

Probar

Rehago ejercicios vistos

en clase 1 de Agosto 19

2) Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ acotado superiormente

entonces $s = \sup(A)$ está en A (s es $\max(A)$)

Supongo que no es cierto:

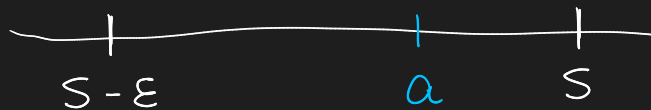
Supongo que $s \notin A$

$$A = \{a \in \mathbb{Z} : a < s\}$$

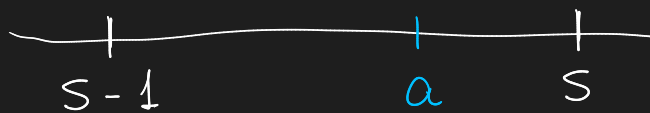
Si s es supremo

• es cota sup

• $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \mid s - \varepsilon < a < s$



En particular, si $\varepsilon = 1$



Como $a < s$ (pues $a \in A$ pero s no)

$$\Rightarrow s - a > 0$$

Lo quiero como ε

Volviedo a usar el argumento de enter

$$\bullet \forall \varepsilon > 0, \exists b \in A \mid s - \varepsilon < b < s$$

En particular, vde para $\varepsilon = s - a$



$$\Rightarrow \exists b \in A \mid s - (s - a) < b < s$$

$$a < b < s$$

- Pero así obtuve 2 elementos **distintos**

$a, b \in A \subseteq \mathbb{Z}$ acotados por

$s-1$ y s .

- O sea, obtuve 2 enteros que distan menos de 1 entre sí;

$$|b - a| < |s - (s-1)| = 1$$

$$|b - a| < 1$$

Abso!

por como $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq b$

$$\Rightarrow |b - a| > 1$$

\therefore el supremo de A debe pertenecer a A

$$s = \sup(A) \in A$$

□

3) Probar

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z} /$$

$$n \leq x < n+1$$

Dem

Debo probar:

1 Existencia

2 Unicidad

1



- $n = \lfloor x \rfloor$
- $n+1 = \lceil x \rceil$ (no lo usamos)

Idea:

- Armar un conjunto con todos los $k \in \mathbb{Z} / k < x$
- Que dar me con el supremo:
↳ Uso ej. anterior:

$$\text{Si } A \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{Z}$$

o sea

$$\sup(A) = \max(A)$$

$$\Rightarrow n \underset{\text{existe}}{\uparrow} \in \mathbb{Z}$$

Con eso tengo la existencia.
 \uparrow sospechoso...

• Para la unicidad:

↳ Supongo 2 enteros distintos y luego =
 absurdo / que son el mismo.

Armo conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

Llamo

$$n = \sup A$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{Z} / n \leq x$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, $n+1 \in \mathbb{Z}$ pues $1 \in \mathbb{Z}$

Como $n+1 \in \mathbb{Z}$

y $n+1 \notin A$ pues n es $\sup A$ y $n < n+1$
(sería un absurdo)

$\Rightarrow n+1 > x$ pues caso contrario, $n+1 \in A$
(sería el absurdo de arriba)

\therefore obtuve

$$n \leq x < n+1$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Probé 1, falta 2.

2. Unicidad.

Suponga que $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ /

$$n \leq x < n+1$$

$$m \leq x < m+1$$

Si $n \neq m \Rightarrow$ Puedo suponer sin pérdida de generalidad

que $n < m$

(es indiferente si $<$ ó $>$)



Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow m - n \geq 1$$

$$m \geq n + 1$$

Abs! pues $n \leq x < n+1 \leq m$

$$m \leq x < m+1$$

O sea

$$m \geq x \quad \text{y} \quad m \leq x$$

$$\therefore n = m$$

Lo que demuestra la unicidad.



4) Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$

Probar que A tiene ínf. y supremo,
y cuáles son.

Dem :

Como $A \subseteq \mathbb{Q}$

y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin A$

$\Rightarrow A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$ ↖ estricto

Propongo :

• $\inf(A) = 0 =: i$ ↖ Lo llevo

• $\sup(A) = \sqrt{2} =: s$

Como $x \geq 0 \quad \forall x \in A$ (0 es cota inferior)

y $0 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / i \leq a < i + \varepsilon$

\Rightarrow Si el ínfimo es cero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / 0 \leq a < \varepsilon$$

Lo cual es verdadero si $a = 0 \in A$

$$\therefore \inf A = 0$$

• Falta probar que el supremo es $\sqrt{2}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$$

• $\sqrt{2}$ es cota superior ✓

• $\sqrt{2}$ es la mejor cota:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / s - \varepsilon < a \leq s$$

↙ en este caso es estricto pues $\sqrt{2} \notin A$

Separo en 2 casos:

Ⓘ Caso trivial:

$$\text{Si } s - \varepsilon \leq 0 \text{ (pues } \varepsilon \geq s)$$

$$\Rightarrow \text{elijo } a = 0 \in A$$

Ⓜ Caso de interés:

$$\text{Si } \varepsilon < s,$$

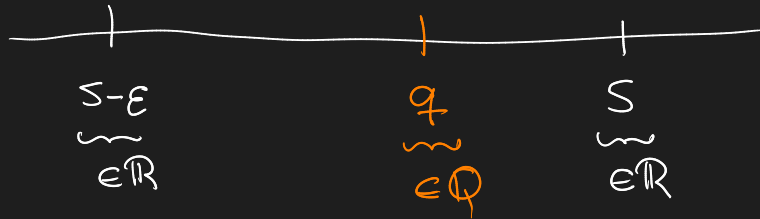
$$\Rightarrow s - \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$s \in \mathbb{R} \quad (\text{recuerdo que } s = \sqrt{2})$$

y como $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon < s$

\Rightarrow Por ejercicio 2b de la guía 1

2(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Probar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.



Se que $\exists q \in \mathbb{Q} / s - \varepsilon < q < s$

y como $q > 0$ (pues caso $\textcircled{\text{II}}$)

y $q < \sqrt{2}$ (pues $s = \sqrt{2}$)

$\Rightarrow q \in A \subseteq \mathbb{Q}$

\therefore probé que

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / s - \varepsilon < a \leq s$

o sea, que $\sqrt{2} = \sup A$

\square