7. Probar, usando la definición de límite:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2.$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1.$

Def:

$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

a) $$\left|\frac{3-2n}{n+1} - (-2)\right| = \left|\frac{3-2n+2n+2}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{5}{n+1}\right| > 0$$

$$\star = \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

$\uparrow$ quiero

$$\iff n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

- Encontré un $n_1 := \frac{5}{\varepsilon} - 1$ a partir del cual

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_1$$

$\uparrow$ pues si son iguales

no vale $|a_n - l| < \varepsilon$

- Si elijo $n_0 \overset{\text{estricto}}{>} n_1$

$\Rightarrow$ sí vale

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$\therefore$ como $n_1 = \frac{5}{\varepsilon} - 1$

Preguntar: debo asegurarme que sea entero?

si elijo $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$, como $n_0 > n_1$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$\boxtimes$

Otra forma de mostrar esto último, es decir:

$$\star = \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

quiero

$$\Leftrightarrow \quad n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n \geq \frac{5}{\varepsilon}$$

$\therefore$ Si $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$\boxtimes$

Otros posibles n_0 podrían ser

$$n_0 = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{S}{\varepsilon} \right\rceil + 38$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{S}{\varepsilon} \right\rceil + \text{“cualquier natural”}$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

qvq

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ / \ |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| \underset{\sin n \,\leq\, 1}{\leq} \frac{1}{n} \underset{\text{quiero}}{<} \varepsilon$$

$$\iff \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore \ \text{elijo} \ n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3}{2^n+4} = 1.$

$$\left| \frac{2^n - 3}{2^n + 4} - 1 \right| = \left| \frac{\cancel{2^n} - 3 - \cancel{2^n} - 4}{2^n + 4} \right|$$

$$= \left| \frac{-7}{2^n + 4} \right|$$

$$= \frac{7}{2^n + 4} \underset{\text{quiero}}{<} \varepsilon$$

$$\iff \quad \frac{7}{\varepsilon} - 4 < 2^n$$

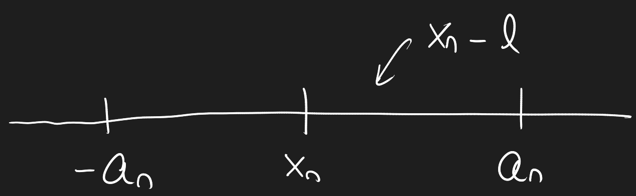
$$\log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) < n$$

$$\therefore \quad n_0 = \left\lfloor \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) \right\rfloor + 1$$

$$\blacksquare$$

8. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales. Probar que si $|x_n - \ell| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

mismos índices



Como $a_n \to 0$

$$|a_n - 0|$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

y además

$$|x_n - \ell| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore$

$$|x_n - \ell| \leq a_n \leq |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

que es la definición de lím de sucesiones

$\boxtimes$

9. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números reales tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, probar que $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

- Escribo cada Hipótesis:

$\mathcal{H}_1$: $\boxed{(x_n) \to 0}$

$|x_n - 0|$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\mathcal{H}_2$: $\boxed{(y_n) \text{ está acotada}}$ ← ? Sup e Inf ?

$N \leq y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dem

Por Prop. de lím. de sucesiones

- si $x_n \to l$

$\Rightarrow c.x_n \to c.l$ con $c \in \mathbb{R}$

En el ej:

Si $x_n \to 0$

$\Rightarrow c.x_n \to 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$

en particular, para $c \in [N, M]$

$\therefore (x_n . y_n) \to 0$

$\boxtimes$

10. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ y $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ probar que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Hi:

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_1$$

$$|z_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_2$$

Dem

- Llamo $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$$|z_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

- Como $x_n \leq y_n \leq z_n$

$$\Rightarrow |x_n - \ell| \leq |y_n - \ell| \leq |z_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$$|y_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\therefore \quad y_n \longrightarrow \ell$$

$\blacksquare$

11. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ creciente. Probar que:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente, entonces tiene límite y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada superiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

a) $\mathcal{H}$: $x_n \geqslant x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (creciente)

$\exists\, c \in \mathbb{R} \,/\, x_n \leqslant c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dem :

qvq

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, |x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0$

Supongo que no tiene límite

$\Rightarrow$ 1) Oscila / no converge

2) Diverge a infinito

1) Como es creciente

$x_n \leqslant x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Como está acotada superiormente

$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Debe converger a c ?

2) Si diverge es porque

$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; M < x_n \quad \forall n \geq n_0$

Pero como (x_n) es acotada

$c \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Abs! $\therefore$ no diverge.

