CONTINUIDAD I

EJERCICIOS:

1) SEA $E = \mathcal{C}([0,1])$, CON d_∞;

RECORDAR QUE $d_\infty(f,g) = \| f - g \|_\infty$,

CON $\| h \|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |h(x)|$

$\hookrightarrow$ SATISFACE

$\| h + h' \|_\infty \leq \| h \|_\infty + \| h' \|_\infty$

SEA $S : E \to E$, $S(f) = f^2$

$(S(f))(x) = f(x) \cdot f(x))$ $\to$ $\left(\begin{array}{l} \forall f_0 : \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \\ d_\infty(f,f_0) < \delta \\ \Rightarrow d_\infty(S(f), S(f_0)) \\ < \varepsilon \end{array} \right)$

VEAMOS QUE S ES CONT.

SEA $f_0 \in E$. SEA $\varepsilon > 0$

$d_\infty \left(S(f), S(f_0) \right) = \| f^2 - f_0^2 \|_\infty$

$= \max\limits_{x} | f(x)^2 - f_0(x)^2 |$

$= (f(x) - f_0(x))(f(x) + f_0(x))$

$$= \max_x \left(|g(x) - f_0(x)| \, \underbrace{|g(x) + f_0(x)|}_{\le |g(x)| + |f_0(x)| \le \underbrace{\|g\|_\infty + \|f_0\|_\infty}_{\text{NO DEP DE } x}} \right)$$

$$\le \underbrace{\left(\|g\|_\infty + \|f_0\|_\infty \right)} \cdot \underbrace{\max_x |f(x) - f_0(x)|}_{d_\infty(g, f_0)}$$

$$\|g\|_\infty + \|f_0\|_\infty = \|g - f_0 + f_0\|_\infty + \|f_0\|_\infty$$

$$\le \underbrace{\|g - f_0\|_\infty}_{= d_\infty(g, f_0)} + 2\|f_0\|_\infty$$

$$\le \underbrace{\left(d_\infty(g, f_0) + 2\|f_0\|_\infty \right) d_\infty(g, f_0)}_{\longrightarrow 0}$$

$$d_\infty(g, f_0) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow S$ ES CONTINUA

MÁS PRECISAMENTE: SEA $\varepsilon > 0$.

SEA $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(d) = (d + 2\|f_0\|) \cdot d$$

COMO $\sigma(d) \xrightarrow[d \to 0]{} 0 = \sigma(0)$ (PUES σ ES CONTINUA!)

$$(\exists \delta) \quad \underbrace{d < \delta}_{|d-0|} \Rightarrow \underbrace{\sigma(d) < \varepsilon}_{|\sigma(d) - \sigma(0)|}$$

$\Rightarrow d_\infty(f, f_0) < \delta$ IMPLICA

$$d_\infty(S(f), S(f_0)) < \varepsilon$$

2) SEA $f : E \to E'$ (EN CUALQUIERA), SEA $a \in E$, y

SEA $f(a) \in E'$.

- SUP a PTO AISLADO DE E:

$$(\exists r) \quad B(a, r) = \{a\}$$

ENTONCES f ES CONT EN a:

SEA $\varepsilon > 0$; QVQ $\exists \delta > 0$ /

$$f(B(a,\delta)) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$$

$= \{a\}$, si $\delta = r$

NOTA: $f(\{a\}) = \{f(a)\}$

- SUP $f(a)$ ES UN PTO AISLADO DE E':

$$(\exists r) \quad B(f(a), r) = \{f(a)\}$$

f ES CONT EN a SII $(\exists\, \delta > 0)$

$$f(B(a,\delta)) = \{f(a)\} = B(f(a), r)$$

ie, $d(b,a) < \delta \Rightarrow f(b) = f(a)$

"f ES LOC CTE EN a"

3) SEA $f : E \to \mathbb{R}$. ENTONCES

f ES CONT SII $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$

$U_\alpha := \{x \in E : f(x) < \alpha\}$ y

$V_\alpha := \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ ie, $f(x) \in (-\infty, \alpha)$

SON ABIERTOS (DE E)

(RECORDAR: SEA $f: X \to Y$ FUNCIÓN;
SEA $G \subseteq Y$ CONJ;
$f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$)

(RECORDAR: $f: E \to E'$ CONT $\iff$ $\underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{CONJUNTO PREIMAGEN}}$ ES ABIERTO (DE E) $\forall G$ ABIERTO (DE E'))

$\Rightarrow$) $U_\alpha = \underbrace{f}_{\text{CONT}}{}^{-1} \underbrace{(-\infty, \alpha)}_{\text{ABIERTO (DE } \mathbb{R})}$ $\to$ ABIERTO;

$V_\alpha = f^{-1}(\alpha, +\infty)$ $\to$ ABIERTO

$\Leftarrow$) SEA $x_0 \in E$. SEA $\varepsilon > 0$ QVQ $(\exists \delta > 0)$ /
$f(B(x_0, \delta)) \subseteq \underbrace{B(f(x_0), \varepsilon)}_{(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)}$

δ

$$\iff B(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}\Big(\underbrace{(f(x_0)-\varepsilon, +\infty)}_{V_{f(x_0)-\varepsilon}}\Big)$$

ie:

- $f(B(x_0,\delta)) \subseteq (f(x_0)-\varepsilon, +\infty)$ y
- $f(B(x_0,\delta)) \subseteq (-\infty, f(x_0)+\varepsilon)$

$$\iff B(x_0,\delta) \subseteq \underbrace{f^{-1}(-\infty, f(x_0)+\varepsilon)}_{= U_{f(x_0)+\varepsilon}}$$

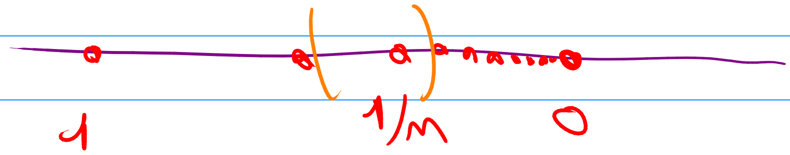
ie: $\forall \varepsilon \ (\exists \delta > 0) \ /$

$$B(x_0,\delta) \subseteq \underbrace{\underbrace{U_{f(x_0)+\varepsilon}}_{AB} \cap \underbrace{V_{f(x_0)-\varepsilon}}_{AB}}_{\text{ABIERTO; CONTIENE A } x_0}$$

¡EXISTE δ! (DEF DE ABIERTO)

1) SEA $E = \{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$

E:



SEA E' EM, Y SEA $(y_n) \subseteq E'$, $y \in E'$

DEFINO $f : E \to E'$,

$$\begin{cases} f(1/n) = y_n \\ f(0) = y \end{cases}$$

PROBAR QUE SON EQUIV

i. $\underbrace{y_n}_{f(1/n)=} \to y = f(0)$

ii. f ES CONT EN 0

iii. f ES CONT

iii) $\Rightarrow$ ii) ✓

ii) $\Rightarrow$ i) COMO $1/n \to 0$
Y f ES CONT EN 0,
$y_n = f(1/n) \to f(0) = y$

iii) $\Rightarrow$ iii) COMO $1/n$ ES PTO

AISLADO DE E, f ES CONT EN $1/n$

i) $\Rightarrow$ iii) PENSAR PARA EL JUEVES