13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

a) $\mathcal{P}(A) = \{ X \subseteq A \}$

↑ todos los posibles subconjuntos de A

- Cuando digo

A puede ser finito, numerable ó no numerable!

⇓

(no sucesiones ni numerables subconjuntos)

$$\phi : A \to \{0,1\}$$

↑ ϕ toma algún elemento de A y devuelve 0 ó 1.

- Con esto, puedo definir:

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

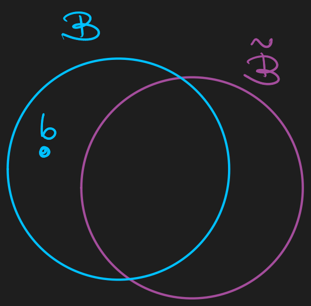
$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$$

$$B \longmapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ 1 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

con $B \in \mathcal{P}(A)$, o sea, $B \subseteq A$

$\therefore$ para cada B en $\mathcal{P}(A)$, tengo una

$\phi_{\mathcal{B}}$ que depende de $\mathcal{B}$, y para cada $\mathcal{B}$, $\phi_{\mathcal{B}}$ es diferente, pues



si $\mathcal{B} \neq \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow \exists\, b \in \mathcal{B}$ con $b \notin \tilde{\mathcal{B}}$

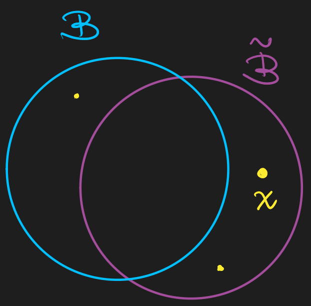
o viceversa

de forma que

$$\phi_{\mathcal{B}}(b) = 1$$

y

$$\phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(b) = 0$$



o sea que

$$\phi_{\mathcal{B}}(x) \neq \phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(x) \quad \forall\, \mathcal{B} \neq \tilde{\mathcal{B}}$$

$$\forall\, x \in \left(\mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}} \cup \tilde{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}\right)$$

$$\therefore\ \phi_{\mathcal{B}}(b) = \phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(b) \iff \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

$$\therefore\ \psi(\mathcal{B}) = \psi(\tilde{\mathcal{B}}) \iff \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

con lo que ψ es inyectiva.

$$\Rightarrow \quad \#\mathcal{P}(A) \leq \#\{0,1\}^A$$

- Ahora, defino otra función Ψ /

$$\Psi : \underset{\{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}}{\underset{\parallel}{\{0,1\}^A}} \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\phi_B \longmapsto \{x \in B : \phi_B(x) = 1\}$$

función que manda elementos de $B \subseteq A$ en $\{0,1\}$

- Como

$$\Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}}) \quad \forall\, B \neq \tilde{B}$$

pues si $b \in B$ y $b \notin \tilde{B}$ $\Rightarrow$ $\phi_B(b) \neq \phi_{\tilde{B}}(b)$

$$\Rightarrow \{x \in B : \phi_B(x) = 1\} \neq \{x \in \tilde{B} : \phi_{\tilde{B}}(x) = 1\}$$

$$\Rightarrow \Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}})$$

$\therefore$ Ψ es inyectiva.

$\Rightarrow$ como $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ inyectiva

y $\Psi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ inyectiva

$\Rightarrow$ por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

existe una función biyectiva entre $\{0,1\}^A$ y $\mathcal{P}(A)$

con lo que

$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$$

$\boxtimes$