Compacidad

1. Sea $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Probar, por definición, que K es compacto.

Nico en clase 12

- Sea $(y_m) \subseteq K$, y sea $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$

- Si $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ es finito:

$\Rightarrow \exists\, y_{m_k} \in \{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ /

se repite infinitas veces en (y_m)

$\Rightarrow$ Tomo la subsuc (y_{m_k}) que converge a y_{m_k} ✓

- Si $\{y_m : m \in \mathbb{N}\} =: A$ es infinito:

Armo subsuc.

1° Tomo:

$y_{m_1} \in A \setminus \{0\}$ con $y_{m_1} = \frac{1}{n_1}$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$

2° Tomo:

$$y_{m_2} \in \underbrace{\left(A \setminus \{0\}\right)}_{\text{infinito}} \setminus \left(\{y_k : k \leq m_1\} \cup \left\{\frac{1}{k} : k \leq n_1\right\}\right)$$

Con esto logré

- $m_2 > m_1$
- $y_{m_2} = x_{n_2}$ con $n_2 > n_1$

3° Tomo y_{m_3} como en 2°

Repitiendo, obtengo (y_{m_k}) subsuc. de $\nearrow (y_m)$ $\searrow (x_n)$

con $y_{m_k} \longrightarrow 0 \in K$.

$\boxed{///}$

2. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

Como K compacto $\Rightarrow$ K es cerrado y acotado

Como es acotado $\Rightarrow$ tiene cota sup e inf

Como es cerrado $\Rightarrow$ toda sucesión en K converge a un elemento de K

$\Rightarrow$ $\sup K \in K$ ✓

$\inf K \in K$ ✓

$\blacksquare$

3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \qquad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

Como K compacto y por álgebra de sucesiones

$\Rightarrow$ (x_n) tiene subsuc convergente a x

(y_n) tiene subsuc convergente a y

$\Rightarrow$ $x_n + y_n$ tiene subsuc convergente a $x + y$

Si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$

$\Rightarrow$ $s_n = x_n + y_n$ tiene subsuc. convergente

$\therefore$ S es compacto.

$\blacksquare$

4. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de E. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto. Probar que $\cap_{i\in I} F_i$ es compacto.

Intersección de cualquier familia de cerrados es cerrado.

$$\Rightarrow \underbrace{\bigcap_{i\in I} F_i}_{\text{cerrado}} = \underbrace{F_{i_0}}_{\text{compacto}} \cap \underbrace{\bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} F_i}_{\text{cerrado}}$$

- Si $F_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} F_i = \emptyset$

$$\Rightarrow F_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} F_i \text{ es compacto}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \text{ es compacto}$$

- Si $F_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} F_i \neq \emptyset$

$$\underbrace{F_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\setminus\{i_0\}} F_i}_{=:\,A}$$

$$\Rightarrow A \text{ es cerrado y } \neq \emptyset$$

$$\text{y } A \subseteq F_{i_0}$$

$\Rightarrow$

Proposición

Sea (E,d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ un compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.

$$\Rightarrow A = \bigcap_{i\in I} F_i \text{ es compacto} \quad \blacksquare$$

5. Sea (E,d) un espacio métrico. Probar que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ decreciente de cerrados no vacíos de E se tiene que $\cap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$.

<u>Idea</u>:

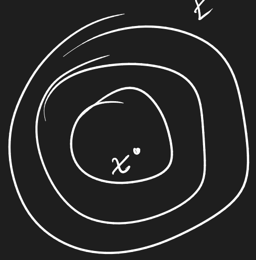
$\Rightarrow$) E compacto $\Rightarrow$ Cada F_n es compacto

$$\underbrace{\bigcap_{n\geq 1} F_n}_{\text{cerrado}} \subseteq \underbrace{E}_{\text{compacto}} \quad \text{es compacto}$$

$$\underbrace{\bigcap_{n\geq 1} F_n}_{\text{cerrado}} \neq \emptyset$$ pues F_n <u>no</u> vacío $\forall n \in \mathbb{N}$

Compactos

subsuc convergente en cada una.



