Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

(a) $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

(b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

(c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

(e) $C([0,1])$ con $d_\infty(f,g) = \max_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|$.

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

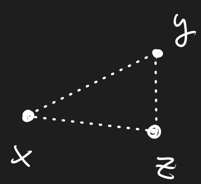
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Espacios Métricos

$\boxed{1}$ $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \quad$ y $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

$\boxed{2}$ $d(x,y) = d(y,x)$

$\boxed{3}$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$



---

a)

1) ✓

2) $|x-y| = |(-1)(y-x)|$

$= |-1|\,|y-x|$

$= |y-x|$ ✓

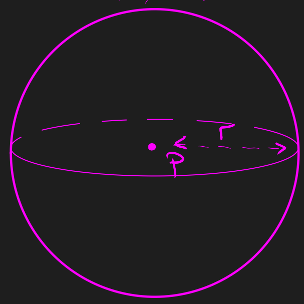
3) $|x-y| = |x-z+z-y|$

$$\leq |x-z| + \underbrace{|z-y|}_{=|y-z|} \quad \checkmark$$

b) (b) $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$.

1) ✓
2) ✓
3) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \|x-y\|$

$B(p,r)$ $\quad p\in\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^3)$



$$\|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \qquad z\in\mathbb{R}^n$$

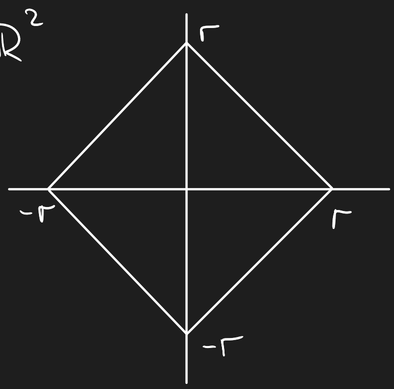
↑ Cauchy-Schwartz.

$\boxtimes$

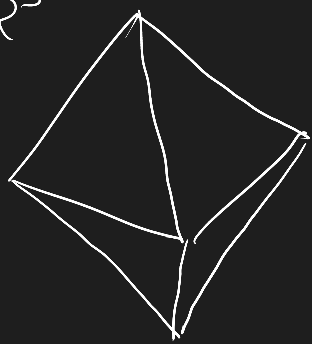
c) (c) $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

1) ✓
2) ✓
3) ✓

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



(d) $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

1) ✓

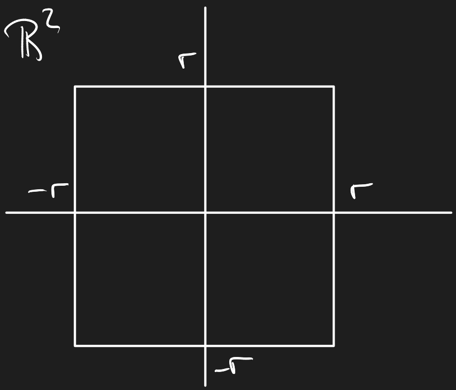
2) ✓

3) $\max |x_i - y_i| \leq \max \{ |x_i - z_i| + |y_i - z_i| \}$

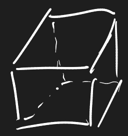
$\parallel$

$\max \{ |x_i - z_i| \} + \max \{ |y_i - z_i| \}$ ✓

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



(e) $C([0,1])$ con $d(f,g) = \max_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|$.

