UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Cardinalidad 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

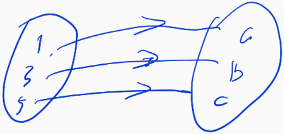
Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Cardinalidad - Introducción

X, Y conj. tienen el mismo cardinal (IDEA)

si $\exists\ f : X \to Y$ biyectiva.

$X = \{1, 3, 5\}$ $\quad$ $Y = \{a, b, c\}$



$X = \mathbb{N}$ $\quad$ $Y = \{\text{naturales pares}\}$.

$f : X \to Y$ $\quad$ $f(k) = 2k$.

biyectiva.

$\mathbb{N}$ y $\{\text{pares}\}$ tienen el mismo cardinal

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Proposición

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

(EJ GUÍA) • REFLEX: ¿$X \sim X$?

$id : X \to X$

$id(x) = x$.

• SIM: $X \sim Y \overset{?}{\Rightarrow} Y \sim X$

Si $\exists f : X \to Y$ biyectiva $\overset{?}{\Longrightarrow} \exists g : Y \to X$ biy.

SÍ: $g = f^{-1}$.

• TRANSIT: EJERC.

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \{$números pares$\}$

Ejemplo naturales

$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\}$

$$f : \mathbb{N} \to \{\text{pares}\}$$
$$k \mapsto 2k$$

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \{\text{pares}\} \\ k &\mapsto 2k \end{aligned}$$

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(k) = \begin{cases} k/2 & k \text{ par} \\ -\dfrac{k-1}{2} & k \text{ impar} \end{cases}$$

VER QUÉ SIRVE

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

IDEA:

$\rightarrow \mathbb{N} \sim \{\text{rac. posit}\}$

$\boxed{\text{PENSAR } \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}}$

$\boxed{\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}}$

$\mathbb{N} \rightarrow \{\text{rac. posit}\}$

$1 \rightarrow 1$		$5 \rightarrow 1/3$	
$2 \rightarrow 2$		$6 \rightarrow 4$	
$3 \rightarrow 1/2$		$7 \rightarrow 3/2$	
$4 \rightarrow 3$			

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ \underbrace{X \sim Y}\}.$$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$; → ALEPH CERO

$$\#\mathbb{Z} = \aleph_0$$
$$\|$$
$$\#\mathbb{Q} = \#\{\text{pares}\}$$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$;
- $\#\mathbb{R} = c$;

¿$c \neq \aleph_0$?

$$\mathbb{N} \underbrace{\qquad}_{\sim} \mathbb{Q} \underbrace{\qquad}_{\nsim} \mathbb{R}$$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$;
- $\#\mathbb{R} = c$;
- $\#\underbrace{\{1, 2, \ldots, n\}} = \underline{n}$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$;
- $\#\mathbb{R} = c$;
- $\#\{1, 2, \ldots, n\} = n$

Definición

Llamemos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ al intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$;
- $\#\mathbb{R} = c$;
- $\#\{1, 2, \ldots, n\} = n$

Definición

Llamemos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ al intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ si y sólo si $n = m$.

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

es único

en este caso,

$\# A = n$

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición

Un conjunto A es infinito...

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición

Un conjunto A es infinito... si no es finito.

Definición

Un conjunto A es numerable si $A \sim \mathbb{N}$.

Definición
Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición
Un conjunto A es infinito... si no es finito.

Definición
Un conjunto A es numerable si $A \sim \mathbb{N}$.

Equivalentemente, si $\underbrace{\#A = \aleph_0}$.

CONTABLE

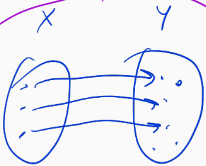
A LO SUMO NUMERABLE = "FINITO O NUMERABLE"

Orden entre cardinales

$X \sim Y \iff \#X = \#Y \iff$

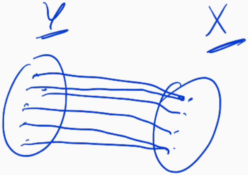
$\exists f : X \to Y$ biy.

$\boxed{\#X \leq \#Y}$



$\exists f : X \to Y$

INY



$\exists g : Y \to X$

SURYECTIVA.

Orden entre cardinales

$\#A = \#B$ significa que existe $f : A \to B$ biyectiva.

Orden entre cardinales

$\#A = \#B$ significa que existe $f : A \to B$ biyectiva.

