Práctica 1

1. Probar que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

2. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un irracional entre s y q.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre x e y.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Probar:

$$s = \sup A \iff \begin{cases} a \leq s \text{ para todo } a \in A, \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. \end{cases}$$

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a \text{ para todo } a \in A, \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. \end{cases}$$

4. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y probar que lo son:

(a) $(a, b]$

(b) $B = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $B \cup \{0\}$

(d) $\left\{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\right\}$

5. Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. Probar:

(a) Si B está acotado superiormente, A también y $\sup A \leq \sup B$.

(b) Si B está acotado inferiormente, A también e $\inf B \leq \inf A$.

(c) Si A no está acotado, B tampoco.

6. Dados un conjunto de números reales A y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

(a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c \sup(A)$.

7. Probar, usando la definición de límite:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1$.

8. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Probar que si $|x_n - \ell| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

9. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, probar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

10. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ probar que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

11. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ creciente. Probar que:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente, entonces tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada superiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup(A)$.

13. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

14. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

15. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
