1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.
(b) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$, la función identidad.
(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.
(d) $i : (A, d) \to (E, d)$, la inclusión, siendo (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$.

Aquí d_2 es la métrica euclídea usual, y δ es la métrica discreta.
¿Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos d_1 o d_∞?

a) Sea $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $(\mathbb{R}^2, d_2)$

$\Rightarrow (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$

Si tomo

$$f(x_n, y_n) = x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2 + y^2 = f(x, y)$$

mostré que dada una sucesión convergente, al aplicar f, obtengo una sucesión convergente

$\therefore$ f es continua. $\boxtimes$

b) Suc. convergentes en $(\mathbb{R}^2, \delta)$ son aquellas constantes a partir de un n_0.

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y) \iff \exists n_0 \,/\, x_n = x \wedge y_n = y \quad \forall n \geq n_0$$

$$\therefore \exists n_0 \,/\, f(x_n, y_n) = (x_n, y_n) = (x, y) = f(x, y) \quad \forall n \geq n_0$$

$\boxtimes$

c) $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ en $(\mathbb{R}^2, d_2)$

pero

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ no converge en $(\mathbb{R}^2, \delta)$

pues $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m}$ $\forall n \neq m$

$\therefore \delta\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)\right) = 1$ $\forall n \neq m$

$\Rightarrow$ f no es continua.

$\boxtimes$

d) f es cont. $\Leftrightarrow$

para cada $f^{-1}(Y)$ abierto $\Rightarrow$ $Y \subseteq E$ abierto

Preimagen:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) = y \text{ con } y \in Y\}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}x^2 + (x-1)^2 y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

4. Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } m \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ coprimos.} \end{cases}$$

Probar que f es continua en los irracionales del $(0,1)$ y **no** es continua en los racionales del $(0,1)$.

5. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0. Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

6. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

7. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea d_2, probar que:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y\,\mathrm{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencionar otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:

(a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.

(b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.

9. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f, g : E \to E'$ funciones continuas.

(a) Sea $D \subseteq E$ un subconjunto *denso*, esto es, tal que $\overline{D} = E$. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(b) Concluir que la función $R : C([0,1]) \to \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}$ dada por $R(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.

10. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E'.