ESPACIOS MÉTRICOS IV

- SUCESIONES
- PUNTOS DE AC

RECORDEMOS: (E,d) em, $(a_m) \subseteq E$, $a \in A$

$a_m \to a$ si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0)$

$a_m \in B(a,\varepsilon)$ $\forall m \geq m_0$

EJEMPLOS: 1) EN $\mathbb{R}^d$ SEA $d = d_1, d_2$ ó d_∞.

SEA $(a_m) \subseteq \mathbb{R}^d$: $a_m = (a_m^{(1)}, \dots, a_m^{(d)})$

SEA $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$

ENTONCES $a_m \to a$ sii $a_m^{(i)} \to a^{(i)}$

$\forall i = 1, \dots, d$

MÉTRICA USUAL

$\forall i$

$\Rightarrow)$ $|a_m^{(i)} - a^{(i)}| \leq d_\infty(a_m, a)$

$\leq C \cdot \underbrace{d(a_m, a)}_{\to 0 \; m\to+\infty}$

EJ 3

$\therefore a_m^{(i)} \to a^{(i)}$

$(\Leftarrow)$ SEA $\varepsilon > 0$. $(\forall i)\ \exists\, m_0^{(i)}$ /

$$|a_m^{(i)} - a^{(i)}| < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0^{(i)}$$

TOMO $m_0 = \max\{m_0^{(i)} : i = 1, \dots, d\}$

ASI $d(a_m, a) \leq C \cdot d_\infty(a_m, a)$

$< C \cdot \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$

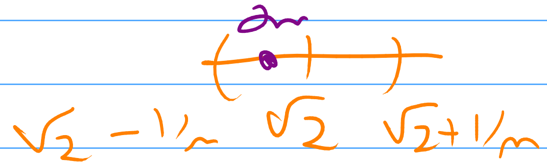
$C > 0$

2)

2. (a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x < k < y$.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

$\Rightarrow\ \exists\, (a_m) \subseteq \mathbb{Q}$ CON $a_m \to \sqrt{2}$



CONSIDERO $\mathbb{Q}$ COMO E.M., CON $d(x,y) = |x - y|$

$\rightsquigarrow$ TENGO $(a_m) \subseteq \mathbb{Q}$. ¿CONVERGE?

SUP QUE SÍ: $\exists\, a \in \mathbb{Q}$ CON $a_m \to a$

$$|a - \sqrt{2}| \leq \underbrace{|a - a_m|}_{< \varepsilon/2,\ \text{si } m >> 0} + \underbrace{|a_m - \sqrt{2}|}_{< \varepsilon/2,\ \text{si } m >> 0} < \varepsilon$$

$\therefore |a - \sqrt{2}| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2$ ABS!

PUES $a \in \mathbb{Q}$

PERO: ES DE CAUCHY, EN EFECTO:

SEA $\varepsilon > 0$.

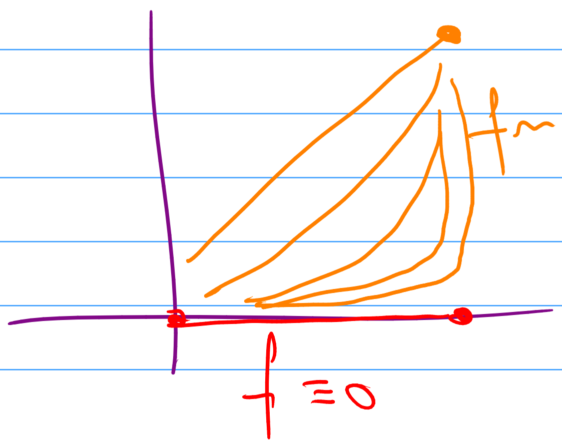
$$|a_n - a_m| \leq \underbrace{|a_n - \sqrt{2}|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\sqrt{2} - a_m|}_{< \varepsilon/2}$$

SI $n, m \geq n_0$ → TAL QUE $|a_k - \sqrt{2}| < \varepsilon/2 \quad \forall k \geq n_0$

$\mathbb{Q}$

3) EN $C([0,1])$ CON d_∞ CONSIDEREMOS

$f_n(x) = x^n$



$\nearrow f_n \xrightarrow{d_\infty} f$
$(\Leftrightarrow d_\infty(f_n, f) \to 0)$

¿CONVERGE? SUP QUE SÍ, A UNA FUNCIÓN $f \in C([0,1])$.

