Leandro Carreira

669/18

16. Probar:

(a) Si $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

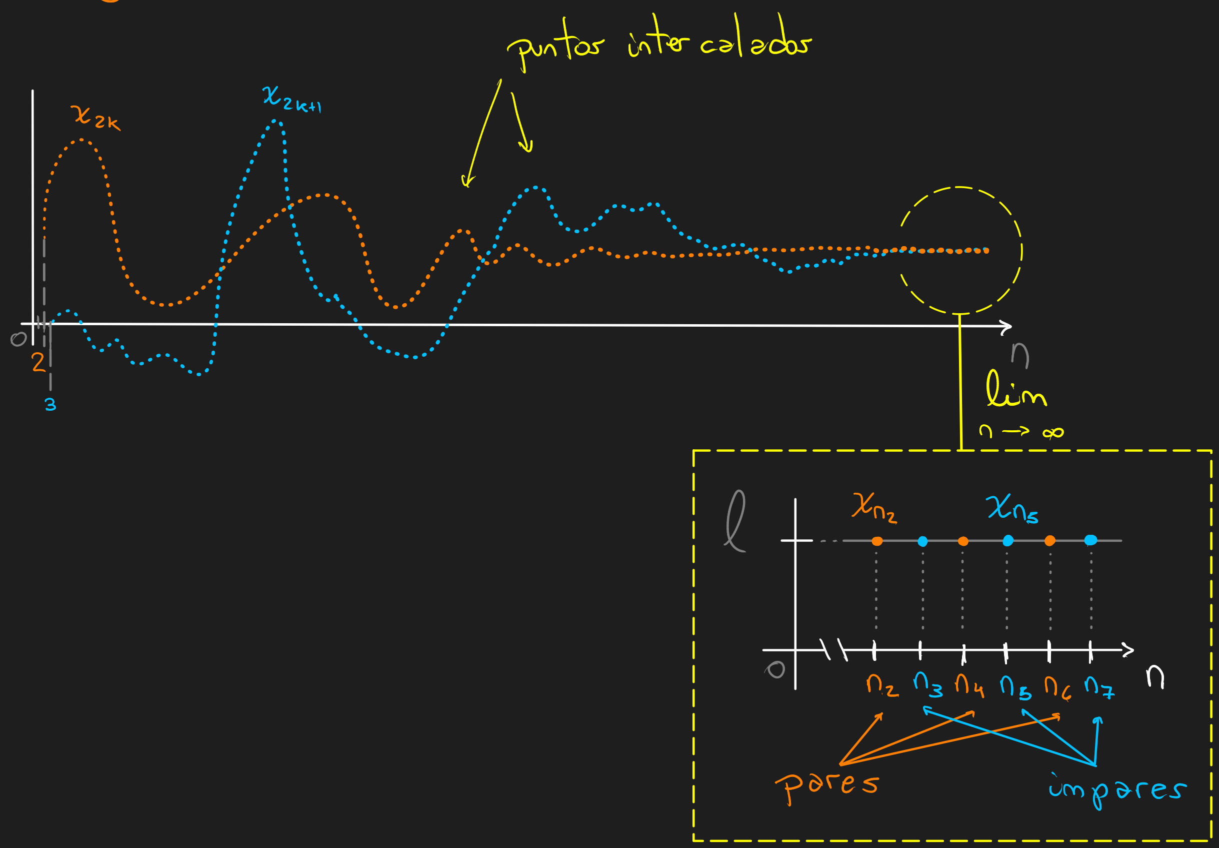
a) Asumo $\lim_{k\to\infty} x_{2k} < \infty$, pues sino es falso.

$n_1 = g(k) = 2k$ ← naturales pares desde 2

$n_2 = h(k) = 2k+1$ ← naturales impares desde 3

$= g(k)+1$

Idea



• Intuitivamente,

Si $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$

no sólo nos dice que tomando índices pares e impares resulta en el mismo límite,

sino que tomando todos los índices pares y (casi) todos los impares se obtiene el mismo límite,

con lo que uno esperaría que intercalando elementos de de cada sucesión obtendríamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite siendo el mismo que el de las subsucesiones,

pues puedo escribir $\mathbb{N}$ como

$$\mathbb{N} = \{\mathbb{N} \text{ pares}\} \cup \{\mathbb{N} \text{ impares}\}$$

$$= \{2k : k\in\mathbb{N}\} \cup \{2k+1 : k\in\mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

No me interesa que quede afuera, pues solo me interesa el límite.

