

Medida 1

Queremos

- Integrar més funcions
- Comparar $\lim \int f_n$ con $\int f$ $\swarrow \lim f_n = f$

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 5 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k : k \in \mathbb{N}\}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 5 & x \notin \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f_n(t) dt = 5$$

\nwarrow vale 5 salvo en finitos puntos

Nota que

$$f_n \rightarrow f$$

↑
integrar la vale
5 para cualquier n

←
será lo mismo
para el límite? ∞

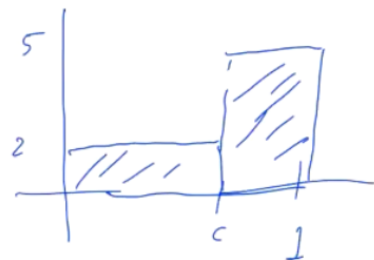
en particular

$f_n \rightarrow f$ pues "pierde" cosas cuando $n \rightarrow \infty$

Funciones Simples

Para $0 < c < 1$, sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq x \leq c \quad \leftarrow \\ 5, & \text{si } c < x \leq 1. \quad \leftarrow \end{cases}$$



$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^c 2 dx + \int_c^1 5 dx$$

$$= 2 \cdot c + 5 \cdot (1 - c) = 2 \text{ long } [0, c] + 5 \text{ long } (c, 1]$$

"medida de
 $[0, c]$ "

"medida de
 $(c, 1]$ "

Escribamos el intervalo $[0, 1]$ como una unión disjunta de dos conjuntos:

$$[0, 1] = A \cup B, \text{ con } A \cap B = \emptyset.$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in A \\ 5, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

IDEA:

$$\int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot \text{"medida de A"} + 5 \cdot \text{"medida de B"}$$



Tomemos $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} = [0, 1] \cap \mathbb{I}$.

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1 \\ 5, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot \text{"medida"}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 5 \cdot \text{"medida"}(\mathbb{I} \cap [0, 1])$$

\downarrow
 DEBERÍA
 SER

NECESITAMOS UNA NOCIÓN DE MEDIDA PARA
CONJ. RAROS ..

Queremos definir una noción de medida para conjuntos que no sean necesariamente intervalos y que cumpla algunas propiedades *razonables*.

$$\mu(A) = \text{"medida de } A\text{"}$$

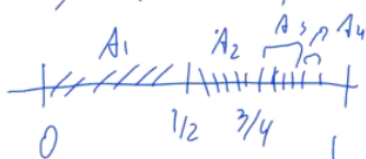
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset$$

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

↙ intervalo

$$\mu((a, b)) = b - a$$



$$\mu((a, b)) = b - a \quad \quad [0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \leadsto \quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Invariante a traslación

$$\mu(A + c) = \mu(A) \quad \forall A, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

↑ que podemos medir

Conjuntos Nulos

El primer paso es definir los conjuntos que "miden cero".

Todavía no tenemos una medida definida, pero podemos calcular longitudes de intervalos.

Definición

Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un **conjunto nulo** si para todo $\varepsilon > 0$ existen contables intervalos abiertos $(U_n)_{n \in \mathbb{J}}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{J}} U_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{J}} \text{long}(U_n) < \varepsilon.$$

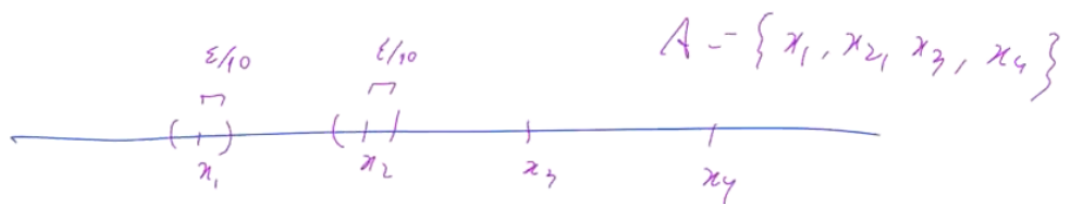
$$A = \{x_0\}.$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \quad U_1 = (x_0 - \varepsilon/3, x_0 + \varepsilon/3)$$

$$A \subset U_1 \quad \text{long}(U_1) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Ejemplo

1. Todo conjunto finito es nulo.
2. Todo conjunto numerable es nulo.
3. Unión numerable de conjuntos nulos es nulo.



$$A \subset (x_1 - \varepsilon/10, x_1 + \varepsilon/10) \cup \dots \cup (x_4 - \varepsilon/10, x_4 + \varepsilon/10)$$

$$\sum_{j=1}^4 \text{long}(U_j) < \varepsilon. \quad (\text{Hacerlo}).$$

Obs: EXISTEN CONJUNTOS NULOS

NO NUMERABLES

(EL CONJ. DE CANTOR).

σ - álgebras

Definición

Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X (o sea, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$).
Decimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra si $X \in \mathcal{A}$ y es cerrada por complementos (respecto a X), uniones numerables e intersecciones numerables.

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}. \quad \text{En part, } \emptyset \in \mathcal{A}.$$

$$X \in \mathcal{A} \text{ y } \emptyset = X \setminus X.$$

$$A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n.$$

$$\text{EJ 1) } \mathcal{A} = \{\emptyset, X\}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}} \quad \bigg| \quad \boxed{\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}}. \quad \text{EJ 2) } \mathcal{A} = \{\emptyset, B, X \setminus B, X\}$$

$$\text{EJ: } \{A \subset \mathbb{R} \mid \#A < +\infty \text{ o } \#(\mathbb{R} \setminus A) < +\infty\}$$

\Rightarrow una σ -alg.

Álgebra generada

• CONJUNTOS NULOS
• INTERVALOS ABIERTOS \rightarrow COMPLEMENTOS, UNIONES NUM
E INTERSECC NUM.

Definición

La σ -álgebra \mathcal{M} generada por los intervalos abiertos y los conjuntos nulos de \mathbb{R} es la σ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue.

Si I es un intervalo, $\mathcal{M}(I)$ es la σ -álgebra de subconjuntos medibles Lebesgue de I .

$$\mathcal{M}(I) = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(I)$$

QUEREMOS MEDIR LOS $A \in \underline{\mathcal{M}}$.

$$\underline{A} \mapsto \underline{\mu(A)} \in [0, +\infty]$$

$$\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

Khe!

Teorema (existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única función μ de \mathcal{M} en $[0, +\infty]$ tal que

- Si $A = (a, b)$, entonces $\mu(A) = b - a$.
- Si $A_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Si los A_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

" σ -aditividad"

uniones e intersecciones
numerables

- Si $A \in \mathcal{M}$, entonces

Importante! $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}.$ "Regularidad"

Teorema

Sea $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ la **medida de Lebesgue** dada por el teorema anterior. Entonces, μ satisface las siguientes propiedades.

- Si $A, B \in \mathcal{M}$ cumplen que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. "Monotonía"
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$.
Recíprocamente, si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\mu(A) = 0$, entonces A es un conjunto nulo.
- Dados $A \in \mathcal{M}$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $A + c \in \mathcal{M}$ y $\mu(A + c) = \mu(A)$.

"Invariante por Traslación"

$$A + c = \{a + c : a \in A\}$$

