COMPACIDAD II

RECORDAR: $K \subseteq E$ ES COMPACTO SII

$\forall\, K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ CON G_i ABIERTOS

$\exists\, J \subseteq I$ FINITO TAL QUE

$K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$

EJEMPLOS:

1) K FINITO $\Rightarrow$ K COMPACTO

SEA $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ CON G_i ABIERTOS

ESCRIBAMOS $K = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall\, 1 \leq l \leq n$ TOMO $i_l \in I$ CON $x_l \in G_{i_l}$

ASÍ, TOMO $J = \{i_1, \dots, i_n\}$ Y

SIRVE

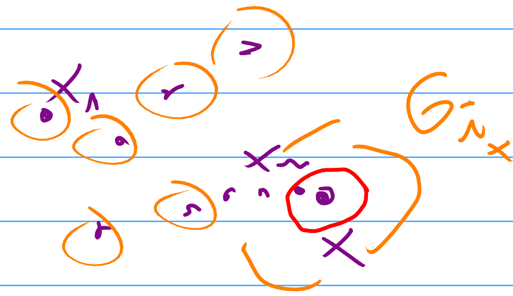
2) Sea $(x_n) \subseteq E$, con $x_n \to x$

Sea $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$

Veamos que K es compacto.

Sea $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ con G_i AB

- Tomo $i_x \in I$ con $x \in G_{i_x}$.



Como $x_n \to x$, $(\exists n_0)$

$x_n \in G_{i_x}$ $\forall n > n_0$

- $\forall\, 1 \leq n \leq n_0$, tomo $i_n \in I$ con $x_n \in G_{i_n}$

$\rightsquigarrow$ $K \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} G_{i_n}\right) \cup G_{i_x}$

$\left(J = \{i_1, \dots, i_{n_0}\} \cup \{i_x\} \right)$

EJERCICIO DE PARCIAL

4. Sean $(E,d),(E',d')$ espacios métricos. Sea $f : E \to E'$ continua tal que $f^{-1}(K')$ es compacto para todo $K' \subseteq E'$ compacto.

Probar que $f(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq E$ cerrado.

SEA $F \subseteq E$ CERRADO; QVQ $f(F)$ $= \{f(x) : x \in F\}$ ES CERRADO.

SEA $(y_m) \subseteq f(F)$ CON $y_m \to y$

QVQ $y \in f(F)$ (i.e., QUE $(\exists x \in F) y = f(x)$)

$(\forall m)$ $\exists x_m \in F$ CON $f(x_m) = y_m$

(OBS: SI $x_m \to x$, COMO F CERR, TENDRÍAMOS $x \in F$; COMO f CONT TENDRÍAMOS $\underbrace{f(x_m)}_{y_m} \to \underbrace{f(x)}_{y}$)

SEA $K' = \{y_m : m \geq 1\} \cup \{y\}$ $\rightsquigarrow$ COMPACTO

LUEGO $\underbrace{f^{-1}(K')}_{\ni x_m}$ ES COMPACTO

$\rightsquigarrow \exists (x_{n_k}) \subseteq f^{-1}(K')$ CONVERGENTE

$x_{n_k} \to x \ (\in f^{-1}(K'))$

COMO F CERR TENEMOS $x \in F$;

COMO f CONT TENEMOS

$$\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \to \underbrace{f(x)}_{y}$$

ASÍ $y = f(x) \in f(F)$ ///

PUNTOS FIJOS

RECORDAR: DADA $f: E \to E$ CONT,

f TIENE UN (ÚNICO) PTO FIJO SI

- E COMPLETO Y $\exists \alpha \in (0,1)$ CON

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \quad \forall x,y$$

- E compacto y

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \forall x,y$$

(Además, $\forall x_0 \in E$, $(f^m(x_0))_m$ converge al punto fijo)

EJEMPLOS:

1) "Resolvamos"

$$1/2 \arctg(x) - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{1/2 \arctg(x) + 1}_{=: f(x)} = x$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \, |x-y| \quad ;$$

c entre x e y

$$|f'(x)| = 1/2 \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{1+x^2} \right|}_{\leq 1} \leq 1/2 \quad \forall x$$

Así, $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x,y)$

$\rightsquigarrow$ f TIENE UN ÚNICO PUNTO FIJO

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "$g(+\infty) = +\infty$"

2) $g(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ ¿PTOS FIJOS?

$g'(x) = 1 - \frac{1}{(1+e^x)^2} e^x < 1$

AFIRMO: $g'(x) > 0$. EN EFECTO

$1 > \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \iff \underbrace{(1+e^x)^2}_{1+2e^x+e^{2x}} > e^x$

$\iff 1 + e^x + e^{2x} > 0$ ✓

LUEGO, $|g'(x)| < 1$ Y POR LO TANTO

$d(g(x), g(y)) < d(x,y)$

COMO $\mathbb{R}$ NO ES COMPACTO, NO SE APLICA EL TEO

¿TIENE f PTOS FIJOS? NO:

$$f(x) = x + \frac{1}{1+e^x} \stackrel{?}{=} x$$

Sn $\frac{1}{1+e^x} = 0$