OBS: $(\forall x)\ |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{d_\infty(f_n, f)}_{\substack{\to 0 \\ n \to +\infty}}$

$\therefore\ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

PERO:
$$x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{\begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}}_{\text{ESTA ES } f(x),}$$

ABS! PUES $f \in C([0,1])$

OK, NO CONVERGE; ¿ES DE CAUCHY? NO:

$\Rightarrow$ NO CONVERGE

PVQ: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0)$
$\exists n, m \geq n_0$ CON
$$d(f_n, f_m) \geq \varepsilon$$

$$\boxed{d(f_n, f_m) = \max_{x\in[0,1]} |x^n - x^m|}$$

$$\geq |x^n - x^m| \underset{m=2n}{=} |x^n - x^{2n}|$$

$\forall x$

$$= x^n(1-x^n) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

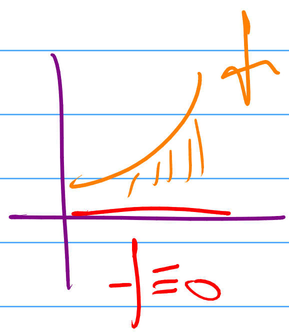
$x = \sqrt[n]{1/2} \in [0,1]$

$$= \frac{1}{4}$$

En limpio, $d(f_n, f_{2n}) \geq 1/4$ ¡$\forall n$!

Obs: con d_1 sí converge (f_n), a $f \equiv 0$; en efecto

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 x^n \, dx$$



$$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Recordar: $A \subseteq E$. $x \in E$ es pto de ac de A ($x \in A'$) si $(\forall \varepsilon > 0)$ $B(x,\varepsilon) \cap A\setminus\{x\} \neq \emptyset$.

(i.e. si $x \in \overline{A\setminus\{x\}}$)

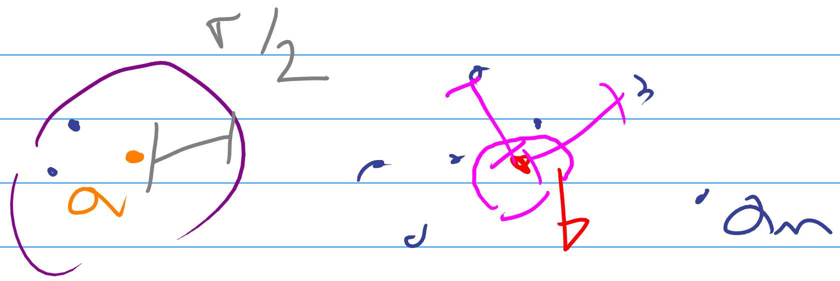
NOT: $A' = \{$ PTOS DE AC DE $A\}$

PROP: SEA $(a_n) \subseteq E$ CON $a_n \to a$, Y SEA $A = \{a_n : n \geq 1\} \subseteq E$.

ENTONCES $A' \subseteq \{a\}$

(PENSAR EJ EN LOS QUE DA $\{a\}$ / $\emptyset$)

DEM:



SUP QUE $\exists\, b \in A'$ CON $b \neq a$

SEA $r = d(a,b)$.

- TOMO n_0 CON $d(a_n,a) < r/2 \ \forall n \geq n_0$
- SEA $\tilde{\varepsilon} = \min\{d(a_n,b) : n < n_0,\ a_n \neq b\}$, Y SEA $\varepsilon = \min\{r/2, \tilde{\varepsilon}\}$

AFIRMO: $B(b,\varepsilon) \cap A \setminus \{b\} = \emptyset$.

SUP QUE $(\exists n)$ $a_n \in A \cap B(b,\varepsilon)$, $a_n \neq b$.

$\Rightarrow d(a_n,b) < \varepsilon$

- SI $m < m_0$, ENTONCES

$$d(a_m, b) < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon} \leq d(a_m, b), \text{ ABS!}$$

- SI $m \geq m_0$,

$$d(a,b) \leq \underbrace{d(a, a_m)}_{r/2} + \underbrace{d(a_m, b)}_{< \varepsilon \leq r/2} < r$$

$$= d(a,b), \text{ ABS!}$$

$\boxtimes$