

## Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

- (a)  $\mathbb{R}$  con  $d(x, y) = |x - y|$ .
- (b)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ .
- (c)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .
- (d)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ .
- (e)  $C([0, 1])$  con  $d_\infty(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$ .
- (f)  $E$  un conjunto no vacío, con la métrica

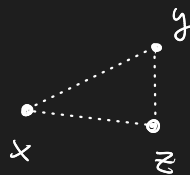
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es espacios Métricos

$$\boxed{1} \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \quad \text{y} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\boxed{2} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\boxed{3} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$



a) 1) ✓

$$\begin{aligned} 2) \quad |x - y| &= |(-1)(y - x)| \\ &= |-1| |y - x| \\ &= |y - x| \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$3) \quad |x - y| = |x - z + z - y|$$

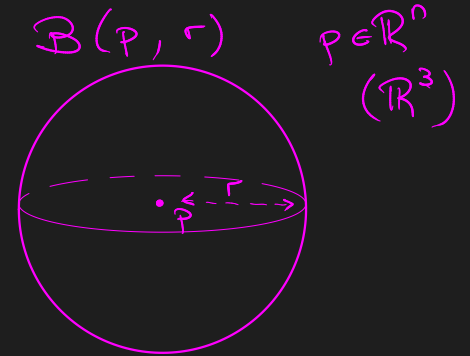
$$\leq |x-z| + |z-y|$$

$$\underbrace{\quad}_{=|y-z|} \quad \checkmark$$

b)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ .

1) ✓  
2) ✓

$$3) \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$



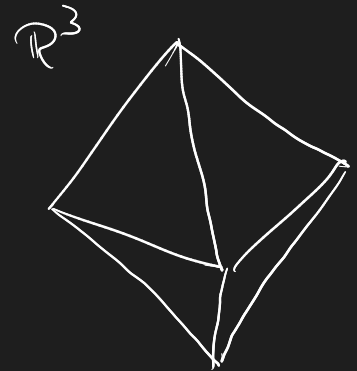
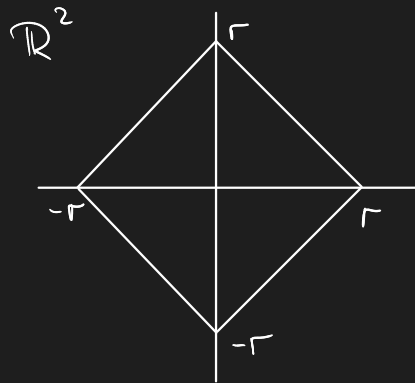
$$\|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad z \in \mathbb{R}^n$$

↑  
Cauchy - Schwartz.

□

c)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .

- 1) ✓  
2) ✓  
3) ✓

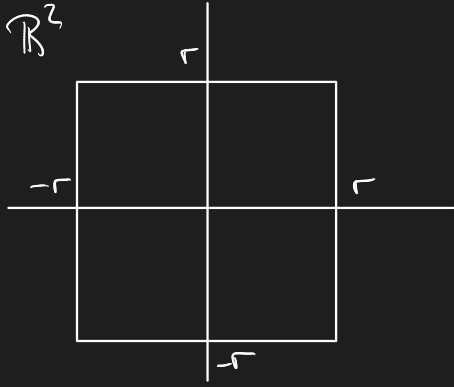


(d)  $\mathbb{R}^n$  con  $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ .

1) ✓

2) ✓

$$3) \max |x_i - y_i| \leq \max \{ |x_i - z_i| + |y_i - z_i| \}$$



$$\parallel \max \{ |x_i - z_i| \} + \max \{ |y_i - z_i| \}$$

$\mathbb{R}^3$

✓

(e)  $C([0, 1])$  con  $d(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$ .

