

Práctica 3

1. Probar que los siguientes son espacios métricos. Dibujar, en cada caso, una bola abierta.

- (a) \mathbb{R} con $d(x, y) = |x - y|$.
- (b) \mathbb{R}^n con $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$.
- (c) \mathbb{R}^n con $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
- (d) \mathbb{R}^n con $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.
- (e) $C([0, 1])$ con $d_\infty(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.
- (f) E un conjunto no vacío, con la métrica

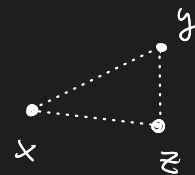
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Es espacios Métricos

[1] $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \quad \text{y} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

[2] $d(x, y) = d(y, x)$

[3] $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$



a) 1) ✓

$$\begin{aligned} 2) \quad |x - y| &= |(-1)(y - x)| \\ &= |-1| |y - x| \\ &= |y - x| \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$3) \quad |x - y| = |x - z + z - y|$$

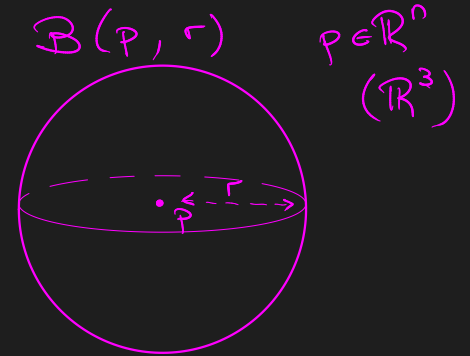
$$\leq |x-z| + |z-y|$$

$$\underbrace{\quad}_{=|y-z|} \quad \checkmark$$

b) \mathbb{R}^n con $d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$.

1) ✓
2) ✓

$$3) \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|$$



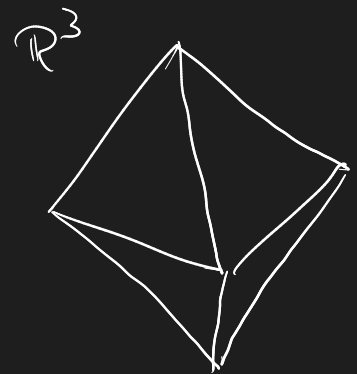
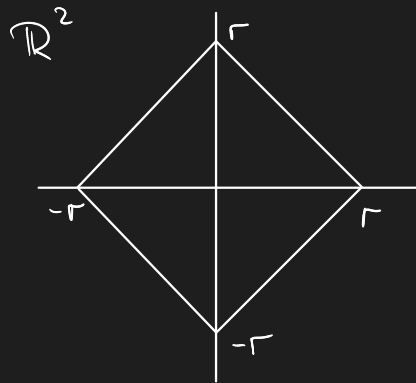
$$\|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad z \in \mathbb{R}^n$$

↑
Cauchy - Schwartz.

□

c) \mathbb{R}^n con $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

- 1) ✓
2) ✓
3) ✓

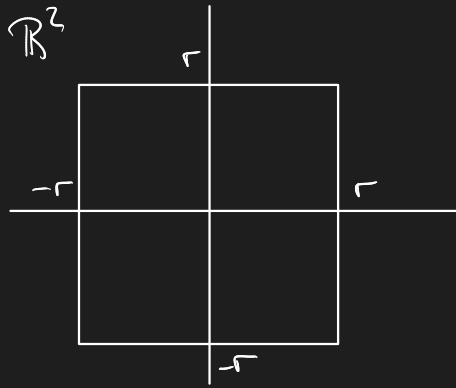


(d) \mathbb{R}^n con $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

1) ✓

2) ✓

3) $\max |x_i - y_i| \leq \max \{ |x_i - z_i| + |y_i - z_i| \}$



\parallel
 $\max \{ |x_i - z_i| \} + \max \{ |y_i - z_i| \}$
 ✓



(e) $C([0, 1])$ con $d(f, g) = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.

