

Cardinalidad I

Prop:

 $X, Y$  numerables $\Rightarrow X \cup Y$  es numerable

Dem:

Tenemos 2 biyecciones

 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  biyección $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$  biyección

Supongamos

$$X \cap Y = \emptyset$$

Ides:

$$X \cup Y = X \cup \overbrace{(Y \setminus X)}^{Y'}$$

$$X \cap Y' = \emptyset$$

Defino

$$h: X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h(z) = \begin{cases} 2 \cdot f(z) & \text{si } z \in X \\ 2 \cdot g(z) - 1 & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Afirmo:

$h$  es biyectiva

Dem:

Construyo  $h^{-1}$ :

Sea  $k: \mathbb{N} \rightarrow X \cup Y$

$$k(n) = \begin{cases} f^{-1}(m) & \text{si } n = 2m \\ g^{-1}(m) & \text{si } n = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h \circ k = \text{id}_{\mathbb{N}}$$

$$k \circ h = \text{id}_{X \cup Y}$$

□

En general

Escribamos

$$X \cup Y = X \cup \underbrace{Y \setminus X}_{=: Y'}$$

Caso  $Y'$  es infinito:

$\Rightarrow Y'$  es numerable.

Listo. Por el caso de arriba.

Caso  $Y'$  es finito:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\sim]{f} & \mathbb{N} \\ & \nwarrow \text{biyección} & \\ Y' & \xrightarrow[\sim]{} & \{m, \dots, -2, -1, 0\} \quad m \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \\ & \nwarrow \text{biyección} & \end{array}$$

$\Rightarrow$  Tenemos una biyección

$$X \cup Y' \xrightarrow{\sim} \mathbb{N} \cup \{m, \dots, 0\}$$

$$\xrightarrow[\sim]{} \mathbb{N}$$

$$x \mapsto x - m + 1$$

$\uparrow$  "desplazo" todos los  $\mathbb{N}$  en  $(-m + 1)$  unidades a derecha



Prop: (ej 9)

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  con  $X_n \sim \mathbb{N} \quad \forall n$

entonces

$$\bigcup_{n \geq 1} X_n \sim \mathbb{N}$$

Corolario:

$X, Y$  numerables  $\Rightarrow X \times Y$  numerables

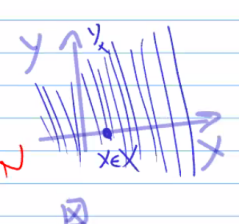
Dem:

Escribo  $X \cup Y$  como unión de numerables.

Dem:

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y$$

$y_x \sim Y \sim \mathbb{N}$



Dem

Puedo escribir  $X$  como

$$X = \{x : x \in X\}$$

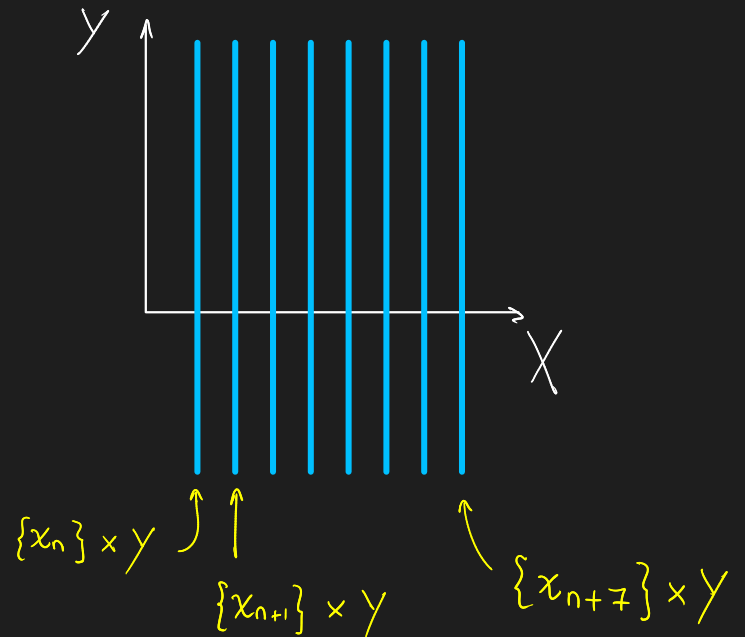
$$\Rightarrow X \times Y = \{x : x \in X\} \times Y$$

↑  
Como  $X$  es numerable, puedo escribirlo como la unión de numerables partes.

$$= \left( \bigcup_{x \in X \sim \mathbb{N}} \{x\} \right) \times Y$$

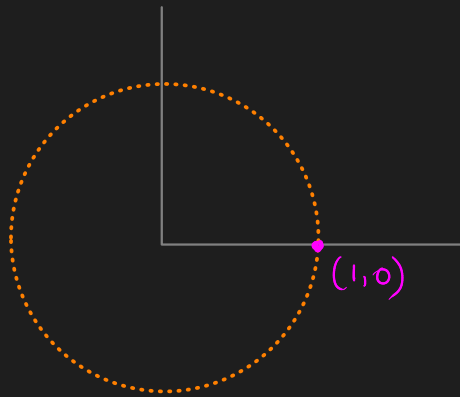
$$= \bigcup_{x \in X \sim \mathbb{N}} \{x\} \times Y$$

↑  
Como es un producto  
Cartesiano, puedo graficarlo  
en el plano :



