Mercury 28 Abr

ANÁLISIS AVANZADO - PRIMER CUATRIMESTRE DE 2021

Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad.

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión,

En (a), (b) y (c) las métricas d, d_2 y d_∞ son como en la Práctica 3, y δ representa a la métrica discreta, mientras que en (d) (E,d) es un espacio métrico y $A \subseteq E$.

a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\leftarrow$ Paraboloide

qvq

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

$$f\left(B_{d_2}(\vec{x}, \delta)\right) \subseteq B_{d_1}\left(f(\vec{x}), \varepsilon\right)$$

equiv.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

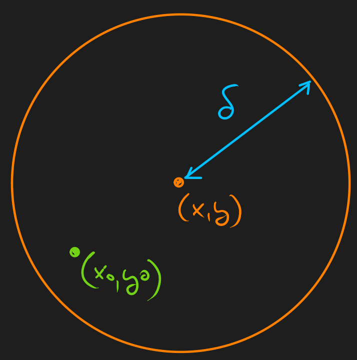
$$f\left(B_{d_2}((x,y), \delta)\right) \subseteq B_1\left(f(x,y), \varepsilon\right)$$

Sea

$$(x_0, y_0) \in B\left((x,y), \delta\right)$$

$$(x_0, y_0) \in \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2((a,b),(x,y)) < \delta \}$$

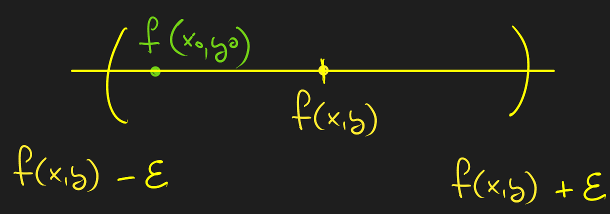
(x_0, y_0) es alguno de estos (a,b)



qvq

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{x_0^2 + y_0^2} \overset{?}{\in} B(f(x,y), \varepsilon)$$

qvq esté adentro!



Sé:

$$\begin{aligned} B(f(x,y), \varepsilon) &= \{ c \in \mathbb{R} : d(c, f(x,y)) < \varepsilon \} \\ &= \{ c \in \mathbb{R} : | c - f(x,y) | < \varepsilon \} \\ &= \{ c \in \mathbb{R} : | c - (x^2 + y^2) | < \varepsilon \} \end{aligned}$$

(acá pregunté en Zulip porque)

Sugerencia :

> **Daniel Carando** 6:17 PM
> Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el δ lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.
> Una estrategia estándar puede ser tomar un δ auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.
>
> 6:23 PM
> por ejemplo, si fijás $\delta_1 = 1$, entonces cuando tomes $d((x,y),(3,2)) < \delta_1$, sabés que x está entre 2 y 4 e y está entre 1 y 3.
> Si después necesitás otro δ_2 para llegar finalmente al menor que ε, tu δ va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.
>
> (EDITED) 6:28 PM
> Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en $\mathbb{R}$ es la d_1, pero en realidad también es la d_2:
> $d_1(s,t) = |s-t| = \sqrt{(s-t)^2} = d_2(s,t)$.
> También es la d_∞, claro.

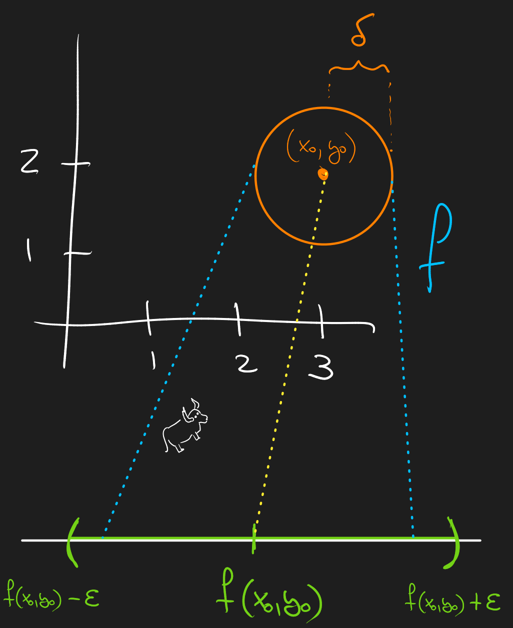
Pruebo que es continua en el $(3,2)$

Def. de f continua $(\forall x, y \in \mathbb{R}^2)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$f\Big(B\big((x_0,y_0),\delta\big)\Big) \subseteq B\big(f(x_0,y_0),\varepsilon\big)$$