1) ✓

2) ✓

3) ✓

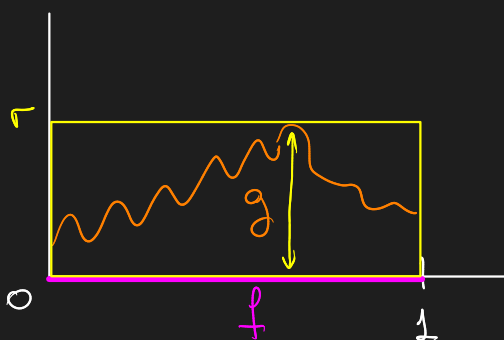
$$E = \mathcal{C}([0, 1])$$

$$\mathcal{B}(x, r) = \{ y \in E : d(x, y) < r \}$$

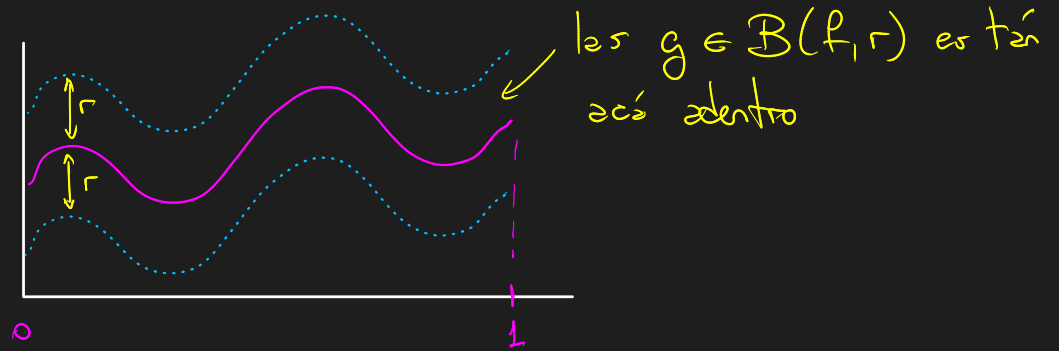
reescrivo

$$\mathcal{B}(f, r) = \{ g \in E : d(f, g) < r \}$$

• Digo $f(t) \equiv 0$



• $f(t)$ libre



(f) E un conjunto no vacío, con la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) ✓

2) ✓

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Caso 1 : $x = y$

$$0 \leq \underline{\text{Posi}} + \underline{\text{Positivo}} \quad \checkmark$$

Caso 2 : $x \neq y$

$$1 \leq 1 \text{ ó } 2 \quad \checkmark$$

□

$$B(\vec{0}, 1)$$



$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

$$\leftarrow d(\vec{0}, y) < r$$

$$B(\vec{0}, 2)$$

$$d(\vec{0}, y) < 2 \leftarrow \text{siempre } \forall y \in \mathbb{R}$$



2. Decidir cuáles de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son métricas en \mathbb{R} :

(a) $d(x, y) = (x - y)^2$ (b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ (c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

$$d_a(x, y) = (x - y)^2$$

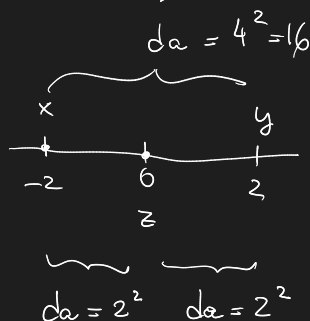
1) ✓

2) ✓

3) $d_a(x, y) \stackrel{?}{\leq} d_a(x, z) + d_a(z, y)$

$$(x - y)^2 \stackrel{?}{\leq} (x - z)^2 + (y - z)^2$$

quiero
>



$$S: z = \frac{x+y}{2}$$

\Rightarrow la desigualdad triangular no vale

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} (x-z)^2 + (y-z)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2$$

$$(x-y)^2 \stackrel{!}{>} \frac{1}{2}(x-y)^2$$

\therefore da no cumple la desigualdad triangular

\Rightarrow no es distancia.

$$b) d_b(x, y) = \sqrt{|x-y|}$$

$$\boxed{1} \checkmark$$

$$\boxed{2} \checkmark$$

$$\boxed{3} d_b(x, y) \stackrel{?}{\leq} d_b(x, z) + d_b(z, y)$$

$$d_b(x, y)^2 = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{d_b(x, z)^2} + \underbrace{|z-y|}_{d_b(z, y)^2}$$

$$d_b(x,y)^2 \leq d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2$$

$$d_b(x,y) \leq \sqrt{d_b(x,z)^2 + d_b(z,y)^2}$$

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

CA :

$$\sqrt{a+b} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{con } a, b \geq 0$$

Completo cuadrado:

$$\text{Como } 2\sqrt{a \cdot b} > 0$$

$$\Rightarrow a+b \leq \underbrace{a + 2\sqrt{a \cdot b} + b}_{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

$$\Rightarrow a+b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Probé lo que quería

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|}$$

$$\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \quad \checkmark$$

∴ d_b es distancia.

$$c) d_c(x, y) = |x^2 - y^2|$$

Contra ej:

$$d_c(-2, 2) = |(-2)^2 - 2^2|$$

$$= 0$$

$$\text{Pero } -2 \neq 2$$

\therefore no es una métrica.