1) ✓

2) ✓

3) ✓

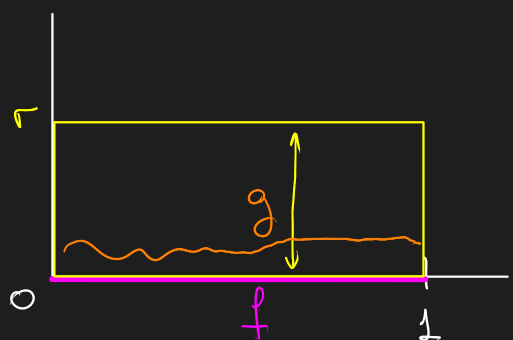
$E = \mathcal{C}([0,1])$

$B(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) < r \}$

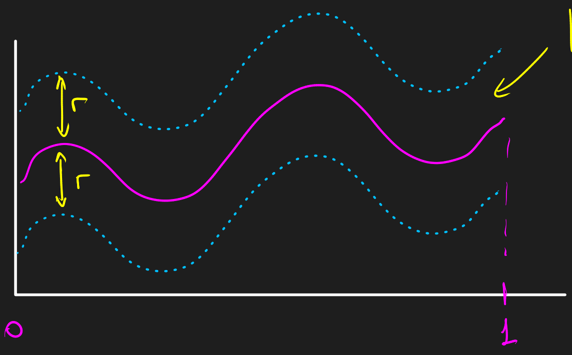
reescribo

$B(f,r) = \{ g \in E : d(f,g) < r \}$

• digo $f(t) \equiv 0$



- $f(t)$ libre



las $g \in B(f,r)$ están acá adentro

(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) ✓

2) ✓

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Caso 1 : $x = y$

$0 \leq$ Posi + Positivo ✓

Caso 2 : $x \neq y$

$1 \leq 1$ ó 2 ✓

$\boxtimes$

$B(\vec{o}, 1)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$\nwarrow d(\vec{o}, y) < r$

$B(\vec{o}, 2)$

$d(\vec{o}, y) < 2 \leftarrow$ siempre $\forall y \in \mathbb{R}$

Todo E

2. Decidir cuáles de las siguiente funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en $\mathbb{R}$:

(a) $d(x,y) = (x-y)^2$ (b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ (c) $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

$d_a(x,y) = (x-y)^2$

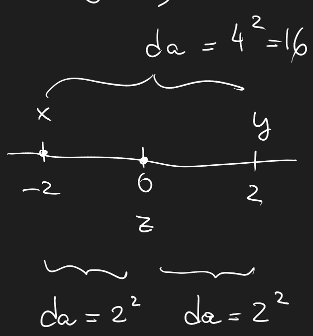
1) ✓

2) ✓

3) $d_a(x,y) \overset{?}{\leq} d_a(x,z) + d_a(z,y)$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

quiero $>$



Si: $z = \frac{x+y}{2}$

$\Rightarrow$ la desigualdad triangular no vale

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} \left(x-\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{?}{\leq} \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$$

$$(x-y)^2 \overset{!}{>} \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$\therefore$ d_a no cumple la desigualdad triangular

$\Rightarrow$ no es distancia.

b) $d_b(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

$\boxed{1}$ ✓

$\boxed{2}$ ✓

$\boxed{3}$ $d_b(x,y) \overset{?}{\leq} d_b(x,z) + d_b(z,y)$

$$d_b(x,y)^2 = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{d_b(x,z)^2} + \underbrace{|z-y|}_{d_b(z,y)^2}$$

$$d_b(x,y)^2 \leq d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2$$

$$d_b(x,y) \leq \sqrt{d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

CA:

$$\sqrt{a+b} \overset{?}{\leq} \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{con } a,b \geq 0$$

Completo cuadrado:

Como $2\sqrt{a.b} > 0$

$$\Rightarrow a+b \leq \underbrace{a + 2\sqrt{a.b} + b}_{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$\Rightarrow a+b \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$\overset{a,b\geq 0}{\Rightarrow} \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Probé lo que quería

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \quad \checkmark$$

$\therefore$ d_b es distancia.

c) $d_c(x,y) = |x^2 - y^2|$

Contra ej:

$$d_c(-2,2) = |(-2)^2 - 2^2|$$

$$= 0$$

Pero $-2 \neq 2$

$\therefore$ no es una métrica.

3. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ las distancias d_1, d_2 y d_∞. Denotemos por $B_1(x,r)$, $B_2(x,r)$ y $B_\infty(x,r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n d_\infty(x,y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.

a) $d_\infty(x,y) = \sup\left\{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \right\}$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$d_\infty \le d_2$) $\quad D := \left\{ |x_i - y_i| : i \in [1,n] \right\}$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\underbrace{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}_{\text{elementos de } D \text{ al cuadrado}}}$$

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2$ es alguno de $\uparrow$

$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 = (x_i - y_i)^2$ para algún $i \in [1,n]$

Como son todos terminos $(x_j - y_j)^2 \ge 0 \quad \forall j \in [1,n]$

$$\Rightarrow \left(d_\infty(x,y)\right)^2 \overset{\text{términos } \ge 0}{\le} |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$$

Tomo raíz (términos ≥ 0)

$$\Rightarrow \quad d_\infty(x,y) \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)}$$

$d_2 \leq d_1$)

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

elevo al $\square$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right)^2$$

Si $a_i := |x_i-y_i|$

$$\sum a_i^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i . a_j$$

Nota que si $i=j \Rightarrow a_i^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_i . a_j$$

Como $a_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

Obtuve que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + S \qquad \text{con } S \geq 0$$

$\therefore$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^2$$

todo >0

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\therefore \quad \boxed{d_2(x,y) \leq d_1(x,y)}$$

$d_1 \leq n \cdot d_\infty$

$$d_\infty(x,y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$D := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x,y) \in D$$

además

$$d_\infty(x,y) \geq a \in D$$

pues $d_\infty(x,y) = \sup D$

$$\Rightarrow \quad d_\infty(x,y) \geq |x_i - y_i| \quad \forall i \in [1,n]$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y)}_{= n \cdot d_\infty(x,y)}$$

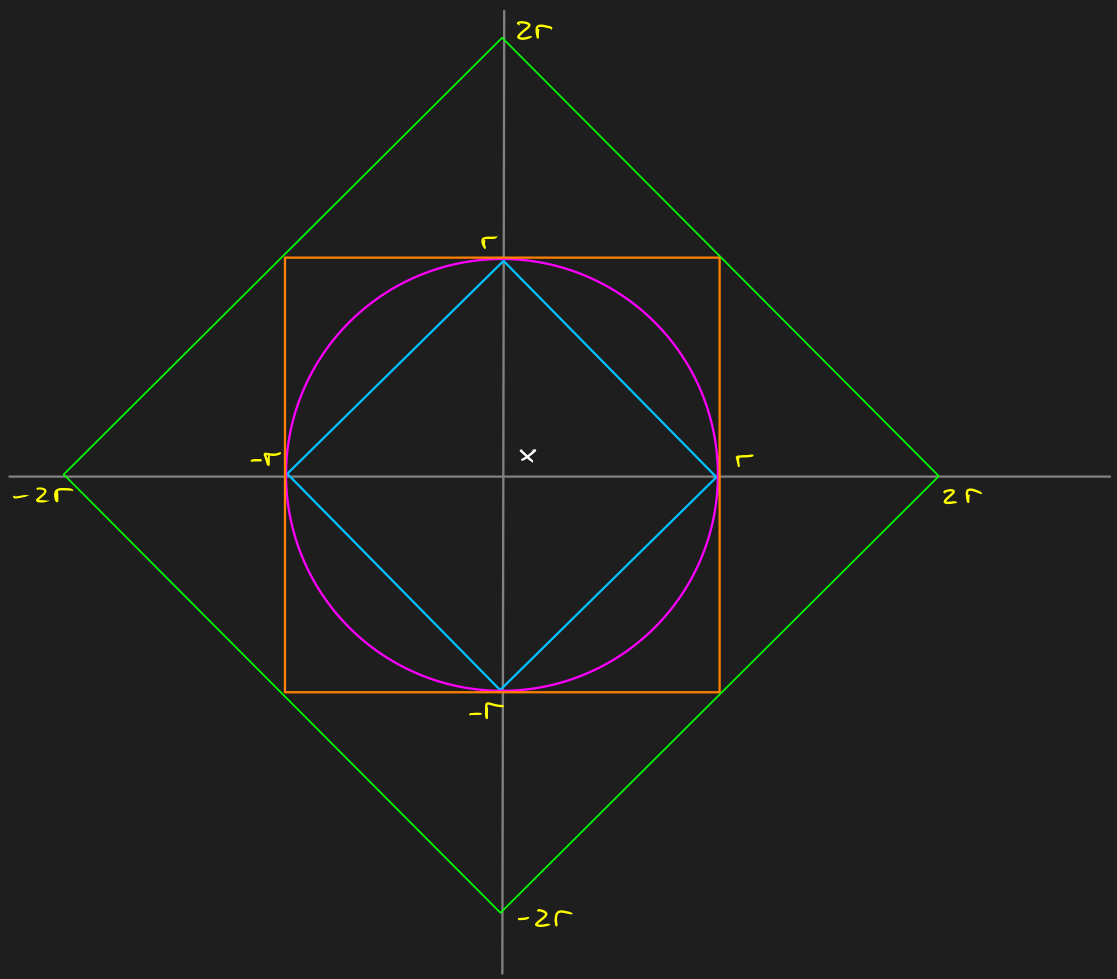
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot d_\infty(x,y)$$

