Leandro Carreira
669/18

6. Consideremos en el espacio $C([0,1])$ las métricas d_∞ y d_1 dadas por

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

(a) Sea $A = \{f \in C([0,1]) : f(0) > 0\}$. Probar que A es abierto para d_∞ pero que no lo es para d_1.

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \leq M \cdot d_1(f,g)$ para todas $f,g \in C([0,1])$.

a) $\boxed{d_\infty}$:

Obs: Esto mismo demuestra Vicky en teórica 1 de Funciones Continuas, pero acá (todavía) no tenemos propiedades de continuidad para usar.

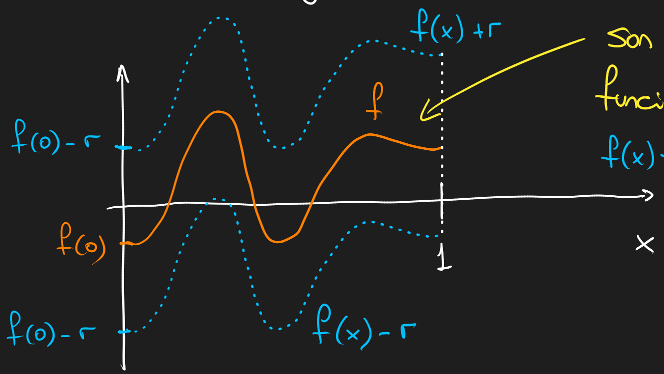
Si X abierto

$\Rightarrow$ • $X = X^\circ$

• $\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0 \,/\, B(x,\varepsilon) \subseteq X$

Con $E = \mathcal{C}[0,1]$, con $f \in E$ y d_∞

$\Rightarrow$ $B(f,r)$:
$(r>0)$



son todas las funciones entre $f(x)-r$ y $f(x)+r$

A es subconjunto de $\mathcal{C}[0,1] \,/\, f(0) > 0 \quad \forall f \in A$

qvq

$\forall f \in A \subseteq \mathcal{C}[0,1], \exists \varepsilon > 0 \,/\, B(f,\varepsilon) \subseteq A$

• Como $\mathcal{C}[0,1]$ es el espacio de las funciones continuas

$\Rightarrow \mathcal{B}(f, \varepsilon)$ está siempre contenida en $\mathcal{C}[0,1]$,

pues cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ existe en $E = \mathcal{C}[0,1]$

(E es siempre abierto)

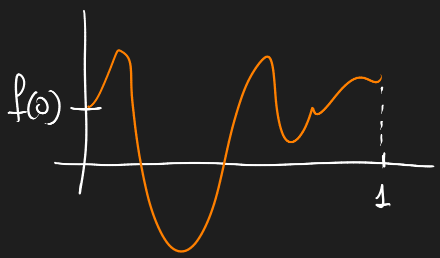
• Falta ver que cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ existe en $A \subset E$

estricto

• Para eso, veo que cada $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ cumpla $g(0)>0$

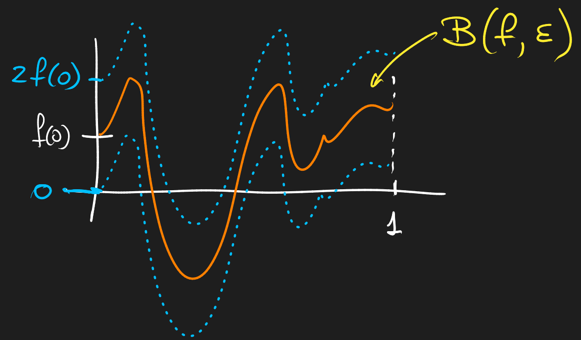
Como $f \in A$

$\Rightarrow f(0)>0$



Con lo que puedo elegir un epsilon que me asegure que $g(0)>0$

$\Rightarrow$ elijo $\varepsilon = f(0)$



Como todas las $g \in \mathcal{B}(f,\varepsilon)$ son continuas en $[0,1]$

y además

$$f - f(0) < g < f + f(0)$$

evalúo
$$\Rightarrow \quad f(0) - f(0) < g(0) < f(0) + f(0)$$

$$0 < g(0) < 2f(0)$$

$\Rightarrow B(f, \varepsilon) \subset A \quad \forall f \in A$

$\therefore$ A es Abierto

$\boxtimes$

Obs :

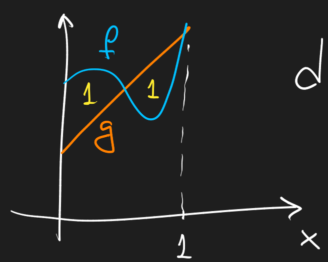
Tomando $\varepsilon = \frac{f(0)}{2}$ tal vez sea más claro de ver gráficamente.

$\boxed{d_1}$ Para que A sea abierto, debe pasar que para cada f en A, debe haber al menos una bola con centro en f completamente contenida en A.

Si encuentro una f particular, tal que todas sus bolas (para todos sus radios) contengan al menos alguna g que no esté en A, entonces encontré una f en A que no tiene bolas en A.