3. Consideremos en \mathbb{R}^n las distancias d_1 , d_2 y d_∞ . Denotemos por $B_1(x, r)$, $B_2(x, r)$ y $B_\infty(x, r)$ a la bola de centro x y radio r para cada una de las distancias, respectivamente.

(a) Probar que $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$.

(b) Deducir de (a) que $B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r) \subseteq B_\infty(x, r) \subseteq B_1(x, nr)$.

$$a) \quad d_\infty(x, y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_\infty \leq d_2 \quad \mathcal{D} := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x, y) \in \mathcal{D}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

elementos de \mathcal{D} al cuadrado

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 \text{ es alguno de } \uparrow$$

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 = (x_i - y_i)^2 \text{ para algùn } i \in [1, n]$$

Como son todos términos $(x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

$$\Rightarrow (d_\infty(x, y))^2 \leq \overset{\text{términos } \geq 0}{\leq} |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$$

Tomo raíz (términos ≥ 0)

$$\Rightarrow d_{\infty}(x, y) \leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

$$\therefore d_{\infty}(x, y) \leq d_2(x, y)$$

$$d_2 \leq d_1$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

elevo al \square

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \stackrel{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2$$

$$\text{Sea } a_i := |x_i - y_i|$$

$$\sum a_i^2 \stackrel{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j$$

$$\text{Nota que si } i = j \Rightarrow a_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i \cdot a_j$$

Como $a_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, n]$

Obtemos que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + S \quad \text{com } S \geq 0$$

\therefore

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2$$

$$\text{tomando } \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

\therefore

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$$

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$d_\infty(x, y) = \sup \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\mathcal{D} := \{ |x_i - y_i| : i \in [1, n] \}$$

$$d_\infty(x, y) \in \mathcal{D}$$

además

$$d_{\infty}(x, y) \geq a \in \mathbb{D}$$

$$\text{pues } d_{\infty}(x, y) = \sup \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow d_{\infty}(x, y) \geq |x_i - y_i| \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n d_{\infty}(x, y)}_{= n \cdot d_{\infty}(x, y)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$

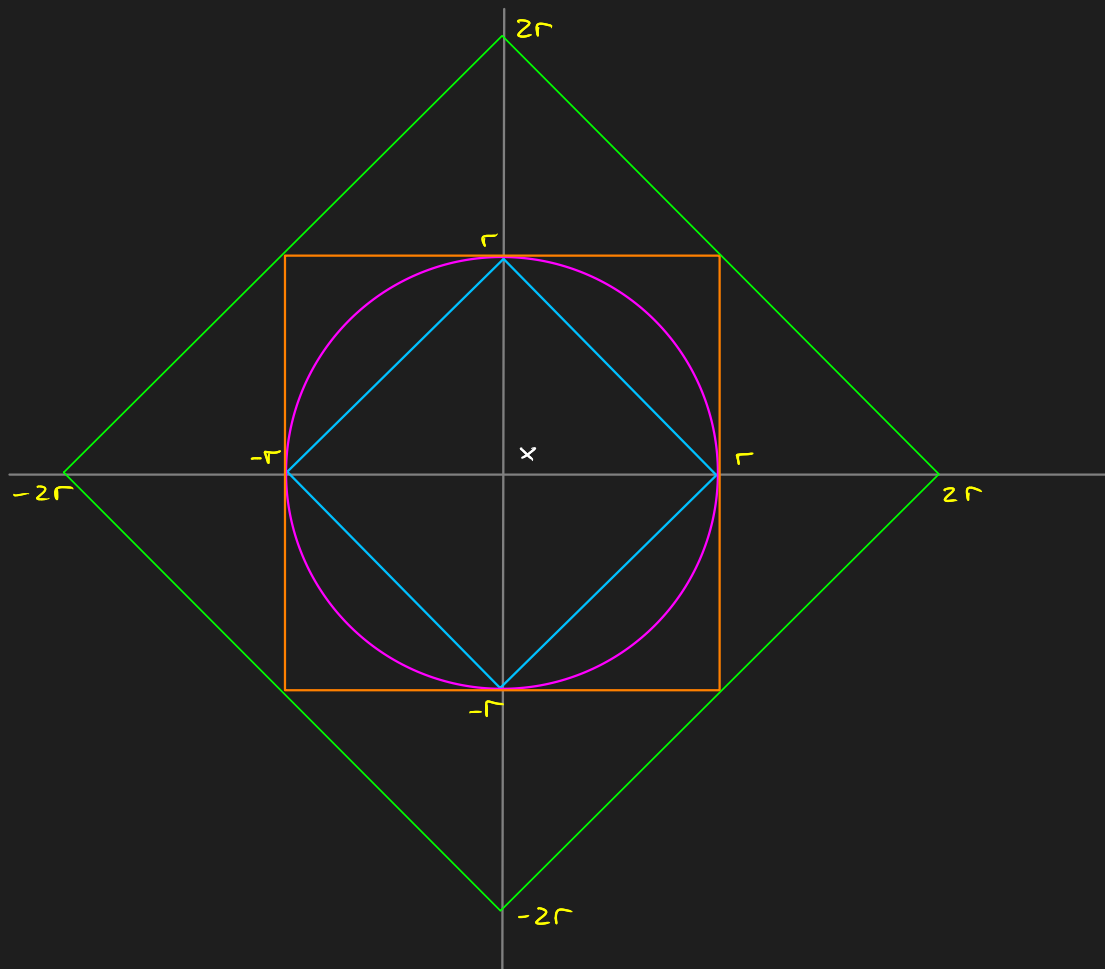
$$d_1(x, y) \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$

