Integral de Lebesgue

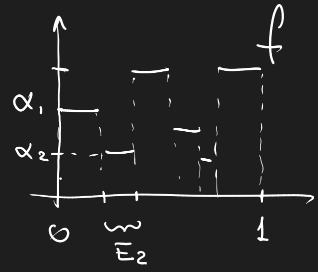
Notación:

$$I = [0,1]$$

Recuerdo

Funciones simples:

$f : I \to \mathbb{R}$ es simple sii



$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{E_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

con la partición

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{con } E_i \text{ medibles}$$

$$(E_i \in \mathcal{M})$$

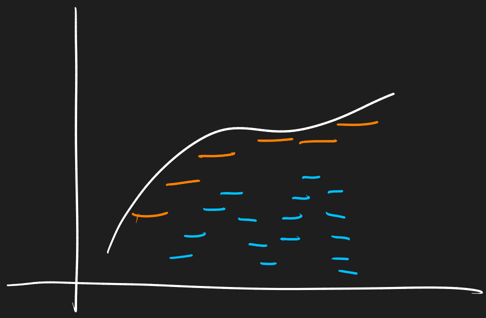
$$\mathcal{I}(f) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(E_i)$$

Recuerdo:

Si f es continua y acotada

$$\Rightarrow \int_I f = \sup \{ \mathcal{I}(g) : g \leq f \} \quad g \text{ simple}$$

$$= \inf\{ \mathcal{I}(g) : g \geq f \} \quad g \text{ simple}$$



Propiedad

Si f es simple $\Rightarrow \int f = \mathcal{I}(f)$

Dem: (solo desig)

$\forall g$ simple, $g \leq f$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f)$$

con $f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$

y $g = \sum_i \beta_i \chi_{D_i}$

Sabiendo que

$$I = \dot{\bigcup_i} E_i$$

$$= \dot{\bigcup_i} D_i \quad D_i \text{ medibles}$$

además

$$E_i = I \cap E_i$$

$$= \biguplus_j D_j \cap E_i$$

y

$$\chi_{E_i} = \chi_{\biguplus_j D_j \cap E_i}$$

Por ej 2

2. Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}$ Probar:

(a) χ_E es medible $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.

(b) $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$.

(c) $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$.

$$= \sum_j \chi_{D_j \cap E_i}$$

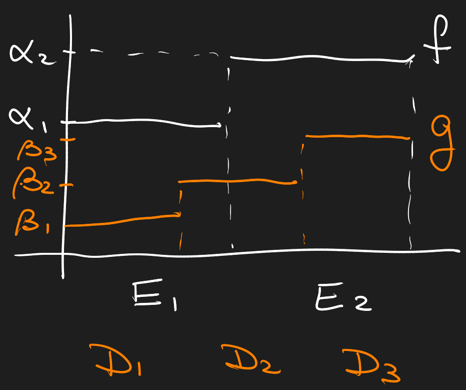
$$\chi_{E_i} = \sum_j \chi_{D_j} \cdot \chi_{E_i}$$

también

$$\mu(E_i) = \mu\left(\biguplus_j D_j \cap E_i\right)$$

$$= \sum_j \mu(D_j \cap E_i)$$

como $g \leq f$



$$\Rightarrow \text{ si } D_j \cap E_i \neq \emptyset$$

$$\beta_j \leq \alpha_i$$

Multiplico

$$\beta_j \cdot \mu(D_j \cap E_i) \leq \alpha_i \cdot \mu(D_j \cap E_i) \quad \forall i,j$$

$$\mathcal{I}(g) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \mu(D_i)$$

$$= \sum_i \beta_i \cdot \sum_j \mu(D_i \cap E_j)$$

$$= \sum_i \sum_j \beta_i \cdot \mu(D_i \cap E_j)$$

$$\leq \sum_i \sum_j \alpha_i \cdot \mu(D_i \cap E_j)$$

$$= \sum_j \alpha_j \cdot \mu(E_j)$$

$$= \mathcal{I}(f)$$

Probé que si $g \leq f$, f, g simples

$$\Rightarrow \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(g)$$

$\blacksquare$

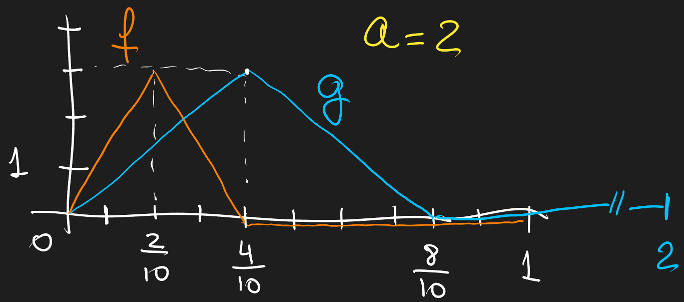
Prop.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ medible, acotada (en particular integrable)

sea $a > 0$,

Sea $g : \underbrace{[0, a]}_{\substack{= a[0,1] \\ = a.I}} \to \mathbb{R}$,

con $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$



$\frac{x}{2} = \frac{4}{10}$

$\Rightarrow x = \frac{8}{10}$

entonces

g es medible y acotada

y además

$$\int_{a.I} g = a . \int_I f$$

Dem:

- g es acotada
- g es medible si

$$\{x \in aI : g(x) > b\} = \{x \in aI : f\left(\tfrac{x}{a}\right) > b\}$$

$$= \{a.x \in I : f(x) > b\}$$

$$\overset{?}{=} a . \{x \in I : f(x) > b\}$$

9. Para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ notamos λA al conjunto

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Probar que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{M}$ y $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$.

es medible
pues f es medible

es medible

$\therefore$ g es acotada y medible

Falta ver que

$$\int_{a.I} g = a . \int_I f$$

En pasos

$\boxed{1}$ Supongo $f = \chi_E$, E medible

$x \in [0,a] \Rightarrow x \in a . I$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \chi_E\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \Rightarrow \frac{x}{a} \in I$$

$$g(x) = \chi_{aE}(x)$$

Integro

$$\int g = \int \chi_{aE}$$

$$= \mu(a.E)$$

$$\overset{\text{ej 9}}{=} a . \mu(E)$$

$$= a \cdot \int \chi_E$$

$$\int_{a.E} g = a \cdot \int_E f$$ ✓

Caso funciones simples

Supongo $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{E_i}$

con $I = \dot{\bigcup_i} E_i$ ← partición de I

$\Rightarrow$ usando el resultado anterior

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{a.E_i}$$

Luego

$$\int_{a.I} g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(a \cdot E_i)$$

$$= \sum_i \alpha_i \cdot a \cdot \mu(E_i)$$

$$= a \sum_i \alpha_i \cdot \mu(E_i)$$

$$= a \cdot \int_I f$$ ✓

Caso f medible y acotada

- $\exists\, f_n$ medibles y simples /

$$f_n \rightrightarrows f$$

- $\int f_n \to \int f$

Afirmo que si

$$g_n(x) := f_n\left(\frac{x}{a}\right)$$

$\Rightarrow$ $\underset{(\text{ejercicio})}{g_n \rightrightarrows g}$ y g_n es simple

Luego :

$$\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

lo probé arriba, g_n simples

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \int f_n$$

$$= a \cdot \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\int g = a \cdot \int f \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Ejercicio :

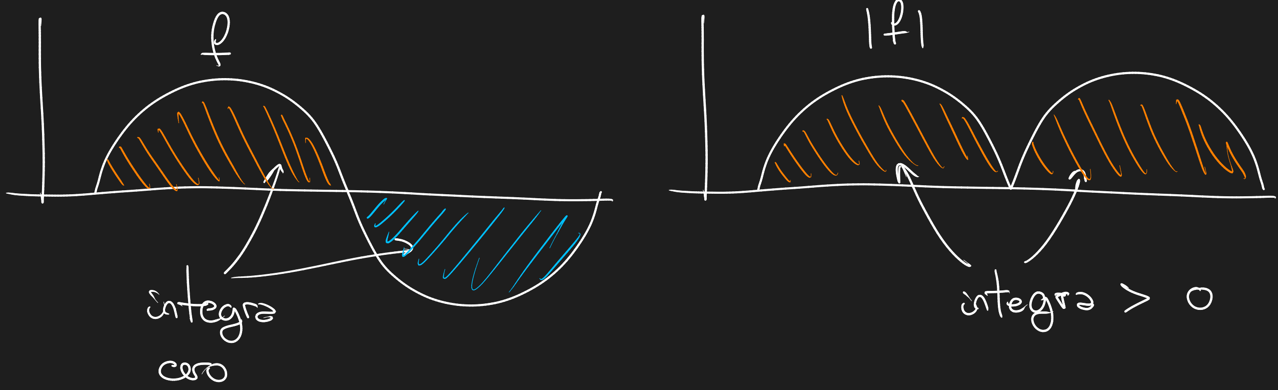
f medible y acotada

Si

$$\left|\int f\right| = \int |f|$$

entonces

$f \geq 0$ AE ó $f \leq 0$ AE



Dem :

$$f = \underbrace{f \cdot \chi_{\{f \geq 0\}}}_{\text{llamo } f^+} - \underbrace{(-f) \cdot \chi_{\{f < 0\}}}_{\text{llamo } f^-}$$

"Parte positiva de f" "Parte negativa"

- $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$
- f^+ y f^- son medibles (pues producto de medibles)

- $f^+ + f^- = |f|$

Ahora:

- $\int |f| = \int f^+ + f^-$

$$= \int f^+ + \int f^-$$

- $\int f = \int f^+ - \int f^-$

$$=: \underbrace{A}_{\geq 0} - \underbrace{B}_{\geq 0}$$

Lema

$A, B \geq 0 \;/\; |A-B| = A+B$

$\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

$\therefore$

Si $\int |f| = \left| \int f \right|$

$$\underbrace{\int f^+}_{A} + \underbrace{\int f^-}_{B} = \left| \int f^+ - \int f^- \right|$$

$$= |A - B|$$

Por lema

$$\Rightarrow \int f^+ = 0 \quad ó \quad \int f^- = 0$$

ejer

$$\Longleftrightarrow f^+ = 0 \text{ AE} \quad ó \quad f^- = 0 \text{ AE}$$

11. Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones medibles e integrables tales que para todo $E \subseteq [0,1]$ medible, se tiene que $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$. Probar que $f = g$ en casi todo punto.

"g" "g"

$$f^+ = 0 \text{ AE} \iff f \leq 0 \text{ AE}$$

$$f^- = 0 \text{ AE} \iff f \geq 0 \text{ AE}$$

$\boxtimes$