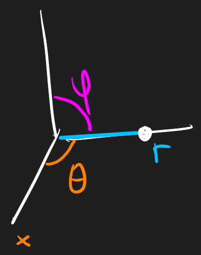
Guía Práctica 2 - Integrales de Superficies

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar.

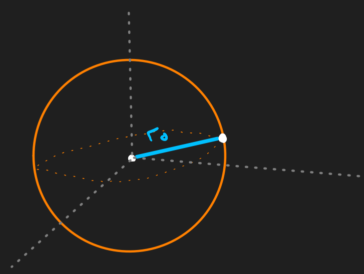
(a) $r = r_0, \quad r_0 > 0$ constante.
(b) $\varphi = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

a) Si r es fijo, solo varían los ángulos θ y φ



$r = r_0$
$\Longrightarrow$



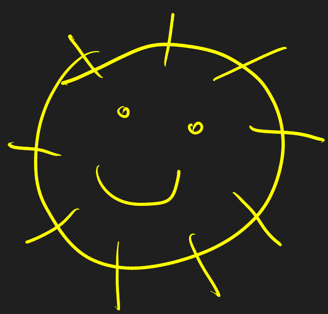
esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = (\underbrace{r_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi}_{x},\ \underbrace{r_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi}_{y},\ \underbrace{r_0 \cdot \cos\varphi}_{z})$$

$$x = r_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$$
$$y = r_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$
$$z = r_0 \cdot \cos\varphi$$

- Busco versor normal a la esfera en cada punto



$$T_\theta(r_0, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -r_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_\varphi(r_0,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} r_0 \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ r_0 \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ -r_0 \cdot \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & r_0 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & 0 \\ -r_0 \cos\theta \cdot \cos\varphi & r_0 \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi & -r_0 \cdot \sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-r_0^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi\right) + j \cdot r_0^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi +$$

$$+ k \cdot \underbrace{\left(r_0^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r_0^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right)}$$

$$= r_0^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi \cdot \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$= r_0^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \left(-r_0^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi \,,\ r_0^2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi \,,\ r_0^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right)$$

$=1$

$$\| T_\theta \times T_\varphi \| = \Big(r_0^4 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^4\varphi + r_0^4 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^4\varphi + r_0^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \Big)^{1/2}$$

$$= \left(r_0^4 \cdot \left(\sin^4\varphi + \sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi\right)\right)^{1/2}$$

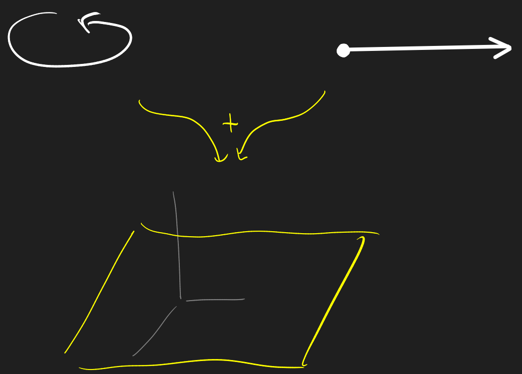
$$= r_0^4 \cdot \left(2\sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi\right)$$

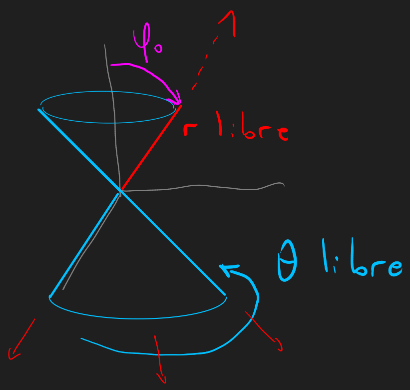
$$\eta = \frac{T_\theta \times T_\varphi}{\| T_\theta \times T_\varphi \|}$$

vector normal en cada (r_0, θ, φ)

b) $\varphi = \varphi_0 \qquad \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ constante

θ libre $\qquad r$ libre $\qquad \varphi = \varphi_0$





$$x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_0$$
$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi_0$$
$$z = r \cdot \cos\varphi_0$$

