Dani Sat 10 Abr

Espacios Métricos 2

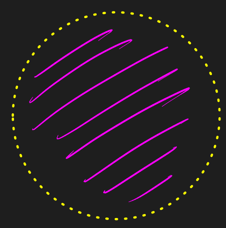
Sea (E, d)

$x \in E$

$r > 0$

$(\mathbb{R}^2, d_2)$

$$\Rightarrow B(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$$



y

$$\overline{B}(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) \leq r \}$$

Si $E = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow d(x,y) = |x - y|$$

$$\Rightarrow B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} : d(x,y) < r \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} : |x - y| < r \}$$

$$r < x - y < r$$

$$x - r < y < x + r$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} : x - r < y < x + r \}$$

$$= (x - r, x + r)$$

Para pensar:

Si $E = \mathbb{Z}$

$x = 3$

Mostrar

$B(x,r)$ y $\overline{B}(x,r)$ para $r = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

$r = \frac{1}{2}$:

$$B(\underbrace{3}_{x},\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{r}) = \{ y \in \mathbb{Z} : d(3,y) < \tfrac{1}{2} \}$$

$$\underbrace{\underbrace{|3}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{y|}_{\in \mathbb{Z}}}_{\in \mathbb{Z}} < \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\in \mathbb{Q}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{3 - \tfrac{1}{2}}_{\notin \mathbb{Z}} < y < \underbrace{3 + \tfrac{1}{2}}_{\notin \mathbb{Z}}$$

Como $y \in \mathbb{Z}$

sospechoso

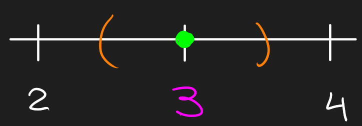
$$\Rightarrow \quad 3 - \tfrac{1}{2} < 3 \leq y \leq 3 < 3 + \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 3$$

¿Preguntar Procedimi?

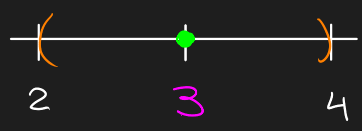
$\therefore$

$$B(3,\tfrac{1}{2}) = \{3\}$$

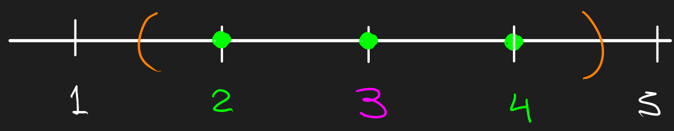


Similarmente

$$B(3,1) = \{3\}$$

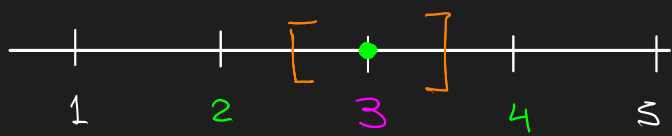


$$B\left(3,\tfrac{3}{2}\right) = \{2, 3, 4\} = [2, 4] \in \mathbb{Z}$$

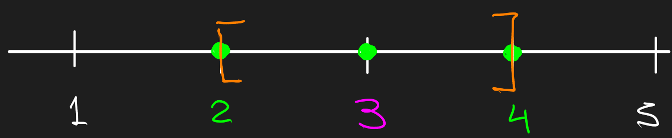


Para la bola cerrada,

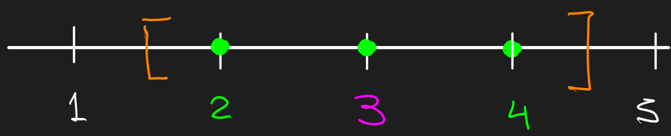
$$\overline{B}\left(3,\tfrac{1}{2}\right) = \{3\}$$



$$\overline{B}(3,1) = \{2, 3, 4\}$$



$$\overline{B}\left(3,\tfrac{3}{2}\right) = \{2, 3, 4\}$$



$\Rightarrow$ Los abiertos son $\{3\}$, $\{2, 3, 4\}$

$\Rightarrow$ Los cerrados son su complemento :

$\mathbb{Z} \setminus \{3\}$, $\mathbb{Z} \setminus \{2, 3, 4\}$.

