

14. Calcular el cardinal del conjunto  $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$ .

- Son los subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tales que

- ↳ sean numerables :  $\#B = \aleph_0$

- ↳ que dejen un resto numerable al hacer  $\mathbb{N} \setminus B$

$$\# \mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$$

(ie:  $\mathbb{N} \setminus B$  no puede ser finito)

- Llamo  $A$  al conjunto del enunciado

- Como  $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A)$$

- Sé que

$$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$$

y además, que

$A$  es infinito

pues existen un finitos subconjuntos de  $\mathbb{N}$  que cumplen las condiciones de  $A$ , eg:

- los subconjuntos de  $\mathbb{N}$  múltiplos de cada primo:

$$\begin{aligned} & \{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 2 = 0, b \in B\} \\ & \{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 3 = 0, b \in B\} \\ & \vdots \\ & \{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod p = 0, b \in B\} \quad \forall p \text{ primo} \end{aligned}$$

- Busco encontrar el cardinal de  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ ,  
dado por los subconjuntos de  $\mathbb{N}$  que cumplen:

- ↳ ó bien son finitos
- ↳ ó dejan un resto finito

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \right\} \cup \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es numerable, } \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \right\}$$

- Llamo  $X$  e  $Y$  a estos conjuntos respectivamente

Por ejercicio 10

10. Probar que si  $A$  es numerable entonces  $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$  es numerable.

Sé que  $X$  es numerable.

- Faltó ver el cardinal de  $Y$

- Si  $B \subseteq \mathbb{N}$  y  $\mathbb{N} \setminus B$  es finito

$\Rightarrow B$  es numerable

$\therefore Y$  se puede escribir como

$$\{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \}$$

- Esto es similar al caso del ejercicio 10.

- Busco función biyectiva entre  $X$  e  $Y$

- Defino

$$\psi : Y \rightarrow X$$

$$B \mapsto \mathbb{N} \setminus B$$

- Afirmando que es inyectiva

Dem:

- Inyectividad:

$$\text{Si } \psi(B) = \psi(D)$$

$$\Rightarrow N \setminus B = N \setminus D$$

esto sucede siii  $B = D$ , pues si fueran distintos, existiría algún elemento en  $B$  que no esté en  $D$  o viceversa, con lo que  $N \setminus B$  no tendría este elemento pero sí estaría en  $N \setminus D$ , o viceversa, concluyendo que

$$B \neq D \Leftrightarrow N \setminus B \neq N \setminus D$$

$\therefore \psi$  es inyectiva.

De la misma manera, de fijo

$$\phi : X \rightarrow Y$$

$$E \mapsto B$$

Afirmo que es inyectiva.

Dem:

• Inyectividad:

$$\text{Si } \phi(E) = \phi(F)$$

$$\text{Como } E, F \in X$$

$$\Rightarrow \exists B \in \mathcal{Y} \mid E = N \setminus B$$

$$\exists D \in \mathcal{Y} \mid F = N \setminus D$$

$$\Rightarrow \phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D)$$

y estoy en el mismo caso que demostrando  
inyectividad en  $\psi$ :

$$\phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D) \Leftrightarrow B = D$$

y como

$$B = D \Leftrightarrow E = F$$

$$\Rightarrow \phi(E) = \phi(F) \Leftrightarrow E = F$$

∴  $\phi$  es inyectiva,

Como  $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow X$  es inyectiva

y  $\phi : X \rightarrow \mathcal{Y}$  es inyectiva

Por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein  
sé que existe una función biyectiva de  $\mathcal{Y} \rightarrow X$

$$\therefore X \sim Y$$

y como  $X$  es numerable

$\Rightarrow Y$  es numerable.

Volviendo

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = X \cup Y$$

como unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$  es numerable.

Finalmente, tendrás que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A)$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A) = A$$

Como  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$  es numerable

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

o

$$A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

o vez que

$$\# A = c$$

□