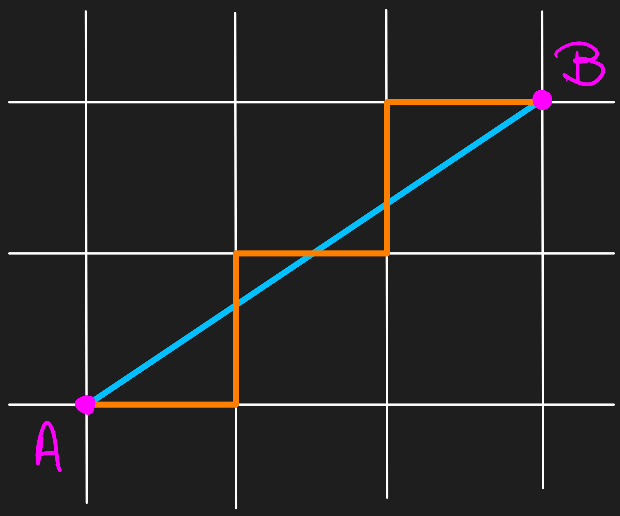
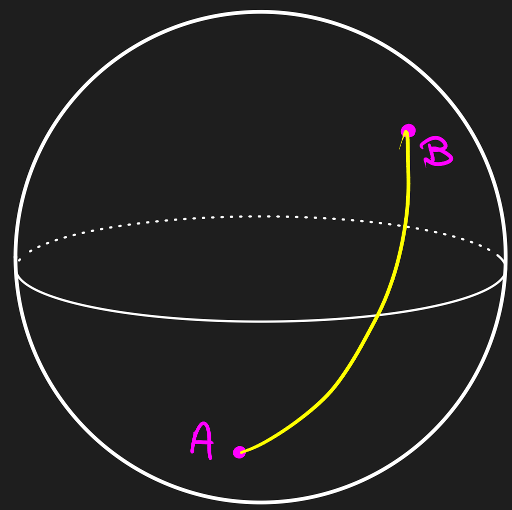
Vicky

Mercurio 7 Abr

○ ○ V

Espacios Métricos 1





Def.

Sea E un conjunto,

Una función

$$d : E \times E \to \mathbb{R}$$

se llama una métrica o una distancia sobre E

si cumple:

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in E$ ← se desprende de iii)

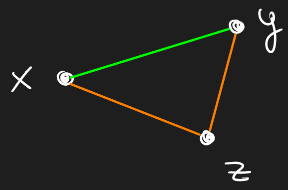
y

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in E$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in E$

Desigualdad Triangular



- Al par (E,d) lo llamaremos un Espacio Métrico

Distancias de $\mathbb{R}^n$

Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

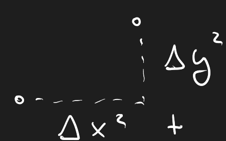
$y = (\qquad\qquad) \in \mathbb{R}^n$

Definimos la

Distancia Euclidea

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

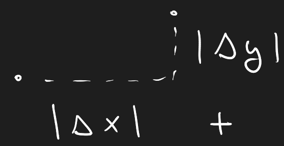
$$= \| x - y \|_2$$



Distancia 1

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$= \|x-y\|_1$$



Distancia Infinito

$$d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

$$= \|x-y\|$$

Dem: d_1 cumple (i) - (iii)

(i) $d_1(x,y)=0 \iff \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i-y_i|}_{\geq 0} = 0 \iff |x_i-y_i|=0 \quad \forall\, 1\le i\le n$

$\iff x=y$. ✓

(ii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i-x_i| = d_1(y,x)$ ✓ $\quad -(x_i-y_i)$

(iii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i-z_i+z_i-y_i|}_{\leq |x_i-z_i|+|z_i-y_i|}$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i-z_i| + |z_i-y_i|\right) = \underbrace{\sum |x_i-z_i|}_{d_1(x,z)} + \underbrace{\sum |z_i-y_i|}_{d_1(z,y)}$ ☒

5/13

18 / 38

Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

llamaremos $C([a,b])$

al conjunto de todas las funciones

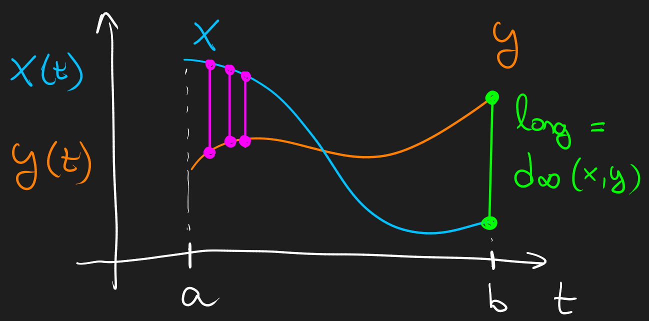
$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{continuas}$$

La métrica

funciones

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

Como usa módulo, está usando d_1 en cada punto?



