

7. Probar, usando la definición de límite:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{n+1} = -2.$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3}{2^n + 4} = 1.$

Def :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \left| \frac{3-2n}{n+1} - (-2) \right| &= \left| \frac{3-2n+2n+2}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{5}{n+1} \right| > 0 \end{aligned}$$

$$\star = \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

$\uparrow$   
quiero

$$\Leftrightarrow n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

- Encontré un  $n_1 := \frac{5}{\varepsilon} - 1$  a partir del cual

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_1$$

↑ pero si son iguales  
no vale  $|a_n - l| < \varepsilon$

- Si elijo  $n_0 \overset{\text{estricto}}{>} n_1$

$\Rightarrow$  sí vale

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

∴ como  $n_1 = \frac{5}{\varepsilon} - 1$

si elijo  $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$ , como  $n_0 \geq n_1$

Reguntar: debo asegurarme que sea entero?

$$\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

□

Otra forma de mostrar esto último, es decir:

$$\star = \frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

↑  
quiero

$$\Leftrightarrow n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n \geq \frac{5}{\varepsilon}$$

∴ si  $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$

$$\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

□

Otras posibles  $n_0$  podrían ser

$$n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil + 38$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil + \text{"quelquier naturel"}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

q.v.q

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\uparrow$   $\sin n \leq 1$                        $\uparrow$   $\text{quelque}$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore \text{choisis } n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

□

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3}{2^n + 4} = 1.$$

$$\left| \frac{2^n - 3}{2^n + 4} - 1 \right| = \left| \frac{\cancel{2^n} - 3 - \cancel{2^n} - 4}{2^n + 4} \right|$$

$$= \left| \frac{-7}{2^n + 4} \right|$$

$$= \frac{7}{2^n + 4} < \varepsilon$$

$\uparrow$   $\text{quelque}$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{\varepsilon} - 4 < 2^n$$

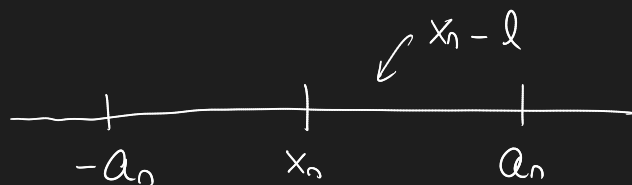
$$\log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) < n$$

$$\therefore n_0 = \left\lfloor \log_2\left(\frac{7}{\varepsilon} - 4\right) \right\rfloor + 1$$

□

8. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales. Probar que si  $|x_n - \ell| \leq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  entonces  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .

↑  
↑  
mismos índices



Como  $a_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \left| a_n \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

↙  $|a_n - 0|$

y además

$$|x_n - \ell| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

∴

$$|x_n - \ell| \leq a_n \leq |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

que es la definición de  $\lim$  de sucesiones

□

9. Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones de números reales tales que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0 e  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, probar que  $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0.

• Escribo cada hipótesis:

$$H_1 : \boxed{(x_n) \rightarrow 0}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \overset{|x_n - 0|}{|x_n|} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$H_2 : \boxed{(y_n) \text{ está acotada}} \leftarrow ? \text{ Sup e Inf?}$$

$$N \leq y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem

Por Prop. de lím. de sucesiones

$$\bullet \text{ si } x_n \rightarrow l$$

$$\Rightarrow c \cdot x_n \rightarrow c \cdot l \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

En el ej:

$$\text{Si } x_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow c \cdot x_n \rightarrow 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

en particular, para  $c \in [N, M]$

$$\therefore (x_n \cdot y_n) \rightarrow 0$$

□

10. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales tales que  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n$ . Si  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  y  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  probar que  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

IB:

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

$$|z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$$

Dem

$$\bullet \text{ Llamo } n_0 := \max \{ n_1, n_2 \}$$

$$|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\bullet \text{ Como } x_n \leq y_n \leq z_n$$

$$\Rightarrow |x_n - \ell| \leq |y_n - \ell| \leq |z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$|y_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\therefore y_n \rightarrow \ell \quad \square$$

