7. Sean A_1, A_2 y B_1, B_2 dos pares de conjuntos tales que $A_1 \sim B_1$ y $A_2 \sim B_2$.

(a) Si A_1 y A_2 son disjuntos y B_1 y B_2 también, probar que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

(b) Si A_1 y B_1 son numerables, probar que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

8. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Idea:

Puedo armar otro conjunto de 2^n elementos,

y hallar una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y éste último.

$\#A = n$

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\} \xrightarrow[\text{quiero}]{\sim} \underbrace{\{0,1\}^A}_{2^n \text{ elementos}}$$

Pues

$$\#\underbrace{X^Y}_{\text{funciones}} = \#X^{\#Y}$$

$$\mathcal{P}(A) \xrightarrow{\sim} \{0,1\}^A$$

$$B \longmapsto \left(a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases} \right)$$

$$A = \left\{ \begin{matrix} \square, \bigcirc, \\ \heartsuit, +, \end{matrix} \right\} \qquad \#A = n$$

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \begin{matrix} 1 \ \emptyset \\ \binom{1}{n} \text{ individuales} \\ \binom{2}{n} \text{ duplas} \\ \binom{3}{n} \text{ triplas} \\ \vdots \end{matrix} \right\}$$

Mando cada elemento (conjunto B) a una función, que mapea cada "subelemento" de A con 1 ó 0, según si $\exists$ en B:

$$B \longmapsto \left(a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases} \right) =: \varphi$$

Mostrando inversa, muestro biyectividad:

$$\{ a \in A : \varphi(a) = 1 \} \longleftarrow\!\shortmid \; \varphi$$

es biyectiva.

$$\therefore \quad \# \mathcal{P}(A) = 2^n$$

$\blacksquare$

9. (a) Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

(b) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.

(c) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

10. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.