Práctica 3

- 1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.
 - (a) \mathbb{R} con d(x,y) = |x-y|.
 - (b) $\mathbb{R}^n \text{ con } d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2\right)^{1/2}$.
 - (c) \mathbb{R}^n con $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$.
 - (d) $\mathbb{R}^n \operatorname{con} d_{\infty}(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i y_i|.$
 - (e) C([0,1]) con $d_{\infty}(f,g) = \max_{0 \le t \le 1} |f(t) g(t)|$.
 - (f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es pacios Mé Inicos

$$\boxed{1} d(x,y) > 0 \forall x,y \qquad y \qquad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$\overline{Z}$$
 $d(x,y) = d(y,x)$

$$\boxed{3}$$
 $d(xy) \leq d(xz) + d(yz)$

$$a)$$
 $1)$

$$3) |x-y| = |x-z+z-y|$$

$$\begin{cases} |x-z|+|z-y| \\ =|y-z| \end{cases}$$

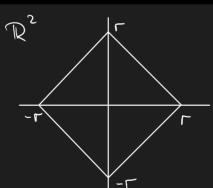
(b)
$$\mathbb{R}^n \text{ con } d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$
.

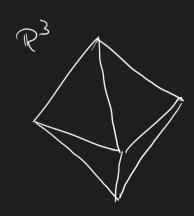
$$3) \left| \sum_{j=1}^{n} (x_{i} - y_{i})^{2} \right| = \|x - y\|$$

$$B(P, \Gamma) P \in \mathbb{R}^{n}$$

$$(\mathbb{R}^{3})$$

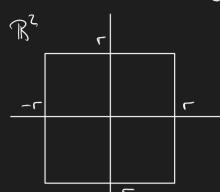
- (c) $\mathbb{R}^n \text{ con } d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i y_i|.$
 - 1) 1
 - z) V
 - 3) V





(d) \mathbb{R}^n con $d_{\infty}(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$.

- 2) /
- 3) max | x; -y; | < max { | x; -z; | + | y; -z; | }



max { |x;- z;|} + max { | y;- z;|}

(e) C([0,1]) con $d(f,g) = \max_{0 \le t \le 1} |f(t) - g(t)|$.

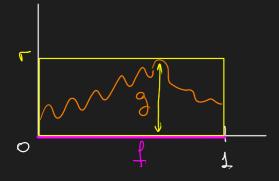
$$z$$
) $\sqrt{}$

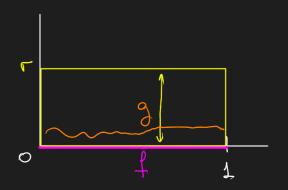
$$B(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$$

3) 1

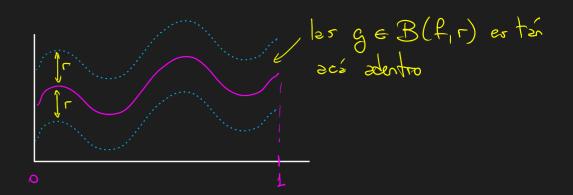
reeson

$$\mathcal{B}(f,r) = \{g \in E : d(f,g) < r\}$$





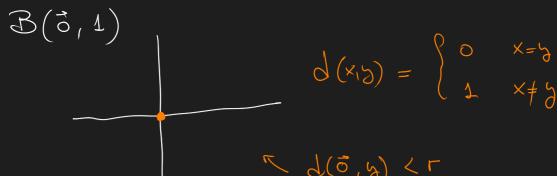
· f(t) libre



(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- 1) /
- 2) /
- 3) $d(x, 5) \leq d(x, z) + d(y, z)$





2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en \mathbb{R} :

(a)
$$d(x,y) = (x-y)^2$$

(a)
$$d(x,y) = (x-y)^2$$
 (b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ (c) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