Veamos que es una distancia :

i) $d(x,y) \overset{?}{\geq} 0$ y $d(x,y) = 0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} x = y$

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \geq 0 \quad ✓$$

$$d(x,y) = 0 \iff \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = 0$$

$$\iff |x(t) - y(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\iff \quad x(t) = y(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

✓

ii) $d(x,y) \overset{?}{=} d(y,x)$

$$d(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

$$= \sup |-1(y(t) - x(t))|$$

$$= \sup |-1| \cdot |y(t) - x(t)|$$

$$= \sup_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)|$$

$$= d(y,x)$$

iii) $t \in [a,b]$

$$\Rightarrow |x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

$$\leq |x(t) - z(t)| + |y(t) - z(t)|$$

$$\leq \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)| \qquad \leq \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)|$$

$$\Rightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z)$$

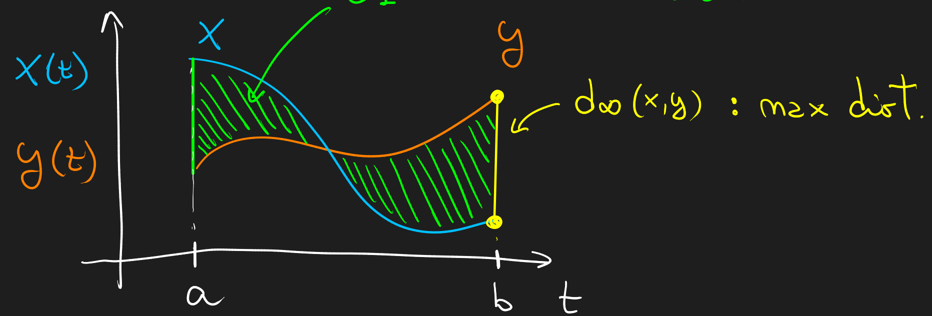
$$\Rightarrow d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(y,z)$$

$\blacksquare$

$C([a,b]), d_\infty$ es un espacio métrico

Otra métrica posible en $C([a,b])$ es

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$



Veamos que

Las 2 distancias anteriores (en $C([a,b])$)

son muy distintas.

Caso de analisis :

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

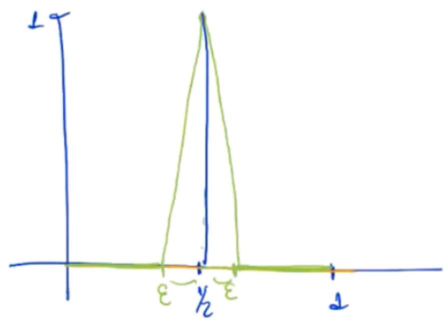
$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt.$$

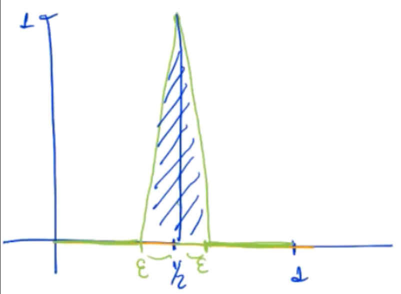
$[a,b] = [0,1]$

$x(t) \equiv 0 \quad \forall t.$

$y(t)$ $\qquad \varepsilon > 0$

$d_\infty(x,y) = 1$





y(t) $\quad \varepsilon > 0$

$$d_\infty(x,y) = 1$$

$$d_1(x,y) = \frac{2\varepsilon \cdot 1}{2} = \varepsilon$$

Puedo hacer d_1 tan chico como quiera (eligiendo bien $y(x)$) mientras que d_∞ es siempre 1.

Decimos que

$d_1(x,y)$ y d_∞ no son distancias equivalentes.

Pregunta 2:

Son independientes? en el sentido que no dan info de la otra distancia.

Distancia Discreta

Definición

Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en E como

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

(i) $\delta(x,y) = 0 \overset{\text{por def.}}{\Longleftrightarrow} x = y \qquad \delta(x,y) \in \{0,1\}$

(ii) $\delta(x,y) = 1 = \delta(y,x)$

$\downarrow$

$x \neq y$

(iii) $\underbrace{\delta(x,y)}_{\substack{=1 \\ (x \neq y)}} \overset{(?)}{\leq} \delta(x,z) + \delta(z,y)$

caso x caso.

