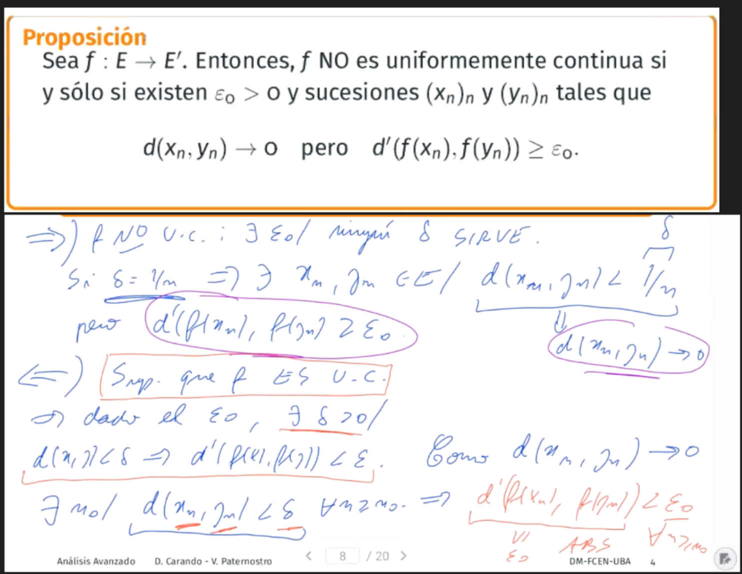
Práctica 7

1. Sea Y un espacio métrico y sea A un conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to Y$. Entonces $(f_n)_{n\geq 1}$ *no* converge uniformemente a $f : A \to Y$ si y sólo si existen $\alpha > 0$, una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ en A tales que $d(f_{n_k}(a_k), f(a_k)) \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

en func. cont. 2 vimos:



y acá tenemos

$(f_n)_n$ no converge uniformemente a f $\iff$

$\iff$ existen:

$\alpha > 0$,

$(f_{n_k})_k \subseteq (f_n)_n$

y

$(a_k)_k \subseteq A$

tales que

$$d\left(f_{n_k}(a_k),\ f(a_k) \right) \geq \alpha$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$:

(a) $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, definida en $\mathbb{R}$;
(b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, definida en $\mathbb{R}$;
(c) $f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

a) Convergencia Puntual

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} f(x)$$

no depende de x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\leq 1} = 0$$

Converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$

Convergencia uniforme

$$d'(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - 0|$$
$$= \left|\frac{1}{n}\cdot \sin(nx)\right|$$
$$= \frac{1}{n}\cdot \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leq 1}$$
$$= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad ✓$$

$$d'(f_n(x), f(x)) = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Si dado $\varepsilon > 0$, tomo $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

(b) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, definida en $\mathbb{R}$;

CP:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \sin 0 = \underbrace{0}_{=: f} \checkmark$$

C. Unif.

$$|f_n - 0| = \left|\sin \frac{x}{n}\right| \leq \left|\frac{x}{n}\right|$$

depende de x! dá la idea de que $f_n \not\rightrightarrows f$

Uso ej 1:

Busco $(x_k)_k$ /

$$d'\left(f_{n_k}(x_k)_k, \underbrace{f(x_k)}_{\equiv 0}\right) \geq \alpha$$

Si elijo $x_k = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

y $k = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

?

Preguntar Proced.

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{x_k}{n} - 0\right)_k = \left(\sin \frac{x_n}{n} - 0\right)_n$$

$$\overset{x_n = n}{=} \left(\sin \frac{n}{n}\right)_n$$

$$= (\sin 1)_n \geq \sin 1 =: \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore \quad f_n \not\rightrightarrows f$.

(c) $f_n(x,y) = \frac{n}{n+1}(x,y)$, definida en $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

CPunt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(x,y) = \lim \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})}(x,y) = \underbrace{(x,y)}_{\text{identidad}} \checkmark$$

$$d'\left(\frac{n}{n+1}(x,y), (x,y)\right) = \left\| \frac{n}{n+1}(x,y) - (x,y) \right\|$$

$$= \left\| (x,y) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)}_{\frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \to 0} \right\|$$

depende de (x,y)! no puede converger unif.

Den:

$f_{n_k} := f_n$

$(x,y)_k = (n,n)$

$$d'\left(f_{n_k}((x,y)_k), f((x,y)_k)\right) =$$

$$= d'\left(\frac{n}{n+1}(x,y)_k\ ,\ (x,y)_k\right)$$

$$= d'\left(\frac{n}{n+1}(0,n)\ ,\ (0,n)\right)$$

?

3. (a) Encontrar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones reales definidas sobre $A \subseteq \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

i. $f_n(x) = x^n$, $A = (-1, 1]$;

ii. $f_n(x) = x^{-n}e^x$, $A = (1, +\infty)$;

iii. $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $A = [0, 1]$.

(b) Para la sucesión de i., probar que la convergencia es uniforme sobre $(0, \frac{1}{2})$, y para la de ii., que es uniforme sobre $[2, 5]$.

(c) ¿Es uniforme la convergencia de la sucesión sobre A en alguno de los casos?

a) i) $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} x^{-n} \cdot e^x = \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{\underbrace{x^n}_{\to\infty}} = 0$$

4. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a una función $f: X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniforme a $f: X \to \mathbb{R}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(c) Mostrar que la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f: X \to \mathbb{R}$ si y solo si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

(d) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en X, mostrar que existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es *uniformemente acotada* o es *acotada en* d_∞.