Alumno: Leandro Carreira

---

14. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

- Son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que

  ↳ sean numerables : $\#B = \aleph_0$

  ↳ que dejen un resto numerable al hacer $\mathbb{N} \setminus B$

$$\# \mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$$

(ie: $\mathbb{N} \setminus B$ no puede ser finito)

- Llamo A al conjunto del enunciado

- Como $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \,\dot{\cup}\, \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A \right)$$

- Sé que

$$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

y además, que

$$A \text{ es infinito}$$

pues existen infinitos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplen las condiciones de A, eg:

- los subconjuntos de $\mathbb{N}$ múltiplos de cada primo:

$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 2 = 0,\ b \in B\}$$
$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 3 = 0,\ b \in B\}$$
$$\vdots$$
$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod p = 0,\ b \in B\} \quad \forall p \text{ primo}$$

- Busco encontrar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$, dado por los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplen:
  - ↳ ó bien son finitos
  - ↳ ó dejan un resto finito

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\} \cup \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es numerable, } \mathbb{N} \setminus B \text{ finito}\}$$

- Llamo X e Y a estos conjuntos respectivamente

Por ejercicio 10

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

sé que X es numerable.

- Falta ver el cardinal de Y

- Si $B \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \setminus B$ es finito

  $\Rightarrow$ B es numerable

  $\therefore$ Y se puede escribir como

$$\{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \}$$

- Esto es similar al caso del ejercicio 10.

- Busco función biyectiva entre X e Y

- Defino

$$\varphi : Y \to X$$

$$B \mapsto \mathbb{N} \setminus B$$

- Afirmo que es inyectiva

Dem:

- Inyectividad:

Si $\varphi(B) = \varphi(D)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{N}\setminus B = \mathbb{N}\setminus D$

ésto sucede sii $B = D$, pues si fueran distintos, existiría algún elemento en B que no esté en D o viceversa, con lo que $\mathbb{N}\setminus B$ no tendría este elemento pero sí estaría en $\mathbb{N}\setminus D$, o viceversa, concluyendo que

$$B \neq D \Leftrightarrow \mathbb{N}\setminus B \neq \mathbb{N}\setminus D$$

$\therefore \varphi$ es inyectiva.

De la misma manera, defino

$$\phi : X \to Y$$
$$E \mapsto B$$

Afirmo que es inyectiva.

Dem:

- Inyectividad:

Si $\phi(E) = \phi(F)$

Como $E, F \in X$

$\Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{Y} \;/\; E = N \setminus B$

$\exists\, D \in \mathcal{Y} \;/\; F = N \setminus D$

$$\Rightarrow \phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D)$$

y estoy en el mismo caso que demostrando inyectividad en φ :

$$\phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D) \iff B = D$$

y como

$$B = D \iff E = F$$

$$\Rightarrow \phi(E) = \phi(F) \iff E = F$$

$\therefore$ ϕ es inyectiva.

Como $\varphi : Y \to X$ es inyectiva

y $\phi : X \to Y$ es inyectiva

Por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

sé que existe una función biyectiva de $Y \to X$

$\therefore \quad X \sim Y$

y como X es numerable

$\Rightarrow Y$ es numerable.

Volviendo

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = X \dot{\cup} Y$$

como unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable.

Finalmente, tenía que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \dot{\cup} \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right)$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right) = A$$

Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$\therefore \quad A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

o sea que

$$\boxed{\# A = c}$$

$\blacksquare$