

Funciones Continuas

o o o
↑
w!

Def

Una función

$$f : E \rightarrow E'$$

es continua en el punto

$$x \in E$$

si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad \text{si } y \in E \wedge d(x, y) < \delta$$

$$\Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

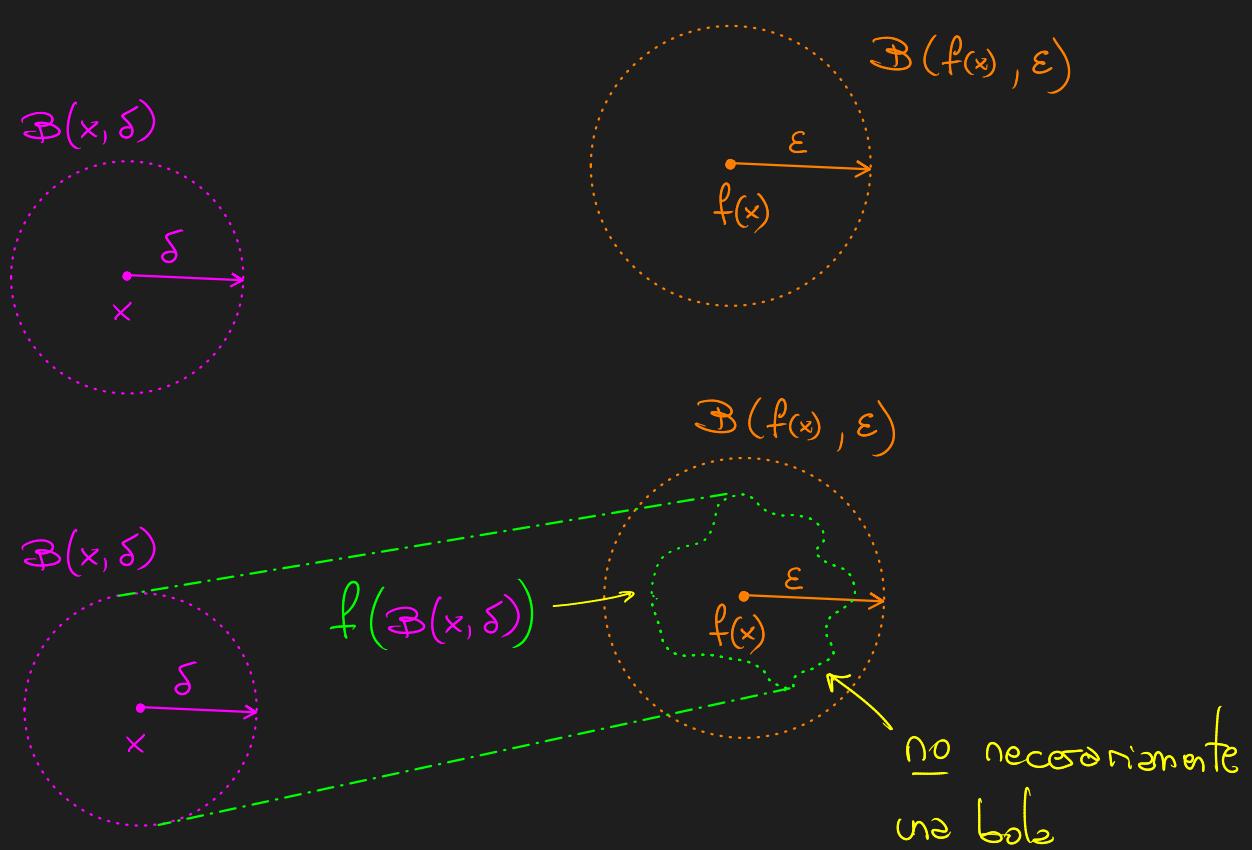
Equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$$

