Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.
(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$, la función identidad.
(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.
(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión, siendo (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$.

Aquí d_2 es la métrica euclídea usual, y δ es la métrica discreta.

¿Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos d_1 o d_∞?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}x^2 + (x-1)^2 y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos.} \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0, 1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0, 1)$.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

6. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.
(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

7. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

(a) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\big\}$ es cerrado.
(b) $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\big\}$ es cerrado.
(c) $\big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\big\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

9. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Sea $D \subseteq E$ un subconjunto *denso*, esto es, tal que $\overline{D} = E$. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Concluir que la función $R : C([0,1]) \to \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}$ dada por $R(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.

10. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E'.

11. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

13. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.

(b) Usando esto, rehacer los items (b), (d) y (g) del Ejercicio 6 de la Práctica 3.

14. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.

i. Probar que g es continua

ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

(b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \to [0,1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0\ \forall x \in A$ y $h(x) = 1\ \forall x \in B$.

(c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

15. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \to E'$ una función para la cual existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in E$. Probar que f es uniformemente continua.

(b) Deducir que las funciones f y g de los ejercicios 13 y 14 son uniformemente continuas.

16. Para cada $r > 0$ estudiar la continuidad uniforme de la función

$$f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

17. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

i. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y

ii. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $(-\infty, -\pi]$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

18. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'.

19. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

20. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.
