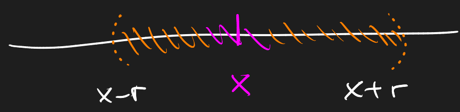
Práctica 3

1. Probar que los siguientes *son* espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

(a) $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

$B(x,r)$

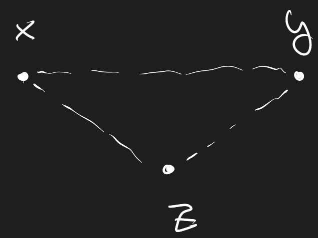


(E, d)

1) $d(x,x) = 0$ y $d \geq 0$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$



1) ✓

2) $|x-y| = |(-1)(y-x)|$

$= |-1|\,|y-x|$

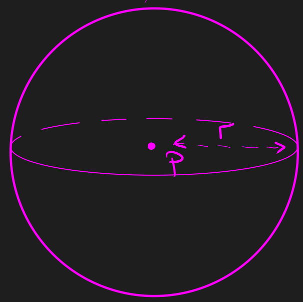
$= |y-x|$ ✓

3) $|x-y| = |x-z+z-y|$

$\leq |x-z| + \underbrace{|z-y|}_{=|y-z|}$ ✓

(b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

$B(p,r)$ $\quad p \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^3)$



1) ✓

2) ✓

3) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$

$$\|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

Cauchy - Schwartz.

$\blacksquare$

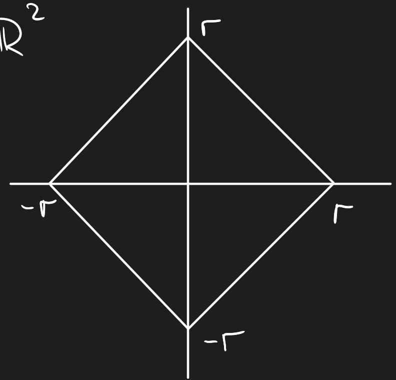
(c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

1) ✓

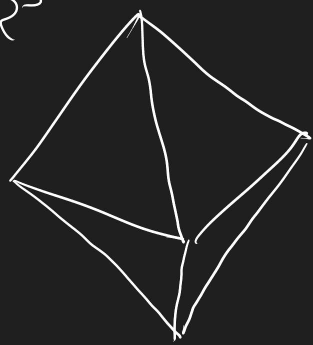
2) ✓

3) ✓

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.

1) ✓

2) ✓

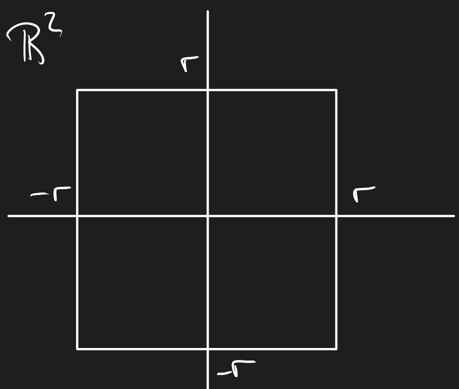
3) $$\max |x_i - y_i| \leq \max \{ |x_i - z_i| + |y_i - z_i| \}$$

$$\| $$

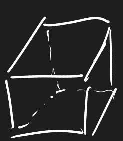
$$\max \{ |x_i - z_i| \} + \max \{ |y_i - z_i| \}$$

✓

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



(e) $C([0,1])$ con $d(f,g) = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t) - g(t)|$.

