Nico.

Lunes 12 Abril.

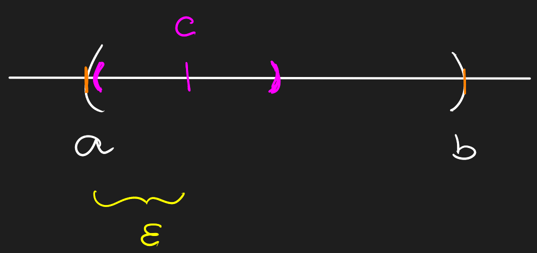
Espacios Métricos 1

Ejemplo :

$(\mathbb{R}, d)$

$d(x,y) = |y - x|$

- (a,b) es abierto :



Sea $\varepsilon = \min \{ \underbrace{c-a}_{d(c,a)} , \underbrace{b-c}_{d(c,b)} \}$

Veamos que

$$\underbrace{B(\overset{\text{centro, radio}}{c, \varepsilon})}_{B_\varepsilon(c)} \subseteq (a,b)$$

- $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$:

$y \in B(c, \varepsilon) \Leftrightarrow$

$y \in B(c,\varepsilon)$ sii $d(y,c) < \varepsilon$ sii
$|y-c| < \varepsilon$ sii $-\varepsilon < y-c < \varepsilon$
sii $y \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ✓

Hay que ver que

$$c - \varepsilon \geq a$$

$$c + \varepsilon \leq b$$

Sé que

$$\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$$

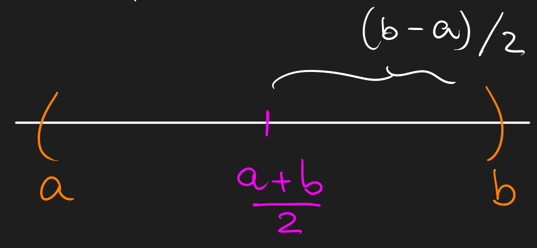
$$\Rightarrow \varepsilon \leq c-a \iff c - \varepsilon \geq a \quad ✓$$

y $\varepsilon \leq b - c \iff c + \varepsilon \leq b \quad ✓$

$\therefore$ (a,b) es abierto ∎

Obs:

Veamos que (a,b) es una bola:



$$(a,b) \underset{ej}{=} B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

$\Rightarrow (a,b)$ es abierto (pues es una bola abierta)

interior

• $(a,b]^\circ = (a,b)$

$\supseteq)$ $\forall c \in (a,b)$, vimos que

$\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; B(c,\varepsilon) \subseteq (a,b) \subseteq (a,b]$ ✓

Otra forma

(a,b) es abierto

$\subseteq (a,b]$

$\Rightarrow (a,b) \subseteq (a,b]^\circ$

Uso que:

Si U es abierto y $U \subseteq X$

$\Rightarrow U \subseteq X^\circ$

Veamos $\subseteq)$ $b \overset{?}{\notin} (a,b]^\circ$

i.e. $(\nexists\, \varepsilon > 0) \;/\; B(b,\varepsilon) \subseteq (a,b]$

en efecto

$$b+\frac{\varepsilon}{2} \in B(b,\varepsilon)$$

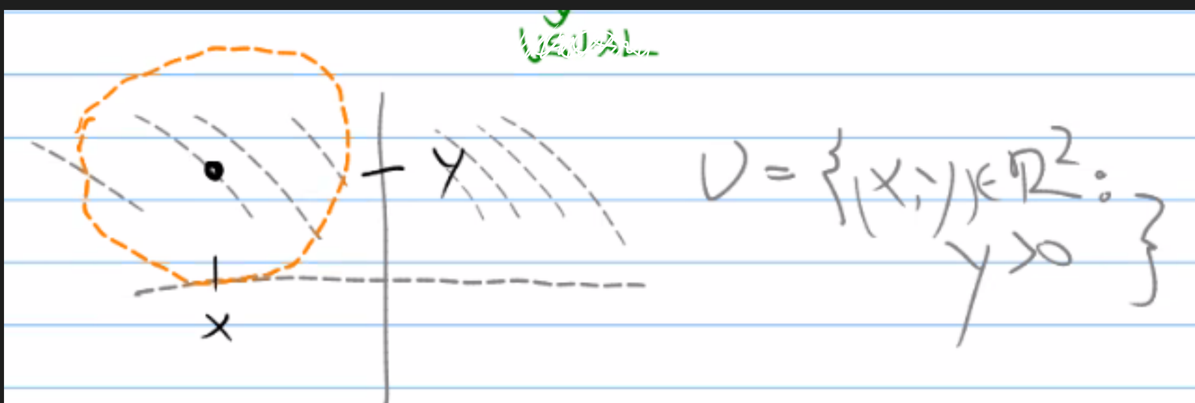
$$\notin (a,b] \quad ✓$$

$$\therefore \quad (a,b]^{\circ} = (a,b)$$

Ejemplo:

en $(\mathbb{R}^2, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usual}}}{d_2})$

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$



SEA $(X;Y)\in U$. TOMEMOS $\varepsilon = Y$;
VEAMOS QUE $B((X;Y),\varepsilon) \subseteq U$.

SEA (Z,W) /

$$\varepsilon > d((z,w),(x,y)) =$$

q.v.q.

$w > 0$

$$= \sqrt{(z-x)^2 + (w-y)^2}$$

$$\geq \sqrt{(w-y)^2}$$

$$= |w - y|$$

$$\Rightarrow \quad -y < w - y < y$$

$$\Rightarrow \quad w > 0$$

$\boxed{\text{Th}}$

Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, d_∞ ¿es U abierto?

Sí! veamoslo:

Sea $(x,y) \in U$,

elijo $\varepsilon = y$

$$y = \varepsilon > d\left((x,y),(z,w)\right)$$

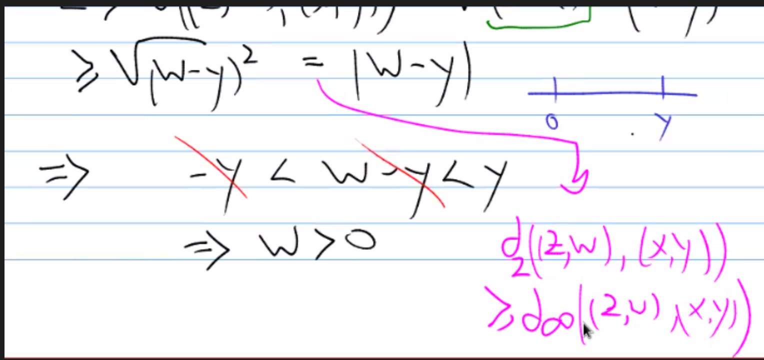
$$= \max\{|x-z|, |y-w|\}$$

$$\geq |y - w|$$

misma desig. de antes

$\rightsquigarrow w \geq 0$

$\boxtimes$


$$\geq \sqrt{(w-y)^2} = |w-y|$$
$$\Rightarrow \cancel{-y} < w - \cancel{y} < y$$
$$\Rightarrow w > 0$$
$$d_2((z,w),(x,y)) \geq d_\infty((z,w),(x,y))$$

$\leftarrow$ nota que

Ej 3 :

Concluir que $(\forall\, U \subseteq \mathbb{R}^2)$

U es abierto para d_2 $\iff$

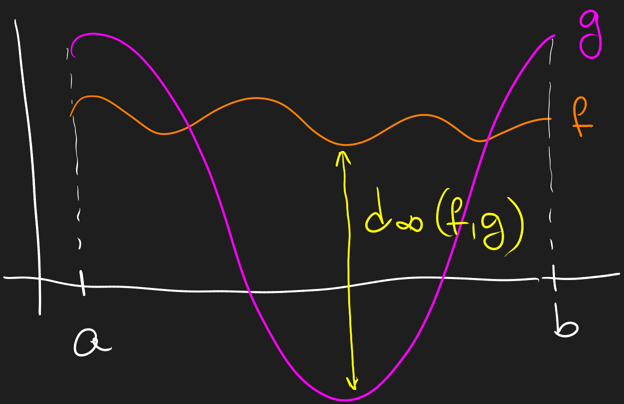
U es abierto para d_∞ $\iff$

U es abierto para d_1

Ejemplo :