\therefore

$$d_{\infty}(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_{\infty}(x, y)$$



(b) Deducir de (a) que $B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r) \subseteq B_\infty(x, r) \subseteq B_1(x, nr)$.



Como $d_2 \leq d_1 \quad \forall x, y$

en particular

$$\Rightarrow d_2 \leq d_1 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{B}_{d_2}(x, r)$$

$$\mathbb{B}_{d_2}(x, r) = \{y \in E : d_2(x, y) < r\}$$

$$\mathbb{B}_{d_1}(x, r) = \{y \in E : d_1(x, y) < r\}$$

$$\underbrace{\quad}_{d_2 \leq d_1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}_{d_1}(x, r) \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(x, r)$$

Pues para un mismo r , los $y \in \mathbb{B}_{d_1}$ estarán en \mathbb{B}_{d_2} (pues si miden menos de r con $d_1 \Rightarrow$ miden todavía menos con d_2), pero no así al revés, pues habrá $y \in \mathbb{B}_{d_2}$ que miden más que r con d_1 .

$$B_2 \stackrel{?}{\subseteq} B_\infty)$$

$$B_{d_2}(x, r) = \{y \in E : d_2(x, y) < r\}$$

$$B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : d_\infty(x, y) < r\}$$

de a) obtuve

$$d_\infty \leq d_2$$

$$\Rightarrow B_{d_2}(x, r) \subseteq B_{d_\infty}(x, r) \quad \checkmark$$

$$B_\infty \subseteq B_1(x, n \cdot r)$$

$$\bullet B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : d_\infty(x, y) < r\}$$

$$\bullet B_{d_1}(x, r) = \{y \in E : d_1(x, y) < n \cdot r\}$$

Se de a) que

$$d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

reescribo

$$B_{d_\infty}(x, r) = \{y \in E : n \cdot d_\infty(x, y) < n \cdot r\} \quad n > 0$$

$$B_{d_1}(x, n \cdot r) = \{y \in E : d_1(x, y) < n \cdot r\}$$

$$\Rightarrow \text{como } d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

$$B_{d_\infty}(x, r) \subseteq B_{d_1}(x, n \cdot r) \quad \checkmark$$

4. Considerar el conjunto \mathbb{Q} en el espacio métrico \mathbb{R} . Hallar \mathbb{Q}° y $\overline{\mathbb{Q}}$. Concluir que \mathbb{Q} no es abierto ni cerrado en \mathbb{R} .

5. Hallar interior y clausura de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

(a) $[0, 1]$

(c) \mathbb{Q}

(e) \mathbb{Z}

(g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $(0, 1)$

(d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(f) $[0, 1) \cup \{2\}$

(h) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

6. Consideremos en el espacio $C([0, 1])$ las métricas d_∞ y d_1 dadas por

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx.$$

- (a) Sea $A = \{f \in C([0, 1]) : f(0) > 0\}$. Probar que A es abierto para d_∞ pero que no lo es para d_1 .
- (b) Concluir que no existe $M > 0$ tal que $d_\infty(f, g) \leq M \cdot d_1(f, g)$ para todas $f, g \in C([0, 1])$.

