UBA - exactas
Departamento de Matemática

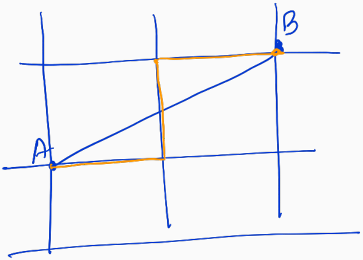
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

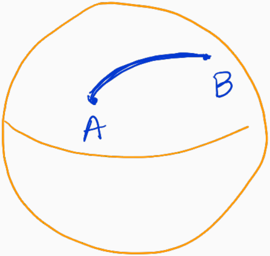
Análisis Avanzado - Espacios Métricos

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA


B
A


B
A

Tenemos una noción intuitiva de *distancia*.

Tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.

Tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Hay conceptos que dependen de la noción de distancia:
límite, continuidad y convergencia de sucesiones.

Tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Hay conceptos que dependen de la noción de distancia: límite, continuidad y convergencia de sucesiones.
Si tenemos distancias en espacios abstractos, vamos a poder entender, por ejemplo, continuidad de funciones definidas espacios abstractos.

Definición

Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

Definición

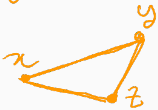
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

desigualdad $\triangle$.



Definición

Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Definición

Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Notemos que para todo $x, y \in E$,

$$0 = d(x, x) \overset{(iii)}{\leq} d(x, y) + \underbrace{d(y, x)}_{= d(x,y) \ (ii)} = 2d(x, y). \Rightarrow d(x,y) \geq 0.$$

Definición

Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Notemos que para todo $x, y \in E$,

$$d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

Entonces, si sólo supiéramos que $d(x,x) = 0$, podríamos deducir que $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$.

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

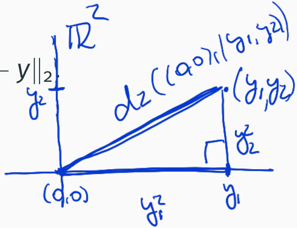
Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia euclídea como

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$



$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

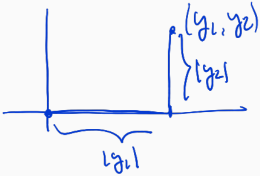
Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia euclídea como

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \boxed{\|x - y\|_2.}$$

La distancia 1 está dada por

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \boxed{\|x - y\|_1.}$$



$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia euclídea como

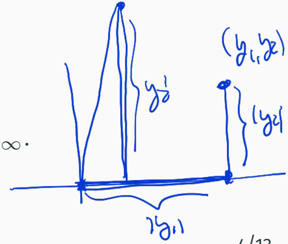
$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

La distancia 1 está dada por

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_1.$$

La distancia infinito está dada por

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty.$$



Ejemplo

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \|x-y\|_1$$

es una distancia.

Dem: d_1 cumple (i) - (iii)

(i) $d_1(x,y) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - y_i|}_{\geq 0} = 0 \iff |x_i - y_i| = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

$\iff x = y$. ✓

(ii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$ ✓

$y_i - x_i = -(x_i - y_i)$

(iii) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - z_i + z_i - y_i|}_{\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|}$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \right) = \underbrace{\sum |x_i - z_i|}_{d_1(x,z)} + \underbrace{\sum |z_i - y_i|}_{d_1(z,y)}$ $\boxtimes$

Distancias entre funciones continuas

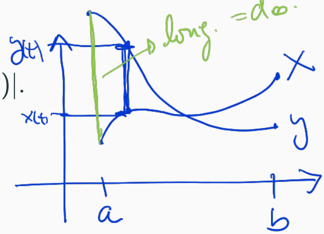
Dado un intervalo cerrado $\boxed{[a, b] \subset \mathbb{R},}$ llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a,b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$



Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$$d_\infty(x, y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos primeras propiedades de una distancia son inmediatas. Veamos la desigualdad triangular:

$$t \in [a,b] \Rightarrow |x(t) - y(t)| \le \underbrace{|x(t) - z(t)|}_{\le \sup_{t\in[a,b]} |x(t)-z(t)|} + \underbrace{|z(t) - y(t)|}_{\sup_{t\in[a,b]} |z(t)-y(t)|}$$

$$\le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$$

$$\Rightarrow \overbrace{\sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|}^{d_\infty(x,y)} \le d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$$

Distancias entre funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

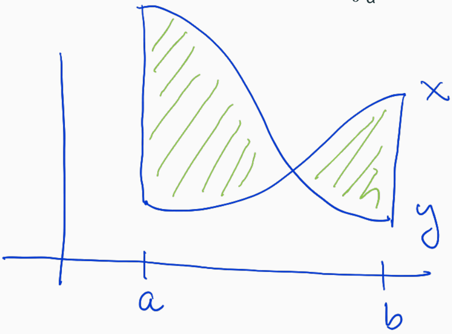
$$d_\infty(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos primeras propiedades de una distancia son inmediatas. Veamos la desigualdad triangular:

$(C([a, b]), d_\infty)$ es un espaco métrico.