1) ✓

2) ✓

3) ✓

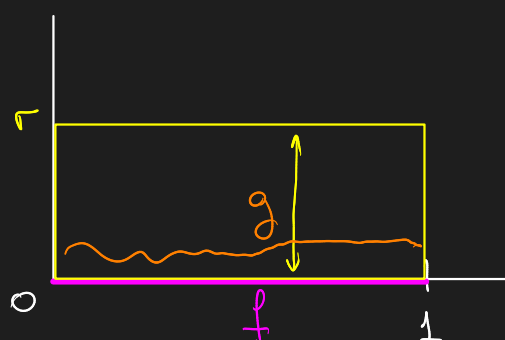
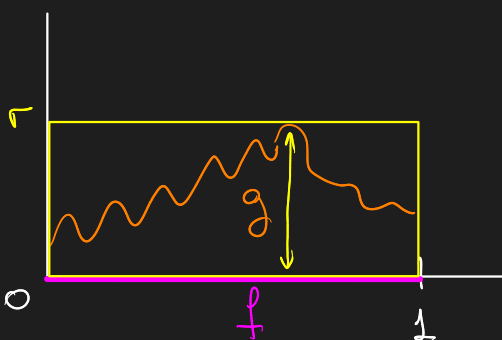
$$E = \mathcal{C}([0, 1])$$

$$\mathcal{B}(x, r) = \{ y \in E : d(x, y) < r \}$$

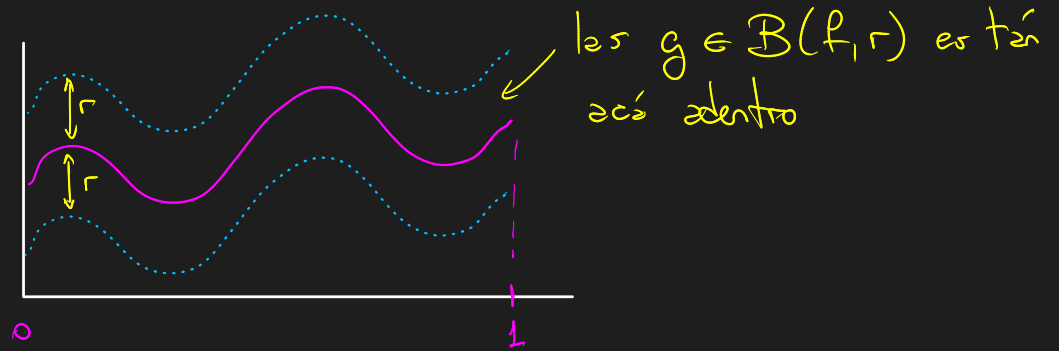
reescrivo

$$\mathcal{B}(f, r) = \{ g \in E : d(f, g) < r \}$$

• Digo  $f(t) \equiv 0$



•  $f(t)$  libre



(f)  $E$  un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) ✓

2) ✓

3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Caso 1:  $x = y$

$$0 \leq \underline{\text{Posi}} + \underline{\text{Positivo}} \quad \checkmark$$

Caso 2:  $x \neq y$

$$1 \leq 1 \text{ ó } 2 \quad \checkmark$$

□

$$B(\vec{0}, 1)$$



$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$\leftarrow d(\vec{0}, y) < r$$

$$B(\vec{0}, 2)$$

$$d(\vec{0}, y) < 2 \leftarrow \text{siempre } \forall y \in \mathbb{R}$$



2. Decidir cuáles de las siguientes funciones definidas en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  son métricas en  $\mathbb{R}$ :

(a)  $d(x, y) = (x - y)^2$       (b)  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$       (c)  $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

$$d_a(x, y) = (x - y)^2$$

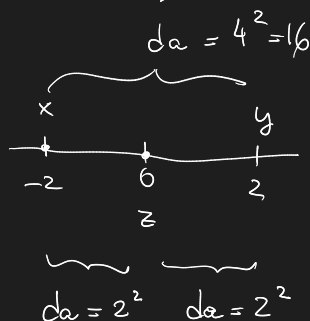
1) ✓

2) ✓

3)  $d_a(x, y) \stackrel{?}{\leq} d_a(x, z) + d_a(z, y)$

$$(x - y)^2 \stackrel{?}{\leq} (x - z)^2 + (y - z)^2$$

quiero  
>



$$S: z = \frac{x+y}{2}$$

$\Rightarrow$  la desigualdad triangular no vale

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{!}{>} \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$\therefore$  da no cumple la desigualdad triangular

$\Rightarrow$  no es distancia.

$$b) d_b(x, y) = \sqrt{|x-y|}$$

$$\boxed{1} \checkmark$$

$$\boxed{2} \checkmark$$

$$\boxed{3} d_b(x, y) \stackrel{?}{\leq} d_b(x, z) + d_b(z, y)$$

$$d_b(x, y)^2 = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{d_b(x, z)^2} + \underbrace{|z-y|}_{d_b(z, y)^2}$$

$$d_b(x,y)^2 \leq d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2$$

$$d_b(x,y) \leq \sqrt{d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

CA :

$$\sqrt{a+b} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{con } a, b \geq 0$$

