

11. Hallar frontera y puntos de acumulación de cada uno de los subconjuntos de \mathbb{R} del Ejercicio 5.

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0, 1]$

(c) \mathbb{Q}

(e) \mathbb{Z}

(g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $(0, 1)$

(d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(f) $[0, 1) \cup \{2\}$

(h) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

$E = \mathbb{R}$

Interior

Clausura

a) $(0, 1)$

$[0, 1]$

b) $(0, 1)$

$[0, 1]$

c) \emptyset (pues numerable)

\mathbb{R}

d) \emptyset (pues numerable)

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$

e) \emptyset (pues numerable)

\mathbb{Z}

f) $(0, 1)$

$[0, 1] \cup \{2\}$

g) \emptyset (pues numerable)

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

h) \emptyset (pues numerable)

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

12. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq E$.

(a) Probar que $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$, y concluir que ∂A es cerrado.

(b) Probar que $\partial A = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

a)

\subseteq

Sea $a \in \partial A$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{B}(a, r) \cap A^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

$$\underbrace{\mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \emptyset}_{\Rightarrow a \in \bar{A}}$$

$$\underbrace{\mathcal{B}(a, r) \cap A^c \neq \emptyset}_{\text{pues } \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}}$$

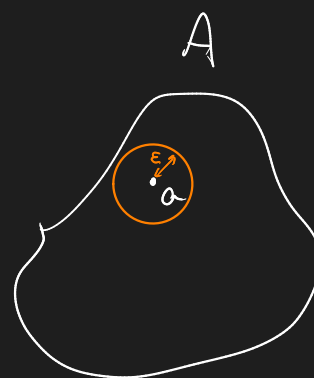
$$\text{q.v.g. } a \stackrel{?}{\notin} A^\circ$$

Supongo que $a \in A^\circ$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad / \quad \mathcal{B}(a, \varepsilon) \subseteq A$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{B}(a, \varepsilon) \cap A^c = \emptyset}_{\text{Abs!}}$$

pues $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$



$$\therefore a \notin A^\circ$$

$$\therefore a \in \bar{A} \quad \text{y} \quad a \notin A^\circ$$

$$\Rightarrow a \in \bar{A} \setminus A^\circ$$

Probé $\partial A \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ$

$$\supseteq \text{ Sea } a \in \bar{A} \setminus A^\circ$$

$$\Rightarrow a \in \bar{A} \text{ y } a \notin A^\circ$$

$$\Rightarrow B(a, r) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(a, r) \not\subseteq A \quad \forall r > 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
hay elementos de $B(a, r)$
que estén en A^c

$$\Rightarrow B(a, r) \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\therefore a \in \partial A$$

Finalmente

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$$

\square

$$\partial A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \partial A = \overline{\partial A}$$

Como $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$

$$\overline{\partial A} = \overline{\bar{A} \setminus A^\circ}$$

?



$$\partial A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$$

$\underbrace{\hspace{2em}}_{\text{cerrado}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{cerrado}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

(b) Probar que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, y concluir que $\partial A = \partial(E \setminus A)$.

?

Por (a) $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$.

$$\partial B = \partial(E \setminus B)$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ)$$

$$\text{Como } \overline{A} \subseteq E$$

$$\overline{B} \cap \overline{E \setminus B} = \overline{E \setminus B} \cap$$

$$\Rightarrow \overline{A} \cap (E \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$$

$$\overline{E \setminus (E \setminus B)} \\ \underbrace{E \setminus B^\circ}_B$$

Que por 12.a

$$\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$$

□

=

13. Sea (E, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq E$ no vacío y $x \in E$, se define la *distancia* de x a A como

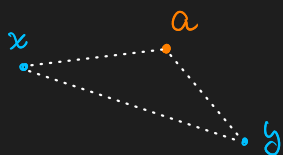
$$d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Probar que para todos $x, y \in E$ y $r > 0$:

- (a) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$.
- (b) $x \in A \implies d_A(x) = 0$.
- (c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \bar{A}$.
- (d) $B_A(r) = \{x \in E : d_A(x) < r\}$ es abierto.
- (e) $\bar{B}_A(r) = \{x \in E : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado.

a) Qué pasa si $A = \{a\}$?

