11. Hallar frontera y puntos de acumulación de cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ del Ejercicio 5.

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0,1]$ (b) $(0,1)$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ (e) $\mathbb{Z}$ (f) $[0,1)\cup\{2\}$ (g) $\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$ (h) $\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

$E = \mathbb{R}$

	Interior	Clausura
a)	$(0,1)$	$[0,1]$
b)	$(0,1)$	$[0,1]$
c)	$\emptyset$ (pues numerable)	$\mathbb{R}$
d)	$\emptyset$ (pues numerable)	$[0,1] \subset \mathbb{R}$
e)	$\emptyset$ (pues numerable)	$\mathbb{Z}$
f)	$(0,1)$	$[0,1] \cup \{2\}$
g)	$\emptyset$ (pues numerable)	$\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\} \cup \{0\}$
h)	$\emptyset$ (pues numerable)	$\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\} \cup \{0\}$

12. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$.

(a) Probar que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$, y concluir que ∂A es cerrado. ?

(b) Probar que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

a)

$\subseteq$) Sea $a \in \partial A$

$$\Rightarrow \underbrace{B(a,r) \cap A \neq \emptyset}_{\Rightarrow a \in \overline{A}} \quad y \quad \underbrace{B(a,r) \cap A^c \neq \emptyset}_{(\star\star\star)} \qquad \forall r > 0$$

qvq $a \overset{?}{\notin} A^\circ$

Supongo que $a \in A^\circ$

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \ / \ B(a,\varepsilon) \subseteq A$$

$$\Rightarrow \underbrace{B(a,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset}_{\text{Abs!}}$$

pues $(\star\star\star)$

A

$\therefore\ a \notin A^\circ$

$\therefore\ a \in \overline{A}$ y $a \notin A^\circ$

$\Rightarrow a \in \overline{A} \setminus A^\circ$

Probé $\partial A \subseteq \overline{A} \setminus A^\circ$

$\supseteq$) Sea $a \in \overline{A} \setminus A^\circ$

$\Rightarrow \quad a \in \bar{A} \quad$ y $\quad a \notin A^{\circ}$

$\Rightarrow \quad B(a,r) \cap A \neq \emptyset \quad$ y $\quad \underbrace{B(a,r) \not\subseteq A}_{\text{hay elementos de } B(a,r) \text{ que están en } A^c} \qquad \forall r>0$

$\Rightarrow B(a,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$\therefore \quad a \in \partial A$

Finalmente

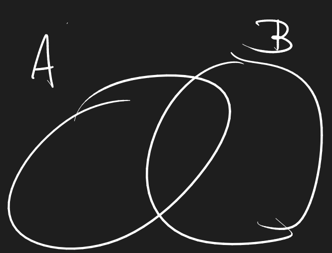
$$\partial A = \bar{A} \setminus A^{\circ}$$

$\blacksquare$

∂A es cerrado $\iff \partial A = \overline{\partial A}$

Como $\partial A = \bar{A} \setminus A^{\circ}$

$\overline{\partial A} = \overline{\bar{A} \setminus A^{\circ}}$?



$$\underbrace{\partial A = \underbrace{\bar{A}}_{\text{cerrado}} \cap \underbrace{(A^{\circ})^c}_{\text{cerrado}}}$$

(b) Probar que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$. ?

Por 8 (a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.

$$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ)$$

Como $\overline{A} \subseteq E$

$$\Rightarrow \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$$

Que por 12.a

$$\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$$

$\boxtimes$

$$\partial B = \partial(E \setminus B)$$

$$\overline{B} \cap \overline{E \setminus B} = \overline{E \setminus B} \cap \overline{E \setminus (E \setminus B)}$$

$$\underbrace{E \setminus B^\circ}_{B}$$

$=$

13. Sea (E, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq E$ no vacío y $x \in E$, se define la *distancia* de x a A como

$$d_A(x) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}.$$

Probar que para todos $x, y \in E$ y $r > 0$:

(a) $|d_A(x) - d_A(y)| \le d(x,y)$.

