Leandro Carreira
669/18

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

a) Veo $\mathcal{E}(f) : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$

- Qvq

Bolas con $d = d_\infty$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$

$$\mathcal{E}(B(f,\delta)) \overset{?}{\subseteq} B(\mathcal{E}(f), \varepsilon)$$

- Sea $g \in B_{d_\infty}(f, \delta)$

$\Rightarrow d_\infty(f, g) < \delta$ ★ por def de B_{d_∞}

- Sean $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$

$$d_\infty(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) \overset{\text{def } \mathcal{E}}{=} d_\infty(f(0), g(0))$$

Como $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$= |f(0) - g(0)|$$

$$\leq d_\infty(f, g) \overset{\text{por ★}}{<} \delta$$

$\therefore$ si tomo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow d_\infty(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) < \delta < \varepsilon$$

$\therefore$ $\mathcal{E}$ es continua con d_∞

$\blacksquare$

Veo $\mathcal{I}(f) : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

De nuevo, q.v.q :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \mathcal{I}(B(f,\delta)) \subseteq B(\mathcal{I}(f), \varepsilon)$

- Sea $g \in B(f,\delta)$

$$\Rightarrow d_\infty(f,g) < \delta \quad ⊡$$

- $d_\infty(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)) = d_\infty\left(\int_0^1 f\,dx, \int_0^1 g\,dx\right)$

$$= \left| \int_0^1 f\,dx - \int_0^1 g\,dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(x) - g(x)\,dx \right|$$

$$\leq \left| \int_0^1 d_\infty(f,g)\, dx \right|$$

$$= d_\infty(f,g) \underset{\text{por } \boxed{\cdot}}{<} \delta$$

Si elijo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow d_\infty\big(\mathcal{I}(f), \mathcal{I}(g)\big) < \delta < \varepsilon$$

$\therefore$ $\mathcal{I}$ es continua con d_∞.

$\boxtimes$

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

Para $\mathcal{I}$, con d_1, si tomo

$g \in B_{d_1}(f, \delta)$

$\Rightarrow d_1(f,g) < \delta$

Entonces, cuando acoto

$$\left| \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \right|}_{d_1(f,g)}$$

$$< \delta < \varepsilon \qquad \text{si } \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Con lo cual, $\mathcal{I}$ es continua con d_1

$\boxtimes$

- Para $\mathcal{E}(f)$ con d_1, busco contraejemplo:

Def de continuidad

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/$

$$\text{si } d_1(f, g) < \delta \Rightarrow d_1(\mathcal{E}(f), \mathcal{E}(g)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d_1(f(0), g(0)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(0) - g(0)| < \varepsilon$$

Negando la def:

$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists f, g \in \mathcal{C}([0,1]) \,/\, \forall \delta > 0$

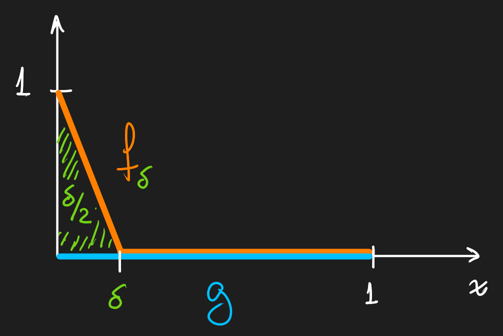
$$\text{si } d_1(f, g) < \delta \Rightarrow |f(0) - g(0)| \geq \varepsilon_0$$

Elijo f, g particulares

Sean $g \equiv 0$

Triángulo de base δ y altura $1 \Rightarrow$ Área $= \frac{\delta}{2}$

$$f_\delta(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\delta}x + 1 & \text{si } x \in [0, \delta] \\ 0 & \text{si } x \in (\delta, 1] \end{cases}$$



Obs:

Si $\delta > 1 \Rightarrow f_\delta(x) = f_1(x)$

Encontré f_δ, g tales que

$\forall \delta > 0$

si $d_1(f_\delta, g) < \delta \Rightarrow d_1(\mathcal{E}(f_\delta), \mathcal{E}(g)) \geq \varepsilon_0$

Área del triángulo entre f_δ y g

$$\Rightarrow \Big| \underbrace{f_\delta(0)}_{=1} - \underbrace{g(0)}_{=0} \Big| = 1$$

$\therefore$ $\mathcal{E}$ no es contínua con d_1.