Definición
Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición
Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición
Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación
Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

Ejercicio (guía)

$x \in E$

$r > 0$

Probar que $\underbrace{B(x, r)}_{\text{Bola abierta.}}$ es un conjunto abierto

Pero primero,

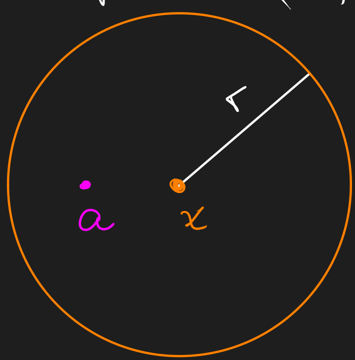
Ejercicio ☆

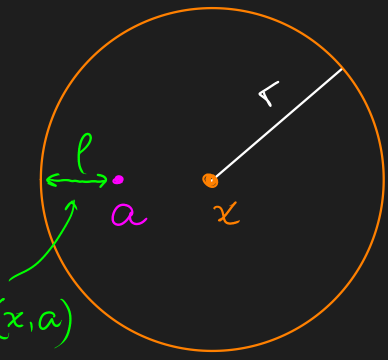
$x \in E$

$r > 0$

$a \in B$

Lo pienso en $(\mathbb{R}^2, d_2)$

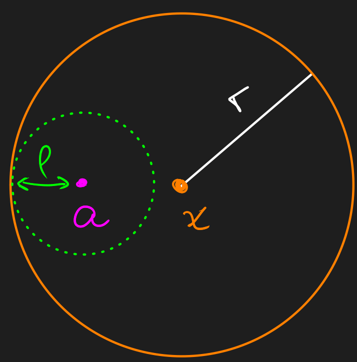




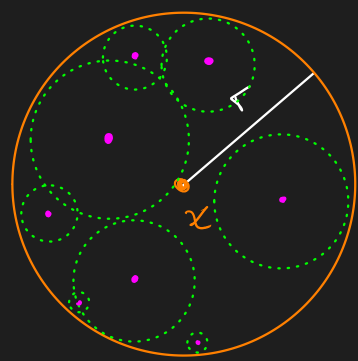
$\ell = r - d(x,a)$

Si $\ell = r - d(x,a)$

$\Rightarrow B(a,\ell) \subset B(x,r)$



$\forall a \in B(x,r)$



Esquema de resolución:

$\hookrightarrow$ Sea $y \in B(a,\ell) \Rightarrow \ldots$

$\ldots \Rightarrow y \in B(x,r)$

Pista: Desig. Triang.

Proposición
Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(iii) A° es un conjunto abierto.

(iv) Si G es abierto y $G \subset A$, entonces $G \subset A^\circ$.

A° es el mayor abierto contenido en A

Dem iv) G abierto, $G \subset A$

Uso esquema de enter:

Sea $x \in G$

qvq $x \overset{?}{\in} A$

Como G es abierto

$\Rightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x, r) \subset G$

$\overset{G \subset A}{\Rightarrow} \exists r > 0 \ / \ B(x, r) \subset A$

$\Rightarrow x \in A^\circ$

Probé que

Si $x \in G \Rightarrow x \in A^\circ$ $\blacksquare$

Finita o Infinita

Teorema

La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.

La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

Finitos !

Dem :

$(G_i)_{i \in I}$ $\quad I$ conjunto de índices finito o infinito

con G_i abierto $\forall i \in I$

q.v.q.

$A = \bigcup_{i \in I} G_i$ es abierto ?

Sea

$x \in A = \bigcup_{i \in I} G_i$

$\Rightarrow \exists i_0 \in I \,/\, x \in G_{i_0}$

Como G_{i_0} es abierto

$\Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x, r) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i = A$

$\Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x, r) \subset A$

$\therefore$ Probé que A es abierto.

$\boxtimes$

Ejercicio:

Probar que

$A = \bigcap_{i \in I} G_i$ es abierto, con I conjunto de índices finitos

Sea

$x \in A = \bigcap_{i \in I} G_i$

$\Rightarrow x \in G_i \quad \forall i \in I$

como G_i es abierto

$\Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x, r) \subset G_i$ $\forall i \in I$, pues todos los G_i son abiertos, y $x \in G_i \ \forall i$

$\Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x, r) \subset A$

$\therefore$ A es abierto

$\boxtimes$

Ej:

Buscar un ejemplo de ∞ abiertos con intersección no abierta.