(b) $x \in A \implies d_A(x) = 0$.

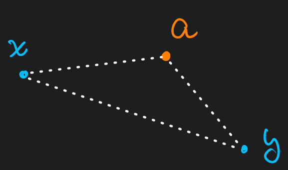
(c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

(d) $B_A(r) = \{x \in E : d_A(x) < r\}$ es abierto.

(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d_A(x) \le r\}$ es cerrado.

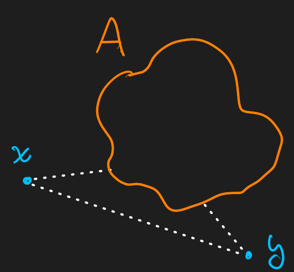
a) Qué pasa si $A = \{a\}$?

único elemento



Desigualdad triangular! $\Rightarrow d(x,y) \le d(x,a) + d(a,y)$ ✓

Si $\#A \geq 2 \Rightarrow \text{diam}(A) > 0$



Pero el caso más desfavorable es con $\text{diam}(A) = 0$ pues contra mayor $\text{diam}(A)$, menor puede ser $d_A(x) - d_A(y)$

ínfimo entre todos los $a \in A$

$$d_A(x) \le d(x,a) \underset{DT}{\le} d(x,y) + d(y,a)$$ para cada $a \in A$

$$d_A(x) \le d(x,y) + d(y,a)$$

$$d_A(x) - d(x,y) \le d(y,a)$$ ínfimo entre todos los $a \in A$

$$d_A(x) - d(x,y) \le d_A(y) \le d(y,a)$$

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y) \quad \text{I}$$

Si parto de

$$d_A(y) \leq d(y,a) \overset{\text{DT}}{\leq} d(x,y) + d(x,a)$$

$$d_A(y) \leq d(x,y) + d(x,a)$$

$$d_A(y) - d(x,y) \leq d_A(x) \leq d(x,a)$$

$$d_A(y) - d_A(x) \leq d(x,y) \quad \text{II}$$

$\therefore$ como I y II

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$$

$\blacksquare$

b) Si $x \in A \Rightarrow d_A(x) = \inf\{\underbrace{d(x,a)}_{=0} : a \in A\}$

$=0$ pues $x \in A$

y $d(x,a) \geq 0$

$\Rightarrow$ si $a = x$

$d(x,x) = 0$

$$\therefore d_A(x) = 0$$

c) (c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

$\Leftarrow$) Si $x \in \overline{A}$

$\Rightarrow x \in A$ ó $x \in \partial A$

- Si $x \in A$:

$\overset{b)}{\Rightarrow} d_A(x) = 0$

- Si $x \in \partial A$ y $x \notin A$

$\Rightarrow \forall r > 0, \ B(x,r) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow \exists a \in A \ / \ a \in B(x,r)$ con $x \neq a$

$\Rightarrow d(a,x) < r \quad \forall r > 0$

Por ej 1 de guía 1

1. Probar que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

$\Rightarrow d(a,x) = 0$

$\therefore$ si $x \in \overline{A} \Rightarrow d_A(x) = 0$

$\Rightarrow$) Si $d_A(x) = 0$

$\Rightarrow 0 = \inf \{ d(a,x) : a \in A \}$

Por absurdo :

