

12. Sea $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $w_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se define $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i.$$

Probar que (\cdot, \cdot) define un producto interno en \mathbb{R}^n .

Tengo que mostrar que

$$\boxed{1} \quad (x, x) \geq 0 \quad \text{y} \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

$$\boxed{2} \quad (x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$$

$$\boxed{3} \quad (x, y) = (y, x)$$

$$\boxed{1} \quad (x, x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{w_i}_{\geq 0} \cdot \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}$$

$\geq 0 \quad \checkmark$

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{w_i \cdot x_i^2}_{w_i \cdot x_i^2 \geq 0} = 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

$$w_i > 0$$

$$\therefore x_i = 0 \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\Rightarrow x = \vec{0} \quad \checkmark$$

$$\boxed{2} \quad (x, \alpha y + \beta z) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \cdot (\alpha y_i + \beta z_i)$$

$$= \sum w_i \cdot x_i \cdot \alpha y_i + \sum w_i \cdot x_i \cdot \beta z_i$$

$$= \sum w_i \cdot x_i \cdot \alpha y_i + \sum w_i \cdot x_i \cdot \beta z_i$$

$$= \alpha(x, y) + \beta(x, z) \quad \checkmark$$

$$\boxed{3} \quad \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n w_i \cdot y_i \cdot x_i \quad \checkmark$$

Como cumple 1, 2 y 3, es prod. interno.

\square

13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach cuya norma satisface la regla del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E.$$

Definimos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad \forall x, y \in E.$$

Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno y que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

$$\boxed{1} \quad \langle x, x \rangle = \frac{1}{4} (\|2x\|^2 - \cancel{\|0\|^2})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cancel{2^2} \cdot \|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \checkmark$$

y además

$$\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{por } \|\cdot\| \text{ es norma,}$$

✓

$\boxed{3}$ Simetría ✓

$\boxed{2}$ Si $\|\cdot\|$ es PI

?

$$\Rightarrow \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{\boxed{3}} + \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$$

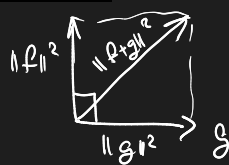
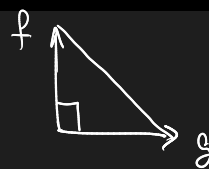
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

14. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y sean $f, g \in H$. Probar que $\langle f, g \rangle = 0$ si y sólo si

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

¿Qué diría Pitágoras sobre esto?

$$\Rightarrow) \text{ IB : } \langle f, g \rangle = 0$$



$$\bullet \text{ Si } f = g \Rightarrow f = g = 0 \quad \checkmark$$

$$\bullet \text{ Si } f = 0 \text{ ó } g = 0 \Rightarrow \checkmark$$

No hace falta separar

$$\bullet \text{ Si } f \neq g \text{ y } f \neq 0 \text{ y } g \neq 0$$

Sabemos que vale también

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

$g \vee g$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

Leg \square
 \downarrow
 \Leftrightarrow

$$\|f - g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|f - g\|^2 = \|f + g\|^2$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle f - g, f - g \rangle = \langle f + g, f + g \rangle$$

$$\underbrace{\langle f - g, f - g \rangle}_{(1)} - \underbrace{\langle f + g, f + g \rangle}_{(2)} = 0$$

$$\langle f, f-g \rangle + \langle -g, f-g \rangle - \textcircled{2} = 0$$

$$\langle f, f \rangle + \langle f, -g \rangle + \langle -g, f \rangle + \langle -g, -g \rangle - \textcircled{2} = 0$$

$$\langle f, f \rangle - 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle - \textcircled{2} = 0$$

$$\textcircled{1} = \langle f, f \rangle - 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle$$

$$\textcircled{2} = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 4 \underbrace{\langle f, g \rangle}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \text{Ib} : \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

Es lo mismo que antes

Leg \square

$$\Leftrightarrow \|f-g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|f-g\|^2 = \|f+g\|^2$$

\vdots mismos pasos

$$\Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 4 \langle f, g \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

\square

15. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión y $x_0 \in H$. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ en H .

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 \rangle$$

y

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$$

Por qué no vale de una cualquiera de las dos?

la segunda porque tengo infinitos vectores distintos con la misma norma, así que converger en norma es bastante débil

la primera es converger en la raíz de una norma:

Es más débil que 2? o igual?

La primera es más fuerte, pues fija x_0 de un lado, y mueve x_n del otro.

Es más exigente en cuanto a resultados posibles que cumplan esa igualdad.

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

equiv.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n \rangle^{1/2} = \langle x_0, x_0 \rangle^{1/2}$$

$\nexists \nexists$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{?}{=} x_0$$

Uso:

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y fijemos $v \in H$. Entonces la función $\gamma_v : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma_v(x) = \langle x, v \rangle$$

es una funcional lineal acotada sobre H .

Además, vale que $\|\gamma_v\| = \|v\|$.

