# Práctica 1

**1.** Probar que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.

- Sé que (hipótesis H) :

$$x < y + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

qvq

$$x \overset{?}{\leq} y$$

- Pruebo por absurdo

Supongo que $x > y$ (misma H)

$\Rightarrow \quad x - y > 0$

Llamo $a := x - y$

$\Rightarrow$ como $x < y + \varepsilon$

$$0 < x - y < \varepsilon$$
$$0 < a < \varepsilon \qquad a > 0$$

Pero esto no vale $\forall \varepsilon > 0$,

solo $\forall \varepsilon > a$ que es un nro. positivo no nulo

Abs! $\quad \therefore \; x \leq y.$ $\boxed{H}$

Otra forma es reemplazar en

Si $\varepsilon := x - y > 0$

$\overset{H_0}{\Rightarrow} \quad x < y + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad x < y + (x-y)$

$x < x$

Abs!

Segunda parte:

Deducir

$|x-y| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$

Supongo $x \neq y$

$\Rightarrow \quad |x-y| > 0$

$\Rightarrow$ si elijo $\varepsilon = |x-y| > 0$

obtengo

$|x-y| < |x-y| \qquad$ Abs!

$\therefore \quad x = y.$

$\blacksquare$

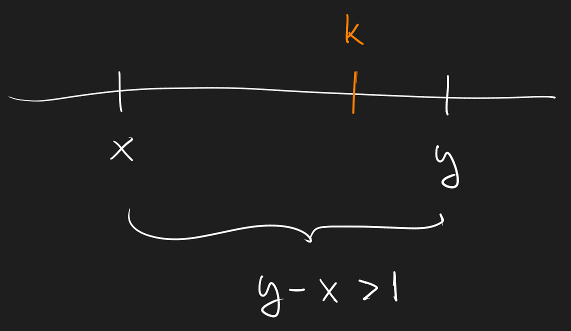
**2.** (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un irracional entre $s$ y $q$.

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre $x$ e $y$.

a)




$$x < y - 1$$

$$A = \{ k \in \mathbb{Z} : x < k < y \}$$

• Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{Z}$ pues $1 \in \mathbb{Z}$

y como $y > x + 1$

encontré $k \in \mathbb{Z} \,/\, x < k < y$

pues $x + 1 \in \mathbb{Z}$ y $x < x + 1 < y$

• Si $y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y - 1 \in \mathbb{Z}$

y como $x < y - 1$

$$\Rightarrow x < \underbrace{y - 1}_{\in \mathbb{Z}} < y$$

en este caso también vale,

• Si $x, y \notin \mathbb{Z}$

pues $\lfloor y \rfloor = y - \underbrace{\text{Parte Decimal}(y)}_{}^{<1}$

e $y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y \neq \lfloor y \rfloor$

$\Rightarrow \lfloor y \rfloor < y$

$$0 < y - \lfloor y \rfloor < 1$$

$$0 > \lfloor y \rfloor - y > -1$$

$$0 > \lfloor y \rfloor > y - 1$$

$\Rightarrow$ como $x < y - 1$

$$\lfloor y \rfloor > y - 1$$

$$\lfloor y \rfloor < y$$

$$\Rightarrow x < y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

$$\Rightarrow x < \lfloor y \rfloor < y$$

con $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$

Llamo $k := \lfloor y \rfloor$ que es el entero que buscaba.

$\Rightarrow x < k < y$ con $k = \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$

$\boxtimes$

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

- Quiero llegar a algo de la forma de (a)

Si $x < y$ :

$$y - x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x} > 0 \quad \text{con } (y-x) \in \mathbb{R}$$

Por Arquímedes, sé que

dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N} \,/\, n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Si $\varepsilon = y - x$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, n > \frac{1}{y-x} > 0$$

$$n.(y-x) > 1$$

$$n.y - n.x > 1$$

Si llamo

$$\tilde{y} := n.y \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{x} := n.x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \tilde{y} - \tilde{x} > 1$$

Que es la Hipótesis de (a)!