Completo cuadrado:

$$\text{Como } 2\sqrt{a \cdot b} > 0$$

$$\Rightarrow a+b \leq \underbrace{a + 2\sqrt{a \cdot b} + b}_{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

$$\Rightarrow a+b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Probé lo que quería

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \quad \checkmark$$

∴  $d_b$  es distancia.

$$c) d_c(x, y) = |x^2 - y^2|$$

Contra ej:

$$d_c(-2, 2) = |(-2)^2 - 2^2|$$

$$= 0$$

$$\text{Pero } -2 \neq 2$$

$\therefore$  no es una métrica.



3. Consideremos en  $\mathbb{R}^n$  las distancias  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_\infty$ . Denotemos por  $B_1(x, r)$ ,  $B_2(x, r)$  y  $B_\infty(x, r)$  a la bola de centro  $x$  y radio  $r$  para cada una de las distancias, respectivamente.

(a) Probar que  $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$ .

(b) Deducir de (a) que  $B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r) \subseteq B_\infty(x, r) \subseteq B_1(x, nr)$ .

$$a) \quad d_\infty(x, y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_\infty \leq d_2 \quad \mathcal{D} := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x, y) \in \mathcal{D}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

elementos de  $\mathcal{D}$  al cuadrado

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 \text{ es alguno de } \uparrow$$

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 = (x_i - y_i)^2 \text{ para algùn } i \in [1, n]$$

Como son todos términos  $(x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 \leq \overset{\text{términos } \geq 0}{\leq} |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$$

Tomo raíz (términos  $\geq 0$ )

$$\Rightarrow d_{\infty}(x, y) \leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

$$\therefore d_{\infty}(x, y) \leq d_2(x, y)$$

$$d_2 \leq d_1$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

elevo al  $\square$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \stackrel{?}{\leq} \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2$$

$$\text{Sea } a_i := |x_i - y_i|$$

$$\sum a_i^2 \stackrel{?}{\leq} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j$$

$$\text{Nota que si } i = j \Rightarrow a_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i \cdot a_j$$

Como  $a_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

Obtém-se que

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + S \quad \text{com } S \geq 0$$

∴

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2$$

$$\text{tod } > 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

∴

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$d_\infty(x, y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\mathcal{D} := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x, y) \in \mathcal{D}$$

además

$$d_{\infty}(x, y) \geq a \in \mathbb{D}$$

$$\text{pues } d_{\infty}(x, y) = \sup \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow d_{\infty}(x, y) \geq |x_i - y_i| \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n d_{\infty}(x, y)}_{= n \cdot d_{\infty}(x, y)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$

