Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

(a) $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

(b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

(c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$.

(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$.

(e) $C([0,1])$ con $d_\infty(f,g) = \max_{0\leq t\leq 1}|f(t) - g(t)|$.

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

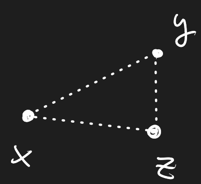
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Espacios Métricos

$\boxed{1}$ $d(x,y) \geqslant 0 \quad \forall x,y$ y $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$\boxed{2}$ $d(x,y) = d(y,x)$

$\boxed{3}$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$



---

a) 1) ✓

2) $|x-y| = |(-1)(y-x)|$

$= |-1|\,|y-x|$

$= |y-x|$ ✓

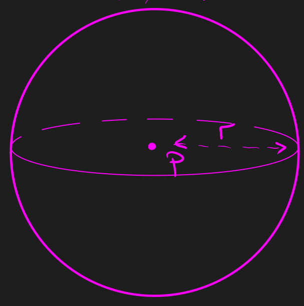
3) $|x-y| = |x-z+z-y|$

$$\leq |x-z| + \underbrace{|z-y|}_{=|y-z|} \quad \checkmark$$

b) (b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

1) ✓
2) ✓
3) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \|x-y\|$

$B(p,r)$ $\quad p \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^3)$



$$\|x - z + z - y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \qquad z \in \mathbb{R}^n$$

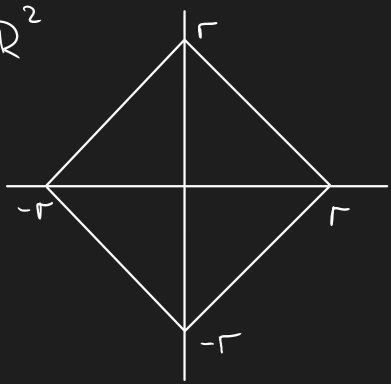
Cauchy - Schwartz.

$\boxtimes$

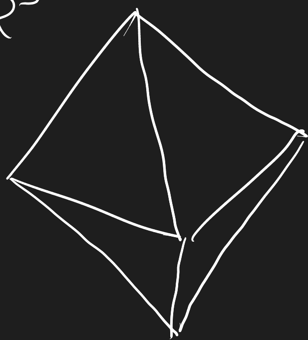
c) (c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

1) ✓
2) ✓
3) ✓

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

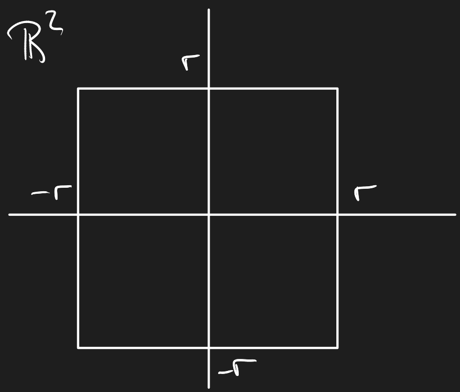
1) ✓

2) ✓

3) $\max |x_i - y_i| \leq \max \{ |x_i - z_i| + |y_i - z_i| \}$

$$= \max\{|x_i - z_i|\} + \max\{|y_i - z_i|\}$$

✓



(e) $C([0,1])$ con $d(f,g) = \max_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|$.

1) ✓

2) ✓

3) ✓

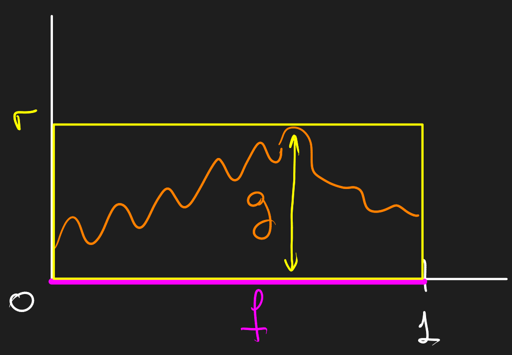
$E = \mathcal{C}([0,1])$

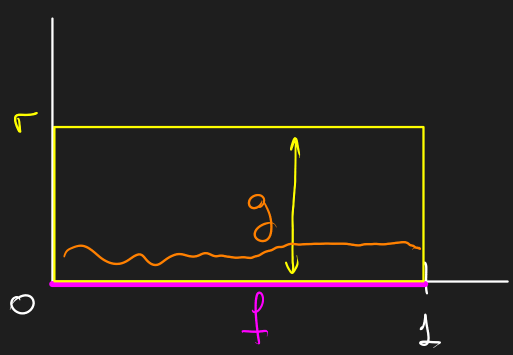
$$B(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$$

