UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Funciones Continuas 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Funciones continuas

Definición $(E,d),(E',d')$

Una función $f: E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x,y) < \delta$, entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Definición

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Equivalentemente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ para todo $y \in B(x, \delta)$.

Funciones continuas

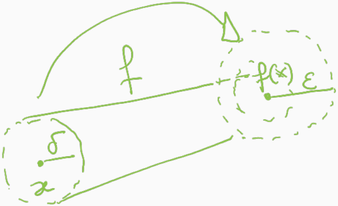
Definición

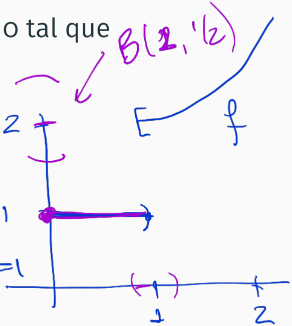
Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Equivalentemente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ para todo $y \in B(x, \delta)$.

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon).$$





$f(1)=2$

No es cont. en $x=1$

$\varepsilon = 1/2$

$1 \in f(B(x,\delta))\ \delta > 0$

$1 = f(x),\ x<1$

$1 \notin B(f(1), 1/2)$

Observación

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Dem: $\Rightarrow$) V ent. de $f(x)$. Qvq $\exists\, U$ ent. de x / $f(U) \subseteq V$.

$\Rightarrow f(x) \in V^\circ$, $\exists\, \varepsilon > 0$ / $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V^\circ \subseteq V$.

Como f cont en x, $\exists\, \delta > 0$ / $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$ tomo $U = B(x, \delta)$.

$\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$ qvq $\exists\, \delta > 0$ / $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.

Tomo $V = B(f(x), \varepsilon)$ q' es ent. de $f(x)$. Se q' $\exists\, U$ ent de x / $f(U) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Ahora, U ent. de $x \Rightarrow x \in U^\circ$ y

$\exists\, \delta > 0$ / $B(x,\delta) \subseteq U^\circ \subseteq U \Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq f(U) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

Observación

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

$f^{-1}(V) = \{y \in E \,/\, f(y) \in V\}$

Decir que $\boxed{f(U) \subset V}$ es equivalente a decir que $\boxed{U \subset f^{-1}(V)}$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno $\underline{V \text{ de } f(x)}$, la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un entorno de x.

Observación

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en E', existe un entorno U de x en E tal que $f(U) \subset V$.

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno V de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un entorno de x.

Ejemplo

1) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ los de análisis I.
$\downarrow d(x,y) = \|x-y\|$

2) E espacio métrico y $x_0 \in E$ aislado.
(ie: $\exists\, r>0$ / $B(x_0, r) = \{x_0\}$.)
$\Rightarrow$ Toda función def. en E es cont. en x_0.

Ejemplo

Si $\varepsilon>0$, tomo $\delta=r \Rightarrow f(B(x_0,r)) = f(\{x_0\})$

$= \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

3) E es discreto $\Rightarrow$ toda función def en E es continua en todo punto de E.

D/ $x \in E \wedge f: E \to E'$

$B(x, 1/2) = \{x\} \to$ sigo como en 2).

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua en x si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente a $f(x)$.

En otras palabras, f es continua en x si y sólo si cumple:

- para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a x, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset E'$ converge a $f(x)$.

Dem: $\Rightarrow$) f cont. en x. y sea $(x_n)_n \subseteq E / x_n \to x$

Qvq $f(x_n) \to f(x)$. $\equiv \underbrace{f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)}_{d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon}$.

$\varepsilon > 0$ qvq $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$.

$\exists \delta > 0$ / $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ (cont.).

Como $x_n \to x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $x_n \in B(x,\delta)$ $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow$ $f(x_n) \in f(B(x,\delta)) \subseteq \underline{B(f(x),\varepsilon)}$ $\underline{\forall n \geq n_0}$

$\downarrow$ $x_n \to x$ $\hookrightarrow$ continuidad.

