

11. Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\#\mathbb{R} = c$$

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$$

⇒ Como \mathbb{Q} es numerable y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

$$\therefore \mathbb{I} \sim \mathbb{R}$$

o sea :

$$\#\mathbb{I} = c$$

■

12. Sea c el cardinal de \mathbb{R} . Probar:

- (a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.
(b) Si $\#A_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

a) Como $\#A = c$

$$\Rightarrow \exists f \text{ biyectiva } / f: A \rightarrow [0, 1)$$

Como $\#\mathbb{B} = c$

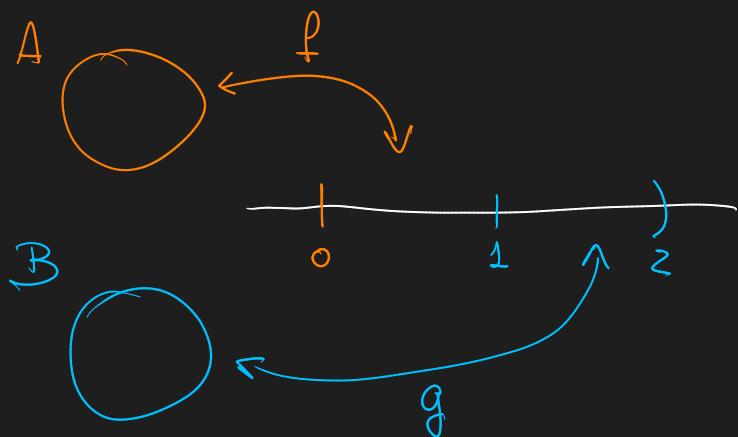
$$\Rightarrow \exists g \text{ biyectiva } / f: \mathbb{B} \rightarrow [1, z)$$

Supongo $A \cap \mathbb{B} = \emptyset$

Además, afirmo que

$$\exists h \text{ biyectiva } / h : A \cup \mathbb{B} \rightarrow [0, z)$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in \mathbb{B} \end{cases}$$



Pruebo biyectividad de $h(x)$:

$$\bullet \quad \text{Si } x \in A \Rightarrow h(x) = f(x) \in [0,1]$$

$$\bullet \quad \text{Si } y \in B \Rightarrow h(y) = g(y) \in [1,2]$$

Por lo tanto

$$\bullet \quad \text{Si } h(x) = h(y) \Rightarrow \text{Si } x \in A \Rightarrow h(x) \in [0,1]$$

$$\stackrel{h(x)=h(y)}{\Rightarrow} h(y) \in [0,1] \text{ Abs!}$$

Revisar!

$$\therefore h(x) \neq h(y) \quad \forall x, y \text{ con } x \in A \\ y \in B$$

$\therefore h$ es inyectiva.

Falta sobrefuncionalidad:

$$\text{Si } t \in [0,2) \Rightarrow t \in [0,1) \text{ ó } t \in [1,2)$$

$$\hookrightarrow \text{Si } t \in [0,1)$$

\Rightarrow Como f es sobrefunción e inyectiva

$$\exists ! a \in A / f(a) = t = h(a)$$

$$\hookrightarrow \text{Si } t \in [1,2)$$

\Rightarrow Como g es sobrefunción e inyectiva

$$\exists ! b \in B / g(b) = t = h(b)$$

$\therefore h$ es sobrefunción

$\therefore h$ es biyectiva.

Finalmente

$$[0,1) \dot{\cup} [1,2) \sim [0,2)$$

y como

$$A \sim [0,1)$$

$$B \sim [1,2)$$

↓
supuse!

$$\Rightarrow A \dot{\cup} B \sim [0,1) \dot{\cup} [1,2) \sim [0,2) \sim \mathbb{R}$$

$$A \dot{\cup} B \sim \mathbb{R}$$

Ahora, si

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cup B = \underbrace{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}_{\sim \mathbb{R}} \dot{\cup} \underbrace{(A \cap B)}_{?}$$

Por lo que probé

Como

$$\# A \cap B \leq \# A$$

$$\# A \cap B \leq c$$

$$\therefore \# \left[(A \cup B) \setminus (A \cap B) \dot{\cup} \overbrace{(A \cap B)}^{a b \text{ sumo } c} \right] = c$$

$$\therefore \# A \cup B = c$$

■

(b) Si $\#A_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

Como $A_n \sim [n, n+1) \sim \mathbb{R}$

$$\text{y } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

Por lo que

$$\# \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) \right) = c$$

Si los A_n son disjuntos 2 a 2 (los llamo B_n)

$\Rightarrow \exists f$ inyectiva de los B_n a $[n, n+1)$

- $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^C \right) = c$?