reescribo

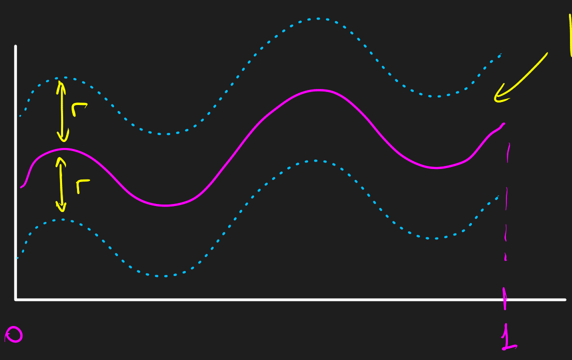
$$B(f,r) = \{ g \in E : d(f,g) < r \}$$

• digo $f(t) \equiv 0$





- $f(t)$ libre



las $g \in B(f,r)$ están acá adentro

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) ✓

2) ✓

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Caso 1 : $x = y$

$0 \leq$ Posi + Positivo ✓

Caso 2 : $x \neq y$

$1 \leq 1$ ó 2 ✓

$\square$

$B(\vec{o}, 1)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$\nwarrow$ $d(\vec{o}, y) < r$

$B(\vec{o}, 2)$

$d(\vec{o}, y) < 2$ $\leftarrow$ siempre $\forall y \in \mathbb{R}$

Todo E

2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en $\mathbb{R}$:

(a) $d(x,y) = (x-y)^2$ (b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ (c) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

$d_a(x,y) = (x-y)^2$

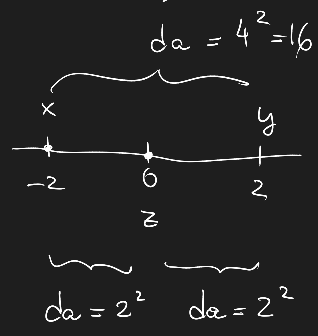
1) ✓

2) ✓

3) $d_a(x,y) \overset{?}{\leq} d_a(x,z) + d_a(z,y)$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

quiero $>$



Si $z = \frac{x+y}{2}$

$\Rightarrow$ la desigualdad triangular no vale

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leqslant} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leqslant} \left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leqslant} \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leqslant} \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{!}{>} \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$\therefore$ da no cumple la desigualdad triangular

$\Rightarrow$ no es distancia.

b) $d_b(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

$\boxed{1}$ ✓

$\boxed{2}$ ✓

$\boxed{3}$ $d_b(x,y) \overset{?}{\leq} d_b(x,z) + d_b(z,y)$

$$d_b(x,y)^2 = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{d_b(x,z)^2} + \underbrace{|z-y|}_{d_b(z,y)^2}$$

$$d_b(x,y)^2 \leq d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2$$

$$d_b(x,y) \leq \sqrt{d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

CA :

$$\sqrt{a+b} \overset{?}{\leq} \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{con } a,b \geq 0$$

Completo cuadrado:

Como $2\sqrt{a.b} > 0$

$$\Rightarrow \quad a+b \leq \underbrace{a + 2\sqrt{a.b} + b}_{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\Rightarrow \quad a+b \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$\overset{a,b\geq 0}{\Rightarrow} \quad \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Probé lo que quería

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \quad \checkmark$$

$\therefore$ d_b es distancia.

c) $d_c(x,y) = |x^2 - y^2|$

Contra ej:

$$d_c(-2,2) = |(-2)^2 - 2^2|$$

$$= 0$$

Pero $-2 \neq 2$

$\therefore$ <u>no</u> es una métrica.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞. Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n d_\infty(x,y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

a) $d_\infty(x,y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \}$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$d_\infty \le d_2$) $\quad D := \{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \}$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\underbrace{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2}_{\text{elementos de } D \text{ al cuadrado}}}$$

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2$ es alguno de ↑

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 = (x_i - y_i)^2$ para algún $i \in [1,n]$