(c)
$$d(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$da(x,y) = (x-y)^2$$

$$(x-y)^{2}$$
 $(x-z)^{2}$
 $(x-z)^{2}$

$$da = 2^2 da = 2^2$$

$$S: Z = \frac{x+y}{2}$$

=> le designel ded trien qu'er no vale

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leqslant} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leqslant} (x-\frac{x+y}{2})^2 + (y-\frac{x+y}{2})^2$$

$$(x-\beta)^2$$
 $(\frac{z}{x}-\frac{z}{y})^2+(\frac{z}{x}-\frac{z}{y})^2$

$$(x-y)^2$$
 $\frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$

$$(x-y)^{2}$$
 $\Rightarrow \frac{1}{z}(x-y)^{2}$

$$db(x,y)^{2} \leq db(x,z)^{2} + db(z,y)^{2}$$

$$db(x,y) \leq |db(x,z)^{2} + db(z,y)^{2}$$

$$||x-z| + |z-y|$$

Completo wadrado:

$$\Rightarrow a+b \leqslant a+2\sqrt{a.b+b}$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}$$

$$\Rightarrow$$
 $a+b \in (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3$

$$a,b,z$$
0
$$=) \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leqslant \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$$

.. db es distancie.

Contra es?

$$d_{c}\left(-2,z\right) = \left|\left(-2\right)^{2}-z^{2}\right|$$

- **3.** Consideremos en \mathbb{R}^n las distancias d_1 , d_2 y d_∞ . Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.
 - (a) Probar que $d_{\infty}(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq nd_{\infty}(x,y)$.
 - (b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

a)
$$d_{\infty}(x,y) = \sup \{|x_i - y_i|: i \in [1, n]\}$$

$$d_{\infty}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$doo \leq dz$$

$$D := \{|x_i - y_i| : i \in [1, n]\}$$

elementor de D al cuadrado

$$\Rightarrow$$
 $\left(d\infty\left(x_{1}y\right)\right)^{2}$ er alguno de \mathcal{I}

$$\Rightarrow \left(d \Rightarrow (x_i b)\right)^2 = \left(x_i - b_i\right)^2 \quad \text{pare algun } i \in [1, n]$$

=>
$$\left(d_{\infty}(x_{1}y_{1})\right)^{2} \leq |x_{1}-y_{1}|^{2} + |x_{2}-y_{2}|^{2} + \cdots + |x_{n}-y_{n}|^{2}$$

Tomo reiz (términos 20)

=>
$$\int_{\infty} (x_1 y_1)^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2$$

$$d \infty (x,y) \leq d_2(x,y)$$

$$dz \leq d1$$

$$d_2(x,5) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 5i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

elevo al [

$$\sum_{i=1}^{c} (xi - 5i)^{2} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{c} |xi - 5i| \right)^{2} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j$$

Note que si
$$i=j \Rightarrow ai$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j$$

Cono a: >0 Hielin]

Obtuve que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 5 \quad \text{con } 5 \geq 0$$

. 0

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 > \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{C} (xi - 5i)^{2} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{C} |xi - 5i| \right)^{2} \right\}$$

$$0 > 0 \qquad \boxed{2}$$

tob >0
$$\int_{\hat{i}=1}^{\Omega} (x\hat{i}-y\hat{i})^2 \leq \sum_{\hat{i}=1}^{\Omega} |x\hat{i}-y\hat{i}|$$

$$d_z(x,y) \leq d_1(x,y)$$

 $d1 \in n.d\infty$

$$do(x,y) = sup\{|x_i-y_i|: i \in [1,n]\}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\mathcal{D} := \left\{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \right\}$$

d ∞ (x,5) € D

Sams

$$d \infty (x, y) > \alpha \in \mathcal{D}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right] \leq \frac{1}{2} d \cdot \infty \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= 0. d \cdot \infty \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

