

Análisis Avanzado - Integral de Lebesgue 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Definición

$$I = [0, 1]$$

Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice simple medible o simple Lebesgue si existe una partición medible A_1, \dots, A_n de I y números $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

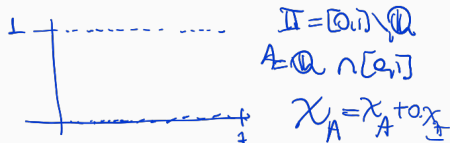
Definición

Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple medible** o **simple Lebesgue** si existe una partición medible A_1, \dots, A_n de I y números $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

Observación

Cuando los conjuntos A_1, \dots, A_n de I son intervalos, una función simple es **escalonada**.



Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

simple

Definimos la **integral de Lebesgue** de f como

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n \underbrace{r_i}_{\text{simple}} \mu(A_i).$$

Integral de Lebesgue de funciones simples

Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ una partición medible de I y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{A_i}(x).$$

Definimos la **integral de Lebesgue** de f como

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i).$$

Definición

X medible

Sea $X \subset \mathbb{R}$ un subconjunto y f de X en \mathbb{R} . Decimos que f es **medible Lebesgue** si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ es medible.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Proposición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada.

Objetivo: definir la integral de Lebesgue de funciones medibles y acotadas.

Proposición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \Rightarrow f$.

Demo: sup $a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in [0,1]$

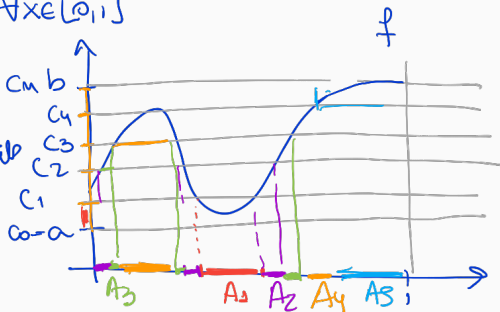
Dado $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{m}$

Partimos $[a, b]$ em n intervalos
$$d_h = \text{long}$$

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad a + \varepsilon_n \quad a + 2\varepsilon_n$$



Definimos $A_n = f^{-1}([C_{n-1}, C_n])$ $\Rightarrow \{A_n\}_{n=1}^m$ es una partición
 $A_n = f^{-1}([C_{n-1}, b])$ $\{x \in X : f(x) \leq a\}$
 en conj medibles de $[0,1]$. \swarrow y f manda medibles en medibles
 Después $f_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k \chi_{A_k}(x)$

$\Rightarrow x \in [0,1] \Rightarrow x \in$ a algun $A_n \Rightarrow f_n(x) = C_k, f(x) \in [C_{n-1}, C_n]$

$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq C_n - C_{n-1} = \epsilon_n = \frac{b-a}{n}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{p} f$ \boxtimes Usamos $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ para tener partición,

para poder definir funciones simples f_n (una sucesión de ellas)

que aproximan f como funciones escalonadas que

$$n \rightarrow \infty, f_n \rightrightarrows f$$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{ \text{funciones simples medibles } \underline{u} : f(x) \leq \underline{u(x)}, x \in [0, 1] \}.$



Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : f(x) \leq u(x), x \in [0, 1]\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : v(x) \leq f(x), x \in [0, 1]\}.$

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos:

- $\mathcal{U}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } u : f(x) \leq u(x), x \in [0, 1]\}.$
- $\mathcal{L}_\mu(f) = \{\text{funciones simples medibles } v : v(x) \leq f(x), x \in [0, 1]\}.$

Proposición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Entonces

$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v \, d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u \, d\mu \right\}.$$

esto nos va a permitir dar una buena definición de la integral de Lebesgue

Dem: Si $u \in \mathcal{L}_\mu^+(f) \wedge v \in \mathcal{L}_\mu^-(f) \Rightarrow \underline{v}(x) \leq f(x) \leq \underline{u}(x)$
 $\forall x \in I$. prop de simples
 $\Rightarrow \int v d\mu \leq \int u d\mu$. *

