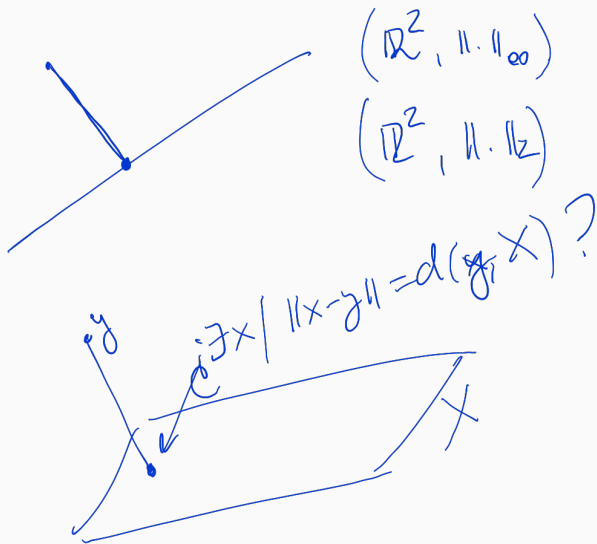


Análisis Avanzado - Espacios Normados 4

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

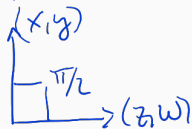


Definición

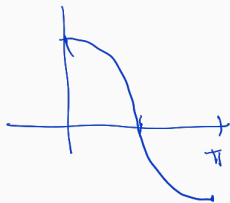
Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $x, y \in H$.

Decimos que x e y son **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$.

$$(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad \langle (x, y), (z, w) \rangle = xz + yw. = 0$$



$$\bullet \quad x, y \in H \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$$



$$\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right) \in [0, \pi]$$

$$\text{si } \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \angle(x, y) = \pi/2$$



Definición

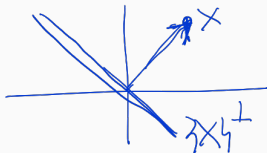
Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $x, y \in H$.
Decimos que x e y son **ortogonales** si $\langle x, y \rangle = 0$.

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Definimos el **complemento ortogonal de X** como

$$X^\perp = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in X\}.$$

$$X = \{x\} \quad \mathbb{R}^2$$



Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. X^\perp es un subespacio cerrado de H ;

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. X^\perp es un subespacio cerrado de H ;
2. $X \subseteq (X^\perp)^\perp$;

Proposición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un conjunto. Entonces:

1. X^\perp es un subespacio cerrado de H ;
2. $X \subseteq (X^\perp)^\perp$;

$$3. X \cap X^\perp = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \in X \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin X. \end{cases}$$

$\rightarrow x \in X \cap X^\perp \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
 $\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
 $\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Dem: 1) X^\perp es subesp. : prop del $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sup. $(y_n)_n \subseteq X^\perp$ / $y_n \rightarrow y$. q'q' $y \in X^\perp$.

q'q' dado $x \in X$, $\langle y, x \rangle = 0$

$$\langle y_n, x \rangle = 0 \quad \forall n$$

$$\langle y, x \rangle \xrightarrow{\text{lim}} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x \rangle = 0$$

Definición

Sean X, Y subespacios de un espacio vectorial V . Decimos que V es la suma directa de X e Y si

$$V = X + Y$$

y

$$X \cap Y = \{0\}.$$

En este caso, escribimos $V = X \oplus Y$.

→ todo $v \in V$, es $v = x + y$ con $x \in X$, $y \in Y$

Definición

Sean X, Y subespacios de un espacio vectorial V . Decimos que V es la suma directa de X e Y si

$$V = X + Y$$

y

$$X \cap Y = \{0\}.$$

En este caso, escribimos $V = X \oplus Y$.

¿Es cierto que si X es un subespacio de H entonces $H = X \oplus X^\perp$?

Res: No, vejam. X un subespacio denso de $H \rightarrow X^\perp = \{0\}$ (ejercicios)

Proposición

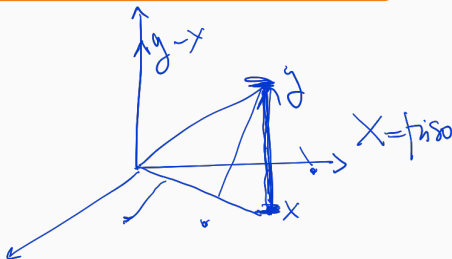
Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $X \subseteq H$ un subespacio. Fijemos $y \in H$ y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

1. $y - x \in X^\perp$;

2. $\|y - x\| \leq \|y - v\|$ para todo $v \in X$.

(2) $\|y - x\| = d(y, X)$

Reescribimos (2):



$$v \in X, \quad y-v = y-x - (v-x)$$

$$\left. \begin{aligned} \|y-x\| &\leq \|y-v\| \quad \forall v \in X \quad \text{es equiv.} \\ \|y-x\| &\leq \|y-x-z\| \quad \forall z \in X \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} v-x \in X \\ \longleftrightarrow v \end{array}$$

$$\text{llamamos } z = y-x$$

$$\|z\| \leq \|z-w\| \quad \forall w \in X \quad \text{es equiv.}$$

$$\|z\|^2 \leq \|z-w\|^2 = \langle z-w, z-w \rangle = \|z\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle z, w \rangle \quad \text{es equiv.}$$

$$2\langle z, w \rangle \leq \|w\|^2 \quad \forall w \in X$$

$$\textcircled{2} \stackrel{=a}{=} 2\langle y-x, w \rangle \leq \|w\|^2 \quad \forall w \in X \rightarrow (\tilde{z})$$

$$\textcircled{(1)} \Rightarrow \textcircled{(2)} : \text{demo: } (y-x) \in X^\perp \Rightarrow \langle y-x, w \rangle = 0 \quad \forall w \in X^\perp.$$

