11. Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\#\mathbb{R} = c$$

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$$

$\Rightarrow$ Como $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es infinito

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad \mathbb{I} \sim \mathbb{R}$$

o sea :

$$\#\mathbb{I} = c$$

$\blacksquare$

12. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

a) Como $\#A = c$

$\Rightarrow \exists f$ biyectiva / $f : A \to [0,1)$

Como $\#B = c$

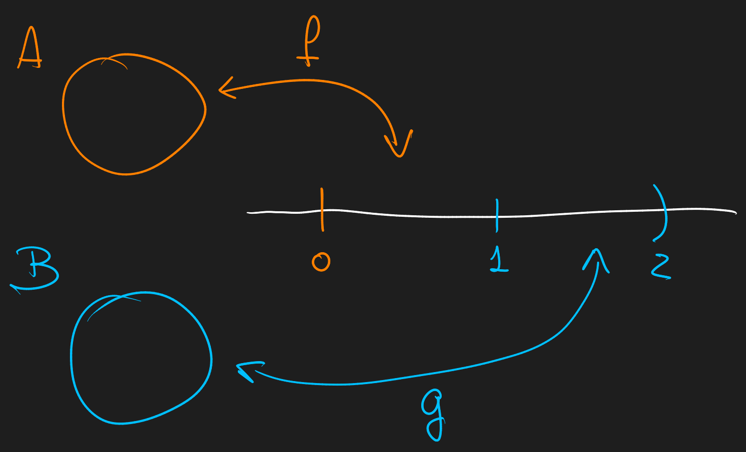
$\Rightarrow \exists g$ biyectiva / $f : B \to [1,2)$

Supongo $A \cap B = \emptyset$

Además, afirmo que

$\exists h$ biyectiva / $h : A \cup B \longrightarrow [0,2)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ g(x) & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$



Pruebo biyectividad de $h(x)$:

- Si $x \in A \Rightarrow h(x) = f(x) \in [0,1)$
- Si $y \in B \Rightarrow h(y) = g(y) \in [1,2)$

Busco absurdo

- Si $h(x) = h(y) \Rightarrow$ si $x \in A \Rightarrow h(x) \in [0,1)$

$$\overset{h(x)=h(y)}{\Longrightarrow} h(y) \in [0,1) \text{ Abs!}$$

Revisar !

$\therefore h(x) \neq h(y) \quad \forall x, y$ con $x \in A$, $y \in B$

$\therefore$ h es inyectiva.

Falta sobreyectividad :

Si $t \in [0,2) \Rightarrow t \in [0,1)$ ó $t \in [1,2)$

↳ Si $t \in [0,1)$

$\Rightarrow$ Como f es sobreyectiva e inyectiva

$$\exists!\, a \in A \,/\, f(a) = t = h(a)$$

↳ Si $t \in [1,2)$

$\Rightarrow$ Como g es sobreyectiva e inyectiva

$$\exists!\, b \in B \,/\, g(b) = t = h(b)$$

$\therefore$ h es sobreyectiva

$\therefore$ h es biyectiva.

Finalmente

$$[0,1) \overset{d}{\cup} [1,2) \sim [0,2)$$

y como

$$A \sim [0,1)$$
$$B \sim [1,2)$$

supuse!

$$\Rightarrow \quad A \overset{d}{\cup} B \sim [0,1) \overset{d}{\cup} [1,2) \sim [0,2) \sim \mathbb{R}$$

$$A \overset{d}{\cup} B \sim \mathbb{R}$$

Ahora, si

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B = \underbrace{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}_{\sim \mathbb{R}} \overset{d}{\cup} \underbrace{(A \cap B)}_{?}$$

Por lo que probé

Como

$$\# A \cap B \leq \# A$$

$$\# A \cap B \leq c$$

$$\therefore \quad \# \left[(A \cup B) \setminus (A \cap B) \overset{d}{\cup} \overbrace{(A \cap B)}^{\text{a lo sumo } c} \right] = c$$

$$\therefore \quad \# A \cup B = c \quad \blacksquare$$

(b) Si $\#A_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

Como $A_n \sim [n, n+1) \sim \mathbb{R}$

y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1) = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$

Por lo que

$$\#\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)\right) = c$$

Si los A_n son disjuntos 2 a 2 (los llamo B_n)

$\Rightarrow \exists f$ inyectiva de los B_n a los $[n, n+1)$

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = c$?