1) ✓

2) ✓

3) ✓

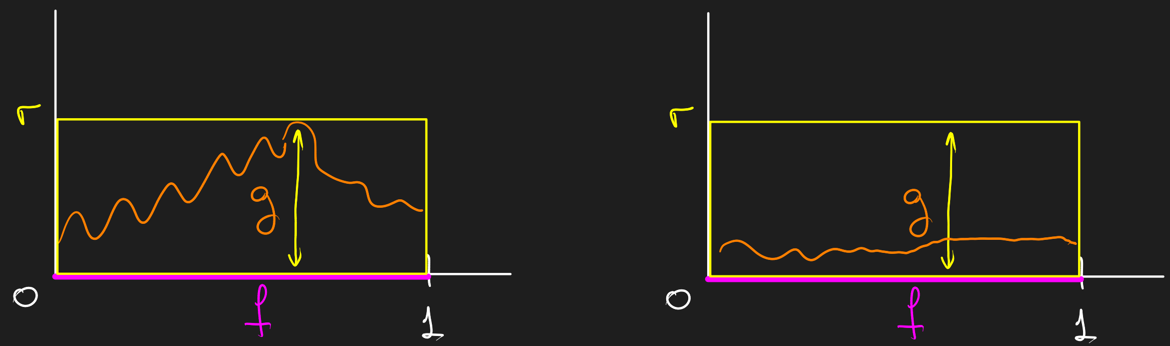
$$E = \mathscr{C}([0,1])$$

$$B(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$$

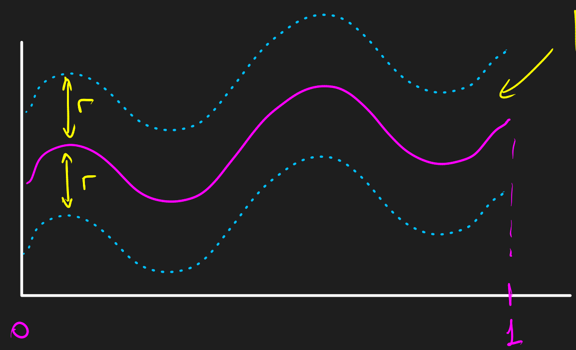
reescribo

$$B(f,r) = \{ g \in E : d(f,g) < r \}$$

• digo $f(t) \equiv 0$



• $f(t)$ libre



las $g \in B(f,r)$ están acá adentro

(f) E cualquier conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) ✓

2) ✓

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

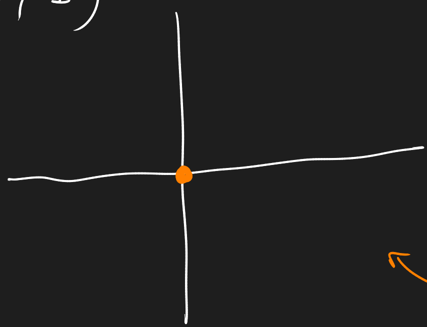
Caso 1 : $x = y$

$0 \leq$ Posi + Positivo ✓

Caso 2 : $x \neq y$

$1 \leq 1$ ó 2 ✓

$B(\vec{o}, 1)$



$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$\leftarrow d(\vec{o}, y) < r$

$B(\vec{o}, 2)$

$d(\vec{o}, y) < 2 \leftarrow$ siempre $\forall y \in \mathbb{R}$

Todo E

2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ son métricas en $\mathbb{R}$:

$$d_a(x,y)=(x-y)^2,\quad d_b(x,y)=\sqrt{|x-y|},\quad d_c(x,y)=|x^2-y^2|.$$

$d_a(x,y)=(x-y)^2$

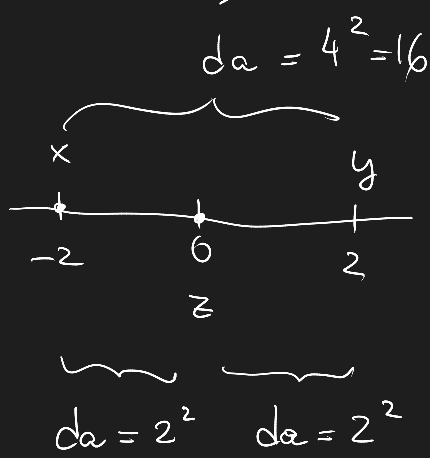
1) ✓

2) ✓

3) $d_a(x,y) \overset{?}{\leq} d_a(x,z) + d_a(z,y)$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)$$

quiero $>$



Si $z=\frac{x+y}{2}$

$\Rightarrow$ la desigualdad triangular <u>no</u> vale

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} \left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$(x-y)^2 > \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2$$

Pues si

$E = \mathbb{R}$

$x = -2$

$y = 2$

$z = \frac{-2+2}{2} = 0$

$$(-2-2)^2 > (-2-0)^2 + (2-0)^2$$

$$16 > 8$$

$\therefore$ d_a no cumple la desigualdad triangular

$\Rightarrow$ no es distancia.