- $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^\infty \right) = \#\mathbb{N}$ si es que existe algún B_n^∞

- $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{\text{finito}} \right) \leq \#\mathbb{N}$ si es que existe algún B_n^{finito}

y como unir a un conjunto infinito un conjunto finito o numerable no cambia su cardinal,

$$\Rightarrow \# \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = c$$

$$\text{y como} \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = C$$

¶

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \rightarrow \{0,1\}$ funciones}.

(b) Probar que $[0,1] \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$a) \quad \mathcal{P}(A) = \{ X \subseteq A \}$$

↑ todos los posibles subconjuntos de A

• Cuando digo $\downarrow A$ puede ser finito, numerable ó no numerable!

$$\phi : A \rightarrow \{0,1\}$$

\downarrow
 (no sucesiones ni
 numerables subconjuntos)

↑ ϕ toma algún elemento de A

y devuelve 0 ó 1,

• Con esto, puedo definir:

$$\psi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\left\{ \phi : A \rightarrow \{0,1\} \text{ función} \right\}$$

$$\mathcal{B} \longmapsto \phi_{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

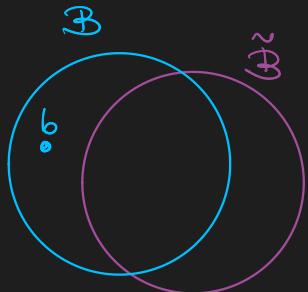
con $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(A)$, o sea, $\mathcal{B} \subseteq A$

∴ para cada \mathcal{B} en $\mathcal{P}(A)$, tengo una

ϕ_B que depende de B , y para cada

B , ϕ_B es diferente, pues

si $B \neq \tilde{B} \Rightarrow \exists b \in B$ con $b \notin \tilde{B}$



o viceversa

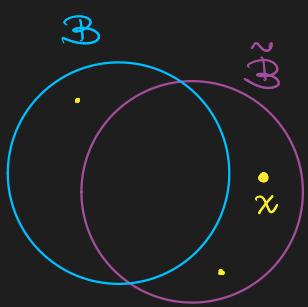
de forma que

$$\phi_B(b) = 1$$

$$\text{y} \quad \phi_{\tilde{B}}(b) = 0$$

o sea que

$$\phi_B(x) \neq \phi_{\tilde{B}}(x) \quad \forall B \neq \tilde{B}$$



$$\forall x \in (B \setminus \tilde{B} \cup \tilde{B} \setminus B)$$

$$\therefore \phi_B(b) = \phi_{\tilde{B}}(b) \Leftrightarrow B = \tilde{B}$$

$$\therefore \psi(B) = \psi(\tilde{B}) \Leftrightarrow B = \tilde{B}$$

con lo que ψ es inyectiva,

$$\Rightarrow \# \mathcal{P}(A) \leq \# \{0,1\}^A$$

- Ahora, definimos otra función ψ /

$$\Psi : \{0,1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$\left\{ \phi : A \rightarrow \{0,1\} \text{ función} \right\}$

$$\phi_B \longmapsto \left\{ x \in B : \phi_B(x) = 1 \right\}$$

\uparrow
 función que manda elementos
 de $B \subseteq A$ en $\{0,1\}$

- Como \downarrow Dejo para abajo, mal! mostrar composición.

$$\Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}}) \quad \forall B \neq \tilde{B}$$

pues si $b \in B$ y $b \notin \tilde{B} \Rightarrow \phi_B(b) \neq \phi_{\tilde{B}}(b)$

$$\Rightarrow \left\{ x \in B : \phi_B(x) = 1 \right\} \neq \left\{ x \in \tilde{B} : \phi_{\tilde{B}}(x) = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}})$$

∴ Ψ es inyectiva.