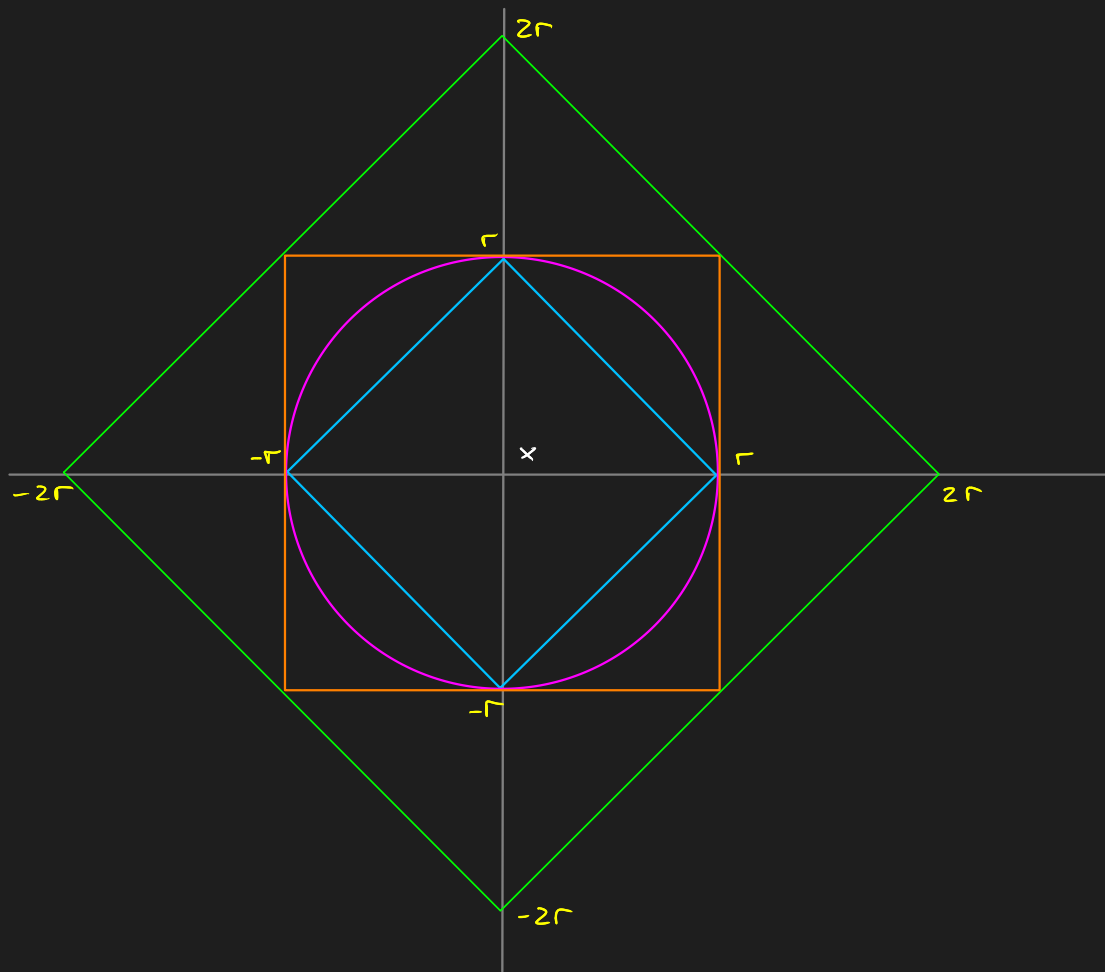
$$d_1(x, y) \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$

$\therefore$

$$d_{\infty}(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$



(b) Deducir de (a) que  $B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r) \subseteq B_\infty(x, r) \subseteq B_1(x, nr)$ .



Como  $d_2 \leq d_1 \quad \forall x, y$

en particular

$$\Rightarrow d_2 \leq d_1 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{B}_{d_2}(x, r)$$

$$\mathbb{B}_{d_2}(x, r) = \{y \in E : d_2(x, y) < r\}$$

$$\mathbb{B}_{d_1}(x, r) = \{y \in E : d_1(x, y) < r\}$$

$$\underbrace{d_2 \leq d_1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}_{d_1}(x, r) \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(x, r)$$

Pues para un mismo  $r$ , los  $y \in \mathbb{B}_{d_1}$  estarán en  $\mathbb{B}_{d_2}$  (pues si miden menos de  $r$  con  $d_1 \Rightarrow$  miden todavía menos con  $d_2$ ), pero no así al revés, pues habrá  $y \in \mathbb{B}_{d_2}$  que miden más que  $r$  con  $d_1$ .

$$B_2 \stackrel{?}{\subseteq} B_\infty)$$

$$B_{d_2}(x, r) = \{y \in E : d_2(x, y) < r\}$$

$$B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : d_\infty(x, y) < r\}$$

de a) obtuve

$$d_\infty \leq d_2$$

$$\Rightarrow B_{d_2}(x, r) \subseteq B_{d_\infty}(x, r) \quad \checkmark$$

$$B_\infty \subseteq B_1(x, n \cdot r)$$

$$\bullet B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : d_\infty(x, y) < r\}$$

$$\bullet B_{d_1}(x, r) = \{y \in E : d_1(x, y) < n \cdot r\}$$

Se de a) que

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

reescribo

$$B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : n \cdot d_\infty(x, y) < n \cdot r\} \quad n > 0$$

$$B_{d_1}(x, n \cdot r) = \{y \in E : d_1(x, y) < n \cdot r\}$$

$$\Rightarrow \text{como } d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$B_{d_\infty}(x, r) \subseteq B_{d_1}(x, n \cdot r) \quad \checkmark$$

4. Considerar el conjunto  $\mathbb{Q}$  en el espacio métrico  $\mathbb{R}$ . Hallar  $\mathbb{Q}^\circ$  y  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Concluir que  $\mathbb{Q}$  no es abierto ni cerrado en  $\mathbb{R}$ .