b) $d_b(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

$\boxed{1}$ ✓

$\boxed{2}$ ✓

$\boxed{3}$ $d_b(x,y) \overset{?}{\leq} d_b(x,z) + d_b(z,y)$

$$d_b(x,y)^2 = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{d_b(x,z)^2} + \underbrace{|z-y|}_{d_b(z,y)^2}$$

$$d_b(x,y)^2 \leq d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2$$

$$d_b(x,y) \leq \sqrt{d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

CA:

$$\sqrt{a+b} \overset{?}{\leq} \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{con } a, b \geq 0$$

Completo cuadrado:

Como $2\sqrt{a.b} > 0$

$$\Rightarrow a+b \leq \underbrace{a + 2\sqrt{a.b} + b}_{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\Rightarrow a+b \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$\overset{a,b\geq 0}{\Rightarrow} \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Probé lo que quería

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \quad \checkmark$$

$\therefore$ d_b es distancia.

c) $d_c(x,y) = |x^2 - y^2|$

Contra ej:

$$d_c(-2,2) = |(-2)^2 - 2^2|$$

$$= 0$$

Pero $-2 \neq 2$

$\therefore$ no es una métrica.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞. Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

a) $d_\infty(x,y) = \sup \left\{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \right\}$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$d_\infty \leq d_2$) $\quad D := \left\{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \right\}$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\underbrace{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}_{\text{elementos de } D \text{ al cuadrado}}}$$

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2$ es alguno de ↑

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 = (x_i - y_i)^2$ para algún $i \in [1,n]$

Como son todos términos $(x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \forall i \in [1,n]$

$$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 \overset{\text{términos } \geq 0}{\leq} |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$$

Tomo raíz (términos ≥ 0)

$$\Rightarrow \quad d_\infty(x,y) \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)}$$

$d_2 \leq d_1$)

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

elevo al $\square$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \right)^2$$

Si $a_i := |x_i - y_i|$

$$\sum a_i^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j$$

Nota que si $i = j \Rightarrow a_i^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i \cdot a_j$$

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}$

Como $a_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

Obtuve que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + S \qquad \text{con } S \geq 0$$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^2$$

todo >0

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\therefore \quad \boxed{d_2(x,y) \leq d_1(x,y)}$$

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x_i - y_i| : i \in [1, n]\}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$D := \{|x_i - y_i| : i \in [1, n]\}$$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

además

$$d_\infty(x,y) \geq a \in D$$

pues $d_\infty(x,y) = \sup D$

$$\Rightarrow \quad d_\infty(x,y) \geq |x_i - y_i| \quad \forall i \in [1,n]$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y)}_{= n \cdot d_\infty(x,y)}$$