Derivo wrt las 2 variables que quedan libres:

$$T_r(r,\theta,\varphi_0) = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(r,\theta,\varphi_0) = \begin{bmatrix} -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 \\ r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_r \times T_\theta = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 & \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \\ -r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 & r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i \cdot \left(- r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0 \right) +$$

$$+ j \cdot \left(- \left(r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0 \right) \right)$$

$$+ k \cdot \left(r \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi_0 + r \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi_0 \right)$$

$$T_r \times T_\theta = \Big(\overbrace{- r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0}^{a} ,$$

$$\underbrace{- r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi_0 \cdot \cos\varphi_0}_{b} , \underbrace{r \cdot \sin^2\varphi_0}_{c} \Big)$$

$$a^2 = r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0$$

$$b^2 = r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0$$

$$c^2 = r^2 \cdot \sin^4\varphi_0$$

- $a^2 + b^2 =$

$$= r^2 \left(\sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0 \cos^2\theta + \sin^2\varphi_0 \cos^2\varphi_0 \sin^2\theta \right)$$

$$= r^2 \cdot \sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0 \cdot \underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \right)}_{=1}$$

$$= r^2 \cdot \sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 \cdot \left(\sin^2\varphi_0 \cdot \cos^2\varphi_0 + \sin^4\varphi_0 \right)$$

$$= r^2 \cdot \left(\sin^2 \varphi_0 \left(\underbrace{\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0}_{=1} \right) \right)$$

$$\| T_r \times T_\theta \| = \left(r^2 \sin^2 \varphi_0 \right)^{1/2}$$

$$= r \cdot \sin \varphi_0 \quad //$$

$$\eta = \frac{T_r \times T_\theta}{r \cdot \sin \varphi_0} = \frac{(a, b, c)}{r \cdot \sin \varphi_0}$$

a mimir ... zzz

Sep 16

Ej 2.

Ejercicio 2. Sean $a, b > 0$.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right),$$
$$\Phi_2(u, v) = \left(au \cos(v), bu \sin(v), u^2 \right),$$

son dos parametrizaciones del *paraboloide elíptico* dado cartesianamente por

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

1. Puedo probar las 2 doble inclusiones
2. Puedo probar una, y mostrar que

$$\exists h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \text{ biyectiva} /$$

$$\Phi_2(u, v) = h(\Phi_1(u, v))$$

Muestro que $Im(\phi_1) = S$

Donde

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

$Im(\phi_1) \subseteq \mathcal{C}$)

Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $Im(\phi_1) = f(x,y)$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

que se corresponde con el paraboloide elíptico

dado por

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$\supseteq$) Lo mismo.

$\therefore Im(\phi_1) = S$

Ahora digo que

$$\phi_2(u,v) = h(\phi_1(u,v))$$

quiero h: si la encuentro, ϕ_2 es reparam de ϕ_1 y $\therefore$ parametrizan la misma superficie

$$\Phi_1(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right),$$
$$\Phi_2(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2)$$

Se vé que:

$$\phi_1(u,v) = (u, v, w) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} u = u \\ v = v \\ w = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{cases}$$

$$h = (a.u.\cos(v), bu.\sin v, u^2)$$

y como h es $\mathcal{C}^1$ y biyectiva $\begin{cases} \phi_2 = h(\phi_1) \\ h^{-1}(\Phi_2) = \phi_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \phi_2$ parametriza la superficie S.

(b) Supongamos $b < a$. Mostrar que

$$\Phi(u,v) = ((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)),$$

con $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del *toro* dado cartesianamente por

$$z^2 = b^2 - \left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2.$$

Hecho en /p2-ej2.pdf

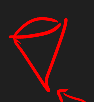
Ej 3)

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\text{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

$$\phi(u,v) = (u.\cos(v), u.\sin(v), u)$$

- Es diferenciable pues todas sus componentes son $\mathcal{C}^1$
- Es suave? No! es un cono 

Para ser suave:

- Tiene plano tangente en todos sus puntos.
- La recta tangente al plano $L(p)$ en el punto p varía con continuidad.

Calculo:

Derivadas parciales:

$$T_u(u,v) = (\cos v \ , \ \sin v \ , \ 1)$$

$$T_v(u,v) = (-u \cdot \sin v, u \cdot \cos v, 0)$$

Vector Perpendicular al plano (si existe!)

$$T_u \times T_v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \cdot \sin v & u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot (-u \cdot \cos v) - j(u \cdot \sin v) + k(\underbrace{u \cdot \cos^2 v + u \cdot \sin^2 v}_{= u})$$

$$T_u \times T_v = (-u \cdot \cos v, - u \cdot \sin v, u)$$

T

$$\|T_u \times T_v\| = \left(u^2 \cdot \cos^2 v + u^2 \cdot \sin^2 v + u^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(u^2 \cdot (1 + 1)\right)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot u$$

vector normal

$$\eta(u,v) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \frac{(-u\cdot\cos v,\ -u\cdot\sin v,\ u)}{\sqrt{2}\cdot u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\cos v,\ -\sin v,\ 1)$$

Veo que para dos v fijos v_0 y v_1

$$\eta(u, v_0) = \text{constante} \quad \forall u$$

$$\eta(u, v_1) = \text{constante PERO} \neq \eta(u, v_0)$$

$\therefore$ η no varía con continuidad en $p = (u, v_0)$ $\Rightarrow$ NO es suave.

