Práctica 2

1. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva ✓
- Simétrica ✓
- Transitiva: Dani en la teórica 3 ó 4.

2. Sean A y B conjuntos. Probar que:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

a) $\subseteq$) Si $C = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow$ C es conjunto de subconjuntos que están tanto en A como en B

$\Rightarrow C \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

$\supseteq$) Si $C = \mathcal{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow C \subseteq$

3. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Nota: $n \in \mathbb{N}$ (finito)

Si A tiene n elementos

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Cada elemento puede estar o no estar en cada uno de los subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$:

Para cada subconjunto $P_i \subseteq \mathcal{P}(A)$

a_1: $\nearrow$ está, $\searrow$ no está

a_2: $\nearrow$ está, $\searrow$ no está

$\vdots$

a_n: $\nearrow$ 0, $\searrow$ 1

Por lo que puedo decir que existen 2^n posibles conjuntos distintos (con ϕ cuando no hay ninguno, y A cuando están todos)

$$\therefore \#\mathcal{P}(A) = 2^n$$

∎

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (d) $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Z}_{\leq -3} = \{q \in \mathbb{Z} : q \leq -3\} \subseteq \mathbb{Z}$

y como $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

y $\# \mathbb{Z}_{\leq -3}$ es infinito

$\Rightarrow \# \mathbb{Z}_{\leq -3} \sim \mathbb{N}$ //

b) $5\mathbb{Z} = \{\underbrace{q \cdot 5}_{\text{Enteros múltiplos de 5}} : q \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow 5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

con $5\mathbb{Z}$ infinito

$\Rightarrow \# 5\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ //

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(q, n) : q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Por 1) sé que

$\boxed{\text{2 conjuntos son coordinables} \iff \exists f : A \to B \text{ biyectiva}}$

Armo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva usando primos :

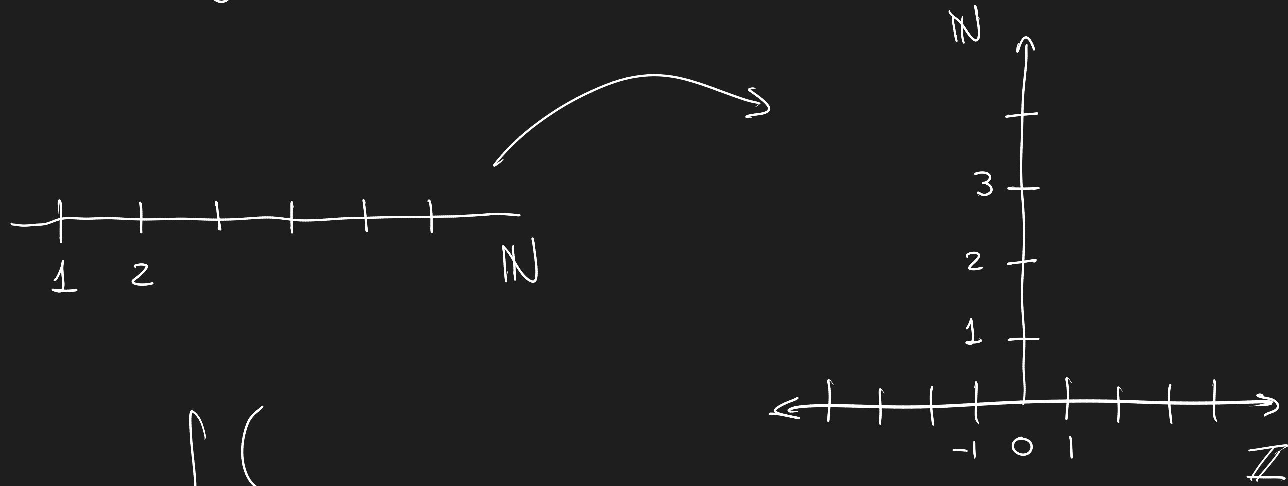
$$f(q,n) = \begin{cases} 2^{q} \cdot 5^{n} & \text{si } q \geq 0 \\ 3^{-q} \cdot 5 & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Observo que para cada (q, n), $\exists\, n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ f es inyectiva

