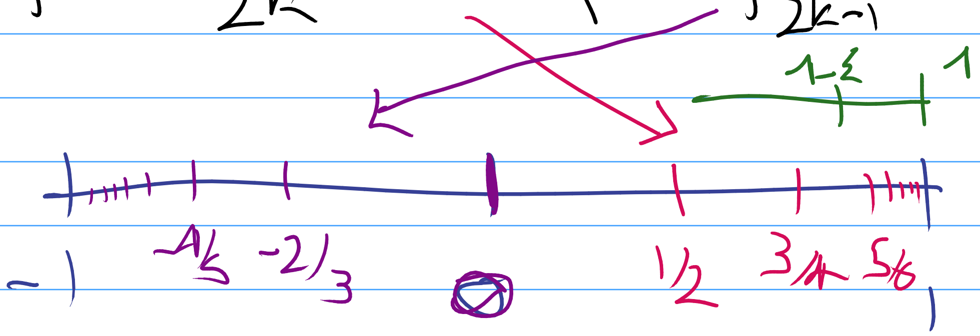
SUPREMOS E ÍNFIMOS II

1) $A = \{(-1)^n (1 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$

$= \{0, 1/2, -2/3, 3/4, -4/5, \dots\}$

$= \{1 - \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{2k-1} - 1 : k \in \mathbb{N}\}$



AFIRMO: $\sup A = 1$, $\inf A = -1$

- $\underbrace{(-1)^n (1 - 1/n)}_{\text{NEGATIVO, } n \text{ IMPAR}} \leq 1 \quad \forall n$; $n = 2k$: $1 - 1/2k \leq 1$

  $\iff 0 \leq 1/2k$ ✓

- SEA $\varepsilon > 0$; QVQ $\exists n /$

  $(-1)^n (1 - 1/n) > 1 - \varepsilon$;

  (*)

PROPONGO $m = 2k$; con $k \in \mathbb{N}$

$\circledast \iff 1 - \frac{1}{2k} > 1 - \varepsilon$

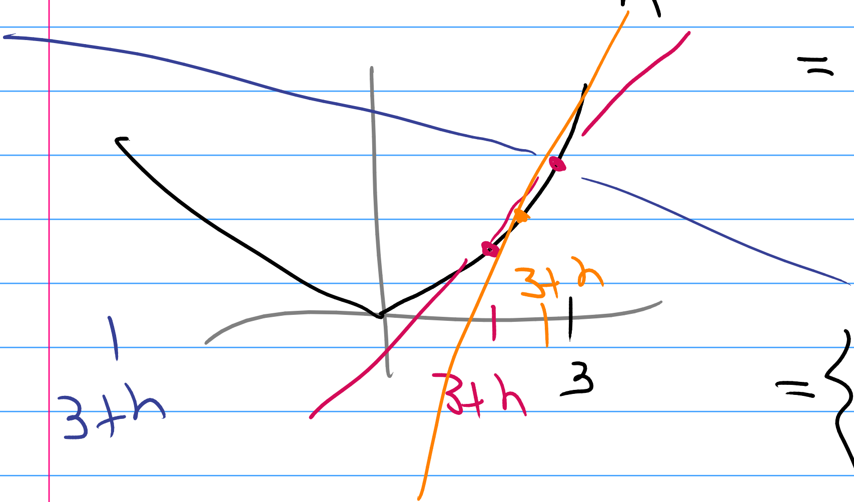
$\iff \varepsilon > 1/2k \iff k > \frac{1}{2\varepsilon}$

NOTAR QUE A NO TIENE MÁX PUES $1 \notin A$.

2) SEA $f(x) = x^2$

$$A = \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} : h \in (-\infty, 0) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\overbrace{(3+h)^2 - \cancel{3^2}}^{\cancel{9} + 6h + h^2}}{h} : h \in (-\infty, 0) \right\}$$



$= \{ 6 + h : h \in (-\infty, 0) \}$

$= (-\infty, 6) \longrightarrow$ SUP $A = 6$,
A NO ES ACOT INF

ANÁLOG,

$$B = \left\{ \frac{f(3+h) - f(3)}{h} : h \in (0,+\infty) \right\}$$

$\inf B = 6$ $\qquad$ $\sup B = +\infty$

Proposición

Sea $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Entonces:

(1) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$;

(2) $\sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$.

DADOS $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

EJEMPLOS:

- $A = \{a\}$. ENTONCES

$$A \cdot B = \{ab : b \in B\} =: aB \ (\text{¡O}\ \text{!})$$

- $[0,2] \cdot [0,3] = [0,6]$:

$\subseteq)$ SEAN $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 3$

$$\Rightarrow 0 \leq ab \leq 2b \leq 2 \cdot 3 = 6 \checkmark$$

2) SEA $x \in [0,6]$. ENTONCES

$$x = \underbrace{2}_{\in[0,2]} \cdot \underbrace{x/2}_{\in[0,3]}$$

OJO:

- $A = B = (-\infty, 0]$; A, B ESTÁN ACOT SUP

PERO $A \cdot B = [0, +\infty)$

- $\underbrace{\sup([-4,-3])}_{-3} \cdot \underbrace{\sup([-6,-5])}_{-5} = 15$;

$$\sup\Big(\underbrace{[-4,-3] \cdot [-6,-5]}_{=[15,24]}\Big) = 24$$

PROP: $A, B \subseteq [0, +\infty)$ ACOT SUP. ENTONCES AB ESTÁ ACOT SUP Y

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$$

6. Dados un conjunto de números reales A y $c \in \mathbb{R}$, denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}\,.$$

Más aún, $-A$ será el conjunto $(-1)A$. Probar:

(a) Si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente, entonces cA está acotado superiormente y $\sup(cA) = c\sup(A)$.

