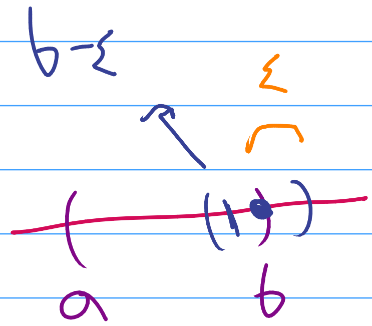
ESPACIOS MÉTRICOS II

RECORDAR: X e.m., $A \subseteq X$

- $\overline{A} = \{x \in X : (\forall r > 0)\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$
- $A^{\circ} = \{x \in A : (\exists r > 0)\ B(x,r) \subseteq A\}$

EJEMPLOS:



1) $\overline{(a,b)} = [a,b]$

- $\supseteq$): $\forall x \in (a,b)$, $x \in \overline{(a,b)}$;

CONSIDEREMOS b. DADO ε:

$$\frac{b + b - \varepsilon}{2} = b - \varepsilon/2 \in \underbrace{(a,b) \cap B(b,\varepsilon)}$$

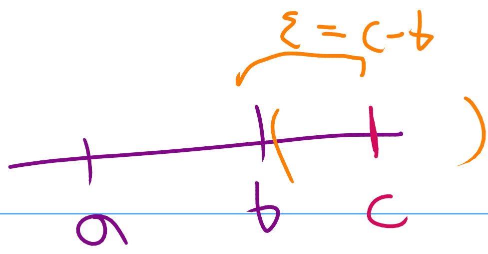
∴ ESTO ES NO VACÍO

SOLO SI

$b - \varepsilon/2 > a$, etc

$2(b-a) > \varepsilon$

- c) Sea $c \notin [a,b]$;



digamos $c > b$.

Así, $\underbrace{B(c, c-b)}_{=(b,\ 2c-b)} \cap [a,b] = \emptyset$ ///

Conclusión: $[a,b]$ es cerrado

(pues $[a,b] = \overline{A}$, para cierto A; o bien $\mathbb{R} \setminus [a,b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{Abiertos}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{Abiertos}}$)

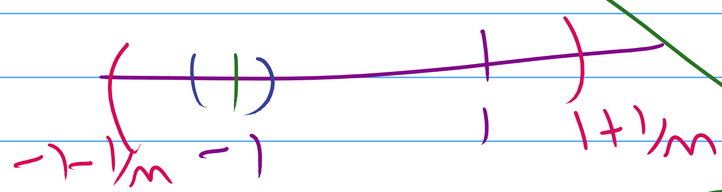
→ $-1 \notin [-1,1]^{\circ}$

No es abierto

Abiertos

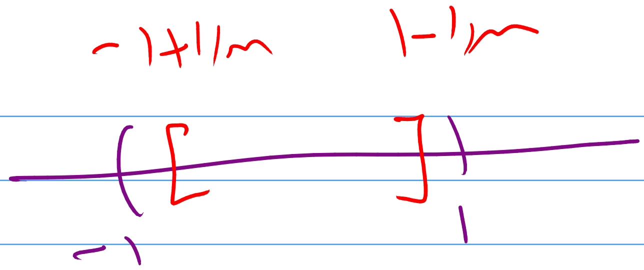
Obs:

- $\underbrace{[-1,1]}_{\text{No es abierto}} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(-1-1/m,\ 1+1/m\right)}_{\text{Abierto}}$



Pues esto es infinito

- $\underbrace{(-1,1)}_{\text{No es cerrado}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\left[-1+1/m,\ 1-1/m\right]}_{\text{Cerrados}}$



