

12. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  acotado superiormente y no vacío. Probar que si  $A$  no tiene máximo entonces existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  estrictamente creciente tal que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup(A)$ .

Hipótesis :

- $A$  es acotado superiormente y no  $\emptyset$
- $A$  no tiene máximo

Dem :

- Sé que

Todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  (no vacío) acotado superiormente tiene supremo

- Basta encontrar  $(a_n)$  estrictamente creciente  
con  $a_n \rightarrow \sup A$   
usando elementos de  $A$

- Como  $A$  no tiene máx  $\Rightarrow A$  no es finito

$$A \neq \emptyset$$

$\Rightarrow A$  es infinito

- Como  $A$  tiene supremo, lo llamo  $s$  y vale que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid s - \varepsilon < a < s$$

$\uparrow$   
 $s$  no es máximo

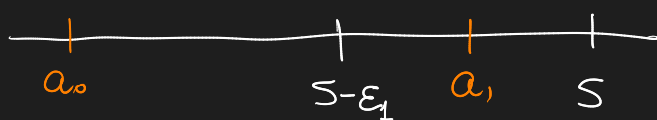
Idea :

- Como  $A$  no tiene máximo, para cualquier  $\varepsilon > 0$  siempre tengo infinitos elementos en  $(s-\varepsilon, s)$



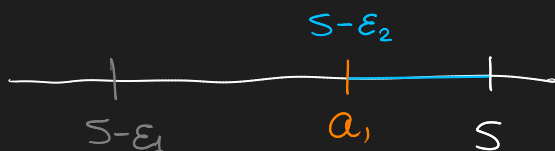
- Baste con elegir algunos (infinitos) de manera ordenada.

- 1) Elijo algún  $a \in (s-\varepsilon_1, s)$  y lo llamo  $a_1$



(con  $s-\varepsilon_1 > a_0 \in A$   
pues no quiero salir me  
de  $A$ , en caso de que  
tenga cota inferior)

- 2) Elijo un nuevo  $\varepsilon_2 = s - a_1$  \*



\* más adelante, esto no  
será suficiente.

- 3) Por este  $\varepsilon_2$ , también vale que

$$\exists a \in A \mid s-\varepsilon_2 < a < s$$

$\Rightarrow$  elijo algún  $a \in (s-\varepsilon_2, s)$  y lo llamo  $a_2$ .

Sé que  $a_1 < a_2$  pues  $a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$

y  $a_2 \in (a_1, s)$

4) Generalizando, puedo repetir este proceso infinitas veces tomando:

$$a_{n+1} \in (a_n, s) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo la garantía de que

- siempre  $\exists a_{n+1} \in A \mid a_{n+1} \in (a_n, s)$   
pues  $(a_n, s)$  es siempre infinito.

- siempre vale que  $a_n < a_{n+1}$   
pues elijo  $a_{n+1} \in (a_n, s)$  sin incluir  $a_n$ .

∴  $(a_n)$  es una sucesión en  $A$  estrictamente creciente.

Falta ver que  $a_n \rightarrow s$

q.v.q

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

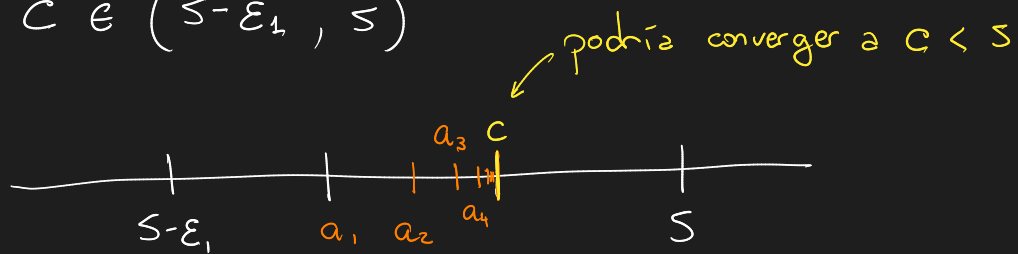
- La intuición nos dice que esto vale por la forma en que armamos la sucesión:

toda la subsecuencia  $(a_k)_{k \geq n_0}$   
está a la derecha de cada  $s - \varepsilon_{n_0}$

con  $\varepsilon_n \rightarrow 0$

• Pero puede no ser cierto si convergemos

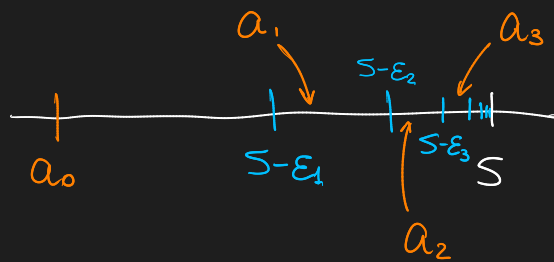
a algún  $c \in (s - \varepsilon_1, s)$



Para eso, me aseguro de tomar los  $\varepsilon$  de manera que converjan a  $s$ :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{s - a_n}{2}$$

De esta manera, siempre divido en 2 el segmento restante



Ahora la sucesión  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Pues

• Si  $n = 0$ :  $\varepsilon_1 = \frac{s - a_0}{2}$  con  $s - a_0 \in A$

• Si  $n = 1$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{s - a_1}{2} \quad \text{con } a_1 \in (s - \varepsilon_1, s)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot (S - S + \varepsilon_1)$$

$$= \frac{1}{2^2} \varepsilon_1$$

• Si  $n = 2$ :

$$\varepsilon_3 \leq \frac{1}{2^3} \varepsilon_2$$

• Si  $n > 2$ :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{S - a_n}{2} \quad \text{con } a_n \in (S - \varepsilon_n, S)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \varepsilon_n$$

Como  $\varepsilon_1 > \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , con  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \overset{\text{fijo}}{\varepsilon_1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore S - \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

y como  $(a_n)$  está entre dos sucesiones que convergen  $S$  :

$$1) (s - \varepsilon_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$2) (s)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$\text{con } (s - \varepsilon_n) < a_n < \underbrace{s_n}_{\equiv S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y usando el ej. 10 de la Práctica 1:

10. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales tales que  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n$ . Si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  y  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  probar que  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .

Podemos concluir que

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

□