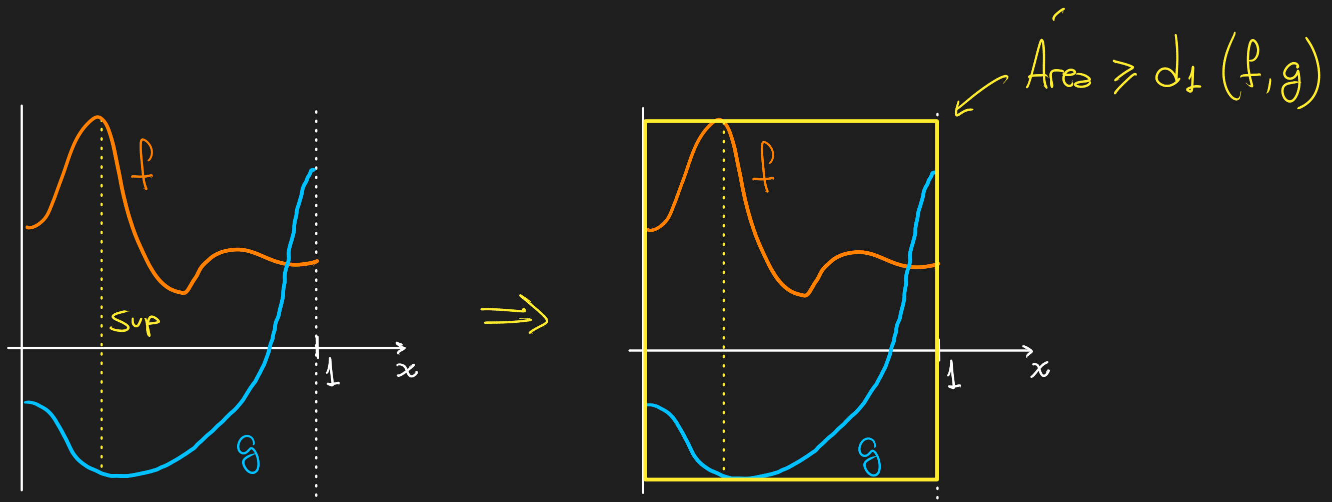
$\boxtimes$

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Si $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \leq \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

Pues esto y integrando sobre $[0,1]$, y puedo acotar el área entre 2 funciones cualesquiera por un rectángulo de altura $\sup\{|f(x) - g(x)|\}$



Sabiendo que

$$d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g) \qquad \forall f,g \in \mathcal{C}([0,1])$$

puedo asegurar que

$$B_{d_\infty}(f,r) \subseteq B_{d_1}(f,r) \qquad \forall r>0 \ , \ f\in\mathcal{C}([0,1])$$

y además sé que

$$B_{d_\infty}(x,r) \supseteq B_{d_1}(x,r) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Ahora, si $\mathcal{F} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ es continua con d_1 :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \ / \ \mathcal{F}(B_{d_1}(f,\delta)) \subseteq B_{d_1}(\mathcal{F}(f),\varepsilon)$$

puedo asegurar que también es continua con d_∞ pues:

- Como $B_{d_\infty}(f,\delta) \subseteq B_{d_1}(f,\delta)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(B_{d_\infty}(f,\delta)\right) \subseteq \mathcal{F}\left(B_{d_1}(f,\delta)\right)$$

y como $B_{d_1}(x,\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(x,\varepsilon)$

$$\Rightarrow B_{d_1}(\mathcal{F}(f),\varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(\mathcal{F}(f),\varepsilon)$$

Juntando todo

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/$

$$\mathcal{F}(B_{d_\infty}(f,\delta)) \subseteq \mathcal{F}(B_{d_1}(f,\delta)) \subseteq B_{d_1}(\mathcal{F}(f), \varepsilon) \subseteq B_{d_\infty}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

$$\mathcal{F}(B_{d_\infty}(f,\delta)) \subseteq B_{d_\infty}(\mathcal{F}(f), \varepsilon)$$

Lo cual muestra que $\mathcal{F}$ también es continua con d_∞.

$\therefore$ no existen funciones de $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ continuas con d_1 pero discontinuas con d_∞.

$\blacksquare$