

Práctica 6

1. Probar que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ definen normas en \mathbb{R}^n , donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Para ser norma :

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \checkmark$$

$$1) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2) \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$3) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

Dem:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sum |x_i + y_i| &\leq \sum |x_i| + |y_i| \\ &= \underbrace{\sum |x_i|}_{\|x\|} + \underbrace{\sum |y_i|}_{\|y\|} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sum |\lambda x_i| &= \sum |\lambda| \cdot |x_i| \\ &= |\lambda| \sum |x_i| \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$3) \sum |x_i| = 0 \Leftrightarrow \underline{\text{Todo}} x_i \text{ es cero} : x = (0, 0, \dots, 0) \\ \therefore x = \vec{0} \quad \checkmark$$

Finalmente, como cumple [1], [2] y [3]

$\|\cdot\|_1$ es norma.

$$\|\cdot\|_2 = \left(\sum (x_i)^2 \right)^{1/2}$$

Lo pruebo para $\|\cdot\|_2^2$

$$\begin{aligned} \text{I)} : \sum (x_i - y_i)^2 &\leq \sum x_i^2 + \sum y_i^2 \\ &= \underbrace{\sum x_i^2}_{\|x\|_2^2} + \underbrace{\sum y_i^2}_{\|y\|_2^2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\sum x_i^2 + \sum y_i^2} \leq \sqrt{\sum x_i^2} + \underbrace{\sqrt{\sum y_i^2}}_{\|y\|_2}$$

\uparrow
 $\sqrt{4+4} = 2\underbrace{\sqrt{2}}_{\leq 2} \leq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2+2$

$$\|x - y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \quad \checkmark$$

[2] y [3] igual que $\|\cdot\|_1$

$\Rightarrow \|\cdot\|_2$ es norma.

$$3) \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$11) \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + |y_i|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\|x\|_\infty}$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\|y\|_\infty}$$



[2] y [3] igual que antes.

$\Rightarrow \|\cdot\|_\infty$ es norma.

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

- (a) Las operaciones $+: E \times E \rightarrow E$ y $\times: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ son continuas.
- (b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- (c) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$.
- (d) Si $y \in B(x, r)$ entonces para todo $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in B(x, r)$ (es decir, la bola es *convexa*).

Funciones continuas en espacios normados

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \delta = \delta(x) \quad /$$

$$\text{si } \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

En el ejercicio, $+$ y \times es la " f "

$$+: E \times E \rightarrow E$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad /$$

$$\text{si } \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$$

$$\Rightarrow \|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\| < \varepsilon$$

$$\underbrace{+}_{+(x_1, y_1) = x_1 + y_1}$$

$$\begin{aligned}\| (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \| &= \| (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \| \\ &\leq \| x_1 - x_2 \| + \| y_1 - y_2 \| \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \| &= \| x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \| \\ &\leq \| x_1 - x_2 \| + \| y_1 - y_2 \| \quad \checkmark \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{đẳng} \\ &\quad \text{Triêng}\end{aligned}$$

Product

$$x: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

$$\| (a, y_1) - (b, y_2) \| < \delta \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&\quad \underbrace{f(a, y_1)} \\ \Rightarrow \| a \cdot y_1 - b \cdot y_2 \| &< \varepsilon\end{aligned}$$

$$\| a \cdot y_1 - b \cdot y_2 \| \leq \| a \cdot y_1 \| + \| b \cdot y_2 \|^2$$

$$= |a| \cdot \|y_1\| + |b| \cdot \|y_2\| \quad \checkmark$$

(b) Si $x \in E$ y $r > 0$, $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

$$B(x, r) = \{ y \in E : \|x - y\| < r \}$$

\subseteq Sé

$$B(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)} \quad \leftarrow \text{el cerrado más chico que contiene a } B(x, r)$$

$$y \quad B(x, r) \subseteq \overline{B}(x, r)$$

$$\Rightarrow \overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r) \quad \checkmark$$

$$\supseteq \quad \overline{B}(0, 1) = B(0, 1) \cup \partial B(0, 1) \quad ? \subseteq \overline{B(0, 1)}$$

$$\bullet \quad B(0, 1) \subseteq \overline{B(0, 1)} \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad \partial B(0, 1) \stackrel{?}{\subseteq} \overline{B(0, 1)}$$