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{\aleph_0} = \#\mathbb{N}$ si es que existe algún $B_n^{\aleph_0}$

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^{\text{finito}} \leq \#\mathbb{N}$ si es que existe algún B_n^{finito}

y como unir a un conjunto infinito un conjunto finito o numerable no cambia su cardinal,

$$\Rightarrow \#\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = c$$

y como

$$\biguplus_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

$$\Rightarrow \# \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = c$$

$\boxtimes$

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

a) $\mathcal{P}(A) = \{ X \subseteq A \}$

↑ todos los posibles subconjuntos de A

- Cuando digo $\phi : A \to \{0,1\}$

A puede ser finito, numerable ó no numerable!

⇓

(no sucesiones ni numerables subconjuntos)

↑ ϕ toma algún elemento de A y devuelve 0 ó 1.

- Con esto, puedo definir:

$$\psi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$$

$$B \longmapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

con $B \in \mathcal{P}(A)$, o sea, $B \subseteq A$

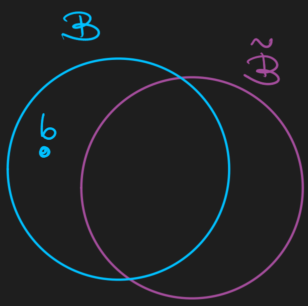
$\therefore$ para cada B en $\mathcal{P}(A)$, tengo una

$\phi_{\mathcal{B}}$ que depende de $\mathcal{B}$, y para cada $\mathcal{B}$, $\phi_{\mathcal{B}}$ es diferente, pues

si $\mathcal{B} \neq \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow \exists\, b \in \mathcal{B}$ con $b \notin \tilde{\mathcal{B}}$

o viceversa

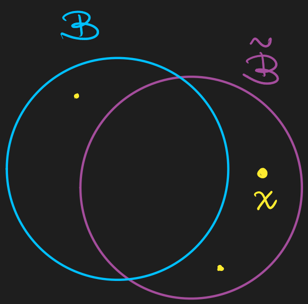
de forma que



$$\phi_{\mathcal{B}}(b) = 1$$

y

$$\phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(b) = 0$$



o sea que

$$\phi_{\mathcal{B}}(x) \neq \phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(x) \quad \forall\, \mathcal{B} \neq \tilde{\mathcal{B}}$$

$$\forall\, x \in \left(\mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}} \cup \tilde{\mathcal{B}} \setminus \mathcal{B}\right)$$

$$\therefore \ \phi_{\mathcal{B}}(b) = \phi_{\tilde{\mathcal{B}}}(b) \iff \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

$$\therefore \ \varphi(\mathcal{B}) = \varphi(\tilde{\mathcal{B}}) \iff \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

con lo que φ es inyectiva.

$$\Rightarrow \quad \#\mathcal{P}(A) \leq \#\{0,1\}^A$$

- Ahora, defino otra función Ψ /

$$\Psi : \{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$\{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$

$$\phi_B \longmapsto \{x \in B : \phi_B(x) = 1\}$$

función que manda elementos de $B \subseteq A$ en $\{0,1\}$

• Como ↓ De acá para abajo, mal! mostrar composición.

$$\Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}}) \quad \forall B \neq \tilde{B}$$

pues si $b \in B$ y $b \notin \tilde{B} \Rightarrow \phi_B(b) \neq \phi_{\tilde{B}}(b)$

$$\Rightarrow \{x \in B : \phi_B(x) = 1\} \neq \{x \in \tilde{B} : \phi_{\tilde{B}}(x) = 1\}$$

$$\Rightarrow \Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}})$$

$\therefore \Psi$ es inyectiva.

