Nicolás — Jupiter 25 de Marzo

SUPREMOS E ÍNFIMOS (CONT)

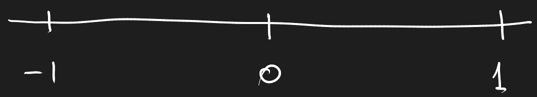
1) HALLAR, SI EXISTEN, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$,

$$A = \{(-1)^n (1 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$A = \{0, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, -\tfrac{4}{5}, \dots\}$$

con n impar: $-1 + \frac{1}{2k-1}$

con n pares: $1 + \frac{1}{2k}$



$$A = \underbrace{\left\{1 - \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\}}_{A^+} \cup \underbrace{\left\{-1 + \frac{1}{2k-1} : k \in \mathbb{N}\right\}}_{A^-}$$

- $x \leq 0 < y \quad \forall x \in A^-,\ y \in A^+$

$$\Rightarrow \sup A = \sup A^+$$

- $\sup A^+ = 1$:

$$\to 1 \geq 1 - \frac{1}{2k} \iff \frac{1}{2k} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

1 es cota sup.

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0$, busco $a \in A^+ / 1 - \varepsilon < a$

i.e. Busco

$$K \in \mathbb{N} / 1 - \varepsilon < 1 - \tfrac{1}{2}k$$

$$\Leftrightarrow \ 1/2k < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \underbrace{\frac{1}{2\varepsilon} < k}$$

$\exists$ UN TAL k, GRACIAS A ARQUÍM.

Obs:

- no tiene max pues $1 \notin A$

$$1 \in A \Leftrightarrow \exists n / (-1)^n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\geq 0} = 1$$

$\Rightarrow n$ debe ser par

n par: $n = 2k$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2k} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2k} = 0$$

Abs!

$\therefore 1 \notin A$

Análogamente

$$\inf A = \inf A^- = -1$$

2) DADOS $A, B \subseteq \mathbb{R}$, SEA

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Ojo!

- $A = (-\infty, 0] = B$

$\Rightarrow$ A, B son acotados superiormente

PERO!

$$A \cdot B = [0, +\infty)$$

no lo está!

- $A = [-1, 0] = B$

$\Rightarrow$ $A \cdot B = [0, 1]$

$$\sup (A \cdot B) = 1$$

PERO! son distintos!

$$\sup A \cdot \sup B = 0$$

Prop:

¡Positivos!

Sup $A, B \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, acot. sup.

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ también lo está

y

$$\sup A.B = \sup A . \sup B$$

Dem :

Sean $a \in A$, $b \in B$.

Entonces

$$a.b \overset{\substack{a \geq 0 \\ b \leq \sup B}}{\leq} a.\sup B \overset{a \leq \sup A}{\leq} \underbrace{\sup A . \sup B}_{\text{obtuve cota sup. de } A.B} =: S$$

Falta ver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A, b \in B \,/\, a.b > \sup A.\sup B - \varepsilon$$

$$a.b > S - \varepsilon$$

Sé que

- $\forall \delta , \exists a \in A \,/\, a > \sup A - \delta > 0$
- $\forall \gamma , \exists b \in B \,/\, b > \sup B - \gamma > 0$

Cuenta :

$$a.b > (\sup A - \delta)(\sup B - \gamma)$$

Supongo $\sup A$ y $\sup B$ son positivos

Caso contrario, digamos $\sup A = 0$

$\Rightarrow \quad A = \{0\}$

y luego

Completar

$$a \cdot b > (\sup A - \delta)(\sup B - \gamma)$$

$$= \sup A \cdot \sup B - \gamma \cdot \sup A - \delta \cdot \sup B + \gamma\delta$$

$$\underset{?}{>} \sup A \cdot \sup B - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\gamma \cdot \underbrace{\sup A}_{=:r} - \delta \underbrace{\sup B}_{=:s} + \gamma \cdot \delta > -\varepsilon$$

SPDG, puedo suponer $r \leq s$

(podría también tomar máx)

$r \leq s$:

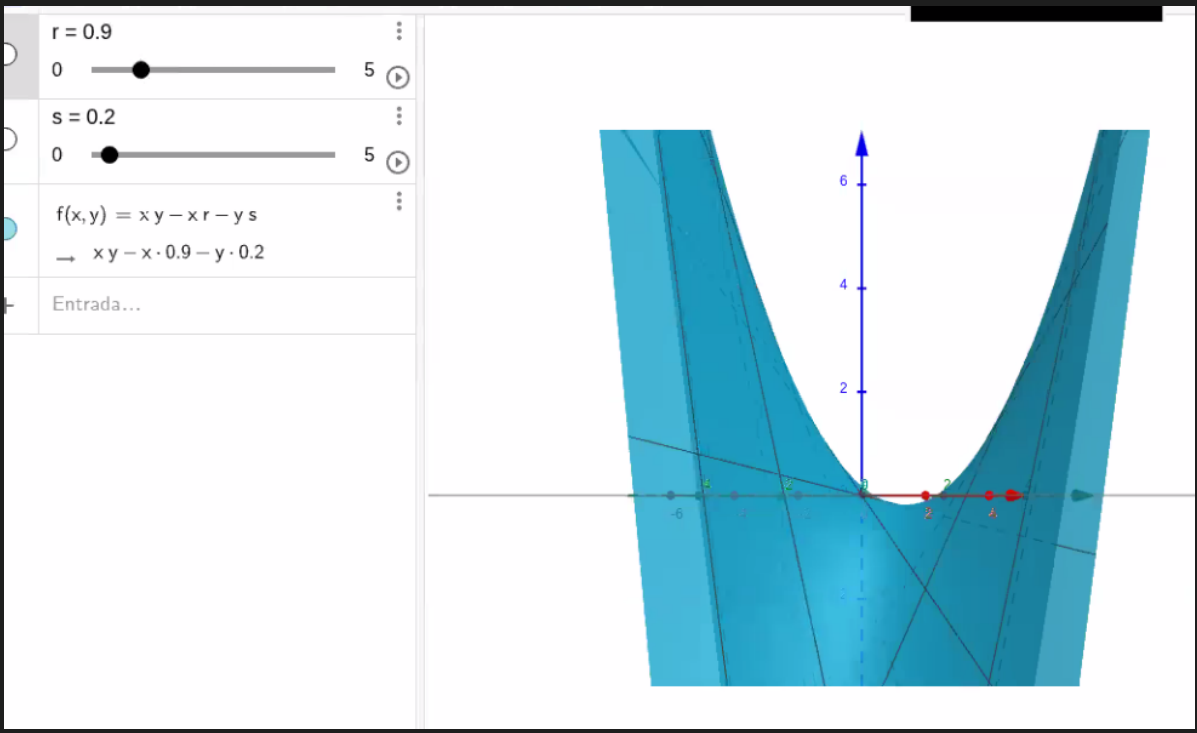
$$-\gamma r \geq -\gamma s$$

y así

$$-\gamma r - \delta s + \gamma\delta \geq -\gamma s - \delta s + \gamma\delta \overset{?}{>} -\varepsilon$$

PENDIENTE: DADO ε (y $s>0$), MOSTRAR QUE $\exists\ \gamma, \delta > 0$ QUE CUMPLEN?

Pendiente



Consultas:

una forma (está buena)

$$\lfloor y \rfloor = \sup \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq y\}$$

otra forma

$$A = \{j \in \mathbb{Z},\ j < y\} \quad \subseteq \mathbb{N}$$

atenti!