

Completitud de \mathbb{R}

- Queremos probar que \mathbb{R} es completo

Recordo:

Definición:

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

- Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Idea:

- Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada.
- Veremos que toda sucesión acotada en \mathbb{R} tiene una subsucesión convergente.
- Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente.
- $(x_n)_n$ converge.

Proposición

Toda sucesión acotada en \mathbb{R} tiene una subsucesión convergente.

Vamos a probar

Proposición

Toda sucesión en \mathbb{R} tiene una subsucesión monótona.

Recordemos: Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.

Luego, si una sucesión es acotada, la subsucesión monótona que tiene también va a ser acotada y por lo tanto, convergente.

↑ Con esto probamos la 1ª prop.

Vamos a probar

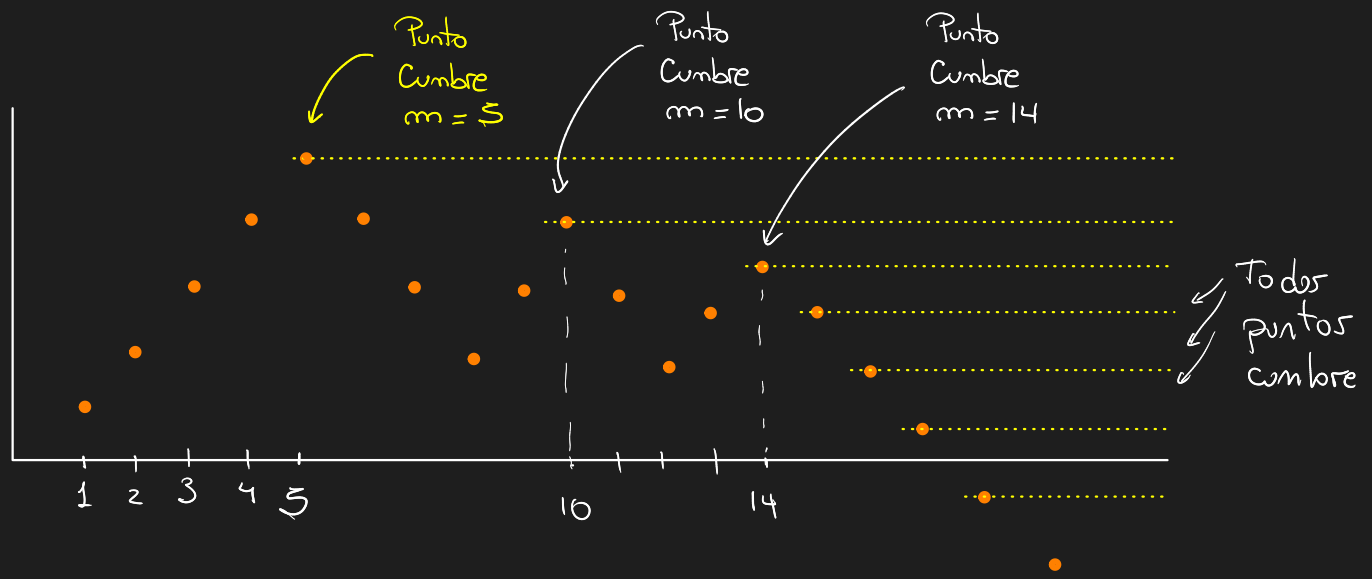
Proposición

Toda sucesión en \mathbb{R} tiene una subsucesión monótona.

Usando

Definición

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Decimos que $m \in \mathbb{N}$ es un **punto cumbre** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\forall n > m$ se tiene $x_n < x_m$.



Si

$$C = \{ m \in \mathbb{N} : m \text{ es punto cumbre de } (x_n)_n \} \subseteq \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow C = \{ 5, 10, 14, 15, 16, 17, \dots \}$$

Vamos a probar

Proposición

Toda sucesión en \mathbb{R} tiene una subsucesión monótona.

Dem.:

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sucesión cualquiera

$$C = \{ m \in \mathbb{N} : m \text{ es punto cumbre de } (x_n)_n \} \subseteq \mathbb{N}$$

• A C le puede pasar 3 cosas :

$$\boxed{1} \quad \#C = \infty$$

$$\boxed{2} \quad \#C < \infty$$

$$\boxed{3} \quad C = \emptyset$$

Supongo $\boxed{1}$

$$\Rightarrow C = \{n_k : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{con} \quad n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \dots$$

Afirmo:

- $(x_{n_k})_k$ subseq. de $(x_n)_n$ es monótona decreciente.