$$\boxed{d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$$\therefore \quad \boxed{d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)}$$

$\blacksquare$

(b) Deducir de (a) que $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r) \subseteq B_1(x,nr)$.



Como $d_2 \leq d_1 \quad \forall x,y$

en particular

$\Rightarrow \quad d_2 \leq d_1$ para todo $x,y \in B_{d_2}(x,r)$

$$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in E : d_2(x,y) < r \}$$

$$B_{d_1}(x,r) = \{ y \in E : \underbrace{d_1(x,y)}_{d_2 \leq d_1} < r \}$$

$$\Rightarrow \quad B_{d_1}(x,r) \subseteq B_{d_2}(x,r)$$

Pues para un mismo r, los $y \in B_{d_1}$ estarán en B_{d_2} (pues si miden menos de r con $d_1 \Rightarrow$ miden todavía menos con d_2), pero no así al revés, pues habrá $y \in B_{d_2}$ que midan más que r con d_1.

$B_2 \overset{?}{\subseteq} B_\infty)$

$$B_{d_2}(x,r) = \{y \in E : d_2(x,y) < r\}$$

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{y \in E : \underbrace{d_\infty(x,y)}_{\text{de a) obtuve}} < r\}$$

$$d_\infty \leq d_2$$

$$\Rightarrow B_{d_2}(x,r) \subseteq B_{d_\infty}(x,r) \quad \checkmark$$

$B_\infty \subseteq B_1(x, n.r))$

- $B_{d_\infty}(x,r) = \{y \in E : d_\infty(x,y) < r\}$
- $B_{d_1}(x,r) = \{y \in E : d_1(x,y) < n.r\}$

Se de a) que

$$d_1 \leq n.d_\infty$$

reescribo

$$B_{d_\infty}(x,r) = \{y \in E : n.d_\infty(x,y) < n.r\} \quad n > 0$$

$$B_{d_1}(x, n.r) = \{y \in E : d_1(x,y) < n.r\}$$

$\Rightarrow$ como $d_1 \leq n.d_\infty$

$$B_{d_\infty}(x,r) \subseteq B_{d_1}(x, n.r) \quad \checkmark$$

4. Considerar el conjunto $\mathbb{Q}$ en el espacio métrico $\mathbb{R}$. Hallar $\mathbb{Q}^\circ$ y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0, 1]$

(b) $(0, 1)$

(c) $\mathbb{Q}$

(d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(e) $\mathbb{Z}$

(f) $[0, 1) \cup \{2\}$

(g) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(h) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

6. Consideremos en el espacio $C([0,1])$ las métricas d_∞ y d_1 dadas por

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

(a) Sea $A = \{f \in C([0,1]) : f(0) > 0\}$. Probar que A es abierto para d_∞ pero que no lo es para d_1.

