

Leandro Carreira

669/18

16. Probar:

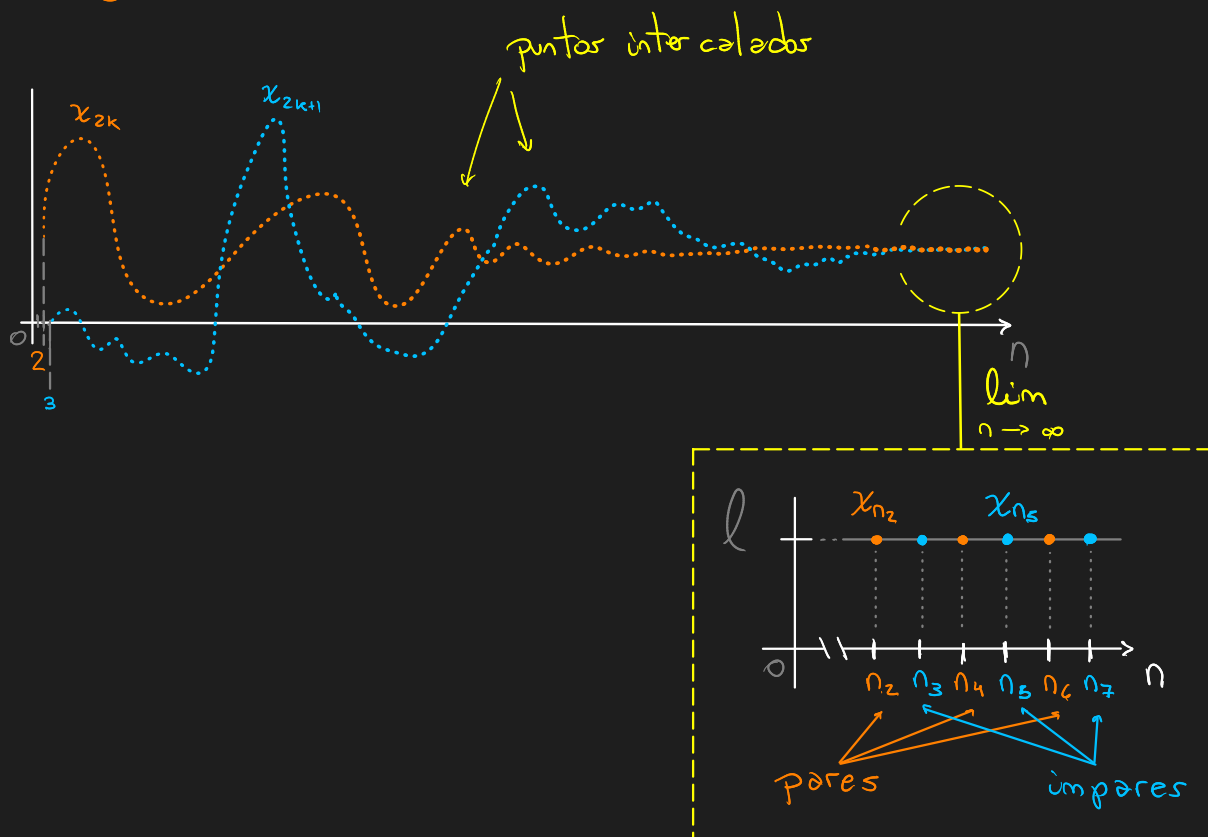
- (a) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.
- (b) Si $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

a) Asumo $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} < \infty$, pues sino es falso.

$n_1 = g(k) = 2k \leftarrow$ naturales pares desde 2

$n_2 = h(k) = 2k+1 \leftarrow$ naturales impares desde 3
 $= g(k) + 1$

Indes



• Intuitivamente,

$$\text{Si } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}$$

no sólo nos dice que tomando índices pares e impares resulta en el mismo límite,

sino que tomando todas los índices pares y (casi) todas los impares se obtiene el mismo límite,

con lo que uno esperaría que intercalando elementos de de cada sucesión obtendríamos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con límite siendo el mismo que el de las sub sucesiones,

pues puedo escribir \mathbb{N} como

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{ \mathbb{N} \text{ par} \} \cup \{ \mathbb{N} \text{ impar} \} \\ &= \overbrace{\{ 2k : k \in \mathbb{N} \}} \cup \overbrace{\{ 2k+1 : k \in \mathbb{N} \} \cup \{ 1 \}} \end{aligned}$$

