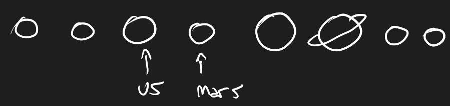
Vicky

Mercurio 24 de Marzo



Sucesiones

Función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Definición de Límite

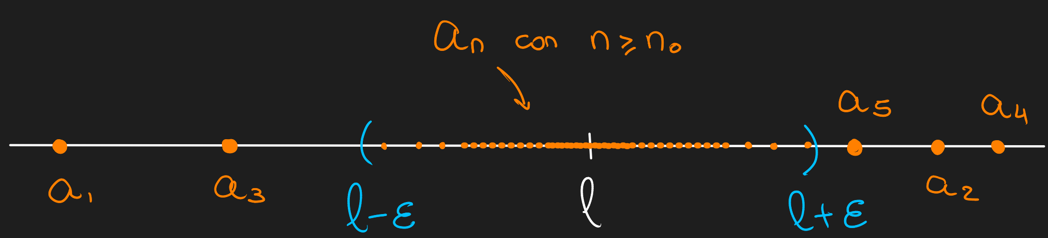
$a_n \in \mathbb{R}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un número $l \in \mathbb{R}$

si: $\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/$

$$|a_n - l| < \varepsilon \,,\quad \forall n \geq n_0$$

"A partir de un n_0, la distancia entre cada uno de los $a_{n \geq n_0}$ y la asíntota l es menor a un epsilon dado"



Estrategia para usarlo en ejercicios:

- Dado un $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ pruebo que existe su correspondiente n_0

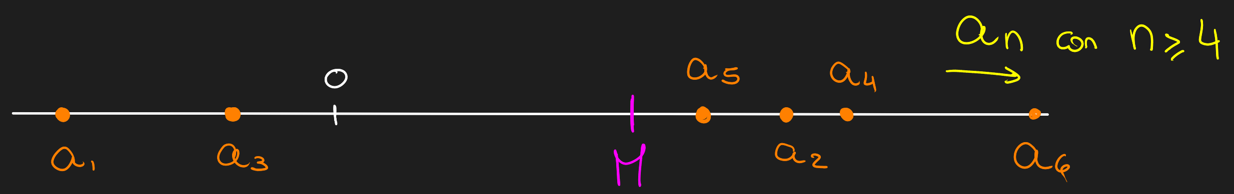
Límites a infinito

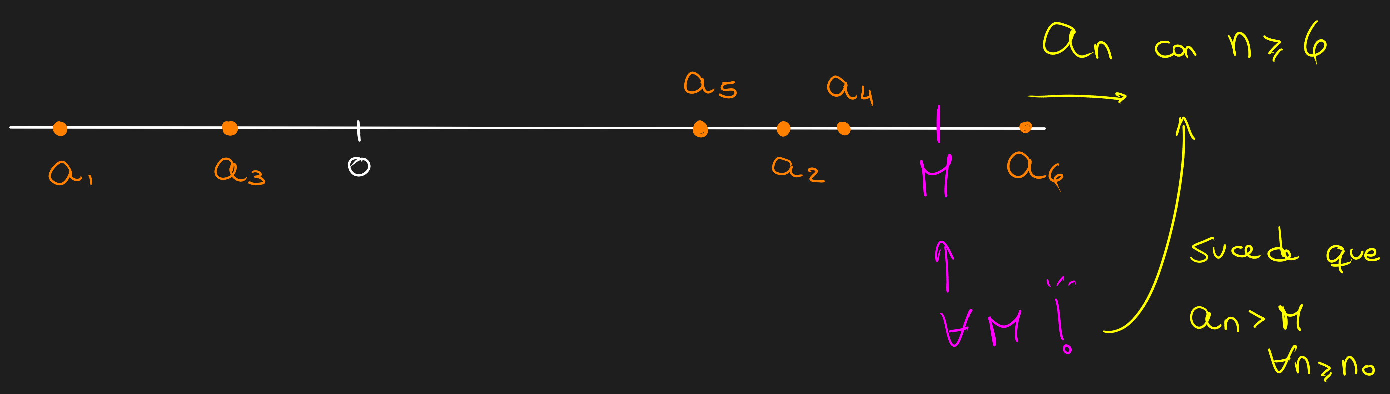
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (a $+\infty$)