Si $x \notin \overline{A}$

$\Rightarrow \quad x \in \overline{A}^c$

$\Rightarrow \quad x \in E \setminus \overline{A}$

$\overset{8b}{\Rightarrow} \quad x \in (E \setminus A)^\circ$

Como $(E \setminus A)^\circ$ es abierto

$\Rightarrow \exists\, r>0 \,, \; B(x,r) \subseteq (E \setminus A)^\circ$

$\Rightarrow d_A(x) \geq r$ pues al menos x dista r de A

$\Rightarrow d_A(x) \neq 0$

Abs! pues es hipótesis que $d_A(x) = 0$

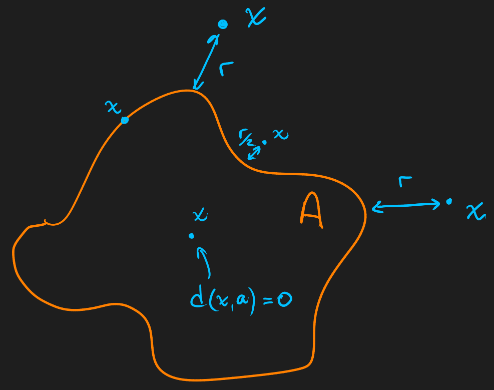
$\therefore \quad x \in \overline{A}$

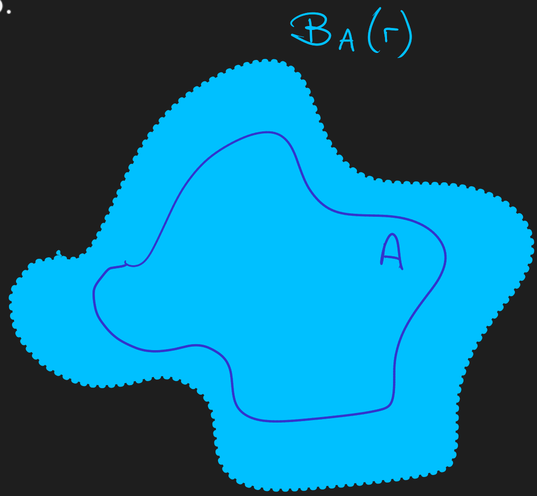
Final mente

$$d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$$

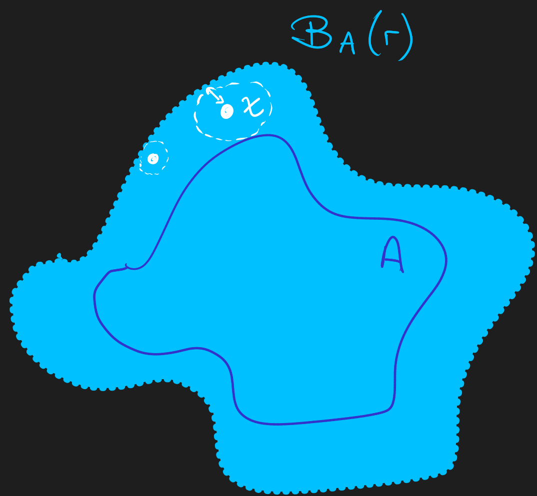
$\blacksquare$

(d) $B_A(r) = \{x \in E : d_A(x) < r\}$ es abierto.





$$d_A(x) = \inf\{ d(a,x) : a \in A \}$$



Si $x \in B_A(r)$

$\Rightarrow d_A(x) < r$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \subseteq B_A(r)$

pues si $\varepsilon = \underbrace{\dfrac{r - d_A(x)}{2}}_{>0}$

todos los $b \in B(x,\varepsilon)$ distan

a lo sumo $\dfrac{r - d_A(x)}{2}$ de la frontera de $B_A(r)$

$\Rightarrow$ toda la bola queda contenida en $B_A(r)$

Como esto vale $\forall x \in B_A(r)$

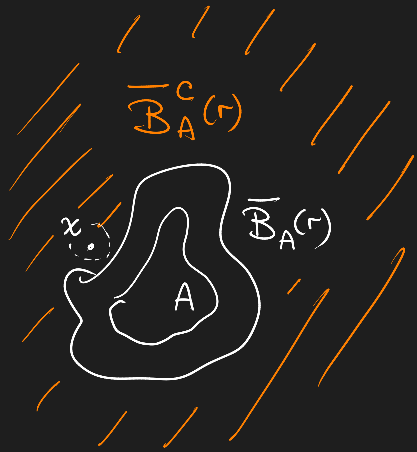
$\Rightarrow B_A(r)$ es abierto. $\blacksquare$

(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado.