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \leq M \cdot d_1(f,g)$ para todas $f, g \in C([0,1])$.

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.

(d) Probar que $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deducir que $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$.

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x, r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x, r)$.

(g) Probar que $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

a) $A := \{x\}$

Veo clausura

- Si $x \in A$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ pues $B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

- Si $x \in A$, $y \notin A$

$\Rightarrow d(x, y) > 0$ pues $x \neq y$

Como x es el único elemento de A

$\Rightarrow B\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right) \cap A = \emptyset \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$

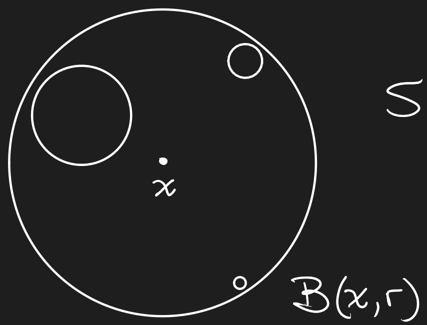
$\therefore y \notin \overline{A} \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$

$\Rightarrow \overline{A} = \{x\} = A$

$\therefore \{x\}$ es cerrado.

$\blacksquare$

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.



Sea $a \in B(x,r)$

$\Rightarrow 0 < d(a,r) < r$

$\Rightarrow B\left(a, \frac{d(a,r)}{2}\right) \subset B(x,r)$

$\therefore B(x,r)$ es un conjunto abierto.

$\blacksquare$

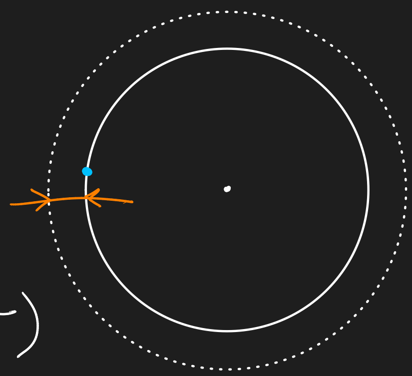
(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

Sea $a \in \overline{B(x,r')}$ Mal!

$\Rightarrow 0 \leq d(a,x) \leq r' < r$

$\Rightarrow d(a,x) < r$

$\Rightarrow B\left(a, \frac{r-r'}{2}\right) \subset B(x,r)$



$\cancel{\blacksquare}$

(d) Probar que $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

- Sea $a \in \overline{B}(x,r)$

$\Rightarrow B(a,r') \cap \overline{B}(x,r) \neq \phi \quad \forall r' > 0$

- Sea $a \in \overline{B}(x,r)$, $b \notin \overline{B}(x,r)$

$\Rightarrow$ Como $a \neq b$

$0 < d(a,b) \leq r$

$\Rightarrow$ Afirmo que si $a' \in \partial \overline{B}(x,r)$

y $a_{min} = \operatorname{argmin} \{ d(a',b) : a' \in \partial \overline{B} \}$

?

existe pues $\partial \overline{B} \subseteq \overline{B}$

$B\left(b, \frac{d(a',b)}{2}\right) \cap \overline{B}(x,r) = \phi$

La otra es tomar complemento de la Bola

$\overline{B}^c(x,r) = \{ y \in E : d(x,y) > r \}$

$\Rightarrow \forall b \in \overline{B}^c(x,r)$

$\rightarrow d(a',b) > r$

$?$

$\rightarrow B\left(b, \frac{d(a',b)}{2}\right) \cap \overline{B} = \phi$

$\subseteq \overline{B}^c$

$a' \in \overline{B}(x,r) \,/\, d(a',b) = \min\{d(a,b) : a \in \overline{B}\}$

$?$

$\therefore \overline{B}^c$ es abierta

8. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$. Probar que:

(a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.

(b) $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$.

¿Son ciertas las igualdades $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ y $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

9. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Probar que:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

10. Sean (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E.

(a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

(b) Probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.