Ej 4)

Ejercicio 4. Sea C la curva en el plano xy dada en coordenadas polares por:

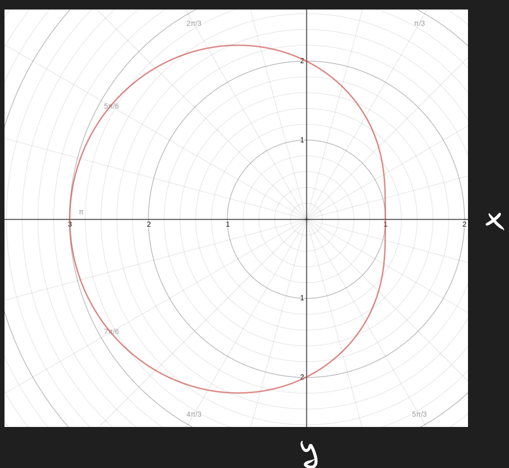
$$r = 2 - \cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por revolución de esta curva alrededor del eje y.

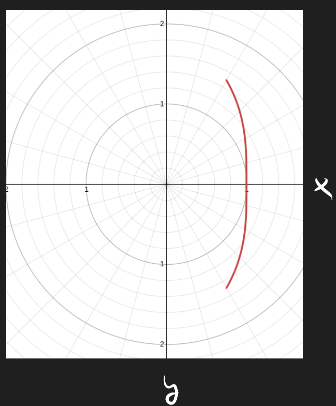
(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?

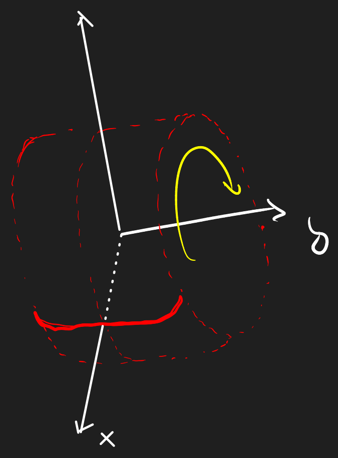
$0 \leq \theta \leq 2\pi$:

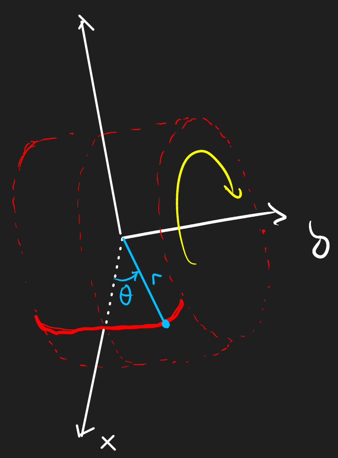


$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$



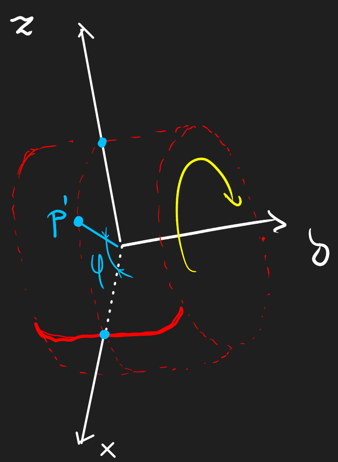
• Quiero: Revolución en eje y (en $\mathbb{R}^3$!)





con $r = 2 - \cos\theta$, $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Como mostró Vicky (con $\mathcal{C}$ en xz y revol. en z)



Quiero revolucionar alrededor de y

1°. introduzco ángulo φ

↳ con $\varphi = 0$ obtengo la curva original sobre xy:

$$\sigma(\theta) = (r \cdot \cos\theta \, , \, r \cdot \sin\theta)$$

con $r = 2 - \cos\theta$

2°. Quiero las coordenadas de cada p' para cada φ

$p' = (x', y', z')$

- Gira alrededor de y

$\Rightarrow y'$ <u>no</u> cambia con φ

y' <u>solo</u> depende de θ (como en la curva original)

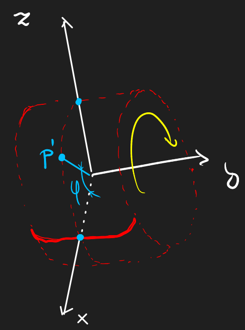
$$\Rightarrow y' = r \cdot \sin\theta$$
$$= (2 - \cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$$= \beta(\theta)$$

