Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

(a) $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

(b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

(c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$.

(e) $C([0,1])$ con $d_\infty(f,g) = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t) - g(t)|$.

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en $\mathbb{R}$:

(a) $d(x,y) = (x-y)^2$ (b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ (c) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

3. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞. Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

4. Considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}$. Hallar $\mathbb{Q}^\circ$ y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0,1]$ (c) $\mathbb{Q}$ (e) $\mathbb{Z}$ (g) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $(0,1)$ (d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (f) $[0,1) \cup \{2\}$ (h) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

6. Consideremos en el espacio $C([0,1])$ las métricas d_∞ y d_1 dadas por

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

(a) Sea $A = \{f \in C([0,1]) : f(0) > 0\}$. Probar que A es abierto para d_∞ pero que no lo es para d_1.

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \leq M \cdot d_1(f,g)$ para todas $f, g \in C([0,1])$.

7. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.
(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.
(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.
(e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.
(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.
(g) Probar que $\{y \in E : \ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

8. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. Probar que:

(a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.
(b) $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

9. Sea (E,d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Probar que:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.
(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

10. Sean (E,d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E.

(a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
(b) Probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

11. Hallar frontera y puntos de acumulación de cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ del Ejercicio 5.

12. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$.

(a) Probar que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$, y concluir que ∂A es cerrado.
(b) Probar que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

13. Sea (E,d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq E$ no vacío y $x \in E$, se define la *distancia* de x a A como

$$d_A(x) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Probar que para todos $x, y \in E$ y $r > 0$:

(a) $\left|d_A(x) - d_A(y)\right| \leq d(x, y)$.

(b) $x \in A \implies d_A(x) = 0$.

(c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(d) $B_A(r) = \{x \in E : d_A(x) < r\}$ es abierto.

(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado.

14. Sea (E, d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$. Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A\ ,\ b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $\widehat{d}(A, B) = \widehat{d}\left(\overline{A}, B\right)$.

(b) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

(c) $\widehat{d}(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(d) $\widehat{d}(A, B) \leq \widehat{d}(A, C) + \widehat{d}(C, B)$.

Concluir que $\widehat{d}$ no es una distancia.

15. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en E, probar que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

16. Probar que $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son completos.

17. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $A \subseteq E$ un subconjunto de E. Probar que si A es cerrado entonces el espacio métrico (A, d) es completo.

18. Teorema de la intersección (Cantor). Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