$$\Rightarrow \text{como } \Psi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0,1\}^A \text{ es } \underline{\text{inyectiva}}$$

$$\text{y } \Psi : \{0,1\}^A \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ es } \underline{\text{inyectiva}}$$

\Rightarrow por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

existe una función biyectiva entre $\{0,1\}^A$ y $\mathcal{P}(A)$

con lo que

$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$$



Nicolás Sirolli

Acá mi respuesta a la resolución de Leandro



Está esencialmente bien. Pero hay un detalle no menor:

Cuando vas a probar que ψ es inyectiva, no la evaluás en un par de funciones cualesquiera, sino en ϕ_B y $\phi_{B'}$. Esto es bien solamente si previamente probaste que todo par de funciones en el dominio de ψ son de esa forma, o en otras palabras: que ϕ es sobreyectiva. Pero si tenés probado eso, no hace falta ocuparte de la inyectividad de ϕ .

Para salir del laberinto por arriba propongo: olvidar inyectividades, y probar que ϕ y ψ son una la inversa de la otra.

Solo basta componer ψ con Ψ

$$\psi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$B \longmapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

$$\Psi : \{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\phi_B \longmapsto \left\{ x \in B : \phi_B(x) = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}\Psi\left(\Psi\left(\phi_{\mathcal{B}}(x)\right)\right) &= \Psi\left(\left\{x \in \mathcal{B} : \phi_{\mathcal{B}}(x) = 1\right\}\right) \\ &= \Psi\left(\mathcal{B}\right)\end{aligned}$$

y como $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \phi_{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{B} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Psi\left(\Psi\left(\phi_{\mathcal{B}}(x)\right)\right) = \phi_{\mathcal{B}}(x)$$

? y si meto otra función ?

$$\therefore \psi = \psi^{-1} \quad \phi_0(x) = 0$$

y como ψ es inyectiva y tiene inversa

$\Rightarrow \psi$ es biyectiva.

y $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$

□

(b) Probar que $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0, 1]$. ¡Ojo! la escritura no es única.

Lo hizo Nico en Práctica 05,

Reescalo

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \left\{ \phi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \right\}$$

↑ sucesiones de 0's y 1's

Dem:

$$\text{Sez } \psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n}$$

↑ cada sucesión → la manda al $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

Ej:

$$\cdot \psi(000 \dots \text{ceros}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{0}{2^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \cdot \psi(0010000 \dots \text{ceros}) &= \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\cdot \psi(1010000 \dots \text{ceros}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\cdot \psi(111 \dots \text{unos}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$$

Atento!

- $\psi(100000\dots\text{ceros}) = \frac{1}{2}$
- $\psi(011\dots\text{unos}) = \frac{0}{2} + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

Son iguales!

Hechos

- ψ es sobreyección (todo real en $[0,1]$ tiene desarrollo binario)
- ψ es inyectiva solo en ceros con 2 escrituras
ie: colas de 1's o 0's

↳ Me deshago de las colas de 1's

↳ Defino sucesiones!

$$\Theta = \left\{ a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\exists n_0 \in \mathbb{N}) a_m = 1 \quad \forall m \geq n_0 \right\}$$

↑ "Ones"

con ésto:

también se pone el 1

$$\psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Theta \longrightarrow [0,1)$$

es inyectiva

y \therefore es biyectiva.

$$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Theta \sim [0,1)$$

- Faltó ver que

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H} \stackrel{?}{\sim} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

- Como

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H} \sim [0,1)$$

y como $[0,1) \sim \mathbb{R}$ pver

$$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H} \sim \mathbb{R}$$

OBS: TENEMOS

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sim} & (-1,1) \\ \times 1 \mapsto & \times & \frac{1}{1+|x|} \\ & & \end{array}$$

$$y \mapsto \frac{y+1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sim} [0,1) \quad \xrightarrow{\sim} [k, k+1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

∴ como $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H}$ es infinito

y como $\#\mathbb{H} \leq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H} = C$

↑ Pver por cada cola de 1's, puedo obtener n sucesiones cambiando alguno de los primeros n unos, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathbb{H} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

∴ $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1)$

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Como por a)

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

y por b)

$$[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

y podemos

$$[0,1) \sim \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$$

□

14. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

- Son los subconjuntos de \mathbb{N} tales que

↳ Sean numerables : $\#B = \aleph_0$.

