| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Análisis Avanzado - Recuperatorio del primer parcial**

19/07/2021

---

**1**. Probar que el conjunto

$$\mathcal{C} = \Big\{(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Z} \,:\, (a_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\Big\}$$

es numerable.

**2**. Sean $(E, d)$ un espacio métrico y $S \subsetneq E$. Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto

$$S^{\varepsilon} = \big\{x \in E : d(x, E \smallsetminus S) \geq \varepsilon\big\}.$$

Probar que:

*a*) $S^{\varepsilon}$ es cerrado para todo $\varepsilon > 0$.

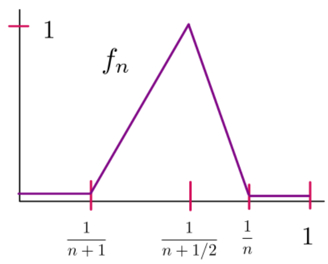
*b*) $S^{\circ} = \bigcup_{\varepsilon>0} S^{\varepsilon}$.

**3**. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la métrica $d_2$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Fijemos $M > 0$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$.

Probar que $f$ tiene un punto fijo.

**4**. Consideremos en $E = C([0, 1])$ la distancia $d_\infty$. Para cada natural $n$ sea $f_n \in E$ la función dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}. \\ \frac{1}{\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{n+1}} \cdot \left(x - \frac{1}{n+1}\right), & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n+1/2}, \\ \frac{1}{\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{n}} \cdot \left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{n+1/2} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$




Demostrar que no existe $K \subseteq E$ compacto tal que $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq K$.

---

*Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.*