1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A).$$

2. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dado por

$$\mathcal{X} = \{E \subseteq \mathbb{N} : \text{ existen } p \text{ primo y } m \in \mathbb{N} \text{ tales que } \#E = p^m\}.$$

Hallar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}$.

Usa el de la Práctica

$\mathcal{X}$ es contable pues es subconj de los finitos.

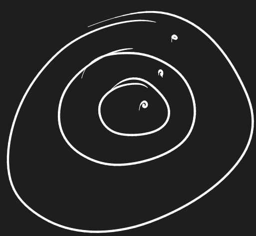
$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X} \sim \mathcal{X}$

3. Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos acotados no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe $x \in E$ tal que toda bola centrada en x contiene a algún A_n.

Armo (x_n) tomando



x_1 en A_1

x_2 en A_2

$\vdots$

x_n en A_n

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$

$\Rightarrow \operatorname{diam} A_{n+1} \leq \operatorname{diam} A_n$

con $\operatorname{diam} A_n = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A_n \}$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq \operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Hb}} 0$$

(x_n) es de Cauchy pues

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \ / \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Como (x_n) es de Cauchy y E es completo

$$\Rightarrow (x_n) \longrightarrow x \in \bigcap A_n$$