Como son todos terminos $(x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \forall i \in [1,n]$

$$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 \overset{\text{términos } \geq 0}{\leq} |x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2$$

Tomo raíz (términos ≥ 0)

$$\Rightarrow \quad d_\infty(x,y) \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)}$$

$d_2 \leq d_1)$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

elevo al $\square$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \right)^2$$

Si $a_i := |x_i - y_i|$

$$\sum a_i^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j$$

Nota que si $i = j \Rightarrow a_i^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_i \cdot a_j$$

Como $a_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

Obtuve que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + S \qquad \text{con } S \geq 0$$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^2$$

todo >0

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\therefore \quad \boxed{d_2(x,y) \leq d_1(x,y)}$$

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$d_\infty(x,y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$D := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

además

$$d_\infty(x,y) \geq a \in D$$

pues $d_\infty(x,y) = \sup D$

$$\Rightarrow d_\infty(x,y) \geq |x_i - y_i| \quad \forall i \in [1,n]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y)}_{= n \cdot d_\infty(x,y)}$$

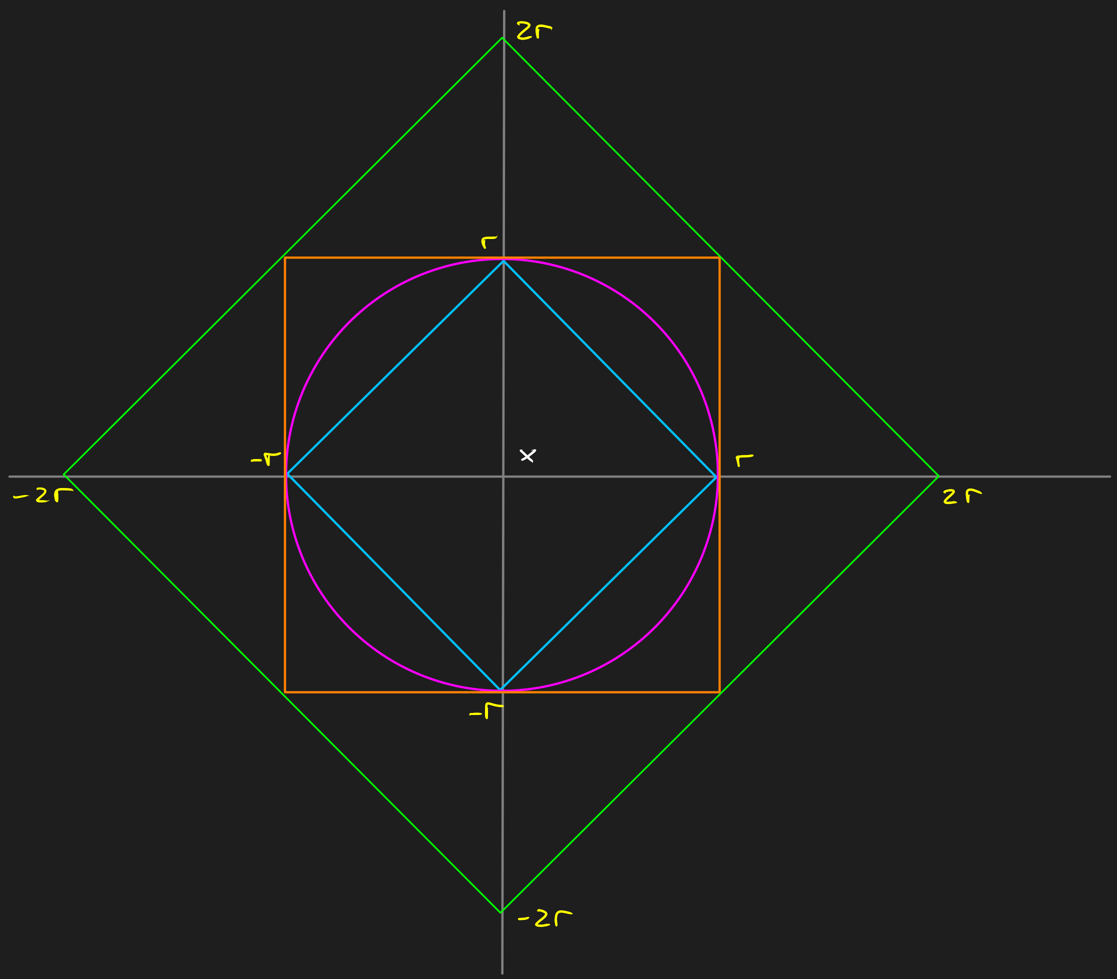
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot d_\infty(x,y)$$

$$\boxed{d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$$\therefore \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$\blacksquare$

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.



