12. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

a) Como $\#A = c$

$\Rightarrow \exists f$ biyectiva $/ \ f: A \to [0,1)$

Como $\#B = c$

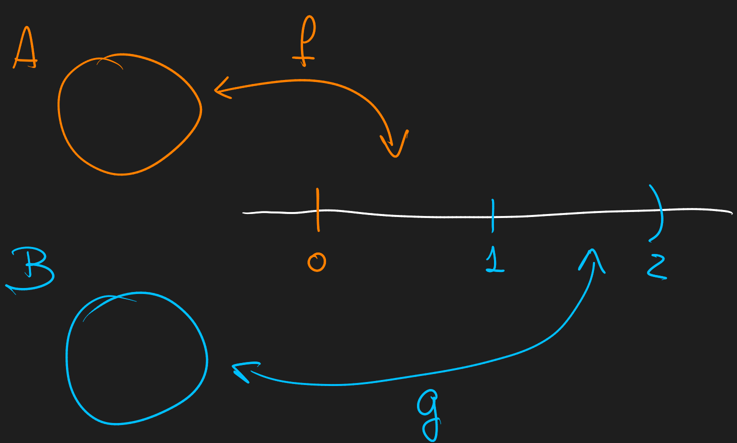
$\Rightarrow \exists g$ biyectiva $/ \ f: B \to [1,2)$

Supongo $A \cap B = \phi$

Además, afirmo que

$\exists h$ biyectiva $/ \ h: A \cup B \longrightarrow [0,2)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$



Pruebo biyectividad de $h(x)$:

- Si $x \in A \Rightarrow h(x) = f(x) \in [0,1)$
- Si $y \in B \Rightarrow h(y) = g(y) \in [1,2)$

Busco absurdo

- Si $h(x) = h(y) \Rightarrow$ si $x \in A \Rightarrow h(x) \in [0,1)$

$$\overset{h(x)=h(y)}{\Rightarrow} h(y) \in [0,1) \quad \text{Abs!}$$

Revisar !

$$\therefore\ h(x) \neq h(y) \quad \forall x, y \text{ con } \begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \end{array}$$

$\therefore$ h es <u>inyectiva</u>.

Falta sobreyectividad :

Si $t \in [0,2) \Rightarrow t \in [0,1)$ ó $t \in [1,2)$

↳ Si $t \in [0,1)$

$\Rightarrow$ Como f es sobreyective e inyectiva

$$\exists!\, a \in A \,/\, f(a) = t = h(a)$$

↳ Si $t \in [1,2)$

$\Rightarrow$ Como g es sobreyective e inyectiva

$$\exists!\, b \in B \,/\, g(b) = t = h(b)$$

$\therefore$ h es sobreyectiva

$\therefore$ h es biyectiva.

Finalmente

$$[0,1) \overset{d}{\cup} [1,2) \sim [0,2)$$

y como

$$A \sim [0,1)$$

$$B \sim [1,2)$$

supuse!

$$\Rightarrow A \overset{d}{\cup} B \sim [0,1) \overset{d}{\cup} [1,2) \sim [0,2) \sim \mathbb{R}$$

$$A \overset{d}{\cup} B \sim \mathbb{R}$$

Ahora, si

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cup B = \underbrace{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}_{\sim \mathbb{R}} \overset{d}{\cup} \underbrace{(A \cap B)}_{?}$$

Por lo que probé

Como

$$\# A \cap B \leq \# A$$

$$\# A \cap B \leq c$$

$$\therefore \# \left[(A \cup B) \setminus (A \cap B) \overset{d}{\cup} \overbrace{(A \cap B)}^{\text{a lo sumo } c} \right] = c$$

$$\therefore \# A \cup B = c$$

∎

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

Como $A_n \sim [n, n+1) \sim \mathbb{R}$

y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1) = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$

Por lo que

$$\#\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)\right) = c$$

Si los A_n son disjuntos 2 a 2 (los llamo B_n)

$\Rightarrow \exists f$ inyectiva de los B_n a los $[n, n+1)$

- $\overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n^{c} = c$?

- $\overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n^{\aleph_0} = \#\mathbb{N}$ si es que existe algún $B_n^{\aleph_0}$

- $\overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n^{\text{finito}} \leq \#\mathbb{N}$ si es que existe algún B_n^{finito}

y como unir a un conjunto infinito un conjunto finito o numerable <u>no</u> cambia su cardinal,

$$\Rightarrow \# \overset{d}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n = c$$

y como

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = c$$

$\boxtimes$