UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Compacidad 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Repaso

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión $\boxed{\text{convergente en } K}$.

el lím de la subsuc.
está en K.

Repaso

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Repaso

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Repaso

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Observación

Un conjunto infinito con la métrica discreta es cerrado y acotado pero no compacto.

Ejemplo

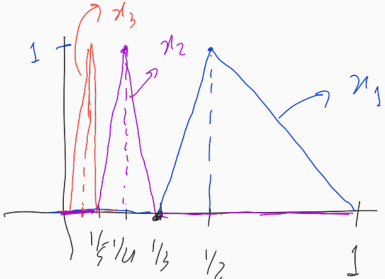
En $C([0,1])$, cerrado y acotado no implica compacto.

USAMOS d_∞ (para d_1 EJERCICIO).

$A = \overline{B}(0,1)$ → CERRADO Y ACOT.

↳ FUNCIÓN 0

NO ES COMPACTO (IDEA, SIN CUENTAS):



x_n vale 1 en $1/2n$

y vale 0 en $[0, \frac{1}{2n+1}]$

y en $[\frac{1}{2n-1}, 1]$

En el medio, es lineal.

$\boxed{(x_n) \subset A}$ $(d(x_n, 0) = 1)$

$d(x_n, x_m) = 1$ $\forall n \neq m$

$\Rightarrow$ NO TIENE SUBSUC. CONV.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo $A \subset K$ infinito tiene un punto de acumulación en K.

$\Rightarrow)$ $A \subset K$ INFINITO. $\Rightarrow$ $\exists\, (y_n)_n \subset A$ sucesión de elementos distintos de A. Como $(y_n)_n \subset A \subset \underbrace{K}_{\text{COMPACTO}}$

$\Rightarrow$ $\exists\, (y_{n_k})$ subsuc. conv. a $y \in K$.

$\underbrace{(y_{n_k}) \subset A}$, son todos distintos, $y_{n_k} \to y$

$\Rightarrow$ y es pto de ac. de A

$y \in K$

$\Leftarrow$) q v q K COMPACTO.

$\boxed{(x_n)_n \subset K.}$ $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

. Si A es FINITO, $\exists$ algún valor de la suc. que se repite ∞ veces: $\exists\, x \in A \,/\, x_{n_k} = x \;\; \forall k$.

$\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $(x_{n_k})_k$ es subsuc. CONV.

. Si A es INFINITO $\Rightarrow$ $\exists\, x \in K$ pto de ac. de A $\underset{\text{EJ}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, (x_{n_k})_k$ subsuc. que converge a $x \in K$.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición

Un *cubrimiento por abiertos* de K es una familia $(V_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de E tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Definición

Un *cubrimiento por abiertos* de K es una familia $(V_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de E tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Definición

Cuando existen $i_1, i_2, \ldots, i_N \in I$ tales que

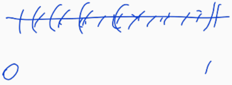
$$K \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_N}$$

decimos que $(V_{i_k})_{k=1}^N$ es un *subcubrimiento finito* de $(V_i)_{i \in I}$.

Teorema

Sea (E,d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

$$(0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n, 1)$$



$\{(1/n,1)\}_n$ NO admite subcub. finito.

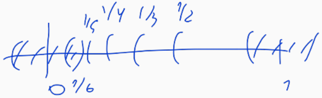
$$[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n,1) \cup \underbrace{\{0\}}_{} \cup \underbrace{\{1\}}_{}$$

NO AB.

NO CUB x AB.

$$[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1/n,1) \cup (-\delta,\delta) \cup (1-\delta,1+\delta) \Rightarrow$$

CUB x AB



$n_0 \,/\, 1/n_0 < \delta$

$$[0,1] = \bigcup_{1\le n\le n_0} (1/n,1) \cup (-\delta,\delta) \cup (1-\delta,1+\delta)$$

Teorema

Sea (E, d) un e.m.. Entonces $K \subset E$ es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos admite un subcubrimiento finito.

$\Leftarrow$) Sea $A \subset K$ INFINITO Y VEAMOS QUE TIENE UN PTO DE AC. EN K.

