Guía Práctica 5

25 Oct.

Ec. dif. de 1° Orden

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

$$\text{a)}\quad x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0, \qquad \text{b)}\quad x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$$

$$\text{c)}\quad x' = \frac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1, \qquad \text{d)}\quad x' = \frac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$$

$$\text{e)}\quad x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0, \qquad \text{f)}\quad x' = \frac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decidir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

a) $x' - 2tx = t$

$x' = t(1+2x)$

$\dfrac{x'}{1+2x} = t$ con $1+2x \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2 \cdot x'}{1+2x}\,dt = \int t\,dt$

$\frac{1}{2} \cdot \ln|1+2x| = \dfrac{t^2}{2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$

quiero despejar $x(t)$

$e^{\square} = e^{\square}$

$|1+2x| = e^{t^2} \cdot e^{2C}$

$|1+2x| = e^{t^2} \cdot e^{2C} \qquad k = e^{2C} > 0$ siempre

$$1+2x = \begin{cases} k \cdot e^{t^2} & (1) \\ -k \cdot e^{t^2} & (2) \end{cases}$$

Puedo escribir (1) y (2) como

$$1+2x = \tilde{k} \cdot e^{t^2} \quad \text{con } \tilde{k} > 0 \text{ ó } \tilde{k} < 0$$

y $\tilde{k} = 0$?

$$1+2x(t) = 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}$$

veo su derivada

$$x'(t) = 0$$

Comparo con el dato dado

$$x'(t) = t(1+2x)$$

$$= t\left(1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 0$$ ✓ $k=0$ cumple

$\therefore$

como

$$1+2x = \tilde{k} \cdot e^{t^2} \quad \text{para } \tilde{k} \in \mathbb{R}$$

todas las soluciones son de la forma

$$x(t) = \frac{k \cdot e^{t^2} - 1}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

Sol. part:

si $t = 1$:

dato

$$x(1) = \frac{k \cdot e - 1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow k \cdot e = 1$$

$$\Leftrightarrow k = e^{-1}$$

$\therefore$

$$x(t) = \frac{e^{-1} \cdot e^{t^2} - 1}{2}$$

$$= \frac{e^{t^2-1} - 1}{2}$$

b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$ y $x(1) = 0$

$$t^2 + 1 = \frac{1+x^2}{x'}$$

$$\int t^2 + 1 \, dt = \int \frac{1+x^2}{x'} \, dt$$

esta integral NO tiene solución!

- el problema estuvo en dejar x' en el denominador al armar la integral:

$$x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

FO $\rightarrow$ $$\frac{x'}{1+x^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x^2}\,dt = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\operatorname{arctg} x(t) = \operatorname{arctg} t + c$$

$$x(t) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t + c)$$

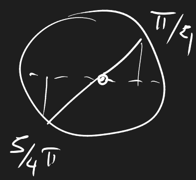
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

pues arctg es tg^{-1}

func. inv. de tangente

con $t = 1$

$$x(t=1) = 0 = \operatorname{tg}(\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4},\ 5\cdot\frac{\pi}{4},\ \dots} + c)$$



$$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\tilde{k}\pi + \frac{1}{4}\pi} + c = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$\tilde{k} \in \mathbb{Z}$

$$c = k\cdot\pi - \tilde{k}\pi - \frac{1}{4}\pi$$

$$= \pi(\underbrace{k - \tilde{k}} - \tfrac{1}{4})$$

$$= \pi\left(k^* - \tfrac{1}{4}\right) \quad \text{con } k^* \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ todas las soluciones son de la forma:

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} t + \pi\left(k^* - \tfrac{1}{4}\right)\right)$$

//

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}$ $\qquad x(0) = 1$

$1+x \neq 0$

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt = \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$\ln|1+x| = \ln|1+t| + c$$

$$e^{\uparrow} = e^{\uparrow}$$

$$|1+x| = |1+t| \cdot e^{c}$$

$$1+x = \pm\, |1+t| \cdot k \qquad \text{con } k = e^{c} > 0$$

$$x(t) = \begin{cases} (1+t)\cdot k - 1 & (1) \\ -(1+t)\cdot k - 1 & (2) \end{cases}$$

lo descarto porque no contendría a t = cero.

quiero

$x(t=0) = 1 =$

(1) $= k - 1 \iff k = 2$

(2) $= -k - 1 \iff k = -2$ Absurdo! pues $k = e^{c} > 0$

~~descarto esta posible x(t)?~~

$\therefore$ las sols. son de la forma:

$$x(t) = 2\cdot(1+t) - 1 = 2t + 1 \;//$$

d)

$$x' = \frac{1+x}{1-t^2} \qquad x(0) = 1$$

$1+x \neq 0$ $\qquad$ $t^2 \neq 1$

$$\int \frac{x'}{1+x}\,dt = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

Nota:

$1-t^2 = (1-t).(1+t)$

wolfram ;)

$$\ln|1+x| = \frac{1}{2}\cdot\left(\log(t+1) - \log(1-t)\right) + C$$

$t > -1$ $\qquad$ $1-t > 0$

$t < 1$

$t \in (-1, 1)$

$$e^{\square} = e^{\square}$$

$$|1+x| = \frac{e^{\frac{1}{2}\log(t+1)}}{e^{\frac{1}{2}\log(1-t)}} \cdot e^{c}$$

$$|1+x| = \frac{(1+t)^{1/2}}{(1-t)^{1/2}} \cdot K \qquad \text{con } k = e^{c} > 0$$

$$= k \cdot \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} \quad \star$$

Abro el módulo:

$$1+x = \begin{cases} + \star & (1) \\ - \star & (2) \end{cases}$$

(1) $x = k.\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} - 1$

(2) $x = -k\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1/2} - 1$

$S: t = 0:$

(1) $x(1) = 0 = k \cdot \sqrt{1} - 1$

$\Downarrow$

$\Leftrightarrow k = 1$

(2) $x(1) = 0 = -k \cdot \sqrt{1} - 1$

$\Downarrow$

$\Leftrightarrow k = -1$ $\leftarrow$ este K

Ejercicio 2. Si $y = y(t)$ denota el número de habitantes de una población en función del tiempo, se denomina *tasa de crecimiento* de la población a la función definida como el cociente y'/y.

(a) Caracterizar (encontrar la ecuación) de las poblaciones con tasa de crecimiento constante.
(b) Dibujar el gráfico de $y(t)$ para poblaciones con tasa de crecimiento constante, positiva y negativa.
(c) ¿Cuáles son las poblaciones con tasa de crecimiento nula?
(d) Una población tiene tasa de crecimiento constante. El 1 de enero de 2002 tenía 1000 individuos, y cuatro meses después tenía 1020. Estimar el número de individuos que tendrá el 1 de enero del año 2022, usando los resultados anteriores.
(e) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es una función lineal de t (es decir, de la forma $at + b$).
(f) Caracterizar las poblaciones cuya tasa de crecimiento es igual a $r - cy$, donde r y c son constantes positivas. Este es el llamado *crecimiento logístico*, en tanto que el correspondiente a tasas constantes es llamado *crecimiento exponencial* (por razones obvias ¿no?). Para poblaciones pequeñas, ambas formas de crecimiento son muy similares. Comprobar esta afirmación y comprobar también que en el crecimiento logístico $y(t)$ tiende asintóticamente a la recta $y = r/c$.

$\frac{y'}{y}$: tasa de crecimiento de la población

con $y(t)$: # habitantes en función del tiempo

a) $\frac{y'}{y} = a$

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int a\,dt$$

$$\ln|y| = t.a + k \quad e^{\square}$$

$$|y| = e^{t.a} . e^{k}$$

$$|y| = e^{at} . e^{k} \quad \text{con} \quad e^{at} > 0$$

$$y = \begin{cases} \cancel{-e^{at} . C} & \color{red}{y \geq 0} \\ +e^{at} . C \end{cases} \qquad C = e^{k} > 0$$