Formalmente

Sea $\varepsilon > 0$,

(Para impares)

Ⓘ $\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, |\underbrace{x_n}_{x_{2k+1}} - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1, \; n = 2k_1+1, \; k_1 \in \mathbb{N}$

y además (pares)

Ⓘⓘ $\exists n_2 \in \mathbb{N} \,/\, |\underbrace{x_n}_{x_{2k}} - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2, \; n = 2k_2, \; k_2 \in \mathbb{N}$

Por claridad, reescribo índices en función de k

I $\quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \,/\, |x_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_1$

y además (pares)

II $\quad \exists k_2 \in \mathbb{N} \,/\, |x_{2k} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_2$

qvq

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \,/\, |x_k - \ell| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

$\Rightarrow$ si tomo

$$k_0 = \max\{k_1, k_2\}$$

valen tanto I como II, siendo

vale para todos los subíndices impares

I $\quad |x_{2k+1} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

vale para todos los subíndices pares

II $\quad |x_{2k} - \ell| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

Juntando I y II obteniendo $n = k$ con $k \in \mathbb{N} \wedge k > 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\blacksquare$

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Reescribo datos

Sea $\varepsilon > 0$

(x_{2k}) converge $\Rightarrow |x_{2k} - l_2| < \varepsilon$ a partir de un $n_1 = 2k$

(x_{2k+1}) converge $\Rightarrow |x_{2k+1} - l_1| < \varepsilon$ a partir de un $n_2 = 2k+1$

(x_{3k}) converge $\Rightarrow |x_{3k} - l_3| < \varepsilon$ a partir de un $n_3 = 3k$

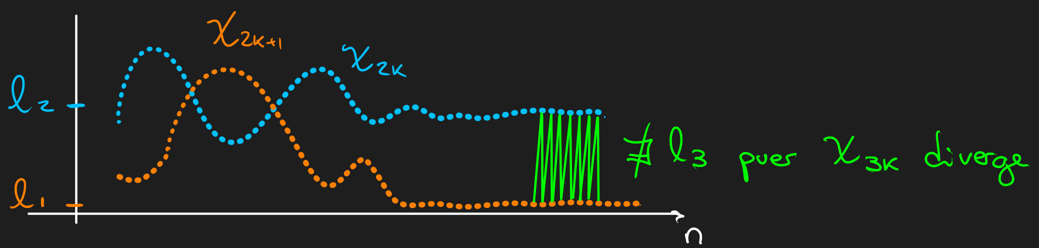
Intuitivamente

- $2k$: pares
- $2k+1$: impares
- $3k$: mult de 3 : impar, par, impar, par, ...

- Aquí puedo ver que (x_{3k}) está compuesto de los elementos de (x_{2k+1}) y de (x_{2k}) intercalados.