$$\boxed{(\tilde{2}) \Rightarrow (1)} \quad (\tilde{2}) \quad 2\langle y-x, u \rangle \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in X$$

$$u = tw, \quad t \in \mathbb{R} \quad w \in X$$

$$\Rightarrow (\tilde{2}) \quad 2t\langle y-x, w \rangle \leq t^2 \|w\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall w \in X.$$

$$\text{Tomamos } t = \delta \langle y-x, w \rangle \quad \delta > 0, \quad w \in X$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \overline{\langle y-x, w \rangle}^2 \leq \delta^2 \overline{\langle y-x, w \rangle}^2 \|w\|^2. \quad \forall \delta > 0, \quad \forall w \in X$$

$$\text{Si } y-x \notin X^\perp \quad \exists w_0 \in X \quad / \quad \langle y-x, w_0 \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow 2\delta \overline{\langle y-x, w_0 \rangle}^2 \leq \delta^2 \overline{\langle y-x, w_0 \rangle}^2 \|w_0\|^2 \quad \forall \delta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\delta} \leq \|w_0\|^2 \quad \forall \delta > 0 \quad \text{Abs!} \quad \Rightarrow y-x \in X^\perp \quad (1) \quad \checkmark$$

Definición

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $K \subseteq V$ se dice **convexo** si para todos $x, y \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se tiene

según x, y $\leftarrow (1-t)x + ty \in K.$



Definición

Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $K \subseteq V$ se dice **convexo** si para todos $x, y \in K$ y todo $t \in [0, 1]$ se tiene

$$(1 - t)x + ty \in K.$$

Proposición


Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno y $K \subseteq H$ un conjunto cerrado y convexo. Entonces, para cada $y \in H$ existe un único $x \in K$ tal que

$$\|y - x\| = \inf\{\|y - u\| : u \in K\} = d(y, K).$$

Hilbert 2

Dem: $r = d(y, K) = \inf \{ \|y - u\| : u \in K \} \geq 0$

Seguro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in K$ /

$$r^2 \leq \|y - u_n\|^2 \leq r^2 + \frac{1}{n}$$


Veamos $(u_n)_n \subseteq K$ es de Cauchy.

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|u_n - y - (u_m - y)\|^2$$

ley del paralelogramo

$$\begin{aligned} &= 2(\|u_n - y\|^2 + \|u_m - y\|^2) - \|u_n - y + u_m - y\|^2 \\ &\leq 2\left(r^2 + \frac{1}{n} + r^2 + \frac{1}{m}\right) - \|u_n - y + u_m - y\|^2 \\ &= 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \underbrace{4r^2 - \|u_n - y + u_m - y\|^2}_{\leq 0} \leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \checkmark \end{aligned}$$

$$\|u_n - y + u_m - y\|^2 = 4\left\|\frac{u_n - y + u_m - y}{2}\right\|^2 = 4\left\|\frac{u_n + u_m}{2} - y\right\|^2 \leq 4 \cdot r^2$$

$\Rightarrow \checkmark$

Como H Hilbert, $\exists x \in H / \|u - x\| \rightarrow 0$ en H y como K cerrado, $x \in K$.

$$\Rightarrow \|u - y\| \rightarrow \boxed{\|x - y\| = r}.$$

Para ver q es! sup q' $x, \tilde{x} \in K \wedge \|x - y\| = \|\tilde{x} - y\| = r$.

Como antes

$$\begin{aligned}\|x - \tilde{x}\|^2 &= \|x - y - (\tilde{x} - y)\|^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|\tilde{x} - y\|^2 - 4\|\frac{x + \tilde{x}}{2} - y\|^2) \\ &= 4r - 4\|\underbrace{\frac{x + \tilde{x}}{2}}_{\leq r} - y\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = 0 \\ &\Rightarrow x = \tilde{x} \quad \square\end{aligned}$$

Teorema

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces,

$$H = X \oplus X^\perp.$$

Dem: Si $y \in H \Rightarrow$ como X es subesp. cerrado
 $\rightarrow X$ es convexo y cerrado $\Rightarrow \exists! x \in X /$
 $\|y - x\| = d(y, X) \Rightarrow y - x \in X^\perp$
 $\Rightarrow y = \underbrace{y - x}_{\in X^\perp} + \underbrace{x}_{\in X}$

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos proyección ortogonal de y sobre X al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^\perp$.

Handwritten diagram illustrating the orthogonal decomposition of a vector y into a vector x in a subspace X and a vector z orthogonal to X . The equation $y \in H \Rightarrow y = x + z$ is shown. The vector x is circled and labeled with X below it. The vector z is labeled with X^\perp below it. A blue arrow points from the underlined text "proyección ortogonal de y sobre X " in the definition above to the circled x in the diagram.

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos **proyección ortogonal de y sobre X** al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^\perp$.

Notamos $P_X(y) = x$.

$$P_X: H \longrightarrow H$$

$$y \longmapsto x$$

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos **proyección ortogonal de y sobre X** al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^\perp$. Notamos $P_X(y) = x$.

Teorema

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces, para todo $y \in H$, existe un único $x \in X$ tal que $\|y - x\| = d(y, X)$.

Definición

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Dado $y \in H$, llamamos **proyección ortogonal de y sobre X** al único $x \in X$ tal que $y = x + z$ para algún $z \in X^\perp$. Notamos $P_X(y) = x$.

Teorema

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $X \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces, para todo $y \in H$, existe un único $x \in X$ tal que $\|y - x\| = d(y, X)$.

De hecho, $x = P_X(y)$ y por lo tanto

$$\|y - P_X(y)\| = d(y, X).$$