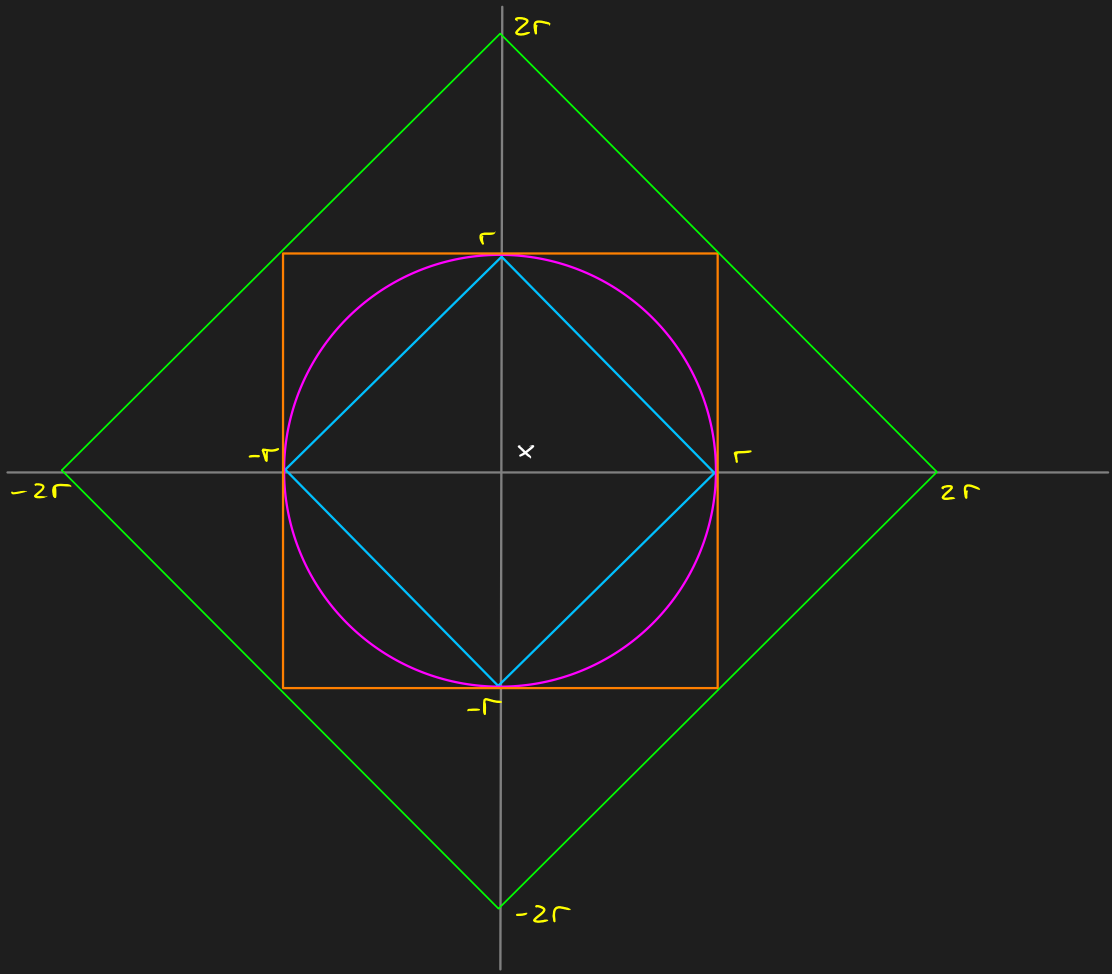
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot d_\infty(x,y)$$

$$\boxed{d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$$\therefore \quad \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$\blacksquare$

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.



Como $d_2 \leq d_1 \quad \forall\, x, y$

en particular

$\Rightarrow \quad d_2 \leq d_1$ para todo $x, y \in B_{d_2}(x,r)$

$$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in E : d_2(x,y) < r \}$$

$$B_{d_1}(x,r) = \{ y \in E : \underbrace{d_1(x,y)}_{d_2 \leq d_1} < r \}$$

$$\Rightarrow \quad B_{d_1}(x,r) \subseteq B_{d_2}(x,r)$$

Pues para un mismo r, los $y \in B_{d_1}$ estarán en B_{d_2} (pues si miden menos de r con $d_1 \Rightarrow$ miden todavía menos con d_2), pero no así al revés, pues habrá $y \in B_{d_2}$ que midan más que r con d_1.

$B_2 \overset{?}{\subseteq} B_\infty$)

$$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in E : d_2(x,y) < r \}$$

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : \underbrace{d_\infty(x,y)}_{\text{de a) obtuve}} < r \}$$

$$d_\infty \leq d_2$$

$$\Rightarrow B_{d_2}(x,r) \subseteq B_{d_\infty}(x,r) \quad \checkmark$$

$B_\infty \subseteq B_1(x, n.r)$)

- $B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : d_\infty(x,y) < r \}$
- $B_{d_1}(x,r) = \{ y \in E : d_1(x,y) < n.r \}$

Se de a) que

$$d_1 \leq n . d_\infty$$

reescribo

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : n . d_\infty(x,y) < n.r \} \quad n > 0$$

$$B_{d_1}(x, n.r) = \{ y \in E : d_1(x,y) < n.r \}$$

$\Rightarrow$ como $d_1 \leq n . d_\infty$

$$B_{d_\infty}(x,r) \subseteq B_{d_1}(x, n.r) \quad \checkmark$$