Tomo complemento

$$\overline{B}_A^c(r) = \{ x \in E : d_A(x) > r \}$$

Uso argumento parecido al de antes



Sea $x \in \overline{B}_A^c(r)$

$\Rightarrow$ Si $\varepsilon = \dfrac{d_{\overline{B}_A(r)}}{2}$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B}_A^c(r)$

$\therefore$ $\overline{B}_A^c(r)$ es abierto.

$\therefore$ $\overline{B}_A(r)$ es cerrado.

$\boxtimes$

14. Sea (E,d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$. $= \mathcal{P}(E) \setminus \{0\}$
Definimos la función $\widehat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A\ ,\ b \in B\}.$$

Partes de $\mathbb{R}$ . . .

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $\widehat{d}(A,B) = \widehat{d}\,(\overline{A},B)$.

(b) $\widehat{d}(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$. ← Falso

Pinta de Verdadero → (c) $\widehat{d}(A,B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(d) $\widehat{d}(A,B) \leq \widehat{d}(A,C) + \widehat{d}(C,B)$.

Concluir que $\widehat{d}$ no es una distancia.

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

n pares

$\frac{1}{m} \longrightarrow 0$

m impares

inf es cero

$A \cap B = \phi$

$\therefore$ Falso

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\{A \subseteq \mathbb{R}\}$

a) Si $E = \mathbb{R}$

$A = \mathbb{Q}$

$B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

?

• Recordar deducción de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = C$ y ver si se puede hacer algo de ese estilo para $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

15. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E.

(a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en E, probar que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

16. Probar que $(\mathbb{R}^n, d_1)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ y $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son completos.

17. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $A \subseteq E$ un subconjunto de E. Probar que si A es cerrado entonces el espacio métrico (A, d) es completo.

?

Si A es cerrado

$\Rightarrow$ Toda suc. de elementos de A que converge, converge en A

Como toda suc. convergente es de Cauchy

$\Rightarrow$ Todas las sucesiones de Cauchy en A son convergentes

$\therefore$ (A, d) es completo. $\blacksquare$

18. Teorema de la intersección (Cantor). Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Ideas: ↑ cerrado pues $\bigcap_{\infty}$ cerrado es cerrado

- Si tomo a_n de cada A_n

  tengo $(a_n) \longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

  Pues como la $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrada, toda sucesión converge en $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$

- Por ej 10. a)

10. Sean (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E.

(a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
(b) Probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

$\operatorname{diam} A_{n+1} \leq \operatorname{diam} A_n \quad \forall n \geq 1$

- Por H

  $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- Como E es completo

  $\Rightarrow$ toda suc. de Cauchy converge en E.

- Puedo asegurar que

  a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$,

todos los elementos de (a_n) están

a distancia $\leq$ diam A_{n_0} $\forall n \geq n_0$:

Formalmente

para cada $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$d(a_n, a_m) \leq \text{diam } A_{n_0} \qquad \forall n, m \geq n_0$$

y como diam $A_{n+1} \leq$ diam A_n $\forall n \geq 1$

y además diam $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Puedo asegurar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \,/\, d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

pues existe algún A_{n_0} / diam $A_{n_0} < \varepsilon$

$\therefore$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy

que converge en E (pues E es completo).

$\therefore$ $\bigcap A_n \neq \emptyset$ (pues (a_n) converge en $\bigcap A_n$)

y como $\lim\limits_{n\to\infty}$ diam $A_n = 0$

$$\Rightarrow \#\left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n\right) \leq 1$$? puedo hacer esto ?

$$\therefore \#\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$$ (pues es <u>no</u> vacía $\Rightarrow$ debe ser 1)

$\boxtimes$

Revisar !