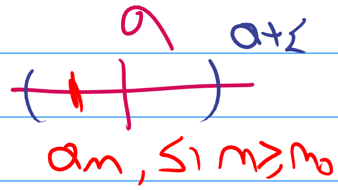
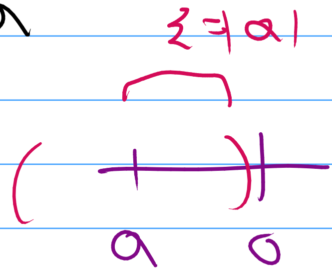
SUCESIONES

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathbb{R}_{\geq 0}$
$= (a_1, a_2, a_3, \dots)$



EJ: SUP $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, CON $a_n \to a$.

PROBAR QUE $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$



• CASO $a > 0$:

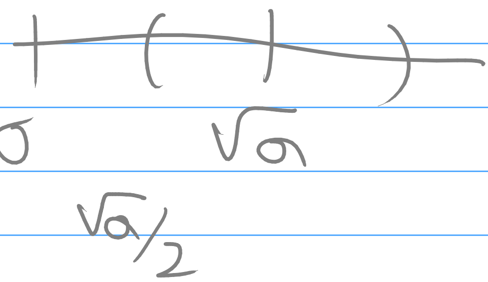
$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})| \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$

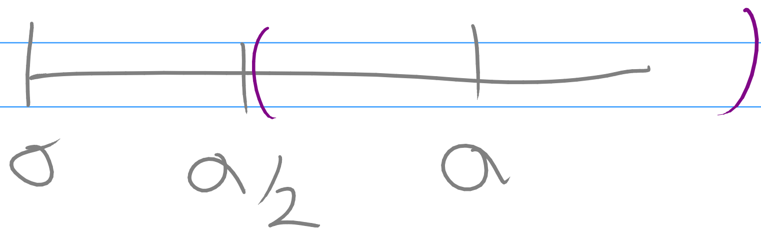
$$= \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$$

(*)

¿ESTÁ ACOTADO?

¿$= 0$?





$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ CON $\varepsilon = a/2$

$\exists n_0 / \; a_n \in (a - a/2, a + a/2) \quad \forall n \geq n_0$

$\rightsquigarrow a_n > a/2 \Rightarrow \sqrt{a_n} > \sqrt{a/2}$

$\sqrt{\ }$ CREC

$\Rightarrow \sqrt{a_n} + \sqrt{a} > \sqrt{a/2} + \sqrt{a} =: \delta > 0$

$(*) \quad |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |a_n - a| \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}$

$< |a_n - a| \cdot \dfrac{1}{\delta} \quad (*)$

DADO ε, TOMO n_1 TAL QUE

$|a_n - a| \overset{(*)}{<} \varepsilon \cdot \delta \quad \forall n \geq n_1$

ASÍ SI $n_2 := \text{máx}\{n_0, n_1\}$,

$(*)(*) \; |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon \cdot \delta / \delta = \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

- CASO $a = 0$: DADO ε, TOMO $n_0 /$

$a_n < \varepsilon^2 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow -\varepsilon < \sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

SUBSUCESIONES

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots$

$\underbrace{a_1, a_3, a_{21},}_{\text{VAN EN ORDEN CRECIENTE (CON RESP. AL SUBÍNDICE)}} \underbrace{\dots}_{\text{NO TERMINA}}$

$\sigma(1) = 1$
$\sigma(2) = 3$
$\sigma(3) = 21$

SEA $(a_n)_n$ UNA SUCESIÓN EN $\mathbb{R}$; ESTO ES UNA FUNCIÓN $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(a_1 = g(1), \dots \; a_n = g(n))$

SEA $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ UNA FUNCIÓN ESTRICT. CRECIENTE "ELECCIÓN DE TÉRMINOS"

LA SUBSUC. DETERMINADA POR σ ES LA DADA POR $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$f(k) = g(\underbrace{\sigma(k)}_{n_k}) =: a_{n_k}$$

$= (0, 1/2, -2/3, 3/4, -5/6, \dots)$

EJEMPLO: $a_n = (-1)^n (1 - 1/n)$

- $\sigma_1(k) = 2k$; LA SUBSUC ES

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \underbrace{1 - \frac{1}{2k}}_{\text{TÉRMINO K-ÉSIMO DE LA SUBSUC}}$$

- $\sigma_1(k) = 2k-1$;

LA SUBSUC ES

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2k-1} - 1$$

$(a_{2k})_k$ SUBS ; $(a_{2(k^2)})_k$ SUBSUBSUC

OBS:
- $a_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$
- $a_{2k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} -1$

13. Sean $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ si y sólo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

$\Rightarrow (a_n)_n$ NO CONVERGE

PROP: SEA $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ NO ACOT.

ENTONCES $\exists (a_{n_k})_k \;/\; a_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

(EJ: $(1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 6, \ldots)$)

DEM:

- COMO (a_n) NO ESTÁ ACOT, $\exists \underbrace{n_1}_{\sigma(1) :=}$ TAL QUE $\underbrace{|a_{n_1}|}_{= a_{n_1}} \geq 1$

- COMO (a_n) NO ESTÁ ACOT, $\exists n_2 > n_1$ TAL QUE $a_{n_2} \geq 2$

(PUES $\{a_n : n > n_1\}$ NO ES ACOT)

- DEFINIDOS $n_1, \ldots, n_k$; $\exists n_{k+1} > n_k$ TAL QUE

$$a_{n_{k+1}} \geq k+1$$

AFIRMO: $a_{m_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$;

DADO M, TOMO k TAL QUE $k \geq M$; ASÍ $a_{m_k} \geq k \geq M$ ✓

$\boxed{\times}$

PROP: SEA $(a_n)_n$. SUP $(a_{n_k})_k$ TAL QUE $a_{n_k} \to l$

SI (a_n) CONVERGE, LO HACE A l

DEM: SUP $a_n \to a$; PVQ $a = l$.

SEA $\varepsilon > 0$

$$|a - l| = |a - a_{n_k} + a_{n_k} - l|$$

$$\leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| \quad (*)$$

- COMO $a_{n_k} \to l$, $\exists k_0 /$

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon/2 \quad \forall k \geq k_0$$

- Como $a_m \to a$, $\exists\, m_0 /$

$|a_m - a| < \varepsilon/2 \quad \forall\, m \geq m_0$;

Tomo un k tal que:

- $k \geq k_0$
- $m_k \geq m_0$ ($k = m_0$ sirve)

$\Downarrow$ $k \geq \text{máx}\{k_0, m_0\}$

Así

$$|\ell - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\underset{\text{EJ 1}}{\Longrightarrow}$ $\ell = a$ $\boxtimes$

1. Probar que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$. Deducir que si $|x - y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = y$.