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a)  $[0, 1]$

(c)  $\mathbb{Q}$

(e)  $\mathbb{Z}$

(g)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(b)  $(0, 1)$

(d)  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(f)  $[0, 1) \cup \{2\}$

(h)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$



6. Consideremos en el espacio  $C([0, 1])$  las métricas  $d_\infty$  y  $d_1$  dadas por

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

(a) Sea  $A = \{f \in C([0, 1]) : f(0) > 0\}$ . Probar que  $A$  es abierto para  $d_\infty$  pero que no lo es para  $d_1$ .

(b) Concluir que no existe  $M > 0$  tal que  $d_\infty(f, g) \leq M \cdot d_1(f, g)$  para todas  $f, g \in C([0, 1])$ .

a)  $\boxed{d_\infty}$  : Obs: Esto mismo demuestra Vicky en teórica 1 de Funciones Continuas, pero acá (todavía) no tenemos propiedades de continuidad para usar.

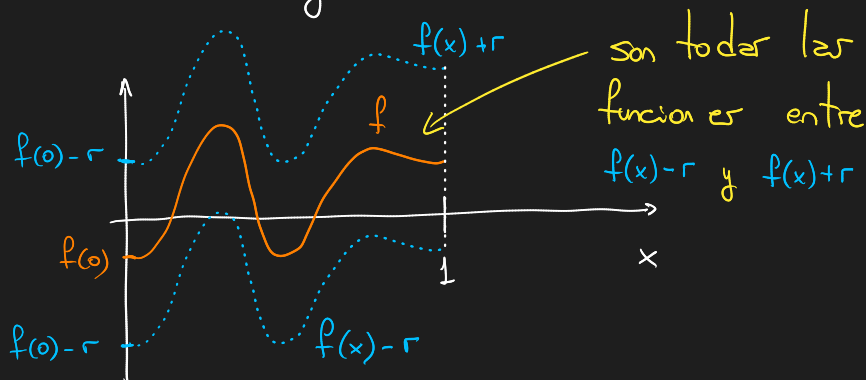
Si  $X$  abierto

$$\Rightarrow \bullet X = X^\circ$$

$$\bullet \forall x \in X, \exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq X$$

Con  $E = C[0, 1]$ , con  $f \in E$  y  $d_\infty$

$$\Rightarrow B(f, r) : \\ (r > 0)$$



$A$  es subconjunto de  $C[0, 1] / f(0) > 0 \quad \forall f \in A$

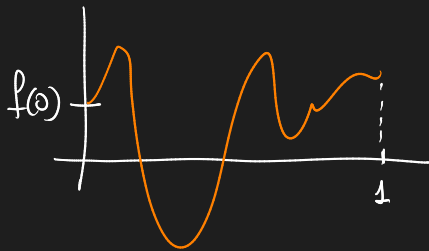
q.v.q

$$\forall f \in A \subseteq C[0, 1], \exists \varepsilon > 0 / B(f, \varepsilon) \subseteq A$$

- Como  $\mathcal{C}[0,1]$  es el espacio de las funciones continuas  
 $\Rightarrow \mathcal{B}(f, \varepsilon)$  está siempre contenido en  $\mathcal{C}[0,1]$ ,  
 pues cada  $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$  existe en  $E = \mathcal{C}[0,1]$   
 ( $E$  es siempre abierto)
- Falta ver que cada  $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$  existe en  $A \subset E$
- Para eso, veo que cada  $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$  cumple  $g(0) > 0$

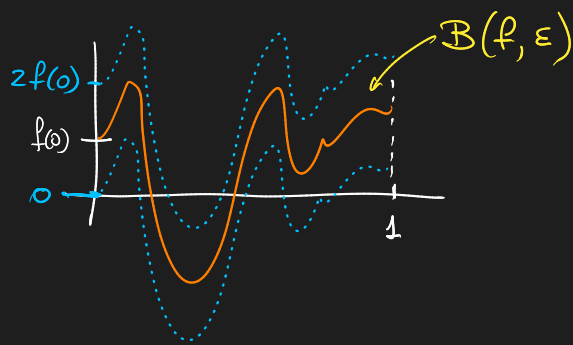
Como  $f \in A$

$$\Rightarrow f(0) > 0$$



Con lo que puedo elegir un epsilon que me asegure que  $g(0) > 0$

$$\Rightarrow \text{elijo } \varepsilon = f(0)$$



Como todas las  $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$  son continuas en  $[0,1]$

y además

$$f - f(0) < g < f + f(0)$$

evalúo  
 $\Rightarrow$

$$f(0) - f(0) < g(0) < f(0) + f(0)$$

$$0 < g(0) < 2f(0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(f, \varepsilon) \subset A \quad \forall f \in A$$

