1. Sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de bolas abiertas y disjuntas de $\mathbb{R}^n$. Probar que el conjunto I es contable.

Arranco en $\mathbb{R}$

Son disjuntas

↳ tienen un racional adentro

↳ le asigno ese racional a esa bola

$$\# I \leq \# \mathbb{Q}$$

2. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, F' el conjunto de sus puntos de acumulación y $A = F \setminus F'$ el conjunto de sus puntos aislados.

   (a) Probar que A es a lo sumo numerable.

   (b) Sea $B = F'$. ¿Puede B tener puntos aislados? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso contrario, dar una demostración.

a) Usando el 1

Centro una bola en cada punto aislado

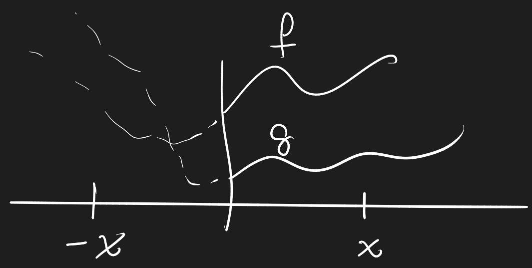
Radio como d. entre puntos sobre 2.

Asigno un racional en cada bola

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f y g son continuas en 0 y $\underbrace{f(0) > g(0)}$.
Probar que existe $\delta > 0$ tal que $\inf\limits_{|x|<\delta} f(x) > \sup\limits_{|x|<\delta} g(x)$.

$$d(f(0), g(0)) > 0$$

$$M$$



$$\inf_{|x|<\delta} f(x) > \sup_{|x|<\delta} g(x)$$

$(\forall x \in \mathbb{R})\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 /$

$$\text{si } d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

En $x = 0$,

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 /$

$$\text{si } d(0,y) < \delta \Rightarrow d(f(0), f(y)) < \varepsilon$$

En particular, si $\varepsilon_0 := \dfrac{M}{2}$

$\Rightarrow \exists \delta_1$ para f $/ \ d(f(0), f(y)) < \varepsilon_0$

y $\exists \delta_2$ para g $/ \ d(g(0), g(y)) < \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ si tomo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\Rightarrow$ Probé que existe $\delta > 0$.

$\boxtimes$

4. Decidir en cada caso si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando un contraejemplo sin son falsas o una demostración si son verdaderas: Sea (E, d) espacio métrico y $A, B \subseteq E$;

(a) Si $A \subsetneq B$, entonces $\overline{A} \subsetneq B$;

(b) $(A \setminus B)^\circ = A^\circ \setminus B^\circ$;

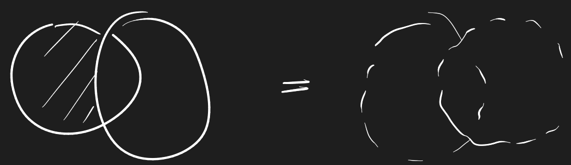
(c) $\partial(\overline{A}) \subseteq \partial(A)$.

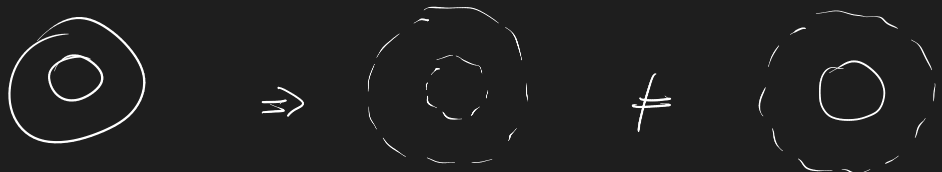
a) $A \subset B \overset{?}{\Rightarrow} \overline{A} \subset B$

si $A = A^\circ$ y $\overline{A} = B \Rightarrow \overline{A} = B$

si $\left.\begin{array}{l} A = (0,1) \\ B = [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} = [0,1] = B$

Falso

b) 

otra 

$A = [-1,1]$

$B = \{0\}$ ← int. vacío con dist. 1.

c) $\overline{A} = A \cup \partial A$

$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \Rightarrow \overline{A} = A^\circ \,\dot{\cup}\, \partial A$

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

qvq

$$\partial \overline{A} \subseteq \partial A$$

Sea $x \in \partial \overline{A}$ $\quad \forall r >$

$\Rightarrow \exists y \in B(x,r)$, $y \in \overline{A} \wedge \underbrace{y \in \overline{A}^c}_{y \in (A^\circ)^c}$

Desig. Triang.

Contraejemplo para la vuelta

$$\partial \overline{A} \overset{?}{\supseteq} \partial A$$

Si $A = \mathbb{Q} \Rightarrow \partial A = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{A} = \mathbb{R} \Rightarrow \partial \overline{A} = \emptyset$

6. Sea, (E, d) y (E', d') espacios métricos. Definimos en $E \times E'$ la función $\overline{d}$ como

$$\overline{d}((x, x'), (y, y')) := \sqrt{d(x, y)^2 + d'(x', y')^2}.$$

Probar que $(E \times E', \overline{d})$ es un espacio métrico.

7. Sea, (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una funión contínua. Probar que el conjunto *gráfico de* f definido como

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in E\},$$

es cerrado en $E \times E'$ con la mátrica $\overline{d}$ del ejercicio anterior.

$G(f)$ es cerrado $\iff$

1. Toda sucesión convergente, lo hace en $G(f)$

Sea $(x_n, f(x_n)) \subseteq G(f)$, con

$$(x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x))$$

$x \in E$

como $f : E \to E'$

$f(x) \in E'$

Por convergencia de coordenadas

$x_n \to x$

y

$f(x_n) \to f(x)$

Como $x \in E$ y $f : E \to E'$

$\Rightarrow f(x) \in E'$

$f(x) \in E'$

$$\therefore (x, f(x)) \in G(f) = \{ (x, f(x)) : x \in E \}$$

Finalmente

$G(f)$ es cerrado. ☑

7-) DE LA LISTA. QVQ: $\overline{G(f)} \subseteq G(f)$

$(a,b) \in \overline{G(f)} \Rightarrow \forall r>0, \exists x \in E / \bar{d}((a,b),(x,f(x))) < r$

COMO f CONTINUA, $\exists \delta > 0 / d(y,a) < \delta \Rightarrow d'(f(y),f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\circledast \quad d(a,x) \leq \bar{d}((a,b),(x,f(x))) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, TOMO $\varepsilon' = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\} \Rightarrow \exists x \in E / \bar{d}((a,b),(x,f(x))) < \varepsilon'$

$d'(b,f(a)) \leq \underbrace{d'(b,f(x))} + \overbrace{d'(f(a),f(x))}^{\circledast} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow d'(b,f(a)) = 0$

$\leq \sqrt{d'(b,f(x))^2 + d(a,x)^2} = \bar{d}((a,b),(x,f(x))) < \frac{\varepsilon}{2}$

8. (a) Probar que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\overline{K^\circ}$ también lo es.

(b) Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ dado por $K = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x^2 < 2\}$. ¿Es $\overline{K^\circ}$ compacto?

$$= (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$\left(\overline{(0, \sqrt{2})}\right)^c = \Big((-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \Big) \cap \mathbb{Q} \quad \text{es abierto}$$

$\therefore$ $(0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ es cerrado.

9. Sea (E,d) un espacio métrico. Para $K \subseteq E$ y $\varepsilon > 0$ definimos

$$B(K,\varepsilon) = \bigcup_{x \in K} B(x,\varepsilon).$$

Probar que si K es compacto y $U \subseteq E$ es un abierto tal que $K \subseteq U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(K,\varepsilon) \subseteq U$.