Como $d_2 \leq d_1 \quad \forall\, x,y$

en particular

$\Rightarrow \quad d_2 \leq d_1$ para todo $x,y \in B_{d_2}(x,r)$

$$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in E : d_2(x,y) < r \}$$

$$B_{d_1}(x,r) = \{ y \in E : \underbrace{d_1(x,y)}_{d_2 \leq d_1} < r \}$$

$\Rightarrow \quad B_{d_1}(x,r) \subseteq B_{d_2}(x,r)$

Pues para un mismo r, los $y \in B_{d_1}$ estarán en B_{d_2} (pues si miden menos de r con $d_1 \Rightarrow$ miden todavía menos con d_2), pero no así al revés, pues habrá $y \in B_{d_2}$ que midan más que r con d_1.

$B_2 \overset{?}{\subseteq} B_\infty$)

$$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in E : d_2(x,y) < r \}$$

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : \underbrace{d_\infty(x,y)}_{} < r \}$$

de a) obtuve

$$d_\infty \leq d_2$$

$$\Rightarrow B_{d_2}(x,r) \subseteq B_{d_\infty}(x,r) \quad \checkmark$$

$B_\infty \subseteq B_1(x, n.r)$)

- $B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : d_\infty(x,y) < r \}$
- $B_{d_1}(x,r) = \{ y \in E : d_1(x,y) < n.r \}$

Se de a) que

$$d_1 \leq n . d_\infty$$

reescribo

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{ y \in E : n.d_\infty(x,y) < n.r \} \quad n > 0$$

$$B_{d_1}(x, n.r) = \{ y \in E : d_1(x,y) < n.r \}$$

$\Rightarrow$ como $d_1 \leq n . d_\infty$

$$B_{d_\infty}(x,r) \subseteq B_{d_1}(x, n.r) \quad \checkmark$$

4. Considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}$. Hallar $\mathbb{Q}^\circ$ y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0,1]$

(b) $(0,1)$

(c) $\mathbb{Q}$

(d) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$

(e) $\mathbb{Z}$

(f) $[0,1)\cup\{2\}$

(g) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

(h) $\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$

6. Consideremos en el espacio $C([0,1])$ las métricas d_∞ y d_1 dadas por

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

(a) Sea $A = \{f \in C([0,1]) : f(0) > 0\}$. Probar que A es abierto para d_∞ pero que no lo es para d_1.

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \le M \cdot d_1(f,g)$ para todas $f,g \in C([0,1])$.

a) $\boxed{d_\infty}$:

Obs: Esto mismo demuestra Vicky en teórica 1 de Funciones Continuas, pero acá (todavía) no tenemos propiedades de continuidad para usar.

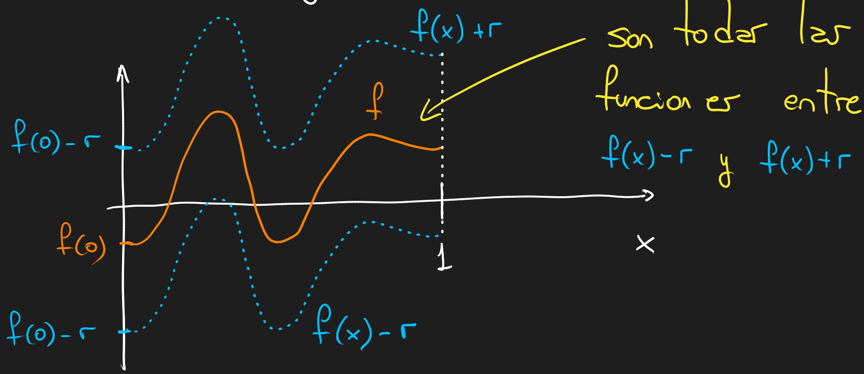
Si X abierto

$\Rightarrow$ • $X = X^\circ$

• $\forall x \in X, \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ B(x,\varepsilon) \subseteq X$