Puede ser que ?: $K = 0 \Rightarrow y = 0$

$y' = c . y$

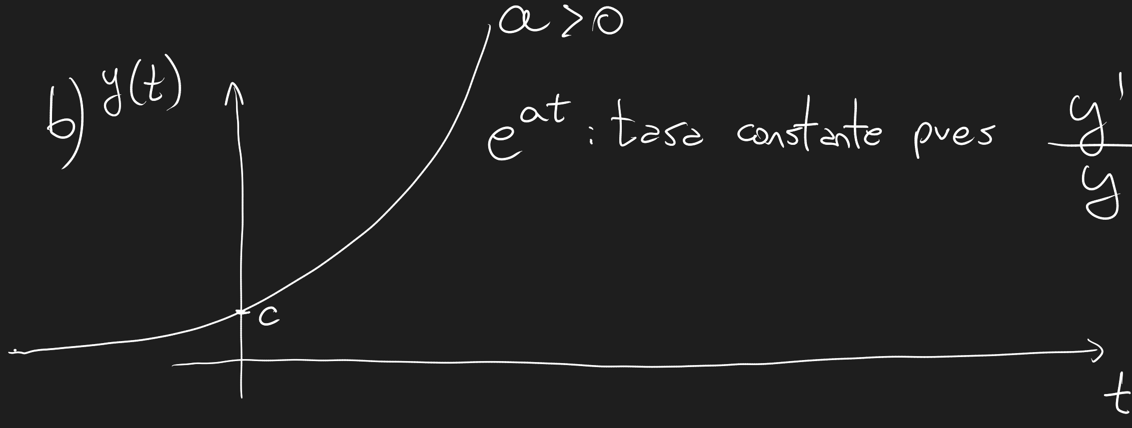
$0 = 0$ ✗

Podría ser, pero por contexto ("Población siempre nula") se descarta el caso.

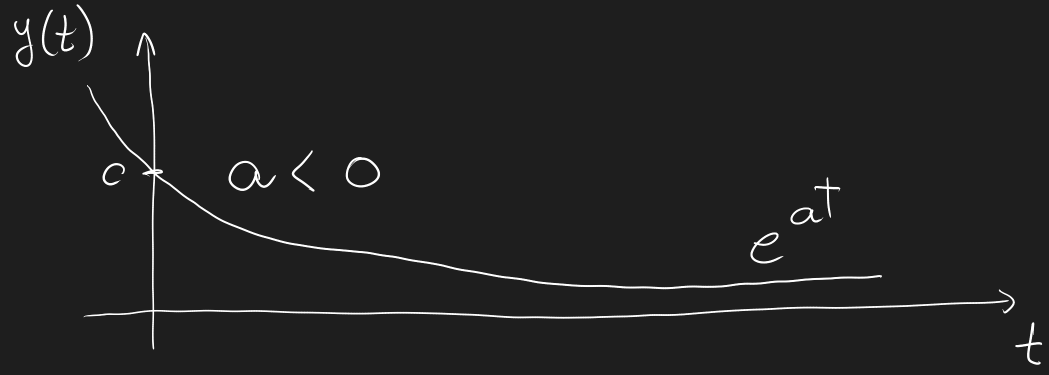
Las funciones son de la forma

$$y(t) = c \cdot e^{at} \text{ con } c \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \text{ y } a \in \mathbb{R}$$

b)



e^{at}: tasa constante pues $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{a.c.e^{at}}{c.e^{at}} = a$



c) Si la tasa es nula $\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = 0 \iff y' = 0 \Rightarrow y = \text{cte}$

Entonces $y(t)$ es una función constante $\left(\begin{array}{l}\text{la población no} \\ \text{varía en tamaño}\end{array}\right)$

d) 1° enero 2002 — 1000 individuos

+ 4 meses — 1020

en 4 meses aumentó un 2%

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1000 \\ y(4) = 1020 \end{cases} \qquad y(t) = k.e^{a.t}$$

Sol

$k = 1000$

$a = \frac{1}{4} \cdot \log \ldots$

evalúo y en 240

Busco funciones que cumplan:

- $y(0) = 1000$) $t=0$ $\wedge$ $k.e^{a.t} = K = 1000$
- $y(4) = 1020$) $t=4$ $\wedge$ $k.e^{at} = k.e^{4a} = 1000\, e^{4a} \overset{\text{dato}}{=} 1020$

$$e^{4a} = \frac{1020}{1000} = 1{,}02$$

$$a = \frac{\log(1{,}02)}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 1000 \\ a = \dfrac{\log(1{,}02)}{4} \end{cases} \Rightarrow y(t) = 1000 \cdot e^{\frac{\log(1{,}02)}{4}.t}$$

$$= 1000 \left(e^{\log(1{,}02)}\right)^{t/4}$$

$$y(t) = 1000 .\ 1{,}02^{t/4}$$

Quiero $t = 240$ (20 años)

$$y(240) = 1000 . 1{,}02^{\overset{60}{240/4}}$$

$$= 1000 . 1{,}02^{60}$$

$$\approx 3281{,}03$$

e) $\dfrac{y'}{y} = at + b$

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = \int at + b\,dt$$

$$\ln|y| = \frac{at^2}{2} + bt + c$$

$\left(e^{(\cdot)}\right.$

$$|y| = e^{a\cdot t^3/2 + bt + c}$$

$\left(y(t) \geq 0\right.$

$$y(t) = e^{a\cdot \frac{t^3}{2} + bt + c}$$

//

f) $\dfrac{y'}{y} = r - cy$ con $r, c > 0$

$$\frac{y'}{r - cy} = 1$$

$$\frac{1}{c}\int \frac{c\,y'}{r - cy}\,dt = \int 1\,dt$$

$$-\frac{1}{c}\cdot \log|r - c\cdot y(t)| = t + k$$

$$|r - c\cdot y(t)| = e^{-ct - ck}$$

$$= e^{-ct}\cdot \tilde{k} \qquad \text{con } \tilde{k} = e^{-ck} > 0$$

$$r - c.y = \begin{cases} -\tilde{k}.e^{-ct} \\ \tilde{k}.e^{-ct} \end{cases} = k.e^{-ct} \quad \text{con } k>0 \;\hat{}\; k<0$$

y $k=0$?