$\Leftarrow$) Toda sucesión (F_n) de cerrados <u>no</u> vacíos de E cumple $\bigcap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$

Resuelto por Iván.

5. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ decreciente de cerrados no vacíos de E se tiene que $\cap_{n\geq 1} F_n \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$) Hip: E es compacto

- Como $F_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ puedo armar $(x_n)_n \;/\; x_n \in F_n$

Como E es compacto

$\Rightarrow$ Toda suc. tiene subsuc. convergente en E

$$(x_{n_k})_k \longrightarrow x \in E$$

qvq

$$x \overset{?}{\in} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Sea $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \;/\;$ si $k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq m$

De esta forma, $(x_{n_k})_k \subseteq F_m \quad \forall k \geq k_0$

Si trunco desde k_0

$$(x_{n_k})_{k\geq k_0} \longrightarrow x \in E$$

y como F_m es cerrado

$$(x_{n_k})_{k \geq k_0} \longrightarrow x \in F_m$$

Como vale $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m$$

$$\therefore \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) $\mathcal{H}$: Para toda $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq 0$

qvq
$\forall (x_n)_n \subseteq E$,
$\exists (x_{n_k})_k$ subsuc. convergente en E

$$(x_{n_k})_k \longrightarrow x \in E$$

muestro una forma de tomar los F_n, a partir de la sucesión

$$F_1 = \overline{\{x_n\}_{n \geq 1}}$$

lo clausuro para asegurarme que sea cerrado

no vacío

$$F_2 = \overline{\{x_n\}_{n \geq 2}}$$

le saco 1 elemento

$\vdots$

para que sean decrecientes: $F_{n+1} \subseteq F_n$

$F_k = \overline{\{x_n\}_{n \geq k}}$

Armé sucesión

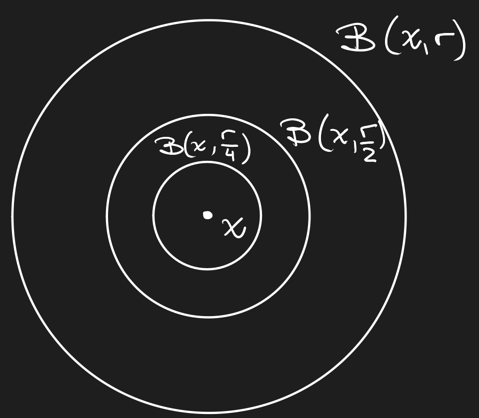
$(F_n)_{n \geq 1}$ de cerrados, no vacíos, con $F_{n+1} \subseteq F_n$

que por Jtb puedo asegurar que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists\, x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq E$$

- Falta mostrar que ésta (toda) sucesión, tiene subsuc. convergente en E.



$F_1 = \overline{\{x_n\}_{n \geq 1}}$

$F_2 = \overline{\{x_n\}_{n \geq 2}}$

Sea un $r > 0$ (no necesariamente contiene todo F_1)

- $B(x, r) \cap F_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, x_{n_1} \in B(x,r) \cap F_1 \;/\; d(x_{n_1}, x) < r$

para los siguientes elementos, debo tener cuidado de tomar los conjuntos siguiendo la numeración del elemento x_{n_1} elegido anteriormente:

- $B(x, \frac{r}{2}) \cap F_{n_1+1} \neq \phi$

  $\Rightarrow \exists\, x_{n_2} \in B(x, \frac{r}{2}) \cap F_{n_1+1} \,/\, d(x_{n_2}, x) < \frac{r}{2}$

  con $n_2 > n_1$

$\vdots$

- $B(x, \frac{r}{k+1}) \cap F_{n_k+1} \neq \phi$

  $\Rightarrow \exists\, x_{n_{k+1}} \in B(x, \frac{r}{k+1}) \cap F_{n_k+1} \,/\, d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{r}{k+1}$

Construí subsuc. que converge a x

$\therefore$ E es completo.

$\blacksquare$

- Como E compacto, F_n cerrado y $F_n \subseteq E$

  $\Rightarrow$ F_n es compacto

  $\Rightarrow$ Toda suc. tiene subsuc. convergente <u>en F_n</u>

  $\exists\ (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ /

  $x_{n_k} \longrightarrow x \in F_n$

6. Sea E un conjunto, en el cual consideramos la métrica discreta. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E?