↑

Formalmente

Sea $\varepsilon > 0$,

(Para impares)

$$\textcircled{I} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad / \quad | \overbrace{x_n}^{x_{2k+1}} - l | < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1, \quad n = 2k_1 + 1 \quad k_1 \in \mathbb{N}$$

y además (pares)

$$\textcircled{II} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad / \quad | \overbrace{x_n}^{x_{2k}} - l | < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2, \quad n = 2k_2 \quad k_2 \in \mathbb{N}$$

No me interesa que quede afuera, pues solo me interesa el límite.

Por claridad, reescribo índices en función de k

$$\textcircled{I} \quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \quad / \quad |x_{2k+1} - l| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_1$$

y además (pares)

$$\textcircled{II} \quad \exists k_2 \in \mathbb{N} \quad / \quad |x_{2k} - l| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_2$$

q.v.g

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad |x_k - l| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

\Rightarrow si tomo

$$k_0 = \max \{ k_1, k_2 \}$$

valen tanto \textcircled{I} como \textcircled{II} , siendo

vale para todos los subíndices impares

$$\textcircled{I} \quad |x_{2k+1} - l| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

vale para todos los subíndices pares

$$\textcircled{II} \quad |x_{2k} - l| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

Juntando \textcircled{I} y \textcircled{II} obteniendo $n = k$ con $k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad |x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$



(b) Si $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Reescribo datos

Sea $\varepsilon > 0$

(x_{2k}) converge $\Rightarrow |x_{2k} - l_2| < \varepsilon$ \Rightarrow partir de un $n_1 = 2k$

(x_{2k+1}) converge $\Rightarrow |x_{2k+1} - l_1| < \varepsilon$ \Rightarrow partir de un $n_2 = 2k+1$

(x_{3k}) converge $\Rightarrow |x_{3k} - l_3| < \varepsilon$ \Rightarrow partir de un $n_3 = 3k$

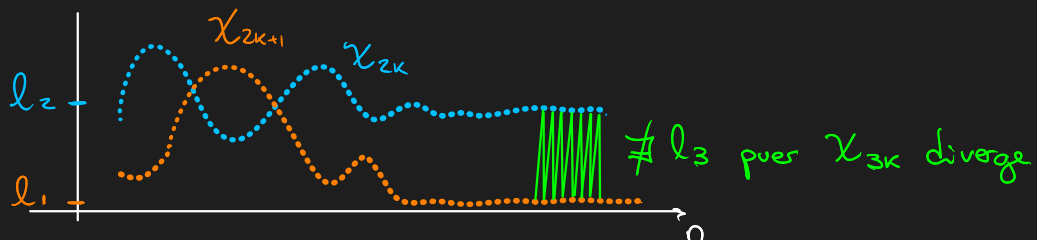
Intuitivamente

- $2k$: pares
- $2k+1$: impares
- $3k$: múlt de 3 : impar, par, impar, par, ...

• Aquí puedo ver que (x_{3k}) está compuesto de los elementos de (x_{2k+1}) y de (x_{2k}) intercalados.