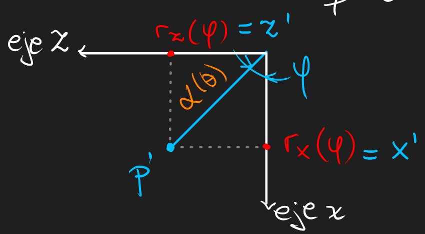
llamo

- Para x y z hay que calcular cómo varían

Tip: imaginarse desde arriba, y ver qué pasa en x



- Sabemos que $\alpha(\theta)$ (la distancia al eje de revolución) nunca cambia (para un θ fijo)



$\Rightarrow$ Calculamos componentes en ejes x y z

$$\cos\varphi = \frac{x'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow x' = \alpha(\theta)\cdot\cos\varphi$$

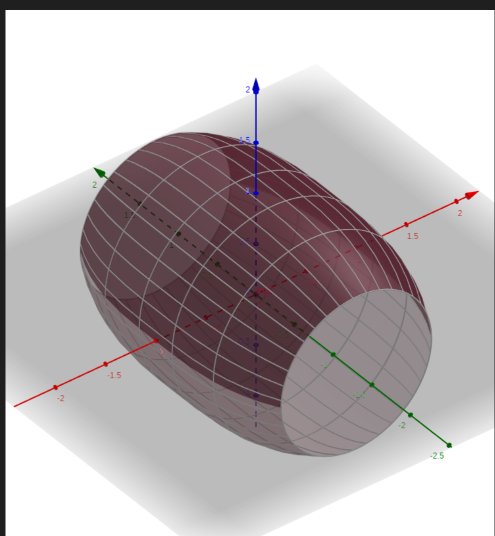
$$\alpha(\theta) = (2-\cos\theta)\cdot\cos\theta$$

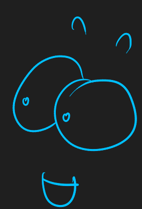
componente en x de la curva original $\sigma(\theta)$

$$\sin\varphi = \frac{z'}{\alpha(\theta)} \Rightarrow z' = \alpha(\theta)\cdot\sin\varphi$$

Finalmente

$$\begin{cases} x' = \alpha(\theta)\cdot\cos\varphi = (2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y' = \beta(\theta) = (2-\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z' = \alpha(\theta)\cdot\sin\varphi = (2-\cos\theta)\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

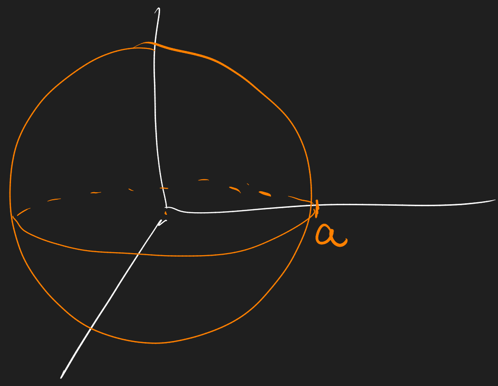




Ej 5)

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$



Puedo armar el plano así

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\quad \Pi: \langle \nabla f(p), (x-p) \rangle = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$

ó usando herramientas de parametrización

$$\phi(\theta, \varphi) \underset{r=a}{=} (a\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi,\ a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ a\cdot\cos\varphi)$$

$$\phi_\theta(\theta,\varphi) = (-a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ a\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi,\ 0)$$
$$\phi_\varphi(\theta,\varphi) = (a\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi,\ a\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ -a\cdot\cos\varphi)$$

Vector tangente al plano

$$\phi_\theta \times \phi_\varphi = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi & a\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi & 0 \\ a\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi & a\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi & -a\cdot\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= i\cdot(-a^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi) - j\cdot a^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$+ k\cdot(-a^2\cdot\sin^2\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi - a^2\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$$

$$\phi_\theta \times \phi_\varphi = (-a^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi,\ -a^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi,\ -a^2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$$

$\neq (0,0,0)$ si $\sin\varphi\cdot\cos\varphi \neq 0$

$\varphi \neq \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$\|\phi_\theta \times \phi_\varphi\| = \Big(a^4 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi + a^4 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi + a^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \Big)^{1/2}$$

$$= \left(2 \cdot a^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \right)^{1/2}$$

