

EJERCICIO: SEA  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ . SUP QUE

$$a_n \rightarrow a \quad \left( \Rightarrow a \geq 0 \right) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

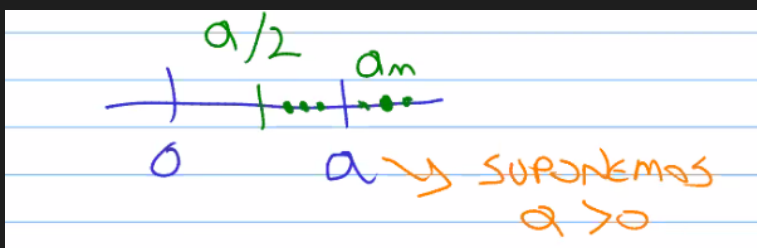
PROBAR QUE  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$  as  $n \rightarrow +\infty$ .

Dem

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n} - \sqrt{a} &= (\sqrt{a_n} - \sqrt{a}) \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} \\ &= (a_n - a) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})} \end{aligned}$$

$\swarrow$  Sup  $\neq 0$  \*  
acotado?

$\uparrow$   
 Siempre que no sea cero, estara acotado.



Como  $a_n \rightarrow a$  y  $a \geq 0$ ,

$$\exists n_0 / a_n \geq \frac{a}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\left( \text{Tomé } n_0 / a_n \in \left( a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2} \right) \right)$$

Se

$$\sqrt{a_n} > \sqrt{\frac{a_n}{2}}$$

pues  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{a} > \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}$$

$$= \sqrt{a} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) =: \delta$$

Así, de

$$(a_n - a) \cdot \frac{1}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}$$

• en particular

$\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \neq 0$ , y  
salvo el caso supuesto  
en \*

tengo

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |a_n - a| \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$

$$\leq |a_n - a| \cdot \frac{1}{\delta}$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} \quad \forall n \geq n_1$$

$$\therefore \exists n \geq \max \{n_0, n_1\}$$

$$|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}| < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{\delta} = \varepsilon$$

Faltaba el caso  $a = 0$

Si  $a = 0$ ,

dado  $\varepsilon$  tomamos  $n_0$  /

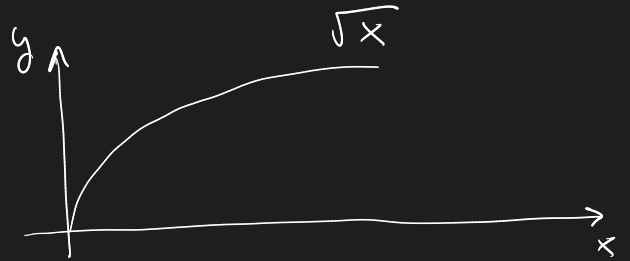
$$a_n < \varepsilon^2 \quad \text{si } n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\uparrow$   
 $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon$$

□



## Sub sucesiones

Idea:

$$\text{Sea } (a_n) \subseteq \mathbb{R}$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{100}, a_{101}, a_{102}, \dots$$

Me quedo con algunos (infinitos) términos de forma estrictamente creciente.

Más formalmente

$$(a_n) \subseteq \mathbb{R} \leftrightarrow g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

↙ es lo mismo

$$a_n = g(n)$$

Dados

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{sucesión})$$

$$\text{y } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{estrictamente creciente} \\ \text{(elección de subíndice)} \end{array}$$

La composición  $g \circ f$  es la **subsucesión** de  $g$  dada por  $f$ .

Ejemplo

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = g(n)$$

$$\text{Si } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$f(k) = 2k$$

Tenemos la subsuc.

$$g \circ f(k) = g(2k)$$

$$= (-1)^{2k} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$$

$$= a_{\underbrace{2k}_{f(k)}}$$

- También tenemos la subsec.

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$\uparrow$   
 k-ésimo término de la subsec.  
 (2k-1)-ésimo " " " sucesión original

$$= - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1$$

Prop:

- Sea  $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$  sucesión.
- Sea  $(a_{\underbrace{n_k}_{f(k)}}) \subseteq \mathbb{R}$  subsec. de  $(a_n)$

que converge a  $l \in \mathbb{R}$

Si  $(a_n)$  converge  $\Rightarrow$  Debe converger a  $l$

De otra forma

Si  $(a_n)$  converge a  $l \Rightarrow \forall (a_{n_k})$  sub suc,  
 $(a_{n_k})$  converge a  $l$

Ejemplo

Del ejemplo de antes, como obtuve 2 sucesiones  
con  $l_1 \neq l_2 \Rightarrow$  la suc. orig. no converge; diverge.

Dem:

$$\text{Sea } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad l \stackrel{?}{=} L \quad \forall (a_{n_k})$$

$$\text{Sea } \epsilon > 0,$$

$$|l - L| = |l - a_{n_k} + a_{n_k} - L|$$
$$\stackrel{\text{DT.}}{\leq} |l - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L|$$

$$\bullet \text{ Tomo } k_0 / |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\bullet \text{ Tomo } n_0 / |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Tomo } k_1 / n_k \geq n_0 \quad \forall k \geq k_1$$

$$\text{Then } k_2 = \max \{k_0, k_1\}$$

Así, si  $k \geq k_2$ ,

$$|l - L| < \underbrace{|l - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ por } k \geq k_0} + \underbrace{|a_{n_k} - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ por } n_k \leq n_0}$$

$$< \varepsilon$$











