INTEGRAL DE LEBESGUE

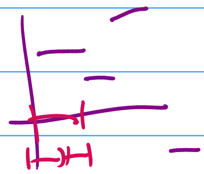
NOT: $I = [0,1]$

RECORDAR: $f : I \to \mathbb{R}$ ES SIMPLE SI

$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{E_i}$, CON $\alpha_i \in \mathbb{R}$,

$I = \biguplus_{i=1}^{m} E_i$, CON E_i MEDIBLE;

$$\tilde{I}(f) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(E_i)$$



RECORDAR: $f : I \to \mathbb{R}$ MEDIBLE Y ACOTADA.

$$\int_I f = \sup\{\tilde{I}(g) : g \le f,\ g \text{ SIMPLE}\}$$
$$= \inf\{\tilde{I}(g) : g \ge f,\ g \text{ SIMPLE}\}$$

PROP: f SIMPLE. ENTONCES $\int f = \tilde{I}(f)$

DEM: BVQ $\forall g$ SIMPLE, $g \le f$ SE TIENE

QUE $\tilde{I}(g) \le \tilde{I}(f)$.

f COMO ARRIBA, $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{D_j}$

CON $\biguplus_j D_j = I$, D_j MEDIBLES.

NOTAR QUE $E_i = \biguplus_j D_j \cap E_i$; LUEGO

$\chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j \cap E_i}$

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$. *

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$. *

$= \sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j} \cdot \chi_{E_i}$; ADEMÁS

$\mu(E_i) = \sum_j \mu(D_j \cap E_i)$.

COMO $g \leq f$, SI $D_j \cap E_i \neq \emptyset$

ENTONCES $\beta_j \leq \alpha_i$. ENTONCES

$\beta_j \, \mu(D_j \cap E_i) \leq \alpha_i \, \mu(D_j \cap E_i)$ SIEMPRE $(\forall i, j)$

ASÍ,

$I(f) = \sum_i \alpha_i \, \mu(E_i) = \sum_{i,j} \alpha_i \, \mu(E_i \cap D_j)$

$\geq \sum_{i,j} \beta_j \, \mu(E_i \cap D_j)$

$= \sum_j \beta_j \underbrace{\sum_i \mu(E_i \cap D_j)}_{= \mu(D_j)} = I(g)$

$\boxtimes$

(INTEGRABLE)

SEA $a>0$.

PROP: SEA $f: I \to \mathbb{R}$ MEDIBLE, ACOTADA.

SEA $g: \underbrace{[0,a]}_{= aI} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x/a)$

ENTONCES g ES MED Y ACOT, Y

$$\int_{a \cdot I} g = a \int_I f$$

DEM: g ACOT ✓

g MED: $\{g > b\} = a \underbrace{\{f > b\}}_{MED}$ MED

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$.

- SUP $f = \chi_E$, E MEDIBLE.

ENTONCES $g(x) = \chi_E(x/a)$

$\to g = \chi_{aE}$

ASÍ, $\int g = \int \chi_{aE} = m(aE)$

$\underset{EJ 9}{=} a\, m(E) = a \int \chi_E = a \int f$

- SUP $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, CON $I = \biguplus_{i=1}^{n} E_i$, E_i MEDIBLE

ASÍ, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{aE_i}$; LUEGO

$$\int g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, a \, \mu(E_i)$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = a \int f$$

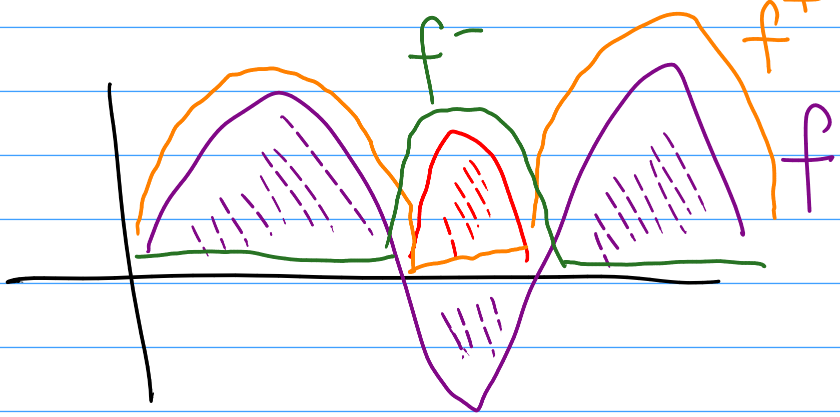
- f MED, ACOT.
    - $\exists f_n$ MEDIBLES Y SIMPLES / $f_n \rightrightarrows f$
    - $\int f_n \to \int f$

AFIRMO: SI $g_n(x) := f_n(x/a)$, ENTONCES $g_n \rightrightarrows g$ (EJERCICIO) Y g_n ES SIMPLE

LUEGO, $\int g = \lim \int \underbrace{g_n}_{\text{SIMPLES}} = \lim a \int f_n$

$$= a \lim \int f_n = a \int f \quad \blacksquare$$

EJERCICIO: f MEDIBLE Y ACOT. SI $\left|\int f\right| = \int |f|$, ENTONCES $f \geq 0$ AE ó $f \leq 0$ AE



DEM: $f = \underbrace{f \cdot \chi_{\{f \geq 0\}}}_{f^+} - \underbrace{(-f)\,\chi_{\{f<0\}}}_{f^-}$

- $f^+, f^- \geq 0$
- f^+, f^- MEDIBLES ($\chi_{\{f\geq 0\}}, \chi_{\{f<0\}}$ LO SON)
- $|f| = f^+ + f^-$

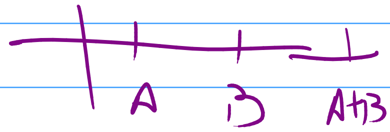
ASÍ,

- $\int |f| = \overbrace{\int f^+}^{=:A} + \overbrace{\int f^-}^{=:B}$
- $\int f = \int f^+ - \int f^-$

$f^+, f^- \geq 0 \Rightarrow A, B \geq 0$

LEMA: $A, B \geq 0$ TALES QUE

$$|A-B| = A+B$$



ENTONCES $A = 0$ ó $B = 0$ //

LUEGO, $\int |f| = \left|\int f\right|$ IMPLICA QUE

$$\int f^+ = 0 \quad \text{ó} \quad \int f^- = 0$$

EJER

$\Longleftrightarrow f^+ = 0$ AE $\qquad \Longleftrightarrow f^- = 0$ AE

11. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $E \subseteq [0,1]$ medible, se tiene que $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$. Probar que $f = g$ en casi todo punto.

$f \leq 0$ AE ó $f \geq 0$ AE