Armo

$$(x_n) \subseteq B(0, 1) \quad / \quad \underbrace{x_n \rightarrow x}_{\text{en } E} \in \partial B(0, 1)$$

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$$

\subseteq \checkmark (VALE EN MÉTRICOS)

$$\supseteq \quad y \in \overline{B(x, r)} \Leftrightarrow \exists \underbrace{y_n \in B(x, r)}_{\|y_n - x\| < r} \text{ tal que } y_n \rightarrow y$$

IDEA: armar $x_n \in B(x, r) / x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

\leftarrow Dibujito. Usar que es e. métr. para poder por sucesión?

$$\text{obs: } \|z\| = 1$$

$$(1 - \frac{1}{n})z \in B(0,1)$$

$$\text{pues } \|(1 - \frac{1}{n})z\| = |1 - \frac{1}{n}| < 1$$

$$\text{por ej } z = 1 \quad (1 - \frac{1}{n})z \rightarrow \underline{z}$$

Pero como

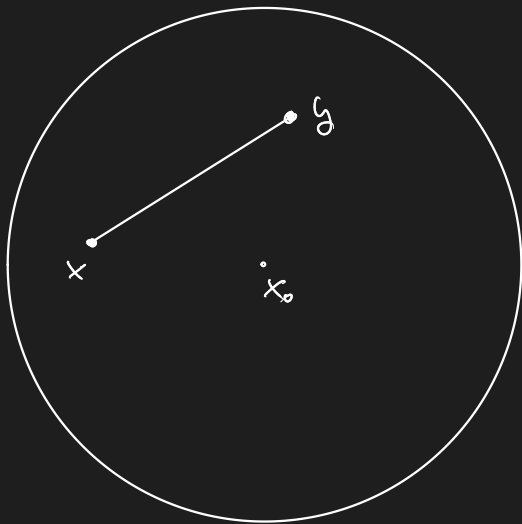
$$(x_n) \subseteq B(0,1)$$

$$\text{y } x_n \rightarrow x$$

$$\Rightarrow x \text{ debe estar en } \overline{B(0,1)}$$

$$\text{y como por def. de } (x_n), x \in \partial B(0,1)$$

$$\Rightarrow \partial B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$$



(c) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r.$

$$B(x, r) = \{ y \in E : \|x - y\|_E < r \}$$

$$\text{diam}(B(x, r)) = \sup \{ \|x - y\|_E : x, y \in B(x, r) \}$$

Como estoy en espacio normado:

$$\text{diam}(B(0, 1)) = \sup \{ \|x - y\|_E : x, y \in B(0, 1) \}$$

def. de Bola

? Siempre puedo proceder
así? $B(x, r)$ a $B(0, 1)$

$$\begin{aligned} \|x\|_E &< 1 \\ \|y\|_E &< 1 \end{aligned}$$

Uso res. de Cauchy

$$\leq) \text{diam}(B(0, 1)) \stackrel{?}{\leq} r$$

$$B(0, 1) = \{ y \in E : \|y\|_E < 1 \}$$

?

$$\sup \{ \|z - y\|_E : y, z \in B(0, 1) \} = 2$$

$$\geq) \|z - y\| \leq \|z - x\| + \|x - y\|$$

↑
desig.
Triáng.

$$\|z - y\| \leq \|z\| + \|y\|$$

$$< 1 + 1 = 2$$

$$\|z - y\| < 2$$

Por ej 15b de Pr. 3

$$\text{diam} (B(0,1)) = \text{diam} (\overline{B(0,1)})$$

$$\begin{array}{c} = \text{diam} (\overline{B(0,1)}) \\ \uparrow \\ 2b \end{array}$$

Falta ver que el diámetro se alcanza:

$$\text{Sea } v, -v \in \overline{B(0,1)} \quad / \quad \|v\| = \|-v\| = 1$$

$$\Rightarrow r \cdot v + x \in B(x, r)$$

$$\overset{y}{-r \cdot v + x} \in B(x, r)$$

$$\Rightarrow \|r \cdot v + x - (-r \cdot v + x)\| = \|2rv\|$$

$$= 2r \cdot \|v\|$$

$$= 2r \quad \checkmark$$

□

lamo x_0

(d) Si $y \in B(x, r)$ entonces para todo $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in B(x, r)$ (es decir, la bola es *convexa*).