$\Rightarrow$ como $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ inyectiva

y $\Psi : \{0,1\}^A \to \mathcal{P}(A)$ inyectiva

$\Rightarrow$ por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein existe una función biyectiva entre $\{0,1\}^A$ y $\mathcal{P}(A)$ con lo que

$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$$

Nicolás Sirolli

Acá mi respuesta a la resolución de Leandro

Está esencialmente bien. Pero hay un detalle no menor:

Cuando vas a probar que ψ es inyectiva, no la evaluás en un par de funciones cualesquiera, sino en ϕ_B y $\phi_{B'}$. Esto esta bien solamente si previamente probaste que todo par de funciones en el dominio de ψ son de esa forma, o en otras palabras: que ϕ es sobreyectiva. Pero si tenés probado eso, no hace falta ocuparte de la inyectividad de ϕ.

Para salir del laberinto por arriba propongo: olvidar inyectividades, y probar que ϕ y ψ son una la inversa de la otra.

Solo basta componer φ con Ψ

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$B \longmapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

$$\Psi : \{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\phi_B \longmapsto \{ x \in B : \phi_B(x) = 1 \}$$

$$\varphi\left(\Psi\left(\phi_B(x)\right)\right) = \varphi\left(\left\{x \in B : \phi_B(x) = 1\right\}\right)$$

$$\overset{\text{pues}}{=} \varphi(B)$$

y como $\varphi : B \longmapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \varphi\left(\Psi\left(\phi_B(x)\right)\right) = \phi_B(x) \quad \checkmark$$

¿y si meto otra función? $\phi_0(x) \equiv 0$

$\therefore \quad \varphi = \Psi^{-1}$

Preguntar

y como φ es inyectiva y tiene inversa

$\Rightarrow \varphi$ es biyectiva.

y $\quad \mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$

$\boxtimes$

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

Lo hizo Nico en Práctica 05.

Reescribo

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}\}$$

sucesiones de 0's y 1's

Dem:

Sea $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{2^n}$$

A cada sucesión la manda al $[0,1] \subset \mathbb{R}$

Ej:

- $\varphi(0\,0\,0 \dots \text{ceros}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{0}{2^n} = 0$
- $\varphi(0\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \dots \text{ceros}) = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} \dots$
  $= \frac{1}{8}$
- $\varphi(1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \dots \text{ceros}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$
- $\varphi(1\,1\,1 \dots \text{unos}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$

Atenti!

- $\varphi(1\,0\,0000\ldots\text{ceros}) = \frac{1}{2}$
- $\varphi(0\,1\,1\,\ldots\,\text{unos}) = \frac{0}{2} + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$

Son iguales!

Hechos

- φ es sobreyectiva (todo real en $[0,1]$ tiene desarrollo binario)
- φ es inyectiva salvo en casos con 2 escrituras

  ie: colas de 1's o 0's

↳ Me deshago de las cola de 1's

↳ Defino

sucesiones!

$$\Theta = \left\{ a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_m = 1 \ \forall m \geq n_0 \right\}$$

↳ "ones"

con ésto:

también se fué el 1

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Theta \longrightarrow [0,1)$$

es inyectiva

y ∴ es biyectiva.

$$\Rightarrow \quad \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \Theta \sim [0,1)$$

- Falta ver que

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H} \overset{?}{\sim} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

- Como

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H} \sim [0,1)$$

y como $[0,1) \sim \mathbb{R}$ pues

OBS: TENEMOS

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (-1,1) \xrightarrow{\sim} (0,1)$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$y \longmapsto \frac{y+1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sim} [0,1) \xrightarrow{\sim} [k,k+1) \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H} \sim \mathbb{R}$$

$\therefore$ como $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H}$ es infinito

y como $\# \textcircled{H} \leq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H} = c$

Pues por cada cola de 1's, puedo obtener n sucesiones cambiando alguno de los primeros n unos, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \textcircled{H} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\therefore \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1)$$

$\blacksquare$

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Como por a)

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

y por b)

$$[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

y además

$$[0,1) \sim \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

14. Calcular el cardinal del conjunto $\{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}$.

- Son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que
  - ↳ sean numerables : $\#B = \aleph_0$
  - ↳ que dejen un resto numerable al hacer $\mathbb{N} \setminus B$

$$\# \mathbb{N} \setminus B = \aleph_0$$

(ie: $\mathbb{N} \setminus B$ <u>no</u> puede ser finito)

- Llamo A al conjunto del enunciado
- Como $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \mathbin{\dot\cup} \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right)$$

