

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \quad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
- (b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , \mathcal{I} es una función continua pero \mathcal{E} no lo es.
- (c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .

a) $\forall \varepsilon \quad \mathcal{E}(f) : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$

• Qvq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}(f, \delta)) \stackrel{?}{\subseteq} \mathcal{B}(\mathcal{E}(f), \varepsilon)$$

Bolas con $d = d_\infty$

• Sea $g \in \mathcal{B}_{d_\infty}(f, \delta)$

$$\Rightarrow d_\infty(f, g) < \delta \quad (\star) \quad \text{por def de } \mathcal{B}_{d_\infty}$$

• Sean $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$

$$d_\infty(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) \stackrel{d f \varepsilon}{=} d_\infty(f(0), g(0))$$

$$\text{Como } f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$= |f(0) - g(0)|$$

$$\leq d_\infty(f, g) \stackrel{\text{por } (\star)}{<} \delta$$

$$\therefore \text{ si } t_0 = m \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow d_{\infty}(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) < \delta < \varepsilon$$

$\therefore \mathcal{E}$ es continua con d_{∞} \square

$$\forall \varepsilon \quad \mathcal{I}(f) : \mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

De nuevo, $q \mapsto q$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad / \quad \mathcal{I}(\mathcal{B}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{I}(f), \varepsilon)$$

$$\bullet \text{ Sea } g \in \mathcal{B}(f, \delta)$$

$$\Rightarrow d_{\infty}(f, g) < \delta \quad \textcircled{\square}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad d_{\infty}(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) &= d_{\infty}\left(\int_0^1 f dx, \int_0^1 g dx\right) \\ &= \left| \int_0^1 f dx - \int_0^1 g dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(x) - g(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\leq \left| \int_0^1 d_\infty(f, g) dx \right|$$

$$= d_\infty(f, g) < \delta$$

por \square
 ↓

Si elijo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow d_\infty(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) < \delta < \varepsilon$$

$\therefore \mathcal{I}$ es continua con d_∞ .

\square

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , \mathcal{I} es una función continua pero \mathcal{E} no lo es.

Para \mathcal{I} , con d_1 , si tomo

$$g \in \mathcal{B}_{d_1}(f, \delta)$$

$$\Rightarrow d_1(f, g) < \delta$$

Entonces, cuando es esto

$$\left| \int_0^1 f(x) - g(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \right|}_{d_1(f, g)}$$

$$< \delta < \varepsilon \quad \text{si } \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Con lo cual, \mathcal{I} es continua con d_1

□

• Para $\mathcal{E}(f)$ con d_1 , busco contraejemplo:

Def de continuidad

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } d_1(f, g) < \delta \Rightarrow d_1(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_1(f(0), g(0)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(0) - g(0)| < \varepsilon$$

Negando la def:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists f, g \in \mathcal{C}([0, 1]) / \forall \delta > 0$$

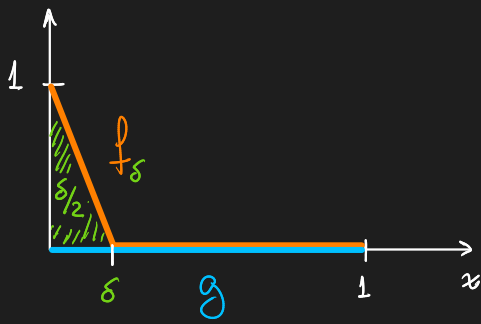
$$\text{si } d_1(f, g) < \delta \Rightarrow |f(0) - g(0)| \geq \varepsilon$$

Elijo f, g particulares

$$\text{Sean } g \equiv 0$$

↙ Triángulo de base δ y altura 1 $\Rightarrow \text{Área} = \frac{\delta}{2}$

$$f_\delta(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\delta}x + 1 & \text{si } x \in [0, \delta] \\ 0 & \text{si } x \in (\delta, 1] \end{cases}$$



Obs:

$$\text{Si } \delta > 1 \Rightarrow f_\delta(x) = f_1(x)$$

Encontré f_δ, g tales que

$$\forall \delta > 0$$

$$\text{si } d_1(f_\delta, g) < \delta \Rightarrow d_1(\mathcal{E}(f_\delta), \mathcal{E}(g)) \geq \varepsilon_0$$

↑
Área del triángulo
entre f_δ y g

$$\Rightarrow \left| \underbrace{f_\delta(0)}_{=1} - \underbrace{g(0)}_{=0} \right| = 1$$

$\therefore \mathcal{E}$ no es continua con d_1 .

