**Teoremas de punto fijo**

**14.** Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que $f$ es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

qvq

$\exists \alpha \in (0,1) /$

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \alpha \cdot d(x,y) \qquad \forall x,y \in E$$

$$d\left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right) = \left|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right|$$

$$= \frac{1}{3} \cdot |x - y|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{\alpha} \cdot d(x,y)$$

$\therefore$ f es contracción.

Falla que $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es completo

pues $\left(\frac{1}{n}\right)$ es de Cauchy, pero no converge en $E$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\boxtimes$

**15.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0,1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que $f$ es una contracción.

$$\left| \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq K$$

**16.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ ($n$ veces). Probar:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de $f$, entonces es punto fijo de $f^n$.

(b) Si $E$ es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n$ es una contracción, entonces existe un único punto fijo de $f$ en $E$.

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de $f^n$, entonces $f(x)$ también lo es.

(c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

a) Sé que

$$f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$$

(Caso Base) ✓

Paso Inductivo

HI $\quad f \circ f(x) = x$

qvq $\quad f \circ f \circ f(x) = x$

$$f \circ f \circ \underbrace{f(x)}_{= x} = f \circ f(x) \quad ✓$$

$\therefore$ si $f(x) = x \Rightarrow f^n(x) = x$

$\boxtimes$

b) Si $x$ es PF de $f^n(x)$

$\Rightarrow f^n(x) = x$

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}(x) = x$$

CB) $f^n(x) = x$ ✓

PI) HI $\overbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f(x)}^{n \text{ veces}} = x$

qvq $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n-1 \text{ veces}} = x$

$\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n-1 \text{ veces}} = x$

$\Rightarrow f\left( f \circ f \circ \dots \circ f(x)\right) = f(x)$

$\Rightarrow f^n(x) = f(x)$

$\therefore$ si $x$ es PF de $f^n(x) \Rightarrow f(x)$ también lo es.

Por Teorema de PF

$f^n$ tiene un único PF $x$

Como $f(x)$ es PF de $f^n$

$x = f(x)$

?

c) Lo hace Vicky en la Teórica.

$f(x) = \cos x$ no es contractiva pues por teorema del Valor Medio

$$|f(x) - f(y)| = \overbrace{\underbrace{|\sin c|}_{\leq 1}}^{f'(c)} . |x-y|$$

Puede ser 1!

Compongo

$$f^2(x) = \cos(\cos x)$$

Derivo

$$f_2'(x) = \sin(\cos x) . \sin x \leq 1$$

que nunca es 1:

- Si $|\sin x| = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ó $x = \frac{3}{2}\pi$

$$\Rightarrow \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\cos x) . \sin x = 0$$

- Si $|\sin x| < 1 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\sin(\cos x)}_{\leq 1}}_{\leq 1} . \underbrace{\sin x}_{< 1} < 1$

$\therefore f_2'(x) < 1$

$\Rightarrow$ Por TVM

$$\exists c \in E \;/\; |f(x) - f(y)| = |f_2'(c)| . |x-y|$$

$$\underbrace{\phantom{xx}}_{<1}$$

encontré el $\alpha \in (0,1)$

$\therefore$ $\cos(\cos x)$ es contractiva.

$\therefore$ tiene un punto fijo $x$

por b)

como $f^2(x) = x \Rightarrow f(x) = x$,

$\Rightarrow$ $\cos x$ tiene un único punto fijo en $X$. $\boxtimes$

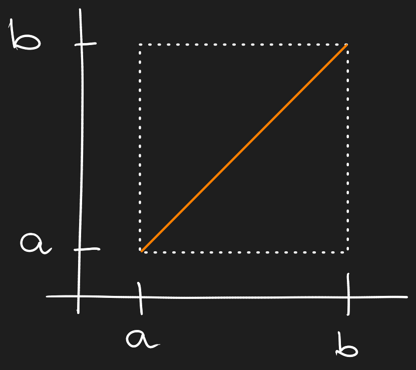
**17.** Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la métrica $d_2$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Fijemos $M > 0$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$.

