UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Teorema Punto Fijo

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Definición

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $\boxed{f(x_0) = x_0}$.

Definición

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Teorema de punto fijo:

Definición

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Teorema de punto fijo:

- Determinar condiciones en X y f que garanticen la existencia de un punto fijo;

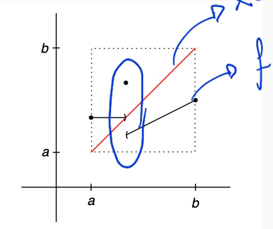
Definición

Si X es un conjunto y $f : X \to X$ una función, decimos que $x_0 \in X$ es un punto fijo de f si $f(x_0) = x_0$.

Teorema de punto fijo:

- Determinar condiciones en X y f que garanticen la existencia de un punto fijo;
- Determinar condiciones que garanticen unicidad.

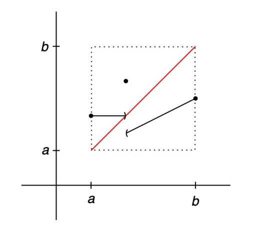
Ejemplo

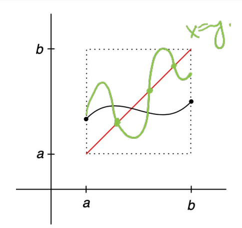


$x=y$

$f:[a,b] \to [a,b]$

Ejemplo





$f : [a,b] \to [a,b]$ continua

$\Rightarrow$ tiene un punto fijo.

Dem: Busco $x \,/\, f(x) = x$

$g(x) = f(x) - x$ le busco una raíz.

↳ cont.

↳ $g(a) \cdot g(b) < 0$ si $<$ $\Rightarrow$ Bolzano ✓.

Teorema de Punto Fijo (Banach - 1922)

Sea (E, d) un espacio métrico completo y $f : E \to E$ una función contractiva, es decir, existe $\boxed{\alpha \in (0, 1)}$ tal que

$$\boxed{d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \ \forall \, x, y \in E.}$$

Teorema de Punto Fijo (Banach - 1922)

Sea (E, d) un espacio métrico completo y $f : E \to E$ una función contractiva, es decir, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \ \forall \, x, y \in E.$$

Entonces existe un único punto fijo de f en E.

Teorema de Punto Fijo (Banach - 1922)

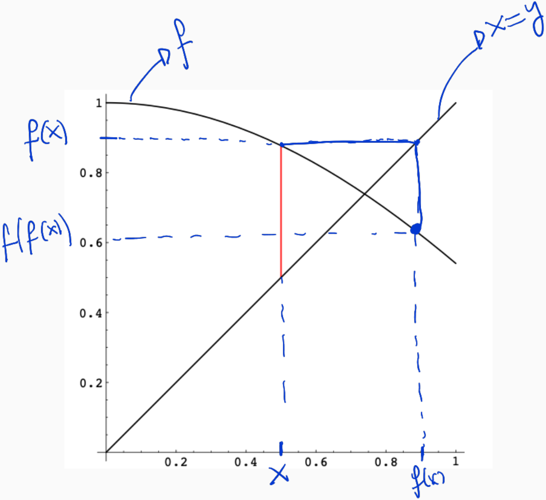
Sea (E, d) un espacio métrico completo y $f : E \to E$ una función contractiva, es decir, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \ \forall \ x, y \in E.$$

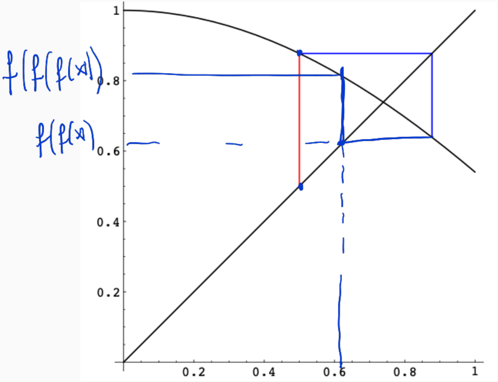
Entonces existe un único punto fijo de f en E.

