UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Espacios Métricos 2

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

(E, d) $\quad x \in E$, $r > 0$

$B(x,r) = \{ y \in E \,/\, d(y,x) < r \}$ $\qquad \bar{B}(x,r) = \{ y \in E \,/\, d(x,y) \leq r \}$

$(\mathbb{R}^2, d_2)$

$\rightarrow B(x,r)$

$\bar{B}(x,r)$

$E = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ $\qquad B(x,r) = (x-r, x+r)$

$|x-y| < r \Leftrightarrow -r < y-x < r$

$\boxed{x-r < y < x+r}$

PENSAR: $\quad E = \mathbb{Z}$

$B(x,r)$ $\quad \boxed{x=3}$, $\quad r = 1/2, 1, 3/2$ $\qquad \bar{B}(x,r)$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación

Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

EJERCICIO (GUÍA): $x \in E$, $r > 0$

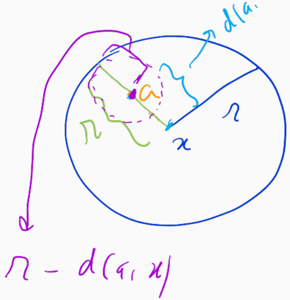
$B(x,r)$ es un conj abierto

bola abierta.

$\boxed{\text{EJERCICIO } (☆)}$

(se puede usar para probar)

$x \in E$, $r > 0$, $a \in B(x,r)$. PROBAR:



Si $\varepsilon = r - d(a,x)$

$$\Longrightarrow \underbrace{B(a,\varepsilon)} \subset \underbrace{B(x,r)}.$$

ESQUEMA: SEA $y \in B(a,\varepsilon)$ ...

... $\Longrightarrow y \in B(x,r)$

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

$x \in A^\circ \Rightarrow \exists\, r \,/\, \underbrace{B(x,r)}_{x \in} \subset A \Rightarrow x \in A$

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$. VER.

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(iii) A° es un conjunto abierto. VER.

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(iii) A° es un conjunto abierto.

(iv) Si G es abierto y $G \subset A$, entonces $G \subset A^\circ$.

A° es el MAYOR abierto contenido en A.

DEM (iv): $\boxed{G \text{ ab}}$, $\boxed{G \subset A}$

$\boxed{\text{Sea } x \in G}$ (veamos que $x \in A^\circ$)

G ab $\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, \underbrace{B(x,r) \subset G \;;\; G \subset A}$

$\Rightarrow \underbrace{\exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \subset A} \Rightarrow \boxed{x \in A^\circ}$

$\therefore G \subset A^\circ$ ✓

Teorema

La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta. ↳ FINITA O INFINITA

La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

DEM: $(G_i)_{i \in I}$ I conjunto de índices FINITO O INFINITO.

G_i ab. $\forall i \in I$

$A = \bigcup_{i \in I} G_i$

Sea $x \in A = \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I \,/\, x \in G_{i_0}$.

G_{i_0} es ab

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x, r) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i = A$

$\therefore$ A es abierto

EJERCICIO: · Probar la 2da parte

· buscar un ejemplo de ∞ abiertos con $\cap$ NO ab.

Ejercicio
Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

SUGERENCIA: $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$

$B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio
Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Definición
$x \in G$
Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Ejercicio
Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Definición
Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

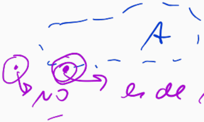
Observación
El conjunto V es un entorno de x si y sólo si $x \in V^o$. EJERC.

Un conjunto G es abierto si y sólo si es un entorno de cada $x \in G$.

Definición $x \in E$

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

no es de adherencia



no

es de adh.

es de adh

Obs: si $x \in A \Rightarrow$

$\forall r > 0$, $x \in \underline{B(x,r) \cap A} \Rightarrow$

x es pto de adh. de A.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, existe $a \in A$, tal que $a \in B(x, r)$.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, existe $a \in A$, tal que $a \in B(x,r)$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

INTUITIVAMENTE (NO ES UNA DEM):

$\bar{A}$ = "PUNTOS DE A + PUNTOS PEGADOS A A"

Proposición

Sean $A, B \subset E$.

(i) $\boxed{A \subset \bar{A}}$. → si $x \in A \Rightarrow x$ es de adh. $\Rightarrow x \in \bar{A}$

(ii) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$ → VER

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

DEM DE (iii) $\bar{\bar{A}} = \overline{(\bar{A})}$

. $\bar{A} \subset \overline{(\bar{A})}$ ✓ (por (i) aplicado a $\bar{A}$)

. VEAMOS $\overline{(\bar{A})} \subset \bar{A}$. $\boxed{\text{Sea } x \in \overline{(\bar{A})}}$ [q v q $x \in \bar{A}$]

→ Dado $r > 0$, $\exists\, a \in B(x,r) \cap \bar{A}$. Sea $\rho = r - d(a,x)$

$\Rightarrow \boxed{B(a,\rho) \subset B(x,r)}$

(☆) $a \in \bar{A} \Rightarrow \boxed{B(a,\rho) \cap A \neq \emptyset}$.

$B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

$\therefore \bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$

Proposición

Sean $A, B \subset E$.

(i) $A \subset \bar{A}$.

(ii) Si $A \subset B$ entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Ejercicio

Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Definición

Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema
A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

$\boxed{A^c = E \setminus A}$

DEM: $\Rightarrow$) sabemos que A es cerrado, queremos probar que A^c es abierto

Sea $x \in A^c \Rightarrow x \notin A = \bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow$

$\exists r > 0 / \underbrace{B(x,r) \cap A} = \emptyset \Rightarrow \exists r > 0 / B(x,r) \subset A^c$

$\therefore A^c$ es abierto

$\Leftarrow$) EJERCICIO.

Observación

(i) $\overline{A}$ es cerrado; $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ es cerrado

Observación

(i) $\overline{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \overline{A}$; si $x \in A$, $\left[\begin{array}{l}\forall r > 0 \\ x \in \underbrace{B(x,r) \cap A}_{\neq \emptyset}\end{array}\right] \Rightarrow x \in \overline{A}$

Observación

(i) $\bar{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

$A \subset F$, F cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset F$

$\bar{A}$ es EL MENOR cerrado que contiene a A.

$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

A°: mayor abierto contenido en A

$\bar{A}$: el menor cerrado que contiene a A

Teorema

(i) La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.

(ii) La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.

DEM: (i) DOS MANERAS: ① X DEF (EJERCICIO)

② USANDO EL TEO DE ABIERTOS:

$(F_i)_{i\in I}$ con F_i CERRADO $\forall i \in I$ $\quad A = \bigcap_{i\in I} F_i$.

F_i cerrado $\forall i \xrightarrow{\text{TEO}} F_i^c$ ab. $\forall i \in I \xrightarrow{\text{TEO U. de ab.}}$

$\bigcup_{i\in I} F_i^c$ es ab $\xrightarrow{\text{TEO}}$ $\Big(\underbrace{\bigcup_{i\in I} F_i^c}_{\bigcap_{i\in I} F_i = A}\Big)^c$ es cerrado.

(ii) EJERCICIO.

Ejercicio
Consideremos el espacio métrico $\mathbb{Z}$ con la distancia dada por el módulo de la diferencia.

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Ejercicio

Consideremos el espacio métrico $\mathbb{Z}$ con la distancia dada por el módulo de la diferencia.

¿Cuáles son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{Z}$? ¿Y los cerrados?

$E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}$, $E = C[0,1]$

$\boxed{r > 0}$ $r \in (0, +\infty)$