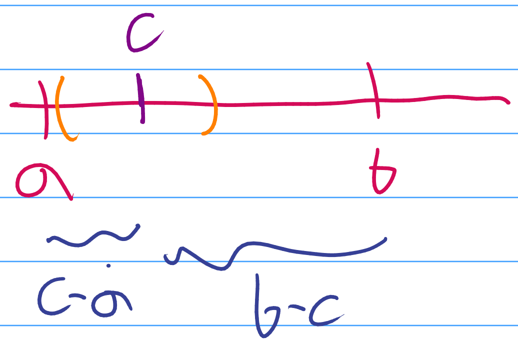
ESPACIOS MÉTRICOS I

EJEMPLOS:

1) $(\mathbb{R}, d)$, $d(x,y)=|x-y|$

- (a,b) ES ABIERTO $\forall a<b$:



SEA $c \in (a,b)$

SEA $\varepsilon = \min\{c-a,\ b-c\} > 0$

AFIRMO: $\underbrace{B(c,\varepsilon)}_{=:B_\varepsilon(c)} \subseteq (a,b)$ $\left(\Rightarrow c \text{ ES INTERIOR}\right)$

$$B(c,\varepsilon)=\{x : |x-c|<\varepsilon\}$$

$$=(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon) \subseteq (a,b)$$

$$\Downarrow$$

$$c-\varepsilon \geq a$$
$$c+\varepsilon \leq b$$

$= (x-r, x+r) = \dots$

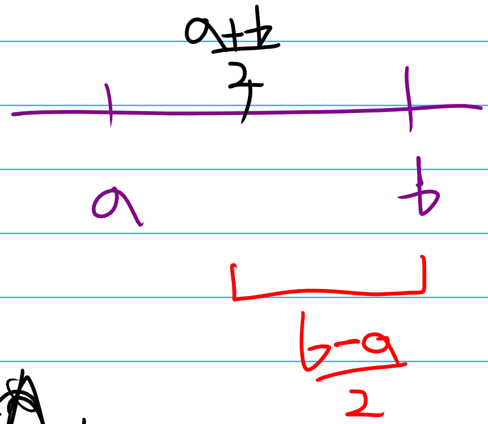
OBS:

7. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

$(a,b) = B(x,r)$, con $x = \frac{a+b}{2}$, $r = \frac{b-a}{2}$



$\rightarrow (a,b)$ es una bola, luego es abierto

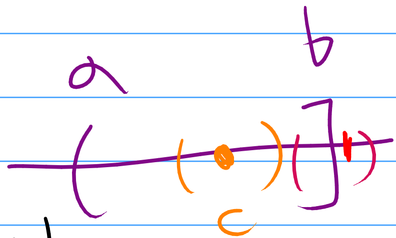
• $(a,b]^\circ = (a,b)$:

$\supseteq)$ $\forall c \in (a,b)$, vimos $\exists r>0 /$

$B(c,r) \subseteq (a,b) \subseteq (a,b]$

$\Rightarrow c \in (a,b]^\circ$

$\subseteq)$ Sea $c \in (a,b]^\circ$



En part,

$c \in (a,b]$; qvq $c \neq b$

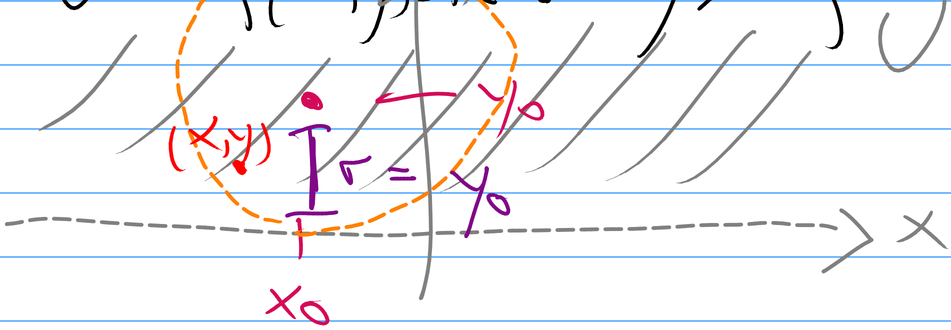
Bvq $b \notin (a,b]^\circ$, ie $(\forall \varepsilon > 0)$

$B(b,\varepsilon) \not\subseteq (a,b]$. EN EFECTO

$b+\varepsilon/2 \in \underbrace{B(b,\varepsilon)}_{(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)} \setminus (a,b]$ ✓

2) $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

SEA $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$



SEA $(x_0,y_0)\in U$. SEA $r = y_0$

AFIRMO: $B_{d_2}((x_0,y_0), r) \subseteq U$ ($\Rightarrow U$ ES ABIERTO)

SEA $(x,y)\in B_{d_2}((x_0,y_0),r)$. ASÍ,

$$r > d_2((x,y),(x_0,y_0))$$

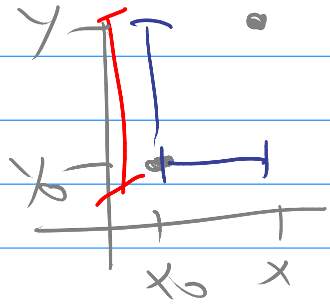
$$= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geq \sqrt{(y-y_0)^2}$$