Idea:

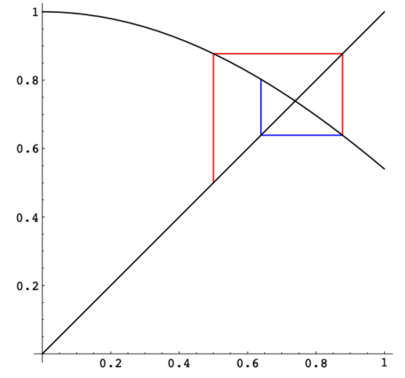
Idea:



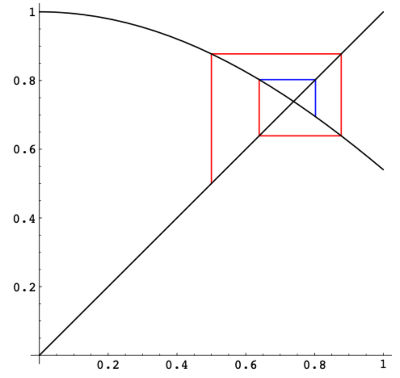
Idea:



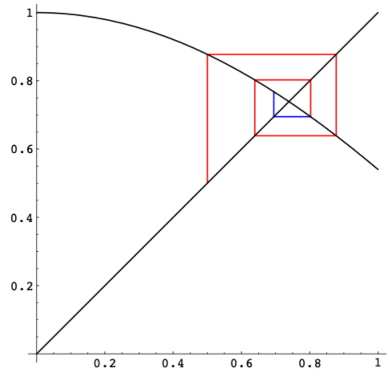
Idea:



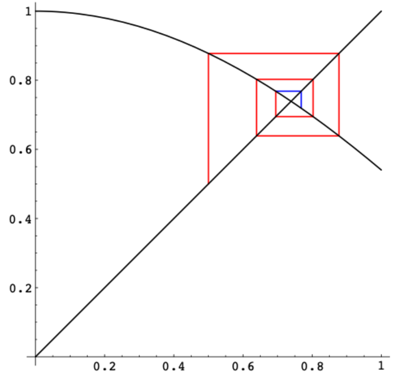
Idea:



Idea:



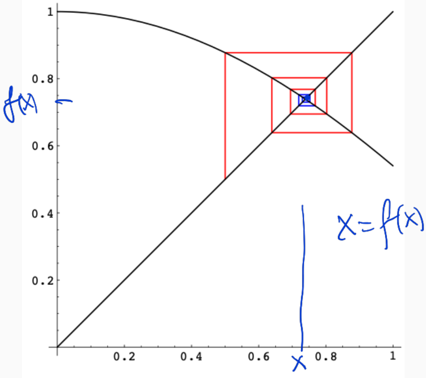
Idea:



Idea:

$x \in E \qquad x_n = f^n(x)$

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces.}}$$



Demostración del Teorema

Sea $x_0 \in E$, definimos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$

$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$ ... $x_{n+1} = f(x_n)$. $\Rightarrow (x_n)_n \subseteq E$

Veamos que $(x_n)_n$ es de Cauchy.

n, m, $n \leq m \Rightarrow m = n + k$ $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{d(x_n, x_m)} = d(x_n, x_{n+k})$$

$$\leq d(x_n, x_{n+1}) + \underbrace{d(x_{n+1}, x_{n+2})}_{\substack{= d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ \leq \alpha\, d(x_n, x_{n+1})}} + \underbrace{d(x_{n+2}, x_{n+3})}_{\substack{= d(f(x_{n+1}), f(x_{n+2})) \\ \leq \alpha\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ \leq \alpha^2 d(x_n, x_{n+1})}} + \dots + \underbrace{d(x_{n+k-1}, x_{n+k})}_{\leq \alpha^{k-1} d(x_n, x_{n+1})}$$

$$\leq d(x_n, x_{n+1})\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1}\right) \boxed{= d(x_n, x_{n+1}) \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}}$$

$\alpha \neq 1$.

Demostración del Teorema

$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \cdot \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \leq \underbrace{d(x_n, x_{n+1})}_{\substack{d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ \leq \alpha\, d(x_{n-1}, x_n)}} \frac{1}{1-\alpha}$

$\leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \therefore \ (x_n)_n$ es de Cauchy.

Como E completo $\exists\, x \in E \,/\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

f contracción $\Rightarrow f$ continua $\left(d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, \underbrace{d(x,y)}_{< \varepsilon/\alpha = \delta} < \varepsilon \right)$

$\Rightarrow \boxed{f(x_n) \longrightarrow f(x)}$ Pero $\boxed{f(x_n) = x_{n-1} \longrightarrow x}$

$\Rightarrow x = f(x)$. Si $y \in E \,/\, f(y) = y$

$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ $\boxtimes$

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n veces.

