

ANÁLISIS AVANZADO - LISTA DE EJERCICIOS

1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Denotemos

$$S = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Probar que E es un espacio de Banach si y solo si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq S$ converge.

2. Consideremos la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n}}.$$

- (a) Probar que converge uniformemente en $[a, +\infty)$ para todo $a > 1$.
(b) ¿Es uniforme la convergencia en $(1, +\infty)$?
3. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que el conjunto

$$E = \{x \in [0, 1] : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ converge}\}$$

es medible.

4. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{n \sin(x/n)}{x(x^2+1)} dx.$$