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, \tilde{x} < k < \tilde{y}$$

$$n.x < k < n y$$

$$x < \frac{k}{n} < y$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{k}{n} =: q \in \mathbb{Q}$$

$$x < q < y$$

que es lo que quería probar

$\boxtimes$

En resúmen, probé que

Si $x < y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, n.y - n.x > 1$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, n.x < k < n.y$$

y como cualquier $q \in \mathbb{Q}$ se escribe como $q = \frac{k}{n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

Si $x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \,/\, x < q < y$

$\boxtimes$

(c) Sean $s, r \in \mathbb{Q}$ tales que $s < r$. Probar que existe un irracional entre $s$ y $q$.

Querría usar (b)

- Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \,/\, x < q < y$

Como $s, r \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2} . s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sqrt{2} . r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\} \overset{s<r}{\Longrightarrow} \sqrt{2} . s < \sqrt{2} . r$$

y además, $\sqrt{2}.s$ y $\sqrt{2}.r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Estoy en la Hipótesis del ej (b)

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \,/\, \sqrt{2}.s < q < \sqrt{2}.r$$

divido por $\sqrt{2}$

$$s < \frac{q}{\sqrt{2}} < r$$

con $s, r \in \mathbb{Q}$

Falta ver que

Si $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Supongo que $\frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ y llego a un absurdo

Como $k = \frac{a}{n}$ si $k \in \mathbb{Q}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\frac{q}{\sqrt{2}} = \frac{a}{n}$ pues supuse $\frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

pero $q$ en $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{a}}{\tilde{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{n} \cdot \frac{\tilde{n}}{\tilde{a}}$$

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{n}{\tilde{n}} \cdot \frac{\tilde{a}}{a}}_{\in \mathbb{Q}}$$

Abs!

$$\therefore \frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Finalmente, puedo decir que, dados $s, r \in \mathbb{Q}$ con $s < r$

$$\exists q \in \mathbb{Q} \;/\; s < \frac{q}{\sqrt{2}} < r$$

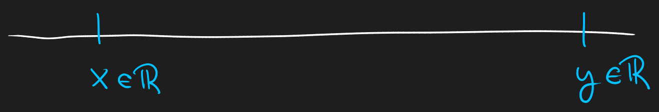
o equivalentemente

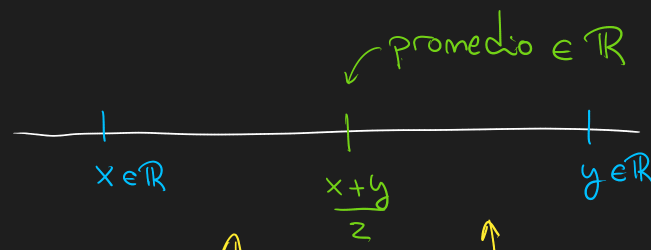
$$\exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \;/\; s < i < r$$

$\blacksquare$

(d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe un irracional entre $x$ e $y$.

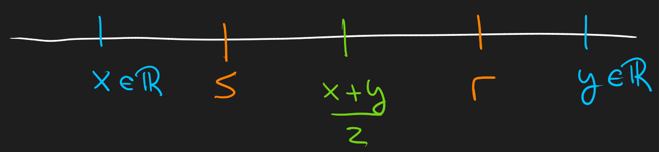
Puedo usar (b) y (c)




Por (b) Por (b)

$\exists s \in \mathbb{Q} \ / \ x < s < \frac{x+y}{2}$ $\quad$ $\exists r \in \mathbb{Q} \ / \ \frac{x+y}{2} < r < y$




Con $s, r \in \mathbb{Q}$

Como $s < r$ con $s, r \in \mathbb{Q}$

pues $x < s < \frac{x+y}{2} < r < y$

Puedo usar (c), y concluir que

$\exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ / \ s < i < r$

y como $x < s$

y $r < y$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ / \ x < i < y$ $\blacksquare$

**3.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Probar:

$\boxed{A}$ $\quad s = \sup A \iff \begin{cases} a \leq s \text{ para todo } a \in A, & \boxed{A}\boxed{i} \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon < a \leq s. & \boxed{ii} \end{cases}$