si: $\forall\, M>0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ /

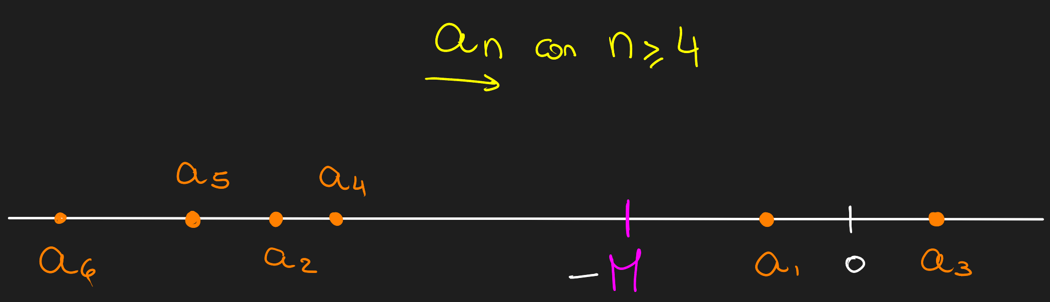
"Barrera"

$a_n > M \quad , \forall n \geq n_0$





Para divergencia a $-\infty$ es igual pero con $-M$



Definición

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (sup, inf, both) si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado (sup, inf, both)

Equivalentemente (solo acotada!)

$$\exists M > 0 \;/\; |a_n| \leq M \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada

Dem:

Supongo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{(es convergente)}$$

elijo un $\varepsilon = 1$ y digo

Para $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \;/\; |a_n - \ell| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

acoto todos los a_n a distancia ε de ℓ

$$\Rightarrow |a_n| \leq |\ell| + 1$$

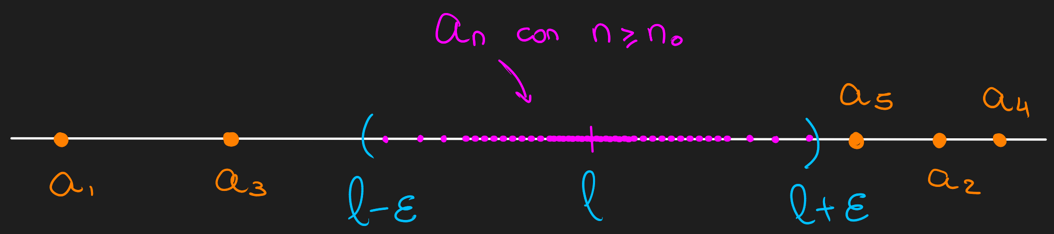
Pues $|a_n - \ell| < 1$

$$-1 < a_n - \ell < 1$$

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1$$

$\Rightarrow |a_n| \leq \max\{|\ell-1|, |\ell+1|\} \leq |\ell|+1$ D.T.

- Tengo acotados todos los a_n con $n \geq n_0$
- Faltan los a_n con $n < n_0$



$\Rightarrow$ Tomo $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |\ell|+1\}$

¿ construí una cota para TODOS los elementos de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

que da demostrado que

$|a_n| \leq M$

y $\therefore$ la sucesión es acotada. $\blacksquare$

(no puede darse el caso que converja pero que en "el medio" no se pueda acotar)

Algebra de Límites

Teorema

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces,

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$;

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(4) Si $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

(5) Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \leq b$.

