12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup(A)$.

Hipótesis:

- A es acotado superiormente y <u>no</u> ϕ
- A <u>no</u> tiene máximo

<u>Dem</u>:

- Sé que

  $\boxed{\text{Todo subconjunto de R (no vacío) acotado superiormente tiene supremo}}$

- Basta encontrar (a_n) estrictamente creciente

  con $a_n \to \sup A$

  usando elementos de A

- Como A <u>no</u> tiene máx $\Rightarrow$ A <u>no</u> es finito

  $\overset{A\neq\phi}{\Rightarrow}$ A es infinito

- Como A tiene supremo, lo llamo s y vale que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ / \ s - \varepsilon < a < s$$

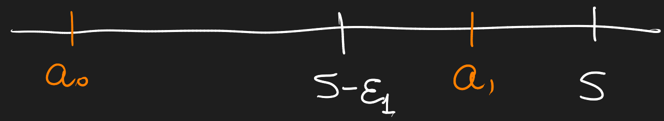
s <u>no</u> es máximo

Idea:

- Como A no tiene máximo, para cualquier $\varepsilon > 0$ siempre tengo infinitos elementos en $(s-\varepsilon, s)$

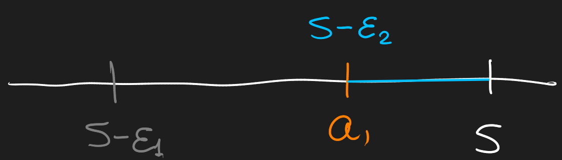
- Bastaría con elegir algunos (infinitos) de manera ordenada.

1) Elijo algún $a \in (s-\varepsilon_1, s)$ y lo llamo a_1



(con $s-\varepsilon_1 > a_0 \in A$ pues no quiero salirme de A, en caso de que tenga cota inferior)

2) Elijo un nuevo $\varepsilon_2 = s - a_1$ ☆



☆ más adelante, ésto no será suficiente.

3) Para este ε_2, también vale que

$$\exists\, a \in A \ / \ s-\varepsilon_2 < a < s$$

$\Rightarrow$ elijo algún $a \in (s-\varepsilon_2, s)$ y lo llamo a_2.

Sé que $a_1 < a_2$ pues $a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$

y $a_2 \in (a_1, s)$

4) Generalizando, puedo repetir este proceso infinitas veces tomando:

$$a_{n+1} \in (a_n, s) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo la garantía de que

- siempre $\exists\, a_{n+1} \in A \;/\; a_{n+1} \in (a_n, s)$
  pues (a_n, s) es siempre infinito.

- siempre vale que $a_n < a_{n+1}$
  pues elijo $a_{n+1} \in (a_n, s)$ sin incluir a_n.

$\therefore$ (a_n) es una sucesión en A estrictamente creciente.

Falta ver que $a_n \to s$

qvq

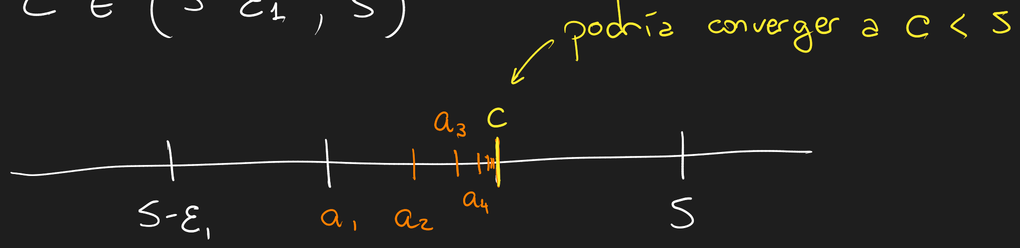
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \;/\; |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

- La intuición nos dice que esto vale por la forma en que armamos la sucesión:

  toda la subsucesión $(a_k)_{k > n_0}$
  está a la derecha de cada $s - \varepsilon_{n_0}$

con $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

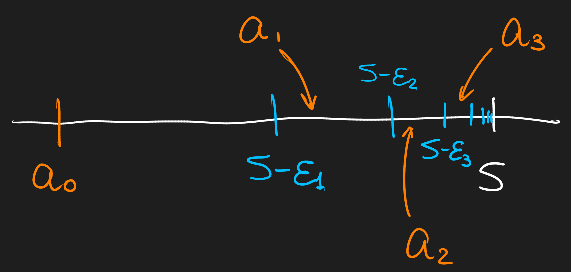
- Pero puede no ser cierto si convergemos a algún $c \in (s-\varepsilon_1, s)$



Para eso, me aseguro de tomar los ε de manera que converjan a s:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{s - a_n}{2}$$

De esta manera, siempre divido en 2 el segmento restante



Ahora la sucesión $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pues

- Si $n=0$: $\varepsilon_1 = \frac{s-a_0}{2}$ con $s - a_0 \in A$
- Si $n=1$:

$$\varepsilon_2 = \frac{s-a_1}{2} \qquad \text{con } a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \left(S - S + \varepsilon_1 \right)$$

$$= \frac{1}{2^2} \varepsilon_1$$

- Si $n = 2$:

$$\varepsilon_3 \leq \frac{1}{2^3} \varepsilon_2$$

- Si $n > 2$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{S - a_n}{2} \qquad \text{con } a_n \in \left(S - \varepsilon_n , S \right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \varepsilon_n$$

Como $\varepsilon_1 > \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$

fijo

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \varepsilon_1$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\therefore \varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\therefore S - \varepsilon_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S$$

y como (a_n) está entre dos sucesiones que convergen s:

1) $(s-\varepsilon_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$

2) $(s)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$

con $(s-\varepsilon_n) < a_n < \underbrace{s_n}_{\equiv s} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

y usando el ej. 10 de la Práctica 1:

10. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ probar que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Podemos concluir que

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$$

$\blacksquare$