- Dado $x \in E$, la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo.

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

- Dado $x \in E$, la sucesión $\boxed{\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}}$ converge al punto fijo.
- El punto fijo se puede aproximar.

Observación

Bajo las condiciones del Teorema de punto fijo

- Dado $x \in E$, la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto fijo.
- El punto fijo se puede aproximar.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico compacto y $f : E \to E$. Si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todos $x, y \in E$, entonces f tiene un único punto fijo.

Dem: $\{d(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq \mathbb{R}$, no vacío ($E \neq \emptyset$)

acotado inf. por 0. $\Rightarrow \exists\ a = \inf\{d(x, f(x)) : x \in E\}$

Veamos que inf se alcanza ie $\exists\ x_0 \in E /$

$a = d(x_0, f(x_0))$ (ie = mínimo).

Seguro $\exists\ (x_n)_n \subseteq E \ /\ d(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

(equiv. de suc. de inf).

E compacto $\exists\ (x_{n_k})_k$ subsuc. de $(x_n)_n$

convergente a $x_0 \in E$.

$\Rightarrow d(x_{u_n}, f(x_{u_n})) \longrightarrow a$

$\downarrow$ $\rightsquigarrow$ Ej 12 P3.

$d(x_0, f(x_0))$

$\Rightarrow d(x_0, f(x_0)) = a.$

Si $a=0$ listo x_0 es punto fijo.

Si $a>0 \Rightarrow d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0)) = a$

$f(x_0)$ $f(y)$

ABS!

$\Rightarrow a=0.$

Unicidad se prueba como en el teorema ant.

¿Por qué es importante el Teorema de Punto fijo?

¿Por qué es importante el Teorema de Punto fijo?

Tenerife

¿Por qué es importante el Teorema de Punto fijo?

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales:

Sea I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en la variable x. Esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in I$. Sea $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales:

Sea I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en la variable x. Esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in I$. Sea $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un $r > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

tiene una única solución $x : [\tau - r, \tau + r] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

Existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales:

Sea I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en la variable x. Esto es, existe $L > 0$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in I$. Sea $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces, existe un $r > 0$ tal que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

tiene una única solución $x : [\tau - r, \tau + r] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

Recordemos que x es solución si y sólo si

$$\boxed{x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds.} \longrightarrow T(x)$$

$$T(x)(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds$$

$$T(x) = x$$

- Teorema de la función implícita.
- Aproximación de soluciones lineales.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $y \in \mathbb{R}^n$ Busco solucionar $\boxed{Ax = y}$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $Tx = (I - A)x + y$ si x es punto fijo

de $T \Rightarrow \cancel{x} = (I - A)x + y = \cancel{x} - Ax + y \Rightarrow +Ax = y$.

Buscar cond / T sea contractiva

$\|Tx - T\bar{x}\| = \|(I - A)(x - \bar{x})\| \leq$ ... $d_\infty(x, y)$

- Fractales....

Ejemplo

Sea $f(x) = \cos(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo.

$E = \mathbb{R}$ completo $\quad |f(x) - f(y)| = \underbrace{|\text{sen}(\xi)|}_{\leq 1} |x-y|$

$g(x) = f(f(x)) = \cos(\cos(x))$. Veamos g contrac.

$g'(x) = \text{sen}(\cos(x)) \cdot \text{sen}(x) \leq 1$

Si $g'(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = 1$ $(0-1)$ $\Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\cos(x)) = 0$

$\text{sen}(\cos(x)) = 1$ $(0-1)$ $\Rightarrow g'(x) \neq 1$

$\Rightarrow g$ es contractiva: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x-y| \leq \alpha |x-y|$

$\Rightarrow g$ tiene un punto fijo, $x_0 \in \mathbb{R}$. $\quad (0,1) \ni \max |g'| \neq 1$

Afirmo: x_0 es punto fijo de $\cos(x) = f(x)$.

$g(\cos(x_0)) = \cos(\underbrace{\cos(\cos(x_0))}_{g(x_0) = x_0}) = \cos(x_0) \Rightarrow \cos(x_0)$ es un punto fijo.

$\Rightarrow \cos(x_0) = x_0$.