Dem (2):

Dado $\varepsilon > 0$, quiero a_{n_0} a partir del cual

$$|a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$$

Reescribo

$$|a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \qquad ⊞$$

si $n \geq n_1$ si $n \geq n_2$

$\exists$ "momento" a partir del cual vale la condición $|\star| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Si tomo

$n \geq \max\{n_1, n_2\} = n_0$

$$⊞ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Llegando a que

$$|a_n - a + b_n - b| < \varepsilon$$

$\boxtimes$

Equivalencia 2

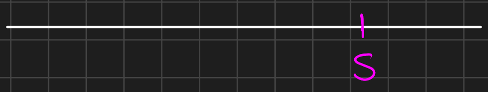
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a") $s \geq x$ para todo $x \in A$; $= (a) = (a')$

(b") existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

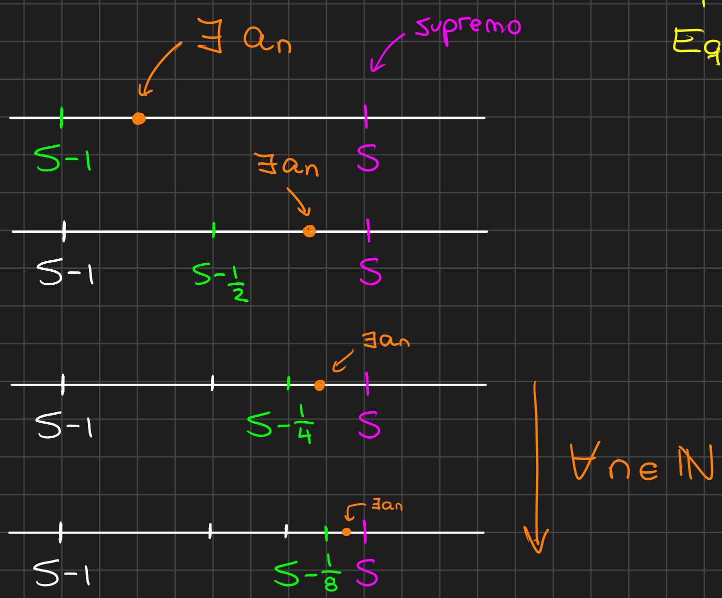
Dem: $s = \sup A \Rightarrow (b")$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ me muevo $\frac{1}{n}$ hacia la izquierda del Sup.



$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ a_n \in A \ /\ a_n > s - \frac{1}{n}$$

Equivalencia 1 con $\varepsilon = \frac{1}{n}$



Supongo que tengo

$$(a_n)_n \subseteq A$$

qvq

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s$$

Sea $\varepsilon > 0$

distancia que me desplazo en cada n

$$|s - a_n| \overset{s > a_n}{=} s - a_n < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si } n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

que es lo que quería

Falta la vuelta

Valen (a'') y $(b'') \Rightarrow s = \sup A$

como $(a'') \Rightarrow s$ es cota superior

$(b'') \Rightarrow$ Tarea !

qvq

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ /\ s - \varepsilon < a \leq s$$

Def

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema

Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.

Más concretamente

(i) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demo (del Teorema)

- Sea

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$$

acotada superiormente

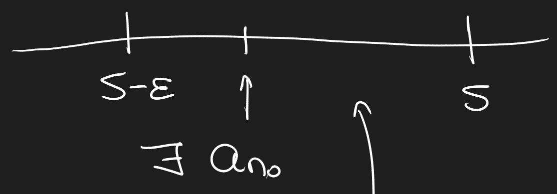
$$\Rightarrow \exists\, S = \sup A$$

Veamos que

$$S = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Sea $\varepsilon > 0$, por def. de supremo:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; a_{n_0} > S - \varepsilon$$



todos los elementos a_n con $n \geq n_0$ caen a la derecha de a_{n_0}

Si $n \geq n_0$

S cota sup.

$$\Rightarrow S-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S < S+\varepsilon$$

$(a_n)_n$ es creciente

$$\Rightarrow S-\varepsilon < a_n < S+\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - S < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

∎

Borrador Texto Deshacer Rehacer

Subconjuntos de $\mathbb{N}$

Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

(i) A tiene primer elemento; $\leftarrow$ tiene mín siempre

(ii) Si A es acotado, tiene último elemento. tiene máx siempre

Como $A \subset \mathbb{N}$ los supremos son máximos y los ínfimos son mínimos.

Principio de Buena Ordenación

(equivalente a Principio de Inducción)

Dem: (ii)

Vimos

Def suc

Def límite

Álgebra de

Equivalencia 2 : Sup como sucesiones

Sucesiones que convergen son acotadas

Suc. monotona y acotada es convergente

Propiedades de subconjuntos no vacíos.