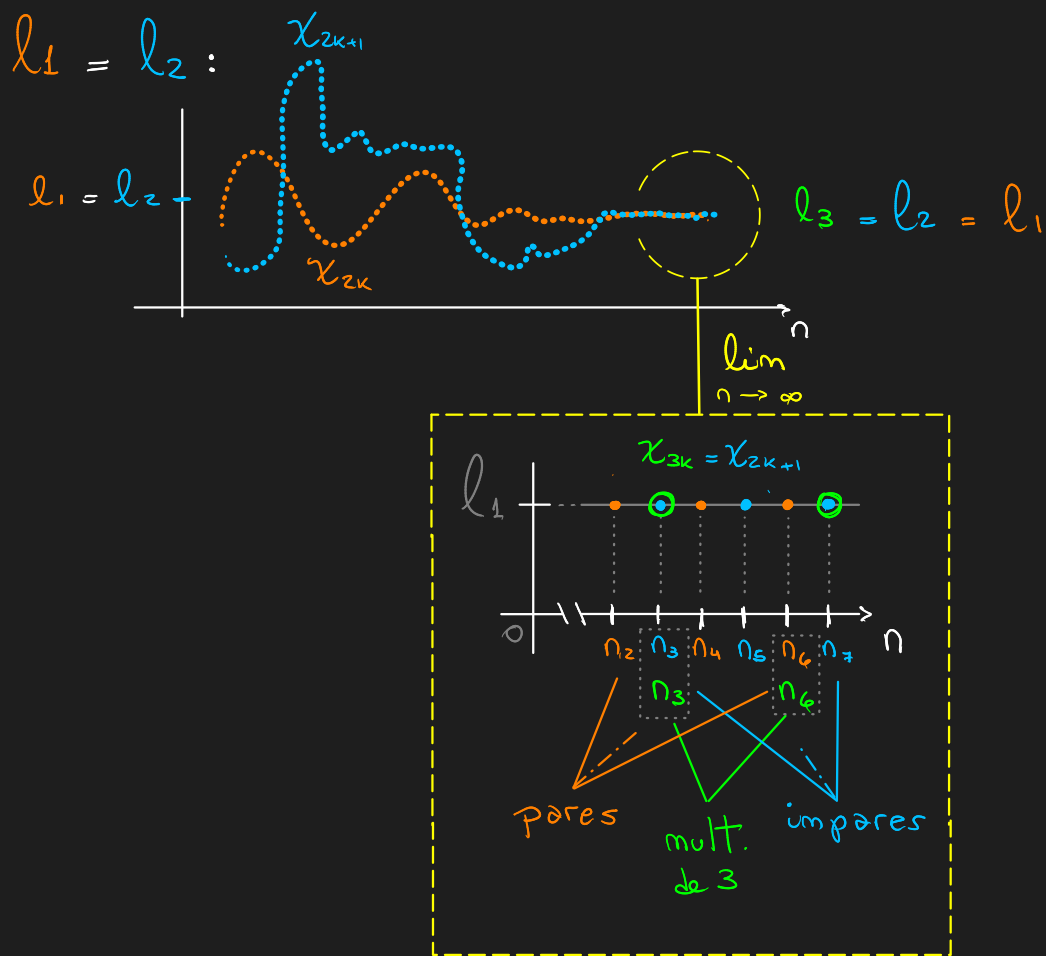
• Si l_1 fuera distinto a $l_2 \Rightarrow l_3$ no podría converger.

$l_1 \neq l_2$:



$\therefore l_1$ debe ser igual a l_2

en cuyo caso, l_3 también deberá ser el mismo:



Formalmente

Debo probar que

$$\text{Si: } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} \neq \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} \stackrel{?}{\Rightarrow} (x_{3k}) \text{ diverge}$$

Teniendo esto, puedo usar (a) para afirmar que

$$\text{Si: } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} \Rightarrow (x_n) \text{ converge}$$

y como converge, todas las subsecuencias de (x_n) deberán converger al mismo límite, incluída (x_{3k})

Supongo $l_1 \neq l_2$

$$|x_{2k} - l_2| < \varepsilon$$

$$|x_{2k+1} - l_1| < \varepsilon$$

Armo sub sucesiones de cada una, tomando sólo los subíndices múltiplos de 3

$$|x_{6k} - l_2| < \varepsilon \leftarrow \text{debe converger a } l_2 \text{ por ser sub suc. de } x_{2k}$$

$$|x_{3(2k+1)} - l_1| = |x_{6k+3} - l_1| < \varepsilon$$

↑
debe converger a l_1 por ser sub suc. de x_{2k+1}

∴ conseguí 2 sub sucesiones de (x_{3k}) que convergen a distintos valores ($l_1 \neq l_2$)

∴ (x_{3k}) diverge.

Abso! pues (x_{3k}) converge (es dato)

$$\therefore l_1 = l_2$$

y por el mismo razonamiento que arriba

$$l_1 = l_2 = l_3$$

Además, como $l_1 = l_2$, por (2), (x_n) converge.