?

$$tx + (1-t)y = t(x-y) + y$$

no habría que distinguir el x del centro con el x del segmento?

$$\|t(x-y) + y - x_0\| = \|tx - ty + y - x_0\|$$



$$= \|tx - ty + y - x_0 + t \cdot x_0 - t \cdot x_0\|$$

$$= \|t \cdot (x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\|$$

$$\leq \|t \cdot (x - x_0)\| + \|(1-t)(y - x_0)\|$$

$$= t \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{< r} + (1-t) \underbrace{\|y - x_0\|}_{< r}$$

por $x, y \in B(x_0, r)$

$$< t \cdot r + (1-t) \cdot r = r$$

$$\|t(x-y) + y - x_0\| < r$$

La dist. entre el segmento y x_0 es menor al radio de la bola

$$\therefore t(x-y) + y \in B(x_0, r) \quad \square$$

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Probar que si definimos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$.

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$$

$$y_1 = \frac{x_1}{1}, \quad y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\begin{aligned} \|y_n - x_0\| &= \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - x_0 \right\| \\ &= \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n \cdot x_0}{n} \right\| \end{aligned}$$

$$\text{Si } x_n \rightarrow x_0$$

continua

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \sum_{i=1}^n x_0 = n \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n \cdot x_0}{n} \right\| \rightarrow \frac{n \cdot x_0 - n \cdot x_0}{n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \quad \square$$

Pregunta Resuelta.

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n}_{n} \quad \begin{matrix} \text{se} \\ \text{passa} \\ \text{a } x_0 \end{matrix}$$

Exercício: se $y_1, \dots, y_n \in B(x, \epsilon)$

$$\Rightarrow \underbrace{y_1 + \dots + y_n}_n \in B(x, \epsilon).$$

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio (vectorial). Probar que:
- (a) \overline{S} también es un subespacio.
 - (b) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.
 - (c) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.
 - (d) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E .

5. Sea $\mathbb{R}_n[t]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en \mathbb{R} . Consideremos para $p \in \mathbb{R}_n[t]$ las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

- (a) Probar que $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$ son espacios de Banach.
- (b) Probar que ambas normas resultan equivalentes en $\mathbb{R}_n[t]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Si $\mathbb{R}[t]$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en \mathbb{R} , probar que ahí las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el item anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta n **para todo** $n \in \mathbb{N}$?

a) Espacio de Banach: E es espacio vectorial
completo
y normado.

$(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$: ev?
 \hookrightarrow Sí, con base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
 completo?
 \hookrightarrow Todo esp. normado de $\dim < \infty$
 es Completo
 es $\|\cdot\|_\infty$ una norma?
 \hookrightarrow Veo: $\begin{cases} \bullet \text{ Triangular} \\ \bullet \text{ Prop. escaler} \\ \bullet 0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases}$

Completo?

Todo esp. norma de $\dim < \infty$ es Completo

$$\dim(\text{base } \{1, x, x^2, \dots, x^n\}) = n+1 < \infty \quad \checkmark$$

$\mathbb{R}_n[t]$ es Completo.

Es norma?

$$\begin{aligned} \bullet \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t) - q(t)| &\leq \max |p(t)| + |q(t)| \\ &= \max |p(t)| + \max |q(t)| \quad \checkmark \end{aligned}$$

• [2] y [3] son como con $\|\cdot\|_1$ en \mathbb{R}^n

□

Ahora con

$$\|p(t)\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt$$

• Deng Tring.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |p(t) - q(t)| dt &\leq \int_0^1 |p(t)| + |q(t)| dt \\ &= \|p(t)\|_1 + \|q(t)\|_1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

• [2] y [3] son igual.

