Análisis Avanzado - Espacios Métricos 3

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Repaso

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Repaso

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Definición

Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema

A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

Teorema

A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

Teorema

- La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.
- La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.
- La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.
- La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

PENSAR

$(a-r, a+r)$

$\forall r>0 \; B(a,r)\cap A\neq\emptyset$

Ejercicio:

1. Sea $a \in E$. Entonces, $\{a\}$ es cerrado.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Entonces, $\sup(A)$, $\inf(A) \in \bar{A}$.

$\leq a$

Topología: continuación

Definición

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x,r)$ es infinito.

Ej: $A = [0,1) \cup \{2\}$

→ No es de acum. si es de A

$B(2,r) \cap A = \{2\}$ $\forall r<1$

es inf.

$x=1$ es de acumulación

Definición

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x.

Dem: V es entorno de x si, $x \in V^\circ$

$\Downarrow$) V es un ent $\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \subseteq V^\circ$.

$\underbrace{A \cap B(x,r)}_{\text{inf.}} \subseteq A \cap V^\circ \subseteq A \cap V \Rightarrow \exists\, y \in A \cap B(x,r) \,/\, y \neq x$

$\Uparrow$) $r > 0$ como $B(x,r)$ es un ent $\Rightarrow A \cap B(x,r) \ni y$, $y \neq x$.

Sup $B(x,r) \cap A = \{x, y, y_1, \ldots, y_k\}$ $\Rightarrow r_0 = \min\{d(x,y), d(x,y_1), \ldots\}$

$B(x, r_0) \cap A = \{x\}$ ABS!

Definición

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Definición

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Ejemplos:

1) $A = (a,b) \Rightarrow A' = [a,b]$.

$r>0 \quad B(x,r) \cap (a,b) = \underline{(x-r, x+r)} \cap (a,b) = \begin{cases} (a,d) \\ [a,d) \\ (d,b) \end{cases}$

$x \notin [a,b] \Rightarrow \exists r \,/\, \quad = \emptyset$

$r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$

$x \in [a,b] \Rightarrow$

2) $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} = E \qquad \mathbb{Z}' = \emptyset$

$B(x, 1/2) \cap \mathbb{Z}$ tiene a lo sumo 1 punto.

Teorema

Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

Dem: $\subseteq$) $x \in \bar{A} \overset{?}{\Rightarrow} x \in A$ o $x \in A'$

Si $x \in A$ ✓. Si $x \notin A$, como $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\underset{x \notin A}{\Rightarrow}$ $y \neq x$, $y \in B(x,r) \cap A$. Si V es un ent. de x

$\Rightarrow \exists r > 0 \mid B(x,r) \subseteq V^\circ \Rightarrow \exists y \neq x$, $y \in B(x,r) \cap A$
$\subseteq V^\circ \cap A \subseteq V$

$\Rightarrow x \in A'$.

$\supseteq$) Siempre $A \subseteq \bar{A}$, hay q' ver que $A' \subseteq \bar{A}$

$x \in A' \Rightarrow \forall r > 0$, $B(x,r) \cap A$ tiene infinitos puntos

$\Rightarrow$ es no vacía $\Rightarrow x \in \bar{A}$.

Teorema

Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

Corolario

A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

Dem: A cerrado $\Leftrightarrow$ $\bar{A} = A$

$\bar{A} = A' \cup A$ Teorema

$\Rightarrow)$ A cerrado $\Rightarrow$ $A' \subseteq A' \cup A = \bar{A} = A$

$\Leftarrow)$ $A' \subseteq A \Rightarrow \underbrace{A' \cup A}_{=A} = A$

Definición

Dado $A \subset E$, decimos que x es un punto de la frontera de A si para todo $r > 0$, se cumple

$$\boxed{B(x,r) \cap A \neq \emptyset}, \quad \boxed{B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset}.$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos ∂A. $\underline{\partial A}$.

$$x \in \partial A \Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{A^c} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

$\partial A \overset{?}{=} \overline{A} \cap \overline{A^c}$ $\quad$ Rta sí $\quad$ Ejercicio de la práctica.

Proposición

Sea $A \subset E$. Entonces $\bar{A} = \underline{A} \cup \underline{\partial A}$.

Dem: $\supseteq$) $A \subseteq \bar{A}$. Si $x \in \partial A \Rightarrow \forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$. $\Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \bar{A}$.

$\subseteq$) $x \in \bar{A}$, $x \notin A \longrightarrow \forall r > 0$ $\underbrace{B(x,r) \cap A^c}_{x \in} \neq \emptyset$

$x \notin A \Leftrightarrow x \in A^c$.

$\forall r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

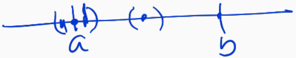
$\Rightarrow x \in \partial A$ $\boxtimes$

Entonces, ¿se parecen A' y ∂A?

$$\overline{A} = A \cup A' = A \cup \partial A.$$

- $[a,b]' = [a,b]$

$\partial[a,b] = \{a,b\}$



¿$\partial A \subseteq A'$?

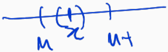
Ahora No

- $\mathbb{Z}' = \emptyset$

$\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$x \in \mathbb{R}$, $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Z}$, $\cap \mathbb{Z}^c$

$r < 1/2$



$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\partial A \nsubseteq A'$

- $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
- $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Definición $f: E \to \mathbb{N}$ $f(n) = x_n$.

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $x_n \in B(x, \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ x_n \in B(x, \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ dado cualquier entorno V de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Ejercicio $\rightsquigarrow$ detalles

Consideremos (E, δ) con E cualquier conjunto infinito y δ la distancia discreta.

$(x_n)_n \subseteq E \;/\; x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in E$

$\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; \underbrace{\delta(x, x_n)}_{\substack{=0 \text{ si } x = x_n \\ 1 \text{ si } x \neq x_n}} < 1/2 \;\; \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n = x \;\; \forall n \geq \underline{n_0}.$