Leandro Carreira LU: 669/18

Segunda Entrega

14. Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}.$$

E se compone de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ (llamados B)

tales que

(I) $\#B = \#(\mathbb{N} \setminus B)$

y además

(II) $\#B = \aleph_0$

(II) me dice que B es numerable (infinito)

(I) restringe B / $\mathbb{N} \setminus B$ siga siendo numerable.

(ie $\mathbb{N} \setminus B$ no puede ser finito)

$\therefore \quad E \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

ya que E se compone de subconjuntos

numerables (infinitos) de $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad \#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

y como E es infinito

ejercicio 13.c

$$\aleph_0 \leq \#E \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

$\Rightarrow$ Tengo dos posibilidades

$$\#E \overset{?}{=} \aleph_0$$

ó

$$\#E \overset{?}{=} c$$

Para poder hacer esta afirmación, unicamente sabiendo lo enunciado u observado mas arriba, tendríamos que estar tomando como verdadero lo que se conoce como la Hipotesis del continuo:
No existe un cardinal t tal que $\aleph_0 < t < c$

Esto es algo que "bajo el marco axiomatico mas tipico que se usa en matematica" (al menos segun mi parecer), no se asume como verdadero ni falso.
Es decir, es una proposición independiente de "los axiomas tipicamente utilizados".

Osea que intentariamos hacer el ejercicio sin asumir esto.

Sé que

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$$

está compuesto de los subconjuntos numerables de $\mathbb{N}$ que cumplen $\#\mathbb{N}\setminus B = \aleph_0$

y que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{B : B \subseteq \mathbb{N}\}$$

está compuesto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$

entonces, puedo decir que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ no sea numerable ó } B \text{ es numerable pero } \mathbb{N}\setminus B \text{ no es numerable}\}$$

y como

$$\#B \leq \aleph_0 \quad \forall B \subseteq \mathbb{N}$$

entonces

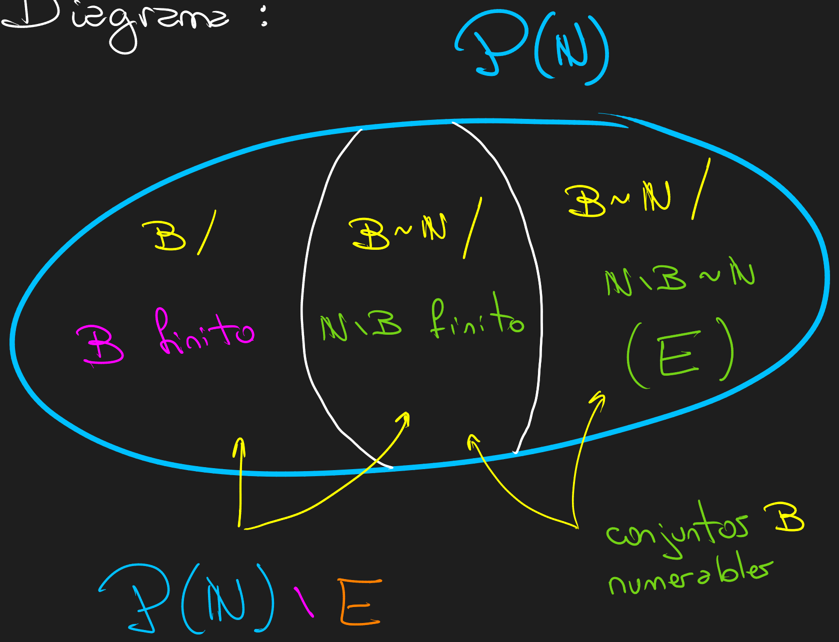
Conj. Naturales no numerables

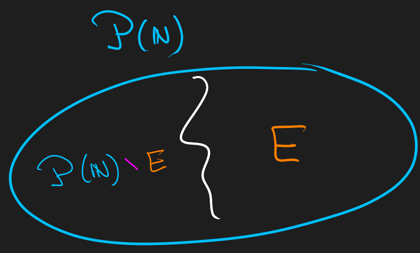
$$\#B < \#\mathbb{N}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito ó}$$

B es numerable con $\mathbb{N}\setminus B$ finito)

Diagrama :





Puedo usar el ejercicio 12 que dice :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } X \text{ es numerable} \\ \Rightarrow \mathcal{P}_f(X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ es finito}\} \text{ es numerable}\end{array}}$$

Con lo que puedo asegurar que es numerable

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus E = \underbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\}}_{\text{es numerable}} \cup \underbrace{\{B \subseteq \mathbb{N} : B \sim \mathbb{N} \text{ con } \mathbb{N}\setminus B \text{ finito}\}}_{?}$$

Basta encontrar este cardinal.