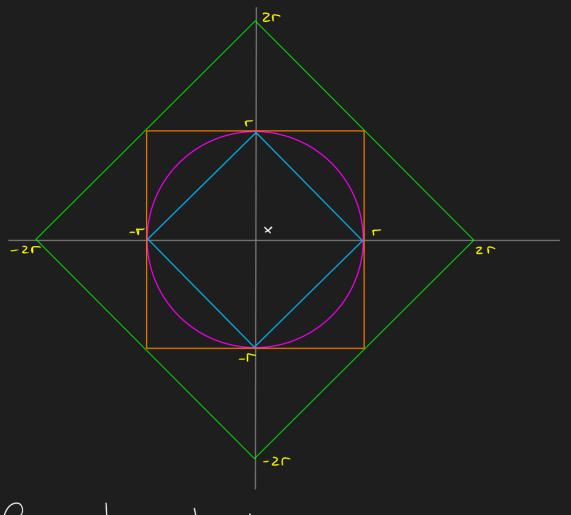
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot doo(x_i y)$$

$$d_1(x,y) \leq n. d_\infty(x,y)$$

0 0

$$d_{\infty}(x_{i3}) \leq d_{z}(x_{i3}) \leq d_{i}(x_{i3}) \leq n \cdot d_{\infty}(x_{i3})$$

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.



Como dz & d1 + x15

en particular

$$\mathfrak{D}_{d_2}(x,r) = \left\{ g \in E : d_2(x,g) < r \right\}$$

$$\mathcal{B}_{d_1}(x,r) = \{ g \in E : d_1(x,g) < r \}$$

dz & di

$$\Rightarrow$$
 $\mathfrak{D}_{d_1}(x,r) \subseteq \mathfrak{D}_{d_2}(x,r)$

Puer pas un mis mo r, los y & Bdz estarán en Bdz (puer si miden mener de r con di => miden todavía mener con dz), pero no así al rever, puer habra y & Bdz que midan más que r con dz.

$$\mathcal{B}_{z} \stackrel{?}{\subseteq} \mathcal{B}_{\infty}$$

$$\mathfrak{D}_{d_2}(x,r) = \left\{ g \in E : d_2(x,g) < r \right\}$$

$$\mathfrak{D}_{d_{\infty}}(x,r) = \left\{ g \in E : d_{\infty}(x,g) < r \right\}$$

$$\mathbb{B}_{\bullet} \subseteq \mathbb{B}_{(x, n, r)}$$

$$\mathfrak{D}_{d\omega}(x,r) = \left\{ g \in E : d_{\infty}(x,g) < r \right\}$$

•
$$\mathfrak{D}_{d,(x,r)} = \{ g \in E : d_{1}(x,g) < n,r \}$$

$$d_1 \leqslant n.d\infty$$

reeroibo

$$\mathcal{D}_{d\omega}(x,r) = \{ y \in E : n. d_{\infty}(x,y) < n.r \}$$
 n>0

$$\mathcal{B}_{d,(x,n,r)} = \{ y \in E : d_{l}(x,y) < n,r \}$$

$$\Rightarrow$$
 como $d_1 \leqslant n \cdot d_\infty$

$$\mathbb{P}_{d\omega}(x,r) \subseteq \mathbb{P}_{di}(x,n.r)$$



5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb R$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) [0,1]

(c) Q

(b) (0,1)

(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

(e) \mathbb{Z} (g) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ (f) $[0,1) \cup \{2\}$ (h) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$

6. Consideremos en el espacio C([0,1]) las métricas d_{∞} y d_1 dadas por

$$d_{\infty}(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_{1}(f,g) = \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)| dx.$$

- (a) Sea $A = \{ f \in C([0,1]) : f(0) > 0 \}$. Probar que A es abierto para d_{∞} pero que no lo es para d_1 .
- (b) Concluir que no existe M>0 tal que $d_{\infty}(f,g)\leq M\cdot d_1(f,g)$ para todas $f,g\in C([0,1]).$

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y r > 0.