- La usamos para probar propiedades

Topología en Espacios Métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}.$$

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

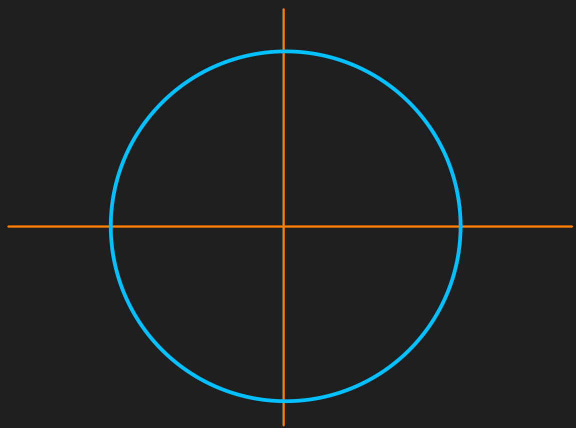
$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}.$$

Dibujemos las bolas de las distancias

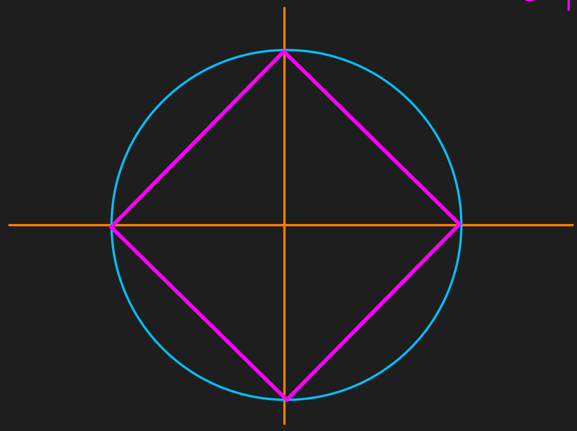
Para

- $E = \mathbb{R}^2$
- $x = (0,0)$
- $r = 1$

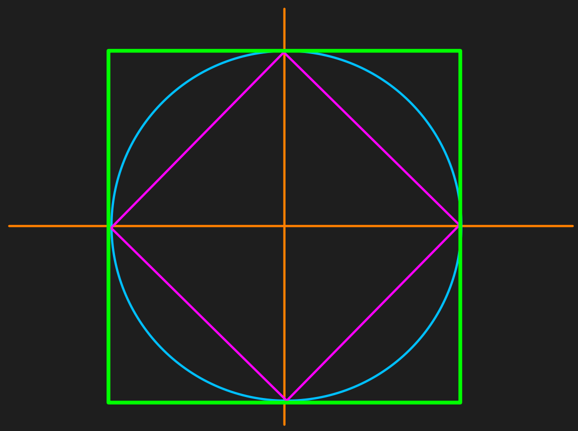
$$B^2((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_2((0,0),(x,y))}_{\sqrt{x^2+y^2}} < 1\}$$



$$B^1((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_1((0,0),(x,y))}_{=|x|+|y|} < 1\}$$



$$B^\infty((0,0),1) = \{(x,y) : \underbrace{d_\infty((0,0),(x,y))}_{\max\{|x|,|y|\}} < 1\}$$



Obs:

$$B^1 \subseteq B^2 \subseteq B^\infty$$

Ejercicio:

¿Cómo son las bolas para $C([a,b])$?