Lo pruebo en $(x_0,y_0) = (3,2)$



Sea

$$(x,y) \in B\big((x_0,y_0),\delta\big)$$

me fijo solo en:

$$(x,y) \in B\big((3,2),\delta\big)$$

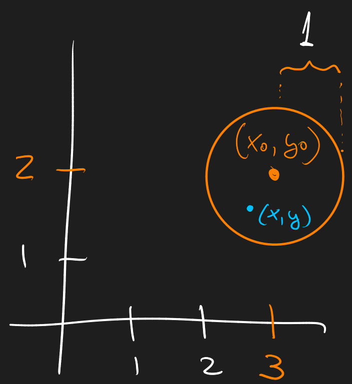
$$(x,y) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2\big((a,b),(3,2)\big) < \delta \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < \delta^2$$

Si: $\delta = 1$:

$$(x,y) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : d_2\big((a,b),(3,2)\big) < 1 \right\}$$

$$(a-3)^2 + (b-2)^2 < 1^2$$



Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos $f(x,y)$

De nuevo pifio y me pierdo.
Pregunto de nuevo en Zulip.

Daniel Carando (EDITED) 6:48 PM

Hola Leandro. Antes que nada, una cuestión de notación: te conviene usar (x_0, y_0) para el punto en el que estudiás la continuidad y (x, y) para los puntos que andan alrededor del (x_0, y_0). Por supuesto la notación es notación, uno puede llamar como quiere a las cosas mientras sea lógicamente consistente. Pero seguir las convenciones ayuda a entender y a que te entiendan. Pero te contesto primero usando tu notación, o sea, (x_0, y_0) son los puntos que están cerca del $(3, 2)$.
Lo que podés hacer menor que cualquier δ es la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y el $(3, 2)$. En este caso particular, esto coincide con la raíz de $f(x_0 - 3, y_0 - 2)$. Si tomás $\delta_1 = 1$ auxiliar, entonces sabés que $f(x_0 - 3, y_0 - 2) < 1$. Pero esto no dés que $f(x_0, y_0) < 1$. Al contrario, $f(x_0, y_0)$ se mueve alrededor de 13, con lo que no va a ser menor que 1.
Si mirás tu cuenta, en algún momento escribís $12 < \varepsilon$. Esto te da la pauta de que algo no va, proque ε puede ser arbitrariamente chico.
Otra cosa que puede servir para detectar errores: casi siempre (salvo que la función sea constante, por ejemplo) cuando el ε tiende a 0, los posibles δ también tienden a 0. Tu δ no cumple eso, lo que tiene que llevarte a sospechar. Fijate además que en el despeje de δ (al final de la página 3) hay un error.

Una manera de encararlo (con ε y δ, sin usar sucesiones) es: tomá $\delta_1 = 1$ y (x, y) a menos de 1 de $(3, 2)$. Entonces
$|f(x, y) - f(3, 2)| = |x^2 + y^2 - 9 - 4| \leq |x^2 - 3^2| + |y^2 - 2^2|$
Acá podés usar diferencia de cuadrados. Las sumas las podés acotar gracias al δ_1. Las restas se acotan por la distancia que sabés que podés hacer menor que δ

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\big((x,y), (3,2) \big) < \delta_1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$|f(x,y) - f(3,2)| = |x^2 + y^2 - 3^2 - 2^2| \overset{\text{sé}}{<} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}$$

quiero acotar ésto

En donde:

dif. de cuadrados.

$$(x^2 - 3^2) = \underbrace{(x+3)}\,\underbrace{(x-3)}_{< \delta_1 = 1}$$

Como $d(x,3) < 1$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \pm d(x,3)$$
$$< 3 + 1 = 4$$

$x < 4$

$\Rightarrow x + 3 < 7$

$$\Rightarrow (x^2 - 3^2) < 7 . \delta$$

dejo este δ (y no uso 1)
para que dependa de δ

$$(y^2 - 2^2) = \underbrace{(x+2)}\ \underbrace{(x-2)}_{\leq \delta = 1}$$

Como $d(x,2) < \delta_1 = 1$

$\Rightarrow x = 2 \pm d(x,2)$

$x < 3$

$\Rightarrow x + 2 < 5$

$$(y^2 - 2^2) < 5 . \delta$$

dejo este δ (y no uso 1)
para que dependa de δ

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - 3^2 + y^2 - 2^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< 7\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< 5\delta}$$

$$< 12\delta$$

y como quiero acotar todo por ε

$$\Rightarrow 12\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{1}{12} \cdot \varepsilon$$