Como 1) y 2) no valen

$\Rightarrow (x_n)$ tiene límite. ✓

Falta ver que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} =: s$$

$\in$

• Def de supremo

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; s - \varepsilon < x_{n_1} \leq s$

• Def de límite

qvq $l \stackrel{?}{=} s$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; |x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$

Como (x_n) es creciente y tiene límite

$\Rightarrow$ l es cota superior de (x_n)

$$l-\varepsilon < x_n \leq l \qquad \forall n \geq n_2$$

Obtuve que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; l-\varepsilon < x_n \leq l \qquad \forall n \geq n_2$$

$\therefore$ si elijo algún $n_0 \geq n_2$ puedo decir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; l-\varepsilon < x_{n_0} \leq l$$

Lo cual es justamente la def. de supremo:

$$S = l$$

$\boxtimes$

11. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ creciente. Probar que:

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada superiormente, entonces $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$\mathcal{H}$: $\quad x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, M < x_n \quad \forall n \geq n_0$$

Dem

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/$$
$$M < x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \geq n_0$$

$\therefore\ x_n \to \infty$

$\blacksquare$

12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo entonces existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup(A)$.

Hipótesis:

- A es acotado superiormente y no $\emptyset$
- A no tiene máximo

Dem:

- Sé que

$$\boxed{\text{Todo subconjunto de R (no vacío) acotado superiormente tiene supremo}}$$

- Basta encontrar (a_n) estrictamente creciente con $a_n \to \sup A$ usando elementos de A

- Como A no tiene máx $\Rightarrow$ A no es finito $\overset{A\neq\emptyset}{\Rightarrow}$ A es infinito

- Como A tiene supremo, lo llamo s y vale que

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists a\in A \ / \ s-\varepsilon < a < s$$

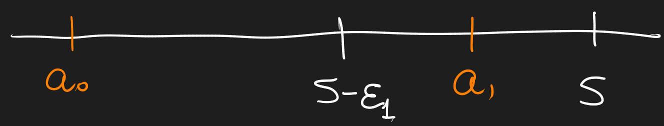
s no es máximo

Idea:

- Como A no tiene máximo, para cualquier $\varepsilon > 0$ siempre tengo infinitos elementos en $(s-\varepsilon, s)$

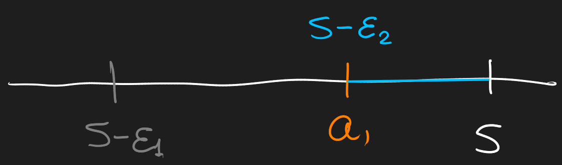
- Bastaría con elegir algunos (infinitos) de manera ordenada.

1) Elijo algún $a \in (s-\varepsilon_1, s)$ y lo llamo a_1



(con $s-\varepsilon_1 > a_0 \in A$ pues no quiero salirme de A, en caso de que tenga cota inferior)

2) Elijo un nuevo $\varepsilon_2 = s - a_1$ ☆



☆ más adelante, esto no será suficiente.

3) Para este ε_2, también vale que

$$\exists\, a \in A \;/\; s-\varepsilon_2 < a < s$$

$\Rightarrow$ elijo algún $a \in (s-\varepsilon_2, s)$ y lo llamo a_2.

Sé que $a_1 < a_2$ pues $a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$

y $a_2 \in (a_1, s)$

4) Generalizando, puedo repetir este proceso infinitas veces tomando:

$$a_{n+1} \in (a_n, s) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo la garantía de que

- siempre $\exists\, a_{n+1} \in A \,/\, a_{n+1} \in (a_n, s)$

  pues (a_n, s) es siempre infinito.

- siempre vale que $a_n < a_{n+1}$

  pues dijo $a_{n+1} \in (a_n, s)$ sin incluir a_n.

$\therefore$ (a_n) es una sucesión en A estrictamente creciente.

Falta ver que $a_n \to s$

qvq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

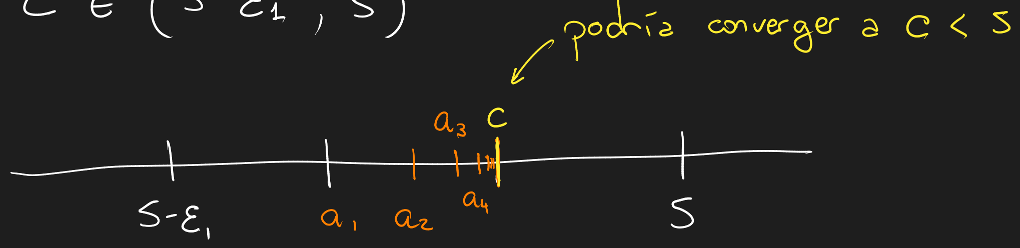
- La intuición nos dice que esto vale por la forma en que armamos la sucesión:

  toda la subsucesión $(a_k)_{k > n_0}$

  está a la derecha de cada $s - \varepsilon_{n_0}$

con $\varepsilon_n \longrightarrow 0$

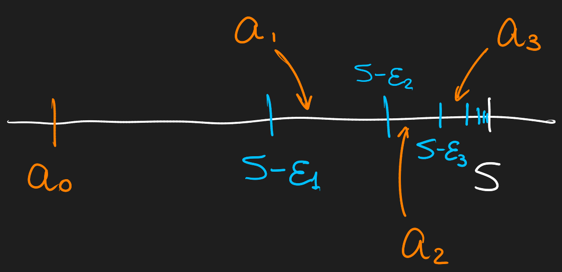
- **Pero** puede no ser cierto si convergemos a algún $c \in (s-\varepsilon_1, s)$



