

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \longrightarrow 0 \iff$$

$\iff$ ambos tienden a cero

o sea $\begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$

ya sé cómo convergen en $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

si hago

$$f(x_n, y_n) = (x_n, y_n) \xrightarrow{?} (x, y) = f(x, y)$$

Pero no toda

$\left(0, \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (0, 0)$ pero

$$\delta\left(f(0,\tfrac{1}{n}),\ f(0,0)\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos }. \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0,1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0,1)$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

5. Sea (E,d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

Como f es continua en x_0:

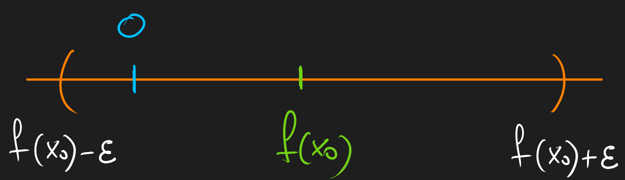
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f\left(B(x_0, \delta)\right) \subseteq B\left(f(x_0), \varepsilon\right)$$

Si

$f(x_0) > 0$

$\Rightarrow B\left(f(x_0), \varepsilon\right)$ tiene centro en:



Si tomo

$$r = d\left(f(x_0), 0\right) > 0$$

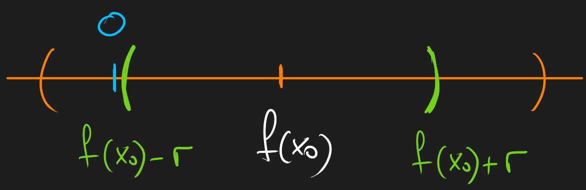
Como f es continua en x_0

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f\left(B(x_0, \delta)\right) \subseteq B\left(f(x_0), \varepsilon\right)$$

en particular

vale para $\varepsilon = r = d(f(x_0), 0) > 0$



$\therefore$ Todos los elementos de la bola

$$B\left(f(x_0),\ d(f(x_0), 0)\right)$$
$$\|$$
$$\left\{ y \in E = \mathbb{R} : d\left(f(x_0), y\right) < d(f(x_0), 0) \right\}$$

$\blacksquare$