

Teoremas de punto fijo

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de \mathbb{R} . Sea $f: E \rightarrow E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

q.v.g

$$\exists \alpha \in (0, 1) /$$

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

$$d\left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot |x - y|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot d(x, y)$$

$$\underbrace{\quad}_{\alpha}$$

∴ f es contracción,

Falla que $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo

pues $\left(\frac{1}{n}\right)$ es de Cauchy, pero no converge en E

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq k$$

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \rightarrow E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \rightarrow E$ a la función $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n veces). Probar:

- (a) Si $x \in E$ es punto fijo de f , entonces es punto fijo de f^n .
- (b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E .
Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n , entonces $f(x)$ también lo es.
- (c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

a) Sé que

$$f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$$

(Caso Base) ✓

Paso Inductivo

$$\text{HI} \quad f \circ f(x) = x$$

$$\text{¶¶¶} \quad f \circ f \circ f(x) = x$$

$$\underbrace{f \circ f \circ f(x)}_{= x} = f \circ f(x) \quad \checkmark$$

$$\circ \circ \quad \text{si } f(x) = x \Rightarrow f^n(x) = x$$



b) Si x es PF de $f^n(x)$

$$\Rightarrow f^n(x) = x$$

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ veces}} = x$$

$$CB) f^n(x) = x \quad \checkmark$$

$$PI) \quad \text{H I} \quad \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}(x) = x$$

$$q \vee q \quad \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-1 \text{ veces}}(x) = x$$

$$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-1 \text{ veces}}(x) = x$$

$$\Rightarrow f\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-1 \text{ veces}}(x)\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow f^n(x) = f(x)$$

∴ si x es PF de $f^n(x) \Rightarrow f(x)$ también lo es.

Por Teorema de PF

f^n tiene un único PF x

Como $f(x)$ es PF de f^n

$$x = f(x)$$



c) Lo hace Vicky en la Teórica.

$f(x) = \cos x$ no es contractiva por teorema

del Valor Medio

Compongo

$$f^2(x) = \cos(\cos x)$$

$$|f(x) - f(y)| = \overbrace{|\sin c|}^{f'(c)} \cdot |x - y|$$

≤ 1
Puede ser 1!

Derivo

$$f_2'(x) = \sin(\cos x) \cdot \sin x \leq 1$$

que nunca es 1:

$$\bullet \text{ Si } |\sin x| = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad x = \frac{3}{2}\pi$$

↓ ↓

$$\Rightarrow \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\cos x) \cdot \sin x = 0$$

$$\bullet \text{ Si } |\sin x| < 1 \Rightarrow \underbrace{\sin(\cos x)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{< 1} < 1$$

$$\therefore f_2'(x) < 1$$

\Rightarrow Por TVM

$$\exists c \in E \quad / \quad |f(x) - f(y)| = |f_2'(c)| \cdot |x - y|$$

$\underbrace{\quad}_{<1}$
encuentre el $x \in (0,1)$

$\therefore \cos(\cos x)$ es contractiva.

\therefore tiene un punto fijo x

por b)

$$\text{como } f^2(x) = x \Rightarrow f(x) = x,$$

$\Rightarrow \cos x$ tiene un único punto fijo en x .