Con $E = \mathcal{C}[0,1]$, con $f \in E$ y d_∞

$\Rightarrow$ $B(f, r)$:
$(r>0)$



A es subconjunto de $\mathcal{C}[0,1] \ / \ f(0) > 0 \ \forall f \in A$

qvq

$\forall f \in A \subseteq \mathcal{C}[0,1], \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ B(f,\varepsilon) \subseteq A$

- Como $\mathcal{C}[0,1]$ es el espacio de las funciones continuas

$\Rightarrow \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ está siempre contenida en $\mathcal{C}[0,1]$,

pues cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ existe en $E = \mathcal{C}[0,1]$

(E es siempre abierto)

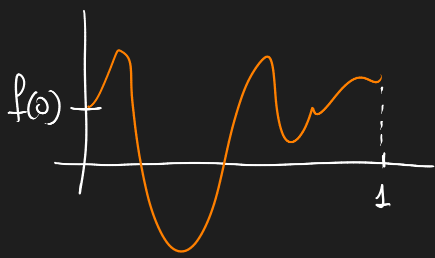
- Falta ver que cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ existe en $A \subset E$

estricto

- Para eso, veo que cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ cumpla $g(0) > 0$

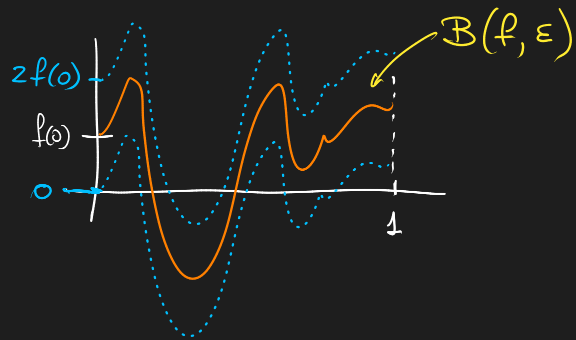
Como $f \in A$

$\Rightarrow f(0) > 0$



Con lo que puedo elegir un epsilon que me asegure que $g(0)>0$

$\Rightarrow$ elijo $\varepsilon = f(0)$



Como todas las $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ son continuas en $[0,1]$

y además

$$f - f(0) < g < f + f(0)$$

evalúo $\Rightarrow$

$$f(0) - f(0) < g(0) < f(0) + f(0)$$

$$0 < g(0) < 2f(0)$$

$\Rightarrow B(f, \varepsilon) \subset A \quad \forall f \in A$

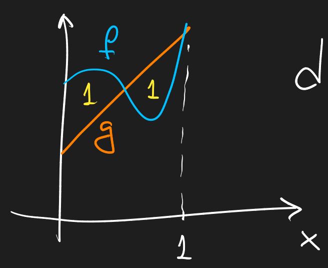
$\therefore A$ es Abierto ☒

Obs:

Tomando $\varepsilon = \frac{f(0)}{2}$ tal vez sea más claro de ver gráficamente.

$\boxed{d_1}$ Para que A sea abierto, debe pasar que para cada f en A, debe haber al menos una bola con centro en f completamente contenida en A.
Si encuentro una f particular, tal que todas sus bolas (para todos sus radios) contengan al menos alguna g que no esté en A, entonces encontré una f en A que no tiene bolas en A.
O sea, como f está en A pero no es punto interior, entonces A ≠ A°