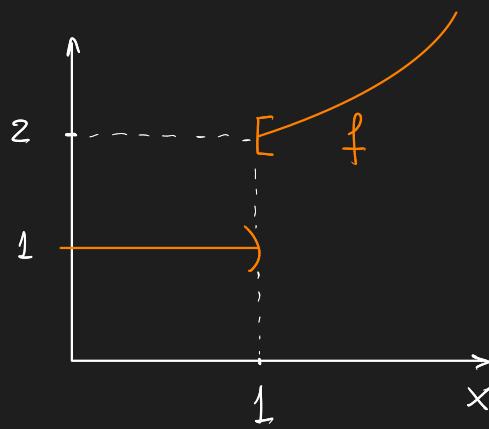
$$\uparrow \forall y \in B(x, \delta)$$

es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$



Ej de no continuo

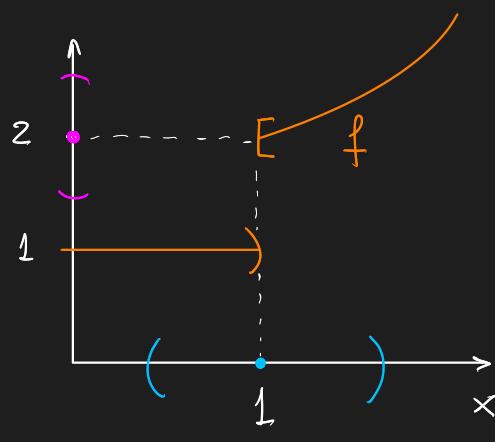


f no es continuo en $x=1$
pues:

$$f(1) = 2$$

$$\Rightarrow B(x, \delta) = B(1, \delta)$$

\uparrow
 $x=1$
 $\delta=?$



$$B(f(x), \epsilon) = B\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

\uparrow
 $f(1) = 2$
 $\underbrace{\epsilon = \frac{1}{2}}_{\text{elijo}}$

6. Vale que

$$f(B(1, \delta)) \subset B(z, \frac{1}{2})$$

para algún δ ?

No pues

$$1 \in f(B(1, \delta))$$

pues

$$1 \notin B(z, \frac{1}{2})$$

Borrador Texto Deshacer Rehacer

Observación

Una función $f : E \rightarrow E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E' , existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Dem: \Rightarrow \forall ent. de $f(x)$. Qdg $\exists U$ ent. de x / $f(U) \subseteq V$.

$\Leftrightarrow f(x) \in V^\circ, \exists \varepsilon > 0 / B(f(x), \varepsilon) \subseteq V^\circ \subseteq V$.

Como f cont en x , $\exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ tomo $U = B(x, \delta)$.

\Leftarrow $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.

Tomo $V = B(f(x), \varepsilon)$ qj es ent. de $f(x)$. Se qj $\exists U$ ent. de x / $f(U) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Ahora, V ent. de $x \Rightarrow x \in U^\circ$ y:

$\exists \delta > 0 / B(x, \delta) \subseteq U^\circ \subseteq V \Rightarrow f(B(x, \delta)) \subseteq f(U) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno V de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un entorno de x .

Ejemplo

1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ las de análogas I.
 $\downarrow d(x, y) = \|x - y\|$

2) E espacio métrico n $x_0 \in E$ abierto.
(i.e: $\exists r > 0 / B(x_0, r) = \{x_0\}$)
 \Rightarrow Todo función dif. en E es cont. en x_0 .

Si x_0 , radio $r = r \Rightarrow f(B(x_0, r)) = f(\{x_0\})$
 $= \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

3) E es discreto \Rightarrow todo función dif en E
es continuo en todo punto de E .

$\Downarrow x \in E \wedge f: E \rightarrow E'$

$B(x, 1/2) = \{x\} \rightarrow$ Sigo como en 2).

Teorema

Una función $f : E \rightarrow E'$ es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.

En otras palabras, f es continua en x si y sólo si cumple:

- para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a x , se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset E'$ converge a $f(x)$.

Dem: \Rightarrow) f cont. en x . y sea $(x_n)_n \subseteq E / x_n \rightarrow x$

Qrg $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\exists f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)$.

$\exists \delta > 0$ qrg $\exists n_0 \in \mathbb{N} / d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ hzlo.

$\exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ (cont.).

Como $x_n \rightarrow x$, $\exists m \in \mathbb{N} / x_n \in B(x, \delta) \quad \forall n \geq m$.

$\Rightarrow f(x_n) \in f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon), \quad \forall n \geq m$

continuidad.

\Leftarrow) Sup. que f no es cont. en x . $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 /$

no hay $\delta > 0$ que cumpla q $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

$\forall \delta > 0 \exists y \in B(x, \delta) / f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$\delta = 1/m \Rightarrow \exists y_m \in B(x, 1/m) / f(y_m) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$d(x, y_m) < 1/m \rightarrow y_m \rightarrow x$.

$d(f(x), f(y_m)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(y_m) \notin B(f(x), \varepsilon)$ ABS!