7. Sea (E, d) un espacio métrico. Sean $x \in E$ y $r > 0$.

- (a) Probar que $\{x\}$ es un conjunto cerrado.
- (b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.
- (c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.
- (d) Probar que $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.
- (e) Deducir que $\overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B}(x, r)$.
- (f) Dar un ejemplo en que $\overline{B}(x, r)$ sea un subconjunto propio de $\overline{B}(x, r)$.
- (g) Probar que $\{y \in E : 2 < d(y, x) < 3\}$ es un conjunto abierto.

a) $A := \{x\}$

Veo clausura

• Si $x \in A$

$$\Rightarrow x \in \overline{A} \quad \text{pues} \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

• Si $x \in A$, $y \notin A$

$$\Rightarrow d(x, y) > 0 \quad \text{pues} \quad x \neq y$$

Como x es el único elemento de A

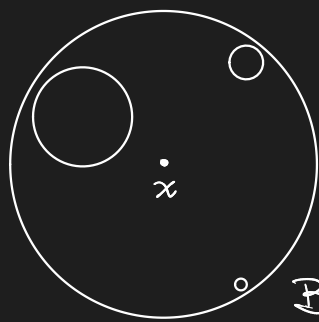
$$\Rightarrow B(y, \frac{d(x, y)}{2}) \cap A = \emptyset \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$$

$$\therefore y \notin \overline{A} \quad \forall y \in E \setminus \{x\}$$

$$\Rightarrow \overline{A} = \{x\} = A$$

$$\therefore \{x\} \text{ es cerrado,}$$

(b) Probar que $B(x, r)$ es un conjunto abierto.



$$\text{Sea } a \in B(x, r)$$

$$\Rightarrow 0 < d(a, x) < r$$

$$\Rightarrow B(a, \frac{d(a, x)}{2}) \subset B(x, r)$$

$\therefore B(x, r)$ es un conjunto abierto.

□

(c) Probar que si $r > r' > 0$ entonces $\overline{B(x, r')} \subseteq B(x, r)$.

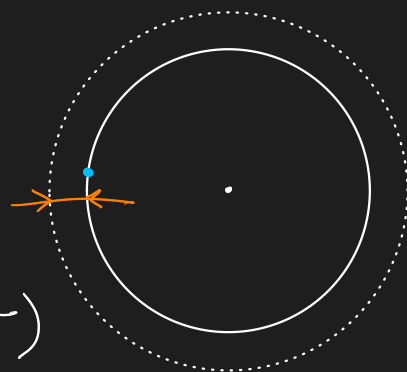
$$\text{Sea } a \in \overline{B(x, r')}$$

¡No!

$$\Rightarrow 0 \leq d(a, x) \leq r' < r$$

$$\Rightarrow d(a, x) < r$$

$$\Rightarrow B(a, \frac{r-r'}{2}) \subset B(x, r)$$



(d) Probar que $\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$ es un conjunto cerrado.

• Sea $a \in \overline{B}(x, r)$

$$\Rightarrow B(a, r') \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset \quad \forall r' > 0$$

• Sea $a \in \overline{B}(x, r)$, $b \notin \overline{B}(x, r)$

$$\Rightarrow \text{Como } a \neq b$$

$$0 < d(a, b) \leq r$$

$$\Rightarrow \text{Afirmando que si } a' \in \partial \overline{B}(x, r)$$

$$\text{y } a_{\min} = \arg \min \{d(a', b) : a' \in \partial \overline{B}\}$$

?

↑ existe pues
 $\partial \overline{B} \subseteq \overline{B}$

$$B(b, \frac{d(a', b)}{2}) \cap \overline{B}(x, r) = \emptyset$$

La otra es tomar complemento de la \overline{B}

$$\overline{B}^c(x, r) = \{y \in E : d(x, y) > r\}$$

$$\Rightarrow \forall b \in \overline{B}^c(x, r)$$



$$\begin{aligned} &\rightarrow d(a', b) > r \\ &\rightarrow B(b, \frac{d(a', b)}{2}) \cap \overline{B} = \emptyset \\ &\quad \subseteq \overline{B}^c \end{aligned}$$

$$a' \in \overline{B}(x, r) / d(a', b) = \min \{ d(a, b) : a \in \overline{B} \}$$

?

$\therefore \overline{B}^c$ es abierta

9. Sea (E, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq E$. Probar que:

(a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(b) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dar ejemplos en que no valga la igualdad en (b) y (d).

10. Sean (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ subconjuntos acotados de E .

- (a) Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- (b) Probar que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.