- (a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
- (b) Probar que B(x,r) es un conjunto abierto.
- (c) Probar que si r > r' > 0 entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.
- (d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \le r\}$ es un conjunto cerrado.
- (e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.
- (f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.
- (g) Probar que $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

a)
$$A := \{x\}$$

Veo dousurs

$$\Rightarrow$$
 $x \in \overline{A}$ puer $\Re(x,r) \cap A \neq \emptyset$ $\forall r>0$

$$\Rightarrow d(x,y) > 0$$
 pres $x \neq y$

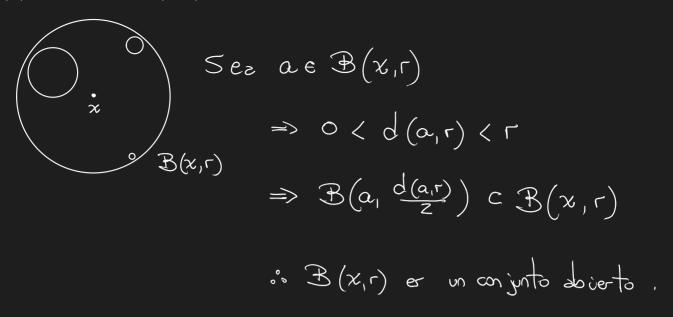
Cono x er el único elemento de A

$$\Rightarrow \mathbb{B}(y, \frac{d(x,y)}{z}) \cap A = \phi \quad \forall y \in \mathbb{E}_{\{x\}}$$

$$\Rightarrow \overline{A} = \{x\} = A$$

$$\therefore \{\chi\}$$
 er cerso,

(b) Probar que B(x,r) es un conjunto abierto.



(c) Probar que si r > r' > 0 entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

Ser
$$a \in \overline{B(x,r')}$$
 Holl
 $\Rightarrow 0 \leqslant d(a,x) \leqslant r' \leqslant r$
 $\Rightarrow d(a,x) \leqslant r$
 $\Rightarrow B(a, \frac{r-r'}{z}) \subset B(x,r)$

M

- (d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \le r\}$ es un conjunto cerrado.
- \circ Sez $\alpha \in \overline{\mathcal{B}}(x,r)$

$$\Rightarrow B(\alpha, r') \cap \overline{B}(x, r) \neq \phi \quad \forall r' > 0$$

• See
$$\alpha \in \overline{\mathcal{B}}(x,r)$$
, $b \notin \overline{\mathcal{B}}(x,r)$

$$\Rightarrow$$
 Alirmo que si a $\in \partial \overline{B}(x,r)$

y
$$a_{min} = argmin \left\{ d(a', b) : a' \in \partial \overline{B} \right\}$$

$$\mathfrak{B}(b, \frac{d(a',b)}{z}) \cap \overline{\mathfrak{B}}(x,r) = \phi$$

Le otre er toner con plemento de la Bola

$$\overline{\mathcal{B}}^{c}(x,r) = \left\{ y \in E : d(x,y) > r \right\}$$

$$\Rightarrow$$
 $\forall b \in \mathbb{B}^{c}(x,r)$



... B es abierta

8. Sea (E,d) un espacio métrico y sea $A\subseteq E.$ Probar que:

(a)
$$E \setminus A^{\circ} = \overline{E \setminus A}$$
.

(b)
$$E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^{\circ}$$
.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^{\circ}}$ y $A^{\circ} = (\overline{A})^{\circ}$?

9. Sea (E,d) un espacio métrico y sean $A,B\subseteq E.$ Probar que:

(a)
$$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$$
.

(b)
$$A^{\circ} \cup B^{\circ} \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$
.

(c)
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
.

(d)
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$
.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

- 10. Sean (E,d) un espacio métrico y $A,B\subseteq E$ subconjuntos acotados de E.
 - (a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.
 - (b) Probar que $diam(A) = diam(\overline{A})$.

