

12. Sea c el cardinal de \mathbb{R} . Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

a) Como $\#A = c$

$\Rightarrow \exists f$ biyectiva / $f: A \rightarrow [0, 1)$

Como $\#B = c$

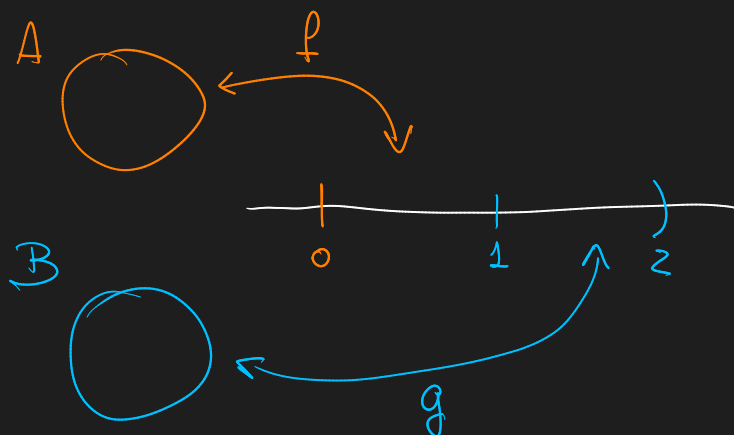
$\Rightarrow \exists g$ biyectiva / $f: B \rightarrow [1, 2)$

Supongo $A \cap B = \emptyset$

Además, afirmo que

$\exists h$ biyectiva / $h: A \cup B \rightarrow [0, 2)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$



Pruebo biyectividad de $h(x)$:

- Si $x \in A \Rightarrow h(x) = f(x) \in [0, 1)$

- Si $y \in B \Rightarrow h(y) = g(y) \in [1, 2)$

Busco absurdo

- Si $h(x) = h(y) \Rightarrow$ si $x \in A \Rightarrow h(x) \in [0, 1)$

$$\stackrel{h(x)=h(y)}{\Rightarrow} h(y) \in [0, 1) \text{ Abs!}$$

Revisar!

$$\therefore h(x) \neq h(y) \quad \forall x, y \text{ con } x \in A, y \in B$$

$\therefore h$ es inyectiva.

Falta sobreyectividad:

$$\text{Si } t \in [0, 2) \Rightarrow t \in [0, 1) \text{ ó } t \in [1, 2)$$

$$\hookrightarrow \text{Si } t \in [0, 1)$$

\Rightarrow Como f es sobreyectiva e inyectiva

$$\exists! a \in A / f(a) = t = h(a)$$

$$\hookrightarrow \text{Si } t \in [1, 2)$$

\Rightarrow Como g es sobreyectiva e inyectiva

$$\exists! b \in B / g(b) = t = h(b)$$

$\therefore h$ es sobreyectiva

$\therefore h$ es biyectiva.

Finalmente

$$[0,1) \dot{\cup} [1,2) \sim [0,2)$$

y como

$$A \sim [0,1)$$

$$B \sim [1,2)$$

supuse!

$$\Rightarrow A \dot{\cup} B \sim [0,1) \dot{\cup} [1,2) \sim [0,2) \sim \mathbb{R}$$

$$A \dot{\cup} B \sim \mathbb{R}$$

Ahora, si

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cup B = \underbrace{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}_{\sim \mathbb{R} \text{ Por lo que probé}} \dot{\cup} \underbrace{(A \cap B)}_{?}$$

Como

$$\# A \cap B \leq \# A$$

$$\# A \cap B \leq c$$

$$\therefore \# \left[(A \cup B) \setminus (A \cap B) \dot{\cup} \overbrace{(A \cap B)}^{\text{a lo sumo } c} \right] = c$$

$$\therefore \# A \cup B = c$$

□

(b) Si $\#A_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

Como $A_n \sim [n, n+1) \sim \mathbb{R}$

$$\text{y } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

Por lo que

$$\# \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) \right) = c$$

Si los A_n son disjuntos 2 a 2 (los llamo B_n)

$\Rightarrow \exists f$ inyectiva de los B_n a los $[n, n+1)$

• $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c = c$?

• $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{\aleph_0} = \# \mathbb{N}$ si es que existe algún $B_n^{\aleph_0}$

• $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{\text{finito}} \leq \# \mathbb{N}$ si es que existe algún B_n^{finito}

y como unir a un conjunto infinito un conjunto finito o numerable no cambia su cardinal,

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = c$$

y cons

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathcal{C}$$

□