En efecto:

- Como $n_k < n_{k+1}$

$$\text{y} \quad n_k, n_{k+1} \in C$$

$$\Rightarrow x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$$

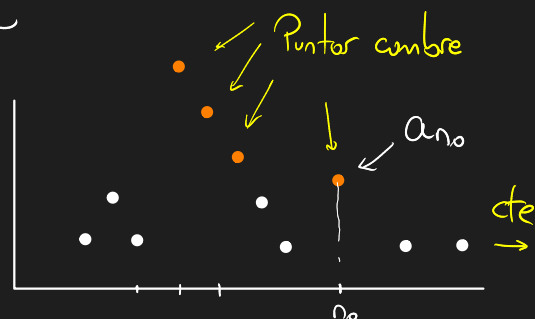
$\therefore (x_{n_k})_k$ es monótona decreciente.

Si pasa $\boxed{2}$, armo sucesión creciente

$$\boxed{2} \quad \#C < \infty$$

Sea n_0 el elemento más grande de C

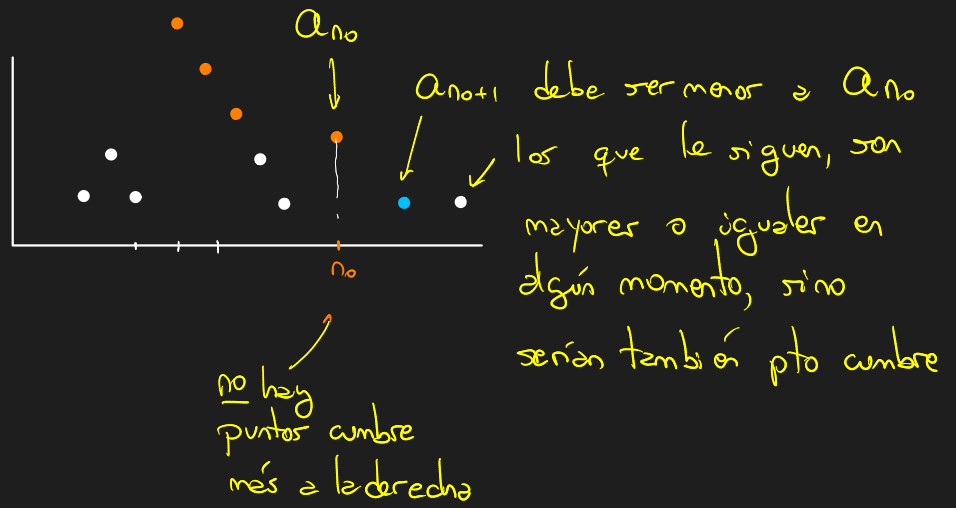
$$\Rightarrow a_n < a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$



$$\exists n_1 > n_0 + 1 \quad / \quad a_{n_1} \geq a_{n_0+1}$$

Pues $n_0 + 1 \notin C$, pues n_0 era el pto cumbre más "a la derecha",

y por eso



y sigo

$$\exists n_2 > n_1 + 1 \quad / \quad a_{n_2} \geq a_{n_1+1}$$

Pues $n_1 + 1 \notin C$

y sigo

$$\exists n_k > n_{k-1} + 1 \quad / \quad a_{n_k} \geq a_{n_{k-1}+1}$$

y así construï :

$(a_{n_k})_k$ subsec. de $(a_n)_n$ monótona creciente.

Si pasa 3

Repetimos el argumento de 2

- Tomo el primer a_1
- Como no hay punto cumbre,

$$\exists n_1 > 1 \quad / \quad a_{n_1} \geq a_1$$

Como no hay punto cumbre,

$$\exists n_2 > n_1 + 1 \quad / \quad a_{n_2} \geq a_{n_1 + 1}$$

y así sigo construyendo una sucesión monótona creciente

$\Rightarrow (a_{n_k})_k$ es monótona creciente. ✓

↖ Para cada $k \in \mathbb{N}$, por $C = \emptyset \Rightarrow (a_n)_n = (a_{n_k})_k$

□

Con esto probamos la completitud de \mathbb{R} .

Bonus Track

\mathbb{R}^m también es completo.

Dem:

Sea $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\text{con } x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots, x_n^m)$$

Si $(x_n)_n$ es de Cauchy en \mathbb{R}^m

$$\text{con } d(x, y) = \|x - y\|_2$$

como

$$|x_n^j - x_{n'}^j| \leq \|x_n - x_{n'}\|$$

$\Rightarrow (x_n^j)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy $\forall 1 \leq j \leq m$

Como \mathbb{R} es completo

\downarrow
 \Rightarrow para cada $1 \leq j \leq m$

$$\exists x^j \in \mathbb{R} / x_n^j \longrightarrow x^j$$

$\Rightarrow x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ es el límite de $(x_n)_n$.

□