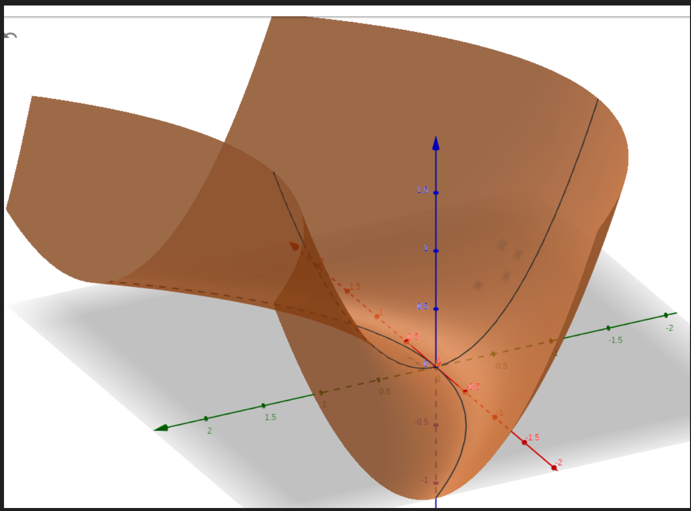
$$= \sqrt{2} \cdot a^2 \cdot \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\phi_\theta \times \phi_\varphi}{\|\phi_\theta \times \phi_\varphi\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\theta, \sin\theta, 1 \right) = \eta(\theta, \varphi)$$

$$\Pi : \left\langle \eta(\theta,\varphi) , (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$$

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización
$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

Sep 19



$$\phi(u,v) = \left(2u,\ u^2+v,\ v^2\right)$$

$$\phi_u(u,v) = (2,\ 2u,\ 0)$$

$$\phi_v(u,v) = (0,\ 1,\ 2v)$$

$$(\phi_u \times \phi_v)(u,v) = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot 4uv - j \cdot 4v + k \cdot 2$$

$$= (4uv,\ -4v,\ 2) \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Norma:

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \left(16u^2v^2 + 16v^2 + 4\right)^{1/2}$$

Vector normal

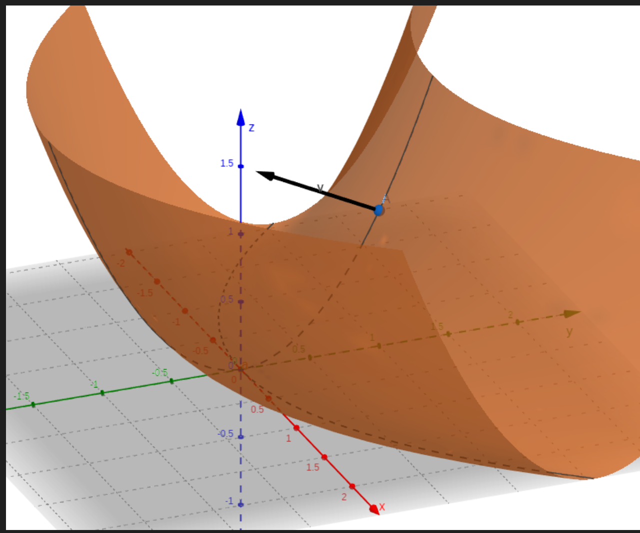
- $$n(u,v) = \frac{(4u \cdot v,\ -4v,\ 2)}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

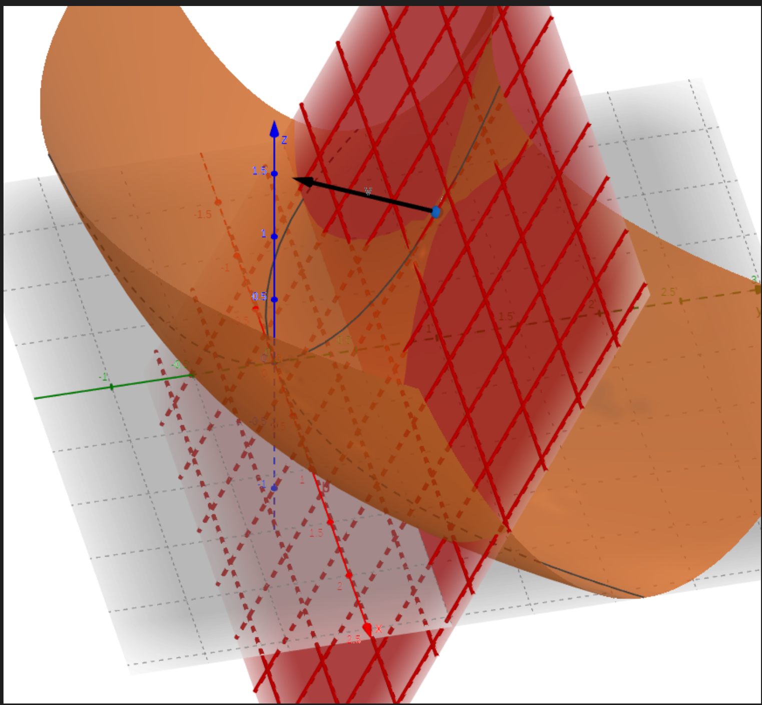
Vector normal en $(0,1,1)$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2u \Rightarrow u = 0 \\ 1 &= u^2 + v \longrightarrow v = 1 \\ 1 &= v^2 \Rightarrow |v| = 1 \end{aligned}\right\} \text{ vector normal en } \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$n(0,1) = \frac{(0,\ -4,\ 2)}{\sqrt{20}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5}}(0,\ -2,\ 1)$$

