EJERCICIO: SEA $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. SUP QUE

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \qquad (\Rightarrow a \geq 0).$$

PROBAR QUE $\sqrt{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{a}$.

Dem

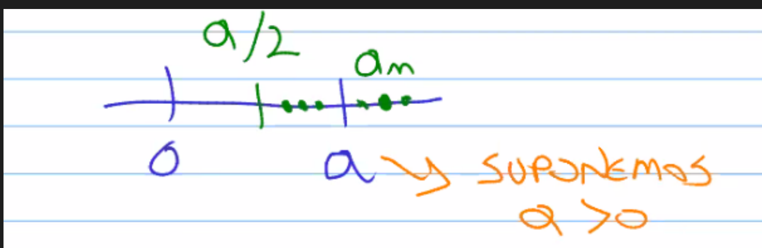
$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right) \frac{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}$$

Sup $\neq 0$ $\circledast$

$$= (a_n - a) \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}$$

acotado?

Siempre que no sea cero, estará acotado.



Como $a_n \to \alpha$ y $a \geq 0$,

$\exists\, n_0 \,/\, a_n > \frac{a}{2} \quad \forall n \geq n_0$

(Tomé n_0 / $a_n \in \left(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right)$)

Sé

$$\sqrt{a_n} > \sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

pues $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{a} > \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) =: \delta$$

- en particular $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \neq 0$, y salvo el caso supuesto en $\circledast$

Así, de

$$(a_n - a) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}$$

tengo

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |a_n - a| \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$

$$\leq |a_n - a| \cdot \frac{1}{\delta}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} \quad \forall n \geq n_1$$

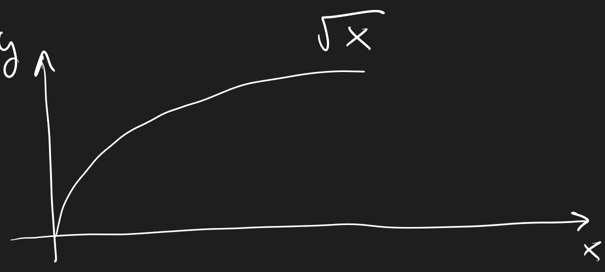
$\therefore$ si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{\delta} = \varepsilon$$

Falta el caso $a = 0$

Si $a = 0$,

dado ε tomo n_0 /



$a_n < \varepsilon^2$ si $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\uparrow$
$\varepsilon > 0$

$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon$

$\blacksquare$

Sub sucesiones

Idea:

Sea $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{100}, a_{101}, a_{102}, \dots$

Me quedo con algunos (infinitos) términos de forma estrictamente creciente.

Más formalmente

es lo mismo

$$(a_n) \subseteq \mathbb{R} \longleftrightarrow g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$a_n = g(n)$$

Dadas

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (sucesión)

y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente (elección de subíndices)

La composición $g \circ f$ es la subsucesión de g dada por f.

Ejemplo

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = g(n)$$

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(k) = 2k$$

Tenemos la subsuc.

$$g \circ f(k) = g(2k)$$

$$= (-1)^{2k}\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$$

$$= \underbrace{a_{2k}}_{f(k)}$$

- También tenemos la subsuc.

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k+1} \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$$

$\uparrow$

k-ésimo término de la subsuc.

(2k-1)-ésimo " " " sucesión original

$$= -\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} -1$$

Prop:

- Sea $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ sucesión.
- Sea $(\underbrace{a_{n_k}}_{f(k)}) \subseteq \mathbb{R}$ subsuc. de (a_n)

que converge a $l \in \mathbb{R}$

Si (a_n) converge $\Rightarrow$ Debe converger a l

De otra forma

Si (a_n) converge a l $\Rightarrow$ $\forall (a_{n_k})$ subsuc,

(a_{n_k}) converge a l

Ejemplo

Del ejemplo de antes, como obtuve 2 sucesiones con $l_1 \neq l_2$ $\Rightarrow$ la suc. orig. <u>no</u> converge: diverge.

Dem:

Sea $L = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

qvq $l \stackrel{?}{=} L$ $\forall (a_{n_k})$

Sea $\varepsilon > 0$,

$$|l - L| = |l - a_{n_k} + a_{n_k} - L|$$
$$\stackrel{DT.}{\leq} |l - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L|$$

- Tomo k_0 / $|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall k \geq k_0$
- Tomo n_0 / $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$

Tomo k_1 / $n_k \geq n_0$ $\forall k \geq k_1$

Tomo $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$

Así, si $k \geq k_2$,

$$|l - L| < \underbrace{|l - a_{n_k}|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{por } k \geq k_0}} + \underbrace{|a_{n_k} - L|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{por } n_k \leq n_0}}$$

$$< \varepsilon$$

$\blacksquare$