11. Sea  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$  creciente. Probar que:

(a) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada superiormente, entonces tiene límite y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es no acotada superiormente, entonces  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

$$\text{a) } \mathcal{H} : \quad x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{creciente})$$
$$\exists c \in \mathbb{R} \quad / \quad x_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dem :

q.v.q

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad |x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Supongo que no tiene límite

- $\Rightarrow$  1) Oscila / no converge  
2) Diverge a infinito

1) Como es creciente

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como está acotada superiormente

$$x_n \leq x_{n+1} \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Debe converger a  $c$  ?



2) Si diverge es porque

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / M < x_n \quad \forall n \geq n_0$$

Pero como  $(x_n)$  es acotada

$$C \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ab.s!  $\therefore$  no diverge.

Como 1) y 2) no valen

$\Rightarrow (x_n)$  tiene límite, ✓

Falta ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} =: S$$

• Def de supremo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / S - \varepsilon < x_{n_1} \leq S$$

• Def de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} / |x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$$

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$

Como  $(x_n)$  es creciente y tiene límite

$\Rightarrow l$  es cota superior de  $(x_n)$

$$l - \varepsilon < x_n \leq l \quad \forall n \geq n_2$$

Obtenga que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} / l - \varepsilon < x_n \leq l \quad \forall n \geq n_2$$

∴ si elijo algún  $n_0 \geq n_2$  puedo decir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / l - \varepsilon < x_{n_0} \leq l$$

Lo cual es justamente la def. de supremo :

$$S = l$$



11. Sea  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$  creciente. Probar que:

(b) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es no acotada superiormente, entonces  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

$$H: \quad x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad M < x_n \quad \forall n \geq n_0$$

Dem

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad /$$

$$M < x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\therefore x_n \rightarrow \infty$$

□

12. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  acotado superiormente y no vacío. Probar que si  $A$  no tiene máximo entonces existe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  estrictamente creciente tal que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup(A)$ .

Hipótesis :

- $A$  es acotado superiormente y no  $\emptyset$
- $A$  no tiene máximo

Dem :

- Sé que

Todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  (no vacío) acotado superiormente tiene supremo

- Basta encontrar  $(a_n)$  estrictamente creciente  
con  $a_n \rightarrow \sup A$   
usando elementos de  $A$

- Como  $A$  no tiene máx  $\Rightarrow A$  no es finito

$$A \neq \emptyset$$

$\Rightarrow A$  es infinito

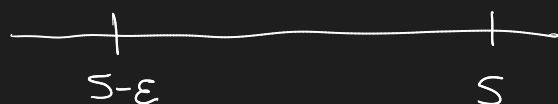
- Como  $A$  tiene supremo, lo llamo  $s$  y vale que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid s - \varepsilon < a < s$$

$\uparrow$   
 $s$  no es máximo

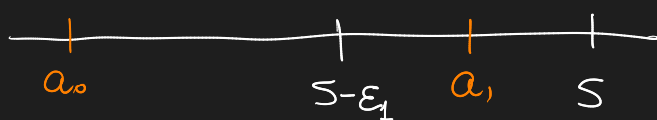
Idea :

- Como  $A$  no tiene máximo, para cualquier  $\varepsilon > 0$  siempre tengo infinitos elementos en  $(s-\varepsilon, s)$



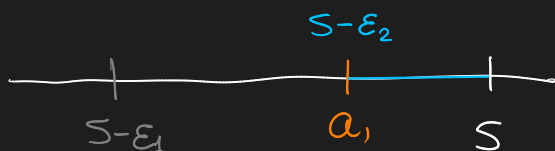
- Baste con elegir algunos (infinitos) de manera ordenada.

- 1) Elijo algún  $a \in (s-\varepsilon_1, s)$  y lo llamo  $a_1$



(con  $s-\varepsilon_1 > a_0 \in A$   
pues no quiero salir me  
de  $A$ , en caso de que  
tenga cota inferior)

- 2) Elijo un nuevo  $\varepsilon_2 = s - a_1$  ★



★ más adelante, esto no  
será suficiente.