↳ que dejen un resto numerable al hacer $\mathbb{N} \setminus B$

$$\#\mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$$

(ie: $\mathbb{N} \setminus B$ no puede ser finito)

- Llamo A el conjunto de los aciños

- Como $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A)$$

- Sé que

$$\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

y además, que

A es infinito

que existen un finitos subconjuntos de \mathbb{N} que cumplen
los condicioner de A , eg:

- los subconjuntos de \mathbb{N} múltiplos de cada primo:

$$\begin{aligned} & \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 2 = 0, b \in B \right\} \\ & \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 3 = 0, b \in B \right\} \\ & \vdots \\ & \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod p = 0, b \in B \right\} \quad \forall p \text{ primo} \end{aligned}$$

- Busco en contrar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$,
dado por los subconjuntos de \mathbb{N} que cumplen:
 - ↳ ó bien son finitos
 - ↳ ó dejan un resto finito

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A &= \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es numerable, } \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \right\} \end{aligned}$$

- Llamo X e Y estos conjuntos respectivamente

Por ejercicio 10

- Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Sé que X es numerable.

- Falta ver el cardinal de Y

- Si $B \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \setminus B$ es finito

$\Rightarrow B$ es numerable

$\therefore Y$ se puede escribir como

$$\left\{ B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito} \right\}$$

- Esto es similar al caso del ejercicio 10.

- Busco función biyectiva entre X e Y

- Defino

$$\psi : Y \rightarrow X$$

$$B \mapsto \mathbb{N} \setminus B$$

- Afirmo que es inyectiva

Dem:

- Inyección:

$$\text{Si } \psi(B) = \psi(D)$$

$$\Rightarrow \mathbb{N} \setminus \mathcal{B} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}$$

ésto sucede si $\mathcal{B} = \mathcal{D}$, pues si fueran distintos, existiría algún elemento en \mathcal{B} que no esté en \mathcal{D} o viceversa, con lo que $\mathbb{N} \setminus \mathcal{B}$ no tendría este elemento pero sí estaría en $\mathbb{N} \setminus \mathcal{D}$, o viceversa, conduyendo que

$$\mathcal{B} \neq \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus \mathcal{B} \neq \mathbb{N} \setminus \mathcal{D}$$

∴ ψ es inyectiva.

De la misma manera, de fino

$$\phi : \textcolor{orange}{X} \rightarrow \textcolor{blue}{Y}$$

$$E \mapsto \mathcal{B}$$

Afirmo que es inyectiva.

Dem:

• Inyectividad:

$$\text{Si } \phi(E) = \phi(F)$$

Como $E, F \in X$

$$\Rightarrow \exists B \in Y / E = N \setminus B$$

$$\exists D \in Y / F = N \setminus D$$

$$\Rightarrow \phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D)$$

y estoy en el mismo caso que demostrando
inyectividad en ψ :

$$\phi(N \setminus B) = \phi(N \setminus D) \Leftrightarrow B = D$$

y como

$$B = D \Leftrightarrow E = F$$

$$\Rightarrow \phi(E) = \phi(F) \Leftrightarrow E = F$$

∴ ϕ es inyectiva.

Como $\psi : Y \rightarrow X$ es inyectiva

y $\phi : X \rightarrow Y$ es inyectiva

Por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein
sé que existe una función biyectiva de $Y \rightarrow X$

$$\therefore X \sim Y$$

y como X es numerable

$\Rightarrow Y$ es numerable.

Volviendo

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = X \cup Y$$

Como unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable.

Finalmente, tenía que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \cup (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A)$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A) = A$$

Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\therefore A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

o sea que

$$\# A = c$$

en

15. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 (b) Calcular el cardinal de $[0, 1) \times [0, 1)$.
 (c) Calcular el cardinal de \mathbb{R}^k para cada $k \in \mathbb{N}$.

a) Como $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ (Pares)
 y $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} - 1$ (Impares)

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(2\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(2\mathbb{N} - 1)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$
 Subconjuntos Subconjuntos
 de Pares de Impares