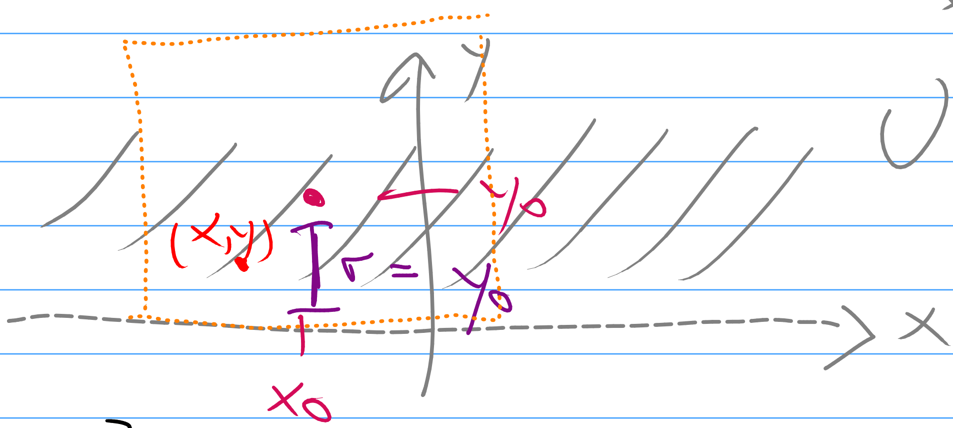
$$= |y-y_0|$$

$$\Rightarrow y \in (\overbrace{r - y_0}^{=0}, r + y_0)$$

$$\Rightarrow y > 0 \Rightarrow (x,y) \in U$$

¿QUE PASA EN $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$?





AFIRMO: $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{d_\infty}((x_0, y_0), y_0) \subseteq U$

SEA $(x,y) \in \mathcal{B}$. ENTONCES

$$y_0 > d_\infty((x,y),(x_0,y_0))$$
$$= \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \geq |y - y_0|$$
$$\Rightarrow y > 0$$

COMO DECÍAN

$\boxtimes$

RECIÉN

3. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞. Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

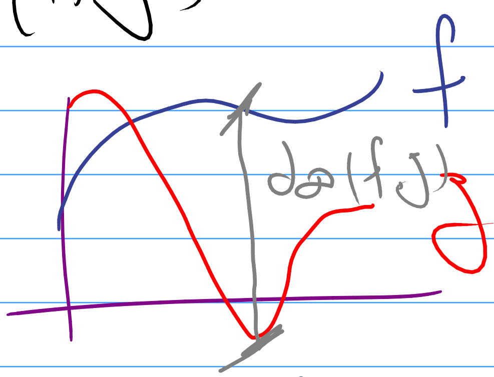
PENSAR: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ENTONCES, SON EQUIV:

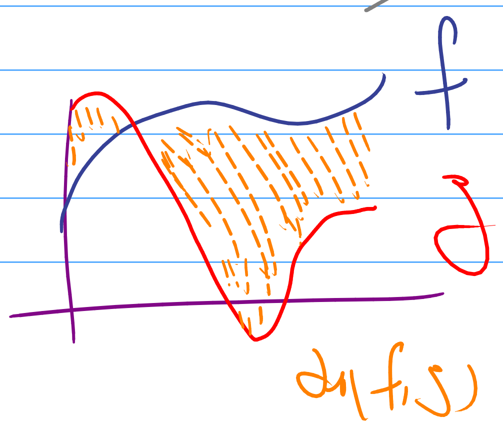
- U AB PARA d_∞
- U AB PARA d_2
- U AB PARA d_1

EJEMPLO: $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ CONT}\}$
$= \mathcal{C}([0,1])$

VIMOS QUE E ADMITE DOS MÉTRICAS:

- $d_\infty(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$



- 

$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$

SEA $f \in E$, $f \equiv 0$; SEA $\delta > 0$

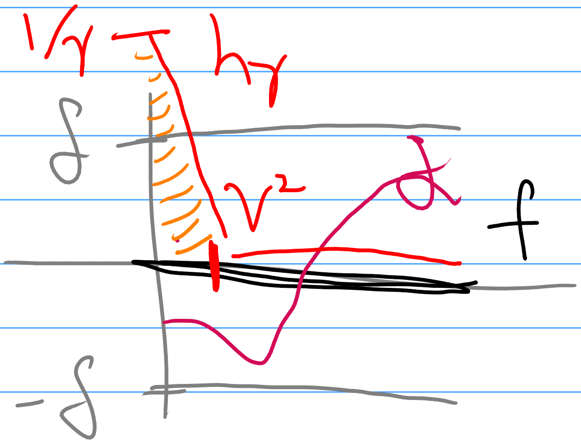
AFIRMO: $B_\infty(f,\delta) \longrightarrow$ ES ABIERTO PARA d_∞ ✓

NO ES ABIERTO PARA d_1

MÁS AÚN, $f \in \underbrace{B_\infty(f,\delta)}_{✓} \setminus B_\infty(f,\delta)^\circ$ CON RESP. A d_1

ES DECIR,

$$(\nexists\, \varepsilon > 0)\ B_1(f,\varepsilon) \subseteq B_\infty(f,\delta)$$



ES DECIR, $\forall \varepsilon > 0$ QUE

$\exists\, h \in B_1(f,\varepsilon) \setminus B_\infty(f,\delta)$

TOMO $r > 0$

- $1/r > \delta \longleftrightarrow 1/\delta > r$
- $r < 2\varepsilon$

Así,

- $d_1(h_r, f) = \frac{1}{2r} \cdot r^2 = \frac{r}{2} < \varepsilon$

$$\rightsquigarrow h_r \in B_{d_1}(f, \varepsilon)$$

- $d_\infty(h_r, f) \geq |\overbrace{h_r(0)}^{1/r} - \overbrace{f(0)}^{0}|$
$= 1/r > \delta$

$$\Rightarrow h_r \notin B_{d_\infty}(f, \delta)$$