Ejemplos:

$$1) A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$



"Conjunto de Ternas Pitagóricas Enteras"

$$\left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \in A$$

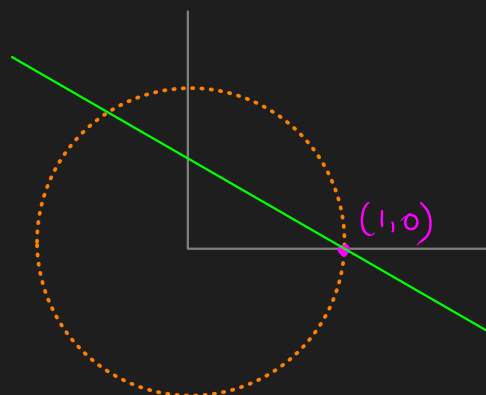
Pues

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Cuántas de estas Ternas tenemos

$$\bullet \# A \leq \# \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \aleph_0$$

↑  
Prop anterior  
 $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}$  numerables

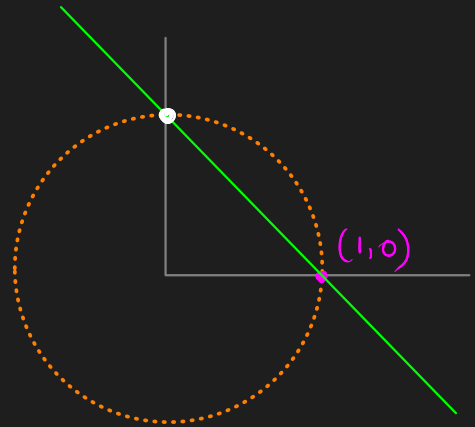
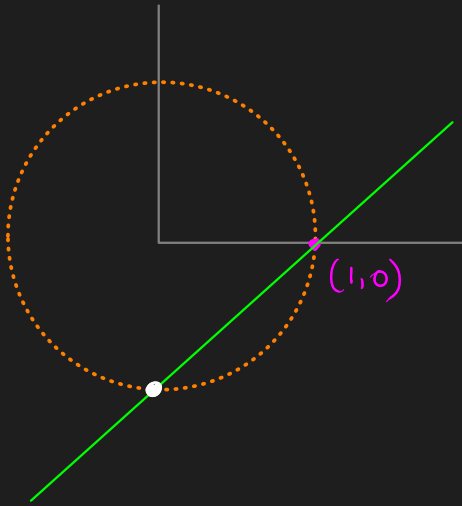
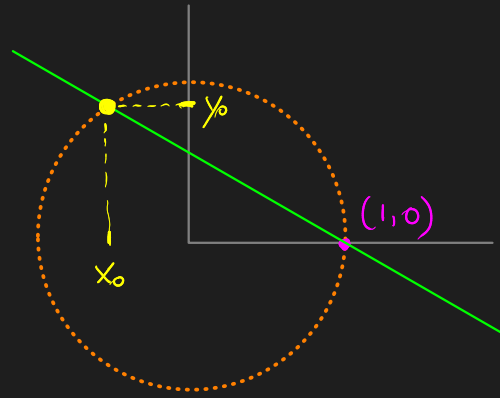


$$y = t \cdot (1 - x)$$

$$t \in \mathbb{Q}$$



quiero puntos en  $\mathbb{Q}$ !



• Sea  $t \in \mathbb{Q}$

$$\text{Sea } y = t(x-1)$$

Resolvamos

$$1 = x^2 + t^2 \cdot (x-1)^2$$

$$= x^2 + t^2 x^2 - 2xt^2 + t^2$$

$$= (1+t^2) x^2 - 2t^2 x + t^2$$

$$\Leftrightarrow (1+t^2) x^2 - 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$\text{Soluciones : } \begin{cases} 1 \\ x_0 = \frac{t^2-1}{1+t^2} \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{!}$$

$$\text{Así, } y_0 = t \left( 1 - \frac{t^2-1}{1+t^2} \right) \in \mathbb{Q}$$

$$= \frac{2t}{1+t^2}$$

∴ Tenemos

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q} &\rightarrow A \setminus \{(1,0)\} \\ t &\mapsto \left( \frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \end{aligned}$$

Afirmo :

$f$  es inyectiva.

y con esto, queda demostrado que

$$\# N_0 \leq \# A \setminus \{(1,0)\} = \# A$$

↑  
Pensar

Dem :

$$y_0 = t(x_0 - 1) \Rightarrow t = \frac{y_0}{x_0 - 1}$$





$$2) A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left( \exists f \in \underset{\setminus \{0\}}{\mathbb{Q}[x]} \right), f(z) = 0 \right\}$$

↑ Polin. con coefr. racionales  
sin el polinomio nulo.

" Números algebraicos "

Ej: •  $z \quad \forall z \in \mathbb{Q} \quad (f = x - z)$

•  $\sqrt{2} : x^2 - 2$

•  $i : x^2 + 1$

•  $\sqrt{2} + \sqrt{3} : x^4 - 10x^2 + 1$

Prop:

$A$  es numerable,

más aún,  $A \cap \mathbb{R}$  es numerable.

Corolario:

$$\mathbb{R} \setminus A \cap \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

⏟  
=: números  
Trascendentes

↑  
ej  $e$ .

Ejemplos:

•  $e$

•  $\pi$

•  $(\pi^e \text{ no se sabe!})$

Dem :

Parto  $A$  por grados de polinomios.

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$\text{con } A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left( \exists f \in \mathbb{Q}_n[x] \right) f(z) = 0 \right\}$$

Obs :

$$\mathbb{Q}_n[x] \sim \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}_{n+1 \text{ veces}} \sim \aleph_0$$

$$A_n = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}_n[x] \setminus \{0\}} \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} : f(z) = 0 \}}_{\text{es finito}}$$

$$\Rightarrow \# A_n \leq \aleph_0$$

$$\Rightarrow \# A_n = \aleph_0$$