Probar que $f$ tiene un punto fijo.

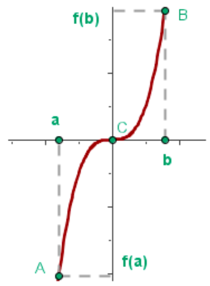
Ver consultar con Iván

**18.** Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Probar que $f$ tiene un punto fijo.

Sugerencia: usar el teorema de Bolzano.




**Teorema de Bolzano.** Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.




Defino

$$g(x) = f(x) - x$$

↳ es contínua

Si

$$g(x) < 0 \iff f(x) < x$$
$$g(x) > 0 \iff f(x) > x$$

Calculo

$$g(a) \cdot g(b) = \begin{cases} 0 \Rightarrow a \text{ ó } b \text{ son punto fijo} \\ < 0 \Rightarrow \text{signo contrario} \end{cases}$$

¿no se salen de $[a,b]$?

Revisar

?

$\Rightarrow$ Por Bolzano

$\exists\, c \in [a, b]$

tal que $g(c) = 0$

$\therefore$ f tiene un punto fijo en C.

$\boxtimes$

**19.** Sea $(E,d)$ un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de $f$ es cerrado.

$$\mathring{F} = \{ x \in E : f(x) = x \}$$

Idea:

- Veo si toda sucesión converge en $\mathring{F}$ $\Rightarrow$ $\mathring{F} \overset{?}{=} \overline{\mathring{F}}$

sea $(x_n) \subset \mathring{F}$ sucesión convergente a algún $x \in E$

como $f$ continua,

$\Rightarrow$ si $x_n \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

pero $f(x_n) \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ $f(x) = x$

$\Rightarrow$ $x \in \mathring{F}$

Obs

Como $x_n \in \mathring{F}$

$\Rightarrow$ $x_n = f(x_n)$

$\Rightarrow$ $x_n \longrightarrow x$

y $f(x_n) \to x$

$\therefore$ como toda sucesión convergente, converge en $\mathring{F}$

$\mathring{F} = \overline{\mathring{F}}$, o sea, $\mathring{F}$ es cerrado.

$\blacksquare$

**20.** Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función creciente. Probar que $f$ tiene un punto fijo.

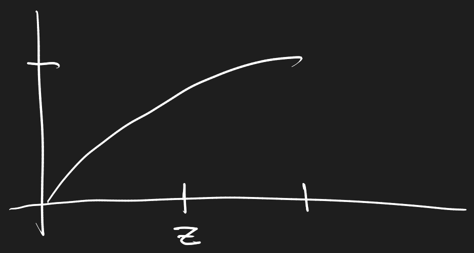
Obs: Puede no ser continua.

Si $f$ es creciente

$\Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall\, x \leq y \ (\in [a,b])$

$\text{pvq} \ \overset{?}{\exists}\, x_0 \,/\, f(x_0) = x_0$

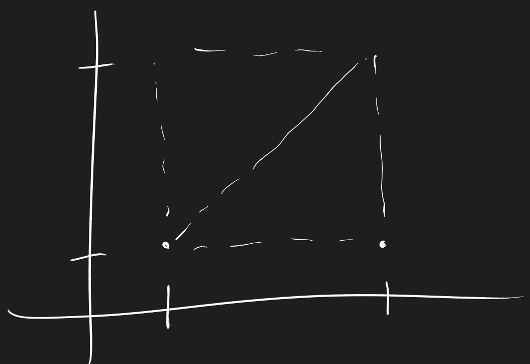
Sea $z \in [a,b]$, $\quad a \leq z \leq b$




$f$ creciente

$f(a) \leq f(z) \leq f(b)$

falta usar que estoy en $[a,b] \to [a,b]$



- $f(a) > a \qquad f(b) < b$

$f(a+\varepsilon) \geq a+\varepsilon$

Si $\varepsilon = b - a$

$f(a+b-a) \geq f($