- 3) Por este  $\varepsilon_2$ , también vale que

$$\exists a \in A \mid s-\varepsilon_2 < a < s$$

$\Rightarrow$  elijo algún  $a \in (s-\varepsilon_2, s)$  y lo llamo  $a_2$ .

Sé que  $a_1 < a_2$  pues  $a_1 \in (s-\varepsilon_1, s)$

y  $a_2 \in (a_1, s)$

4) Generalizando, puedo repetir este proceso infinitas veces tomando:

$$a_{n+1} \in (a_n, s) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo la garantía de que

- siempre  $\exists a_{n+1} \in A \mid a_{n+1} \in (a_n, s)$   
pues  $(a_n, s)$  es siempre infinito.

- siempre vale que  $a_n < a_{n+1}$   
pues elijo  $a_{n+1} \in (a_n, s)$  sin incluir  $a_n$ .

∴  $(a_n)$  es una sucesión en  $A$  estrictamente creciente.

Falta ver que  $a_n \rightarrow s$

q.v.q

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

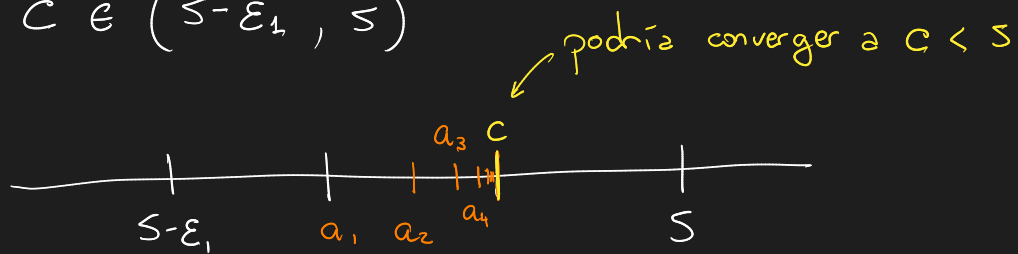
- La intuición nos dice que esto vale por la forma en que armamos la sucesión:

toda la subsecuencia  $(a_k)_{k > n_0}$   
está a la derecha de cada  $s - \varepsilon_{n_0}$

con  $\varepsilon_n \rightarrow 0$

• Pero puede no ser cierto si convergemos

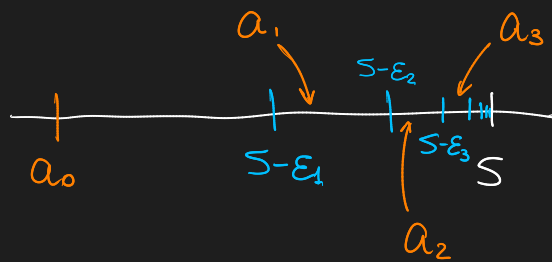
a algún  $c \in (s - \varepsilon_1, s)$



Para eso, me aseguro de tomar los  $\varepsilon$  de manera que  
converjan a  $s$ :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{s - a_n}{2}$$

De esta manera, siempre divido en 2 el segmento restante



Ahora la sucesión  $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Pues

• Si  $n = 0$ :  $\varepsilon_1 = \frac{s - a_0}{2}$  con  $s - a_0 \in A$

• Si  $n = 1$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{s - a_1}{2} \quad \text{con } a_1 \in (s - \varepsilon_1, s)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot (S - S + \varepsilon_1)$$

$$= \frac{1}{2^2} \varepsilon_1$$

• Si  $n = 2$ :

$$\varepsilon_3 \leq \frac{1}{2^3} \varepsilon_2$$

• Si  $n > 2$ :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{S - a_n}{2} \quad \text{con } a_n \in (S - \varepsilon_n, S)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \varepsilon_n$$

Como  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , con  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \overset{\text{fijo}}{\varepsilon_1}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore S - \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$



y como  $(a_n)$  está entre dos sucesiones que convergen  $S$  :

$$1) (s - \varepsilon_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$2) (s)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

$$\text{con } (s - \varepsilon_n) < a_n < \underbrace{s_n}_{\equiv S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y usando el ej. 10 de la Práctica 1:

10. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales tales que  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para todo  $n$ . Si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  y  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$  probar que  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .

Podemos concluir que

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$$

□

13. Sean  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$  y  $\ell \in \mathbb{R}$ . Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$  si y sólo si toda subsucesión de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\ell$ .

Idea:

• Supongo que  $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} / \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \neq \ell$

• Convergencia a otra cosa

• No converge

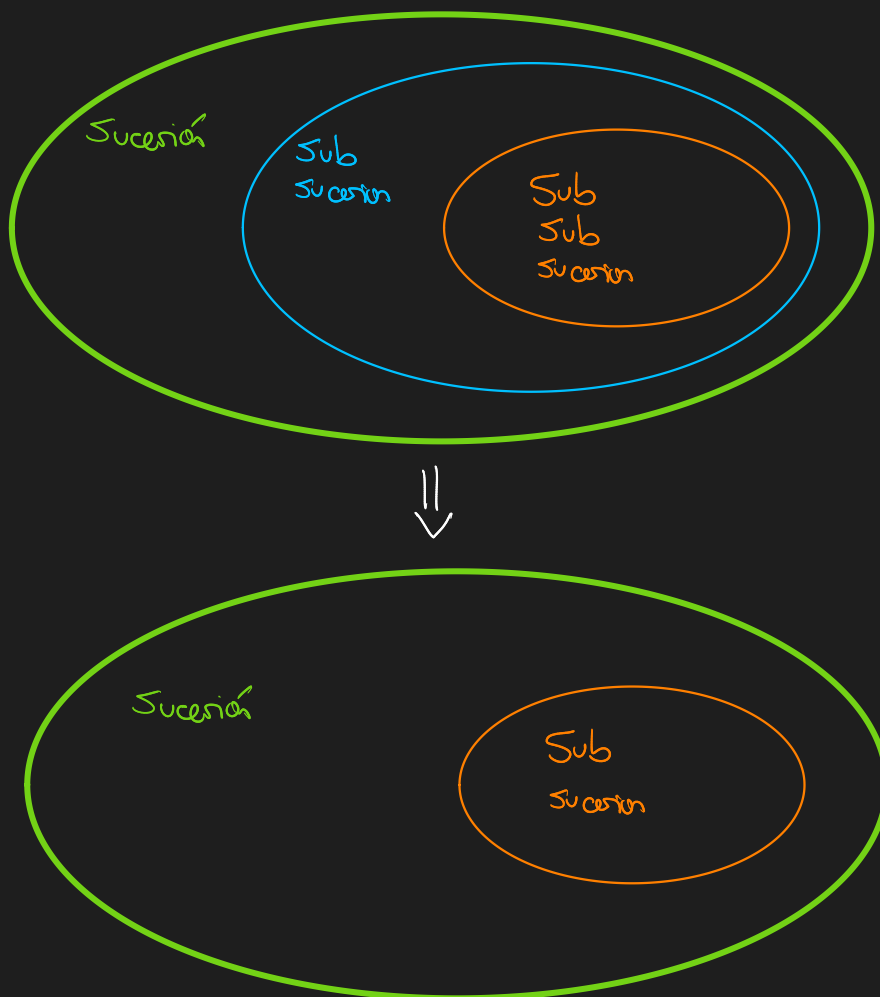
• Diverge.

14. Sean  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$  y  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Probar que si toda subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tiene una subsucesión  $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\ell$ , entonces la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $\ell$ .

Idea :

Toda sub suc. de una sub suc., de una sucesión original,  
es sub suc. de esa sucesión original,



**15.** Sea  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ . Probar:

- (a) Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}$  entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.
- (b) Si  $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(x_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  son convergentes entonces  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.