si $k=0 \Rightarrow r = cy$

$y = \frac{r}{c}$ $\quad c>0$ ✓

$y' = 0$ que cumple que

$\frac{y'}{y} = r - c.y$ ✓

$$\Rightarrow r - c.y = k.e^{-ct}$$

$$\boxed{y = \frac{r - k.e^{-ct}}{c}}$$

Notar que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{r - k.\overbrace{e^{-ct}}^{\xrightarrow{t\to\infty} 0}}{c} = \frac{r}{c}$$

y para valores pequeños de $y(t)$

$$\frac{y'}{y} = r - \underbrace{cy}$$

con y chico, esto es despreciable

$$\frac{y'}{y} \approx r$$ ← tasa cte. de una exponencial.

Ejercicio 3. Si un cultivo de bacterias crece con un coeficiente de variación proporcional a la cantidad existente y se sabe además que la población se duplica en una hora ¿Cuánto habrá aumentado en dos horas?

?

$$\frac{y'}{y} = k$$

horas

$$y(t=0) = k \cdot e^{a \cdot 0} = k$$

$$y(t=1) = k \cdot e^{a \cdot 1} = 2 \cdot k \Rightarrow e^{a} = 2$$

$$y(t=2) = k \cdot e^{a \cdot 2} = k \cdot (e^{a})^{2}$$

$$= k \cdot 2^{2}$$

$$= 4k$$

Donde k = población en $t=0$.

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

(a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ (b) $txx' = 2x^2 - t^2$ (c) $x' = \frac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

a) $x' = f(x,t)$ si es homogénea entonces

$$x' = f(x,t) = f(\lambda x, \lambda t)$$

$$\cancel{\lambda} t x' = \cancel{\lambda} x + 2\cancel{\lambda} t \cdot e^{-\frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} t}} \checkmark$$

Puedo escribir $y = \frac{x}{t}$

$yt = x \overset{\text{derivo}}{\Rightarrow} \overbrace{y't + y}^{\text{regla del prod}} = x'$ ← tengo una expresión para x'

$$x' = f(t,x) = f(\lambda t, \lambda x)$$

si elijo $\lambda = \frac{1}{t}$

$$x' = f\left(\frac{t}{t}, \frac{x}{t}\right)$$

$$x' = f\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

todo junto

$$x' = y't + y = f\left(1, \frac{x}{t}\right) \qquad f = \frac{x}{t} + 2e^{-\frac{x}{t}} \qquad t \neq 0$$

$$= f(1, y)$$

$$y't + \cancel{y} = \cancel{y} + 2e^{-y}$$

$$y't = 2e^{-y}$$

$$\int \underbrace{\frac{y'}{e^{-y}}}_{y' \cdot e^{y}} = \int \frac{2}{t}\, dt$$

$$e^{y} = 2\ln|t| + C$$

$$y = \ln\left(2 \cdot \ln|t| + C\right)$$

pero yo quería x !

como $y = \frac{x}{t} \iff x = t \cdot y$

$$x = t \cdot \ln\left(2\ln|t| + C\right) \quad // \qquad \text{con } t \neq 0 \text{ y } C \in \mathbb{R}$$

b) $\cancel{x^2} \cdot t x \cdot x' = 2\cancel{x^2} x^2 - \cancel{x^2} t^2$ ✓

$$x' = \frac{2x^2 - t^2}{t\,x} = \frac{(\sqrt{2}x + t)(\sqrt{2}x - t)}{t\,x}$$

Como es homogénea, puedo sustituir $y = \frac{x}{t}$

$\Rightarrow y \cdot t = x$ quiero x', derivo

$$y' t + y = x'$$

si elijo $\lambda = \frac{1}{t}$, como es homog.:

$$f(\lambda t, \lambda x) = f\left(1, \frac{x}{t}\right) = f(t, x) = x'$$

$$= f(1, y)$$

junto y reemplazo

$$y' t + y = \frac{2y^2 - 1}{1 . y}$$

$$y' t = \frac{2y^2 - 1 - y^2}{y}$$

$$y' t = \frac{y^2 - 1}{y}$$

$t \neq 0$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2 y' . y}{y^2 - 1} = \int \frac{1}{t}$$

