

Definición de Supremo

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente.

Un número $s \in \mathbb{R}$ se dice *supremo de A* si cumple las siguientes dos condiciones:

- (a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;
- (b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

Observación

- El supremo es único.
- La existencia del supremo se debe al axioma de completitud de \mathbb{R} .

hay que probarlo
(Ejercicio)

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de \mathbb{R} tiene supremo

Demo de unicidad

Sean s_1, s_2 supremos de A

\Rightarrow Ambos cumplen (a) y (b)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad s_1 &\geq x \quad \forall x \in A \\ s_2 &\geq x \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \text{Si } t \in \mathbb{R} \text{ y } t \geq x \quad \forall x \in A$$

$$\Rightarrow s_1 \leq t \quad \wedge \quad s_2 \leq t$$

Como s_1 y s_2 además son cotas superiores (por (a)):

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{si } S_2 = t \Rightarrow S_1 \leq S_2 \\ \Rightarrow \text{si } S_1 = t \Rightarrow S_2 \leq S_1 \end{array} \right\} S_1 = S_2$$

Ejercicios de la forma

$$A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Afirmo: } 1 = \text{Sup}(A)$$

Se demuestra con (a) y (b)

Dem:

(a) $s \geq x$ para todo $x \in A$;
(b) si $t \in \mathbb{R}$ satisface $t \geq x$
para todo $x \in A$, entonces $s \leq t$.

[1] qvq 1 es cota superior

[2] la menor de las cotas sup

$$[1] \rightarrow x \in A \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

1 es cota superior

$$[2] \rightarrow t \text{ es una cota superior de } A$$

$$\Rightarrow t \geq 1 \text{ pues } 1 \in A$$

$$\Rightarrow 1 \text{ es el supremo.}$$

Ahora:

$$\text{Si } B = [0, 1) \quad \swarrow \text{abierto}$$

$$\text{Afirmo que } 1 = \text{Sup}(A)$$

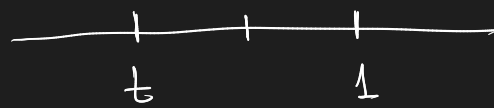
[1] 1 es cota superior como enter

PERO!

[2] Si t es cota sup. de B

$$\Rightarrow \forall q \forall t \geq 1$$

Si $t < 1$:



$$(t \geq 0) \Rightarrow x \in (t, 1) \subseteq B$$

$$\Rightarrow x \in B$$

PERO! $x > t$ ABS!

Pues t era cota superior

$$\Rightarrow t \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Sup}(B) = 1$$