Si encuentro $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ inyectiva

$\Rightarrow \exists$ alguna función biyectiva.



$$g(n) = \begin{cases} (\\ \end{cases}$$

d) $(-1,1) \cap \mathbb{Q} =: A$

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : -1 < q < 1 \}$$

$A \subseteq \mathbb{Q}$ con A infinito

y como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad A \sim \mathbb{N}$

//

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

a) Como $B \setminus A$ es infinito

> **Teorema**
> Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Dem: Puedo armar una sucesión de elementos de X, eligiendo y "sacando" de a 1

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

y como siempre puedo sacar 1 más, puedo armar una sucesión infinita (numerable).

Por Teorema

$\Rightarrow \exists\, C \subseteq B \setminus A \ /\ C$ sea numerable

y como A es contable

☆ unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow C \cup A$ es numerable

$\therefore \quad C \sim C \cup A$

$\boxtimes$

☆ Unión de Numerables es Numerable

Hq: A numerable

B numerable

Dem:

A numerable $\Rightarrow \exists\, f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

B numerable $\Rightarrow \exists\, g : B \to \mathbb{N}$ inyectiva

Si $C = A \cup B$

$\Rightarrow$ defino $h : C \to \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot f(x) & \text{si } x \in A \\ 2 \cdot g(x) + 1 & \text{si } x \in B \wedge \underbrace{x \notin A}_{\text{Caso } A \cap B \neq \emptyset} \end{cases}$$

Como h es inyectiva con $h : C \to \mathbb{N}$

$\Rightarrow \#C \leq \#\mathbb{N}$

y como C es infinito

y $\#\mathbb{N} \leq \#D \quad \forall$ conjunto D infinito

$\Rightarrow \#C = \#\mathbb{N}$ $\blacksquare$

b) $B \setminus A$ es infinito

y A es contable (finito o infinito)

Por a) sé que

$$\exists C \subseteq B \setminus A \,/\, C \sim C \cup A$$

que para si no es numerable ?

Mal !

Si digo $C = B \setminus A$

$\Rightarrow B \setminus A \sim B \setminus A \cup A = B$

?

Cómo lo muestro sin usar la demo ?

6. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

Lo hice arriba.

Para conjuntos finitos es igual.

7. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.

(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

a) Como $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$

y $\mathbb{P}$ es infinito ?

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ es numerable.

?

b) La pista es el ej a)

Quiero escribir

$$\mathbb{N} = \dot{\bigcup_{i \in B}} A_i$$

$B \subseteq \mathbb{N}$ numerable

Todos los elementos $n \in \mathbb{N}$ son de la forma (por TFC):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \quad \text{para cada primo } p_i$$

Puedo elegir B como el conjunto de primos (numerable por a)

y meter en cada conjunto

nulos

$5^{k>0}$ y 2^0 y 3^0

Comienzo $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^{k_4}, \ \ldots$

meto todos los que tengan un $2^{k>0}$

meto todos los que tengan un $3^{k>0}$ y 2^0 ← exponente nulo

$$\Rightarrow \quad A_{p_i} = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = p_i^{k_0} \cdot \prod_{\substack{q_i \in P \\ q_i > p_i \\ k_i \in \mathbb{N}}} q_i^{k_i}, \quad \forall k_0 \geq 1, \ k_0 \in \mathbb{N} \right\}$$

primo i

" n divisible por $p_i^{k_i}$, $\forall k_i > 0$ con $k_i \in \mathbb{N}$, y no divisible por primos menores a p_i "

$$\Rightarrow \quad \mathbb{N} = \biguplus_{\substack{p_i \in P \\ P \subseteq \mathbb{N}}} A_{p_i}$$

con P el conjunto de Primos.