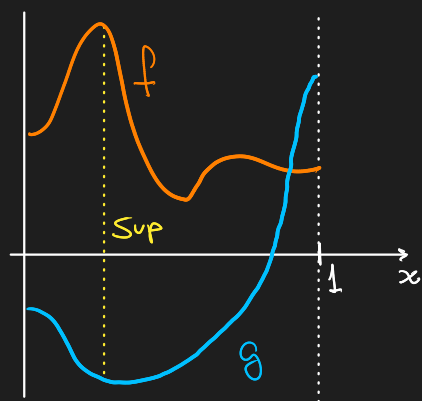
□

- (c) Analizar si es posible que una función $f : C([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .

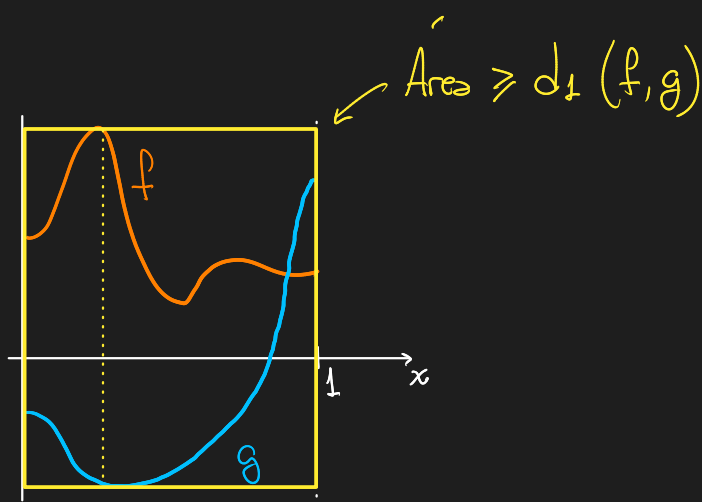
$$\text{So } f, g \in C([0,1])$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,1] \}$$

Por esto y integrando sobre $[0,1]$, y puedo acotar el área entre 2 funciones cualesquiera por un rectángulo de altura $\sup \{ |f(x) - g(x)| \}$



\Rightarrow



Sabiendo que

$$d_1(f, g) \leq d_\infty(f, g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$$

puedo asegurar que

$$\mathcal{B}_{d_\infty}(f, r) \subseteq \mathcal{B}_{d_1}(f, r) \quad \forall r > 0, f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

y además sé que

$$\mathcal{B}_{d_\infty}(x, r) \supseteq \mathcal{B}_{d_1}(x, r) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ahora, si $\mathcal{F} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua con d_1 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_1}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{B}_{d_1}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

puedo asegurar que también es continua con d_∞ pues:

- Como $\mathcal{B}_{d_\infty}(f, \delta) \subseteq \mathcal{B}_{d_1}(f, \delta)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_\infty}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_1}(f, \delta))$$

$$\text{y como } \mathcal{B}_{d_1}(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}_{d_\infty}(x, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{d_1}(\mathcal{F}(f), \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}_{d_\infty}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

Junta todo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_\infty}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_1}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{B}_{d_1}(\mathcal{F}(f), \varepsilon) \subseteq \mathcal{B}_{d_\infty}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}_{d_\infty}(f, \delta)) \subseteq \mathcal{B}_{d_\infty}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

Lo cual muestra que \mathcal{F} también es continuo con d_∞ .

∴ no existen funciones de $\mathcal{C}([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con d_1 pero discontinuas con d_∞ .

□