□

b) Normas equiv si

$$\exists c, \tilde{c} \in \mathbb{R} /$$

$$c \cdot \| \cdot \|_a \leq \| \cdot \|_b \leq \tilde{c} \| \cdot \|_a$$

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad y \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

$$\|p\|_\infty \leq \|p\|_1 \quad \text{per} \quad \|p\|_\infty = |p(t)| \quad \text{para algún } t \quad \checkmark$$

Falta:

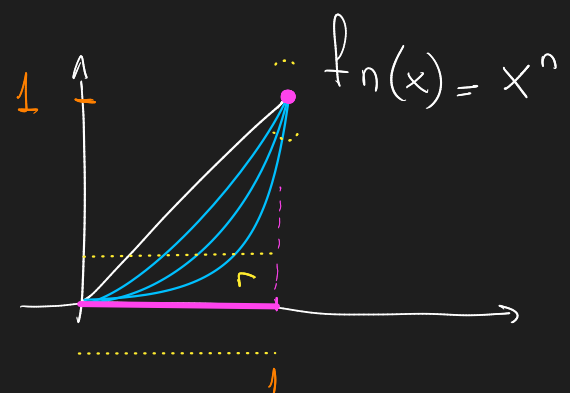
$$\int_0^1 |p(t)| dt \leq \int_0^1 \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| dt = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \cdot \int_0^1 dt$$

$$\int_0^1 |p(t)| dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \checkmark$$

∴ son equiv.



c) El problema aparece cuando los polinomios pueden tener grado infinito?
 Porque t sigue estando entre 0 y 1, con lo que los polinomios siguen estando acotados
 por mas que el grado del polinomio sea muy grande



$$\Rightarrow \exists \underline{c_1}, \underline{c_2} / \underline{\forall p \in \mathbb{R}_m[t]}$$

$$(x) \quad c_1 \|p\|_2 \leq \|p\|_1 \leq c_2 \|p\|_2 \Leftarrow$$

+

Como ESTO VALE $\forall n$,

$\forall p \in \mathbb{R}[t]$,

$$\underline{c_1} \|p\|_2 \leq \|p\|_1 \leq \underline{c_2} \|p\|_2$$

} ¿dónde está
el
error
en el razonamiento?

c_1 y c_2 en (x) DEPENDEN DE n

6. Definimos ℓ^∞ como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

(a) Probar que la bola de ℓ^∞ no es compacta.

(b) Probar que no hay ningún conjunto numerable denso en ℓ^∞ .

a) Como es espacio normado

$$\mathbb{B}(0, 1) = \left\{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : \underbrace{\|b\|}_{\|0-b\|} < 1 \right\}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $a \quad r$
 $!!$
 b

en espacios normados

Compacto \Rightarrow cerrado y acotado

Como las sucesiones son acotadas.

\Rightarrow debo probar que $\mathbb{B}(0,1)$ no es cerrado

Armo sucesiones que tiendan a algo fuera de $\mathbb{B}(0,1)$

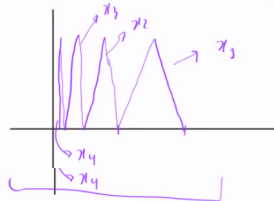
$$\|b\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n|$$

$$(b_n) = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \notin \mathbb{B}(0,1)$$

$\therefore \mathbb{B}(0,1)$ no es cerrado

Creo que
no vale
por ser
dim ∞

e) ℓ^∞ EN $C[0,1]$, $\overline{B_{C[0,1]}}$ NO COMPACTA.



$$\sup_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| = \|x_n - x_m\|_\infty = 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (x_n)_n \subset \overline{B_{C[0,1]}}$ NO tiene subseq. conv.

6 a) buscar una seq. en $\overline{B_{\ell^\infty}}$ / $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$
 $\forall n \neq m$.

$\Rightarrow B(0,1)$ no es compacta.

b) ?

6 b) A denso en E $\Leftrightarrow \overline{A} = \underline{E}$.

\Leftrightarrow la bola centrada en cualquier $x \in E$ de cualquier radio r tiene un elem. de A .

Si encontramos NO numerables bolitas disjuntas en $E \Rightarrow$ cualquier denso tiene que ser NO NUMERABLE ¿POR QUÉ?