$$n(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0,-2,1)$$





$$\Pi : \langle n(0,1) \, , \, (p - p_0) \rangle = 0$$

$$\text{con } p = (x, y, z)$$

$$p_0 = (0, 1, 1)$$

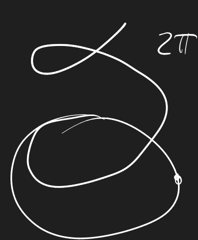
$$\Pi : \; -\frac{2}{\sqrt{5}}(y-1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(z-1) = 0$$

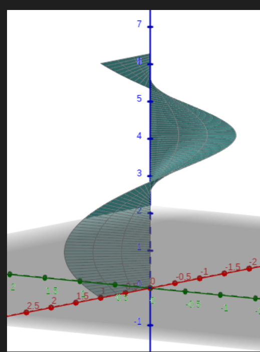
Ejercicio 7. Sea S la superficie parametrizada por la función $\Phi(r,\theta) : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

Graficar S, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

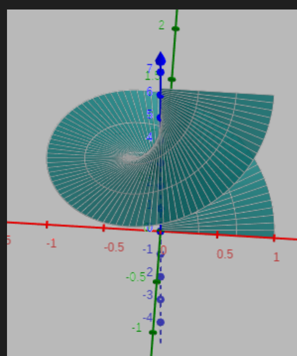
$$\Phi(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, \; r \cdot \mathrm{sen}\,\theta, \; \theta)$$





$$\Phi_r = (\cos\theta, \; \mathrm{sen}\,\theta, \; 0)$$

$$\Phi_\theta = (-r \cdot \sin\theta, \; r \cdot \cos\theta, \; 1)$$



$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -r\cdot\sin\theta & r\cdot\cos\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot \sin\theta - j \cdot \cos\theta + k \cdot (r \cdot \cos^2\theta + r \cdot \sin^2\theta)$$

$$= (\sin\theta, \; -\cos\theta, \; r)$$

$$\|\phi_r \times \phi_\theta\| = \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{r^2+1}$$

$$n(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \cdot \left(\sin\theta, -\cos\theta, r\right)$$

Hallar su área: $\Phi(r,\theta) = (r.\cos\theta, \; r.\text{sen}\,\theta, \; \theta)$

otra forma:

Calculo determinantes

- $\frac{\partial(x,y)^2}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta \end{vmatrix} = r.\cos^2\theta + r.\sin^2\theta = r$

- $\frac{\partial(y,z)^2}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ -r.\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$

- $\frac{\partial(x,z)^2}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ -r.\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta$

$$\|\phi_r \times \phi_\theta\| = \left(\overbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}^{1} + r^2\right)^{1/2} = \sqrt{1+r^2}$$

$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr = \iint \sqrt{1+\cosh^2 x}\, \sinh x\, dx =$$

$r = \cosh x$

$dr = \sinh x\, dx$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\ln(0+\sqrt{0^2+1})}^{\ln(1+\sqrt{1^2+1})} \sqrt{\sinh^2 x}\, \sinh x\, dx = \int_0^{2\pi}\int \sinh^2 x\, dx$$

Para practicar

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int \sinh^2 x \, dx = \iint \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \iint \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} - 2e^{0} + e^{-2x} \right) dx = \frac{1}{4} \iint e^{2x} - 2 + e^{-2x} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\iint e^{2x} dx - 2 \iint 1 \, dx + \iint e^{-2x} \, dx \right)$$

(1)

$$\iint e^{2x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2x}}{2} \Bigg|_{\ln(1) = 0}^{\ln(1+\sqrt{2})} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(e^{2 \cdot \ln(1+\sqrt{2})} - 1 \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\ln(1+\sqrt{2}) \right)^2 - 1 \, d\theta$$

$$= \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(\ldots \right.$$

$$= \pi \left(\ln^2(1+\sqrt{2}) - 1 \right)$$

(2)

$$-2 \iint 1 \, dx = -4\pi \cdot \ln(1+\sqrt{2})$$

(3)

$$\iint e^{-2x} dx = \pi \left(\ln^{-2}(1+\sqrt{2}) - 1 \right)$$

$$\therefore \text{Superficie} = \frac{1}{4}\Big(\pi\left(\ln^2(1+\sqrt{2}) - 1\right) - 4\pi \cdot \ln(1+\sqrt{2})$$
$$+ \pi\left(\ln^{-2}(1+\sqrt{2}) - 1\right)\Big)$$

$$= -\frac{3}{4}\pi \ln^2(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi \cdot \ln^{-2}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}\pi$$

$$= -\frac{3}{4}\pi \ln^2(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\pi \cdot \ln^{-2}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\pi$$