Norma de operador
Norma de vector

Si fijo $x_0 \in H$

$$\Rightarrow \gamma_{x_0}(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \text{es una func. lineal acot. sobre } H$$

$\uparrow \forall x \in H$

en particular, vale para los $x_i \in (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\| \gamma_{x_0} \| = \| x_0 \| = \inf \left\{ M > 0 : \| \gamma_{x_0}(x) \|_F \leq M \| x \|_E \right\}$$

?

$$\begin{aligned} \langle x_n - x_0, x_n - x_0 \rangle &= \langle x_n, x_n - x_0 \rangle - \langle x_0, x_n - x_0 \rangle \\ &\quad \parallel \\ &\langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, x_0 \rangle \end{aligned}$$

16. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para $a, b \in \ell^2$ definimos

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n.$$

- (a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?
- (b) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de ℓ^2 ?
- (c) Probar que $\gamma : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

a) Props de \langle, \rangle

b) Ver y consultar 3/6

c) También ↗

Se usa que \langle, \rangle es PI tomando $b_n = \frac{1}{n}$

y $\langle a_n, b_n \rangle$

⋮

$$\gamma(a) = \langle a, b \rangle$$

define una funcional lineal.

17. Para $f, g \in C([0, 1])$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

- (a) Comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno. ¿Cuál es la norma que define?
 (b) Probar que con esta norma, la funcional definida en el Ejercicio 11 no es continua.

- (c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

- (d) Probar que la funcional lineal

$$\gamma(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno. Se puede ver que no existe $g \in C([0, 1])$ tal que $\gamma(f) = \langle f, g \rangle$ para todo $f \in C([0, 1])$ (convencerse, no hace falta demostrarlo). ¿Contradice esto el teorema de representación de Riesz enunciado en la teórica?

a) ① $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ✓

② $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle \stackrel{?}{=} \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$ ✓

③ ✓ Simetría.

Definir $\|\cdot\|_2$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

b)

11. Sea $\mathcal{E} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{E}f = f(0)$. Probar que si consideramos en $C([0, 1])$ la norma infinito, entonces \mathcal{E} es un funcional lineal continuo.

$$\mathcal{E} \text{ va de } C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|\mathcal{E}f - \mathcal{E}g\|_2 = \left(\int_0^1 (f(0) - g(0))^2 dx \right)^{1/2}$$

?

=

c)

(c) Probar que la funcional lineal

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

es continua con la norma dada por el producto interno.

$$\| I(f) - I(g) \|_2 = \left\| \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right\|_2$$

=

?

18. Sea ℓ^2 el espacio definido en el Ejercicio 16. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de ℓ^2 generado por e_1, e_2 y $e_3 + e_4$, donde para cada $j \in \mathbb{N}$, $e_j \in \ell^2$ es la sucesión que tiene un 1 en el lugar j y 0 en los demás.

16. Sea ℓ^2 el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para $a, b \in \ell^2$ definimos

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n.$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_3 + e_4 &= (0, 0, 1, 1, 0, \dots) \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = \{e_1, e_2, e_3 + e_4\}$$

↖ No probé que este en ℓ^2

$$X^\perp = \{y \in \ell^2 : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in X\}$$

Veamos cada x :

$$\langle e_1, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \quad (y_i \cdot e_i = 0 \ \forall i > 1)$$

$$\langle e_2, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y_2 = 0$$

$$\langle e_3 + e_4, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y_3 + y_4 = 0$$

$$\therefore X^\perp = \left\{ y \in \ell^2 : y_1 = y_2 = 0 \wedge y_3 = -y_4 \right\}$$

↖ Sucesiones cuyos primeros 2 elementos son cero y el tercero y cuarto son opuestos.

El resto de los elementos puede ser cualquier cosa, mientras la sucesión viva en ℓ^2 "

19. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado de H . Sea $P_X : H \rightarrow H$ la proyección ortogonal de H sobre X . Probar que:

- (a) $P_X^2 = P_X$;
- (b) $P_{X^\perp} = I - P_X$, donde I denota la identidad en H ;
- (c) $\langle P_X(y), z \rangle = \langle y, P_X(z) \rangle$, para todos $y, z \in H$.

H se escribe como

$$H = X \oplus X^\perp$$

por X es cerrado.

\therefore cada $y \in H$

se escribe como

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{único}}}{x} + z \quad \text{con } \begin{matrix} x \in X \\ z \in X^\perp \end{matrix}$$

$$P_X(y) = x$$

$$a) \quad P_X^2(y) = x^2 ? \text{ vector}^2 ?$$

$$b) P_{X^\perp}(y) = z \Rightarrow y = \underset{\in H}{x} + \overset{\text{único}}{\underset{\in X^\perp}{z}}$$

$$P_X(y) = x \Rightarrow y = \underset{\in H}{x} + \overset{\text{único}}{\underset{\in X^\perp}{z}}$$

$$P_{X^\perp}(y) \stackrel{?}{=} I - P_X(y)$$

$$z \stackrel{?}{=} I - x$$

$$x + z \stackrel{?}{=} I = y \quad \checkmark$$

?

c)

(c) $\langle P_X(y), z \rangle = \langle y, P_X(z) \rangle$, para todos $y, z \in H$.

$$\langle x, z \rangle = \langle y, \tilde{x} \rangle$$

$$y = x + z \quad \text{???}$$