Práctica 2

1. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

- Reflexiva ✓
- Simétrica ✓
- Transitiva: Dani en la teórica 3 ó 4.

2. Sean A y B conjuntos. Probar que:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

a) $\subseteq$) Si $C = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow$ C es conjunto de subconjuntos que están tanto en A como en B

$\Rightarrow C \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

$\supseteq$) Si $C = \mathcal{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow C \subseteq$

3. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Nota: $n \in \mathbb{N}$ (finito)

Si A tiene n elementos

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Cada elemento puede estar o no estar en cada uno de los subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$:

Para cada subconjunto $P_i \subseteq \mathcal{P}(A)$

a_1: ↗ está ↘ no está

a_2: ↗ está ↘ no está

$\vdots$

a_n: ↗ 0 ↘ 1

Por lo que puedo decir que existen 2^n posibles conjuntos distintos (con $\emptyset$ cuando no hay ninguno, y A cuando están todos)

$\therefore \#\mathcal{P}(A) = 2^n$

∎

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{Z}_{\leq -3}$ (b) $5\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (d) $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Z}_{\leq -3} = \{ q \in \mathbb{Z} : q \leq -3 \} \subseteq \mathbb{Z}$

y como $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

y $\# \mathbb{Z}_{\leq -3}$ es infinito

$\Rightarrow \# \mathbb{Z}_{\leq -3} \sim \mathbb{N}$ //

b) $5\mathbb{Z} = \{ \underbrace{q \cdot 5}_{\text{Enteros múltiplos de } 5} : q \in \mathbb{Z} \}$

$\Rightarrow 5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

con $5\mathbb{Z}$ infinito

$\Rightarrow \# 5\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ //

c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{ (q, n) : q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$

Por 1) sé que

2 conjuntos son coordinables $\Leftrightarrow \exists f : A \to B$ biyectiva

Armo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva usando primos :

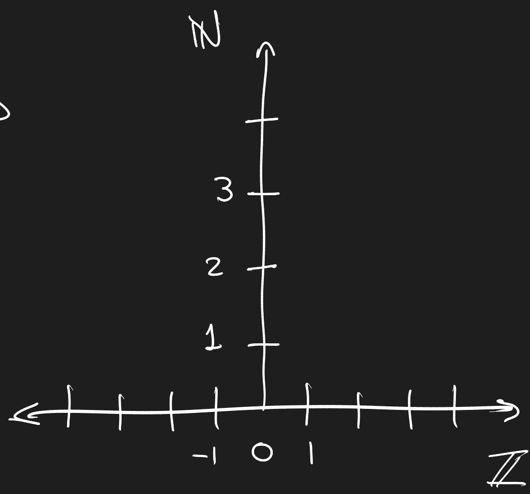
$$f(q,n) = \begin{cases} 2^{q} \cdot 5^{n} & \text{si } q \geq 0 \\ 3^{-q} \cdot 5 & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

Observo que para cada (q,n), $\exists\, n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ f es inyectiva

Si encuentro $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ inyectiva

$\Rightarrow \exists$ alguna función biyectiva.



$$g(n) = \begin{cases} (\\ \end{cases}$$

d) $(-1,1) \cap \mathbb{Q} =: A$

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : -1 < q < 1 \}$$

$A \subseteq \mathbb{Q}$ con A infinito

y como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad A \sim \mathbb{N}$

//

5. Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es contable y $B \setminus A$ es infinito.

(a) Probar que existe $C \subseteq B \setminus A$ tal que $C \sim C \cup A$.

(b) Deducir que $B \setminus A \sim B$.

Teorema
Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Dem: Puedo armar una sucesión de elementos de X, eligiendo y "sacando" de a 1

$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

y como siempre puedo sacar 1 más, puedo armar una sucesión infinita (numerable).

a) Como $B \setminus A$ es infinito

Por Teorema

$\Rightarrow \exists\, C \subseteq B \setminus A \,/\, C$ sea numerable

y como A es contable

☆ unión de numerables, es numerable

$\Rightarrow C \cup A$ es numerable

$\therefore \quad C \sim C \cup A$ ☑

☆ Unión de Numerables es Numerable

Hi: A numerable

B numerable

Dem:

A numerable $\Rightarrow \exists\, f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva

B numerable $\Rightarrow \exists\, g : B \to \mathbb{N}$ inyectiva

Si $C = A \cup B$

$\Rightarrow$ defino $h: C \to \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} 2 \cdot f(x) & \text{si } x \in A \\ 2 \cdot g(x) + 1 & \text{si } x \in B \wedge \underbrace{x \notin A}_{\text{Caso } A \cap B \neq \emptyset} \end{cases}$$

Como h es inyectiva con $h: C \to \mathbb{N}$

$\Rightarrow \#C \leq \#\mathbb{N}$

y como C es infinito

y $\#\mathbb{N} \leq \#D$ $\forall$ conjunto D infinito

$\Rightarrow \#C = \#\mathbb{N}$ $\blacksquare$

b) $B \setminus A$ es infinito

y A es contable (finito o infinito)

Por a) sé que

$\exists C \subseteq B \setminus A \,/\, C \sim C \cup A$

que para si no es numerable?

Si digo $C = B \setminus A$

$\Rightarrow B \setminus A \sim B \setminus A \cup A = B$

Mal!