¿CÓMO RESOLVER (b) CON LA PROP?

DEM:

- SEAN $a \in A$, $b \in B$. ENTONCES

$$a \cdot b \underset{\substack{b \geq 0 \\ a \leq \sup A}}{\leq} \sup A \cdot b \underset{\substack{\sup A \geq 0 \\ b \leq \sup B}}{\leq} \underbrace{(\sup A)(\sup B)}_{\text{ES COTA SUP DE } AB\ \checkmark}$$

- SEA $\varepsilon > 0$. ¿VQ $\exists\, a \in A, b \in B \,/$

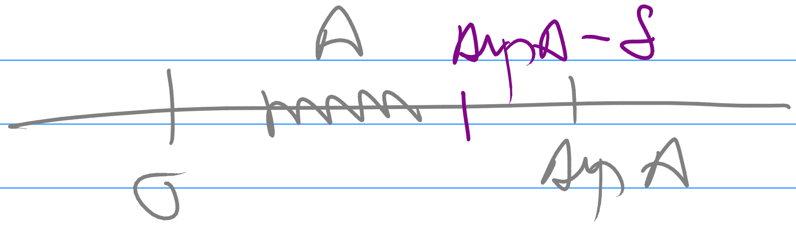
$$(\sup A)(\sup B) - \varepsilon < ab$$

SABEMOS:

- DADO $\delta > 0$, $\exists\, a \in A \,/\, \sup A - \delta < a$
- DADO $\gamma > 0$, $\exists\, b \in B \,/\, \sup B - \gamma < b$

APARTE: $\underbrace{\sup A = 0}_{\text{EN TAL CASO, } A=\{0\}}$, $\sup B = 0$; CASO FÁCIL

SUPONGAMOS $\sup A, \sup B > 0$ (COMPLETAR)



Tomo δ, γ con $0 < \sup A - \delta < a$;

a, b

$0 < \sup B - \gamma < b$

Así, $ab > (\sup A - \delta)(\sup B - \gamma)$

$= \cancel{(\sup A)(\sup B)} - \delta \sup B - \gamma \sup A + \delta\gamma$

$\underset{?}{>} \cancel{(\sup A)(\sup B)} - \varepsilon$

$\iff -\delta \sup B - \gamma \sup A + \delta\gamma > -\varepsilon$

$\iff \varepsilon > \underbrace{\delta \sup B}_{=: r} + \underbrace{\gamma \sup A}_{=: s} - \delta\gamma$

(PUEDO TOMAR $\delta = \gamma$)

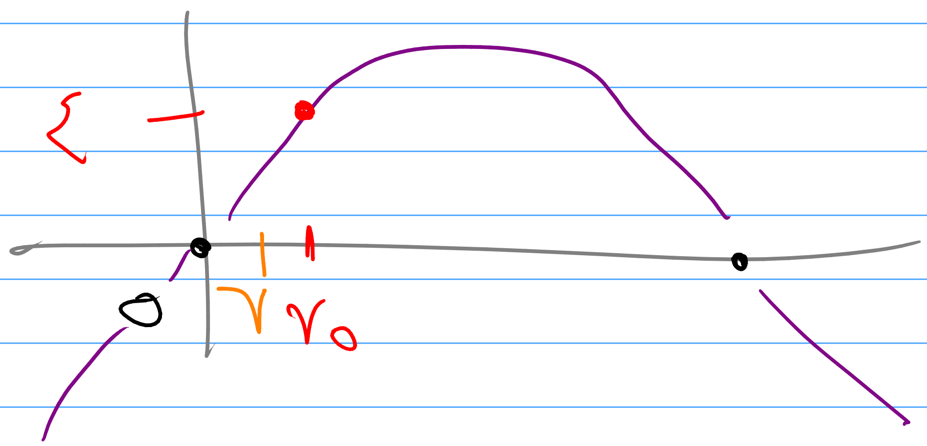
Lema: Sean $r, s > 0$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ $r_0 > 0$ con

- $\varepsilon > r\, r + r\, s - r^2$
- $r < s$, $r < r$ $\circledast$

Dem: Supongamos $s \leq r$. Así

$$r r + r s - r^2 \leq 2 r r - r^2 < \varepsilon$$
?



Tomo cualquier

$$r \in (0, r_0), \quad r < s;$$

o bien, $r \in (0, \min\{r_0, s\})$

$\boxtimes$