$\boxtimes$

Más sencillo:

P2 7b) $\quad P = \{\text{primos en } \mathbb{N}\} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$A_1 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} \ \alpha_1 \in \mathbb{N}_0 \} = \{1, p_1, p_1^2, p_1^3, \ldots\} \sim \mathbb{N}$

$A_2 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ \alpha_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \alpha_2 \in \mathbb{N} \} \sim \mathbb{N}$

$A_3 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \alpha_3 \in \mathbb{N} \} \sim \mathbb{N}$

$\vdots$

$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: $\supseteq$) ✓

$\subseteq$) $m \in \mathbb{N} \rightarrow$ existe uma decomp. em nº primos: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \in A_r$ ✓

8. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

a) <u>Idea</u>

Defino cada B_n como $A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$

$$\Rightarrow B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$
$$\vdots$$
$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

De esta manera,

$$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$$

nota que también vale si B_i y/o B_j son el vacío.

b) HG:

- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

qvq

$$A \overset{?}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Para probarlo, pruebo doble inclusión

$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$) Sé $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$

y sea $a \in A$

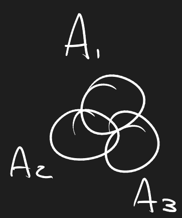
$\Rightarrow a \in A_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

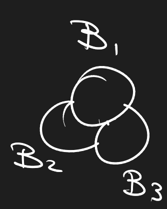
Como

$$\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Si elijo $m = n_0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\leq n_0} B_n = \bigcup_{n\leq n_0} A_n$$





$$\Rightarrow A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\leq n_0} B_n$$

y como $a \in A_{n_0}$

$\Rightarrow a \in B_{m_0}$ para algún $m_0 \leq n_0$

y como esto vale $\forall a \in A$

$$\Rightarrow A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B}_{\text{¿vale? por qué}}$$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq A$) Si $b \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\Rightarrow b \in B_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

y como

$B_n \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Hipótesis)

$\Rightarrow B_{n_0} \subseteq A_{n_0}$

con $A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$

$\Rightarrow B_{n_0} \subseteq A$

y como ésto vale $\forall b \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq A$$

Find mente

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

$\blacksquare$

9. (a) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

a) • Del ej. 7, sé que $\mathbb{N}$ se puede escribir como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos 2 a 2.

• Del ej 8 sé que a partir de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puedo armar $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n \cap B_m = \emptyset \ \forall n \neq m$

i.e. (B_n) es una suc. de conj. disjuntos 2 a 2.

En el ej 9 nos piden probar que unión numerable de conjuntos contables es contable.

A partir del **ejercicio 8**, puedo afirmar que estos conjuntos (A_n) originales se pueden escribir como (B_n) disjuntos 2 a 2. Acá no habría problema con el caso B_n finito, pues el punto 8 vale para **cualquier** tipo de conjunto (finito, numerable, y no numerable)

Ahora, teniendo estos B_n disjuntos 2 a 2, por **ejercicio 7**, me gustaría decir que existe una biyección entre $\bigcup B_n$ y los naturales.

El problema acá es que el ejercicio 7 **solo vale para conjuntos numerables** (no finitos). ¿Es acá donde está "el problema" de tener conjuntos finitos en (B_n) que menciona Nico?

¿Puedo solucionar ésto uniendo a todos los conjuntos B_n **finitos** en un mismo B_{fin}, probar el razonamiento de arriba **solo** para los $(B_n^{infinito})$ tales que B_n es infinito, o sea, probando que $B_{infin} = \bigcup B_n^{infinito}$ es contable, para luego unir $B_{fin} \cup B_{infin}$, concluyendo por ej 6 que esta última unión es contable (independientemente si B_{fin} es finito o infinito)?

Daniel Carando

Hola Leandro, cómo andás? La idea está muy bien, pero habría que ver los detalles.
Por ejemplo, si entiendo el razonamiento, vos querés armar una biyección entre $UB_n^{infinito}$ y $\mathbb{N}$ usando el ejercicio 7.
Sacaste los B_n finitos porque te molestaban, pero qué pasaría si sólo tenés finitos B_n con cardinal infinito? Podrías armar la biyección usando el ejercicio 7?
Comentario: encontrar biyecciones suele ser complicado y no siempre necesitás la biyección.
Fijate si algo de esto ayuda y cualquier cosa nos volvés a preguntar.

👍 1 ☺ +

Leandro Carreira (EDITED)

Hola Dani! No se me había ocurrido ese caso, pero es cierto que pedir biyección ahí es demasiado, más allá de este ejercicio.

