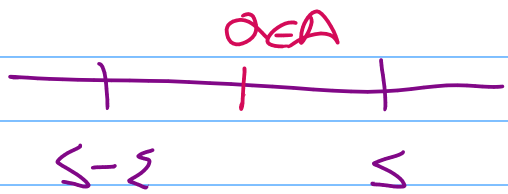
SUPREMOS E ÍNFIMOS

RECORDAR: $A \subseteq \mathbb{R}$, acot superiormente.

$s \in \mathbb{R}$ es el sup de A si

- $s \geq a \quad \forall a \in A$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A$ con $a > s - \varepsilon$

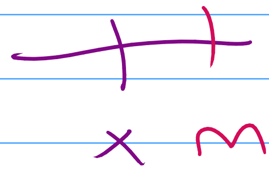


1) PPIO DE ARQUÍMEDES

$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N}$ con $m > x$

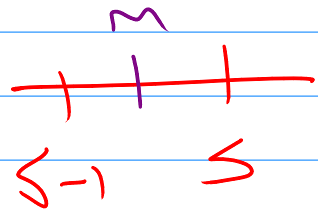
"$\mathbb{N}$ no está acotado"

DEM: sup que sí



$\rightarrow \exists\, s = \sup \mathbb{N}$

$\exists\, m \in \mathbb{N} \ / \ s - 1 < m$



$\Rightarrow s < m+1 \in \mathbb{N}$

ABS! PUES $s \geq x \ \forall x \in \mathbb{N}$

CONSECUENCIAS:

$a, b \in \mathbb{R}$

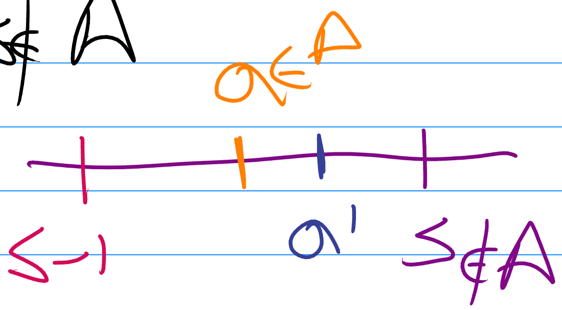
- $\forall\, 0 < a < b \ \exists\, m \in \mathbb{N} \,/\, ma > b \ (\Longleftrightarrow m > b/a)$
- $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, m \in \mathbb{N} \,/\, 1/m < \varepsilon \ (\Longleftrightarrow m > 1/\varepsilon)$

2) $A \subseteq \mathbb{Z}$ ACOT SUPERIORMENTE

ENTONCES $s = \sup A \in A$

$(\Longleftrightarrow$ A TIENE MÁXIMO$)$

DEM: SUP $s \notin A$



- $\exists\, a \in A$ CON $a > s-1$

Como $a \in A$, $\overbrace{s-a}^{\varepsilon} > 0$

• $\exists\, a' \in A$ con $a' > s-(s-a) = a$

En part, $a \neq a'$. Abs! pues

$$\underbrace{|a-a'|}_{\geq 1,\ \text{pues } a,a' \in \mathbb{Z} \text{ y } a \neq a'} < |s-1-s| = 1$$

$\boxtimes$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists!\, m \in \mathbb{Z}$ con

$$m \leq x < m+1$$

→ ó piso

Nombre / not: $m = \lfloor x \rfloor$, (parte entera) de x

Ej: $\lfloor -3 \rfloor = -3$

$\lfloor 0,9 \rfloor = 0$

$\lfloor -0,1 \rfloor = -1$

Dem: Sea $m = \sup \overbrace{\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}}^{=: A}$

• Como $A \subseteq \mathbb{Z}$, $\underbrace{m \in A}$

EN PART

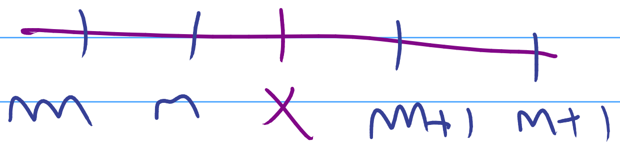
$m \in \mathbb{Z}$, $m \leq x$

- SI $m+1 \leq x$, ENTONCES $m+1 \in A$ ABS!

PUES $k \leq m$ $\forall k \in A$

UNICIDAD: SUP $m \leq x < m+1$

$M \leq x < M+1$



SUP $M > m$. ENTONCES $M \geq m+1 > x$

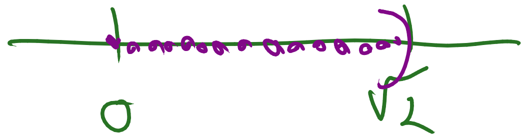
ABS! (GRACIAS JUAN)

EJ: PROBAR QUE $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists!\, m \in \mathbb{Z}$ /

$$m-1 < x \leq m$$

NOMBRE/NOT: m ES EL TECHO DE x,

$$m = \lceil x \rceil$$



EJEMPLO: $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

$= \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

ENTONCES $\text{ínf } A = 0$

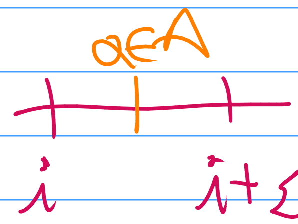
$\sup A = \sqrt{2}$

(OBS: $\text{ínf } A \in A$, ES DECIR, $0 = \text{mín } A$; $\sup A \notin A$)

0 ES COTA INF

- $\text{ínf } A = 0$: • $\underbrace{0 \leq x \quad \forall x \in A}$
  - $0 + \varepsilon$ NO ES COTA INF:

$\underbrace{0}_{\in A} < 0 + \varepsilon$



$i = \text{ínf } A$

(GRACIAS GEMI)

• $\sup A = \sqrt{2}$:

• $\sqrt{2} \geq a \quad \forall a \in A$

• $\sqrt{2}-\varepsilon \quad ¿\exists a? \quad \sqrt{2}$

• Si $\sqrt{2}-\varepsilon < 0$, tomo $a = 0$;

Así $a \in A$, $a > \sqrt{2}-\varepsilon$

• Si $\sqrt{2}-\varepsilon > 0$

2. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un irracional entre s y q.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y.

$\exists a \in \mathbb{Q}$ con $\sqrt{2}-\varepsilon < a < \sqrt{2}$ ✓