

Práctica 2

1. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que \sim es una relación de equivalencia.

• Reflexiva ✓

• Simétrica ✓

• Transitiva : Dado en la Teoría 3 ó 4.

2. Sean A y B conjuntos. Probar que:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \implies \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

a) \subseteq Si $C = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow C$ es conjunto de subconjuntos que están tanto en A como en B

$\Rightarrow C \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

\supseteq Si $C = \mathcal{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow C \subseteq$

3. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#P(A) = 2^n$.

Nota : $n \in \mathbb{N}$ (finito)

Si A tiene n elementos

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Cada elemento puede estar o no estar en cada uno de los subconjuntos de $P(A)$:

Para cada subconjunto $P_i \in P(A)$

$$a_1 : \begin{cases} \nearrow \text{est\'a} \\ \searrow \text{no est\'a} \end{cases}$$

$$a_2 : \begin{cases} \nearrow \text{est\'a} \\ \searrow \text{no est\'a} \end{cases}$$

\vdots

$$a_n : \begin{cases} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

Por lo que puedo decir que existen 2^n posibles conjuntos distintos (con \emptyset cuando no hay ninguno, y A cuando est\'an todos)

$$\therefore \#P(A) = 2^n$$

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$

(b) $5\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

(d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Z}_{\leq -3} = \{q \in \mathbb{Z} : q \leq -3\} \subseteq \mathbb{Z}$

y como $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

y $\# \mathbb{Z}_{\leq -3}$ es infinito

$\Rightarrow \# \mathbb{Z}_{\leq -3} \sim \mathbb{N}$

b) $5\mathbb{Z} = \{ \underbrace{q \cdot 5}_{\text{Enteros m\u00faltiplos de 5}} : q \in \mathbb{Z} \}$

$\Rightarrow 5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

con $5\mathbb{Z}$ infinito

$\Rightarrow \# 5\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{ (q, n) : q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

Por 1) sé que

2 conjuntos son coordinables $\Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$ biyectiva

Armo $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

usando primos:

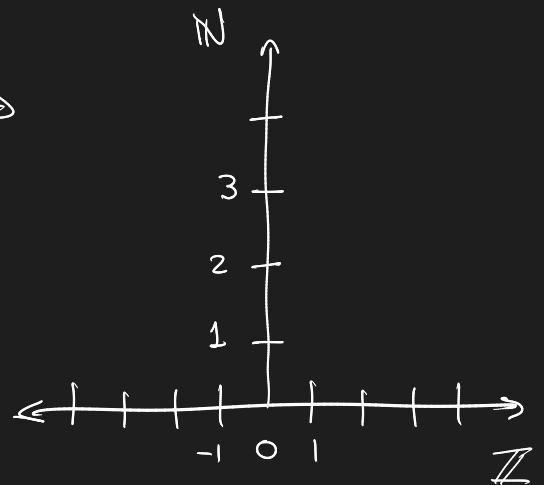
$$f(q, n) = \begin{cases} 2^q \cdot 5^n & \text{si } q \geq 0 \\ 3^{-q} \cdot 5 & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Observo que para cada (q, n) , $\exists n \in \mathbb{N}$

$\therefore f$ es inyectiva

Si encuentro $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ inyectiva

$\Rightarrow \exists$ alguna función biyectiva.



$$g(n) = \left(\right.$$

$$d) (-1, 1) \cap \mathbb{Q} =: A$$

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : -1 < q < 1 \}$$

$$A \subseteq \mathbb{Q} \text{ con } A \text{ infinito}$$

$$\text{y como } \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A \sim \mathbb{N} //$$

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

a) Como $B \setminus A$ es infinito

Por Teorema

$\Rightarrow \exists C \subseteq B \setminus A$ / C sea numerable

y como A es contable

★ Unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow C \cup A$ es numerable

$\therefore C \sim C \cup A$

□

★ Unión de Numerables es Numerable

H: A numerable

B numerable

Dem:

A numerable $\Rightarrow \exists f: A \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

B numerable $\Rightarrow \exists g: B \rightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

So $C = A \cup B$

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Dem: Puedo armar una sucesión de elementos de X , eligiendo y "sacando" de a 1

$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

y como siempre puedo sacar 1 más, puedo armar una sucesión infinita (numerable).

\Rightarrow defino $h: C \rightarrow \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot f(x) & \text{si } x \in A \\ 2 \cdot g(x) + 1 & \text{si } x \in B \wedge x \notin A \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Como $A \cap B \neq \emptyset$

Como h es inyectiva con $h: C \rightarrow \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \#C \leq \# \mathbb{N}$$

y como C es infinito

$$\text{y } \# \mathbb{N} \leq \# D \quad \forall \text{ conjunto } D \text{ infinito}$$

$$\Rightarrow \#C = \# \mathbb{N} \quad \square$$

b) $B \setminus A$ es infinito
y A es contable (finito o infinito)

Por a) sé que

$$\exists C \in \mathcal{B} \setminus A / C \sim C \cup A$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Si digo } C = B \setminus A \\ \Rightarrow B \setminus A \sim B \setminus A \cup A = B \end{array} \right]$

que pasa si no es numerable?

Mal!

?

Como lo muestro
sin usar la demo?

6. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

Lo hice arriba .

Para conjuntos finitos es igual.

7. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.
(b) Escribir a \mathbb{N} como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

a) Como $P \subseteq \mathbb{N}$

y P es infinito?

$\Rightarrow P$ es numerable.