↑ único elemento



Desigualdad triangular! $\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \checkmark$

$\therefore \#A \geq 2 \Rightarrow \text{diam}(A) > 0$



Pero el caso más desfavorable es con $\text{diam}(A) = 0$ pues contra mayor $\text{diam}(A)$, menor puede ser $d_A(x) - d_A(y)$

infimo entre todos los $a \in A$

$$d_A(x) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \quad \text{para cada } a \in A$$

↑
DT

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a) \quad \text{infimo entre todos los } a \in A$$

$$d_A(x) - d(x, y) \leq d_A(y) \leq d(y, a)$$

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y) \quad \textcircled{I}$$

Si: partiendo de

$$d_A(y) \leq d(y, a) \stackrel{\text{DT}}{\leq} d(x, y) + d(x, a)$$

$$d_A(y) \leq d(x, y) + d(x, a)$$

$$d_A(y) - d(x, y) \leq d_A(x) \leq d(x, a)$$

$$d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y) \quad \textcircled{II}$$

∴ como \textcircled{I} y \textcircled{II}

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y) \quad \square$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Si } x \in A &\Rightarrow d_A(x) = \inf \left\{ \underbrace{d(x, a)}_{=0 \text{ pues } x \in A} : a \in A \right\} \\ &\quad \text{y } d(x, a) \geq 0 \\ &\Rightarrow \text{ si } a = x \\ &\quad d(x, x) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore d_A(x) = 0$$

c) (c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

\Leftarrow) Si $x \in \overline{A}$

$\Rightarrow x \in A \text{ ó } x \in \partial A$

• Si $x \in A$:

b) $\Rightarrow d_A(x) = 0$

• Si $x \in \partial A$ y $x \notin A$

$\Rightarrow \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists a \in A \mid a \in B(x, r) \text{ con } x \neq a$

$\Rightarrow d(a, x) < r \quad \forall r > 0$

Por ej 1 de quíe 1

1. Probar que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $\underline{\underline{x = y}}$.

$\Rightarrow d(a, x) = 0$

\therefore si $x \in \overline{A} \Rightarrow d_A(x) = 0$

\Rightarrow) Si $d_A(x) = 0$

$\Rightarrow 0 = \inf \{ d(a, x) : a \in A \}$

Por absurdo:

$$\text{Si } x \notin \overline{A}$$

$$\Rightarrow x \in \overline{A}^c$$

$$\Rightarrow x \in E \setminus \overline{A}$$

$$\stackrel{s.b.}{\Rightarrow} x \in (E \setminus A)^\circ$$

Como $(E \setminus A)^\circ$ es abierto

$$\Rightarrow \exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subseteq (E \setminus A)^\circ$$

$$\Rightarrow d_A(x) \geq r \quad \text{pues al menos } x \text{ dista } r \text{ de } A$$

$$\Rightarrow d_A(x) \neq 0$$

Abs! pues es hipótesis que
 $d_A(x) = 0$

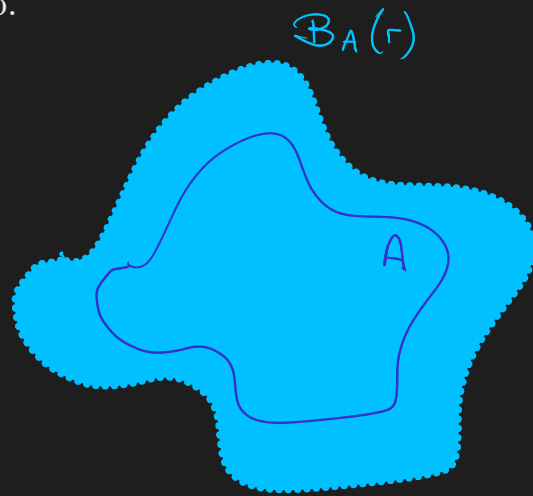
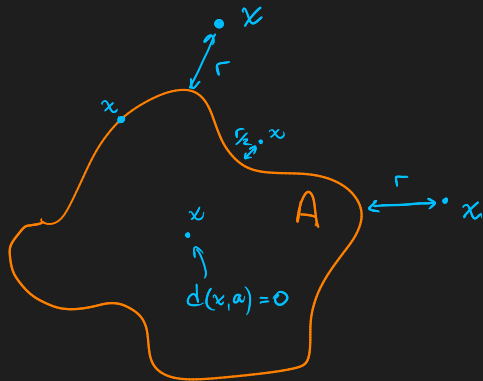
$$\therefore x \in \overline{A}$$

Final mente

$$d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$

□

(d) $B_A(r) = \{x \in E : d_A(x) < r\}$ es abierto.



$$d_A(x) = \inf \{ d(a, x) : a \in A \}$$

Si $x \in B_A(r)$

$$\Rightarrow d_A(x) < r$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq B_A(r)$$

$$\text{pues si } \varepsilon = \underbrace{r - d_A(x)}_{>0}$$

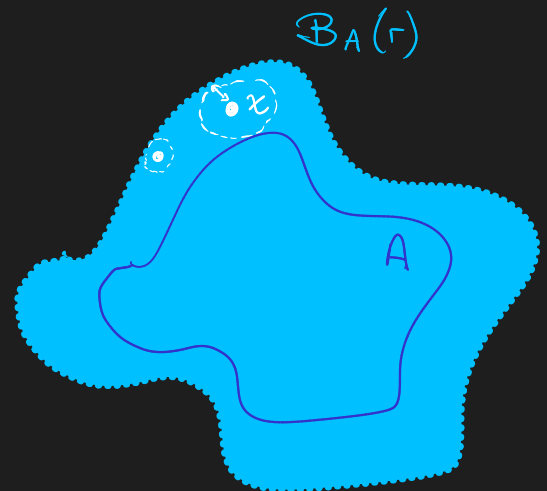
todos los $b \in B(x, \varepsilon)$ distan

a lo sumo $\frac{r - d_A(x)}{2}$ de la frontera de $B_A(r)$

\Rightarrow toda la bola que de contenido en $B_A(r)$

Como esto vale $\forall x \in B_A(r)$

$\Rightarrow B_A(r)$ es abierto. \square



(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in E : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado.