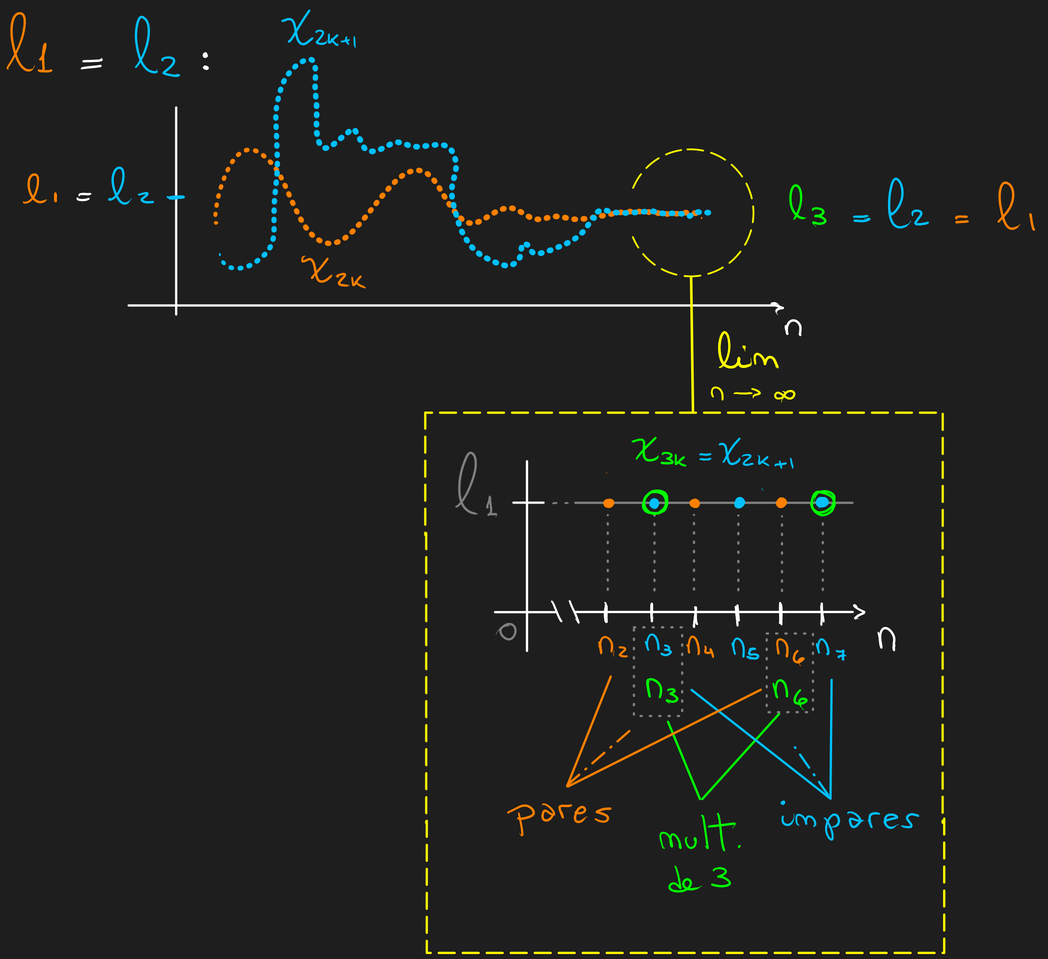
- Si l_1 fuera distinto a $l_2 \Rightarrow l_3$ no podría converger.

$l_1 \neq l_2$:



$\therefore$ l_1 debe ser igual a l_2

en cuyo caso, l_3 también deberá ser el mismo:



Formalmente

Debo probar que

$$\text{si } \lim_{k\to+\infty} x_{2k} \neq \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} \overset{?}{\Rightarrow} (x_{3k}) \text{ diverge}$$

Teniendo esto, puedo usar (a) para afirmar que

$$\text{si } \lim_{k\to+\infty} x_{2k} = \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} \Rightarrow (x_n) \text{ converge}$$

y como converge, todas las subsucesiones de (x_n) deberán converger al mismo límite, incluída (x_{3k})

Supongo $\ell_1 \neq \ell_2$

$$|x_{2k} - \ell_2| < \varepsilon$$

$$|x_{2k+1} - \ell_1| < \varepsilon$$

Armo subsuciones de cada una, tomando sólo los subíndices múltiplos de 3

$$|x_{6k} - \ell_2| < \varepsilon$$ ← debe converger a ℓ_2 por ser subsuc. de x_{2k}

$$|x_{3(2k+1)} - \ell_1| = |x_{6k+3} - \ell_1| < \varepsilon$$

↑ debe converger a ℓ_1 por ser subsuc. de x_{2k+1}

∴ conseguí 2 subsuciones de (x_{3k}) que convergen a distintos valores ($\ell_1 \neq \ell_2$)

∴ (x_{3k}) diverge.

Abs! pues (x_{3k}) converge (es dato)

∴ $\ell_1 = \ell_2$

y por el mismo razonamiento que arriba

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$$

Además, como $\ell_1 = \ell_2$, por (a), (x_n) converge.

$\blacksquare$