Ejemplo

$E = C([0,1])$ d.o.

$$E_{1/2} : C([0,1]) \rightarrow (\mathbb{R}, 1.1)$$
$$f \longmapsto f(1/2)$$

$E_{1/2}$ es continuo $\forall f$.

Sea $f_u \rightarrow f$ en d.o. q.vq $E_{1/2}f_u \rightarrow E_{1/2}f$.

$$|E_{1/2}f_u - E_{1/2}f| = |f_u(1/2) - f(1/2)|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} |f_u(t) - f(t)|$$

$$= d_o(f_u, f) \rightarrow 0$$
$$(f_u \rightarrow f)$$

Def:

Una función $f : E \rightarrow E'$ es **continua en E** si es continua en todo punto $x \in E$.

Teorema

Una función $f : E \rightarrow E'$ es continua si y sólo si la preimagen de todo abierto de E' es abierto en E .

f cont $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ es abierto $\forall U \subseteq E'$ abierto
en E

Las funciones continuas tiran abiertos hacia atrás en abiertos

Dem:

$\sup f$ cont

Dem: \Rightarrow Sea $U \subseteq E'$ ab \ddot{o} b q \forall $f^{-1}(U)$ es ab \ddot{o} erto.

Sea $x \in f^{-1}(U)$. Como $f(x) \in U$, $\exists \varepsilon > 0 / B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$

(ab \ddot{o} to) $\xrightarrow{\text{cont.}} \exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$.

$\Rightarrow B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq \underline{f^{-1}(U)}$; \therefore es ab \ddot{o} to.

↑
Preimagen

Por qu \acute{e} es ab \ddot{o} erto?

$\emptyset \subseteq \square$ y no ser ab \ddot{o} erto

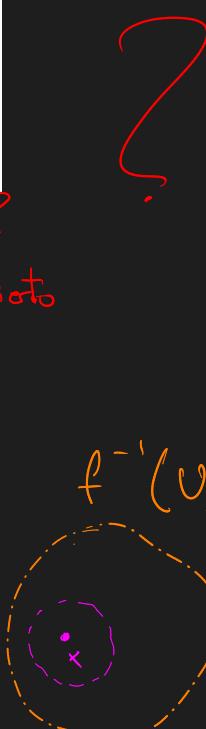
$\sup f^{-1}(U) \subseteq E$ es ab \ddot{o} erto $\forall U \subseteq E'$ ab \ddot{o} erto

\Leftarrow Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, q \forall $\exists \delta > 0 / f(B(x, \delta)) \subseteq \underline{B(f(x), \varepsilon)}$

$U = B(f(x), \varepsilon)$ es ab \ddot{o} to $\Rightarrow f^{-1}(U)$ tambi \acute{e} n y

$x \in f^{-1}(U) \Rightarrow \exists \delta > 0 / B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(B(x, \delta)) \subseteq U = B(f(x), \varepsilon)$.



Prop: f cont. en $E \Leftrightarrow f^{-1}(F)$ es cerrado en E $\forall F \subseteq E'$ cerrado.

Ejercicio

Ver que lo mismo vale cambiando abiertos por cerrados.

Ejercicio! Probar ↑.

Se vale:

$f^{-1}(F)$ es cerrado en $E \quad \forall F \subseteq E'$ cerrado

$f \circ f$:

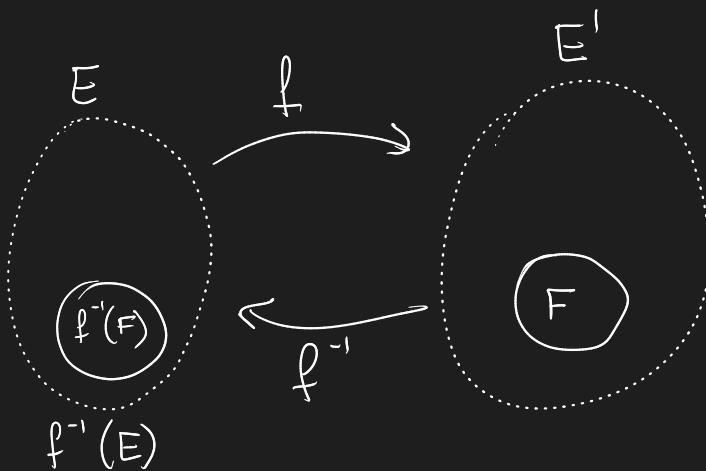
- es continua:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

la def de cont. no usa los border
del intervalo/conj.

