Vicky

Buena Definición de d_∞

1°) $x \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow \bullet\ |x| \in \mathcal{C}([a,b])$

Componer continuas da continua.

- $|x|$ es continua en $[a,b]$ está acotada (alcanza max y min por ser continua en compacto: Weirstrass)

2°) $x, y \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow (x+y)(t) = x(t) + y(t)$

$+$ que defino en $\mathcal{C}([a,b])$

$+$ de $\mathbb{R}$

Juntando 1 y 2

$\Rightarrow |x-y|$ alcanza máx y min en $[a,b]$

$\Rightarrow \{|x(t)-y(t)| : t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotado

$\therefore$ tiene supremo

$$d_\infty(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$$

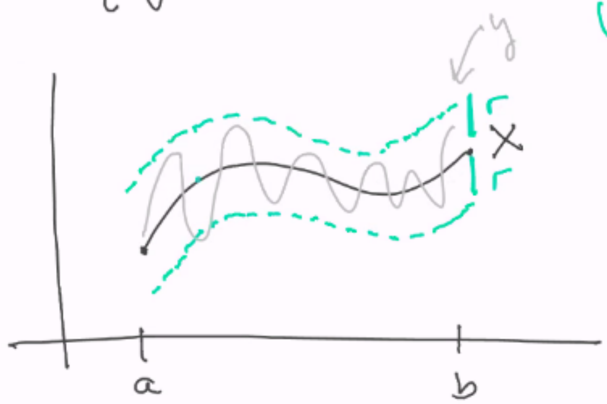
Bien definido! ↑ es siempre max.

Bolas en d_∞

$$B(x,r)=\{y\in \mathcal{C}([a,b]) : d_\infty(x,y)<r\}$$

↳ $\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$

$|x(t)-y(t)|<r$ $\forall t$.



en $\mathbb{R}^n$ $(p\geq 1)$ d_p: $d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$

en $\mathcal{C}([a,b])$

$$d_1(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^1 dt\right)^{1/1}$$

$$d_p(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

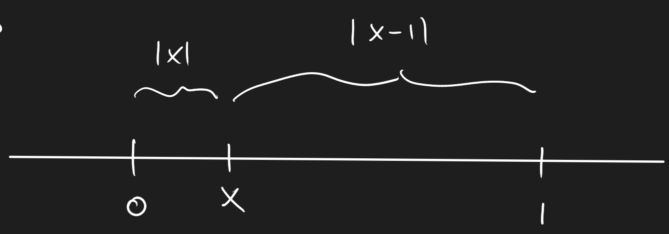
$A = [0,1)$ $\quad 0 \notin A^\circ$

$B = (0,1) \to B^\circ = B \quad \subseteq)$ ✓

Falta ver que

$$B \subseteq B^\circ \quad \text{con} \quad B^\circ = \{ y \in \mathbb{R} : \exists r > 0 \;/\; \underbrace{B(y,r)}_{\substack{\text{Bolita en } \mathbb{R} \\ (y-r,\, y+r)}} \subseteq B \}$$

- $x \in B$



Como $x \in B$, $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

$$\Rightarrow |x|, |x-1| > 0$$

Tomo candidato:

módulos para hacer énfasis

$$r = \frac{\min\{|x|, |x-1|\}}{2}$$

sin ésto también sirve.

Afirmo que

$$B(x,r) \overset{?}{\subseteq} B$$

Dem:

$y \in B(x,r)$ y q.v.q. $y \in (0,1)$

$$0 < y < 1$$

$\Rightarrow |x-y| < r$

$\Rightarrow -r < x-y < r$

$\Rightarrow -r-x < -y < r-x$

$\Rightarrow x+r > y > x-r$

$\Rightarrow \underbrace{x-r} < y < x+r$

si pruebo que es positivo, listo!

$r = \frac{1}{2}\min\{|x|, |x-1|\}.$

$= \frac{1}{2}\min\{x, x-1\}$

$x \in B$

$x \in (0,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \leq \frac{x}{2} \\ r \leq \frac{1-x}{2} \end{cases}$$

miramos

$\circledast \quad x - r \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$

$r \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow -r \geq -\frac{x}{2}$

$\Rightarrow y > x - r > 0$

$\Rightarrow y > 0$ ✓

$$x + r \leq x + \frac{1-x}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \underset{x \in B,\ x<1}{<}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow$

Asomando:

siempre puedo definir distancia discreta.

(E, d) es un espacio métrico

$$\mathcal{C}(E) := \{ f : E \to \mathbb{R} : \underbrace{\text{continua}}_{?} \}$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

¿está bien definido?

Ya lo veremos.