Con δ, la convergencia se da en sucesiones constantes a partir de un no.

$\Rightarrow$ las sucesiones con subsucesiones convergentes son aquellas que tienen al menos un elemento repetido infinitas veces

$\Rightarrow$ los conjuntos en donde esto suceda para todas las sucesiones, son los conjuntos finitos.

- Si el conjunto es infinito (infinitos distintos)

$\Rightarrow$ existe alguna sucesión de elementos distintos

7. Probar que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

Si X, Y compactos

$\Rightarrow$ toda $(x_n) \subseteq X$ tiene subsuc convergente a algún $x \in X$

toda $(y_n) \subseteq Y$ tiene subsuc convergente a algún $y \in Y$

$\Rightarrow$ si $Z = X \cup Y$

cualquier (z_n) tendrá subsuc. convergentes

a algún $x \in X$ ó $y \in Y$

pues los elementos de (z_n) son elementos de X ó de Y

$\therefore$ Z es compacto.

Por inducción, cualquier unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

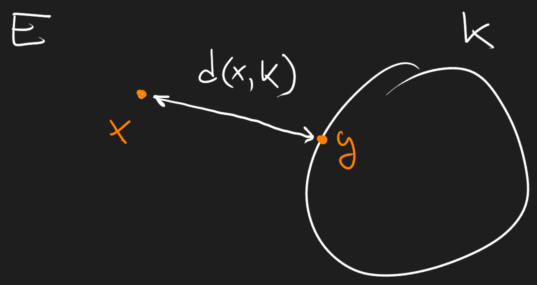
Otra

$K \times K$ es compacto (EJERCICIO).

$(z_n)_n \subset K \times K$ $\quad z_n = (x_n, y_n)$

$d((x,y),(x',y')) = d(x,y) + d(x',y')$.

8. Probar que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto *se realiza*. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.



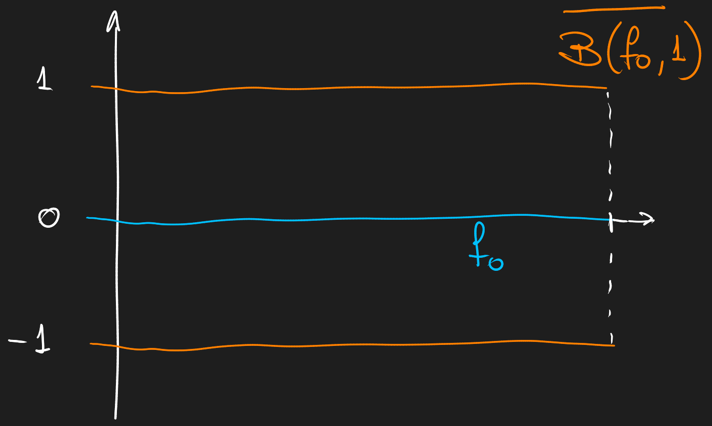
$$d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$$

9. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 14 de la Práctica 3. Probar que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es sólo cerrado?

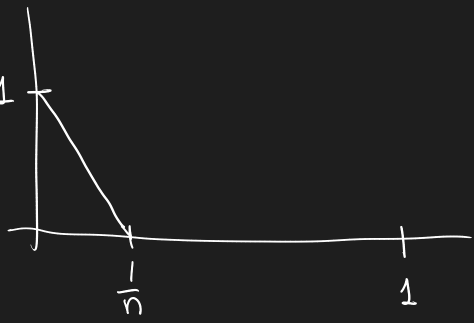
14. Sea (E, d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$. Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A\ ,\ b \in B\}.$$

10. Consideremos en $(C[0,1], d_\infty)$ la función f_0 constantemente nula. Probar que $\overline{B(f_0,1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos la distancia por d_1?



