Probar

Rehago ejercicios vistos en clase 1 de Agosto 19

2) Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ acotado superiormente

entonces $s=\sup(A)$ está en A $\left(s \text{ es } \max(A)\right)$

Supongo que no es cierto:

Supongo que $s \notin A$

$$A = \{ a \in \mathbb{Z} : a < s \}$$

Si s es supremo

- es cota sup
- $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, s - \varepsilon < a < s$

En particular, si $\varepsilon = 1$

Como $a < s$ (pues $a \in A$ pero s no)

$\Rightarrow s - a > 0$

Lo quiero como epsilon

Volviendo a usar el argumento de antes

- $\forall \varepsilon > 0, \exists\, b \in A \,/\, s - \varepsilon < b < s$

En particular, vale para $\varepsilon = s - a$

$$\Rightarrow \exists\, b \in A \,/\, s - (s-a) < b < s$$

$$a < b < s$$

- Pero así obtuve 2 elementos distintos $a, b \in A \subseteq \mathbb{Z}$ acotados por $s-1$ y s.

- O sea, obtuve 2 enteros que distan menos de 1 entre sí:

$$|b-a| < |s-(s-1)| = 1$$

$$|b-a| < 1$$

Abs!

pues como $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq b$

$$\Rightarrow |b-a| > 1$$

$\therefore$ el supremo de A debe pertenecer a A

$$S = \sup(A) \in A$$

$\blacksquare$

3) Probar

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists!\, n \in \mathbb{Z} \ /$$

$$n \leq x < n+1$$

Dem

Debo probar:

$\boxed{1}$ Existencia

$\boxed{2}$ Unicidad

$\boxed{1}$

- $n = \lfloor x \rfloor$
- $n+1 = \lceil x \rceil$ (no lo usamos)

Idea:

- Armar un conjunto con todos los $k \in \mathbb{Z} / k < x$
- Quedarme con el supremo:

↳ Uso ej. anterior:

Si $A \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{Z}$

o sea

$$\sup(A) = \text{máx}(A)$$

$\Rightarrow n$ existe $\in \mathbb{Z}$

Con eso tengo la existencia.

sospechoso...

· Para la unicidad:

↳ Supongo 2 enteros distintos y llego a absurdo / que son el mismo.

Armo conjunto

$$A = \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}$$

Llamo

$$n = \sup A$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, $n+1 \in \mathbb{Z}$ pues $1 \in \mathbb{Z}$

Como $n+1 \in \mathbb{Z}$

y $n+1 \notin A$ pues n es $\sup A$ y $n < n+1$

(sería un absurdo)

$\Rightarrow$ $n+1 > x$ pues caso contrario, $n+1 \in A$

(sería el absurdo de arriba)

$\therefore$ obtuve

$$n \leq x < n+1$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Probé $\boxed{1}$, falta $\boxed{2}$.

$\boxed{2}$ Unicidad

Supongo que $\exists\, n, m \in \mathbb{Z}$ /

$$n \leq x < n+1$$
$$m \leq x < m+1$$

Si $n \neq m$ $\Rightarrow$ Puedo suponer sin pérdida de generalidad que $n < m$

(es indiferente si $<$ ó $>$)

Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m - n \geq 1$

$m \geq n + 1$

Abs! pues $n \leq x < n+1 \leq m$

$m \leq x < m+1$

o sea

$m \geq x$ y $m \leq x$

$\therefore n = m$

Lo que demuestra la unicidad.

$\blacksquare$

4) Sea $A = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \}$

Probar que A tiene inf. y supremo, y cuales son.

<u>Dem</u>:

Como $A \subseteq \mathbb{Q}$

y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin A$

estricto

$\Rightarrow A = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2} \}$

Propongo:

Lo llamo

- $\text{Ínf}(A) = 0 =: i$
- $\text{Sup}(A) = \sqrt{2} =: s$

Como $x \geq 0 \quad \forall x \in A$ (0 es cota inferior)

y $0 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / \; i \leq a < i + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Si el ínfimo es cero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, 0 \leqslant a < \varepsilon$$

Lo cual es verdadero si $a = 0 \in A$

$\therefore \inf A = 0$

- Falta probar que el supremo es $\sqrt{2}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$$

- $\sqrt{2}$ es cota superior ✓
- qvq es la mejor cota:

en este caso es estricto pues $\sqrt{2} \notin A$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \,/\, s - \varepsilon < a \leq s$$

Separo en 2 casos:

Ⓘ Caso trivial:

Si $s - \varepsilon \leqslant 0$ (pues $\varepsilon \geqslant s$)

$\Rightarrow$ elijo $a = 0 \in A$

Ⓘ Caso de interés:

Si $\varepsilon < s$,

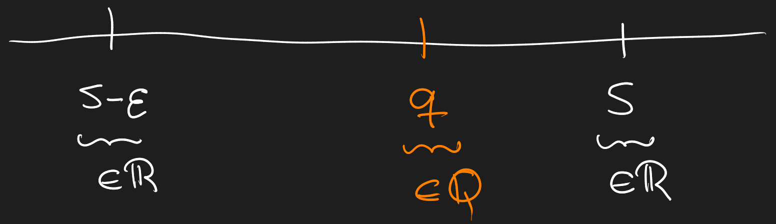
$\Rightarrow s - \varepsilon \in \mathbb{R}$

$s \in \mathbb{R}$ (recuerdo que $s = \sqrt{2}$)

y como $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon < s$

$\Rightarrow$ Por ejercicio 2b de la guía 1

2 (b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.



Sé que $\exists\, q \in \mathbb{Q} \,/\, s - \varepsilon < q < s$

y como $q > 0$ (pues caso II)

y $q < \sqrt{2}$ (pues $s = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow q \in A \subseteq \mathbb{Q}$

$\therefore$ probé que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A \,/\, s - \varepsilon < a \leq s$$

o sea, que $\sqrt{2} = \sup A$

$\blacksquare$