

Práctica 2

Recordar: Dada $f : X \rightarrow Y$ y dados $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$, se tiene que:

- (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
 - (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
 - (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
 - (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
 - (e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva vale la igualdad.
 - (f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Si f es suryectiva vale la igualdad.
 - (g) $X \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(Y \setminus D)$.
-

1. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \rightarrow B$ biyectiva. Probar que \sim es una relación de equivalencia.
2. Sean A y B conjuntos. Probar que:
 - (a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
 - (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
 - (c) $A \sim B \implies \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.
3. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.
4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:
 - (a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$
 - (b) $5\mathbb{Z}$
 - (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
 - (d) $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$
5. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.
6. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.
 - (a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.
 - (b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.
7. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.
 (b) Escribir a \mathbb{N} como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.
8. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

- (a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:
- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
 - $\bigcup_{n \leq m} B_n = \bigcup_{n \leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- (b) Probar que toda sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.
9. (a) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable.
- (b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.
Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.
10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.
11. Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.
12. Sea c el cardinal de \mathbb{R} . Probar:
- (a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.
- (b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.
13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A = \{\phi : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ funciones}\}$.
- (b) Probar que $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0, 1]$. ¡Ojo! la escritura no es única.
- (c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
14. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.
15. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (b) Calcular el cardinal de $[0, 1] \times [0, 1]$.
- (c) Calcular el cardinal de \mathbb{R}^k para cada $k \in \mathbb{N}$.
16. Calcular el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.
17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:
- (a) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$.
- (b) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.
18. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i \in I}$ indexada por I tal que
- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$.
 - $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- Probar que I es contable.
- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.