Otra métrica posible en $C([a,b])$ es la siguiente:

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt.$$



Otra métrica posible en $C([a,b])$ es la siguiente:

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt.$$

$(C([a,b]), d_1)$ es un espaco métrico.

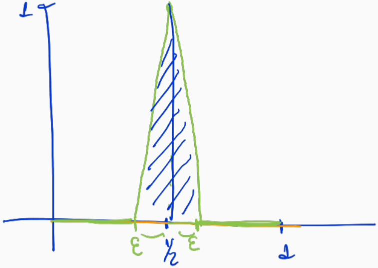
Las dos distancias que definimos en $C([a, b])$ son muy distintas.

Las dos distancias que definimos en $C([a,b])$ son muy distintas.

$$\longrightarrow d_\infty(x,y) = \sup_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|$$

$$\longrightarrow d_1(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt.$$

$[a,b] = [0,1]$



$x(t) \equiv 0 \quad \forall t.$

$y(t) \qquad \varepsilon > 0$

$$\underline{d_\infty(x,y) = 1} \leftarrow$$

$$d_1(x,y) = \frac{2\varepsilon \cdot 1}{2} = \varepsilon$$

Definición

Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en E como

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

(i) $\delta(x,y) = 0 \overset{\text{por def.}}{\iff} x = y$ $\qquad \delta(x,y) \in \{0,1\}$

(ii) $\underset{\substack{\downarrow \\ x \neq y}}{\delta(x,y)} = 1 = \delta(y,x)$

(iii) $\underbrace{\delta(x,y)}_{\substack{=1 \\ (x\neq y)}} \overset{?}{\leq} \delta(x,z) + \delta(z,y)$

caso x caso.

Topología en espacios métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\to B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$

Definición

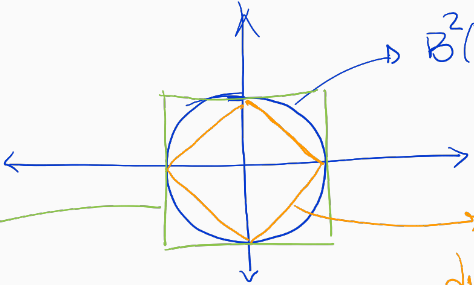
Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}.$$

$E=\mathbb{R}^2$

$x=(0,0)$

$r=1$



$B^2((0,0),1)$

$=\{(x,y): d((0,0)(x,y))<1$

$\sqrt{x^2+y^2}$

$B^1((0,0),1)$

$d_1((0,0),(x,y))=|x|+|y|$

$|x|+|y|=1$

si $x,y\geq 0$ $x+y=1$

$B^{\infty}((0,0),1)$

$d_{\infty}((0,0),(x,y)) = \max\{|x|,|y|\} = 1$

$|x|=1 \wedge |y|\leq 1$

$|y|=1 \wedge |x|\leq 1$

$B^1 \subseteq B^2 \subseteq B^{\infty}$

- E conj $\delta =$ discreta

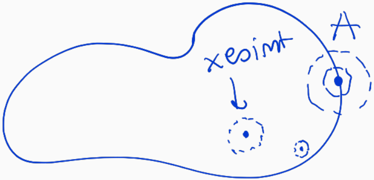
$B(x,1)=\{y\in E: \delta(x,y)<1\}=\{x\}$

r

$B(x,r)=\begin{cases}\{x\} & r\leq 1\\ E & r>1\end{cases}$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.



Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°. $\rightarrow$ A interior

Obs: $A^\circ \subseteq A$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación

$\Leftrightarrow G = G^\circ = \{x \in G : x \text{ es int}\}$

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

Observación

El conjunto E es abierto.

Observación

El conjunto E es abierto.
El conjunto $\emptyset$ es abierto.

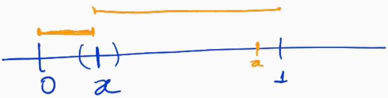
Ej: $E=\mathbb{R}$ $\quad d=|\cdot|$ $\quad A=[0,1)$ $\quad$ ¿A°?

$0 \notin A^\circ$.

$r>0 \quad B(0,r)=\{y\in\mathbb{R} : \overbrace{|y|}^{d(0,y)}<r\}$

$=(-r,r) \ni$ nºs negativos $\therefore B(0,r)\not\subseteq A$.

$x\in A$ y $x\neq 0 \Rightarrow x\in A^\circ$.



$\boxed{\text{Ejercicio}}$