UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Espacios Métricos 4

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Definición

$\subset E$

Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de A si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de A si cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x.

Definición

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de A,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

x NO pto de ac. de A : $\exists\, r > 0 /$

$B(x, r) \cap A = \emptyset$ ó $\{x\} \to x \in A$

(PENSAR)

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

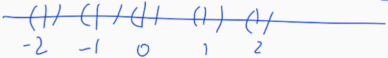
$x \in$ $x \in$

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Ejemplo

$E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ Todo punto de A es aislado: $x \in \mathbb{Z}$, $\boxed{B(x, 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{x\}}$



$A = \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ NO TIENEN PTOS AISLADOS

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿cuáles son los puntos aislados?

$\rightarrow$ PENSAR

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Observación

Un punto aislado de A pertenece a A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué (siempre está en $\bar{A}$).

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Observación

Un punto aislado de A pertenece a A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué (siempre está en $\bar{A}$).

Pensar

En $\bar{A}$ están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A.

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Observación

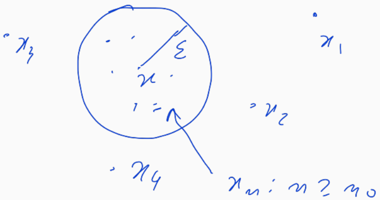
Un punto aislado de A pertenece a A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué (siempre está en $\bar{A}$).

Pensar

En $\bar{A}$ están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A. ¿Será cierto que $\bar{A}$ es la unión de los puntos de acumulación de A y los puntos aislados de A?

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.



$x_n \in B(x, \varepsilon)$

$\forall n \geq n_0$.

Obs: $x_n \longrightarrow x$ en (E, d) $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{d(x_n, x)}_{\in \mathbb{R}} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$. ← EJ.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \cancel{a}.\ x$

(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos distintos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \cancel{a}.\ x$

EJERCICIO

DEM: (i) $\Rightarrow$) $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0$ $\quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

P/c/ $n \in \mathbb{N}$, $\quad B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a_n \in B(x, 1/n) \cap A$ (p/c/n).

$(a_n)_n \subset A$, $\quad d(a_n, x) < 1/n \longrightarrow 0$

$\Rightarrow a_n \longrightarrow x$.

$\Leftarrow$) Sabemos que $\exists\, \boxed{(a_n)_n \subset A}$ / $\lim_n a_n = x$

$\boxed{\text{Dado } r > 0}$, $\exists\, n_0$ / $\boxed{d(a_n, x) < r}$ $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow \boxed{a_{n_0} \in A \cap B(x, r) \neq \emptyset}$ $\quad \therefore x \in \bar{A}$

Sucesiones y clausura

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos distintos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$. Son equivalentes:

(a) A es cerrado

(b) Para toda sucesión $(a_n)_n \subset A$ que converge a un $x \in E$ se tiene que x pertenece a A.

A CERRADO $\Longleftrightarrow$ SUC. DE ELEM DE A SÓLO PUEDEN CONV. A ELEM DE A.

Definición

Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición
Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice es acotada si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $x_n \in B(x, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

EQUIV: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acot.

OBS: $\boxed{(x_n)_n \text{ CONVERGENTE}} \rightarrow \exists\, x \in E \,/\, \lim_{n \to +\infty} x_n = x$

¿PODEMOS SABER SI UNA SUC. CONV MIRANDO SOLAMENTE LA SUC?

CASI

Sucesiones de Cauchy

Definición
Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice es acotada si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $x_n \in B(x, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

EJEMPLOS: 1) SUC. CONVERGENTES (YA LO VEMOS)

2) EN $\mathbb{R}$, CAUCHY ≡ CONVERGENTE (LO VAMOS A VER)

Teorema

Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

DEM (1): dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0 \,/\, d(x_n, x_m) < 1$ $\forall\, n \geq n_0$.

(en part, $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ $\forall\, n \geq n_0$.