O sea, como f está en A pero no es punto interior, entonces A ≠ A°

- Busco la f



$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= 1 + 1 = 2$$

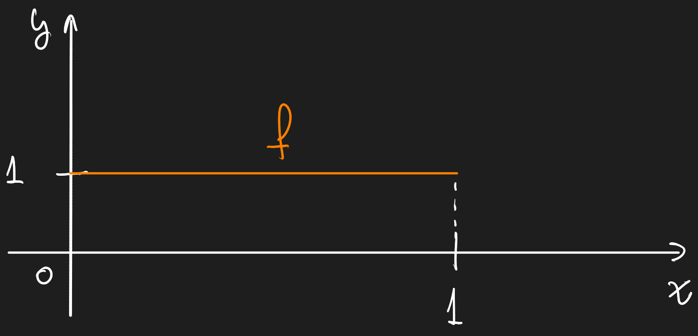
Busco ↓

$< r \leftarrow$ radio de la bola $\quad \forall r > 0$

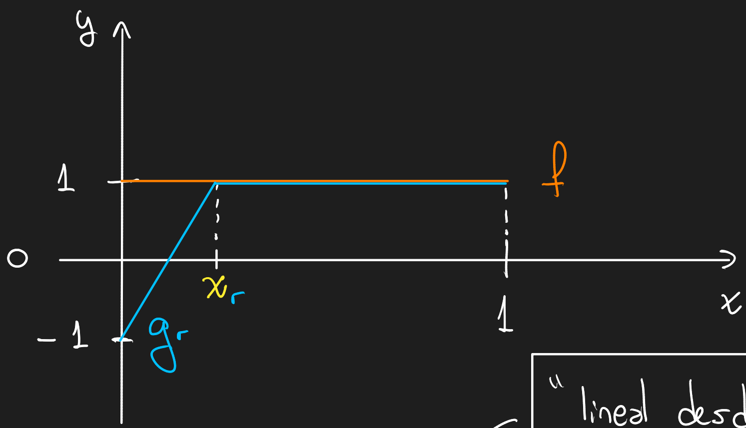
con

$$B(f,r) = \{ g \in E : d_1(f,g) < r \}$$

- De entre todas las $f \in A$, elijo $f(x) \equiv 1$



- Elijo una g_r particular que pertenece a $B(f, r)$

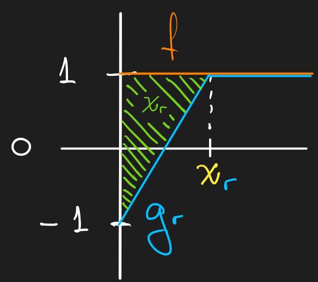


"lineal desde $y = -1$ hasta 1"
Notar que $g_r(0) = -1$

Con $g_r(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x_r}\cdot x - 1 & \text{si } x \in [0, x_r] \\ 1 & \text{si } x \in (x_r, 1] \end{cases}$

Cuya distancia 1 a $f(x)$:

$$d_1(f, g) = \frac{2 \cdot x_r}{2} = x_r$$



- Si para cada $g_r(x)$ tomo como $x_r = \frac{r}{2}$

Entonces puedo asegurar que $g_r(x) \in B(f, r)$ $\forall r > 0$

Pero como $g_r(0) = -1$ $\forall r > 0$

$\Rightarrow \quad g_r(0) \notin A$

$\therefore \quad B(f,r) \not\subseteq A$

$\therefore$ como $f \in A$ pero $f \notin A^\circ$

$\Rightarrow \quad A \neq A^\circ$

$\therefore \quad A$ no es abierto

$\blacksquare$

(b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f,g) \leq M \cdot d_1(f,g)$ para todas $f, g \in C([0,1])$.

Siempre puedo encontrar f, g continuas

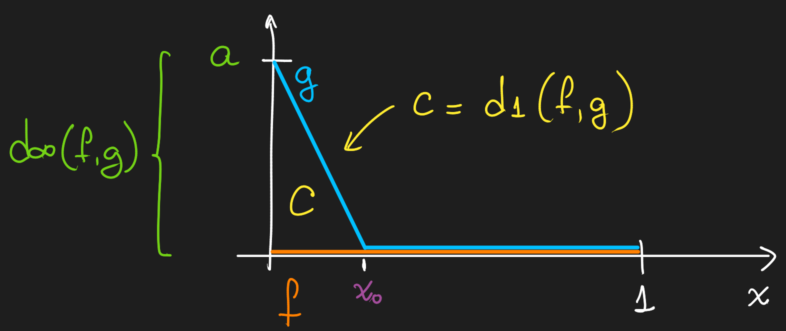
a distancia 1 lo más pequeña que desee ("iguales en casi todos sus puntos")

y a distancia ∞ lo más grande que quiera ("muy distintas en pocos puntos")

Por ejemplo

$f \equiv 0$

$g =$ "triángulo de área c y altura a hasta x_0, y luego 0"



Con esto y modificando x_0, a y c puedo lograr que:

- Si $M \geq 1$:

x_0 bien cerca de 0

$$d_1(f,g) < \frac{1}{M}$$

y que

$$d_\infty(f,g) > 1$$

triangulo de altura $a \geq 1$

entonces

$$d_\infty(f,g) > M \cdot d_1(f,g) > M \cdot \frac{1}{M} = 1$$

$$d_\infty(f,g) > 1 \quad \checkmark$$

- Si $0 < M \leq 1$:

$$d_1(f,g) = 1$$

y

$$d_\infty(f,g) > 1$$

Logrando lo mismo que en caso anterior.

Obs:

Tomando $d_1(f,g) = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$ no sería necesario separar en casos para M, pero puede no ser tan clara la deducción.