

11. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

\Rightarrow) x es aislado $\forall x \in E$

?
 $\Rightarrow f$ es continua en x pues

Def de continuidad

$$f(\underbrace{B(x, \delta)}_{\text{Como } x \text{ es aislado}}) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

Como x es aislado

$$\Rightarrow \exists r > 0 / B(x, r) = \{x\}$$

$$\Rightarrow f(B(x, r)) = f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

pues es su centro \uparrow

$\therefore f$ es continua, $\forall f$.

\Leftarrow) Supongo toda f continua, con x_0 no aislado

$$\Rightarrow \exists x \in E, \exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0$$

$$f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq \underbrace{B(f(x_0), \varepsilon)}$$

Siempre $f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

\Rightarrow debe darse que $\exists y \in B(x_0, \delta)$

?

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \quad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

- (a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
- (b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , \mathcal{I} es una función continua pero \mathcal{E} no lo es.
- (c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .

Hecho en otro archivo

13. Sea (E, d) un espacio métrico.

- (a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.
- (b) Usando esto, rehacer los ítems (b), (d) y (g) del Ejercicio ~~6~~ de la Práctica 3.

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

- (a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
- (b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.
- (c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.
- (d) Probar que $\overline{B(x, r)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.
- (e) Deducir que $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B(x, r)}$.
- (f) Dar un ejemplo en que $\overline{B(x, r)}$ sea un subconjunto propio de $\overline{B(x, r)}$.
- (g) Probar que $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) = d(x, x_0) &\stackrel{\text{D.T.}}{\leq} d(x, y) + d(y, x_0) \\ &= d(x, y) + f(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq d(x, y) + f(y)$$

$$f(x) - f(y) \leq d(x, y)$$

De la misma forma, puedo obtener

$$f(y) - f(x) \leq d(y, x) = d(x, y)$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \quad \star$$

Finalmente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\text{si } d(x, y) < \delta \Rightarrow \underbrace{d(f(x), f(y))}_{|f(x) - f(y)|} < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

\uparrow
 elijo
 $\delta = \varepsilon$

□

$$b) \mathcal{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < \varepsilon\}$$

\uparrow continuo

\Rightarrow como $(-\infty, \varepsilon)$ es abierto

$\Rightarrow d^{-1}(-\infty, \varepsilon)$ es abierto

\uparrow
 d es continuo

□

$$d) \overline{\mathcal{B}}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

\uparrow continuo

\Rightarrow como $(-\infty, \varepsilon]$ es cerrado

$$\left(\overline{(-\infty, \varepsilon]} = (-\infty, \varepsilon] \right)$$

$\Rightarrow d^{-1}(-\infty, \varepsilon]$ es cerrado

\uparrow
 d es continuo

□

g) es igual,

14. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.

i. Probar que g es continua

ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

(b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0 \ \forall x \in A$ y $h(x) = 1 \ \forall x \in B$.

(c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

15. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \rightarrow E'$ una función para la cual existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in E$. Probar que f es uniformemente continua.

- (b) Deducir que las funciones f y g de los ejercicios 13 y 14 son uniformemente continuas.

$$a) \text{ Si } d(x_1, x_2) < \delta$$

$$\Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < c \cdot \delta$$

$$\Rightarrow \text{si } \delta = \frac{\varepsilon}{c}$$

Puedo afirmar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \left(\delta = \frac{\varepsilon}{c} \right) /$$

$$\text{si } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

$$\forall x_1, x_2 \in E$$

$\therefore f$ es uniformemente continua.

(δ solo depende de ε y un c fijo)

□

$$b) d'(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)|$$

$$= |d(x, x_0) - d(y, x_0)|$$

$$\stackrel{\textcircled{\Delta}}{\leq} d(x, y)$$

$$\textcircled{\Delta} \quad d(x, x_0) \stackrel{DT}{\leq} d(x, y) + d(y, x_0)$$

$$\underbrace{d(x, x_0)}_{f(x)} - \underbrace{d(y, x_0)}_{f(y)} \leq d(x, y)$$

Heavens! no mis no con $d(y, x_0)$

$$d(y, x_0) - d(x, x_0) \leq d(x, y)$$

$$\therefore |f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

↗ f is Lipschitz with constant 1.

Però $d(x, A)$ es muy similar:

▲ As Qiaochu points out $d(x, y)$ is continuous for fixed x . You may like to see this as well, as this is a familiar result in Topology:

42

▼

✓

🕒

If A is a non empty subset of a metric space (X, d) then the function f on X given by

$$f(x) = d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

is continuous. Indeed,

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

and thus f is uniformly continuous (use $\delta = \epsilon$ in any point).

To show this, let x and y be points in X , and p any point in A .

Then

$$d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p) \quad (\text{triangle inequality})$$

and so

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, p)$$

as $d(x, A)$ is the infimum. But then $d(y, p) \geq d(x, A) - d(x, y)$ (for all p , obtained by subtracting from the previous inequality), so that $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y)$ (as $d(y, A)$ is the infimum). So :

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Now reverse the roles of x and y to get $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$.

16. Para cada $r > 0$ estudiar la continuidad uniforme de la función

$$f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

$$d'(f(x), f(y)) = d(\underbrace{\sqrt{x}}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\sqrt{y}}_{\in \mathbb{R}})$$

$$\begin{aligned} &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &\quad \bullet \text{ Si } r \geq 1 \Rightarrow \sqrt{r} \leq r \\ &\quad \leq |x - y| = d(x, y) \quad \checkmark \\ &\quad \uparrow \text{ la diferencia es estrictamente m\u00e1s grande si } x \neq y \end{aligned}$$

• Si $r \in (0, 1)$:

$$\Rightarrow r < \sqrt{r}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq |x - y| \quad ?$$

17. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \rightarrow E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que
- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ y
 - ii. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,
- entonces f no es uniformemente continua.
- (b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} . ¿Y en $(-\infty, -\pi]$?
- (c) Verificar que la función $f(x) = \sin(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

- 18.** Sea $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E' .

19. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.
- (b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

- 20.** Sea $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

