1	2	3	4	Calificación

Análisis Avanzado - Primer parcial

13/05/2021

---

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y no vacío. Probar que si A no tiene máximo, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ estrictamente creciente tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A).$$

2. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dado por

$$\mathcal{X} = \{E \subseteq \mathbb{N} : \text{ existen } p \text{ primo y } m \in \mathbb{N} \text{ tales que } \#E = p^m\}.$$

Hallar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{X}$.

3. Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos acotados no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe $x \in E$ tal que toda bola centrada en x contiene a algún A_n.

4. Sean $(E, d), (E', d')$ espacios métricos. Sea $f : E \to E'$ continua tal que $f^{-1}(K')$ es compacto para todo $K' \subseteq E'$ compacto.

Probar que $f(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq E$ cerrado.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.