Tomo complemento

$$\overline{B}_A^c(r) = \{x \in E : d_A(x) > r\}$$

Uso argumento parecido al de antes

$$\text{Sea } x \in \overline{B}_A^c(r)$$

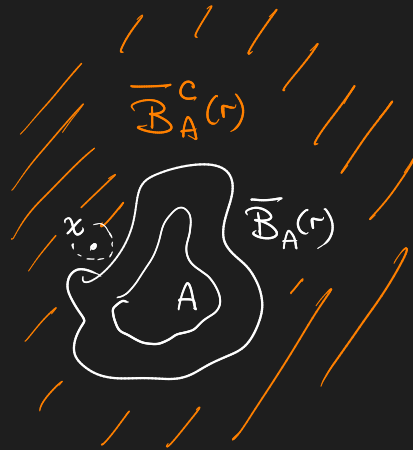
$$\Rightarrow \text{Si } \varepsilon = \frac{d_{\overline{B}_A(r)}(x)}{2}$$

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B}_A^c(r)$$

$\therefore \overline{B}_A^c(r)$ es abierto.

$\therefore \overline{B}_A(r)$ es cerrado.

□



14. Sea (E, d) un espacio métrico. Consideremos el conjunto $\mathcal{X} = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Definimos la función $\hat{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\hat{d}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

$$(a) \quad \hat{d}(A, B) = \hat{d}(\overline{A}, B).$$

(b) $\hat{d}(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$. \leftarrow Also $\frac{1}{c} \rightarrow 0$

(c) $\hat{d}(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

$$(d) \quad \hat{d}(A, B) \leq \hat{d}(A, C) + \hat{d}(C, B).$$

Concluir que \hat{d} no es una distancia.

$$\begin{aligned} \omega) \quad S: E &= \mathbb{R} \\ A &= \mathbb{Q} \\ B &= \mathbb{R}, \mathbb{Q} \\ &? \end{aligned}$$


inf es zero

$$A \cap B = \phi$$

\therefore False

Partes de TR ...



$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 

$\{A \subseteq \mathbb{R}\}$ 

15. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en E .

- (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
- (b) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en E , probar que la sucesión de números reales $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

17. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $A \subseteq E$ un subconjunto de E . Probar que si A es cerrado entonces el espacio métrico (A, d) es completo.



Si A es cerrado

\Rightarrow Toda suc. de elementos de A que converge,
converge en A

Como toda suc. convergente es de Cauchy

\Rightarrow Todas las sucesiones de Cauchy en A son convergentes

$\therefore (A, d)$ es completo. \square

18. Teorema de la intersección (Cantor). Sea (E, d) un espacio métrico completo. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de E tales que

- $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$.

Probar que existe un único elemento $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Ideas:

↑ cerrado por \bigcap cerrado es cerrado

- Si tomo a_n de cada A_n

$$\text{tengo } (a_n) \longrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Por como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es cerrado, toda sucesión converge en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

- Por ej 10. a)

10. Sean (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E .

- Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- Probar que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.

$$\text{diam } A_{n+1} \leq \text{diam } A_n \quad \forall n \geq 1$$

- Por Hk

$$\text{diam } A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Como E es completo

\Rightarrow toda suc. de Cauchy converge en E .

- Puedo asegurar que

a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$,

todos los elementos de (a_n) están
a distancia $\leq \text{diam } A_{n_0} \quad \forall n \geq n_0 :$

Formalmente

para cada $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$d(a_n, a_m) \leq \text{diam } A_{n_0} \quad \forall n, m \geq n_0$$

y como $\text{diam } A_{n+1} \leq \text{diam } A_n \quad \forall n \geq 1$

y además $\text{diam } A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Puedo asegurar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

por existe algún $A_{n_0} / \text{diam } A_{n_0} < \varepsilon$

$\therefore (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy

que converge en E (por E es completo).

$\therefore \bigcap A_n \neq \emptyset$ (por (a_n) converge en $\bigcap A_n$)

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } A_n = 0$

$$\Rightarrow \# \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \dim A_n \right) \leq 1 \quad ? \text{ puedo hacerlo?}$$

$$\therefore \# \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = 1 \quad (\text{pues es } \underline{\text{no}} \text{ vacío} \Rightarrow \text{debe ser } 1)$$

□

Revisar !

