ESPACIOS MÉTRICOS

- DIÁMETROS
- FRONTERA
- PUNTOS DE AC.

DEF: $A \subseteq X$. SEA

$$\mathcal{D} = \{ d(x,y) : x,y \in A \} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

A ES ACOTADO SI $\mathcal{D}$ ES ACOT.; EN TAL CASO,

$$\text{diám } A = \sup \mathcal{D}.$$

DIÁMETRO DE A

EJEMPLOS: CON $b > a$

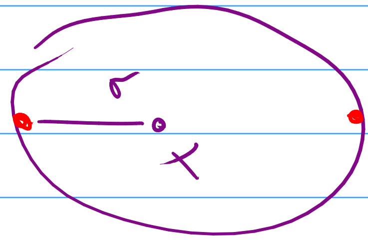
1) $\text{diám}((a,b)) = b-a$, PUES

$$\mathcal{D} = \{ y-x : a < x \leq y < b \} = [0, b-a)$$

2) E EM CUALQUIERA. ENTONCES

$\text{diám}(B(x,r)) \leq 2r,$

PUES:



si $y, z \in B(x,r)$,

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(z,x) < r + r = 2r$

$\rightsquigarrow \mathcal{D} \subseteq [0, 2r)$

3) d MÉTRICA DISCRETA

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

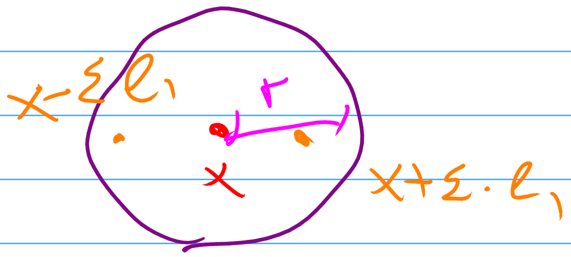
ENTONCES $B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & 0 < r \leq 1 \\ E, & r > 1 \end{cases}$

$\therefore \mathcal{D} = \begin{cases} \{0\}, & r \leq 1 \\ \{0,1\}, & r > 1 \end{cases},$

LUEGO $\text{diám}(B(x,r)) = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq 1 \\ 1, & r > 1 \end{cases}$

3) En $\mathbb{R}^n$ con d_2, si $B = B(x,r)$,

diám $B = 2r$:



$d_2(x \pm \varepsilon e_1, x) = \varepsilon < r$

si $\varepsilon < r$

$$d_2(x-\varepsilon e_1, x+\varepsilon e_1) = \sqrt{(2\varepsilon)^2} = 2\varepsilon$$

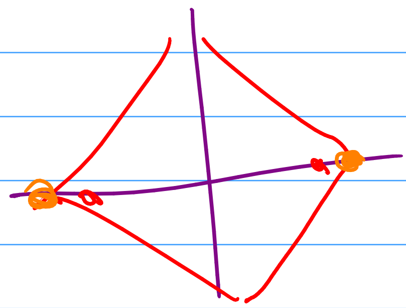
$\in B$ $\quad$ $\in B$

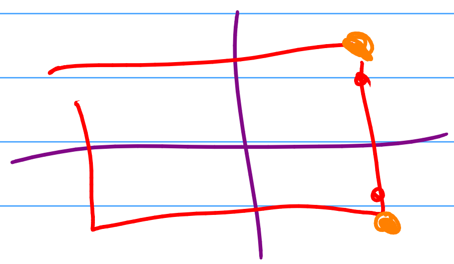
$\longrightarrow 2r$

$\varepsilon \to r^-$

$$\sqrt{(2\varepsilon)^2+0^2+\dots+0^2}$$

Obs: Lo mismo vale para d_1, d_∞





4) $E = C[0,1]$: sea $r>0$, sea $\varepsilon < r$,

sea $f \in E$. Así $d(f-\varepsilon, f+\varepsilon) = 2\varepsilon$

para d_1 ó d_∞

COMO $f \pm \varepsilon \in B(f,r)$,

$\rightsquigarrow$ $\text{diám}\, B(f,r) = 2r$

DEF: $A \subseteq E$. LA FRONTERA DE A ES

$$\partial A = \{x \in E : \forall r>0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset,\ B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset\}$$

$$= \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$$

EJEMPLOS:

1) EN $\mathbb{R}^n$ CON $d = d_1, d_2$ ó d_∞,

$$\partial \overbrace{B(x,r)}^{B} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) = r\} =: S(x,r)$$

- SI $d(y,x) < r$, COMO B ES ABIERTO

$(\exists \varepsilon)$ $\underbrace{B(y,\varepsilon) \subseteq B}_{\text{NO CORTA A } E \setminus B}$

$\rightsquigarrow$ $y \notin \partial B$

• Si $d(y,x)>r$ como $\overline{B}(x,r)$ es cerrada,

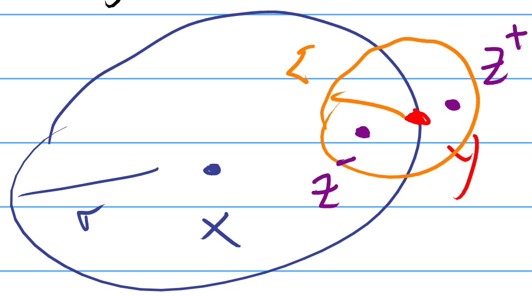
vale lo mismo: $\Rightarrow \{z : d(z,x)>r\}$ es abierto

$(\exists \varepsilon>0)$ si $z\in B(y,\varepsilon)$, entonces $d(z,x)>r$.

Luego $B(y,\varepsilon)\cap B(x,r)=\emptyset$

$\rightsquigarrow y\notin \partial B$

• Sea y con $d(y,x)=r$



Sea $\varepsilon>0$.

Sean $z^{\pm} = y \pm \delta(y-x)$ con $\delta>0$

• $d(y,z^{\pm}) = \begin{cases} \max_i \delta|y_i-x_i|, & d=d_\infty \\ \sum_i \delta|y_i-x_i|, & d=d_1 \\ \sqrt{\sum_i \delta(y_i-x_i)^2}, & d=d_2 \end{cases}$

"normas ∞, 1 y 2"

$= \delta\cdot d(y,x) = \delta r < \varepsilon$, si $\delta<\varepsilon/r$

$\rightsquigarrow z^{\pm} \in B(y,\varepsilon)$

- $d(z^{\pm},x) = \| y \pm \delta(y-x) - x \|$

$= \|(y-x) \pm \delta\, (y-x)\|$

PROP. DE $\|\cdot\|$

$= \|(1 \pm \delta)\,(y-x)\|$

$= (1 \pm \delta)\ \|y-x\| = (1 \pm \delta)\, r$

$< r$, si $\delta < 1$ (caso $-$)

$> r$ (caso $+$)

2) En $E = C([0,1])$,

$\partial(B(f,r)) = \{ g : d(g,f) = r \}$

¡Tiene! pues

¡

- $d_1(f,g) = \|f-g\|_1$, con

$\|h\|_1 = \int_0^1 |h|$

- $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$, con

$\|h\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |h(x)|$

3)

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

$(\forall A \subseteq E)$ $\partial A = \phi$ pues

- Si $x \in A$

$B(x, 1/2) = \{x\}$ $= \{y : d(y,x) = r\}$ $\forall r \notin \{0,1\}$

$\rightarrow B(x, 1/2) \cap E \setminus A = \phi$

- Si $x \notin A$

$B(x, 1/2) = \{x\}$

$\rightarrow B(x, 1/2) \cap A = \phi$

//