$\overbrace{\hspace{10cm}}$
Todas las combinaciones de
 estos subconjuntos entre sí,
 resultan en todos los
 subconjuntos de \mathbb{N} : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Notemos estas combinaciones como

$$\mathcal{P}(2\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(2\mathbb{N} - 1) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\therefore \mathcal{P}(\mathbb{N}) \underset{2}{\sim} \mathcal{P}(2\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(2\mathbb{N} - 1) \underset{2}{\sim} \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\therefore \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

$$\therefore \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c \quad //$$

$$b) \text{ Como } \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c = \# [k, k+1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0, 1) \times [0, 1)$$

$$\therefore \# [0, 1) \times [0, 1) = c$$

c) $\mathcal{CB}) \quad k=1 :$

$$\#\mathbb{R} = c \quad \checkmark$$

$k=2 :$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\# \mathbb{R} \times \mathbb{R} = c$$

$$\mathcal{PI}) \text{ HI : } \# \mathbb{R}^k = c$$

$$\text{q.v q} \quad \# \mathbb{R}^{k+1} = c$$

Comienzo con

$$\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^k \stackrel{\text{HI}}{\sim} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

$$\therefore \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

16. Calcular el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

Obs:

- Los polinomios tienen finitos coeficientes
 - Cada grado de libertad del polinomio representa una dimensión en \mathbb{R}
 - $\mathbb{R}^0[X] = a_0 \quad a_0 \in \mathbb{R}$
 - $\mathbb{R}^1[X] = a_1 x + a_0 \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$
 - \vdots
 - $\mathbb{R}^k[X] = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$
- con $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$
 $k \in \mathbb{N}$

∴ si $p^k(x)$ es un polinomio en $\mathbb{R}^k[X]$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow p^k(x) : \underbrace{\mathbb{R}^{k+1}}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \text{ } k+1 \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Por el ejercicio anterior, sabemos que el cardinal de \mathbb{R}^k es c $\forall k \in \mathbb{N}$

∴ podemos afirmar que el cardinal del conjunto de polinomios de grado k es c ,

$$\#\mathbb{R}^k[X] = c$$

Però queremos todos los polinomios, no solo los de grado k :

$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathbb{R}^k[X]$$

↑
como es \mathbb{N} unión es numerable,
por ej 12.b.

(b) Si $\#A_n = c \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

$$\Rightarrow \#\mathbb{R}[X] = c \quad \blacksquare$$

Otra forma (Nico)

Podemos ver a los polinomios de grado k , como sucesiones con sus primeros $k+1$ elementos en \mathbb{R} , y luego todos ceros,

$$\mathbb{R}[X] \leadsto \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (\exists n_0) a_n = 0 \forall n > n_0 \right\}$$

!!

..

A

↑ subconjunto de las sucesiones de Reales!

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : a_n = 0 \quad \forall n \geq k \right\}$$

$\sim \mathbb{R}^k$

Por 12. (b) Si $\# A_n = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

y 15. (c)

$$\# A = c$$

$$\therefore \mathbb{R}[x] \sim \mathbb{R}$$

\square

17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}.$

(b) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es periódica}\}.$

a) Si una sucesión es periódica

$\Rightarrow \exists$ una subsucesión finita que se repite

\Rightarrow La sucesión original tiene el cardinal de esta subsucesión.

\Rightarrow como una sucesión finita en \mathbb{Q} de k elementos

es coordinable con $\mathbb{Q}^k \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$$A \sim \mathbb{N}$$

\approx

b) Como $(a_n) \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow$ si converge es por que

$$\exists n_0 / a_n = a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

• Si $n_0 = 1 \Rightarrow (a_n)$ es constante y su cardinal

es $\#\mathbb{Z}^1 = \#\mathbb{N}$

• Si $n_0 > 1$

\Rightarrow Me quedo con los primeros $n_0 - 1$ términos

Llamo $k := n_0 - 1$

Como k finito, $\mathbb{Z}^k \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

y como unión numerable de numerables, es numerable

$$\mathcal{B} \sim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^k \sim \mathbb{N}$$

• $\mathcal{B} \sim \mathbb{N}$

■

18. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i \in I}$ indexada por I tal que

- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Probar que I es contable.

- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.

a) Preguntar : ¿Puedo escribir $\{A_i\}_{i \in I}$ si I es no numerable ? eg : si $I = \mathbb{R}$