centro

$$B(x(t), r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$$

funciones

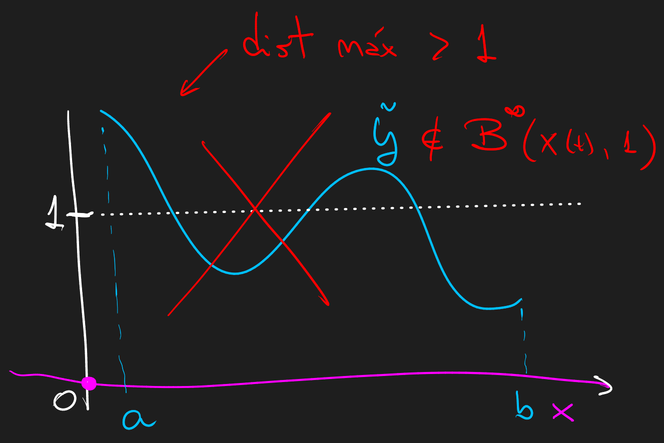
Para d_∞ en $C([a,b])$

Centro

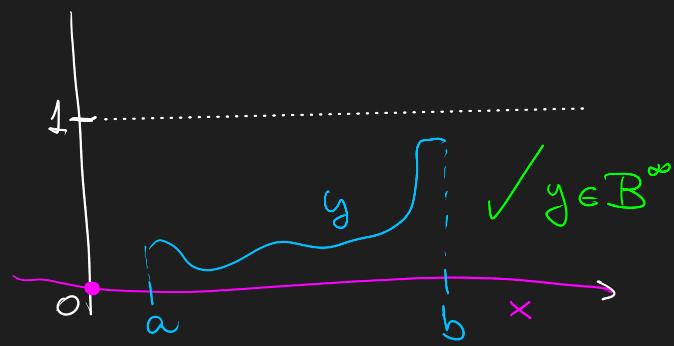
$x(t) = 0$

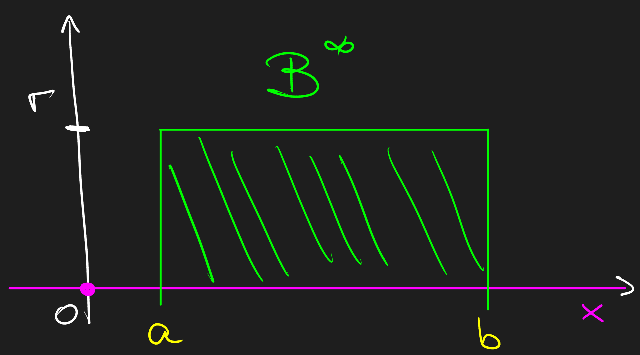
Radio

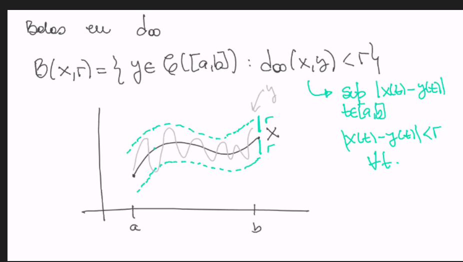
$r = 1$



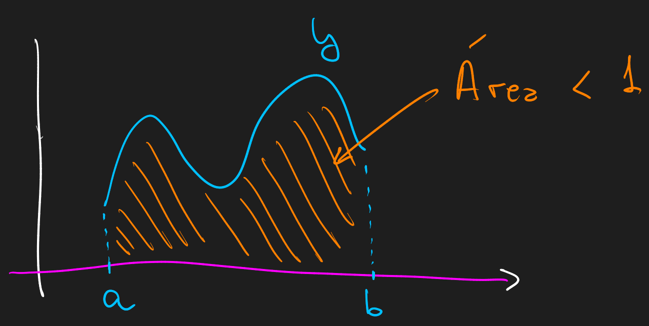
en B^∞ solo están las funciones con valores $< r$







Para $d_1 = \int_a^b |x - y| \, dt$

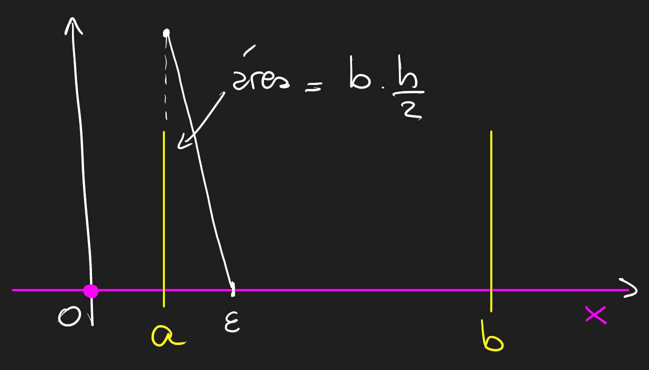


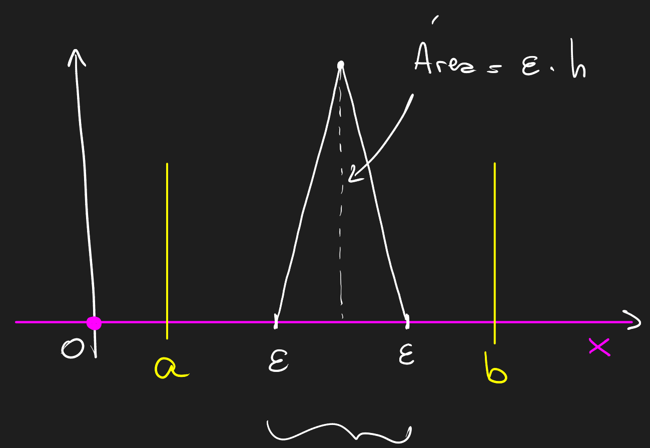
- Como el área de las funciones no puede ser > 1,

y como el intervalo en x es fijo : [a, b],

puedo encontrar infinitas funciones con y(t) tan grande

como yo quiera :



