COMPACIDAD I

RECORDANDO: (E,d) ESP. MÉTRICO

- $K \subseteq E$ ES COMPACTO SI TODA SUC EN K TIENE UNA SUBS CONV. (EN K)

- K COMPACTO $\Rightarrow$ K ES CERRADO Y ACOTADO. SI $E = \mathbb{R}^m$ CON LA MÉTRICA USUAL, VALE LA VUELTA

EJEMPLOS:

1) K FINITO $\Rightarrow$ K COMPACTO

SUP $K = \{y_1, \dots, y_m\}$, Y $(x_m) \subseteq K$

ENTONCES $(\exists\, i)$ CON

$$\{x_m : m \geq 1\} \cap \{y_i\} \text{ ES INFINITO}$$

$\rightsquigarrow$ TENGO (x_{m_k}) CON $x_{m_k} = y_i \ \forall i$

($\rightsquigarrow$ CONVERGENTE)

2) SEA $(x_n) \subseteq E$ CON $x_n \to x$.

SEA $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$.

AFIRMO: K ES COMPACTO.

SEA $(y_n) \subseteq K$

(e.j: $(x_3, x_4, x, x_2, x_5, x, \ldots)$)

SEA $A = \{y_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$

- SI A ES FINITO, LISTO:

$$(y_n) \subseteq \underbrace{A}_{\text{COMPACTO}} \rightsquigarrow y_n \text{ TIENE UNA SUBS CONV (EN } A)$$

- SI A ES INFINITO: $\rightsquigarrow$ LUEGO $A \setminus \{x\}$ ES INFINITO
  - TOMO $y_{n_1} \in A \setminus \{x\}$; $y_{n_1} = x_{m_1}$
  - TOMO (PUEDO PUES $A \setminus \{x\}$ ES INFINITO)

$$y_{n_2} \in (A \setminus \{x\}) \setminus (\{y_1, \ldots, y_{n_1}\} \cup \{x_1, \ldots, x_{m_1}\})$$

$\rightsquigarrow n_2 > n_1$; $y_{n_2} = x_{m_2}$ CON $m_2 > m_1$

ASÍ SIGUIENDO, TENGO (y_{m_k}) SUBS

DE $\nearrow (y_m)$ $\searrow (x_m)$

$\rightarrow y_{m_k} \rightarrow x \in K$

3) $E = \mathbb{Q}$, $K = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$

- K ES ACOTADO $\mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2})$
- K ES CERRADO EN E

PERO K NO ES COMPACTO:

TOMO $(x_m) \subseteq K$ CON $x_m \to \sqrt{2}$

(x_m) NO TIENE SUBS. CONV. EN K

PUES SI $x_{m_k} \to x$ EN E

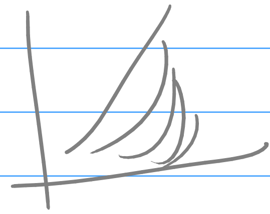
COMO $x_m \to \sqrt{2}$, TENGO $x = \sqrt{2}$

$\notin \mathbb{Q}$

4) SEA $E = C([0,1])$, CON d_∞

SEA $(f_n) \subseteq E$,

$$f_n(x) = x^n$$



OBS: $\underbrace{\|f_n\|_\infty}_{d_\infty(f_n,\,0)} = 1 \quad \forall n$

LUEGO $f_n \in \underbrace{\overline{B}_\infty(0,1)}_{\text{CERRADO Y ACOTADO}}$ PERO NO COMPACTO

(f_{n_k}) NUNCA ES CONVERGENTE:

$$f_{n_k}(x) = x^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

$\therefore \nexists f \in E$ CON $f_{n_k} \to f$

Proposición
Sea (E,d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ un compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.

PROP: SEA $F \subseteq E$ TAL QUE

$(\forall K \subseteq E$ COMPACTO$)$ $F \cap K$ ES COMPACTO

ENTONCES F ES CERRADO

DEM: SEA $(x_n) \subseteq F$ CON $x_n \to x$ $\in E$

SEA $K = \{x_n : n \geq 1\} \cup \{x\}$ → COMPACTO

SABEMOS $F \cap K$ ES COMPACTO

$(x_n) \subseteq$

ENTONCES $\exists\, (x_{n_k})$ CON

$x_{n_k} \to y$ $\in F \cap K$

COMO $x_{n_k} \to x$, TENGO $\overset{F}{\Rightarrow}$ $y = x$ $\boxtimes$