$\boxed{\text{SUP. QUE NO:}}$ dado $x \in K$, $x \notin A' \Rightarrow \exists\, r_x /$
$\boxed{B(x, r_x) \cap A \text{ es FINITO.}}$

$$K \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in K} \underbrace{B(x, r_x)}}\ \xrightarrow[\text{HIP}]{} \exists\, x_1, \dots, x_N /$$

$$\underbrace{K \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, r_{x_k})} \Rightarrow A = K \cap A \subset \underbrace{\overbrace{\bigcup_{k=1}^{N}}^{\text{FINITA}} \underbrace{(B(x_k, r_{x_k}) \cap A)}_{\text{FINITO}}}_{\text{FINITO ABS}}$$

$\therefore A' \neq \emptyset$ $\therefore K$ COMP.

Teorema

Sean (E, d), (E', d') e.m. y sea $f : E \to E'$ continua. Si $K \subset E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E'.

DEM: "FUNC. CONT MANDAN COMPACTOS EN COMPACTOS":

$q\ v\ q$ $f(K)$ COMPACTO.

$\boxed{\text{Sea } (y_n)_n \subset f(K)}$ $P/C/n \in \mathbb{N}$. $\exists\, x_n \in K$ / $y_n = f(x_n)$

$(x_n)_n \subset K \Rightarrow$ TIENE SUBSUC $(x_{n_k})_k$ CONV. A $x \in K$.

K COMP

$\underset{f \text{ CONT}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \to f(x) \in f(K) \Rightarrow$ $\boxed{\exists\, (y_{n_k}) \text{ CONV. a } f(x) \in f(K)}$

$\therefore$ $f(K)$ COMPACTO

Corolario

Sea $K \subset E$ compacto y $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,

- f es acotada en K: existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$.
- f alcanza su máximo y su mínimo en K.

DEM: K comp $\underset{\text{TEO}}{\Rightarrow}$ $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ es acot. en $\mathbb{R}$

$\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $\exists\, c \,/\, |f(x)| \leq c \quad \forall\, x \in K$

• $s = \sup \underbrace{\{ f(x) : x \in K \}}_{\text{acot.}}$ $\Longrightarrow$ $\exists\, (x_n)_n \subset K$.

$f(x_n) \to s$

K COMPACTO, $\exists\, (x_{n_k})_k$ conv. a $x_0 \in K$.

$s \leftarrow f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0) \Rightarrow \boxed{s = f(x_0)} \Rightarrow s$ es MÁX.

Teorema
Sean (E,d), (E',d') e.m., y sea $f:E\to E'$. Si f es continua y E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

DEM: Sup f NO es U.C. $\Rightarrow$ $\exists\, (x_n)_n, (y_n)_n \subset E$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$

tales que $d(x_n, y_n) \to 0$

$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$

$(x_n) \subset E$ compacto $\Rightarrow \exists\, (x_{n_k})_k$ conv a $x_0 \in E$.

$(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ compacto $\Rightarrow \exists\, (y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ conv. a $y_0 \in E$.

$(x_{n_{k_j}})_j$ es subsuc. de $(x_{n_k})_k \Rightarrow (x_{n_{k_j}})_j$ conv a x_0.

$x_{n_{k_j}} \to x_0$, $y_{n_{k_j}} \to y_0$.

$d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \to 0$ (subsuc. de una que tiende a 0)

$d'(f(x_{n_{k_j}}), f(y_{n_{k_j}})) \geq \varepsilon_0$.

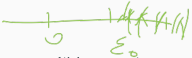
$$0 \leftarrow d(\underset{\downarrow \atop x_0}{x_{n_{k_j}}}, \underset{\downarrow \atop y_0}{y_{n_{k_j}}}) \to d(x_0, y_0) \Rightarrow d(x_0, y_0) = 0$$

$\Rightarrow x_0 = y_0$

$$\varepsilon_0 \leq d'(f(\underbrace{x_{n_{k_j}}}_{\downarrow \, x_0}), f(\underbrace{y_{n_{k_j}}}_{\downarrow \, y_0})) \to d'(f(x_0), f(y_0)) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0$$

ABS

f cont $\to$ $\underbrace{}_{f(x_0)}$ $\underbrace{}_{f(y_0)}$



$\therefore$ ES UNIF CONT