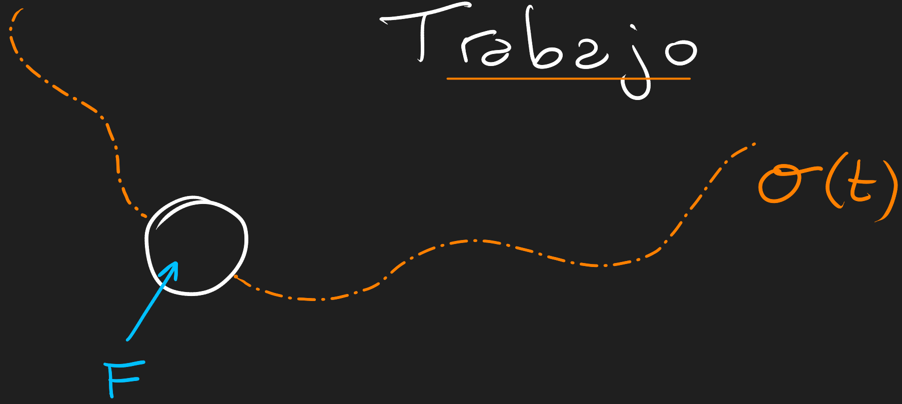
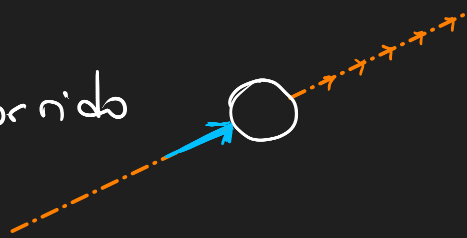
Teórica 3 - Integrales Curvilíneas, Trabajo



- ¿Cuál es el trabajo que ejerce F?

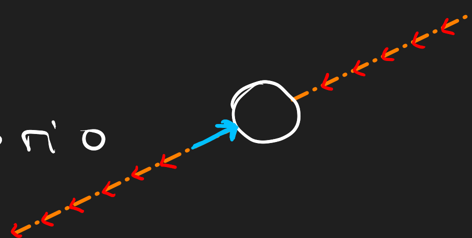
- Si la partícula se mueve sobre una recta
  - ⇒ La Fuerza es constante
  - ⇒ Solo tiene componente en la dirección de esa recta

  y actúa en el sentido del recorrido



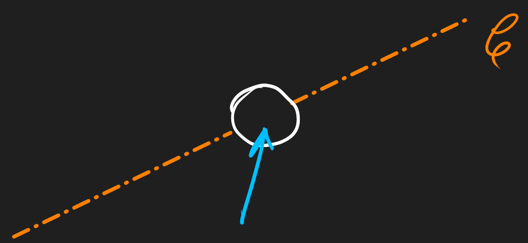
trabajo resultante = $\underset{\|F\|}{\text{magnitud de la fuerza}}$ · distancia

Si actúa en sentido contrario

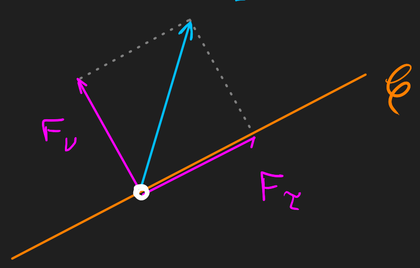


trabajo resultante = $-\ \|F\|$ · distancia

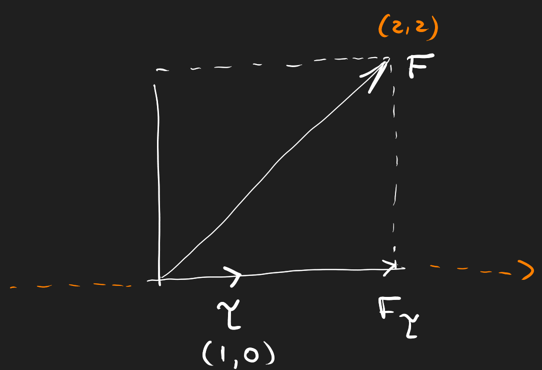
- Partícula en línea recta
  ↳ Fuerza en otra dirección



$$F = F_\nu + F_\tau$$



- $F_\tau = (F \cdot \tau) \cdot \tau$ ↖ dirección y sentido de la partícula
  vector unitario.
- $F_\nu \perp \tau$



$$F_\tau = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 0)(1,0)$$
$$F_\tau = (2,0)$$

∴ en este caso

trabajo ejercido por $F = F \cdot T \times$ distancia recorrida

Caso general

Curva $\mathscr{C}$ suave

Fuerza F continua

Si $\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$ es una param. regu.

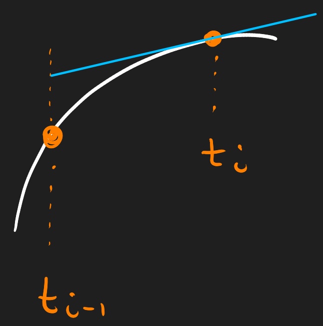
y $\pi : t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$
partición

es una partición de $[a, b]$ "suficientemente fina"

cuando la partícula varía de

$$\sigma(t_{i-1}) \text{ a } \sigma(t)$$

tenemos el desplazamiento



$$\Delta s_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$$

$$\approx \sigma'(t_i)\,(t_i - t_{i-1})$$

pues

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \sigma'(t)$$

Considerando

F constante en el arco de curva entre

$$\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$$

El trabajo total resulta aprox.

$$\sum_{i=1}^{n} F(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \sim \sum_{i=1}^{n} F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

- Cuando n tiende a infinito

la norma se va

pues aparece $\dfrac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$

$$\int_a^b F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t) \cdot dt$$

que es el vector de norma 1
en la dirección de desplazamiento.