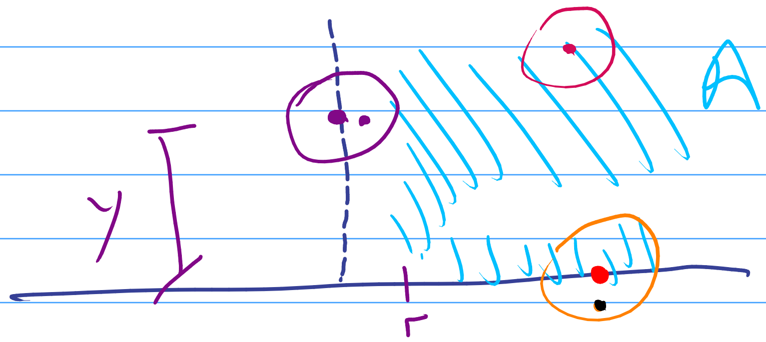
2) $(a,b]$ NO ES ABIERTO $\quad (a,b]^{\circ} = (a,b)$

NI CERRADO $\quad \overline{(a,b]} = [a,b]$

$\downarrow$

$b > a$

3) SEA $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x>0, \ y \geq 0\}$



AFIRMO:

$$\bar{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\} =: F$$

• F ES CERRADO: BVQ

$\mathbb{R}^2 \setminus F$ ES ABIERTO; DE HECHO

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x<0 \text{ ó } y<0\}$$

$$= \underbrace{\{x<0\}}_{\text{ABIERTOS}} \cup \underbrace{\{y<0\}}_{\text{ABIERTO}} \quad \text{ES ABIERTO}$$

("VIMOS")

• LUEGO, $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$; $\exists$ vq $F \subseteq \bar{A}$

SEA $(x,y) \in F$. SI $(x,y) \in A$, LISTO

SI NO, ES ~~POR~~ PORQUE $x=0$. SEA $r>0$

VQ $B((0,y),r) \cap A \neq \emptyset$.

AFIRMO: $(r/2, y) \in B((0,y),r) \cap A$ ✓

$$d((r/2,y),(0,y)) = \sqrt{(r/2)^2 + (y-y)^2}$$
$$= r/2 < r \checkmark$$

AFIRMO:

$$\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\} =: U$$

• U ES ABIERTO, PUES

$$U = \underbrace{\{x>0\}}_{\text{ABIERTO}} \cap \underbrace{\{y>0\}}_{\text{ABIERTO}}$$

LUEGO, $U \subseteq \mathring{A} \subseteq A$ (PUES $U \subseteq A$)

- AFIRMO: $U = A^\circ$.

SEA $(x,y) \in A^\circ$ $(\subseteq A)$; QVQ $(x,y) \in U$

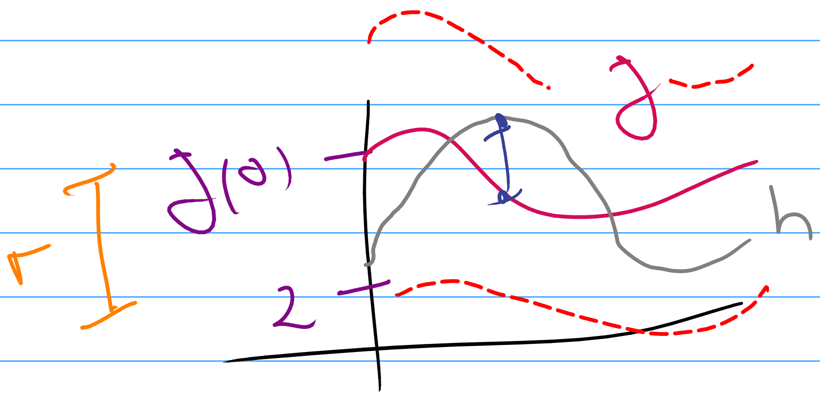
SI NO, $y=0$. PERO $(x,0) \notin A^\circ$:

$\forall r>0$, $(x, -r/2) \in B((x,0), r) \setminus A$

SEA $E = C([0,1])$

A) SEA $A = \{ f \in E : f(0) = 2 \}$

- A ES ~~CERRADO~~ PARA d_∞: → VEAMOS QUE $E \setminus A$ ES ABIERTO



SEA $g \in E \setminus A$. SUP $g(0) > 2$.

