UBA - exactas
Departamento de Matemática

Análisis Avanzado - Compacidad 1

Primer cuatrimestre de 2021

Daniel Carando - Victoria Paternostro

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Es decir: K es compacto si y sólo si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in K$ tal que $\boxed{\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x}$.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto K de E es compacto si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.

Es decir: K es compacto si y sólo si $\forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in K$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Ejemplo

1) $K = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $d = |\cdot|$.

Si $(x_n)_n \subseteq [a,b] \Rightarrow$ es acotada $\Rightarrow$ $\exists\,(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ conv. Si $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ qvq $x \in [a,b]$. Seguro que $x \in \overline{[a,b]} = [a,b]$ ✓

Ejemplo

2) $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

$x_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow (x_n)_n \subseteq (0,1)$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

cualquier subsucesión de $(x_n)_n$ va

a conv a $0 \notin A$. $\Rightarrow$ A no es compacto

③ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, tomo $x_n = n$ $(x_n)_n \subseteq \mathbb{N}$

$d(x_n, x_m) = |n-m| \geq 1 \quad \forall n \neq m$.

$\Rightarrow (x_n)_n$ no es de Cauchy $\therefore$

ninguna subs. es de Cauchy y $\therefore$

ninguna es conv. $\mathbb{N}$ no es compacto

Proposición

Sea $K \subset E$ compacto. Entonces K es cerrado y acotado.

Dem: Recordamos: $A \subseteq E$ es acotado si $\exists x \in E \wedge$ $M > 0 / A \subseteq B(x, M)$.

Veamos q' K es acotado. Supongamos que no: Fijo $x_0 \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K / d(x_0, x_n) \geq n$.

Como $(x_n)_n \subseteq K$ $\exists (x_{n_k})_k$ q' conv a digamos $x \in K$.

Si $f(y) = d(x_0, y) \Rightarrow f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es continua.

$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) \Rightarrow n_k \leq \underbrace{d(x_0, x_{n_k})}_{f(x_{n_k})} \longrightarrow \underbrace{d(x_0, x)}_{f(x) \in \mathbb{R}}$.

$\downarrow$ $+\infty$ $k \to \infty$. ABS!

$\cdot (x_n)_n \subseteq K / x_n \to x$ q.q. $x \in K$

$\exists (x_{n_k})_k$ conv en K

$\Rightarrow x \in K$.

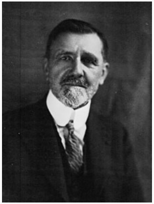
Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto $\boxed{\text{si y sólo si}}$ es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Heinrich Eduard Heine
(1821 - 1881)



Emile Borel
(1871 - 1956) 1895

Dem: $\Rightarrow$) vale en general.

$\Leftarrow$) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado.

Resultado imp

Sea $(x_n)_n \subseteq K$. Como K es acotado $\Rightarrow$

$\boxed{\text{$(x_n)_n$ es una suc. acotada. Veamos que $\exists$ una subsuc. conv de $(x_n)_n$.}}$

$x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m)$ $(x_m^j)_m \subseteq \mathbb{R}$ $\forall 1 \leq j \leq m$.

y son acotadas $|x_n^j| \leq \|x_n\|$ $\forall n \; \forall j$.

$\exists (x^1_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsuc de $(x_n^1)_n$ conv a $x^1 \in \mathbb{R}$

Como $(x^2_{n_{k_1}})_{k_1 \in \mathbb{N}}$ es acotado tiene una subsuc. $(x^2_{n_{k_{k_2}}})_{k_2 \in \mathbb{N}}$ conv a x^2

$(x^3_{m_{k_1 k_2}}) \rightsquigarrow (x^3_{m_{k_1 k_2 k_3}})_{k_3 \in \mathbb{N}}$ conv a x^3 sig

hasta llegar a la coord m.

Obtengo $(x_{m_{k_1 k_2 k_3 \dots k_m}})_{k_m \in \mathbb{N}} = (x^1_{m_{k_1 \dots k_m}}, \dots, x^m_{m_{k_1 k_2 \dots k_m}})$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x = & (x^1, & \dots, x^m) \end{array}$$

Como K es cerrado, y $(x_{m_{k_1 \dots k_m}})_{k_m} \longrightarrow x$

$\Rightarrow \underline{x \in K}$ $(K = \overline{K})$

$\boxtimes$

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

- E es cerrado: es el espacio total $E = \overline{E}$.

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

- E es cerrado:
- E es acotado: $E \subseteq B(x, 2)$, $x \in E$

Observación

Sea E un conjunto infinito con la métrica discreta. Entonces

- E es cerrado:
- E es acotado:
- E no es compacto. $\boxed{\text{EII3}}$ las suc. convergentes con la métrica discreta eran constantes a partir de un momento.

$\exists (x_n)_n \subseteq E \,/\, x_n \neq x_m \ \forall n \neq m.$

Cualquier subsuc. de $(x_n)_n$ tiene todos sus términos $\neq$. $\therefore$ ninguna es conv.

Proposición

Sea (E, d) un espacio métrico y $K \subseteq E$ un compacto. Si $F \subseteq K$ es cerrado, entonces es compacto.

Dem: Sea $(x_n)_n \subseteq F$. Como $F \subseteq K$ y K es compacto $\Rightarrow \exists\, (x_{n_k})_k$ subsuc. de $(x_n)_n$ y $\underline{x \in K}$ / $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$.

Como $\underbrace{(x_{n_k})_k \subseteq F}$ $\Rightarrow$ $\underline{x \in \overline{F}} = F$

$\uparrow$ F cerrado.

$\boxtimes$

Corolario

Intersección (arbitraria) de conjuntos compactos, es compacta.

Dem: $(K_i)_{i\in I}$ / $K_i \subseteq E$ compacto $\forall i \in I$

$F = \bigcap_{i\in I} K_i$ es cerrado pues K_i es cerrado $\forall i$

$F \subseteq \underbrace{K_i}_{\text{compacto}}$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $F = \bigcap_i K_i$ es compacto. $\boxtimes$

Corolario

Intersección (arbitraria) de conjuntos compactos, es compacta.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ una sucesión convergente a $x \in E$. Probar que el conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.