? $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

Ejercicio
Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Pista:

Para este tipo de ejercicios (interiores, abiertos, cerrados, clausuras) los Racionales e Irracionales suelen ser útiles:

Elijo:

$$E = \mathbb{R}$$
$$A = \mathbb{Q}$$
$$B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow (A \cup B)^\circ = (\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \mathbb{R}^\circ \overset{\mathbb{R} \text{ es abierto}}{=} \mathbb{R}$$

$$A^\circ \cup B^\circ = \mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ \underset{\substack{\mathbb{Q} \text{ es abierto} \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ es abierto}}}{=} \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad (A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$$

Otro) $$(A \cap B)^\circ = (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ \overset{\text{disjuntos}}{=} \emptyset^\circ = \emptyset$$

$$A^\circ \cap B^\circ = \mathbb{Q}^\circ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$$

Definición

Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Observación

El conjunto V es un entorno de x si y sólo si $x \in V^o$.

Un conjunto G es abierto si y sólo si es un entorno de cada $x \in G$.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, existe $a \in A$, tal que $a \in B(x,r)$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Intuitivamente

$\bar{A} = \{$ Puntos de A + Puntos pegados a A $\}$

Proposición

Sean $A, B \subset E$.

(i) $\boxed{A \subset \bar{A}.}$ → si $x \in A \Rightarrow x$ es de adh. $\Rightarrow x \in \bar{A}$

(ii) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$ → VER

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Dem iii)

- $\overline{A} \subset \overline{(\overline{A})}$ por i)

- Veamos que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$

Sea $x \in \overline{(\overline{A})}$

q.v.q

$x \in \overline{A}$

Como $x \in \overline{\overline{A}}$

$\Rightarrow$ Dado $r > 0$, $\exists\, a \in \left(B(x,r) \cap \overline{A}\right)$

Sea $\rho = r - d(a,x)$

$\Longrightarrow B(a,\rho) \subset B(x,r)$

ej. ☆

Como

$a \in \overline{A}$

$\Rightarrow \underbrace{B(a,\rho)}_{\subset B(x,r)} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r) \cap A \neq 0$

Probé que, dado cualquier $r > 0$,) esto vale

$\Rightarrow \quad x \in \overline{A}$

$\therefore \quad$ si $\quad x \in \overline{\overline{A}} \Rightarrow x \in \overline{A}$

o sea $\quad \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$

y como sabía que

$$\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

$\boxtimes$

Ejercicio
Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema
A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

$$A^c = E \setminus A$$

Dem :

$\Rightarrow$) Sabemos que A es cerrado

qvq A^c es abierto

Sea $x \in A^c \Rightarrow x \notin A = \bar{A}$

$\Rightarrow x \notin \bar{A}$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \cap A = \phi$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \cap A^c \neq \phi$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \subset A^c$

$\therefore$ A^c es Abierto.

Observación

(i) $\bar{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

$A \subset F$, F cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset F$

$\bar{A}$ es EL MENOR cerrado que contiene a A.

$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

A°: mayor abierto contenido en A

$\bar{A}$: el menor cerrado que contiene a A

Teorema

i. La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.

ii. La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

Dem i) 2 maneras

↳ Por def. (ejercicio)

↳ Usando propiedades que conozco

Como si A es cerrado $\Leftrightarrow A^c$ es abierto

Puedo usar herramientas de abiertos en cerrados:

Usando el Teorema de Abiertos

$(F_i)_{i \in I}$ con F_i cerrado $\forall i \in I$

$$A = \bigcap_{i \in I} F_i$$

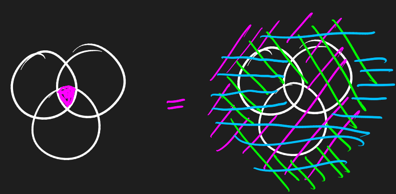
Como

F_i es cerrado $\forall i$

$\overset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}$ F_i^c es abierto $\forall i$

$\overset{1^\circ\text{Teo}}{\underset{\text{Unión de Abiertos}}{\Longrightarrow}}$ $\bigcup_{i \in I} F_i^c$ es abierto

$\overset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} F_i^c \right)^c}_{\text{Por Ley de De Morgan}}$ es cerrado



$$\left(\bigcup_{i \in I} F_i^c \right)^c = \bigcap_{i \in I} F_i$$

$\therefore$ $\bigcap_{i \in I} F_i = A$ es cerrado

$\blacksquare$

ii) Ejercicio.

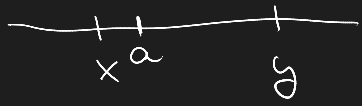
Ejercicio

Consideremos el espacio métrico $\mathbb{Z}$ con la distancia dada por el módulo de la diferencia.

¿Cuáles son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{Z}$? ¿Y los cerrados?

$E = \mathbb{Z}$

$d = |x-y|$



?

Usar que $\{3\}$ es abierto

(ver el principio).