Sucesiones y Series de Funciones I

Dado X espacio métrico,

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{continuas y acotadas sobre } X\}$$

У

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \text{acotadas sobre } X\}$$

ambos con $||f||_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposición

 $(C_b(X), \|\cdot\|_{\infty})$ y $(B(X), \|\cdot\|_{\infty})$ son espacios normados completos, es decir Banach.

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach. Sucesión de les Sumer Parciales

Sez E esp. de Barach

 $A (X^{U})^{U} \subset E$ nus encezion

Dehimnos

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

["N-ésima suma percial de (Xn)"

ರಾಗ

 $(S_N)_N \subset E$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge cuando existe el límite $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n$. A ese límite, que es un elemento de E, lo llamamos $\sum_{n=1}^\infty x_n$.

Noter que es creciente si los Xn son 70



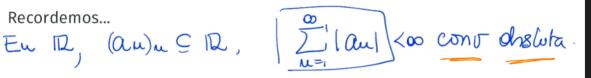
Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Esto equivale a lo siguiente:

Recordemos...



Definición

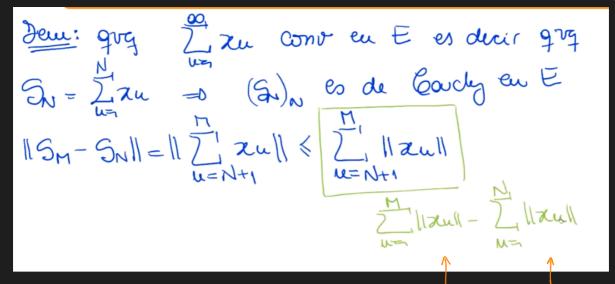
Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < +\infty$$

Serie de números reales

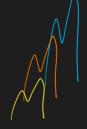
Proposicion

Sea E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, entonces converge.

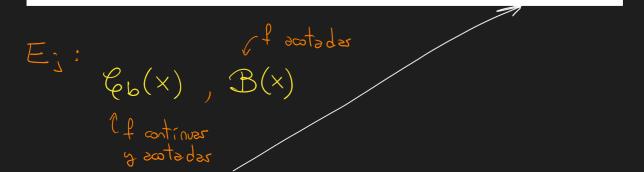


Coverge Absolutamente

Series de Funciones



Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.



Pers codo N, tenemos la función:

"Suma Parcial"

$$SN(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntual o uniformemente) en X si la sucesión de funciones $(S_N)_N$ converge (puntual o uniformemente) en X.

Sezn:

- · Continuar y Acotadar
- · Acotadar
- · Estande himider en un El compacto

Criterio de Weierstrass $f_{u}: \times \longrightarrow \mathbb{R} \times \omega_{j}$.

Supongamos dado \underline{n} existe $c_n \ge 0$ tal que $|f_n(x)| \le c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en \mathbb{R} .

Dem:

stodor acotados!

· Notar que como todos los I n (x) { Cn

 \Rightarrow $f \cap \in \mathcal{B}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

L'especie de Barach de funcioner acotadas

· Noter además que

$$S_N = \sum_{n=1}^N f_n \leqslant \sum_{n=1}^N C_n$$

$$\Rightarrow S_{N} = \sum_{n=1}^{N} f_{n} \in \mathcal{D}(x)$$

Ahora, quq

$$(S_N)_N$$
 es de Cauchy en $(B(x), \|\cdot\|_{\infty})$

y de este especio, sé que

Convergencia en 11.11 => Convergencia uni forme
de funcion es

1) Como Ifn(x) | { Cn YxeX

$$\Rightarrow$$
 $\|f_n(x)\|_{\infty} \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• 5: miro

$$\|SH - SN\|_{\infty} = \|\sum_{n=N+1}^{M} f_n(x)\|_{\infty}$$
 $\leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n(x)\|_{\infty}$
 $\leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n(x)\|_{\infty}$
 $\leq \sum_{n=N+1}^{M} \|f_n(x)\|_{\infty}$

Como $\sum_{n=N+1}^{M} C_n$ Converge (en \mathbb{R})

 $= \sum_{n=N+1}^{M} C_n$ es de Cauchy

 $= \sum_{n=N+1}^{M} C_n$ es de Cauchy

 $= \sum_{n=N+1}^{M} C_n \leq N / N, M \geq N_0$
 $= \sum_{n=N+1}^{M} C_n \leq E$

A partir dun parto la cata

A partir de un panto la cota
se hace re chica? erto
ex cond. sobre lar f
que se da para que la suma converja?

$$\Rightarrow$$
 $(S_N)_N$ es de Caudhy en $B(x)$

donde
$$S_N = \sum_{n=1}^N f_n$$

$$\Rightarrow \leq_{N} \xrightarrow{N \Rightarrow \infty} f \in \mathcal{B}(x)$$

=>
$$\sum$$
 for converge uniformemorte a f $(\sum f_n) \Rightarrow f$

y además f er acotada

Falta mostrar Convergencia Absoluta

Pero ye fué hecho en @ resultando

$$\frac{M}{\sum_{n=N+1}^{M}} \left\| f_n(x) \right\|_{\infty} \leq \frac{M}{\sum_{n=N+1}^{M}} C_n < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^{M} \left| f_n(x) \right| < \infty$$

Converge absoluts mente.

Micro resumen:

Primero vimos que en un espacio de Banach, la norma infinito era exactamente la convergencia uniforme.

Luego vimos series y sucesiones de funciones, en el contexto de espacios de Banach donde vale la propiedad anterior.



