Práctica 2

Recordar: Dada $f : X \to Y$ y dados $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$, se tiene que:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva vale la igualdad.

(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Si f es suryectiva vale la igualdad.

(g) $X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$.

---

1. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2. Sean A y B conjuntos. Probar que:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

3. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\,\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.
(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

6. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

7. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.
(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

8. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:
  - $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
  - $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

9. (a) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

11. Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.

12. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

14. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

15. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Calcular el cardinal de $[0,1) \times [0,1)$.

(c) Calcular el cardinal de $\mathbb{R}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

16. Calcular el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.

(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

(c) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$.

18. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i\in I}$ indexada por I, con $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$. Probar que I es contable.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.