UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Funciones Continuas ~~1~~ 2

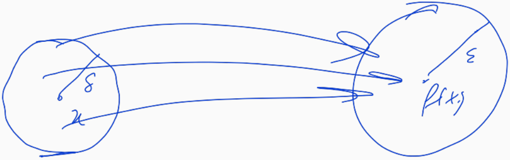
Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.



Repaso

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

Decimos simplemente que es continua si es continua en cada $x \in E$.

f cont en E $\iff$ $f^{-1}(U)$ es ab. $\forall\, U \subset E'$ ab.

Repaso

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

Decimos simplemente que es continua si es continua en cada $x \in E$.

Observación f cont en E

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 /$

$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$

$\boxed{\delta \text{ depende de } x \text{ y de } \varepsilon}$

Puede pasar (o no) que haya un δ que le sirva a todo x.

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

depende de ε (pero sirve $\forall x \in E$)

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

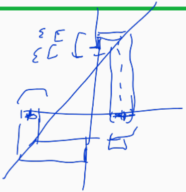
Definición equivalente

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

$\therefore$ f NO es unif continua !

$\exists\, \varepsilon > 0$ para el cual NINGÚN δ LE SIRVE A TODOS LOS x. (o a todo x, y)

Ejemplo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x+3$



$\boxed{\text{Sea } \varepsilon>0,}$

$$d'(f(x),f(y)) = |(2x+3)-(2y+3)| =$$

$$= |2x+\cancel{3}-2y-\cancel{3}| = 2|x-y| = 2\,d(x,y).$$

Tomando $\boxed{\delta=\varepsilon/2}$, si $d(x,y)<\delta=\varepsilon/2$

$$\Rightarrow \underline{d'(f(x),f(y))} = 2\,d(x,y) < 2\,\varepsilon/2 = \underline{\varepsilon}.$$

$\underline{\forall\, x,y\in\mathbb{R}}$

$f(x)=x^2$:

$$\begin{cases} x_n = n+1/n \\ y_n = n \end{cases}$$

$\boxed{d(x_n,y_n)=1/n\longrightarrow 0}$

$(n+1/n)^2 = n^2+2+\frac{1}{n^2}$

$$\boxed{d'(f(x_n),f(y_n))} = |(n+1/n)^2-n^2| = |2+1/n^2| \boxed{\geq 2}$$

Proposición

Sea $f : E \to E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{pero} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0.$$

$\Rightarrow$) f NO u.c. : $\exists\, \varepsilon_0 /$ ningún δ SIRVE.

Si $\delta = 1/n \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in E /$ $d(x_n, y_n) < 1/n$ $\Downarrow$ $d(x_n, y_n) \to 0$

pero $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

$\Leftarrow$) Sup. que f ES u.c.

$\Rightarrow$ dado el ε_0, $\exists\, \delta > 0 /$

$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Como $d(x_n, y_n) \to 0$

$\exists\, n_0 / \; d(x_n, y_n) < \delta \;\; \forall n \geq n_0$. $\Rightarrow$ $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon_0 \;\; \forall n \geq n_0$

$\geq \varepsilon_0$ ABS

Ejemplo

· $\underbrace{f:[a,b]}_{\text{INT CERR Y ACOTADO}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{E'}$ CONT $\Longrightarrow$ f U.C.

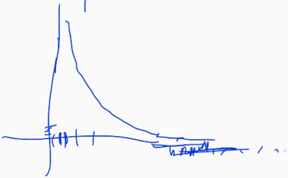
LO VEREMOS → SE USAN: - LA PROP ANTERIOR

- TODA SUC. ACOT TIENE SUBSUC. CONV.

SALE X ABS.

· $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$.



1er INTENTO: $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n+1}$

$$d(x_n, y_n) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$$

$$d'(f(x_n), f(y_n)) = \left| \frac{1}{1/n} - \frac{1}{1/(n+1)} \right| = |n-(n+1)| = 1 = \varepsilon_0$$

$\therefore$ NO ES U.C.

Teorema

Sea $f : E \to E'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$\boxed{d'(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y),}$$

$\forall x, y \in E$

entonces f es uniformemente continua.

f es LIPSCHITZ CON CONSTANTE C.

