

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A = \{\phi : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0, 1] \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0, 1]$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$$a) \mathcal{P}(A) = \{X \subseteq A\}$$

↑ todos los posibles subconjuntos de A

• Cuando digo A puede ser finito, numerable o no numerable!

$$\phi : A \rightarrow \{0, 1\}$$

↓
(no sucesiones ni
numerosos subconjuntos)

↑ ϕ toma algún elemento de A
y devuelve 0 o 1.

• Con esto, puedo definir:

$$\psi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

||

$$\{\phi : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ funciones}\}$$

$$B \mapsto \phi_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \\ 1 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

con $B \in \mathcal{P}(A)$, o sea, $B \subseteq A$

∴ para cada B en $\mathcal{P}(A)$, tengo una

ϕ_B que depende de B , y para cada

B , ϕ_B es diferente, pues

$$\text{si } B \neq \tilde{B} \Rightarrow \exists b \in B \text{ con } b \notin \tilde{B}$$

o viceversa

de forma que

$$\phi_B(b) = 1$$

y

$$\phi_{\tilde{B}}(b) = 0$$

o sea que

$$\phi_B(x) \neq \phi_{\tilde{B}}(x) \quad \forall B \neq \tilde{B}$$

$$\forall x \in (B \setminus \tilde{B} \cup \tilde{B} \setminus B)$$

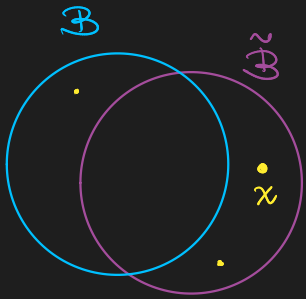
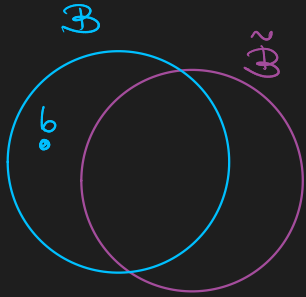
$$\therefore \phi_B(b) = \phi_{\tilde{B}}(b) \Leftrightarrow B = \tilde{B}$$

$$\therefore \psi(B) = \psi(\tilde{B}) \Leftrightarrow B = \tilde{B}$$

con lo que ψ es inyectiva.

$$\Rightarrow \# \mathcal{P}(A) \leq \# \{0,1\}^A$$

• Ahora, definimos otra función ψ /



$$\Psi : \{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$\{\phi : A \rightarrow \{0,1\} \text{ funciones}\}$$

$$\phi_B \longmapsto \{x \in B : \phi_B(x) = 1\}$$

↑
función que manda elementos
de $B \subseteq A$ en $\{0,1\}$

• Como

$$\Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}}) \quad \forall B \neq \tilde{B}$$

$$\text{pues si } b \in B \text{ y } b \notin \tilde{B} \Rightarrow \phi_B(b) \neq \phi_{\tilde{B}}(b)$$

$$\Rightarrow \{x \in B : \phi_B(x) = 1\} \neq \{x \in \tilde{B} : \phi_{\tilde{B}}(x) = 1\}$$

$$\Rightarrow \Psi(\phi_B) \neq \Psi(\phi_{\tilde{B}})$$

$\therefore \Psi$ es inyectiva.

$$\Rightarrow \text{como } \Psi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^A \text{ inyectiva}$$

$$\text{y } \Psi : \{0,1\}^A \longrightarrow \mathcal{P}(A) \text{ inyectiva}$$

\Rightarrow por Teorema de Cantor - Schröder - Bernstein

existe una función biyectiva entre $\{0,1\}^A$ y $\mathcal{P}(A)$

con lo que

$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$$

□