Práctica 5

Compacidad

1. Sea $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Probar, por definición, que K es compacto.

2. Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que K tiene mínimo y máximo.

3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \qquad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

4. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de E. Supongamos que existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto. Probar que $\cap_{i \in I} F_i$ es compacto.

5. Sea (E, d) un espacio métrico. Probar que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ decreciente de cerrados no vacíos de E se tiene que $\cap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$.

6. Sea E un conjunto, en el cual consideramos la métrica discreta. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E?

7. Probar que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

8. Probar que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto *se realiza*. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.

9. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea $\widehat{d}$ la función definida en el Ejercicio 14 de la Práctica 3. Probar que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es sólo cerrado?

10. Consideremos en $(C[0, 1], d_\infty)$ la función f_0 constantemente nula. Probar que $\overline{B(f_0, 1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos la distancia por d_1?

11. Sean (E, d) y (E', d') espacios métricos y $f : E \to E'$ continua. Probar que:

(a) Si E es compacto, entonces $f(E)$ también lo es.

(b) Si además f es biyectiva, entonces f resulta ser un homeomorfismo.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

13. Sea K un espacio métrico compacto, y sea $f : K \to (0, +\infty)$ una función continua. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

Teoremas de punto fijo

14. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : E \to E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Probar que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $k \in (0, 1)$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una contracción.

16. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \to E$ a la función $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces). Probar:

(a) Si $x \in E$ es punto fijo de f, entonces es punto fijo de f^n.

(b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E.

Sugerencia: probar que si $x \in E$ es punto fijo de f^n, entonces $f(x)$ también lo es.

(c) Deducir que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.

17. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la métrica d_2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Fijemos $M > 0$. Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$.

Probar que f tiene un punto fijo.

18. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Probar que f tiene un punto fijo.

Sugerencia: usar el teorema de Bolzano.

19. Sea (E, d) un espacio métrico y sea $f : E \to E$ continua. Probar que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.

20. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función creciente. Probar que f tiene un punto fijo.