- Sé que

$$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c$$

y además, que

$$A \text{ es infinito}$$

pues existen un finitos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplen

las condiciones de A, eg:

- los subconjuntos de $\mathbb{N}$ múltiplos de cada primo:

$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 2 = 0,\ b \in B\}$$
$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod 3 = 0,\ b \in B\}$$
$$\vdots$$
$$\{B \subseteq \mathbb{N} : b \bmod p = 0,\ b \in B\} \quad \forall p \text{ primo}$$

- Busco encontrar el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$, dado por los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplen:
  - ↳ ó bien son finitos
  - ↳ ó dejan un resto finito

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es finito}\} \ \cup$$
$$\{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ es numerable},\ \mathbb{N} \setminus B \text{ finito}\}$$

- Llamo X e Y a estos conjuntos respectivamente

Por ejercicio 10

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

sé que X es numerable.

- Falta ver el cardinal de Y
- Si $B \subseteq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \setminus B$ es finito

$\Rightarrow$ B es numerable

$\therefore$ Y se puede escribir como

$$\{B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \text{ finito}\}$$

- Esto es similar al caso del ejercicio 10.
- Busco función biyectiva entre X e Y
- Defino

$$\varphi : Y \to X$$
$$B \mapsto \mathbb{N} \setminus B$$

- Afirmo que es inyectiva

Dem:

- Inyectividad:

Si $\varphi(B) = \varphi(D)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{N} \setminus B = \mathbb{N} \setminus D$

ésto sucede sii $B = D$, pues si fueran distintos, existiría algún elemento en B que no esté en D o viceversa, con lo que $\mathbb{N} \setminus B$ no tendría este elemento pero sí estaría en $\mathbb{N} \setminus D$, o viceversa, concluyendo que

$$B \neq D \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus B \neq \mathbb{N} \setminus D$$

$\therefore \varphi$ es inyectiva.

De la misma manera, defino

$$\phi : X \to Y$$
$$E \mapsto B$$

Afirmo que es inyectiva.

Dem:

- Inyectividad:

Si $\phi(E) = \phi(F)$

Como $E, F \in X$

$$\Rightarrow \exists\, B \in Y \,/\, E = \mathbb{N} \setminus B$$
$$\exists\, D \in Y \,/\, F = \mathbb{N} \setminus D$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbb{N} \setminus B) = \phi(\mathbb{N} \setminus D)$$

y estoy en el mismo caso que demostrando inyectividad en φ:

$$\phi(\mathbb{N} \setminus B) = \phi(\mathbb{N} \setminus D) \iff B = D$$

y como

$$B = D \iff E = F$$

$$\Rightarrow \phi(E) = \phi(F) \iff E = F$$

$\therefore$ ϕ es inyectiva.

Como $\varphi : Y \to X$ es inyectiva

y $\phi : X \to Y$ es inyectiva

Por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

sé que existe una función biyectiva de $Y \to X$

$\therefore \quad X \sim Y$

y como X es numerable

$\Rightarrow Y$ es numerable.

Volviendo

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A = X \,\dot{\cup}\, Y$$

como unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable.

Finalmente, tenía que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = A \,\dot{\cup}\, \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right)$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right) = A$$

Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ es numerable

$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \left(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A\right) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\therefore \quad A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

o sea que

$$\boxed{\#A = c}$$

$\blacksquare$

15. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Calcular el cardinal de $[0,1) \times [0,1)$.

(c) Calcular el cardinal de $\mathbb{R}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

a) Como $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ (Pares)

y $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} - 1$ (Impares)

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \underbrace{\mathcal{P}(2\mathbb{N})}_{\text{subconjuntos de Pares}} \sim \underbrace{\mathcal{P}(2\mathbb{N}-1)}_{\text{subconjuntos de Impares}}$$

Todas las combinaciones de estos subconjuntos entre sí, resultan en todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Notamos estas combinaciones como

$$\mathcal{P}(2\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(2\mathbb{N}-1) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\therefore \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \underset{\wr}{\mathcal{P}(2\mathbb{N})} \times \underset{\wr}{\mathcal{P}(2\mathbb{N}-1)}$$

$$\therefore \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\therefore \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = c \quad //$$

b) Como $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = c = \#[k, k+1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0,1) \times [0,1)$$

$$\therefore \#[0,1) \times [0,1) = c$$

//

c) CB) $k = 1$:

$$\#\mathbb{R} = c \quad \checkmark$$

$k = 2$:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\#\mathbb{R} \times \mathbb{R} = c$$