DEM: $\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0}$, [BUSCAMOS $\delta > 0$ / $d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$)

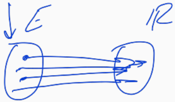
$$d'(f(x), f(y)) \leq C \cdot \underbrace{d(x,y)}_{< \delta} < C \cdot \varepsilon/C = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{TOMANDO } \delta = \varepsilon/C}$ $\to$ SOLO DEPENDE DE ε.

Ejemplo

Consideremos en $\overbrace{C([0,1])}^{E}$ la distancia d_∞.

Sea $F : \underbrace{C([0,1])}_{E} \to \mathbb{R}$ la función dada por



$$F(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

$$d'(F(x), F(y)) = \left| \int_0^1 x(t)dt - \int_0^1 y(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 x(t) - y(t)\,dt \right| \le \int_0^1 \underbrace{|x(t) - y(t)|}_{\le \sup_{s\in[0,1]} |x(s)-y(s)| \,=\, d_\infty(x,y)} dt$$

$$\le \int_0^1 d_\infty(x,y)\,dt = 1 \cdot d_\infty(x,y)$$

F ES LIPSCHITZ CON CTE 1.

$\Rightarrow$ ES U.C.

Ejemplo

Consideremos en $C([0,1])$ la distancia d_∞.

Sea $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$F(x) = (x(0), x(1/2), x(1)).$$

$[x : [0,1] \to \mathbb{R}]$

$C[0,1] \to \mathbb{R}^3$

EJERCICIO: VER QUE ES LIPSCHITZ

$(\mathbb{R}^3$ con d_1, d_2 o $d_\infty)$

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Observación

Si E y E' son espacios métricos homeomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de E y E'

$f : E \to E'$. HOMEOMORFISMO.

$V \subset E'$ ab $\Rightarrow$ $f^{-1}(V)$ es ab.

↳ F cont.

$U \subset E$, $f(U) = \underbrace{(f^{-1})}_{\text{cont}}{}^{-1}(U)$ es ab.

↳ ab

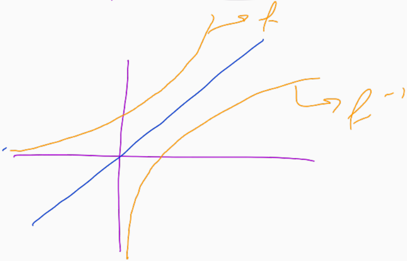
PENSAR ab. de E $\longrightarrow$ ab. de E'

$U \longmapsto f(U)$ BIYECTIVO

Observación

Dada f biyectiva, ¿es posible que f sea continua pero que su inversa no lo sea?

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$



$\boxed{\text{SÍ}}$

$f: (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$f(x) = x$.

ES CONT PERO f^{-1} NO

(EJERCICIO).

Definición

Si $f : E \to E'$ satisface $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isometría.

Definición

Si $f : E \to E'$ satisface $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isometría.

Observación LIPSCHITZ

Toda isometría es uniformemente continua.

Definición

Si $f : E \to E'$ satisface $\boxed{d(x,y) = d'(f(x), f(y))}$ $\forall x, y \in E$, diremos que f es una isometría.

Observación

Toda isometría es uniformemente continua.

Si $f : E \to E'$ es una isometría biyectiva, entonces ~~tanto~~ f^{-1} también es una isometría (y por lo tanto es uniformemente continua).

$v, w \in E'$ $\quad \boxed{d(f^{-1}(v), f^{-1}(w))} =$

$= d'(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))) =$

$\downarrow$

f isom

$= \boxed{d'(v, w)}$

$\therefore f^{-1}$ isom.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\overline{D} = E$.

EJEMPLOS: $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$.

(a,b) denso en $E = [a,b]$

$(a,b) \cap \mathbb{Q}$ denso en $[a,b]$

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\overline{D} = E$.

Observación. EJ GUÍA: $f, g : E \to F$ cont, $D \subset E$ DENSO. Si $f|_D = g|_D \Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$

. VALE E métrico, D denso en E.

$f_0 : D \to \mathbb{R}$ unif cont $\Rightarrow \exists f : E \to \mathbb{R}$ unif cont / $f|_D = f_0$ [f_0 SE EXTIENDE A UNA FUNC. U.C. EN E]

EJERCICIO: SI $f_0 : D \to \mathbb{R}$ ES CONT PERO NO U.C NO tiene por qué extenderse a UNA f CONTINUA