11. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que todo punto de E es aislado si y sólo si toda función de E en un espacio métrico arbitrario es continua.

12. Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \qquad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, $\mathcal{I}$ es una función continua pero $\mathcal{E}$ no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

13. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.

(b) Usando esto, rehacer los items (b), (d) y (g) del Ejercicio 6 de la Práctica 3.

14. Sea (E, d) un espacio métrico.

(a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.

i. Probar que g es continua

ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

(b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \to [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0\ \forall x \in A$ y $h(x) = 1\ \forall x \in B$.

(c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

15. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y sea $f : E \to E'$ una función para la cual existe $c \geq 0$ tal que

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in E$. Probar que f es uniformemente continua.

(b) Deducir que las funciones f y g de los ejercicios 13 y 14 son uniformemente continuas.

16. Para cada $r > 0$ estudiar la continuidad uniforme de la función

$$f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

17. (a) Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ una función. Probar que si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

   i. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ y

   ii. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

   entonces f no es uniformemente continua.

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $(-\infty, -\pi]$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

18. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E'.

19. (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

20. Sea $f : (E, d) \to (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.