- Finalmente, para este caso particular con $(x_0, y_0) = (3, 2)$ encontré un $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{12}\}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ /$$

$$f\left(B\left((3,2), \delta\right)\right) \subseteq B\left(f(3,2), \varepsilon\right)$$

Para el caso general:

Sigo usando que

Si $\delta_1 = 1$:

$$d_2\left((x,y), (x_0,y_0)\right) < \delta_1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 1^2$$

Los puntos de la bola del codominio son:

$$\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) \right| = \left| x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left| x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2 \right| \leq \left| x^2 - x_0^2 \right| + \left| y^2 - y_0^2 \right|$$

En donde:

$$\left| x^2 - x_0^2 \right| = \underbrace{|x + x_0|} \ \underbrace{|x - x_0|}_{< \delta}$$

Como $d(x, x_0) < \delta$

$$\Rightarrow \quad x_0 - d(x,x_0) < x < x_0 + d(x,x_0)$$

$$\Rightarrow |x + x_0| < \underbrace{|x|}_{\leq |x_0| + |x - x_0|} + |x_0|$$

$$< 2|x_0| + \delta$$

$$\Rightarrow \quad |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

elijo este $\delta = 1$

Mismo procedimiento para

$$|y^2 - y_0^2| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$$

Reemplazando en lo que tenía

$$|x^2 - x_0^2 + y^2 - y_0^2| \leq \underbrace{|x^2 - 3^2|}_{< (2|x_0|+1)\cdot\delta} + \underbrace{|y^2 - 2^2|}_{< (2|y_0|+1)\cdot\delta}$$

$$< \delta\left(2|x_0| + 2|y_0| + 2\right)$$

$$< 2\delta\,(\underbrace{|x_0|}_{\geq 0} + \underbrace{|y_0|}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0}) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + |y_0| + 1)}$$

$\therefore$ mostré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ dado por

$$\delta = \min\left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0|+|y_0|+1)} \right\}$$

tal que

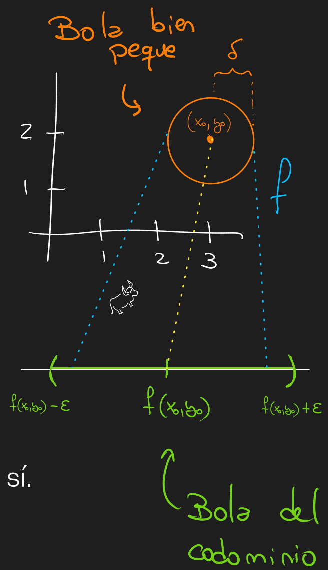
$$f\big(B((x_0,y_0),\delta)\big) \subseteq B\big(f(x_0,y_0),\varepsilon\big)$$

$\therefore$ mostré continuidad en cada (x_0,y_0) de $E=\mathbb{R}^2$

$\therefore$ f es continua en $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$

$\blacksquare$

Resumen:



Quiero que para toda bola del codominio de f, pueda pasar una bola del dominio por f, y que quede contenida en la primera:

f(AlgunaBolaBienPeque) dentro_de CadaBolaDelCodominio

Pasos:
* Se que la bola del codominio tiene radio epsilon
* Entonces sé que los elementos de la bola están acotados por epsilon de distancia entre sí.
* Planteo |f(x,y) - f(a,b)| < epsilon
* Quiero |f(x,y) - f(a,b)| < ... meter un delta acá ... < epsilon
* Usando las distancias/cotas de la bola del dominio, opero acotando la norma del paso anterior hasta poder acotar por delta.
* De haber varios términos delta en algún producto, puedo elegir un valor fijo para alguno (ya que el otro delta podrá seguir tendiendo a cero, "arrastrando consigo" el otro término) y tener un despeje más sencillo.
* Finalmente, despejo delta en función de epsilon, obteniendo el delta que buscaba que depende de epsilon y (posiblemente) de los x,y sobre los cuales se analice continuidad.
* Probé continuidad para todo x,y de E=R^2

fin