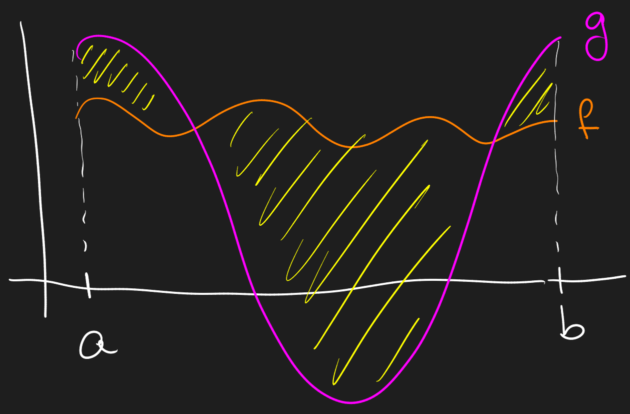
En $E = C([0,1])$ hay distintas métricas

• d_∞ :



$$d_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

- d_1 :



$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$$

Sea $f \in E$,

$f \equiv 0$

sea $d > 0$

Bola wrt d_∞

$f \in B^\infty(f,d)$ → es un abierto de (E, d_∞)

(las bolas son siempre abiertas)

↓

No es abierto de (E, d_1)

Más aún, veamos que

interior wrt d_1.

$$f \notin \left(B_\infty(f,d)\right)^\circ$$

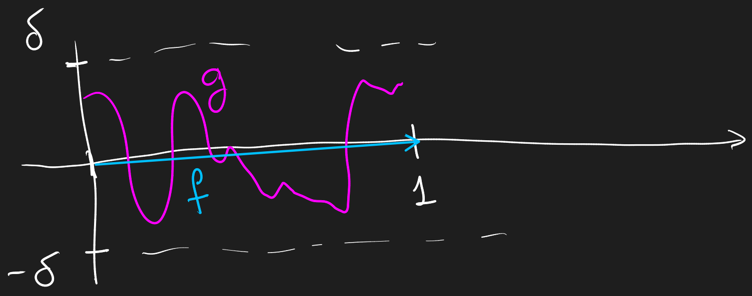
q.v.q

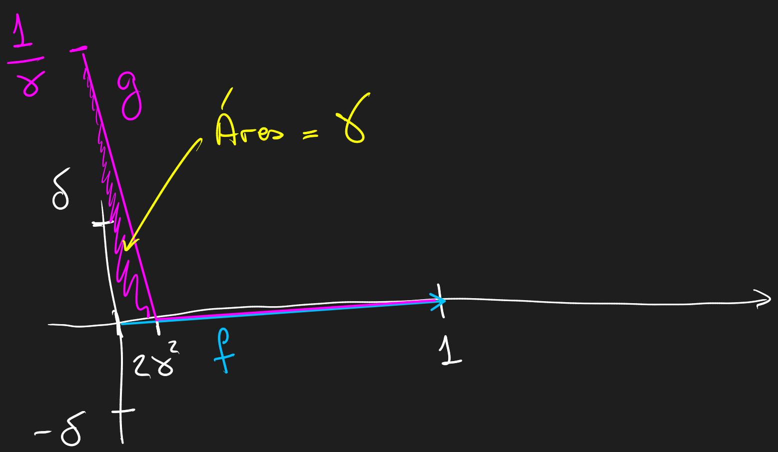
$$\nexists\, \varepsilon > 0 \mid B^1(f,\varepsilon) \subseteq B^\infty(f,d)$$

equivalen, que

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists\, g \in E \,/$

$$g \in B^1(f, \varepsilon) \wedge g \notin B^\infty(f, g)$$





• $d_1(f, g) = \int_0^1 |g(x)|\, dx$

$=$ Area del Δ

$= 2\gamma^2 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{2}$

$= \gamma < \varepsilon$

quiero

- $d_1(g, f) = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \gamma < \varepsilon$