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Orden entre cardinales

$\#A = \#B$ significa que existe $f : A \to B$ biyectiva.

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Ejercicio:
Existe $f : X \to Y$ inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ suryectiva.

(las dos posibles definiciones de $\#X \leq \#Y$ coinciden)

Orden entre cardinales

$\#A = \#B$ significa que existe $f : A \to B$ biyectiva.

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Ejercicio:
Existe $f : X \to Y$ inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ suryectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ INY NO BIYECTIVA PERO $\exists\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ BIY.

$f_1(k) = k$

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Entonces, veamos la buena definición, por ejemplo, de $\leq$:

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Entonces, veamos la buena definición, por ejemplo, de $\leq$:

Supongamos que $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ y que existe $f : X \to Y$ inyectiva. Tenemos que ver que existe una función $f' : X' \to Y'$ inyectiva.

$$\left[\begin{array}{ccc} \#X & \leq & \#Y \\ \parallel & & \parallel \\ \#X' & & \#Y' \end{array}\right]$$

$\exists\, f : X \to Y$ INY.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\ \text{biy}"'] & Y \arrow[d, "h\ \text{biy.}"] \\ X' & Y' \end{tikzcd}$$

$f' : X' \to Y'$

$f' = h \circ f \circ g^{-1}$ INY.

Preguntas

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

Preguntas

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Preguntas

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

Preguntas

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

si a $\mathbb{N}$ le agregamos un montón de números para obtener $\mathbb{Q}$, el cardinal ni se entera.

Preguntas

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

si a $\mathbb{N}$ le agregamos un montón de números para obtener $\mathbb{Q}$, el cardinal ni se entera.

Supongamos que $\#A \leq \#B$ y que $\#B \leq \#A$.

¿Es cierto que $\#A = \#B$?

$\exists f: A \to B$ INY

$\exists g: B \to A$ INY

Definición

Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\underbrace{\mathcal{P}(X)} = \underbrace{\{A \ : \ A \subset X\}}$.

$\boxed{X = \{1, 2\}}$ $\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$\boxed{X = \phi}$ $\# \phi = 0$. (FINITO)

$\boxed{\mathcal{P}(X) = \{\phi\}.}$ $\# \mathcal{P}(\phi) = 1$

Definición

Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\mathcal{P}(X) = \{A \,:\, A \subset X\}$.

Teorema (Cantor)

Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

CONSEC: $\# \mathbb{N} < \# \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to$ NO NUMERABLE

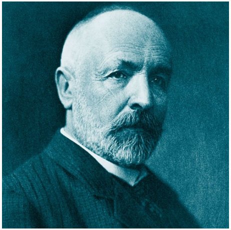
$\therefore$ hay cardinales inf. + grandes que otros

· hay conj. no numerables.

· PENSAR: no hay un cardinal que sea el mayor de todos.

Definición
Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subset X\}$.

Teorema (Cantor)
Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Definición

Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Teorema (Cantor)

Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

1) $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$

$f : X \to \mathcal{P}(X)$ $\quad f(x) = \underbrace{\{x\}}_{\in \mathcal{P}(X)}$.

$x \mapsto \{x\}$.

INYECTIVA ✓

∘ OTRA FORMA: $g : X \to \mathcal{P}(X)$ INY.

$x \mapsto X \setminus \{x\}$.

$\therefore \#X \leq \#\mathcal{P}(X)$.

Teorema (Cantor)
Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

2) $\boxed{\nexists\, g : X \to \mathcal{P}(X) \text{ BIYECTIVA.}}$

Sea $g : X \to \mathcal{P}(X)$ una función. VEREMOS que g NO puede ser suryectiva.

Obs: $x \in X$, $g(x) \subset X$

$g(x)$ SUBCONJ de X

$x \in X$

$B = \{x \in X \,/\, \boxed{x \notin g(x)}\} \subset X$

$(B \in \mathcal{P}(X))$. Veamos que $B \notin \operatorname{Im} g$ $(\therefore g$ NO sury.$)$

Sup $\exists\, y \in X \,/\, \boxed{g(y) = B}$.

- si $y \in B \Rightarrow y \in B = g(y) \Rightarrow y \notin B$ ABS
- si $y \notin B \Rightarrow y \notin g(y) \Rightarrow y \in B$ ABS.

$\therefore \nexists\, y \,/\, g(y) = B$

$\therefore g$ NO SURY.