CARDINALIDAD II

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

6. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

RECORDAR: $\# \mathbb{R} = c$

OBS: TENEMOS

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1) \xrightarrow{\sim} (0,1)$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$y \longmapsto \frac{y+1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sim} [0,1) \underset{k\in\mathbb{Z}}{\xrightarrow{\sim}} [k,k+1)$$

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

$B = [0,1)$

$A = \{0\}$

ASÍ $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}^{\circ} \underbrace{[k,k+1)}_{\sim \mathbb{R}}$

"$\mathbb{R}$ ES UNIÓN DISJ DE NUM CONJ DE CARD c"

12. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

$\Rightarrow A_n \sim [n, n+1)$

$\bigcup_n A_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ¿?

$\bigcup_n B_n =$

PROP: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} [0,1) \sim \mathbb{R}$

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

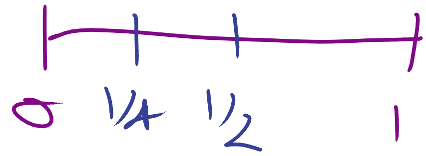
OBS: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots}_{\mathbb{N} \text{ VECES}}$

NO ES NUMERABLE

DEM: DEFINAMOS

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$$

$$(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n/2^n$$



Ej: $a = (1,1,0,1,\bar{0})$;

$$\varphi(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} = *$$

HECHOS

- φ ES SOBREYECTIVA
- φ ES INYECTIVA, SALVO

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n 1 \bar{0}) = \varphi(a_1 \dots a_n 0 \bar{1})$$

SEA $\mathcal{H} = \{ a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} :$

$(\exists n)\ a_m = 1 \ \forall m \geq n \}$;

ENTONCES

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{H} \to [0,1)$$

ES BIYECTIVA

EJERCICIO: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{H}$

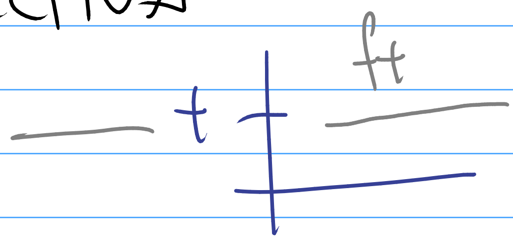
¿ $\# \underbrace{\{ f / f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$?

VALE:

$\# \mathbb{R}^{\mathbb{R}} > c$

$$\#\overbrace{\{f \,/\, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ CONTINUA}\}}^{=:\,\mathcal{A}}$$

- TENGO $\mathbb{R}\to\mathcal{A}$ INYECTIVA
  $t\mapsto \underbrace{(x\mapsto t)}_{f_t}$



$\rightsquigarrow \#\mathcal{A}\geq c$

- VALE: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}'=\{f \,/\, f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\}$
  $f\mapsto f|_{\mathbb{Q}}$

  ES INYECTIVA → LO VEREMOS

  (i.e., SI $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SON CONT
  Y $f(x)=g(x)\ \forall x\in\mathbb{Q}$
  $\Rightarrow f=g$)

LUEGO, $\#\mathcal{A}\leq\#\mathcal{A}'$

- $\mathcal{A}'=\{f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\}\xrightarrow{\sim}\{g:\mathbb{Q}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$
  $f\mapsto\varphi\circ f$

CON $\varphi:\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

↳ VIMOS QUE EXISTE

$\ulcorner\!\!\to$ "LEY EXPONENCIAL": $(Y^Z)^X \sim Y^{X \times Z}$

- **LEMA:** SEAN X, Y, Z CONJUNTOS. ENTONCES

$$\{g : X \to Y^Z\} \xrightarrow{\sim} \{h : X \times Z \to Y\}$$

DEM: $g \longmapsto \big((x,z) \overset{h}{\longmapsto} g(x)(z)\big)$

$\underbrace{\big(x \longmapsto (z \mapsto h(x,z))\big)}_{g} \longleftarrow\!\shortmid\ h$

$\boxtimes$

- LUEGO, $A' \sim \{h : \underbrace{\overbrace{\mathbb{Q}}^{X} \times \overbrace{\mathbb{N}}^{Z}}_{\sim \mathbb{N}} \to \overbrace{\{0,1\}}^{Y}\}$

$$\xrightarrow{\sim} \{k : \mathbb{N} \to \{0,1\}\} \sim \mathbb{R}$$

VIMOS

$\therefore\ \#A' = c$, Y POR LO TANTO

$\#A < c$