- Busco la f



$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= 1 + 1 = 2$$

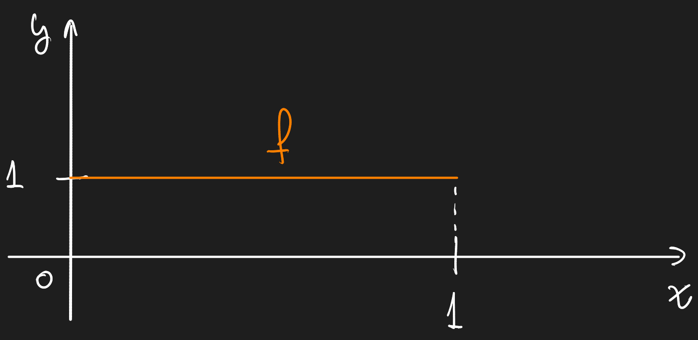
Busco

$$< r \leftarrow \text{radio de la bola} \qquad \forall r > 0$$

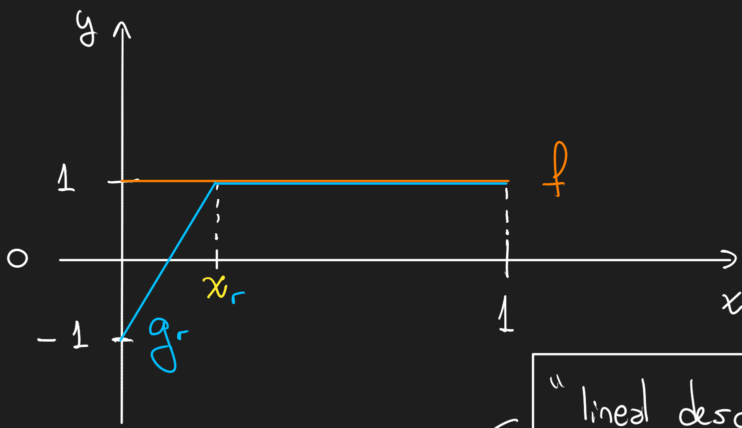
con

$$B(f,r) = \{ g \in E : d_1(f,g) < r \}$$

- De entre todas las $f \in A$, elijo $f(x) \equiv 1$



- Elijo una g_r particular que pertenece a $B(f, r)$

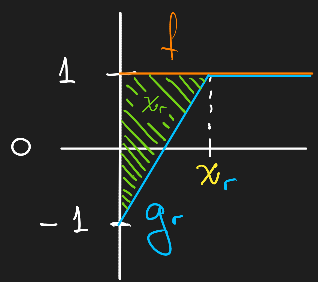


"lineal desde $y = -1$ hasta 1"
Notar que $g_r(0) = -1$

Con $g_r(x) = \begin{cases} \frac{2}{x_r} \cdot x - 1 & \text{si } x \in [0, x_r] \\ 1 & \text{si } x \in (x_r, 1] \end{cases}$

Cuya distancia 1 a $f(x)$:

$d_1(f, g) = \frac{2 \cdot x_r}{2} = x_r$



- Si para cada $g_r(x)$ tomo como $x_r = \frac{r}{2}$

Entonces puedo asegurar que $g_r(x) \in B(f, r) \quad \forall r > 0$

Pero como $g_r(0) = -1 \quad \forall r > 0$

$\Rightarrow \quad g_r(0) \notin A$

$\therefore \quad B(f, r) \not\subseteq A$

$\therefore$ como $f \in A$ pero $f \notin A^\circ$

$\Rightarrow \quad A \neq A^\circ$

$\therefore$ A no es abierto

$\boxtimes$

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f, g) \leq M \cdot d_1(f, g)$ para todas $f, g \in C([0, 1])$.

Siempre puedo encontrar f, g continuas

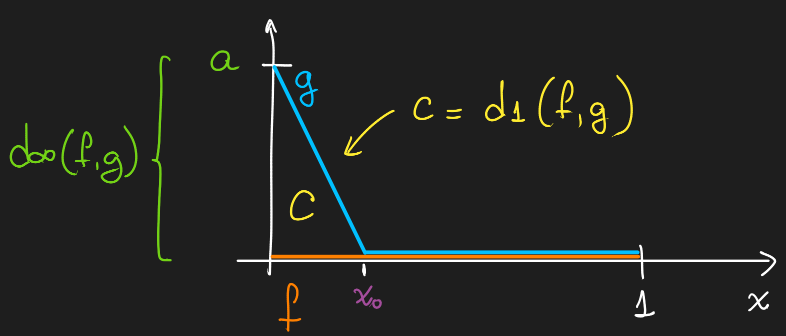
a distancia 1 lo más pequeña que desee ("iguales en casi todos sus puntos")

y a distancia ∞ lo más grande que quiera ("muy distintas en pocos puntos")

Por ejemplo

$f \equiv 0$

$g =$ "triángulo de área c y altura a hasta x_0, y luego 0"



Con esto y modificando x_0, a y c puedo lograr que:

- Si $M \geq 1$:

x_0 bien cerca de 0

$$d_1(f,g) < \frac{1}{M}$$

y que

$$d_\infty(f,g) > 1$$

triangulo de altura $a \geq 1$

entonces

$$d_\infty(f,g) > M \cdot d_1(f,g) > M \cdot \frac{1}{M} = 1$$

$$d_\infty(f,g) > 1 \quad \checkmark$$

- Si $0 < M \leq 1$:

$$d_1(f,g) = 1$$

y

$$d_\infty(f,g) > 1$$

Logrando lo mismo que en caso anterior.