QUIERO

- $d_\infty(g, f) = \max_{x\in[0,1]} |g(x)| = 1/\gamma \geq \delta$

QUIERO

$\iff 1/\delta \geq \gamma$

$\rightsquigarrow$ 1

$\rightsquigarrow$ Puedo tomar

$$\gamma = \min\left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

Encontré pto de B^1 que no está en B^∞

$\boxtimes$

Para Pensar

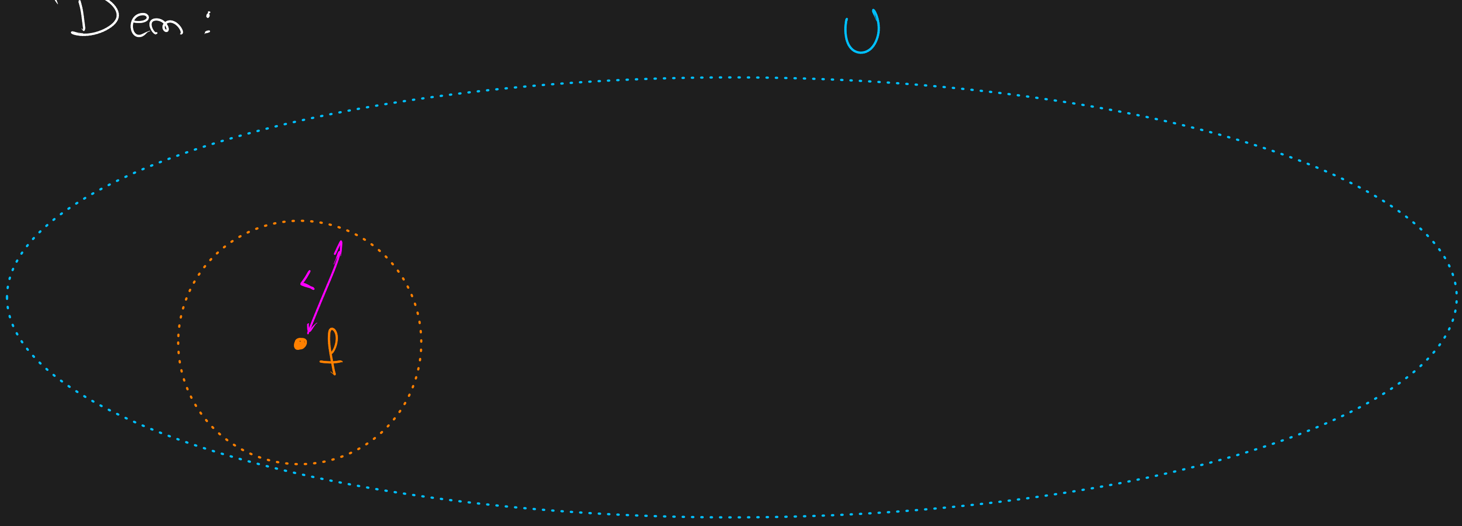
Calcular $B_\infty(f, g)^\circ \leftarrow$ wrt d_1

Prop:

Todo abierto de (E, d_1)

es abierto de (E, d_∞)

Dem:



Sea U AB c.r.a. d_1. Sea $f \in U$

$\left(\text{Qvq } \left(\exists\, \varepsilon > 0\right)\ B_\infty(f,\varepsilon) \subseteq U\right)$

Sé que

$$\exists\, r > 0 \,/\, B_1(f,r) \subseteq U$$

$\rightsquigarrow$ BVQ

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B_\infty(f,\varepsilon) \subseteq B_1(f,r)$$

Sea

$$g \in B_\infty(f,\varepsilon)$$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq d_\infty(f,g)}\, dx$$

$$\leq d_\infty(f,g) \cdot \int_0^1 1 \, dx$$

$$d_1(f,g) \leqslant \underbrace{d_\infty(f,g)}_{< \varepsilon \text{ pues } g \in B^\infty(f,\varepsilon)}$$

$\rightsquigarrow$ Tomo $\varepsilon =$

$\rightsquigarrow$ TOMO $\varepsilon = r/2$, y así

$$d_1(f,g) \leq r/2 < \varepsilon$$