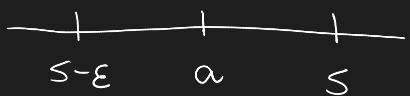
$\boxed{B}$ $\quad i = \inf A \iff \begin{cases} i \leq a \text{ para todo } a \in A, & \boxed{i} \\ \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } a \in A \text{ tal que } i \leq a < i + \varepsilon. & \boxed{ii} \end{cases}$

$\boxed{A}\boxed{i}$ y $\boxed{B}\boxed{i}$ se repiten en las definiciones y equivalencias respectivas

$\boxed{A}\boxed{ii}$

Quiero probar que $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists a \in A /$

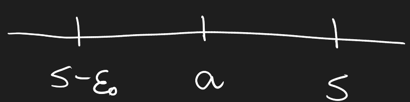



A partir de

Hb: $s$ es supremo de $A$

Supongo que para algún $\varepsilon_0 > 0$,

$\nexists\, a \in A /$




Pero entonces, encontré un $\tilde{s} := s - \varepsilon_0$ que es cota superior de $A$, pues entre $\tilde{s}$ y $s$ no hay elementos de A, y como todos los elementos eran menores a

s por ser cota superior (y supremo),

entonces todos serán $\leq \tilde{s}$.

Entonces $\tilde{s}$ es cota superior, y mejor que s,

pues $\tilde{s} < s$.

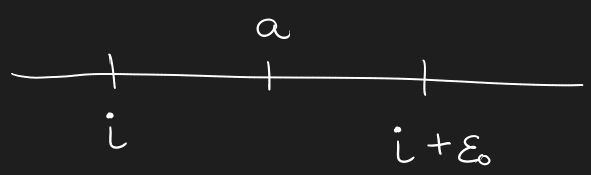
Abs! pues s era supremo.

$\therefore$ vale $\boxed{A}$ $\boxed{ii}$

∎

$\boxed{B}$ $\boxed{ii}$ es equivalente:

Si $\nexists a \in A \,/$




entonces i no es la mejor cota sup. Abs.

$\therefore$ siempre vale que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\; i < a < i + \varepsilon$$

∎

**4.** Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, y probar que lo son:

(a) $(a, b]$

(b) $B = \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $B \cup \{0\}$

(d) $\{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$

a) $\text{Inf}\,(a,b] = a$

$\text{Sup}\,(a,b] = \max\,(a,b] = b$

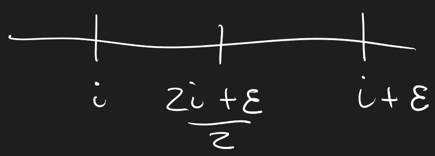
Dem

$x \in (a,b] \iff a < x \leqslant b$

$\Rightarrow$ $a$ es cota inf $\boxed{I:]}$

$b$ es cota sup $\boxed{S:]}$

$\boxed{I:i]}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x \in (a,b] \,/\, i < x < i + \varepsilon$




Si $x := \frac{2i + \varepsilon}{2}$

$\Rightarrow i < \frac{2i+\varepsilon}{2} < i + \varepsilon$

Como dije que $i = a$

$\Rightarrow a < \frac{2a + \varepsilon}{2} < a + \varepsilon$

$\Rightarrow a < a + \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon$

Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y $a + \frac{\varepsilon}{2} < b$

$\Rightarrow a + \frac{\varepsilon}{2} \in (a, b]$ si $a + \frac{\varepsilon}{2} \leq b$

sino elijo $x := b$

$\Rightarrow$ vale $\operatorname{Inf}(a,b] = a$

$\boxtimes$

- Para $\operatorname{Sup}(a,b] = \max(a,b] = b$

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in (a,b] \,/\, b - \varepsilon < x \leq b$

- Si $b - \varepsilon \leq a \Rightarrow x := b$
- Si $b - \varepsilon > a$

  $b - \varepsilon \in (a, b]$

  y $b - \varepsilon < b$ pues $\varepsilon > 0$

  $\Rightarrow x := \frac{b - \varepsilon}{2} \in (a, b]$

$\boxtimes$

**5.** Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. Probar:

(a) Si $B$ está acotado superiormente, $A$ también y $\sup A \leq \sup B$.
(b) Si $B$ está acotado inferiormente, $A$ también e $\inf B \leq \inf A$.
(c) Si $A$ no está acotado, $B$ tampoco.

a) $\mathcal{H}$ : $B$ tiene cota superior

qvq $A$ también

y $\sup A \leqslant \sup B$

Todos los $x \in B$ son $\leqslant S$ cota sup de $B$

y como $A \subseteq B$

a contiene a lo sumo todos los elementos de $B$

$\Rightarrow \forall x \in A \, / \, x \leqslant S$ cota sup de $B$

$\therefore$ $A$ está acotado.

