CARDINALIDAD I

RECORDAR: X ES NUMERABLE SI $\exists f : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$
BIYECTIVA.

EJEMPLO: $X = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$ ES NUM:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} X$$

(TEÓRICA) $\quad k \longmapsto 2^k$

OTRA MANERA: $X \subseteq \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \#X \leq \#\mathbb{Q} = \aleph_0$;

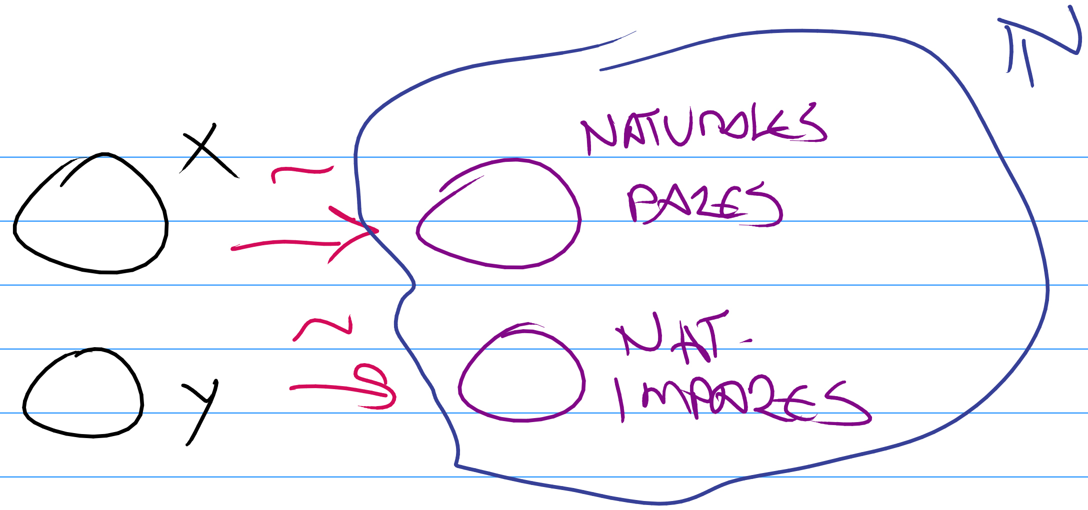
X NO ES FINITO $\Rightarrow \aleph_0 \leq \#X$

$\therefore X$ NUM

PROP: X, Y NUM $\Rightarrow X \cup Y$ NUM

DEM:
$$X \xrightarrow[f]{\sim} \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}$$
$$m \longmapsto 2m$$

$$Y \xrightarrow[g]{\sim} \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}-1$$
$$m \longmapsto 2m-1$$



- SUP $X \cap Y = \emptyset$.

SEAN $\sigma : X \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N}$ BIY

$\tau : Y \xrightarrow{\sim} 2\mathbb{N} - 1$

DEFINO $\nu : X \cup Y \to \mathbb{N}$

$$\nu(z) = \begin{cases} \sigma(x), & z = x \in X \\ \tau(y), & z = y \in Y \end{cases}$$

ASÍ, ν ES BIY ✓

(SU INVERSA: $\nu^{-1}(2m) = \sigma^{-1}(m)$;
$\nu^{-1}(2m-1) = \tau^{-1}(m)$)

- EN GRAL: $X \cup Y = X \cup \underbrace{(Y \setminus X)}_{=: Y'}$

ASÍ, $X \cap Y' = \emptyset$ → SI Y' NUM, LISTO
↘ ¿SI NO?

QVQ X NUM, Y' FINITO, $X \cap Y' = \emptyset$

$\Rightarrow X \cup Y'$ NUM

$X \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

$Y' \xrightarrow{\sim} \{-k, \dots, -1, 0\}$

$$\mathbb{Z}_{-k} = \{x : x \geq -k\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$$

$$x \longmapsto x + (k+1)$$

EJ: REHACER, USANDO EL S

PROP: $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CON X_n NUM

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ES NUMERABLE

(EJ. 9)

CORO: X, Y NUM $\Rightarrow X \times Y$ NUM

DEM: $X \times Y = \bigcup_{x \in X} \underbrace{\{x\} \times Y}_{\sim Y}$

$x \in X$ NUM

$\sim Y$ NUM

$\{x\} \times Y \xrightarrow{\sim} Y$

$(x, y) \longmapsto y$

$(x, y) \longleftarrow y$

$\square$

$X \xrightarrow{f} \mathbb{N}$

$Y \xrightarrow{g} \mathbb{N}$

$X \times Y$ $\quad (x,y)$

$\downarrow \sim \quad \downarrow$

DEM ALTERNATIVA: BVQ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(f(x), g(y))$ ES NUM;

EN EFECTO, $(n, m) \longmapsto 2^{n-1}(2m-1)$

ES BIY (EJERCICIO) $\boxtimes$

COROL: $X_1, \ldots, X_n$ NUM $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ NUM

INDUCCIÓN

¡NO VALE PARA PROD INFINITOS!