?

b) La pista es el ej a)

Quiero escribir

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i \in B} A_i$$

$B \subseteq \mathbb{N}$ numerable

Todos los elementos $n \in \mathbb{N}$ son de la forma (por TFC) :

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \dots \quad \text{para cada primo } p_i$$

Puedo elegir B como el conjunto de primos (numerable por a)

y meter en cada conjunto

Comienzo

$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^{k_4} \dots$

meto todos los que tengan un $2^{k>0}$
 y $3^{k>0}$

meto todos los que tengan un $5^{k>0}$ y 2^0 y 3^0

meto todos los que tengan un 7^{k_4}

$$\Rightarrow A_{p_i} = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = p_i^{k_0} \cdot \prod_{\substack{q_i \in P \\ q_i > p_i \\ k_i \in \mathbb{N}}} q_i^{k_i}, \quad \forall k_0 \geq 1, k_0 \in \mathbb{N} \right\}$$

\uparrow
 primo i

"n divisible por $p_i^{k_i}$,
 $\forall k_i \geq 0$ con $k_i \in \mathbb{N}$,
 y no divisible por
 primos menores a p_i "

$$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{\substack{p_i \in P \\ P \subseteq \mathbb{N}}} A_{p_i}$$

con P el conjunto de Primos.

□

Más sencillo:

$P_2 \nsubseteq \mathbb{N}$ $P = \{\text{primos en } \mathbb{N}\} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$A_1 = \{m \in \mathbb{N} : m = p_1^{a_1}, a_1 \in \mathbb{N}_0\} = \{1, p_1, p_1^2, p_1^3, \dots\} \subset \mathbb{N}$

$A_2 = \{m \in \mathbb{N} : m = p_1^{a_1} p_2^{a_2}, a_1 \in \mathbb{N}_0, a_2 \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}$

$A_3 = \{m \in \mathbb{N} : m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}, a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0, a_3 \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}$

$$\Rightarrow N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n : \quad \exists) \vee$$

c) $m \in \mathbb{N} \rightarrow$ existe um decomp.

em n^o fatores: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \in A_r$ ✓

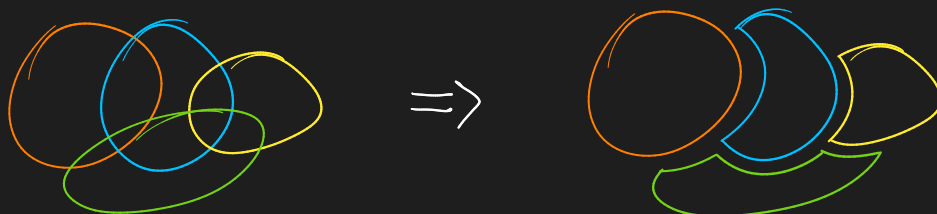
8. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n \leq m} B_n = \bigcup_{n \leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que toda sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

a) Idea



Defino cada B_n como $A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i$

$$\Rightarrow B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

\vdots

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i$$

De esta manera,

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

nota que también vale si B_i y/o B_j son el vacío,

b) It :

- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

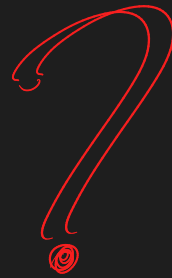
- $\bigcup_{n \leq m} B_n = \bigcup_{n \leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

q.v.q

$$A \stackrel{?}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Como

$$\bigcup_{n \leq m} B_n = \bigcup_{n \leq m} A_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$$



9. (a) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.
- (b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Llamo

$\mathcal{P}_1 =$ Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$\mathcal{P}_1(A) =$ Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$\mathcal{P}_2(A) =$ Todos los subconjuntos de A con 2 elementos

\vdots

$\mathcal{P}_n(A) =$ Todos los subconjuntos de A con n elementos

y sea

$B_n^i \in \mathcal{P}_n(A)$ un subconjunto de A con n elementos

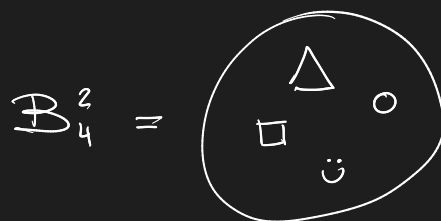
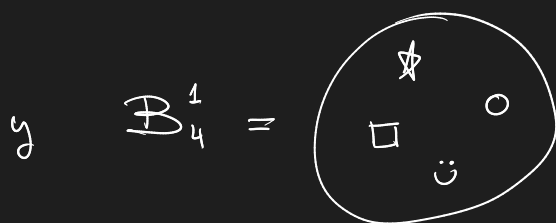
y además

$$\# \mathcal{P}_n(A) = 2^n$$

Entonces sé que como B_n^i tiene finitos (n) elementos, puedo ordenarlos de alguna forma

$$\Rightarrow \exists g_n: B_n^i \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

Ej: so $n=4$



$$\Rightarrow g : P_4 \rightarrow \mathbb{N}^4$$

$$g(B_4^1) = [\star, \circ, \square, \ddot{\circ}]$$

y

$$g(B_4^2) = [\star, \circ, \square, \triangle]$$

\therefore Para cada conjunto B_n^i puedo hallar una función inyectiva que lo ordene de alguna forma

y para cada $B_n^i \neq B_n^j$, el vector resultante es diferente

$\therefore g_n$ es inyectiva

$$\therefore \# B_n^i \leq \# \mathbb{N}^n = \# \mathbb{N}$$

$$\text{y como } P_n = \bigcup_{i=0}^{2^n} \{B_n^i\}$$

$$\Rightarrow \# P_n = \# \mathbb{N}$$

y además, como

$$P_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

y unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

(ej 9)

$$\Rightarrow \# \mathcal{P}_f(A) = \# \mathbb{N} \quad \square$$

? Revisar Roudminto