Como f es acotado $\Rightarrow a \leq f(x) \leq b$
 $\Rightarrow u \in \mathcal{L}_\mu^+(f)$, $a \leq f(x) \leq u(x) \Rightarrow a = \int_0^1 a x_{[0,1]} d\mu \leq \int u d\mu$
 $\Rightarrow \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu^-(f)} \dots \wedge \inf_{u \in \mathcal{L}_\mu^+(f)} \dots$ existen. a. $x_{[0,1]}(x)$?

$$\boxed{*} \Rightarrow \underbrace{\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu^-(f)} \int v d\mu}_S \leq \underbrace{\inf_{u \in \mathcal{L}_\mu^+(f)} \int u d\mu}_I$$

Sea $(g_n)_n$ suc de func. simples med / $g_n \rightarrow^p f$.

Llamamos $\delta_n = \sup_{x \in [a,b]} |g_n(x) - f(x)|$, $\delta_n \rightarrow 0$ (conv unif).

$$\underbrace{g_n(x) - \delta_n}_{\text{simple } \underline{v}_n \in \mathcal{L}_{\mu}(f)} \leq f(x) \leq \underbrace{g_n(x) + \delta_n}_{\text{simple } \underline{u}_n \in \mathcal{L}_{\mu}(f)}$$

← Toda constante es una función simple $a = \int a \cdot \chi_A d\mu$

$$\begin{aligned} I &\leq \int \underline{u}_n d\mu = \int g_n d\mu + \delta_n = \int (g_n - \delta_n) d\mu + 2\delta_n \\ &= \int \underline{v}_n d\mu + 2\delta_n \leq S + 2\delta_n \quad \forall n \end{aligned}$$

Linealidad de \int

$\chi_{[0,1]}(x)$

vale solo en $x = \delta_n$?

$$I \leq S. \Rightarrow I = S. \quad \square$$

Proposición (No demostramos)

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si

$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u d\mu \right\},$$

entonces f es medible. (libro)

Proposición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si

→
$$\sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u d\mu \right\},$$

entonces f es medible.

Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos su integral de Lebesgue como

→
$$\int f d\mu = \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \left\{ \int v d\mu \right\} = \inf_{u \in \mathcal{U}_\mu(f)} \left\{ \int u d\mu \right\}.$$

Handwritten notes: "prop" with an arrow pointing to the infimum, and "integral" written above "integral de".

Proposición

Sea $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples medibles definidas en $[0, 1]$ que converge uniformemente a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu.$$

Dem: llamamos $\delta_n = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g_n(x)| \Rightarrow \delta_n \rightarrow 0$.

Además $g_n - \delta_n \in L^1(\mu)$, $g_n + \delta_n \in L^1(\mu)$

$(\int g_n d\mu)_n \in \mathbb{R}$ es conv en \mathbb{R} :

$$|\int g_n d\mu - \int g_m d\mu| = |\int g_n - g_m d\mu| \leq \int |g_n - g_m| d\mu$$

$g_n \Rightarrow f$ $(g_n)_n$ Uniformemente de Cauchy.

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \exists m_0 / \\ m, n \geq m_0 \\ \Rightarrow |g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon \\ \forall x \\ \Rightarrow \int |g_m - g_n| d\mu < \varepsilon \int 1 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Como $(\int g_n d\mu)_n$ es conv y $\int (g_n - \delta_n) d\mu = \int g_n d\mu - \delta_n$

y $\int (g_n + \delta_n) d\mu = \int g_n d\mu + \delta_n \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - \delta_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (g_n + \delta_n) d\mu$

$$\boxed{\int f d\mu = \inf_{u \in \mathcal{L}_\mu(f)} \int u d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int (g_n + \delta_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - \delta_n) d\mu$$

$$\leq \sup_{v \in \mathcal{L}_\mu(f)} \int v d\mu = \int f d\mu$$



Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$. (consecuencia de la prop. y linealidad en simples.)

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad (\text{x definición})$$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$

Teorema: Propiedades de la Integral de Lebesgue

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas.