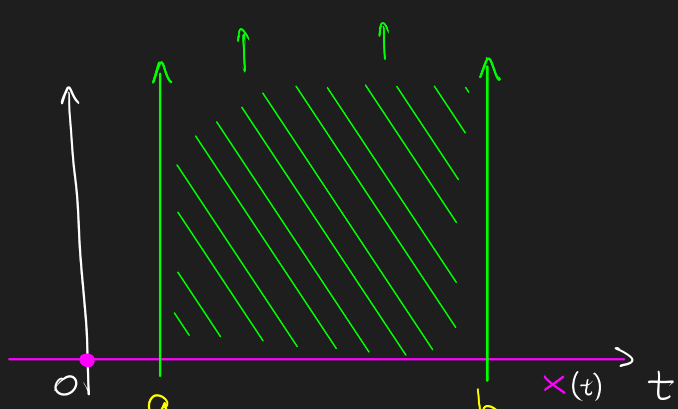


Si quiero $A < 1$

$$\Rightarrow \varepsilon . h < 1$$

$$\overset{h>0}{\Rightarrow} \varepsilon < \frac{1}{h}$$

B^1



Con esto vemos que puedo construir cualquier función de Área 1 con una altura particular, por lo que en este caso, la Bola no está acotada.

• E conj δ = discreta

$B(x,1) = \{y \in E : \delta(x,y) < 1\} = \{x\}$

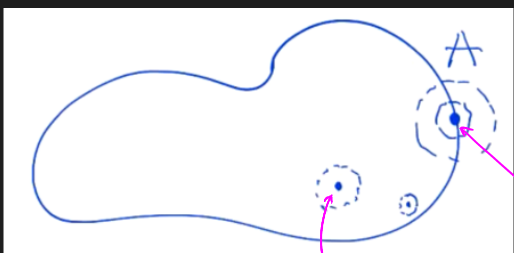
$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r \leq 1 \\ E & r > 1 \end{cases}$$

← Solo x

← Todo E

Def :

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r >$ o tal que $B(x,r) \subset A$.



no es interior

es interior

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

A interior

Obs

$$A^\circ \subseteq A$$

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^{\circ}$).

Observación

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r >$ o tal que $B(x, r) \subset G$.

$\iff G = G^{\circ} = \{x \in G : x \text{ es int}\}$

Observación

El conjunto E es abierto. (pues contiene todas las bolas)
El conjunto $\emptyset$ es abierto.

Ej: $E = \mathbb{R}$

$d = |\cdot|$

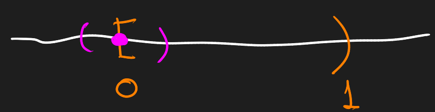
$A = [0, 1)$

¿A°?

Veamos que $0 \notin A^{\circ}$ ← interior

$r > 0$,

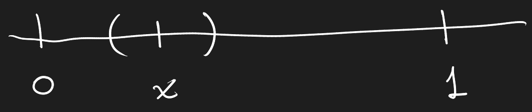
$$B(0, r) = \{y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0,y)} < r\}$$

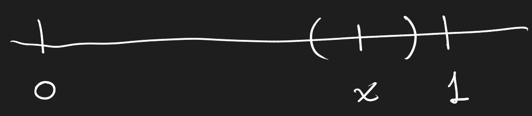


$= (-r, r) \ni$ n°s negativos

$\therefore \quad B(0,r) \not\subseteq A$

- Sea $x \in A$ y $x \neq 0 \Rightarrow x \in A^{\circ}$





Si elijo r como

$r > 0$,

$$B(0,r) = \{ y \in \mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0,y)} < r \}$$

$$r < \min\{ x - 0, 1 - x \}$$

$$r < \min\{ x, 1 - x \}$$

$$\Rightarrow B(0,r) = \{ y \in \mathbb{R} : |y| < \min\{ x, 1 - x \} \}$$