Mal! (es menor a cero)

Ej 8)

Ejercicio 8. Sea D el disco unitario centrado en el origen. Sea S la superficie parametrizada por la función $\Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv).$$

Calcular el área de S.

$$\Phi_u(u,v) = (1, 1, v)$$
$$\Phi_v(u,v) = (-1, 1, u)$$

$$\Phi_u \times \Phi_v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & v \\ -1 & 1 & u \end{vmatrix}$$

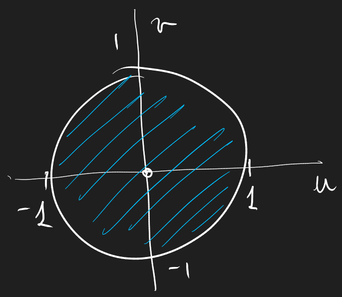
$$= i\,(u-v) - j\,.\,(u+v) + k\,2$$

$$= (u-v, -u-v, 2)$$

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \left((u-v)^2 + (-1)^2 . (u+v)^2 + 4\right)^{1/2}$$
$$= \left(u^2 \cancel{- 2uv} + v^2 + u^2 \cancel{+ 2uv} + v^2 + 4\right)^{1/2}$$
$$= \left(2u^2 + 2v^2 + 4\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot (u^2 + v^2 + 2)^{1/2}$$

$$\iint_D \sqrt{2} \cdot (u^2 + v^2 + 2)^{1/2} \, dA \qquad \text{con } D =$$



Paso a coordenadas polares

$u = r \cdot \cos\theta$

$v = r \cdot \sin\theta$

$0 \leq r \leq 1$

$$\iint_D \sqrt{2} \cdot (u^2 + v^2 + 2)^{1/2} \, dA =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \sqrt{2} \cdot \left(r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta + 4\right)^{1/2} \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \iint \sqrt{2} \cdot (r^2 + 4)^{1/2} \cdot r \, dr \, d\theta =$$

$s = r^2 + 4$

$ds = 2r \cdot dr$

$$= \sqrt{2} \iint_{s=4}^{s=5} \sqrt{s} \, \frac{ds}{2} \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{2}{3} s^{3/2} \Big|_4^5 \, d\theta$$

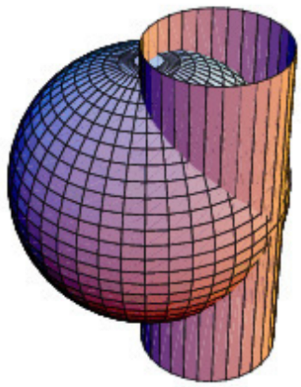
$$= \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(5^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \left(5^{3/2} - 8\right)$$

// Dudoso ...

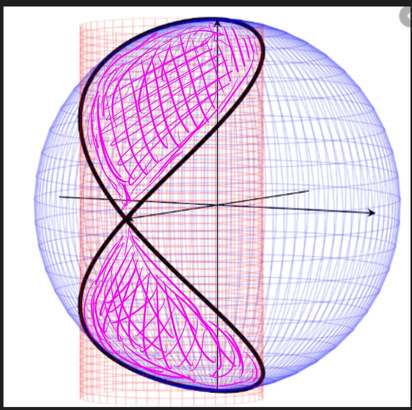
Ej 9)

Ejercicio 9. Sea $R > 0$. Calcular el área de la superficie que se obtiene de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el cilindro (relleno) $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$.



Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.

