Práctica 3 - Teo. de Green

Sep 29

Ej 1

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

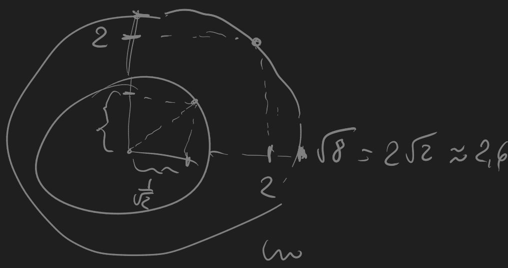
(a) $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = -yx^2$.
(b) $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$.

a) $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$= (x.y^2, -yx^2)$ es C^1

$\mathcal{C}$ curva orientada positivamente

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = R^2\}$



cerrada, simple ✓

- $\sigma(t) = (R.\cos t, R.\sin t)$ $\circlearrowleft +$

- diferenciable a trozos ✓

en cierra

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq R^2\}$

de tipo III ✓

$\Rightarrow$ Como cumple todas las hipótesis, entonces:

$F(x,y) = (x.y^2, -yx^2)$

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \iint_D 2yx + 2xy \, dx \, dy$$

Ej 2)

Ejercicio 2. Verificar el teorema de Green y calcular $\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

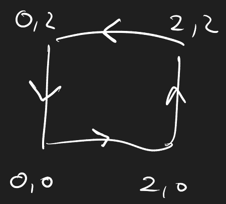
(a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.

(b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x \cdot dy \qquad \circlearrowleft +$$

a) $\mathcal{C} =$



Parametrizo los 4 lados

$\sigma_1(t) = (t, 0)$

$\sigma_2(t) = (2, t)$

$\sigma_3(t) = (2-t, 2)$ ← sentido correcto!

$\sigma_4(t) = (0, 2-t)$ ↙

Calculo 4 integrales con $F = (0, x)$

1) $\int_{t=0}^{2} \langle F(t,0), (1,0) \rangle dt = 0$

2) $\int \langle \underbrace{F(2,t)}_{(0,2)}, (0,t) \rangle = 2\int_0^2 t\, dt = t^2\Big|_0^2 = 4$

3) $\int \langle \underbrace{F(2-t,2)}_{(0,2-t)}, (-1,0) \rangle dt = 0$ $\quad = 0$

4) $\int \langle \underbrace{F(0,2-t)}_{(0,0)}, (0,-1) \rangle = 0$

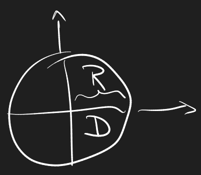
$\therefore$ Area $\left(\overset{2\times 2}{\square}\right) = 4$!! //

b) Elipse dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ej 3) Áreas: $F(x,y) = (0, x)$

a)



$$\int_{\mathcal{C}} x\,dy = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left\langle F(R\cos\theta, R\cdot\sin\theta), (-r\cdot\sin\theta, r\cdot\cos\theta) \right\rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle (0, R\cdot\cos\theta), (\ldots, r\cdot\cos\theta) \right\rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \frac{1 - \operatorname{sen} 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= R^2 \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} - \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$$

$$= R^2 \cdot \pi \underbrace{- \frac{1}{2}(\cos 2\theta \Big|_0^{2\pi}}_{-\frac{1}{2}(1 - 1) = 0}$$

$$= \pi \cdot R^2 //$$

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green hallar el área de:

(a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R.

(b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) ? Jacob $a \cdot b \cdot r$

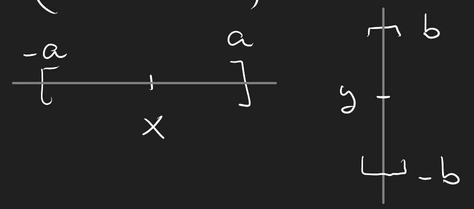
1

$\parallel$

Oct 1

Parametrizo la elipse como

$$\sigma(\theta) = (a.\cos\theta\,,\ b.\sin\theta)$$



$$\sigma'(\theta) = (-a.\sin\theta\,,\ b.\cos\theta)$$

$$F(x,y) = (0\,,\ x)$$

Por Green

$$\text{Área}(E) = \int_{\partial E} x\,dy = \int_{\sigma} \langle F(a.\cos\theta, b.\sin\theta), (-a.\sin\theta, b\cos\theta)\rangle\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle (0\,,\ a.\cos\theta), (-a.\sin\theta\,,\ b.\cos\theta)\rangle\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a.b.\cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= a.b \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{a.b}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a.b}{2} \cdot \left(2\pi + \cancel{\sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}}^{=0}\right)$$

$$= a.b.\pi \ //$$

Ident. Trig.

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

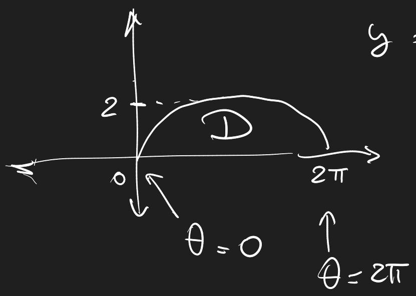
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Ejercicio 4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta,\ \ y = 1 - \cos\theta, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Usando el teorema de Green calcular el área de D.

$$\left.\begin{aligned} x &= \theta - \sin\theta \\ y &= 1 - \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



con $\sigma(\theta) = (\theta - \sin\theta,\ 1 - \cos\theta)$

$$\sigma'(\theta) = (1 - \cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$F(x,y) = (0, x)$$

$$\text{Area}(D) = -\int_{\theta=0}^{2\pi} \langle F(\sigma(\theta)), (1+\cos\theta, \sin\theta) \rangle d\theta \ +$$

$$\int_{t=0}^{2\pi} \langle F(t,0), (1,0) \rangle d +$$

$$= -\int_0^{2\pi} \theta \sin\theta \underbrace{- \sin^2\theta \, d\theta}_{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta} =$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\left.\frac{\sin 2\theta}{2.2}\right|_0^{2\pi} = 0$$

$$= -\int_0^{2\pi} \theta . \sin\theta \, d\theta$$

$u = \theta \qquad du = 1\, d\theta$

$v = -\cos\theta \qquad dv = \sin\theta \, d\theta$

$$= -\left(-\theta . \cos\theta \Big|_0^{2\pi} - \int . du \right)$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$= + 2\pi$$