EJEMPLOS:

1) $A = \{\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ ES NUM

$$f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to A \quad \text{ES SOBRE}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \aleph_0 \geq \#A$; COMO A ES $\underbrace{\text{INFINITO}}$, LISTO

$\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \{\alpha\sqrt{2} : \alpha \in \mathbb{Q}\} \subseteq A$

f ES BIYECTIVA (NOTA DE COLOR)

AFIRMO: $f(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0)$

ALCANZA: PENSAR

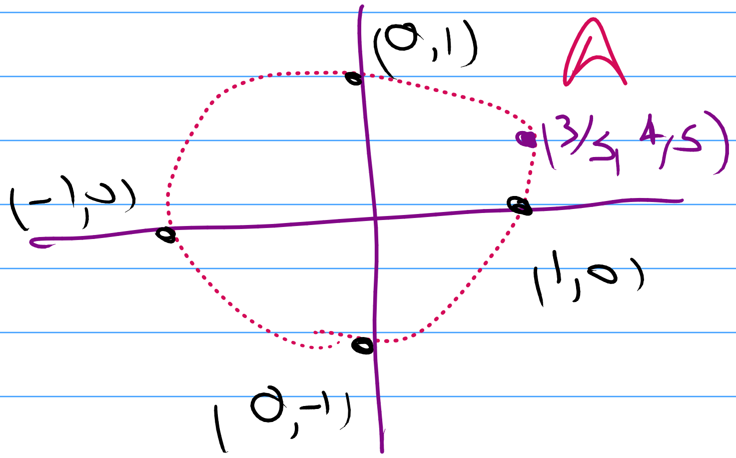
EN EFECTO, $0 = f(\alpha,\beta) = \alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{3}$

$\Rightarrow \alpha\sqrt{2} = -\beta\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\alpha^2 = 3\beta^2$ ABS! T.F. ARITM.

SI $(\alpha,\beta) = (0,0)$

2) $\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : \alpha^2+\beta^2=1\} = A$



$3^2+4^2=5^2$

$\Downarrow$

$(3/5)^2+(4/5)^2=1$

$A \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \Rightarrow \#A \le \aleph_0$

VER

¿A FINITO O INFINITO? ES INFINITO:

$$\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}\right)\in A \quad \forall m,n\in\mathbb{Z},\ (m,n)\neq(0,0)$$

3) $\mathbb{Q}[X]$ = POLINOMIOS CON COEF RACIONALES

SEA $\mathbb{Q}_m[X] = \{f \in \mathbb{Q}[X] : \text{gr} f \leq m\} \cup \{0\}$

ENTONCES $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{Q}_m[X]}_{¿\text{NUM}? \text{ SI}}$

$$\overbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}^{m+1 \text{ VECES}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_m[X]$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \longmapsto \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X^i$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_m X^m$$

4) DEF: $z \in \mathbb{C}$ ES ALGEBRAICO SI

$\exists \; f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}, \; f(z) = 0$ $\in \mathbb{Q}[X]$

EJ:
- SI $\alpha \in \mathbb{Q}$, α ES RAÍZ DE $f = \overline{X - \alpha}$
- SI $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{m}$ ES RAÍZ DE $f = X^2 - m$
- i ES RAÍZ DE $X^2 + 1$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ES RAÍZ DE $X^4 - 10X^2 + 1$

(π NO ES ALGEBRAICO)

SEA A EL CONJ DE NÚMEROS ALGEBRAICOS

AFIRMO: A ES NUMERABLE

(Y $A \cap \mathbb{R}$ TAMBIÉN)

Dem:

$$A = \underbrace{\bigcup_{f \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}}}_{\text{NUMERABLES}} \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}}_{\text{FINITO}}$$

$\Rightarrow A$ NUM;

$\mathbb{Q} \subseteq A \cap \mathbb{R}$

$\Rightarrow \aleph_0 \leq \# A \cap \mathbb{R} \leq \# A = \aleph_0$

$\boxtimes$