

# Compacidad II

Repaso:

## Definición

Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Decimos que un subconjunto  $K$  de  $E$  es **compacto** si toda sucesión en  $K$  tiene una subsucesión convergente en  $K$ .

## Proposición

Sea  $K \subset E$  compacto. Entonces  $K$  es cerrado y acotado.

## Teorema de Heine-Borel

Un conjunto  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

## Observación

Un conjunto infinito con la métrica discreta es cerrado y acotado pero no compacto.

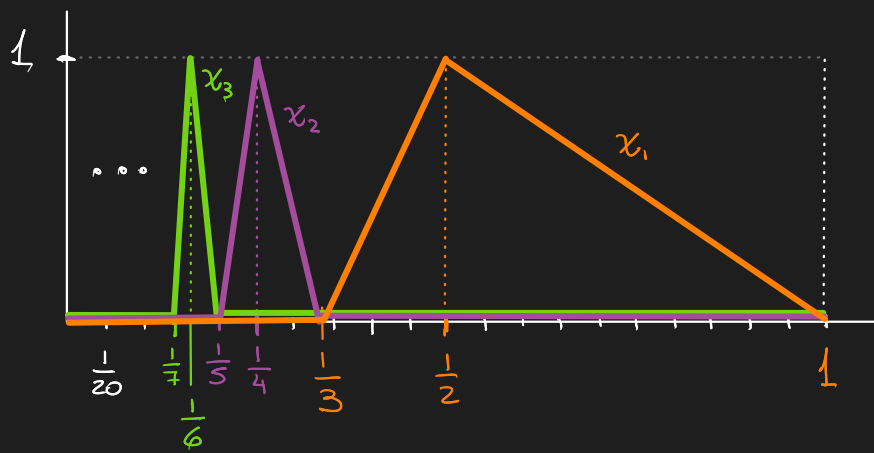
Ejemplo:

- En  $\mathcal{C}([0,1])$ , cerrado y acotado no implica compacto
- Usamos  $d_\infty$  (para  $d_1$ : ejercicio)

$A = \overline{B}(0,1)$  ← es cerrado (por ser bola CERRADA)  
 $\uparrow$  función  $\equiv 0$  y acotado (por ser BOLA)

Veamos que no es compacto

(idea, sin detalles)



$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{en } \frac{1}{2^n} \\ \text{"en el medio es lineal"} & \\ 0 & \text{en } [0, \frac{1}{2^{n+1}}] \cup [\frac{1}{2^{n-1}}, 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) = 1 \quad \forall n, m \quad (\text{por los triángulos no se solapan})$$

y como  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$

y encontré que no es convergente ( $d(x_n, x_m) \rightarrow 1$ )

$\Rightarrow (x_n)$  no tiene subseq. convergente.

$\Rightarrow A$  no es compacto.

Obs:

- Notar que este conjunto se comporta como la métrica discreta

### Teorema

Sea  $(E, d)$  un e.m.. Entonces  $K \subset E$  es compacto si y sólo si todo  $A \subset K$  infinito tiene un punto de acumulación en  $K$ .

$\Rightarrow$ )  $A \subset K$  INFINITO.  $\Rightarrow \exists (y_n)_n \subset A$  sucesión de elementos distintos de  $A$ . Como  $(y_n)_n \subset A \subset K$   
 $\Rightarrow \exists (y_{n_k})$  suces. conv. a  $y \in K$ . COMPACTO

$(y_{n_k}) \subset A$ , con todos distintos,  $y_{n_k} \rightarrow y$

$\Rightarrow y$  es pto de ac. de  $A$   
 $\uparrow$   
 $K$



$\Leftarrow$ )  $\nexists \nexists K$  COMPACTO.

$(x_n)_n \subset K$ .  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

- Si  $A$  es FINITO,  $\exists$  algún valor de la suc. que se repite  $\infty$  veces:  $\exists x \in A / x_{n_k} = x \forall k$ .  
 $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  es suces. CONV.

- Si  $A$  es INFINITO  $\Rightarrow \exists x \in K$  pto de ac. de  $A$   
 $\xRightarrow{\exists J}$   $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  suces. que converge a  $x$ .

### Teorema

Sea  $(E, d)$  un e.m.. Entonces  $K \subset E$  es compacto si y sólo si todo cubrimiento de  $K$  por abiertos admite un subcubrimiento finito.

### Definición

Un cubrimiento por abiertos de  $K$  es una familia  $(V_i)_{i \in I}$  de subconjuntos abiertos de  $E$  tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

### Definición

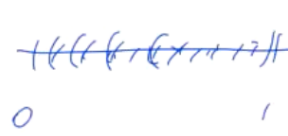
Cuando existen  $i_1, i_2, \dots, i_N \in I$  tales que

$$K \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_N}$$

decimos que  $(V_{i_k})_{k=1}^N$  es un subcubrimiento finito de  $(V_i)_{i \in I}$ .