Orientación

$\mathcal{C}$ abierta,
simple,
suave

σ parametrización regular de $\mathcal{C}$

decimos que

$\mathcal{C}$ está orientada por la
parametrización σ

Definición:

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial contínuo

Definimos la

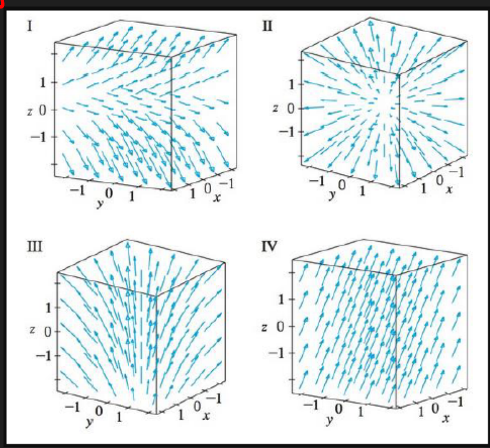
integral curvilínea del campo F sobre
la curva orientada $\mathcal{C}$

Como

$$\int_\sigma F \cdot ds := \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \cdot dt$$

$\mathcal{C}$ orientada por σ

ejs. de Campos Vectoriales



Ej: Si H es la hélice de parametrización

$$\begin{cases} \sigma : [0, 4\pi] \to H \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \sigma(t) = (\cos t, \sin t, t) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} F : H \to \mathbb{R}^3 \\ F(x, y, z) = (x, y, z) \end{cases}$$

entonces

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^{4\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} F(\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

prod. interno

$$= \int_0^{4\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} t \, . \, dt$$

$$= \frac{(4\pi)^2}{2} = 8\pi^2$$

Notación

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma P . dx + Q . dy + R dz$$

donde $F = (P, Q, R)$

prod. interno

$$= \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b P(x,y,z)(t) . x'(t) +$$

$$+ Q(x,y,z)(t) . y'(t) +$$

$$+ R(x,y,z)(t) . z'(t)\, dt$$

Recordamos

Si

$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$

y

$\gamma : [c, d] \to \mathcal{C}$

son dos parametrizaciones regulares de $\mathcal{C}$

una curva abierta,
simple,
suave

$\Rightarrow$ una es una reparametrización de la otra.

$$\gamma = \sigma \circ h$$

$$\gamma(t) = \sigma(h(t))$$

con $h : [c, d] \to [a, b]$

de clase C^1

y

$$h'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

Decimos que

γ preserva la orientación de σ si

$$\gamma(c) = \sigma(a)$$
$$\gamma(d) = \sigma(b)$$

en caso contrario

γ invierte la orientación de σ

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, simple, abierta y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ y $\gamma : [c, d] \to \mathcal{C}$ dos parametrizaciones regulares. Si $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo y γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Demo

$\gamma = \sigma \circ h$ con $h : [c,d] \to [a,b]$

clase C^1

$= \sigma(h(t))$ $h'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [c,d]$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = \sigma'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot ds = \int_c^d F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_c^d F(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t)) \cdot h'(t)\, dt$$

$u = h(t)$

$du = h'(t)\, dt$

Si preserva la orientación:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_{u=a}^{u=b} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_\sigma F\, ds$$

Si no:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_{u=a}^{u=b} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = -\int_\sigma F\, ds$$

Obs: • Notar que la integral curvilínea depende de la parametrización (le da el sentido)

• Como vimos, las Integrales de Longitud de Arco NO dependen de la parametrización (es una medida de distancia, no hay "sentido")

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ suave, simple, abierta

$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$

$\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$

dos parametrizaciones regulares

Si $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ es continua

$$\int_\sigma f \cdot ds = \int_\gamma f\, ds$$

Integral de longitud de arco

Demostración: Dado que $\gamma = \sigma \circ h$, con $h : [a,b] \to [c,d]$ de clase C^1 y $h'(t) \neq 0 \; \forall \, t \in [a,b] \Rightarrow \gamma'(t) = \sigma'(h(t))\, h'(t) \Rightarrow$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_c^d f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_c^d f(\sigma(h(t))) \|\sigma'(h(t))\|\, |h'(t)|\, dt.$$

Dado que $h'(t) \neq 0$ para cada $t \in [a,b]$,

$$|h'(t)| = \begin{cases} h'(t) & \text{si } \gamma \text{ preserva la orientación de } \sigma, \\ -h'(t) & \text{si } \gamma \text{ invierte la orientación de } \sigma. \end{cases}$$

Por lo tanto, si γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_\sigma f\, ds.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma f\, ds = -\int_b^a f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_\sigma f\, ds. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{C}$ la curva orientada definida por la param.

$$\sigma : [0,1] \to \mathcal{C}$$

$$\sigma(t) = (t, t^2)$$

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2$ el campo de fuerzas

$$F(x,y) = -(x,y)$$

El trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula que se desplaza por $\mathcal{C}$.

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 -(t, t^2) \cdot (1, 2t)\, dt$$

$$= -\int_0^1 (t + 2t^3)\, dt = -1$$

Campo Gradiente

↳ Campo de Fuerzas que a su vez es un gradiente

Decimos que

$$F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$$

es un Campo Gradiente

si existe

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \; / \; F = \nabla f$$

Teorema

Sea $f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ C^1

y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una param regul. de una curva simple, suave.

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Demo

$$\big(f(\sigma(t))\big)' = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

entonces

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \big(f(\sigma(t))\big)'\, dt$$

$$= f(\sigma(t)) \Big|_a^b$$

$$= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \quad ▨$$