Obs:

Tomando $d_1(f,g) = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$ no sería necesario separar en casos para M, pero puede no ser tan clara la deducción.

7. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

En otro archivo

(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.

(g) Probar que $\{y \in E :\ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

a) $A := \{x\}$

Veo clausura

- Si $x \in A$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ pues $B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r>0$

- Si $x \in A$, $y \notin A$

$\Rightarrow d(x,y) > 0$ pues $x \neq y$

Como x es el único elemento de A

$\Rightarrow B\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right) \cap A = \emptyset \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$

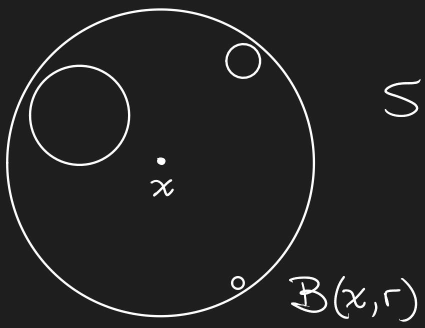
$\therefore y \notin \overline{A} \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow \overline{A} = \{x\} = A$

$\therefore \{x\}$ es cerrado.

$\blacksquare$

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.



Sea $a \in B(x,r)$

$$\Rightarrow 0 < d(a,r) < r$$

$$\Rightarrow B\left(a, \frac{d(a,r)}{2}\right) \subset B(x,r)$$

$\therefore$ $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

$\boxtimes$

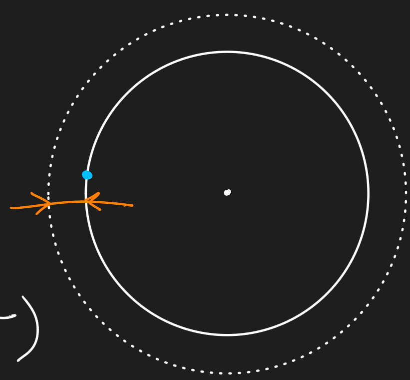
(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

Sea $a \in \overline{B(x,r')}$ Mal!

$$\Rightarrow 0 \leq d(a,x) \leq r' < r$$

$$\Rightarrow d(a,x) < r$$

$$\Rightarrow B\left(a, \frac{r-r'}{2}\right) \subset B(x,r)$$



$\cancel{\boxtimes}$

(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

- Sea $a \in \overline{B}(x,r)$

$$\Rightarrow B(a,r') \cap \overline{B}(x,r) \neq \phi \quad \forall r' > 0$$

- Sea $a \in \overline{B}(x,r)$, $b \notin \overline{B}(x,r)$

$\Rightarrow$ Como $a \neq b$

$$0 < d(a,b) \lesssim r$$

$\Rightarrow$ Afirmo que si $a' \in \partial \overline{B}(x,r)$

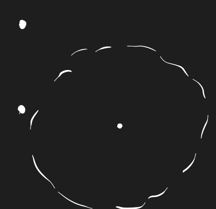
y $a_{min} = \arg\min \{ d(a',b) : a' \in \partial \overline{B} \}$

? existe pues $\partial \overline{B} \subseteq \overline{B}$

$$B\left(b, \frac{d(a',b)}{2}\right) \cap \overline{B}(x,r) = \phi$$

La otra es tomar complemento de la Bola

$$\overline{B}^c(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) > r \}$$



$$\Rightarrow \forall b \in \overline{B}^c(x,r)$$

$$\to d(a',b) > r$$

$$\to B\left(b, \frac{d(a',b)}{2}\right) \cap \overline{B} = \phi$$

$$\subseteq \overline{B}^c$$

$$a' \in \overline{B}(x,r) \,/\, d(a',b) = \min\{d(a,b) : a \in \overline{B}\}$$

?

$\therefore \overline{B}^c$ es abierta

8. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. Probar que:

(a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.

(b) $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

9. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Probar que:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

10. Sean (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E.

(a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

(b) Probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

Def: Diámetro

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \{ d(a,b) : a,b \in A \}$$