$\therefore A$  es Abierto

□

Obs :

Tomando  $\varepsilon = \frac{f(0)}{2}$  tal vez sea más claro de ver gráficamente.

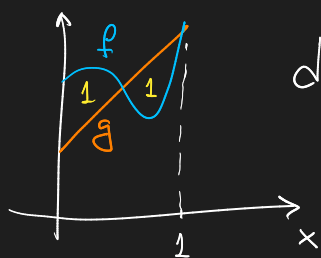
d<sub>1</sub>

Para que  $A$  sea abierto, debe pasar que para cada  $f$  en  $A$ , debe haber al menos una bola con centro en  $f$  completamente contenida en  $A$ .

Si encuentro una  $f$  particular, tal que todas sus bolas (para todos sus radios) contengan al menos alguna  $g$  que no esté en  $A$ , entonces encontré una  $f$  en  $A$  que no tiene bolas en  $A$ .

O sea, como  $f$  está en  $A$  pero no es punto interior, entonces  $A \neq A^\circ$

• Busco la  $f$



$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= 1 + 1 = 2$$

Busco

$\downarrow$   
 $<$

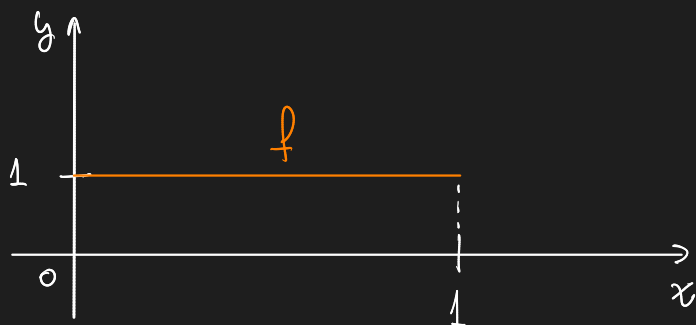
$r \leftarrow$  radio de la bola

$\forall r > 0$

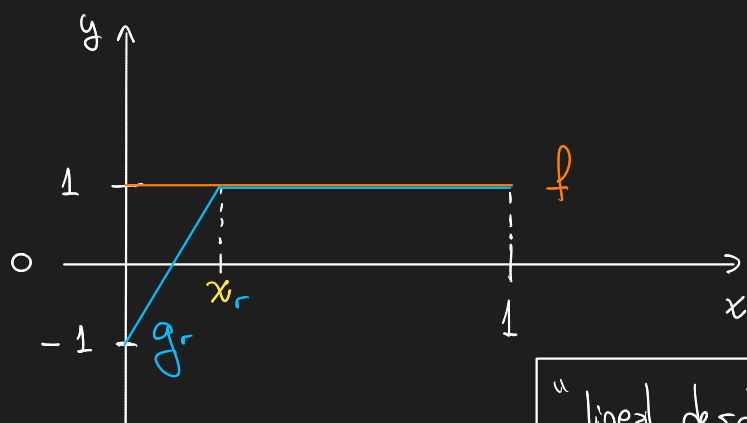
con

$$\mathcal{B}(f, r) = \{ g \in E : d_1(f, g) < r \}$$

• De entre todas las  $f \in A$ , elijo  $f(x) \equiv 1$



- Elijo una  $g_r$  particular que pertenece a  $\mathcal{B}(f, r)$

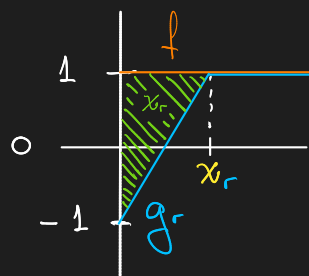


"línea desde  $y = -1$  hasta  $1$ "  
 Notar que  $g_r(0) = -1$

Con 
$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{2}{x_r} \cdot x - 1 & \text{si } x \in [0, x_r] \\ 1 & \text{si } x \in (x_r, 1] \end{cases}$$

