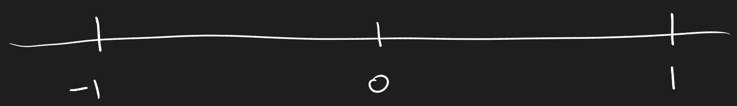
1) $A = \left\{ (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$

- Si n par $\Rightarrow$ $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
- Si n impar $\Rightarrow$ $\frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$



Propongo

- $\operatorname{Sup} A = 1$
- $\operatorname{Inf} A = -1$

Pruebo sup A, el otro es igual

i) 1 es cota sup pues $1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

pues $\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

y además $\frac{1}{n} - 1 < 1$

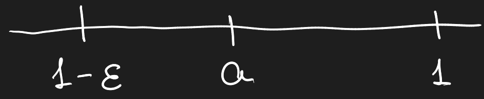
$\frac{1}{n} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ 1 es cota sup.

ii) qvq $s = \sup A = 1 \Leftrightarrow$

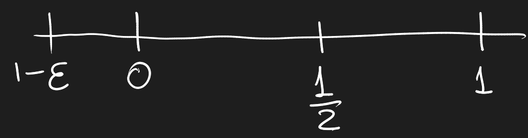
$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, 1 - \varepsilon < a \leq 1$

Busco un a entre $1-\varepsilon$ y 1



Pero los elementos de a tienen una forma particular

- Si $1-\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow$ elijo $a = \frac{1}{2} \in A$ con $n = 2$



- Si $0 < 1-\varepsilon$

$\Rightarrow$ los $a \in A$ entre $1-\varepsilon$ y 1

son de la forma

$$1 - \frac{1}{n}$$

- Me gustaría decir que "$\varepsilon = \frac{1}{n}$", pero

si $\varepsilon \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \nexists n \in \mathbb{N} / \varepsilon = \frac{1}{n}$

- Busco un valor más chico de $\frac{1}{n}$ / $\varepsilon > \frac{1}{n}$ para algún n

Por Arquímedes

como $0 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big/ \frac{1}{\varepsilon} < n_0 < 2 . n_0$$

quiero que sea par

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2 n_0$$

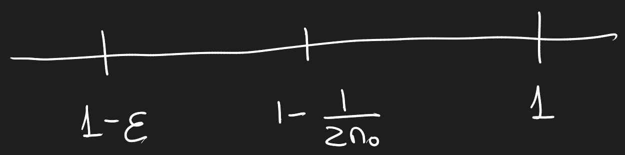
$$\varepsilon > \frac{1}{2n_0} \iff \frac{1}{2\varepsilon} < n_0$$

$\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$, elijo ese $2 . n_0$ para decir que

$$1 > \underbrace{(-1)^{2n_0}}_{=1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2 . n_0}\right) = 1 - \overbrace{\frac{1}{2n_0}}^{<\varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

$\not\geq$ pues

$1 \notin A$



Obtuve un $a \in A$ con $a : 1 - \frac{1}{2n_0}$ /

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2n_0} \leqslant 1$$

$$1 - \varepsilon < a \leqslant 1$$

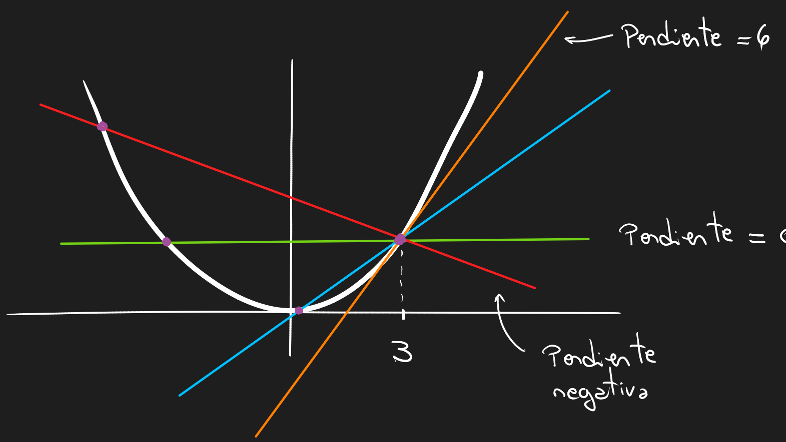
$\therefore$ 1 es supremo de A.

$\blacksquare$

2) Sea $f(x) = x^2$

$$A = \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} : h \in (-\infty, 0) \right\}$$

Como una derivada pero con $h \in (-\infty, 0)$



- Cuando $h \to 0^+$: es la derivada de x^2

$$f'(3) = 2 . 3 = 6$$

- Cuando $h \to -\infty$: es la pendiente de una recta vertical

$\therefore A = (-\infty, 6]$

- $\inf A =$ "$-\infty$" : no está acotado inferiormente !
- $\sup A = 6$