Para eso, me aseguro de tomar los ε de manera que converjan a s:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{s-a_n}{2}$$

De esta manera, siempre divido en 2 el segmento restante



Ahora la sucesión $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pues

- Si $n=0$: $\varepsilon_1 = \dfrac{s-a_0}{2}$ con $s-a_0 \in A$
- Si $n=1$:

$$\varepsilon_2 = \frac{s-a_1}{2} \quad \text{con } a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot (S - S + \varepsilon_1)$$

$$= \frac{1}{2^2} \varepsilon_1$$

- Si $n = 2$:

$$\varepsilon_3 \leq \frac{1}{2^3} \varepsilon_2$$

- Si $n > 2$:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{S - a_n}{2} \qquad \text{con } a_n \in (S - \varepsilon_n, S)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \varepsilon_n$$

Como $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$

fijo

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \varepsilon_1$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\therefore S - \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$$

y como (a_n) está entre dos sucesiones que convergen s:

$$1)\quad (s-\varepsilon_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$$

$$2)\quad (s)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$$

con $(s-\varepsilon_n) < a_n < \underbrace{s_n}_{\equiv s} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

y usando el ej. 10 de la Práctica 1:

10. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n. Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ y $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ probar que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Podemos concluir que

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$$

$\blacksquare$

13. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Idea:

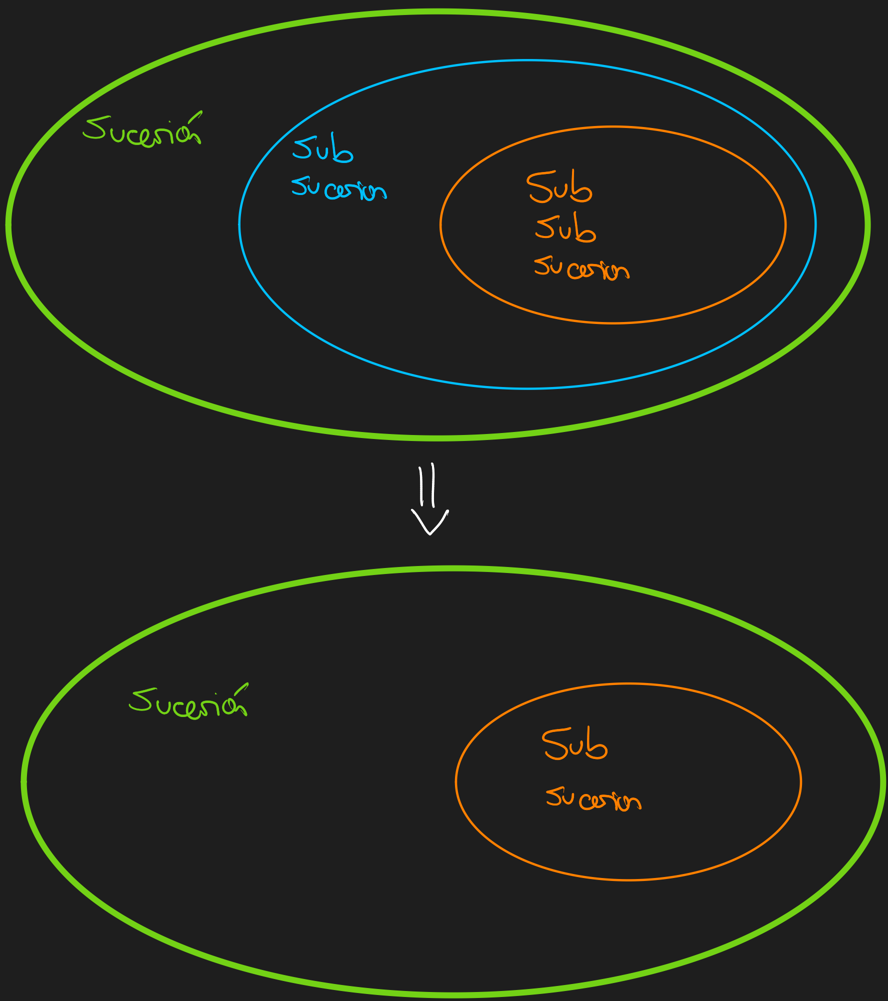
- Supongo que $\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \,/\, \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \ell$
    - Converge a otra cosa
    - no converge
    - diverge.

14. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

Probar que si toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(x_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a ℓ, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Idea:

Toda subsuc. de una subsuc. de una sucesión original, es subsuc. de esa sucesión original,



15. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Si $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.