Como distancias a  $f$  es  $d_1(f, g_r)$ :

$$d_1(f, g_r) = \frac{2 \cdot x_r}{2} = x_r$$



- Si para cada  $g_r(x)$  tomo como  $x_r = \frac{r}{2}$

Entonces puedo asegurar que  $g_r(x) \in \mathcal{B}(f, r) \quad \forall r > 0$

Pero como  $g_r(0) = -1 \quad \forall r > 0$

$$\Rightarrow g_r(0) \notin A$$

$$\therefore \mathcal{B}(f, r) \notin A$$

$$\therefore \text{como } f \in A \text{ pero } f \notin A^\circ$$

$$\Rightarrow A \neq A^\circ$$

$$\therefore A \text{ no es abierto}$$

□

(b) Concluir que no existe  $M > 0$  tal que  $d_\infty(f, g) \leq M \cdot d_1(f, g)$  para todas  $f, g \in C([0, 1])$ .

Siempre puedo encontrar  $f, g$  continuas

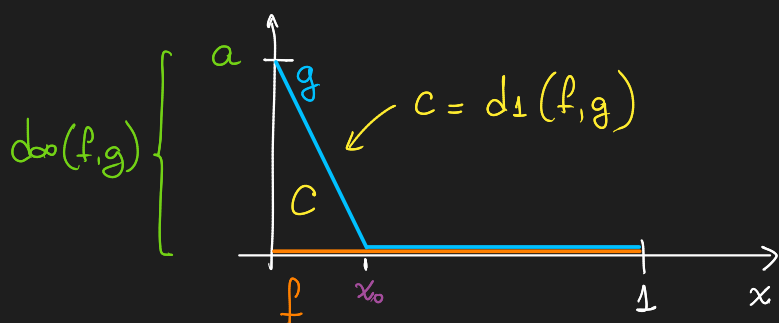
$\Rightarrow$  distancia  $\downarrow$  lo más pequeña que desee ("iguales en casi todos sus puntos")

y  $\Rightarrow$  distancia  $\infty$  lo más grande que quiera ("muy distintos en pocos puntos")

Por ejemplo

$$f \equiv 0$$

$g =$  "triángulo de área  $c$  y altura  $a$  hasta  $x_0$ ,  
y luego 0"



Con esto y modificando  $x_0$ ,  $a$  y  $c$  puedo lograr que :

• Si  $M \geq 1$ :

$$d_1(f, g) < \frac{1}{M}$$

$x_0$  bien cerca de 0

y que

$$d_\infty(f, g) > 1$$

triángulo de altura  $a \geq 1$

entonces

$$d_\infty(f, g) > M \cdot d_1(f, g) > M \cdot \frac{1}{M} = 1$$

$$d_\infty(f, g) > 1 \quad \checkmark$$

• Si  $0 < M \leq 1$  :

$$d_1(f, g) = 1$$

y

$$d_\infty(f, g) > 1$$

Logrando lo mismo que en caso anterior.

Obs :

Tomando  $d_1(f, g) = \min \left\{ 1, \frac{1}{M} \right\}$  no sería

necesario separar en casos para  $M$ , pero puede

no ser tan clara la deducción.

7. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico. Sean  $x \in E$  y  $r > 0$ .

- (a) Probar que  $\{x\}$  es un conjunto cerrado.  
(b) Probar que  $B(x, r)$  es un conjunto abierto.  
(c) Probar que si  $r > r' > 0$  entonces  $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$ .  
(d) Probar que  $\overline{B(x, r)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$  es un conjunto cerrado.  
(e) Deducir que  $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B(x, r)}$ .  
(f) Dar un ejemplo en que  $\overline{B(x, r)}$  sea un subconjunto propio de  $\overline{B(x, r)}$ .  
(g) Probar que  $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$  es un conjunto abierto.

