Análisis Avanzado - Lista de ejercicios

1. Sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de bolas abiertas y disjuntas de $\mathbb{R}^n$. Probar que el conjunto I es contable.

2. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, F' el conjunto de sus puntos de acumulación y $A = F \setminus F'$ el conjunto de sus puntos aislados.

   (a) Probar que A es a lo sumo numerable.

   (b) Sea $B = F'$. ¿Puede B tener puntos aislados? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso contrario, dar una demostración.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f y g son continuas en 0 y $f(0) > g(0)$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $\inf\limits_{|x|<\delta} f(x) > \sup\limits_{|x|<\delta} g(x)$.

4. Decidir en cada caso si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando un contraejemplo sin son falsas o una demostración si son verdaderas: Sea (E, d) espacio métrico y $A, B \subseteq E$;

   (a) Si $A \subsetneq B$, entonces $\overline{A} \subsetneq B$;

   (b) $(A \setminus B)^\circ = A^\circ \setminus B^\circ$;

   (c) $\partial(\overline{A}) \subseteq \partial(A)$.

5. Sea (E, d) un espacio métrico y $S \subseteq E$. Para $\varepsilon > 0$ definimos $S_\varepsilon := \{x \in E : d(x, S) < \varepsilon\}$. Probar que
$$\bigcap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon = \overline{S}.$$

6. Sea, (E, d) y (E', d') espacios métricos. Definimos en $E \times E'$ la función $\overline{d}$ como
$$\overline{d}((x, x'), (y, y')) := \sqrt{d(x, y)^2 + d'(x', y')^2}.$$
   Probar que $(E \times E', \overline{d})$ es un espacio métrico.

7. Sea, (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una funión contínua. Probar que el conjunto *gráfico de* f definido como
$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\},$$
   es cerrado en $E \times E'$ con la mátrica $\overline{d}$ del ejercicio anterior.

8. (a) Probar que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\overline{K^\circ}$ también lo es.

   (b) Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ dado por $K = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 2\}$. ¿Es $\overline{K^\circ}$ compacto?

9. Sea (E,d) un espacio métrico. Para $K \subseteq E$ y $\varepsilon > 0$ definimos

$$B(K,\varepsilon) = \bigcup_{x\in K} B(x,\varepsilon).$$

Probar que si K es compacto y $U \subseteq E$ es un abierto tal que $K \subseteq U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(K,\varepsilon) \subseteq U$.