

Leandro Carreira

669/18

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para las verdaderas dar una demostración y para las falsas un contraejemplo.

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos y acotados.

- a) Si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces $\sup(A) \leq \sup(B)$.
b) Si $\inf(A) < \sup(A)$ entonces $A = (\inf(A), \sup(A))$.

a)

Verdadero

Como A es no vacío y acotado

$$\Rightarrow \exists s_A \in \mathbb{R} / s_A = \sup A$$

Por def. de supremo

$$s_A \geq a \quad \forall a \in A$$

Como $\forall a \in A, \exists b \in B / a \leq b$

$$\Rightarrow \exists b_0 \in B / s_A \leq b_0$$

De la misma forma que enter :

Como B es no vacío y acotado

$$\Rightarrow \exists s_B \in \mathbb{R} / s_B = \sup B$$

Por def. de supremo

$$s_B \geq b \quad \forall b \in B$$

en particular

$$s_B \geq b_0$$

y como

$$b_0 \geq s_A$$

$$\Rightarrow s_A \leq b_0 \leq s_B$$

$$s_A \leq s_B$$

$$\therefore \sup A \leq \sup B$$

□

b) False

$$\text{Si } A = [1, 2]$$

$$\inf A = 1 < \sup A = 2$$

Pero

$$[1, 2] \neq (1, 2)$$

por $1 \in A$ pero $1 \notin (1, 2)$.

2. Sea $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \text{ y } z \in \mathbb{N} \text{ es par}\}$.

Probar que existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ biyectiva.

Sé que

- $\# \mathbb{Q} = \# \mathbb{N}$
- $\# \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \# \mathbb{R}$ pues como \mathbb{N} es numerable y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$
- $\# \mathbb{N}_{\text{par}} = \# \mathbb{N}$ pues \mathbb{N}_{par} es infinito y $\mathbb{N}_{\text{par}} \subsetneq \mathbb{N}$

Idea:

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$

↳ Quiero "dividirlo" en 2 conjuntos no numerables A, B

de forma que

↳ $A \sim \mathbb{R}$ (una de las dimensiones del cadm. de g)

↳ $B \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{\text{par}} \sim \mathbb{R}$ (la otra dimensión)

De las Prácticas, sabemos que

$$[0, 1] \sim \mathbb{R}$$

y además, que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, -n+1) \sim \mathbb{R}$$

Realles negativos

y que

Realer positivos con el cero.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n) \sim \mathbb{R}$$

\mathbb{Q} numerable: no cambia la cardinalidad de \mathbb{R} pues $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito

o sea que

$$\mathbb{R}^- \sim \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^+ \sim \mathbb{R}$$

y de la misma forma

$$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

Conseguí los A y B de la idea de arriba.

Falta ver que

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{\text{par}} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$$

Por corolario visto en la Práctica.

Si Y, Z numerables $\Rightarrow Y \times Z$ es numerable

$\Rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{\text{par}}$ es numerable

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{\text{par}} \sim \mathbb{N}$$

Falta ver que

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{n\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}}_{\sim \mathbb{R}}$$

Por ej 12 b, unión numerable de conjuntos de cardinalidad c , tiene cardinal c

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{n\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}}_{\sim \mathbb{R}} \sim \mathbb{R}$$

◦◦

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$$

Finalmente

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_{\text{par}} \sim \mathbb{R}$$

y además

$$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

Por lo que g puede ser una función que tome:

- los Irracionales negativos de la coordenada "y" del dominio y los mande a la primera coordenada del codominio.
- los Irracionales positivos, \mathbb{Q} , y \mathbb{N} pares y los

manda a la segunda coordenada del codominio,

Como mostré que son conjuntos coordinables

$\Rightarrow \exists$ una biyección entre ellos,

y \therefore existe una g biyectiva con $g: X \rightarrow \mathbb{R}^2$

□

3. Sea $E = \{f \in C([0,1]) : f(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]\}$, con la métrica d_∞ . Consideremos la función $\mathcal{I} : E \rightarrow E$ dada por

$$\mathcal{I}(f)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Probar que \mathcal{I} es continua, pero no uniformemente continua.

Def de Continuidad

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } d_\infty(f, g) < \delta \Rightarrow d_\infty(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) < \varepsilon$$

$$d_\infty(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) = d_\infty\left(\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}\right)$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right| : x \in [0,1] \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \right| : x \in [0,1] \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{d_\infty(f, g)}{f(x) \cdot g(x)} : x \in [0,1] \right\}$$

$$= d_\infty(f, g) \cdot \sup \left\{ \frac{1}{f(x) \cdot g(x)} : x \in [0,1] \right\}$$

$$= d_\infty(f, g) \cdot \inf \left\{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \right\}$$

Como f, g están definidas en $[0,1]$ y además

$$f(x) > 0 \text{ y } g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \inf \left\{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \right\} > 0$$

$$\text{y además} \quad \inf \left\{ f(x) \cdot g(x) : x \in [0,1] \right\} \leq M \in \mathbb{R}_{\setminus \{0\}}^+$$

por $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$

\therefore

$$d_{\infty}(I(f), I(g)) \leq \underbrace{d_{\infty}(f, g)}_{< \delta} \cdot M$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, tengo que para cada $\varepsilon > 0$,

existe $\delta > 0$ /

$$\text{si } d_{\infty}(f, g) < \delta \Rightarrow d_{\infty}(I(f), I(g)) < \varepsilon$$

$\therefore I$ es continua

□

Para mostrar que I no es unif. continua:

Sean

$$f_n(x) = \frac{1}{n}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n+1}$$

sucesiones de funciones constantes

Como

$$\begin{aligned} d_{\infty}(f_n(x), g_n(x)) &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{n \cdot (n+1)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} d_{\infty}(I(f_n), I(g_n)) &= |n - (n+1)| \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Por Proposición, como hallé un $\varepsilon_0 > 0$ y sucesiones

$$(f_n)_n \text{ y } (g_n)_n / d_{\infty}(f_n, g_n) \rightarrow 0$$

$$\text{pero } d_{\infty}(I(f_n), I(g_n)) \geq \varepsilon_0$$

$\Rightarrow I$ no es uniformemente continua,

□

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que el conjunto

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)) : \cancel{a \leq x \leq b}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$x \in [a, b]$$

es compacto. Probar que f es continua.

G es compacto en $\mathbb{R}^2 \iff$ es cerrado y acotado

Sea $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset G$

Si $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (x, y)$

$\Rightarrow (x, y) \in G$ pues G es cerrado.

$\Rightarrow y = f(x)$

$\Rightarrow (x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (x, f(x))$

Como estamos en \mathbb{R}^2 , la convergencia e coord. e coord.

$$x_n \rightarrow x$$

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

○ sea que $\forall (x_n) \subset [a, b]$ convergente a $x \in [a, b]$

se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ converge a $f(x)$.

Lo cual es un teorema visto en las Teóricas de continuidad

que asegura que f es continua,