En otro  
archivo

a)  $A := \{x\}$

Veo clausura

• Si  $x \in A$

$$\Rightarrow x \in \overline{A} \quad \text{pues} \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

• Si  $x \in A$ ,  $y \notin A$

$$\Rightarrow d(x, y) > 0 \quad \text{pues} \quad x \neq y$$

Como  $x$  es el único elemento de  $A$

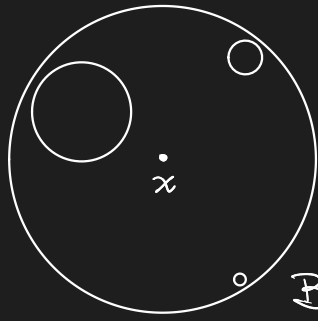
$$\Rightarrow B(y, \frac{d(x, y)}{2}) \cap A = \emptyset \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$$

$$\therefore y \notin \overline{A} \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$$

$$\Rightarrow \overline{A} = \{x\} = A$$

$$\therefore \{x\} \text{ es cerrado,}$$

(b) Probar que  $B(x, r)$  es un conjunto abierto.



$$\text{Sea } a \in B(x, r)$$

$$\Rightarrow 0 < d(a, x) < r$$

$$\Rightarrow B\left(a, \frac{d(a, x)}{2}\right) \subset B(x, r)$$

$\therefore B(x, r)$  es un conjunto abierto.

□

(c) Probar que si  $r > r' > 0$  entonces  $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$ .

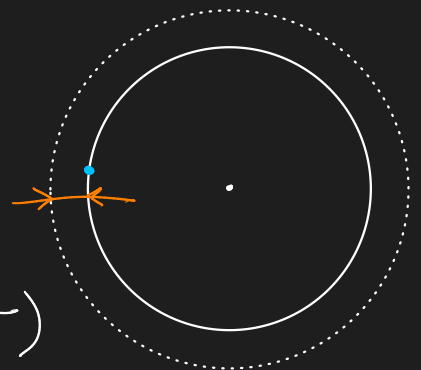
$$\text{Sea } a \in \overline{B(x, r')}$$

Nota!

$$\Rightarrow 0 \leq d(a, x) \leq r' < r$$

$$\Rightarrow d(a, x) < r$$

$$\Rightarrow B\left(a, \frac{r - r'}{2}\right) \subset B(x, r)$$





(d) Probar que  $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$  es un conjunto cerrado.

• Sea  $a \in \overline{B}(x, r)$

$$\Rightarrow B(a, r') \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset \quad \forall r' > 0$$

• Sea  $a \in \overline{B}(x, r)$ ,  $b \notin \overline{B}(x, r)$

$$\Rightarrow \text{Como } a \neq b$$

$$0 < d(a, b) \leq r$$

$$\Rightarrow \text{Afirmando que si } a' \in \partial \overline{B}(x, r)$$

$$\text{y } a_{\min} = \arg \min \{d(a', b) : a' \in \partial \overline{B}\}$$

?

↑ existe pues  
 $\partial \overline{B} \subseteq \overline{B}$

$$B(b, \frac{d(a', b)}{2}) \cap \overline{B}(x, r) = \emptyset$$

La otra es tomar complemento de la  $\overline{B}$

$$\overline{B}^c(x, r) = \{y \in E : d(x, y) > r\}$$

$$\Rightarrow \forall b \in \overline{B}^c(x, r)$$



$$\begin{aligned} &\rightarrow d(a', b) > r \\ &\rightarrow B(b, \frac{d(a', b)}{2}) \cap \overline{B} = \emptyset \\ &\quad \subseteq \overline{B}^c \end{aligned}$$

$$a' \in \overline{B}(x, r) \mid d(a', b) = \min \{ d(a, b) : a \in \overline{B} \}$$

?

$\therefore \overline{B}^c$  es abierta

8. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq E$ . Probar que:

(a)  $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$ .

(b)  $E \setminus \overline{A} = (E \setminus A)^\circ$ .

¿Son ciertas las igualdades  $\overline{A} = \overline{A^\circ}$  y  $A^\circ = (\overline{A})^\circ$ ?

9. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico y sean  $A, B \subseteq E$ . Probar que:

(a)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ .

(b)  $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ .

(c)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

(d)  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

10. Sean  $(E, d)$  un espacio métrico y  $A, B \subseteq E$  subconjuntos acotados de  $E$ .

(a) Probar que si  $A \subseteq B$  entonces  $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$ .

(b) Probar que  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ .

Def: Diámetro

$$\text{diam}(A) = \sup \{ d(a, b) : a, b \in A \}$$

