martes, 14 de septiembre de 2021 16:07

4. Considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}$. Hallar $\mathbb{Q}^\circ$ y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Busco los $x \in \mathbb{Q}$ /

$$B(x, r) \subset \mathbb{Q}$$

Pero para todo $r > 0$,

$$\exists\, k \in B(x, r) \text{ con } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$\therefore \nexists\, x \in \mathbb{Q}$ que cumple lo pedido

$$\therefore \boxed{\mathbb{Q}^\circ = \emptyset}$$

Para la clausura de $\mathbb{Q}$, busco

$$x \in E = \mathbb{R} \;/\; B(x, r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

Pero $\forall r > 0$, $B(x, r)$ contiene racionales e irracionales

$$\therefore \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

7)

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

Sea $a \in \overline{B(x,r')}$

$\overline{B(x,r')}$ no necesariamente es la bola cerrada!

$\Rightarrow$ Por def de clausura

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \cap B(x,r') \neq \emptyset$$

o lo que es lo mismo

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in B(a,\varepsilon) \ / \ b \in B(x,r')$$

$d(b,x) < r'$

Sé que

$$d(a,b) < \varepsilon$$

¿q.v.q? $d(a,x) \overset{?}{<} r$

Si tomo $\varepsilon = \frac{r-r'}{2}$

$\Rightarrow d(a,b) < \frac{r-r'}{2}$

Por desigualdad triangular

$$d(a,x) \leq \underbrace{d(a,b)}_{< \frac{r-r'}{2}} + \underbrace{d(b,x)}_{< r'}$$

$$< \frac{r-r'}{2} + r' = \frac{r}{2} + \frac{r'}{2}$$

$$< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$d(a,x) < r$ ✓

$\therefore \overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$

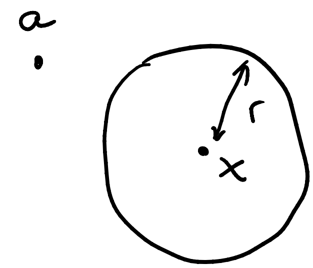
☒

(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

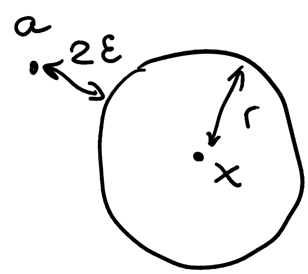
$\overline{B}^c = \{y \in E : d(x,y) > r\}$

Sea $a \in \overline{B}^c(x,r)$

$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(a,\varepsilon) \subseteq \overline{B}^c(x,r)$



Pues si $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf \{ d(a,y) : y \in \overline{B}(x,r) \}$



$\Rightarrow B(a,\varepsilon) \cap \overline{B}(x,r) = \phi$

$\therefore B(a,\varepsilon) \subseteq \overline{B}^c(x,r)$

$\blacksquare$

(e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

?

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.

Sospecho que es usando d = "discreta"

- $\overline{B}(0,1) = \{ y \in \mathbb{R} : d(0,y) \leq 1 \}$

$$\delta(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

$= \mathbb{R}$

$B(0,1) = \{0\}$

- $\overline{B(0,1)} = \{0\}$

¿Preguntar vale como ejemplo? porque elegí $r = 1$

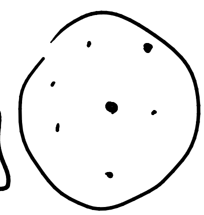
$\{0\} \subset \mathbb{R}$

//

(g) Probar que $\{y \in E :\ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

$x \in E$

$\forall y \in G,\ \exists\, \varepsilon > 0 \mid B(y,\varepsilon) \subset G$

pues si $\varepsilon = \min\left\{ \frac{d(y,x)}{2},\ \frac{1 - d(y,x)}{2} \right\}$ 

con $y \neq x$

Si $y = x \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$? Pregunta.

$\boxtimes$