SEA $r = g(0) - 2$. QVQ $B(g, r) \subseteq E \setminus A$

Sea $h \in B(g,r)$:

$r > d_\infty(g,h) = \max_{x\in[0,1]} |g(x)-h(x)|$

$\geq |g(0)-h(0)|$

$\leadsto$ $* < \underbrace{g(0)-h(0) < g(0)-2}_{h(0)>2}$

$\underbrace{h(0)>2}_{h\in E \setminus A}$ ✓

- Ej: A no es cerrado para d_1

7. Sea (E,d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

(a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Probar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x,r')} \subseteq B(x,r)$.

(d) Probar que $\overline{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

(e) Deducir que $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$.

(f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x,r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x,r)$.

(g) Probar que $\{y \in E :\ 2 < d(y,x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

CONSIDEREMOS d_∞ EN E

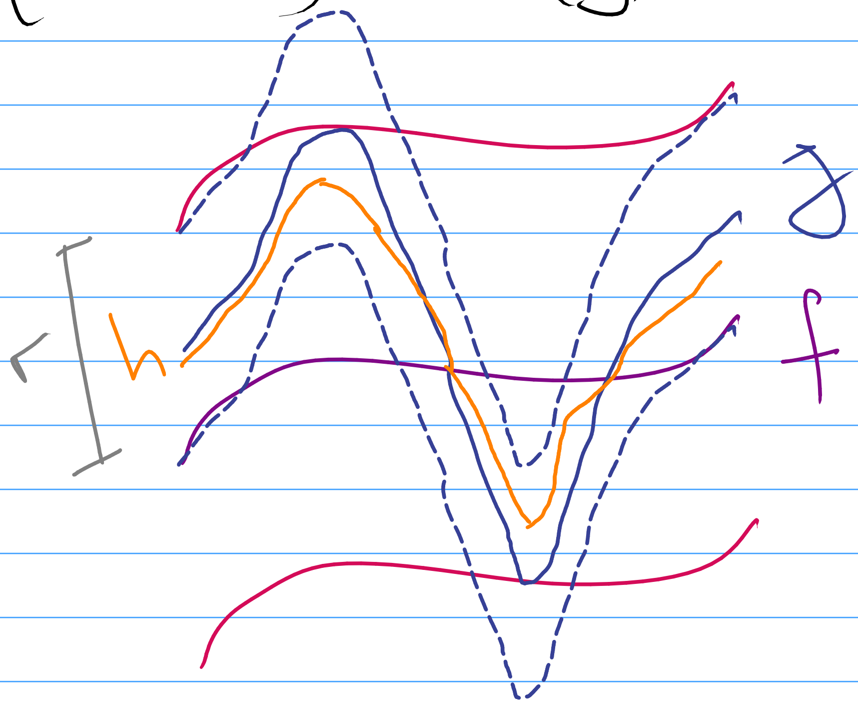
SEAN $f \in E$, $r > 0$.

AFIRMO: $\overline{B(f,r)} = \bar{B}(f,r)$

$\subseteq$ ✓

SEA $g \in \bar{B}(f,r)$; QVQ

$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(g,\varepsilon) \cap B(f,r) \neq \emptyset$



SEA $\underbrace{h(x)}_{\text{CONT ✓}} = g(x) + \underbrace{\delta}_{\in(0,1),\ \text{A DETERMINAR}} (f(x) - g(x))$

- $|h(x) - g(x)| = \delta\, |f(x) - g(x)|$

$$\leq \delta\, d_\infty(f,g) \leq \delta r$$

$$\Rightarrow d_\infty(h,g) \leq \delta r < \varepsilon, \quad \Rightarrow h \in B(g,\varepsilon)$$

si $\delta < \varepsilon / r$

- $|h(x) - f(x)| = \big|\, g(x) - f(x) + \delta(f(x) - g(x)) \,\big|$

$$= |1-\delta|\, \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\leq r}$$

$$= |1-\delta| \cdot r < r \quad \Rightarrow h \in B(f,r)$$

si $\delta \in (0,1)$