

1. Sea $(B_i)_{i \in I}$ una familia de bolas abiertas y disjuntas de \mathbb{R}^n . Probar que el conjunto I es contable.

Arranco en \mathbb{R}

Son disjuntas

Así tienen un racional adentro

Así le asigno ese racional a esa bola

$$\# I \leq \# \mathbb{Q}$$

2. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, F' el conjunto de sus puntos de acumulación y $A = F \setminus F'$ el conjunto de sus puntos aislados.

(a) Probar que A es a lo sumo numerable.

(b) Sea $B = F'$. ¿Puede B tener puntos aislados? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso contrario, dar una demostración.

a) Usando el 1

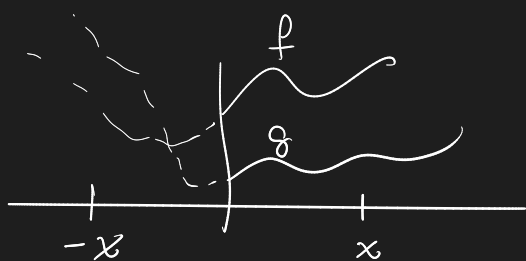
Centro una bola en cada punto aislado

Radio como d. entre puntos sobre \mathbb{Z} .

Asigno un racional en cada bola

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f y g son continuas en 0 y $f(0) > g(0)$.

Probar que existe $\delta > 0$ tal que $\inf_{|x| < \delta} f(x) > \sup_{|x| < \delta} g(x)$.



$$d(f(0), g(0)) > 0$$

11

$$\inf_{|x| < \delta} f(x) > \sup_{|x| < \delta} g(x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

$$\text{En } x=0,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } d(0, y) < \delta \Rightarrow d(f(0), f(y)) < \varepsilon$$

$$\text{En particular, si } \varepsilon_0 := \frac{M}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \delta_1 \text{ para } f \quad / \quad d(f(0), f(y)) < \varepsilon_0$$

$$\text{y } \exists \delta_2 \text{ para } g \quad / \quad d(g(0), g(y)) < \varepsilon_0$$

\Rightarrow si tomo $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$

\Rightarrow Probé que existe $\delta > 0$.

□

4. Decidir en cada caso si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando un contraejemplo si son falsas o una demostración si son verdaderas: Sea (E, d) espacio métrico y $A, B \subseteq E$;

(a) Si $A \subsetneq B$, entonces $\overline{A} \subsetneq \overline{B}$;

(b) $(A \setminus B)^\circ = A^\circ \setminus B^\circ$;

(c) $\partial(\overline{A}) \subseteq \partial(A)$.

$$a) \quad A \subsetneq B \stackrel{?}{\Rightarrow} \overline{A} \subsetneq \overline{B}$$

$$\text{si } A = A^\circ \text{ y } \overline{A} = B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$$

$$\text{si } \left. \begin{array}{l} A = (0, 1) \\ B = [0, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{A} = [0, 1] = B \quad \text{Falso}$$

$$b) \quad \text{Diagram showing two overlapping circles. The left circle is shaded with diagonal lines. This is equal to the right circle, which is also shaded with diagonal lines.$$

$$\text{otra} \quad \text{Diagram showing a circle with a smaller circle inside it. This is not equal to the right circle, which is a circle with a dashed boundary and a smaller circle inside it.$$

$$A = [-1, 1]$$

$$B = \{0\} \leftarrow \text{int. vacío en dist. 1.}$$

$$c) \quad \overline{A} = A \cup \partial A$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \Rightarrow \overline{A} = A^\circ \cup \partial A$$

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

q.v.q

$$\partial \bar{A} \subseteq \partial A$$

$$\text{Sic } x \in \partial \bar{A} \quad \forall r >$$

$$\Rightarrow \exists y \in B(x, r), \quad y \in \bar{A} \quad \wedge \quad y \in \underbrace{\bar{A}^c}_{y \in (A^\circ)^c}$$

Def. Triang.

Contro ejemplo para la vuelta

$$\partial \bar{A} \stackrel{?}{=} \partial A$$

$$\text{Si: } A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial A = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \mathbb{R} \Rightarrow \partial \bar{A} = \emptyset$$

7. Sea, (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \rightarrow E'$ una función continua. Probar que el conjunto *gráfico* de f definido como

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\},$$

es cerrado en $E \times E'$ con la métrica \bar{d} del ejercicio anterior.

$G(f)$ es cerrado \Leftrightarrow

1. Toda sucesión convergente, lo hace en $G(f)$

Sea $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$, con

$$(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, f(x))$$

$$x \in E$$

como $f : E \rightarrow E'$

$$f(x) \in E'$$

Por convergencia de coordenadas

$$x_n \rightarrow x$$

y

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Como $x \in E$ y $f : E \rightarrow E'$

$$\Rightarrow f(x) \in E'$$

$$\therefore (x, f(x)) \in G(f) = \left\{ (x, f(x)) : x \in E \right\}$$

$\nwarrow f(x) \in E'$

Finalmente

$G(f)$ es cerrado.



2-) $z \in$ LA LISTA. $\forall \epsilon > 0: \overline{G(f)} \subseteq G(f)$

$$(a, b) \in \overline{G(f)} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x \in E / \overline{d}((a, b), (x, f(x))) < \epsilon$$

como f CONTINUA, $\exists \delta > 0 / d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{2}$

$$\textcircled{*} d(a, x) \leq \overline{d}((a, b), (x, f(x))) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \text{ TOMO } \epsilon' = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \delta\} \Rightarrow \exists x \in E / \overline{d}((a, b), (x, f(x))) < \epsilon'$$

$$\begin{aligned} \underline{d'(b, f(a))} &\leq \underbrace{d'(b, f(x))}_{\textcircled{*}} + \overline{d'(f(a), f(x))} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\leq \sqrt{d'(b, f(x))^2 + d(a, x)^2} = \overline{d}((a, b), (x, f(x))) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ d'(b, f(a)) \\ = 0 \end{array}$$

8. (a) Probar que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\overline{K^\circ}$ también lo es.
(b) Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ dado por $K = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 2\}$. ¿Es $\overline{K^\circ}$ compacto?

$$= (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$\left(\overline{(0, \sqrt{2})}\right)^c = \left((-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)\right) \cap \mathbb{Q} \quad \text{es abierto}$$

$$\therefore (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \text{ es cerrado.}$$