Puedo escribir el conjunto como

$$\{B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N}\setminus B \text{ es finito}\}$$

(pues si $\mathbb{N} \setminus B$ es finito $\Rightarrow$ B debe ser infinito)

Llamo

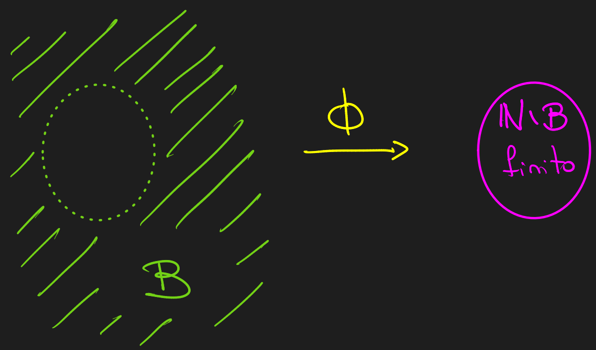
$$X := \{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \}$$

$$Y := \{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ es finito} \}$$

Busco una función Biyectiva:

$$\phi : Y \to X$$

$$B \mapsto \mathbb{N} \setminus B$$



Dem

ϕ es inyectiva pues:

$$\forall B \in Y, \forall D \in Y,$$

Obs: Siempre ocurrira con cualquier función que si B = D, entonces

$$\boxed{\phi(B) = \phi(D)}$$

Para ver la inyectividad solo debemos observar

• Si $B = D$:

X

$B = D$

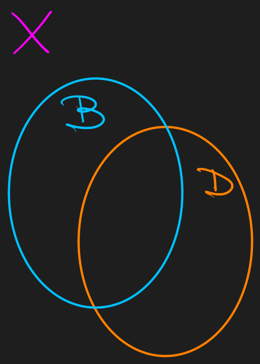
$$\phi(B) = \mathbb{N} \setminus B \underset{B=D}{=} \mathbb{N} \setminus D = \phi(D)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(B) = \phi(D) \quad ✓$$

• Si $B \neq D$:

$$\phi(B) = \mathbb{N} \setminus B$$

$$\phi(D) = \mathbb{N} \setminus D$$



qvq

$$\mathbb{N} \setminus B \neq \mathbb{N} \setminus D \quad \text{si} \quad B \neq D$$

supongo

$$\mathbb{N} \setminus B = \mathbb{N} \setminus D \quad \text{con} \quad B \neq D$$

$\Rightarrow$ si $B \neq D$

$$\exists x \in \mathbb{N} \,/\, x \in B \wedge x \notin D$$

Esto no es necesariamente asi, ya que podría ser que B este estrictamente incluido en D. Aun así, en general podemos suponer que estamos bajo el caso enunciado (ya que si eso no ocurre, simplemente hay que cambiarB por D en el argumento)

$\Rightarrow$ Como $x \in B$ y $B \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \notin \mathbb{N} \setminus B$

y como $x \notin D$ y $D \subset \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \setminus D$

Abs!

Pues $\mathbb{N} \setminus B = \mathbb{N} \setminus D$

$$\therefore \quad \mathbb{N} \setminus B \neq \mathbb{N} \setminus D$$

Demostré que

$$\forall B, D \in Y,$$

$$\text{si } \phi(B) = \phi(D) \Rightarrow B = D$$

$\therefore \quad \phi$ es inyectiva.

ϕ es suryectiva si :

$$\forall G \in X,\ \exists B \in Y \ / \ \phi(B) = G$$

lo cual es casi inmediato de ver, sabiendo

$$Y := \{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ es finito} \}$$

$$X := \{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \}$$

$$\underbrace{\phi(B)}_{\substack{\text{elemento}\\ \text{infinito}\\ \text{de } Y}} \overset{\text{def de } \phi}{=} \underbrace{\mathbb{N} \setminus B}_{\text{elemento finito de } X}$$

- Todos los $G \in X$ son finitos y todos los $B \in Y$ son tales que $\mathbb{N} \setminus B$ sea finito.
- Además, X es el conjunto de todos los conjuntos finitos,
- y como cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ se puede escribir como $\mathbb{N} \setminus B$, para algún B infinito en $\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \forall G \in X,\ \exists B \in Y \ / \ \phi(B) = G = \mathbb{N} \setminus B$$

$\therefore \ \phi$ es sobreyectiva

$\therefore \ \phi$ es Biyectiva

y

$$X \sim Y$$

Volviendo, tenía

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \overbrace{\underbrace{\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \}}_{X \text{ es numerable}}}^{X} \cup \overbrace{\underbrace{\{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \}}}^{Y}$$

Como $Y \sim X$

$\Rightarrow Y$ es numerable

Sabemos que la unión finita de conjuntos numerables es numerable (por ej 9):

$$\Rightarrow \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E \right) \sim \mathbb{N}$$

Además, tengo que

$$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

y

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)$$

$$\Rightarrow \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \# \left(E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \right)$$

$$c = \# \left(E \cup \underbrace{(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E)}_{\text{obtuve } \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E = \# \mathbb{N}} \right)$$

Supongo que

$$E \sim \mathbb{N}$$

y llego a un absurdo.

¡Hasta aca el ejercicio esta excelente! ¿como podríamos terminarlo sin asumir la hipotesis del continuo?

Obtuve que

$$(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Como la unión de finitos numerables es numerable:

$$E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) \sim \mathbb{N}$$

Abs! Pues $E \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

$$\therefore \# E = c$$

$\blacksquare$