Lo que sí podría pedir es justo lo que necesito, no más: Que exista una **función inyectiva** entre los $B_n^{infinito}$ y los conjuntos numerables disjuntos 2 a 2 del ejercicio 7b.

De esa forma me aseguro que **siempre** exista, porque si son finitos $B_n^{infinito}$ (digamos que tengo m de estos conjuntos) seguro existe una

$$f : \bigcup B_n^{infinito} \to C_{7b}$$

con C_{7b} el conjunto de los conjuntos numerables disjuntos dos a dos que haya elegido en el ejercicio 7b, que además de ser **cada uno numerable** (no finitos) y **disjuntos 2 a 2**, tengo una **cantidad numerable** (infinita) de ellos, o sea, son más que m para todo $m \in \mathbb{N}$.

Si tengo infinitos $B_n^{infinito}$, también vale, pues éstos son a lo sumo numerables.

Creo que con eso se solucionaría lo de arriba.

Y una observación/curiosidad que me surgió al pensar por qué pedir una biyección acá es demasiado, es que separar $\mathbb{N}$ como en el ejercicio 7, es decir, como

- una unión numerable
- de conjuntos numerables
- y además disjuntos 2 a 2

es algo así como "la forma que más información nos da sobre $\mathbb{N}$", pues es como haber desarmado $\mathbb{N}$ y poner las piezas sobre la mesa que de otra manera estarían ocultas, como el hecho de poder dividir $\mathbb{N}$ en numerables conjuntos disjuntos, con cada uno de estos conjuntos también numerables.

Si alguno de estos conjuntos fuera finito, o la unión fuera finita, sería una representación "más fácil" pero "menos informativa" sobre $\mathbb{N}$.

Teniendo la representación de $\mathbb{N}$ como la de 7b, tengo a $\mathbb{N}$ de una forma que me sirve para probar y bombardear con muchas otras preguntas, casos particulares de esta representación más general.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

$$A^m = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{m \text{ veces}}$$

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m = A \cup (A \times A) \cup (A \times A \times A) \cup \dots$$

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Llamo

1 = Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$P_1(A)$ = Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$P_2(A)$ = Todos los subconjuntos de A con 2 elementos

$\vdots$

$P_n(A)$ = Todos los subconjuntos de A con n elementos

y sea

$B_n^i \in P_n(A)$ un subconjunto de A con n elementos

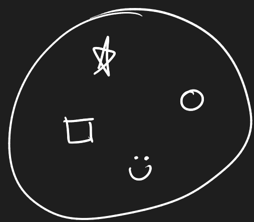
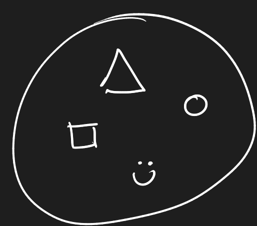
y además

$$\# P_n(A) = 2^n$$

Entonces sé que como B_n^i tiene finitos (n) elementos, puedo ordenarlos de alguna forma

$$\Rightarrow \exists\, g_n : B_n^i \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

Ej: si $n = 4$

y $B_4^1 =$  $B_4^2 =$ 

$$\Rightarrow g : P_4 \longrightarrow \mathbb{N}^4$$

$$g\left(B_4^1\right) = [\star, \circ, \square, \smile]$$

y

$$g\left(B_4^2\right) = [\star, \circ, \square, \triangle]$$

$\therefore$ Para cada conjunto B_n^i puedo hallar una función inyectiva que lo ordene de alguna forma

y para cada $B_n^i \neq B_n^j$, el vector resultante es diferente

$\therefore$ g_n es inyectiva

$$\therefore \quad \# B_n^i \leq \# \mathbb{N}^n = \# \mathbb{N}$$

y como $P_n = \bigcup_{i=0}^{2^n} \{B_n^i\}$

$$\Rightarrow \# P_n = \# \mathbb{N}$$

y además, como

$$\mathcal{P}_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

y unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

(ej 9)

$$\Rightarrow \# \mathcal{P}_f(A) = \# \mathbb{N} \quad \boxed{\text{M}}$$

¿ Revisar Procedimiento