UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Sucesiones

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Sucesiones

Sucesiones

Recordemos...

Una sucesión es un función $a : \boxed{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. $a(n)$

Notación: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(a_n)_n$

Sucesiones

Recordemos...

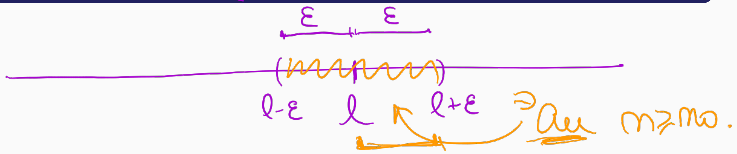
Una sucesión es un función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notación: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición de límite

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *converge* a un número $\ell \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\boxed{n_0 \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\underbrace{|a_n - \ell| < \varepsilon}_{-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$



Ejemplo

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, vamos que $\ell = 0$

$\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$?

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{\varepsilon^2} < n.$

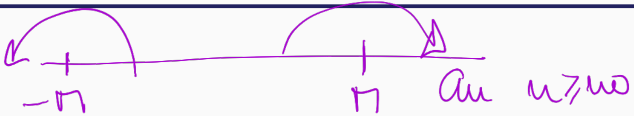
Tomo $n_0 \,/\, \frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$. ($\exists$ Arq.)

Si $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ ⊠

Límites a infinito

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *diverge (a +infinito)* si para todo $M > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$



Límites a infinito

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *diverge (a +infinito)* si para todo $M > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Notación:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Límites a infinito

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *diverge (a +infinito)* si para todo $M > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Notación:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se dice *acotada* *(sup., inf., a secas)* si el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado (sup., inf, a secas respectivamente).

Límites a infinito

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales *diverge (a +infinito)* si para todo $M > 0$ existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Notación:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Definición

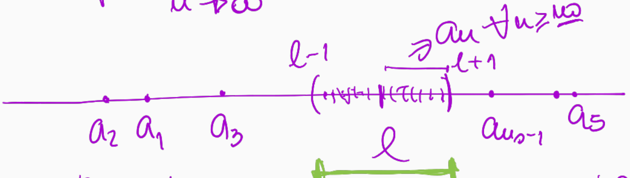
Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se dice *acotada (sup., inf., a secas)* si el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado (sup., inf, a secas respectivamente).

Equivalentemente (para acotada): existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema

Si una sucesión es convergente, entonces es acotada.

Dem: Sup $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.



Para $\varepsilon=1$ $\exists n_0 \,/\, |a_n-\ell|<1 \ \forall n \geq n_0$. $\Rightarrow$ $|a_n| \leq |\ell|+1$

$\left(-1+\ell < a_n < \ell+1 \Rightarrow |a_n| \leq \max\{|\ell-1|, |\ell+1|\} \leq |\ell|+1\right)$

Tomo $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_0-1}|, |\ell|+1\}$

$n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ es acotado.

Álgebra de límites

Teorema

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Entonces,

(1) $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, para todo $c \in \mathbb{R}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$;

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(4) Si $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$.

(5) Si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \leq b$.

D/(2) $\varepsilon > 0$ $\quad |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b|$

$\leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon/2 \text{ si } n \geq n_1} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon/2 \text{ si } n \geq n_2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\to n \geq \boxed{\max\{n_1, n_2\}} = n_0$

Sucesiones y supremo

Sucesiones y supremo

Equivalencia 2

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

Sucesiones y supremo

Equivalencia 2

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a”) $s \geq x$ para todo $x \in A$; (s cota sup)

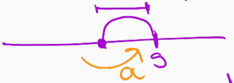
Equivalencia 2

Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente y sea $s \in \mathbb{R}$. Entonces $s = \sup A$ si y sólo si s cumple:

(a”) $s \geq x$ para todo $x \in A$;

(b”) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

Dem: $s = \sup(A) \Rightarrow (a'') = (a)$. Veamos que vale (b'')



$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, a_n \in A \,/\, a_n > s - \frac{1}{n}$.

$(a_n)_n \subseteq A$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

$\varepsilon > 0$ $\quad |s - a_n| = s - a_n < \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\quad$ si $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

Ej terminar la prueba $(a'') + (b'') \Rightarrow \sup$.

Sucesiones monótonas

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice:

ra

- *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona* si es creciente o decreciente.

Sucesiones monótonas

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice:

- *monótona creciente* si $a_n \leq a_{n+1}$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n$ pata todo $n \in \mathbb{N}$;
- *monótona* si es creciente o decreciente.

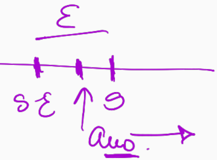
Teorema

Las sucesiones monótonas y acotadas convergen.

Dem: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ monótona creciente y acotada sup.

$A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ es acot. sup, $\neq\emptyset \Rightarrow \exists$ $s=\sup(A)$. Veamos que $s=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Sea $\varepsilon>0$. Por la def. de supremo, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $a_{n_0} > s-\varepsilon$.



Si $n\geq n_0$

S cota

$$\Rightarrow \quad s-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s+\varepsilon$$

$(a_n)_n$ es creciente

$$\Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

$\boxtimes$

Más concretamente

.

Más concretamente

(i) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;

.

Más concretamente

(i) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Subconjuntos de $\mathbb{N}$

Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

Subconjuntos de $\mathbb{N}$

Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

(i) A tiene primer elemento;

Subconjuntos de $\mathbb{N}$

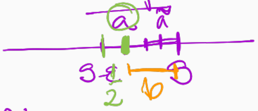
Sea $A \subset \mathbb{N}$ un subconjunto no vacío. Entonces:

(i) $\boxed{A \text{ tiene primer elemento;}}$ Principio de Buen ordenación $\equiv$ Ppio de Inducción.

(ii) Si A es acotado, tiene último elemento.

Dem: (ii) $A \subseteq \mathbb{N}$ acotado qvq A tiene max.

$s = \sup(A)$. Supongamos q' $s \notin A$.



$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, s - \frac{1}{2} < a \leq s.$

$\tilde{\varepsilon} = \min\{\frac{1}{4}, s-a\} \Rightarrow \exists\, \tilde{a} \in A \,/\, s - \tilde{\varepsilon} < \tilde{a} < s$ $\quad s \notin A.$

- $a \neq \tilde{a}$
- $|a - \tilde{a}| = |a - s + s - \tilde{a}| \leq \underbrace{|a-s|}_{<1/2} + \underbrace{|s-\tilde{a}|}_{<\tilde{\varepsilon}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$

ABS! $m \neq n \Rightarrow |m-n| \geq 1$