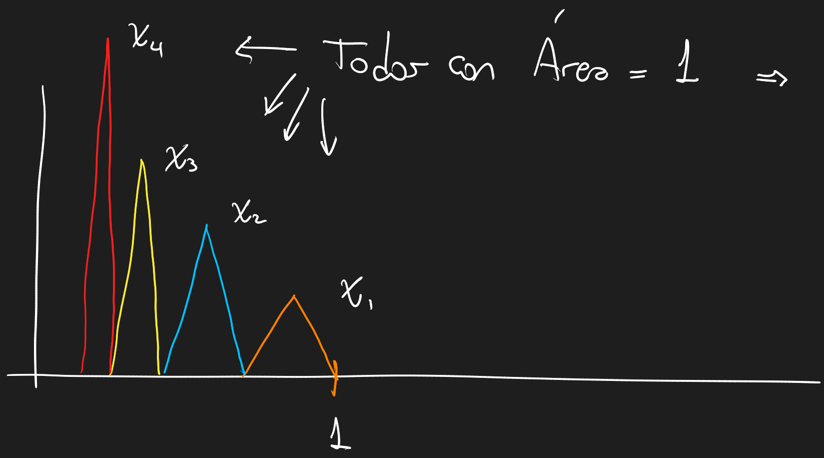
$g_n \in \overline{B(f_0,1)}$ /



$d_\infty(g_n, f_0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ no tiene subsuc. convergente.

$\therefore \overline{B(f_0,1)}$ no es compacta.

- Si $d = d_1$:

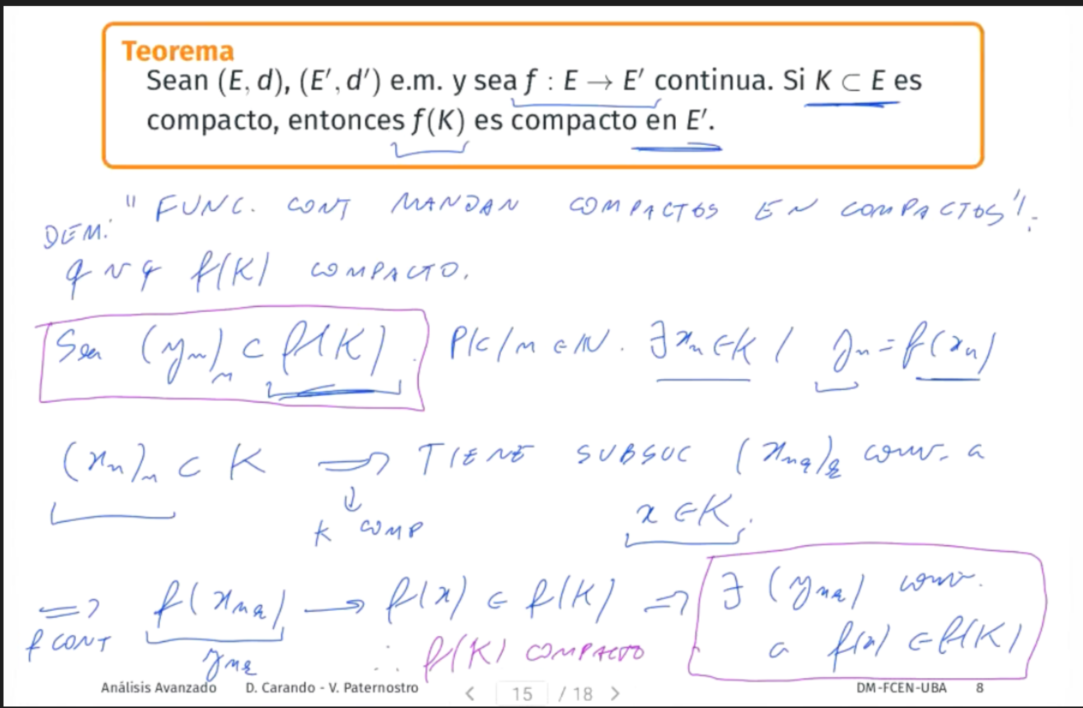


← Todos con Área = 1 $\Rightarrow$ (x_n) no tiene subsuc convergente en $\mathcal{C}([0,1])$

11. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ continua. Probar que:

(a) Si E es compacto, entonces $f(E)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f resulta ser un homeomorfismo.