- **Linealidad:** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

- **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

- La función $|f|$ es medible y $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$

- Si $f(x) = g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$

Dem: $h = f - g$ medible

$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1] \setminus E$ con $E/\mu(E) = 0$.

$\Rightarrow h(x) = 0$ en $[0,1] \setminus E$.

además $\Rightarrow h$ es acotada y $\therefore |h| = |h| \chi_E \leq \underbrace{n \chi_E}_1$

$$\Rightarrow \left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{linealidad}}}{=} \left| \int f - g d\mu \right| \underset{\substack{\downarrow \\ \checkmark}}{\leq} \int |f - g| d\mu$$

$$= \int |h| d\mu \underset{\text{monotonía}}{\leq} \int n \chi_E d\mu = n \mu(E) = 0. \Rightarrow \boxed{\int f d\mu = \int g d\mu}$$



Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada, y se $E \subseteq [0, 1]$ un conjunto medible.
Definimos la **integrale de f sobre E** como

$$\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu.$$

Definición

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada, y se $E \subseteq [0, 1]$ un conjunto medible. Definimos la **integrable de f sobre E** como

$$\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu.$$

Proposición (Ejercicio)

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada. Si $\{E_n\}_{n=1}^N$ una colección de conjuntos medibles del $[0, 1]$ disjuntos 2 a 2 y $E = \bigcup_{n=1}^N E_n$, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^N \int_{E_n} f d\mu.$$

$$= \int f \cdot \chi_{E_1} + f \cdot \chi_{E_2} + \dots + f \cdot \chi_{E_N}$$

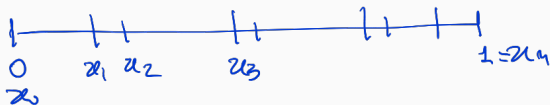
$$= \int_E f \cdot \sum_{n=1}^N \chi_{E_n} = \int_E f \cdot \chi_E$$

Integral de Riemann vs Integral de Lebesgue

$\chi_{(\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]} \Rightarrow$ integrable Lebesgue pero no Riemann.

Recordamos:

$[0,1]$ y $\pi = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$

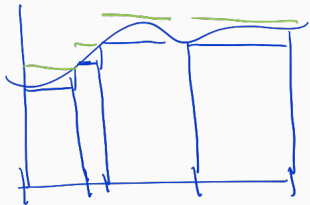


$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
acotado.

$[x_i, x_{i+1}]$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$



$$I(f, \pi) = \sum_{i=0}^n m_i \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{\mu([x_i, x_{i+1}])}$$

$$S(f, \pi) = \sum_{i=0}^n M_i \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\int \sum_{i=0}^n m_i x_{[x_i, x_{i+1}]} d\mu} \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_\mu(f)$$

$$\text{Si } \sup_{\pi} I(f, \pi) = \inf_{\pi} S(f, \pi) = \int_0^1 f(t) dt \quad \underbrace{\int \sum M_i x_{[x_i, x_{i+1}]} d\mu}_{\mu \in \mathcal{M}_\mu(f)}$$

$$\forall \pi, \int u d\mu = I(f, \pi) \leq S(f, \pi) = \int u d\mu$$

$$\underbrace{\sup_{\pi} I(f, \pi)}_{\underline{S}} \leq \sup_{v \in \mathcal{L}_{\mu}(f)} \int v d\mu$$

$$\leq \inf_{u \in \mathcal{L}_{\mu}(f)} \int u d\mu$$

$$\leq \inf_{\pi} S(f, \pi) = \overline{S}$$

Si f es integrable Riemann $\Rightarrow \underline{S} = \overline{S}$

$$y \therefore \sup_{v \in \mathcal{L}_{\mu}(f)} \int v d\mu = \inf_{u \in \mathcal{L}_{\mu}(f)} \int u d\mu \Rightarrow f \text{ medible}$$

$$\Rightarrow \int f d\mu = \underline{S} = \overline{S} = \int_0^{\infty} \mu_f(t) dt.$$

Prop de más arriba
(que no probamos)