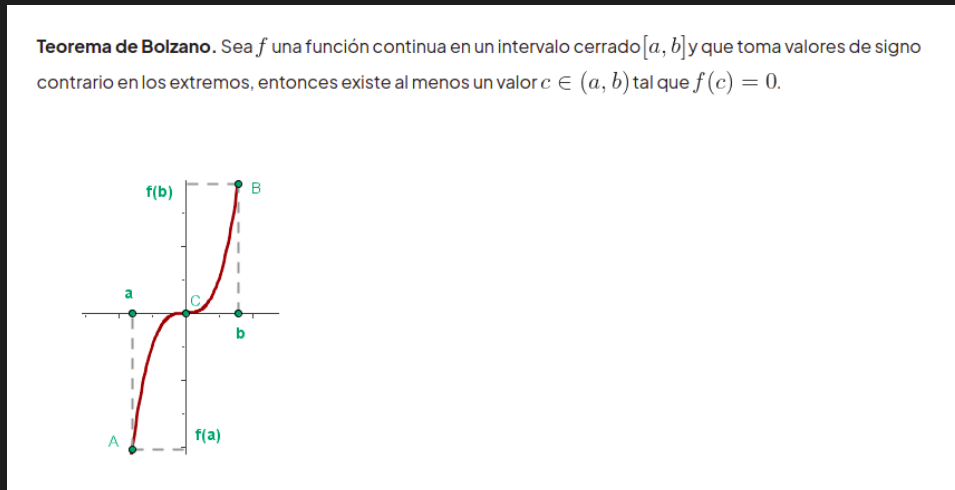
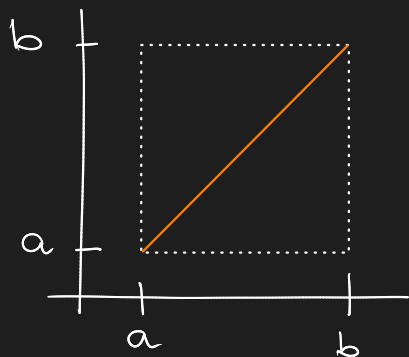


17. Consideremos en \mathbb{R}^n la métrica d_2 . Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Fijemos $M > 0$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$. Probar que f tiene un punto fijo.

Ver consultar con Iván

18. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.

Sugerencia: usar el teorema de Bolzano.



Defino

$$g(x) = f(x) - x$$

\hookrightarrow es continua

Si

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < x$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$$

Calculo

$$g(a) \cdot g(b) = \begin{matrix} \nearrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} < 0 \Rightarrow \text{signo contrario} \end{matrix}$$

\nexists no se salen de $[a, b]$?

$0 \Rightarrow a$ ó b son punto fijo

\Rightarrow Por Bolzano

$$\exists c \in [a, b]$$

$$\text{tal que } g(c) = 0$$

Revisar



$\therefore f$ tiene un punto fijo en C .



19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \rightarrow E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

$$\mathcal{F} = \{ x \in E : f(x) = x \}$$

Idea:

• Veo si toda sucesión converge en $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \stackrel{?}{=} \overline{\mathcal{F}}$

sea $(x_n) \subset \mathcal{F}$ sucesión convergente a algún $x \in E$

como f continua,

$$\Rightarrow \text{si } x_n \rightarrow x$$

$$\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

$$\text{pero } f(x_n) \rightarrow x$$

$$\Rightarrow f(x) = x$$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{F}$$

Obs

$$\text{Como } x_n \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow x_n = f(x_n)$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x$$

$$\text{y } f(x_n) \rightarrow x$$

\therefore como toda sucesión convergente, converge en \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}, \text{ o sea, } \mathcal{F} \text{ es cerrado.}$$



20. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.

Obs: Puede no ser continua.

Si f es creciente

$$\Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall x \leq y \quad (x, y \in [a, b])$$

$$\text{¿?} \quad \exists x_0 \text{ tal que } f(x_0) = x_0$$

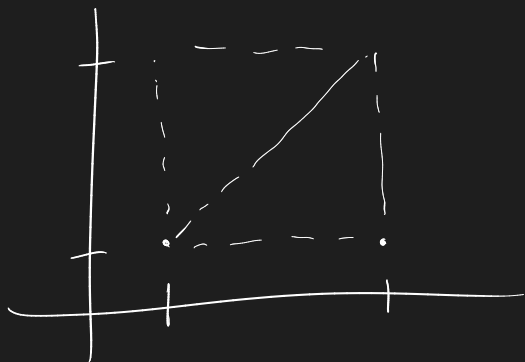
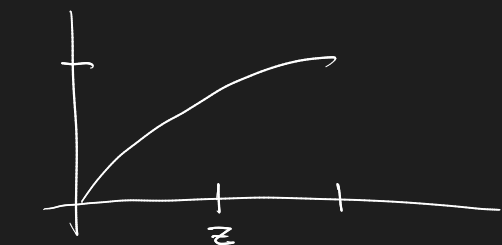
Sea $x \in [a, b]$, $a \leq x \leq b$

f creciente

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

¡! to use que estoy

en $[a, b] \rightarrow [a, b]$



$$\bullet \quad f(a) > a$$

$$f(b) < b$$

$$f(a + \varepsilon) \geq a + \varepsilon$$

