

Suggerenza :



**Daniel Carando**

6:17 PM

Lo que podés hacer para empezar es probar que es continua en el (3,2), por ejemplo. Ahí vas a ver bien cómo el  $\delta$  lo armás usando tanto el 3 como el 2 y te va a dar una idea de qué hacer en el caso general.

Una estrategia estándar puede ser tomar un  $\delta$  auxiliar para poder acotar ciertas expresiones que te quedan.

por ejemplo, si fijás  $\delta_1 = 1$ , entonces cuando tomes  $d((x, y), (3, 2)) < \delta_1$ , sabés que  $x$  está entre 3 y 4 y  $y$  está entre 1 y 3.

6:23 PM

Si después necesitas otro  $\delta_2$  para llegar finalmente al menor que  $\varepsilon$ , tu  $\delta$  va a ser el mínimo de todos los que usaste en el camino.

(EDITED) Y un comentario: vos escribiste que distancia usual en  $\mathbb{R}$  es la  $d_1$ , pero en realidad también es la  $d_2$ :

6:28 PM

$$d_1(s, t) = |s - t| = \sqrt{(s - t)^2} = d_2(s, t).$$

También es la  $d_\infty$ , claro.

Def. de  $f$  continua  $\left( \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \right)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

$$f\left(B(x, \delta)\right) \subseteq B\left(f(x), \varepsilon\right)$$

Lo pruebo en  $(x, y) = (3, 2)$

Sea

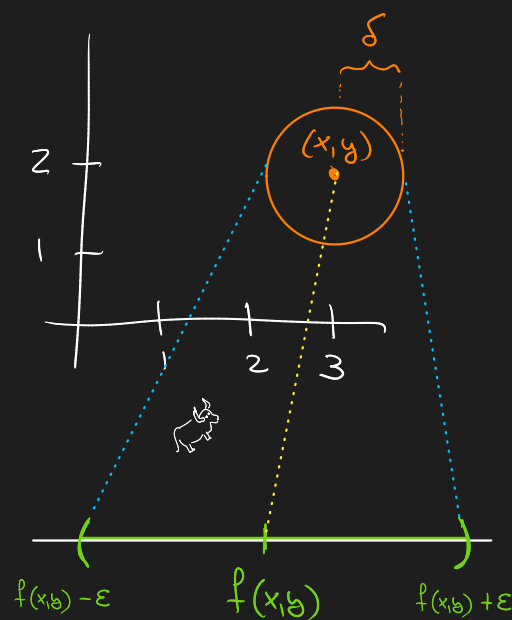
$$(x_0, y_0) \in \mathcal{B}((x, y), \delta)$$

me fijo solo en:

$$(x_0, y_0) \in \mathcal{B}((3, 2), \delta)$$

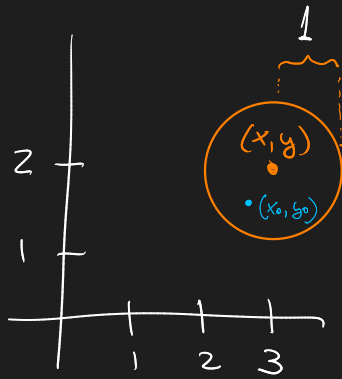
$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x, y), (3, 2)) < \delta \right\}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$$



Si  $\delta = 1$ :

$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x, y), (3, 2)) < 1 \right\}$$



$$\underbrace{(x-3)^2 + (y-2)^2}_{< 1^2}$$

$$f(x-3, y-2) < 1$$

en el caso general sería

$$f(x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) < \delta^2$$

con  $\tilde{x}, \tilde{y}$  los puntos del dominio de  $f$

Volviendo, quiero que la bola del codominio contenga a todos estos  $f(x_0, y_0)$ , o sea

quiero que

donde veo continuidad

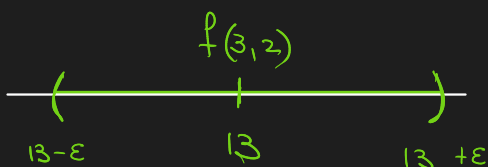
$$f(x_0, y_0) \stackrel{?}{\in} \mathcal{B}(f(3, 2), \varepsilon)$$

$$\in \left\{ c \in \mathbb{R} : d(c, \underbrace{f(3, 2)}_{3^2 + 2^2}) < \varepsilon \right\}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}$$

$$|c - 13|$$

$$= |x_0^2 - 3^2 + y_0^2 - 2^2|$$



Como

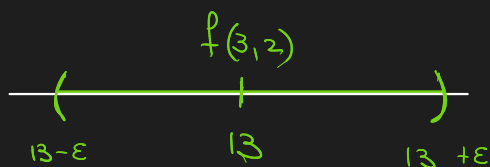
$$f(x-3, y-2) < 1$$

Restringo los valores de  $x_0, y_0$  acotando  $f(x_0, y_0)$

$$f(x_0, y_0) < 1$$

y volviendo:

$$\overbrace{f(x_0, y_0)}^{< 1} \stackrel{?}{\in} \left\{ c \in \mathbb{R} : d\left(\overbrace{f(x_0, y_0)}^{< 1}, \underbrace{f(3, 2)}_{13}\right) < \varepsilon \right\}$$



$$\begin{aligned} & \overbrace{|f(x_0, y_0) - 13|} \\ & < |1^2 - 13| = 12 < \varepsilon \end{aligned}$$

• Armo caso general  $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$

$$|\delta^2 - (x^2 + y^2)| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \delta^2 - (x^2 + y^2) < \varepsilon$$

$$x^2 + y^2 - \varepsilon < \delta^2 < x^2 + y^2 + \varepsilon$$

$$|\delta| < \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon}$$

$$\begin{aligned} & \delta > 0 \\ & \delta < \sqrt{x^2 + y^2 + \varepsilon} \end{aligned}$$

Finalmente, obtuve

$\forall \varepsilon > 0$ , elijo algún  $\delta$  /  $\delta < \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon$

pej:  $\delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  /

$$f(B((x, y), \delta)) \subseteq B(f(x, y), \varepsilon)$$

□