σ'

$$B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$



Si F es cerrado
 $\Rightarrow F^c = E' \setminus F$ es abierto

Como

F^c abierto,
 $f^{-1}(F^c)$ es abierto

\Rightarrow vale lo mismo que con abiertos
 \supset abiertos

Si:

$f^{-1}(F)$ es cerrado en $E \quad \forall F \subseteq E'$ cerrado

$\Rightarrow f^{-1}(F^c) \supset ?$
es abierto en $E \quad \forall F^c \subseteq E'$ abierto

\Rightarrow Por Teorema "de abiertos a abiertos"

f es continua.

Si:

f es continua

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ es abierto en $E \quad \forall F \subseteq E'$ abierto

\uparrow

Por Teorema
de abiertos a
abiertos

• Como F abierto en E'

$\Rightarrow F^c$ es cerrado en E'

• Como $f^{-1}(F)$ es abierto en E

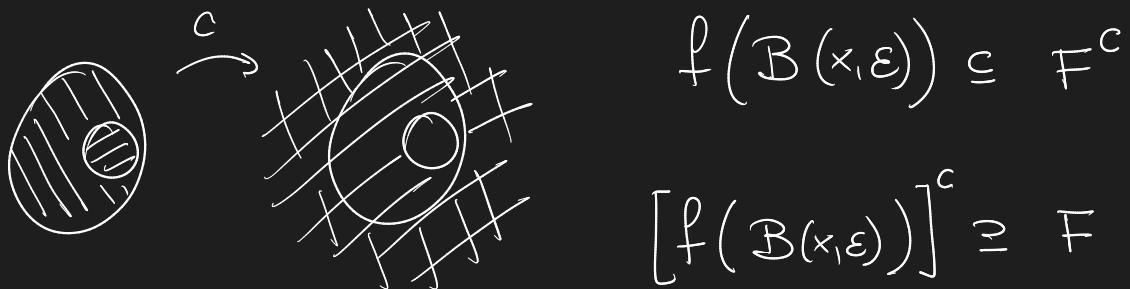
$\Rightarrow f^{-1}(F^c)$ Falta probar!

$f^{-1}(F)$ es cerrado $\Leftrightarrow f^{-1}(F^c)$ es abierto

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ es cerrado $\stackrel{?}{\Rightarrow} f^{-1}(F^c)$ es abierto

$\underbrace{[f^{-1}(F)]^c}$ es abierto

$\forall x \in f^{-1}(F^c), \exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(F^c)$



$f^{-1}(F) \subseteq f^{-1}[f(B(x, \varepsilon))]^c$

Ejemplo

$$\cdot A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\operatorname{sen}(xyz)| < 1/2\}$$

afirmo que A es abierta.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = |\operatorname{sen}(xyz)|$$

q' es cont.

$(x, y, z) \rightarrow x, y, z$ es cont.

y $\operatorname{sen} \rightarrow$ l.i. son cont $\Rightarrow \checkmark$.

$A = f^{-1}((-∞, 1/2))$ es abto.

$\cdot \{x \in \mathbb{C}([0, 1]) : x(1/2) > 0\}$ es abto.
(da) $= \Sigma_{1/2}^1((0, +\infty))$

ej.

Teorema

Una función $f: E \rightarrow E'$ es continua si y sólo si para todo $A \subset E$,

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Dem: $\Rightarrow y \in f(\bar{A}) \Rightarrow y = f(x)$ para algún $x \in \bar{A}$.

Como $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_u)_{u \in \bar{A}} / x_u \rightarrow x$.

front. $\underbrace{f(x_u)}_{\in f(A)} \rightarrow \underbrace{f(x)}_y, \quad (f(x_u))_{u \in \bar{A}} \subseteq f(A) / f(x_u) \rightarrow y.$

$$\Rightarrow y \in \overline{f(A)}.$$

\Leftarrow Sea $F \subseteq E'$ aciudo qrg $f^{-1}(F) \subseteq E$ es
aciudo.

$A = f^{-1}(F)$ qrg A es aciudo. Es decir $\bar{A} \subseteq A$

$$\bar{A} = \overline{f^{-1}(F)} \Rightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \stackrel{\text{Hip.}}{\subseteq} \overline{F} = F.$$

$f(A) = f(f^{-1}(F)) \subseteq F$

en resumen,

$$f(\bar{A}) \subseteq F \Rightarrow \boxed{\bar{A} \subseteq f^{-1}(f(\bar{A})) \subseteq f^{-1}(F) = A}$$

