Práctica 7

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a $f : A \to Y$ si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$:

(a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, definida en $\mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, definida en $\mathbb{R}$;

(c) $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones reales definidas sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$;

ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$;

iii. $f_n(x) = n^2x(1 - x^2)^n$, $A = [0, 1]$.

(b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de ii., que es uniforme sobre $[2, 5]$.

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f : X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(c) Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \to \mathbb{R}$ si y solo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

(d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada* o es *acotada en d_∞*.

5. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(f'_n)_{n\geq 1}$ en $[0, 1]$, con $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$.

6. Sea X un espacio métrico y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y $(g_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de funciones de X a $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente sobre X a f y a g, respectivamente.

Probar que:

(a) La sucesión $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Si ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a fg.

7. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas que converge uniformemente a una función $f : X \to \mathbb{R}$. Estudiar la continuidad uniforme de f.

8. Sea $(f_n)_{n\geq 1} : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones derivables que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Probar que si existe $c > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq c$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua.

9. Sea X un espacio métrico y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente en X.

(a) La función suma $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ es continua en X.

(b) Si $X = [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

10. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de escalares (reales o complejos) tal que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente, entonces las dos series de funciones

$$\sum_{n\geq 1} a_n \cos nx \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$$

convergen absoluta y uniformente en $\mathbb{R}$ a funciones continuas.

11. Probar que:

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

y la serie converge absoluta y uniformente en todo intervalo acotado. ¿Qué sucede en $\mathbb{R}$?

(b) La función $f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ está bien definida en $\mathbb{R}$ y es continua.

12. Sea $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

(a) Calcular el límite puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y probar que la convergencia es uniforme sobre $\mathbb{R}$

(b) Probar que la serie de término general f_n converge uniformemente en cualquier intervalo de la forma de $[a, +\infty)$ pero no en $(0, +\infty)$.
