RECORDAR: $E = \{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$.

E' EN, $(y_n) \subseteq E'$, $y \in E'$. SEA

$f : E \to E'$,

$$f(x) = \begin{cases} y_n, & x = 1/n \\ y, & x = 0 \end{cases}$$

PROBAR QUE SI $y_n \to y$, ENTONCES f ES CONTINUA EN 0

SEA $(x_n) \subseteq E$, CON $x_n \to 0$;

$(\text{ie}: \forall \eta > 0\ (\exists N)\ |x_n| < \eta\ \forall n \geq N)$

QVQ $f(x_n) \to f(0) = y$; ie:

$\forall \varepsilon > 0\ (\exists n_0)\ |f(x_n) - y| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

SÉ: $f(1/n) = y_n \to y$

$(\text{ie}: \forall \mu > 0\ (\exists M)\ |\underbrace{y_n}_{f(1/n)} - y| < \mu\ \forall n \geq M)$

SEA $\varepsilon > 0$. TENGO n_0 /

$|f(1/n) - y| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_0$

TOMO m_1 / $|x_m| \leq 1/m_0$ $\forall m \geq m_1$; ASÍ: DADO $m \geq m_1$

$$x_m = \begin{cases} 0 \\ 1/m, \text{ CON} \end{cases}$$

$\triangleright$ $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{m_0} \iff m \geq m_0$

$\forall m \geq m_1$

ASÍ, $|f(x_m) - y|$

$$= \begin{cases} 0, & \text{SI } x_m = 0 \\ \underbrace{|f(1/m) - y|}_{< \varepsilon, \text{ SI } m \geq m_0} & \text{SI } x_m = 1/m \end{cases}$$

(PUES $|x_m| < 1/m_0$)

14. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

IDEA: PVQ $f(x_m) \to y$; BVQ $\forall (f(x_{m_k}))$ SUSS $\exists (f(x_{m_{k_j}}))$ CON $f(x_{m_{k_j}}) \to y$

BASTARÍA CON QUE $x_{n_{k_j}}$ FUERA

SUBS DE $1/m$

CONTINUIDAD UNIFORME

$f: E \to E'$ ES UNIF CONT SI

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)$

$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\forall x, y$ CON $d(x, y) < \delta$

PROP: SEA $I \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALO.

SEA $f: I \to \mathbb{R}$. SUP QUE

f ES DERIV EN I, Y QUE $[(\exists M)$

CON $|f'(c)| \leq M \ \forall c \in \overset{\circ}{I}]$ $\circledast$

ENTONCES f ES UNIF CONT

DEM: SEAN $x, y \in I$, $x < y$

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \underset{\text{TVM}}{=} |f'(c)(x-y)|}$$

TVM; $c \in (x, y)$

$$\leq M|x-y|$$ "f ES LIPSCHITZ CON CTE M"

ASÍ, DADO $\varepsilon>0$ TOMO $\delta=\varepsilon/M$; ASÍ

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

SI $|x-y|<\delta$ ☒

EJEMPLO: SEA $\alpha>0$.

SEA $f(x)=1/x$, $f:\underbrace{[\alpha,+\infty)}_{I}\to\mathbb{R}$

$$|f'(x)|=|-1/x^2|=\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\alpha^2}$$

$\forall x\in I^\circ$

$\rightsquigarrow$ f ES UNIF CONT EN I

PERO: f NO ES UNIF CONT EN $(0,+\infty)$

17. (a) Sean (E,d) y (E',d') espacios métricos y $f:E\to E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E$, $\alpha>0$ y $n_0\in\mathbb{N}$ tales que

i. $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$ y

ii. $d'(f(x_n),f(y_n))\geq\alpha$ para todo $n\geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua.

" ε

Tomo $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$

Así $\underbrace{d(x_n, y_n)}_{\to 0} \leq \underbrace{d(x_n, 0) + d(y_n, 0)}_{\to 0}$

Pero $|f(x_n) - f(y_n)|$
$= |n - (n+1)| = 1 \quad \forall n$

Ojo: puede pasar que f' no esté acot pero que f sea unif cont;

de hecho,

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

es unif cont $\left(\text{pero } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

Ejercicio (no fácil)

no está acot en $(0, +\infty)$

EJEMPLO: $E = C([0,1])$ con d_∞,

$S: E \to E$, $S(f) = f^2$

VIMOS: S CONTINUA

VEAMOS: S NO ES UNIF CONT

$\to$ así: $\|f_m\|_\infty = m \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$

Tomo $f_m \equiv m$, $g_m \equiv m + 1/m$

Así $d_\infty(f_m, g_m) = 1/m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$;

$$d_\infty(S(f_m), S(g_m)) = \left| m^2 - (m + 1/m)^2 \right|$$
$$= \left| \cancel{m^2} - \cancel{m^2} - 2 - 1/m^2 \right|$$
$$= 2 + 1/m^2 \geq 2 \quad \forall m$$