11. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

$\Rightarrow)$ x es aislado $\forall x \in E$

?

$\Rightarrow f$ es continua en x pues

Def de continuidad

$$f(\underbrace{B(x,\delta)}) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

Como x es aislado

$\Rightarrow \exists r > 0 / B(x,r) = \{x\}$

$\Rightarrow f(B(x,r)) = f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

pues es su centro

?

$\therefore f$ es continua, $\forall f$.

$\Leftarrow)$ Supongo toda f continua, con x_0 <u>no</u> aislado

$\Rightarrow \exists x_0 \in E, \exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \delta > 0$

$$f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq \underbrace{B(f(x), \varepsilon)}$$

Siempre $f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \; \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ debe darse que $\exists y \in B(x_0, \delta)$

¿?

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Hecho en otro archivo

13. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.

(b) Usando esto, rehacer los items (b), (d) y (g) del Ejercicio ~~6~~ 7 de la Práctica 3.

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

→ (b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.

→ (d) Probar que $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deducir que $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$.

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x, r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x, r)$.

→ (g) Probar que $\{y \in E : \ 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

a) $f(x) = d(x, x_0) \overset{\text{D.T.}}{\leq} d(x, y) + d(y, x_0)$

$$= d(x, y) + f(y)$$

$\Rightarrow f(x) \leq d(x, y) + f(y)$

$f(x) - f(y) \leq d(x, y)$

De la misma forma, puedo obtener

$f(y) - f(x) \leq d(y, x) = d(x, y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ ☆

Finalmente

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

si $d(x,y) < \delta \Rightarrow \underbrace{d(f(x), f(y))}_{} < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| \overset{\star}{\leqslant} d(x,y) < \delta = \varepsilon$$

elijo $\delta = \varepsilon$

$\boxtimes$

b) $B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < \varepsilon\}$

continua

$\Rightarrow$ como $(-\infty, \varepsilon)$ es abierto

$\Rightarrow d^{-1}(-\infty, \varepsilon)$ es abierto

d es continua

$\boxtimes$

d) $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$

continua

$\Rightarrow$ como $(-\infty, \varepsilon]$ es cerrado

$\left(\text{pues } \overline{(-\infty, \varepsilon]} = (-\infty, \varepsilon]\right)$

$\Rightarrow d^{-1}(-\infty, \varepsilon]$ es cerrado

d es continua

$\boxtimes$

g) es igual.

14. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.

i. Probar que g es continua

ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

(b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \to [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0 \ \forall x \in A$ y $h(x) = 1 \ \forall x \in B$.

(c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

15. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \to E'$ una función para la cual existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in E$. Probar que f es uniformemente continua.

(b) Deducir que las funciones f y g de los ejercicios 13 y 14 son uniformemente continuas.

a) Si $d(x_1, x_2) < \delta$

$\Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < c \cdot \delta$

$\Rightarrow$ si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$

Puedo afirmar que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}\right) /$

si $d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

$\forall x_1, x_2 \in E$

$\therefore$ f es uniformemente continua.

(δ solo depende de ε y un c fijo)

$\boxtimes$

b) $d'(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)|$

$$= \left| d(x, x_0) - d(y, x_0) \right|$$

$$\overset{\Delta}{\leq} d(x, y)$$

Δ $$d(x, x_0) \overset{DT}{\leq} d(x,y) + d(y, x_0)$$

$$\underbrace{d(x, x_0)}_{f(x)} - \underbrace{d(y, x_0)}_{f(y)} \leq d(x, y)$$

Haciendo lo mismo con $d(y, x_0)$

$$d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y)$$

$$\therefore \left| f(x) - f(y) \right| \leq d(x, y)$$

f es Lipschitz con constante 1.

Para $d(x, A)$ es muy similar:

42

As Qiaochu points out $d(x, y)$ is continuous for fixed x. You may like to see this as well, as this is a familiar result in Topology:

> If A is a non empty subset of a metric space (X, d) then the function f on X given by
>
> $$f(x) = d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$
>
> is continuous. Indeed,
>
> $$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$
>
> and thus f is uniformly continuous (use $\delta = \epsilon$ in any point).

To show this, let x and y be points in X, and p any point in A.

Then

$$d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p) \quad \text{(triangle inequality)}$$

and so

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, p)$$

as $d(x, A)$ is the infimum. But then $d(y, p) \geq d(x, A) - d(x, y)$ (for all p, obtained by subtracting from the previous inequality), so that $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y)$ (as $d(y, A)$ is the infimum). So : $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

Now reverse the roles of x and y to get $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$.

16. Para cada $r > 0$ estudiar la continuidad uniforme de la función

$$f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

$$d'(f(x), f(y)) = d'(\underbrace{\sqrt{x}}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\sqrt{y}}_{\in\mathbb{R}})$$

$$= |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$$

- Si $r \geq 1 \Rightarrow \sqrt{r} \leq r$

$$\leq |x - y| = d(x, y) \quad \checkmark$$

la diferencia es estrictamente más grande si $x \neq y$

- Si $r \in (0, 1)$:

$$\Rightarrow r < \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq |x - y| \quad ?$$

17. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

i. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y

ii. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $(-\infty, -\pi]$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

18. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'.

19. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

20. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.