Más formalmente

$$B = \{ x : x \in B \}$$

$$A = \underbrace{\{ x : x \in B \}}_{\substack{\text{Acotado} \\ \text{por } \mathcal{H}}} \setminus \underbrace{\{ x : x \in B \setminus A \}}_{\text{Acotado pues } B \text{ acotado}}$$

(c) $\underbrace{\text{Si } A \text{ no está acotado,}}_{Hc}$ $B$ tampoco.

Supongo $B$ acotado

$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} \,/\, x \leq s \quad \forall x \in B$

Como $A \subseteq B$ y $A$ no acotado

$\Rightarrow \exists\, a \in A \,/\, a > s$

pero si $A \subseteq B$

$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ a \in A}}{a \in B}$

pero $s < a$ y $s$ es cota sup.

Abs!

$B$ no está acotado.

$\boxtimes$

**6.** Dados un conjunto de números reales $A$ y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

(a) Si $A$ está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y $A$ está acotado superiormente, entonces $cA$ está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

a) $\exists\, s \in \mathbb{R} \,/\, a \leq s \quad \forall a \in A$

$\times(-1)$

$-a \geq -s$

y como $\forall a \in A$, $\exists (-a) \in -A$

y $\forall -a \in -A$, $\exists\, a \in A$ pues

$$-A = \{-a : a \in A\}$$

y

$$-(-A) = \{-(-a) : a \in A\}$$
$$= \{a : a \in A\} = A$$

$\Rightarrow$ si $s \geq a \quad \forall a \in A$

$-s \leq -a \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow -s \leq x \quad \forall x \in -A$

$\Rightarrow -s$ es cota inferior de $-A$

o sea que $-A$ tiene cota inferior,

y además, si $s = \sup A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid s - \varepsilon < a \leq s$$

$$-s + \varepsilon > -a \geq -s$$

$$-s \leq -a < -s + \varepsilon$$

Si $i := -s$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in -A \mid i \leq x < i + \varepsilon$$

$$\therefore -\sup A = \inf(-A)$$

$\blacksquare$

(b) Si $c > 0$ y $A$ está acotado superiormente, entonces $cA$ está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

Similar a antes

- La cota $s$ de $A$ se multiplica por $c$ y sigue siendo cota pues

$$a \leq s \quad \forall a \in A$$

$$\overset{c>0}{\Rightarrow} c.a \leq c.s \quad \forall a \in A$$

Llamo $\tilde{s} := c.s$

$$\Rightarrow c.s \leq \tilde{s}$$

- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ / \ s - \varepsilon < a \leq s$

$$\underset{c>0}{\Longrightarrow}$$

$$c.(s-\varepsilon) < c.a \leq c.s$$

$$c.s - c.\varepsilon < c.a \leq c.s$$

$$\tilde{s} - c.\varepsilon < c.a \leq \tilde{s}$$

Hasta acá mostré que si el supremo de A es s, entonces vale
que es casi lo mismo que la condición de supremo para los elementos de c.A, solo que el cuantificador "para todo" habla de un epsilon, pero en la desigualdad hay un c.eps

Lo que puedo decir es que como c en R y eps en R, ambos mayores a cero, y como eps se mueve en todos los reales, multiplicarlo por un real positivo no cambia el hecho de que abarque todos los reales.

En otras palabras, el conjunto de todos los epsilons > 0 es igual al conjunto de todos los epsilons * c, para cualquier c > 0

$$\{\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\} = \{c.\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$$

$\therefore$ puedo asegurar que

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \ \exists x \in c.A \ / \ \tilde{s} - \tilde{\varepsilon} < x \leq \tilde{s}$$

Donde

$$\sup c.A = \tilde{s} = c.s = c.\sup A$$

$\blacksquare$