Análisis Avanzado - Primer parcial

07/10/2021

Leandro Carreira

669/18

---

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para las verdaderas dar una demostración y para las falsas un contraejemplo.

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y acotados.

a) Si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$.

b) Si $\inf(A) < \sup(A)$ entones $A = (\inf(A), \sup(A))$.

a) $\boxed{\text{Verdadero}}$

Como A es no vacío y acotado

$\Rightarrow \exists\, s_A \in \mathbb{R} \,/\, s_A = \sup A$

Por def. de supremo

$s_A \geq a \quad \forall\, a \in A$

Como $\forall\, a \in A$, $\exists\, b \in B \,/\, a \leq b$

$\Rightarrow \exists\, b_0 \in B \,/\, s_A \leq b_0$

De la misma forma que antes:

Como B es no vacío y acotado

$\Rightarrow \exists\, s_B \in \mathbb{R} \,/\, s_B = \sup B$

Por def. de supremo

$$s_B \geq b \quad \forall\, b \in B$$

en particular

$$s_B \geq b_0$$

y como

$$b_0 \geq s_A$$

$$\Rightarrow s_A \leq b_0 \leq s_B$$

$$s_A \leq s_B$$

$$\therefore \sup A \leq \sup B$$

$\blacksquare$

b) $\boxed{\text{Falso}}$

Si $A = [1,2]$

$$\inf A = 1 < \sup A = 2$$

pero

$$[1,2] \neq (1,2)$$

pues $1 \in A$ pero $1 \notin (1,2)$.

2. Sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \text{ y } z \in \mathbb{N} \text{ es par}\}$.

Probar que existe $g : X \to \mathbb{R}^2$ biyectiva.

Sé que

- $\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$
- $\# \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \# \mathbb{R}$ pues como $\mathbb{N}$ es numerable y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$
- $\# \mathbb{N}_{par} = \# \mathbb{N}$ pues $\mathbb{N}_{par}$ es infinito y $\mathbb{N}_{par} \subsetneq \mathbb{N}$

Idea:

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$

↳ Quiero "dividirlo" en 2 conjuntos no numerables A, B de forma que

↳ $A \sim \mathbb{R}$ (una de las dimensiones del codom. de g)

↳ $B \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{par} \sim \mathbb{R}$ (la otra dimensión)

De las Prácticas, sabemos que

$$[0,1] \sim \mathbb{R}$$

y además, que

Reales negativos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, -n+1) \sim \mathbb{R}$$

y que

Reales positivos con el cero.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n-1, n) \sim \mathbb{R}$$

o sea que

$\mathbb{Q}$ numerable: no cambia la cardinalidad de $\mathbb{R}^-$ pues $\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}$ es infinito

$$\mathbb{R}^- \sim \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^+ \sim \mathbb{R}$$

y de la misma forma

$$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$
$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

Conseguí los A y B de la idea de arriba.

Falta ver que

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{par} \overset{?}{\sim} \mathbb{R}$$

Por corolario visto en la Práctica.

Si Y, Z numerables $\Rightarrow Y \times Z$ es numerable

$\Rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{par}$ es numerable

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{par} \sim \mathbb{N}$$

Falta ver que

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \overset{?}{\sim} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{n\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}}_{\sim \mathbb{R}}$$

Por ej 12 b, unión numerable de conjuntos de cardinalidad c, tiene cardinal c

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{n\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}}_{\sim \mathbb{R}} \sim \mathbb{R}$$

$\therefore$

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$$

Finalmente

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{par} \sim \mathbb{R}$$

y además

$$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

Por lo que g puede ser una función que tome:

- los Irracionales negativos de la coordenada "y" del dominio y los mande a la primera coordenada del codominio.
- los Irracionales positivos, $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{N}$ pares y los

mande a la segunda coordenada del codominio.

Como mostré que son conjuntos coordinables

$\Rightarrow \exists$ una biyección entre ellos,

y $\therefore$ existe una g biyectiva con $g: X \to \mathbb{R}^2$

$\boxtimes$

3. Sea $E = \{f \in C([0,1]) : f(x) > 0 \; \forall x \in [0,1]\}$, con la métrica d_∞. Consideremos la función $\mathcal{I} : E \to E$ dada por
$$\mathcal{I}(f)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$
Probar que $\mathcal{I}$ es continua, pero no uniformemente continua.

Def de Continuidad

$\forall \varepsilon > 0 \,,\; \exists \delta > 0 \,/$

si $d_\infty(f, g) < \delta \Rightarrow d_\infty\big(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)\big) < \varepsilon$

$$d_\infty\big(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)\big) = d_\infty\left(\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}\right)$$

$$= \sup\left\{ \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right| : x \in [0,1] \right\}$$

$$= \sup\left\{ \frac{|g(x) - f(x)|}{f(x) \cdot g(x)} : x \in [0,1] \right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{ \frac{d_\infty(f, g)}{f(x) \cdot g(x)} : x \in [0,1] \right\}$$

$$= d_\infty(f, g) \cdot \sup\left\{ \frac{1}{f(x) \cdot g(x)} : x \in [0,1] \right\}$$

$$= d_\infty(f, g) \cdot \inf\left\{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \right\}$$

Como f, g están definidas en $[0,1]$ y además

$f(x) > 0$ y $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \inf \{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \} > 0$$

y además

$$\inf \{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \} \leq M \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

por $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$

$\therefore$

$$d_\infty (I(f), I(g)) \leq \underbrace{d_\infty (f, g)}_{< \delta} \cdot M$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, tengo que para cada $\varepsilon > 0$,

existe $\delta > 0$ /

si $d_\infty(f,g) < \delta \Rightarrow d_\infty (I(f), I(g)) < \varepsilon$

$\therefore$ I es contínua

$\boxtimes$

Para mostrar que I <u>no</u> es unif. contínua:

Sean

$$f_n(x) = \frac{1}{n}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}$$

sucesiones de funciones constantes

Como

$$d_\infty\left(f_n(x), g_n(x)\right) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{n\cdot(n+1)} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pero

$$d_\infty\left(I(f_n), I(g_n)\right) = \left| n - (n+1) \right|$$

$$= 1 > 0$$

Por Proposición, como hallé un $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones

$(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ / $d_\infty(f_n, g_n) \to 0$

pero $d_\infty\left(I(f_n), I(g_n)\right) \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow I$ no es uniformemente continua.

$\blacksquare$

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que el conjunto

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)) : \cancel{x \in \mathbb{R}}\ x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

es compacto. Probar que f es continua.

G es compacto en $\mathbb{R}^2 \iff$ es cerrado y acotado

Sea $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset G$

Si $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (x, y)$

$\Rightarrow (x, y) \in G$ pues G es cerrado.

$\Rightarrow y = f(x)$

$\Rightarrow (x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (x, f(x))$

Como estamos en $\mathbb{R}^2$, la convergencia es coord. a coord.

$x_n \to x$

$f(x_n) \to f(x)$

O sea que $\forall (x_n) \subset [a,b]$ convergente a $x \in [a,b]$

se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ converge a $f(x)$.

Lo cual es un teorema visto en las Teóricas de continuidad que asegura que f es continua.

$\boxtimes$