### Teorema

Sea  $(E, d)$  un e.m.. Entonces  $K \subset E$  es compacto si y sólo si todo cubrimiento de  $K$  por abiertos admite un subcubrimiento finito.

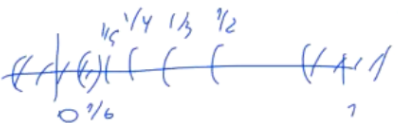
$\rightarrow \bullet (0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 1)$  

$\{ (1/n, 1) \}_n$  NO admite subcub. finito.

$\bullet [0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 1) \cup \{0\} \cup \{1\}$  NO cub  
x AB.

NO AB.

$\bullet [0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 1) \cup (-\delta, \delta) \cup (1-\delta, 1+\delta) \rightarrow$  cub  
x  
AB



$[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (1/n, 1) \cup (-\delta, \delta) \cup (1-\delta, 1+\delta)$

ejemplos particulares,

### Teorema

Sea  $(E, d)$  un e.m.. Entonces  $K \subset E$  es compacto si y sólo si todo cubrimiento de  $K$  por abiertos admite un subcubrimiento finito.

$\Leftarrow$ ) Sea  $A \subset K$  infinito y veamos que tiene un pto de ac. en  $K$ .

SUP. QUE NO: dado  $x \in K$ ,  $x \notin A' \Rightarrow \exists \eta_x /$

$B(x, \eta_x) \cap A$  es finito.

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \eta_x) \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_N /$$

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \eta_{x_i}) \Rightarrow A = K \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^N (B(x_i, \eta_{x_i}) \cap A)$$

$\therefore A' \neq \emptyset \quad \therefore K \text{ comp.}$

UNION FINITA FINITO FINITO ABS

### Teorema

Sean  $(E, d)$ ,  $(E', d')$  e.m. y sea  $f : E \rightarrow E'$  continua. Si  $K \subset E$  es compacto, entonces  $f(K)$  es compacto en  $E'$ .

DEM: "FUNC. CONT MANDAN COMPACTOS EN COMPACTOS".  
 $f$  y  $f(K)$  compacto.

Sea  $(y_n)_n \subset f(K)$   $\forall n/m \in \mathbb{N}$ .  $\exists x_n \in K / y_n = f(x_n)$

$(x_n)_n \subset K \Rightarrow$  TIENE SUBSUC  $(x_{n_k})_k$  conv. a  $x \in K$ .

$\Rightarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \in f(K) \Rightarrow \exists (y_{n_k})$  conv. a  $f(x) \in f(K)$

$\therefore f(K)$  es compacto

### Corolario

Sea  $K \subseteq E$  compacto y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces,

- $f$  es acotada en  $K$ : existe  $c > 0$  tal que  $|f(x)| \leq c$  para todo  $x \in K$ .
- $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $K$ .

DEM:  $K$  comp  $\xrightarrow{\text{TBO}}$   $f(K)$  es compacto  $\Rightarrow$  es acot. en  $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists c / |f(x)| \leq c \ \forall x \in K$

$\cdot \underbrace{s = \sup \{ \underbrace{f(x)}_{\text{acot.}} : x \in K \}}_{\text{acot.}} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset K. \quad f(x_n) \rightarrow s$

$K$  compacto,  $\exists (x_{n_k})_k$  conv. a  $x_0 \in K$ .

$s \leftarrow f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \Rightarrow \boxed{s = f(x_0)} \Rightarrow s \text{ es máx.}$

### Teorema

Sean  $(E, d)$ ,  $(E', d')$  e.m., y sea  $f : E \rightarrow E'$ . Si  $f$  es continua y  $E$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua.

DEM:  $\sup f \not\equiv$  es u.c.  $\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \exists (x_n)_n, (y_n)_n \subset E \\ \text{tales que} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \\ d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \end{array} \right]$

$(x_n)_n \subset E$  compacto  $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_k$  conv. a  $x_0 \in E$ .

$(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset E$  compacto  $\Rightarrow \exists (y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  conv. a  $y_0 \in E$ .

$(x_{n_{k_j}})_j$  es subsec. de  $(x_{n_k})_k \Rightarrow (x_{n_{k_j}})_j$  conv. a  $x_0$ .

$$x_{n_j} \rightarrow x_0 \quad , \quad y_{n_j} \rightarrow y_0$$

$$d(x_{n_j}, y_{n_j}) \rightarrow 0 \quad (\text{salvo de uma que tende a } 0)$$

$$d'(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \geq \varepsilon_0$$

$$0 \leq d(x_{n_j}, y_{n_j}) \rightarrow d(x_0, y_0) \Rightarrow d(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$$

$$\varepsilon_0 \leq d'(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \rightarrow d'(f(x_0), f(y_0))$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $x_0 \quad y_0$   
 $f(x_0) \quad f(y_0)$

$$d'(f(x_0), f(y_0))$$

$\varepsilon_0$

es unif

contínua

0 ABS