CA

$$\left(\log|y^2 - 1| \right)' = \frac{1}{y^2 - 1} . 2y . y'$$

$$\frac{1}{2} . \log|y^2 - 1| = \log|t| + c$$

$$|y^2 - 1| = e^{2\log|t|} . e^{2c}$$

$$y^2 - 1 = \begin{cases} k . e^{2\log|t|} \\ -k . e^{2\log|t|} \end{cases}$$

con $k = e^{2c} > 0$

(1) $y = \sqrt{1 + k . e^{2\log|t|}} = \sqrt{1 + k . |t|^2} = \sqrt{1 + k . t^2}$

(2) $y = \sqrt{1 - k . e^{2\log|t|}} = \sqrt{1 - k . |t|^2} = \sqrt{1 + k . t^2}$

$y = \frac{x}{t}$

(3) si $k = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = t$

$x' = 1$ ✓ cumple la eq de x'

$$X(t) = t \cdot \underbrace{\sqrt{1 + k \cdot t^2}}_{?} \quad \text{con } t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}^+$$

si $k < 0$

$k \cdot t^2 \geq -1$

$t^2 \leq -\frac{1}{k}$

c) $x' = \dfrac{x + t}{t} \qquad x(1) = 0$

x' es homogénea

$$x' = f(t, x) = f(\lambda t, \lambda x) \underset{\lambda = \frac{1}{t}}{=} f\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

$$= f(1, y)$$

como $y = \dfrac{x}{t}$

$$y't + y = x' = \frac{y + 1}{1}$$

$$y't = 1$$

$$y' = \frac{1}{t}$$

$$\int y' \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt$$

$$y = \log|t| + C$$

$$\boxed{x = t \cdot \log|t| + C}$$

¿ $t \in (0, +\infty)$ ← pues incluye a $t = 1$.

$t \in \cancel{(-\infty, 0)}$?

evalúo en $t = 1$ y despejo C

$$x(1) = 0 \Rightarrow 0 \cdot \log 1 + C = 0 \iff \boxed{C = 0}$$

Para $x(1) = 0$

$$\boxed{x(t) = t \cdot \log|t|} \qquad t \in (0, +\infty)$$

Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

(a) $x' = (x + t)^2$ (b) $x' = \text{sen}^2(t - x + 1)$

$$y = a.t + b.x + c \Rightarrow y' = a + b.x' \quad (1)$$

$$x' = f(at + bx + c) \quad (2)$$

(2) en (1):

$$y' = a + b \cdot f(at + bx + c)$$

$$y' = a + b \cdot f(y)$$

$$\frac{y'}{a + b \cdot f(y)} = 1$$

a) $x' = (x + t)^2$

de antes $(y = at + bx + c)$

$$y = (t + x)$$

$$\Rightarrow x' = f(t + x) = (t + x)^2$$

$$\frac{y'}{\underbrace{1}_{a} + \underbrace{1}_{b} \cdot f(y)} = 1$$

$$\frac{y'(t)}{1+f(y)^2} = 1 \qquad y' = 1 + x'(t)$$

$$= 1 + y^2$$

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\,dt = \int 1\,dt$$

$$\operatorname{arctg} y = t + C$$

$(tg()$

$$y(t) = tg(t+c)$$

vuelvo a $x(t)$

$$y(t) = t + x$$

$$x(t) = y - t$$

$\therefore$

$$\boxed{x(t) = tg(t+c) - t}$$

$t, c \in \mathbb{R}$ /

$$\underbrace{(t+c) \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

¿Preguntar 2.

¿Debo solvar los casos con $x(t) = \infty$?

b) $x' = \sin^2(t-x+1) = \sin^2(y)$

$x' = f(t-x+1)$

$y = t-x+1$

$$\frac{y'}{1-f(y)} = 1$$

$$\int \frac{y'}{\underbrace{1-\sin^2(y)}_{\cos^2(y)}} = \int 1 \, dt$$

$$\int \frac{y'}{\cos^2(y)} dt = t + c$$

$$\operatorname{tg} y = t + c$$

$$y = \operatorname{arctg}(t+c)$$

como $y = t-x+1 \Rightarrow x = t-y+1$

$$\boxed{x = t - \operatorname{arctg}(t+c) + 1} \quad \text{con } t, c \in \mathbb{R}$$