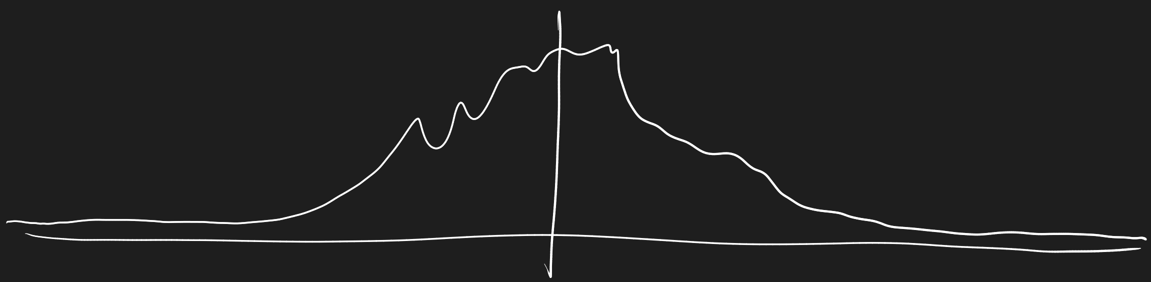


b) ?

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.



uso esta distancia?

f continua :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ \forall \varepsilon > 0 ,\ \exists \delta > 0 /$

si $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

- Si unif. continua:

Dado $\varepsilon > 0$, quiero $\delta > 0 /$

si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sé

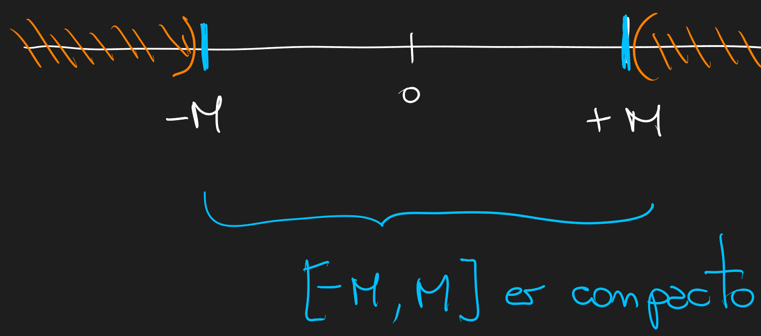
$\exists M > 0 /$ si $|x| > M \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Obs:

si $x, y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$ $**$

$***$

si $x, y < -M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$



f cont, $[-M \;,\; M]$ compacto

$\Rightarrow f$ es Unif. Cont. en

$\therefore\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/$

si $x, y \in [-M$ $\ast$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Pero! todavía falta

Sean $x, y \in \mathbb{R} \,/\, |x-y| < \delta$

- si $x, y \in [-M \;,\; M] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (por ($\ast$))
- si $x, y > M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ por ($\ast\ast$)
- si $x, y < -M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ por ($\ast\ast\ast$).

Puede haber un x en $[\;,\;]$ pero el otro afuera

Armo un intervalo más grande.

Pegar de nota

13. Sea K un espacio métrico compacto, y sea $f : K \to (0, +\infty)$ una función continua. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

f continua :

$f : K \to (0, +\infty)$ continua

$\forall x \in K$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ /

si $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$

equiv

$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$

equiv

$f(x_n) \longrightarrow f(x)$ $\forall (x_n)$ sucesión convergente en K

K es compacto :

- Cerrado
- Acotado
- Toda suc tiene sub suc convergente en K

Como f es continua, y K compacto

$\Rightarrow f(K)$ es compacto

$\Rightarrow$ como f tiene $(0, +\infty)$ como codominio

$$\underbrace{f(K)}_{\text{cerrado}} \subsetneq \underbrace{(0, +\infty)}_{\text{Abierto}}$$

$\Rightarrow$ $f(k)$ tiene mínimo > 0

$$f(k) \geq m \quad , \text{ con } m > 0$$

$\therefore$ si $\alpha = \frac{m}{2} \Rightarrow f(k) > \alpha$

$\blacksquare$