PI) HI : $\#\mathbb{R}^k = c$

qvq $\#\mathbb{R}^{k+1} = c$

Comienzo con

$$\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^k \overset{HI}{\sim} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

$$\therefore \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

$$\# \mathbb{R}^{k+1} = c \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

//

16. Calcular el cardinal de $\mathbb{R}[X]$, esto es, el conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

Obs:

- Los polinomios tienen finitos coeficientes
- Cada grado de libertad del polinomio representa una dimensión en $\mathbb{R}$

grado cero — 1 grado de libertad en $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^0[X] = a_0 \qquad a_0 \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^1[X] = a_1 x + a_0 \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$\vdots$

- $\mathbb{R}^k[X] = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$

con $a_0 \dots a_k \in \mathbb{R}$
$k \in \mathbb{N}$

$\therefore$ si $p^k(x)$ es un polinomio en $\mathbb{R}^k[X]$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow p^k(x) : \underbrace{\mathbb{R}^{k+1}}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \;\; k+1 \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Por el ejercicio anterior, sabemos que el cardinal de $\mathbb{R}^k$ es c $\quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\therefore$ podemos afirmar que el cardinal del conjunto de polinomios de grado k es c,

$$\#\mathbb{R}^k[X] = c$$

Pero queremos todos los polinomios, no solo los de grado k:

$$\mathbb{R}[X] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathbb{R}^k[X]$$

como esta union es numerable, por ej 12.b,

(b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

$$\Rightarrow \#\mathbb{R}[X] = c$$

$\boxtimes$

Otra forma (Nico)

Podemos ver a los polinomios de grado k, como sucesiones con sus primeros k+1 elementos en $\mathbb{R}$, y luego todos ceros,

$$\mathbb{R}[X] \rightsquigarrow \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (\exists n_0)\ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$$

$$\overset{\shortparallel}{\underset{..}{}} \quad A$$

(subconjunto de las sucesiones de Reales!

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : a_n = 0 \ \forall n \geq k \}}_{\sim \mathbb{R}^k}$$

Por 12. (b) Si $\#A_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = c$.

y 15. (c)

$$\# A = c$$

$$\therefore \mathbb{R}[X] \sim \mathbb{R}$$

$\boxtimes$

17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$.

(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.

a) si una sucesión es periódica

$\Rightarrow$ $\exists$ una subsucesión finita que se repite

$\Rightarrow$ la sucesión original tiene el cardinal de esta subsucesión.

$\Rightarrow$ como una sucesión finita en $\mathbb{Q}$ de k elementos

es coordinable con $\mathbb{Q}^k \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$$A \sim \mathbb{N}$$

//

b) Como $(a_n) \subseteq \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ si converge es porque

$\exists n_0 \;/\; a_n = a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$

- Si $n_0 = 1 \Rightarrow (a_n)$ es constante y su cardinal

es $\#\mathbb{Z}^1 = \#\mathbb{N}$

- Si $n_0 > 1$

$\Rightarrow$ Me quedo con los primeros $n_0 - 1$ términos

Llamo $k := n_0 - 1$

Como k finito, $\mathbb{Z}^k \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

y como unión numerable de numerables, es numerable

$$\mathcal{B} \sim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^k \sim \mathbb{N}$$

$\therefore \quad \mathcal{B} \sim \mathbb{N}$

$\boxtimes$

18. (a) Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i\in I}$ indexada por I tal que

- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Probar que I es contable.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.

a) Preguntar: ¿Puedo escribir $\{A_i\}_{i\in I}$ si I es <u>no</u> numerable? eg: si $I = \mathbb{R}$

Ver resolucion de ejercicios de tipo parcial. El plan es decir que tengo un racional en cada bola, y como son disjuntas, son racionales diferentes, y por lo tanto, tengo una funcion inyectiva de las bolas a los racionales entonces

este conjunto tiene cardinal menor o igual al de los racionales, que es numerable.

Por lo tanto, es contable.