21 Ago

Supremos e ínfimos

Cota sup c

$$c \geqslant x \quad \forall x \in A$$

Supremo

La menor de las cotas inferiores.

En R, cualquier subconjunto ACOTADO tiene supremo. (por Axioma de Completitud)

En Q, por ejemplo, no necesariamente (ej: (0, sqrt(2)) no tiene supremo en Q)

Ejemplo

Si $A = [0, 1]$

$\Rightarrow$ • 1 es cota sup. pues si $x \in A$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ ✓

• 1 es supremo pues es el elemento más grande de A.

$\therefore$ 1 es la menor de las cotas superiores ✓

Ejemplo

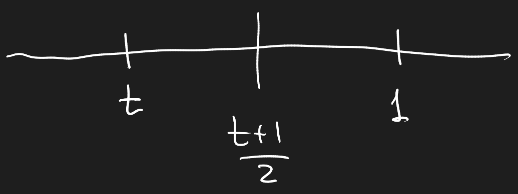
Si $B = [0, 1)$

$\Rightarrow$ • 1 es cota sup ✓

• Supongo que $\exists\, 0 < t < 1$ otra cota sup.

$$\Rightarrow \quad \frac{t+1}{2} \in (t, 1) \subseteq [0, 1) = B$$

$t>0$



$$\Rightarrow \quad \frac{t+1}{2} \in B \quad \text{y además} \quad \frac{t+1}{2} > t$$

Abs! pues t era cota sup.

$\therefore \nexists \; 0 < t < 1$ cota superior

$\therefore \; t \geq 1$

$\Rightarrow$ 1 es la menor de las cotas superiores.

$\Rightarrow \operatorname{Sup}(B) = 1$ ✓

Máximo:

- Cuando $\operatorname{Sup}(A) \in A$

Prop.

Si A acotado superiormente

y $t \in A$ cota superior

$$\Rightarrow \max(A) = t$$

Lo mismo para

- Cota inferior
- Ínfimo
- Mínimo

Proposición

Sea $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Entonces:

(1) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(2) $\sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$.

Dem (1)

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Sea $S_A = \operatorname{Sup} A$

$S_B = \operatorname{Sup} B$

qvq

$$S_A + S_B = \sup(A+B)$$

Si $a \in A$ y $b \in B$

$\Rightarrow$ $a + b \leq S_A + S_B$

pues

$a \leq S_A$

y $b \leq S_B$

y como vale $\forall a, b$ en A, B

$$\Rightarrow A + B \leq \underbrace{S_A + S_B}_{\text{es cota superior de } A+B} \checkmark$$

Falta ver que sea la menor.

Uso equivalencia 1:

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\text{qvq } \exists\, a \in A,\ b \in B \,/\, S_A + S_B - \varepsilon < a + b$$

Reescribo

$$S_A + S_B - \varepsilon = \underbrace{\left(S_A - \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\in A} + \underbrace{\left(S_B - \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\in B}$$

Elijo $a, b \,/$

$$S_A - \frac{\varepsilon}{2} < a < S_A$$

$$S_B - \frac{\varepsilon}{2} < b < S_B$$

$$\Rightarrow a+b > \left(s_A - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(s_B - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$a+b > s_A + s_B - \varepsilon \quad \checkmark$$

Probé que

Dado $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, a \in A,\ b \in B \,/\, s_A + s_B - \varepsilon < a+b$$

$\therefore$

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

$\blacksquare$

Para probar (2)

(2) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.

B	$1, 2, 3$
$\tilde{B}$	$-1, -2, -3$

Llamo $\tilde{B} = -B$

$$\Rightarrow \sup(A + \tilde{B}) = \sup(A) - \inf(-\tilde{B})$$

$$= \sup(A) + \sup(\tilde{B})$$

$\uparrow$

Vale por (1)

$\therefore$ (2) también vale

$\blacksquare$

- En R, todo conjunto NO vacío y ACOTADO SUPERIORMENTE tiene SUPREMO

- En R, todo conjunto NO vacío y ACOTADO INFERIORMENTE tiene ÍNFIMO

- Si A $\subseteq$ R NO vacío y acotado => inf(A) $\leq$ sup(A)