Oct 16

Curvas

Abierta / Cerrada

Simple (inyectiva)

Suave:

- $\sigma' \neq 0$
- Clase C^1

Parametrización regular:

σ continua

(parametriza $\mathcal{C}$)

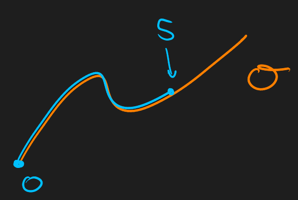
Identidades

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ con $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh(2x) = 2 \cdot \cosh^2 x - 1$ y $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Función de longitud de arco

$$h(s) = \int_0^s \|\sigma'(r)\| \, dr$$



Función sobre una curva

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z) \, ds = \int_{t=0}^{2\pi} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Si f es la densidad $\Rightarrow$ esa integral calcula la masa.

Integrales Curvilíneas

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_{t=0}^{2\pi} \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

Parametrización Diferenciable

- Todas sus componentes diferenc.
- " Suave
- Plano tangente en cada punto
- La recta tangente al plano $L(p)$ en p varía con continuidad.

Sup de revolución.

Green

$$\iint_D \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{\text{rotor en } \mathbb{R}^2} \, dA = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D^+} F\,ds$$

D ← región cerrada

∂D^+ ← borde orientado positivamente.

Tipos de ejercicios

↳ Cerrar curvas

↳ Esquivar indeterminaciones 

Flujo (en $\mathbb{R}^3$)

$$\int_S F \cdot ds = \text{Flujo de } F \text{ a través de la sup. } S$$

Área de una Sup. S

$$\iint_D \|T_u \times T_v\| \, du\, dv$$

Donde T parametriza S con $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(u,v) = (u, v, \phi(u,v))$$

la superficie es la imagen de una función.

Integral de Superficie

$$f : S \to \mathbb{R}$$

$$\int_S f \cdot ds = \iint_D f(T(u,v)) \, \|T_u \times T_v\| \, du\, dv$$

Aplicación

Calcular la masa (f es "función de densidad de masa")

$F : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

si está definido solo sobre la sup.

$$\int_S F \cdot ds = \int_S \langle F, \eta \rangle \cdot ds$$

si T preserva orientación

$$= \iint_D \left\langle F(T(u,v)), \frac{T_u \times T_v}{\cancel{\|T_u \times T_v\|}} \right\rangle \cdot \cancel{\|T_u \times T_v\|} \, ds$$

$$= \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle \, ds$$