$d = \max \{ d(x_n, x_{n_0}) : 1 \leq n \leq n_0 - 1 \}$

$r > \max \{1, d\}$.

TODOS LOS x_n $n \geq n_0$.

FINITOS

$\Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) < 1 < r$ $(n \geq n_0)$

$d(x_n, x_{n_0}) \leq d < r$ $(n < n_0)$

$\therefore (x_n)_n \subset B(x_{n_0}, r) \Rightarrow$ es ACOT

Teorema

Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

DEM (2): Sea $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ /

$d(x_n, x) < \varepsilon/2 \Rightarrow \forall n, m \geq n_0,$

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ (n \geq n_0)}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ (m \geq n_0)}} < \varepsilon.$$

$\therefore (x_n)_n$ es de Cauchy.

Teorema

Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(2) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

Sea $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsuc. conv. a $x \in E$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ / $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 \quad \forall k \geq k_0$

$\exists n_0$ / $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad \forall n, m \geq n_0$.

Sea $k_1 \geq k_0$ / $\underbrace{n_{k_1} \geq n_0}$

Si $n \geq n_0$: $\quad d(x_n, x) < \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_1}})}_{< \varepsilon/2 \; n, n_{k_1} \geq n_0} + \underbrace{d(x_{n_{k_1}}, x)}_{< \varepsilon/2 \; k_1 \geq k_0} < \varepsilon$

$\therefore (x_n)_n$ converge

Ejemplo ¿hay suc. de Cauchy no conv?

$\boxed{E=\mathbb{Q}:}$ $\quad x_n = 3{,}\underbrace{14\ldots}_{\text{primeros } n \text{ dígitos de } \pi}0000\ldots$

$(x_n)\subset\mathbb{Q}$, $\quad n,m \geq n_0$, $\quad \underbrace{d(x_n, x_m)}_{\text{tienen al menos } n_0 \text{ díg. en común}} \leq \frac{1}{10^{n_0}}$

(VER) ES DE CAUCHY.

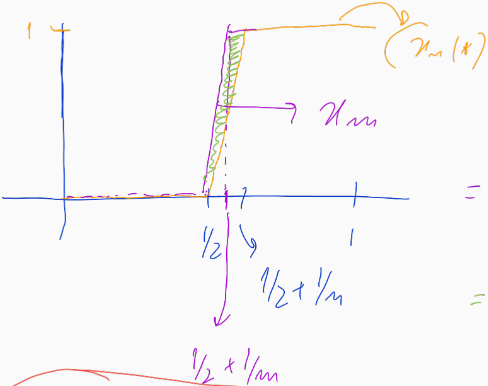
PERO $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ NO CONVERGE

(π NO EXISTE PUES $E=\mathbb{Q}$)

Ejemplo

$E = C[0,1]$ con $d_1(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$

IDEA (SIN CUENTAS NI DEMO).



$d(x_m, x_n) = \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|$

= área de ▽ < ε si $n, m \geq n_0$ (SE PUEDE VER)

∴ $(x_n)_n$ es de Cauchy.

NO CONV.: CUALQUIER "CANDIDATO" A LÍM ES DISCONTINUO.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

$\mathbb{Q}$ o $(C[0,1], d_1)$ NO SON COMPLETOS.

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada.

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente.

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente. Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente.

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente. Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente. Por la parte (3) del Teorema, $(x_n)_n$ converge.

Completitud

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Ejemplo

$\mathbb{R}$ es completo (y también $\mathbb{R}^n$)

Idea: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, entonces por la parte (1) del Teorema es acotada. Veremos que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente. Entonces, $(x_n)_n$ es de Cauchy y tiene subsucesión convergente. Por la parte (3) del Teorema, $(x_n)_n$ converge.

Ejercicio

Consideremos un conjunto no vacío E con la métrica discreta δ. ¿Es (E, δ) completo?

¿ $(\mathbb{Z}, |\cdot - \cdot|)$ es completo?