?

Cómo lo muestro sin usar la demo?

6. Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

Lo hice arriba.

Para conjuntos finitos es igual.

7. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.

(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

a) Como $P \subseteq \mathbb{N}$

y P es infinito ?

$\Rightarrow$ P es numerable.

?

b) La pista es el ej a)

Quiero escribir

$$\mathbb{N} \stackrel{\downarrow}{=} \bigcup_{i \in B}^{d} A_i$$

$B \subseteq \mathbb{N}$ numerable

Todos los elementos $n \in \mathbb{N}$ son de la forma (por TFC):

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \quad \text{para cada primo } p_i$$

Puedo elegir B como el conjunto de primos (numerable por a)

y meter en cada conjunto

nulos

$5^{k>0}$ y 2^0 y 3^0

Comienzo $\quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^{k_4}, \dots$

meto todos los que tengan un $2^{k>0}$

meto todos los que tengan un $3^{k>0}$ y 2^0 ← exponente nulo

$$\Rightarrow A_{p_i} = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = p_i^{k_0} \cdot \prod_{\substack{q_i \in P \\ q_i > p_i \\ k_i \in \mathbb{N}}} q_i^{k_i} \, , \ \forall k_0 \geq 1, \ k_0 \in \mathbb{N} \right\}$$

↑ primo i

"n divisible por $p_i^{k_i}$, $\forall k_i > 0$ con $k_i \in \mathbb{N}$, y no divisible por primos menores a p_i"

$$\Rightarrow \mathbb{N} = \biguplus_{\substack{p_i \in P \\ P \subseteq \mathbb{N}}} A_{p_i}$$

con P el conjunto de Primos.

$\boxtimes$

Más sencillo:

P_2 7b) $\quad P = \{\text{primos en } \mathbb{N}\} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$A_1 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} \ \alpha_1 \in \mathbb{N}_0 \} = \{1, p_1, p_1^2, p_1^3, \dots\} \sim \mathbb{N}$

$A_2 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ \alpha_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \alpha_2 \in \mathbb{N} \} \sim \mathbb{N}$

$A_3 = \{ m \in \mathbb{N} : m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \alpha_3 \in \mathbb{N} \} \sim \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$: $\supseteq$) ✓

$\subseteq$) $m \in \mathbb{N} \to$ existe uma decomp. em nº primos: $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \in A_r$ ✓

8. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(a) Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que:

- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\leq m} B_n = \bigcup_{n\leq m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que toda sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba se tiene que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

a) Idea

Defino cada B_n como $A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$

$$\Rightarrow B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

$$\vdots$$

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i<n} A_i$$

De esta manera,

$$B_i \cap B_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$$

nota que también vale si B_i y/o B_j son el vacío.

b) Hq :

- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
- $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y
- $\bigcup_{n\le m} B_n = \bigcup_{n\le m} A_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

qvq

$$A \overset{?}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Como

$$\bigcup_{n\le m} B_n = \bigcup_{n\le m} A_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

?

9. (a) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(b) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, dado un alfabeto finito, hay más números reales que palabras definibles con ese alfabeto para nombrarlos.

10. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

Llamo

$1 =$ Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$P_1(A) =$ Todos los subconjuntos de A con 1 elemento

$P_2(A) =$ Todos los subconjuntos de A con 2 elementos

$\vdots$

$P_n(A) =$ Todos los subconjuntos de A con n elementos

y sea

$B_n^i \in P_n(A)$ un subconjunto de A con n elementos

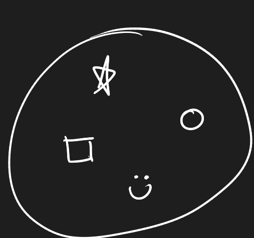
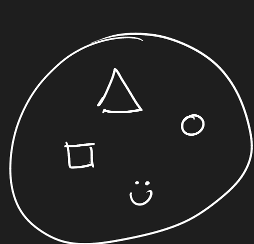
y además

$$\# P_n(A) = 2^n$$

Entonces sé que como B_n^i tiene finitos (n) elementos, puedo ordenarlos de alguna forma

$$\Rightarrow \exists\, g_n : B_n^i \longrightarrow \mathbb{N}^n$$

Ej: si $n = 4$

y $B_4^1 =$  $B_4^2 =$ 

$\Rightarrow g : P_4 \longrightarrow \mathbb{N}^4$

$$g\left(B_4^1\right) = [\star, \circ, \square, \smile]$$

y

$$g\left(B_4^2\right) = [\star, \circ, \square, \triangle]$$

$\therefore$ Para cada conjunto B_n^i puedo hallar una función inyectiva que lo ordene de alguna forma

y para cada $B_n^i \neq B_n^j$, el vector resultante es diferente

$\therefore$ g_n es inyectiva

$\therefore$ $\# B_n^i \leq \# \mathbb{N}^n = \# \mathbb{N}$

y como $P_n = \bigcup_{i=0}^{2^n} \{B_n^i\}$

$\Rightarrow \# P_n = \# \mathbb{N}$

y además, como

$$\mathcal{P}_f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

y unión numerable de conjuntos numerables, es numerable

(ej 9)

$$\Rightarrow \ \# \mathcal{P}_f(A) = \# \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

? Revisar Procedimiento