$\Leftarrow$) Sup. que f no es cont. en x. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ /

no hay $\delta > 0$ que cumpla q' $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$

$\forall \delta > 0$ $\exists$ $y \in B(x,\delta)$ / $f(y) \notin B(f(x),\varepsilon)$

$\delta = 1/n \Rightarrow \exists$ $y_n \in B(x, 1/n)$ / $f(y_n) \notin B(f(x),\varepsilon)$

$d(x,y_n) < 1/n \to y_n \to x$.

$d(f(x), f(y_n)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(y_n) \not\to f(x)$ } ABS!

Ejemplo

$E = \mathcal{C}([0,1])$ d_∞.

$\varepsilon_{1/2} : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$f \longmapsto f(1/2)$

$\varepsilon_{1/2}$ es continuo $\forall f$.

Sea $f_n \longrightarrow f$ en d_∞ qvq $\varepsilon_{1/2} f_n \longrightarrow \varepsilon_{1/2} f$.

$$|\varepsilon_{1/2} f_n - \varepsilon_{1/2} f| = |f_n(1/2) - f(1/2)|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)|$$

$$= d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$$

$(f_n \to f.)$

Definición

Una función $f : E \to E'$ es continua en E si es continua en todo punto $x \in E$.

Definición

Una función $f : E \to E'$ es continua en E si es continua en todo punto $x \in E$.

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de E' es abierto en E.

f cont $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subseteq E$ es abto $\forall\, U \subseteq E'$ abto.

Dem: $\Rightarrow$) Sea $U \subseteq E'$ abto qvq $f^{-1}(U)$ es abto en E.

Sea $x \in f^{-1}(U)$. Como $f(x) \in U$, $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$ (U abto) $\xrightarrow[\text{cont}]{}$ $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq U$.

$\Rightarrow B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$. $\therefore$ es abto.

$\Leftarrow)$ Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, qvq $\exists\, \delta > 0 \,/\, f(B(x,\delta)) \subseteq \underbrace{B(f(x),\varepsilon)}$

$U = B(f(x),\varepsilon)$ es abto $\Rightarrow f^{-1}(U)$ también y

$x \in f^{-1}(U) \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq U = B(f(x),\varepsilon)$.

$\Rightarrow$ Prop: f cont. en $E \Leftrightarrow f^{-1}(F)$ es cerrado en E $\forall\, F \subseteq E'$ cerrado.

Ejercicio

Ver que lo mismo vale cambiando abiertos por cerrados.

Ejemplo

- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |\operatorname{sen}(xyz)| < 1/2\}$

afirmo que A es abierto.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = |\operatorname{sen}(xyz)|$

q' es cont.

$(x,y,z) \longrightarrow x.y.z$ es cont.

y $\operatorname{sen}(\cdot)$ y $|\cdot|$ son cont $\Rightarrow$ ✓.

Ej.

$A = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ es abto.

- $\{x \in \mathcal{C}([0,1]) : x(1/2) > 0\}$ es abto.

$= \varepsilon_{1/2}^{-1}((0,+\infty))$

(dem).

Teorema

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si para todo $A \subset E$,

$$\boxed{f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.}$$

Dem: $\Rightarrow$) $y \in f(\bar{A}) \Rightarrow y = f(x)$ para algún $x \in \bar{A}$.

Como $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A \,/\, x_n \to x$.

$\Rightarrow$ cont. $\underbrace{f(x_n)}_{\in f(A)} \to \underbrace{f(x)}_{= y}$, $(f(x_n))_n \subseteq f(A) \,/\, f(x_n) \to y$.

$\Rightarrow y \in \overline{f(A)}$.

($\Leftarrow$) Sea $F \subseteq E'$ cerrado. q.v.q. $f^{-1}(F) \subseteq E$ es cerrado.

$A = f^{-1}(F)$ q.v.q. A es cerrado. Es decir $\overline{A} \subseteq A$

$\overline{A} = \overline{f^{-1}(F)} \Rightarrow f(\overline{A}) \underset{\text{Hip.}}{\subseteq} \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F.$

$f(A) = f(f^{-1}(F)) \subseteq F$ ✓

en resumen,

$f(\overline{A}) \subseteq F \Longrightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(f(\overline{A})) \subseteq f^{-1}(F) = A$

$\boxtimes$