En la intersección de la cáscara de la esfera y todo el cilindro se obtiene la superficie



Esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$

cilindro $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\leq\left(\frac{R}{2}\right)^2$

Solo debo integrar la esfera, pero restringida al int. del cilindro

$$\iint_D \|T_u \times T_v\| \, ds$$

Despejo el cilindro

$$y^2 \leq \frac{R^2}{4}-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2 = \cancel{\frac{R^2}{4}} - \left(x^2 - Rx + \cancel{\frac{R^2}{4}}\right)$$

$$y^2 \leq R.x - x^2$$

$$-\sqrt{Rx - x^2} \leq y \leq \sqrt{Rx - x^2}$$

Polares / Cilíndricas

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\theta \\ y &= r \cdot \sin\theta \\ z &\text{ libre} \end{aligned}\right\} \rightarrow \iint_D \| T_\mu \times T_\sigma \| \, ds =$$

- param $\hat{\phi}(t) = (r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi,\ r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi,\ r \cos\varphi)$

- otra param por partes:

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \\ \phi_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \end{cases}$$

$\| T_x \times T_y \|$:

$$T_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x)\right)$$

$$T_y(x,y) = \left(0, 1, \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y)\right)$$

Calculo determinantes

$$\frac{\partial(x,y)^2}{\partial(x,y)} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\frac{\partial(x,z)^2}{\partial(x,y)} = \det \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{R^2 - \cdots}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y)$$

$$\frac{\partial(y,z)^2}{\partial(x,y)} = \det\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x) \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)$$

$$\|T_u \times T_v\| = \left(1^2 + \cancel{4}y^2\cdot\frac{1}{\cancel{4}(R^2-x^2-y^2)} + \cancel{4}x^2\cdot\frac{1}{\cancel{4}(R^2-x^2-y^2)}\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 + \frac{y^2+x^2}{R^2-x^2-y^2}\right)^{1/2}$$

$$\begin{cases} |x| \leq R \\ |y| \leq R \\ 0 \leq z \leq R \end{cases}$$

$$\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} 1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

¿revisar?

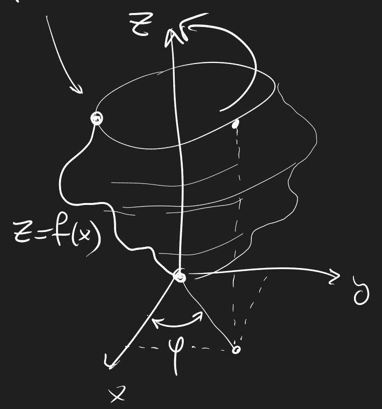
Ej 10

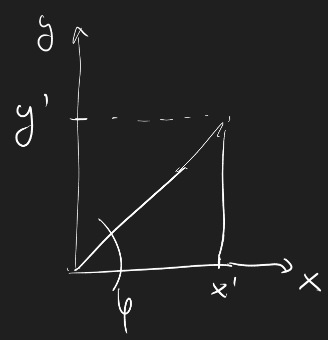
Ejercicio 10. Sea $\alpha > 0$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función positiva. Consideremos la curva $z = f(x)$ girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \le z \le 2$, y $a = b = 1$.

$p = (x, 0, f(x))$





$$\sin\varphi = \frac{y'}{x}$$

$$\cos\varphi = \frac{x'}{x}$$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\varphi \\ y' = x \cdot \sin\varphi \\ z' = f(x) \end{cases}$$

$$\phi(x,\varphi) = (x \cdot \cos\varphi,\ x \cdot \sin\varphi,\ f(x))$$

$$\phi_x(x,\varphi) = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ f'(x))$$

$$\phi_\varphi(x,\varphi) = (-x \cdot \sin\varphi,\ x \cdot \cos\varphi,\ 0)$$

Calculo determinantes

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,\varphi)} = \det\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -x \cdot \sin\varphi & x \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = x$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(x,\varphi)} = \det\begin{vmatrix} \cos\varphi & f'(x) \\ -x \cdot \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = x \cdot f'(x) \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,\varphi)} = \det\begin{vmatrix} \sin\varphi & f'(x) \\ x \cdot \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = x \cdot f'(x) \cdot \cos\varphi$$

$$\|\Phi_x \times \Phi_\varphi\| = \left(x^2 \cdot \left(1 + (f'(x))^2 \cdot \sin^2\varphi + (f'(x))^2 \cdot \cos^2\varphi\right)\right)^{1/2}$$

$$= |x| \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$\uparrow$

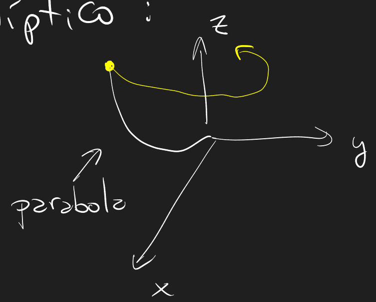
$x > 0$ pues $x \in [\alpha, \beta]$ con $\alpha > 0$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

en el paraboloide elíptico:

$$f(x) = x^2$$

$\uparrow$
z



$1 \leq z \leq 2$

$1 \leq x \leq \sqrt{2}$

$$A = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = 1 + 4x^2 \\ du = 8x\, dx \end{bmatrix}$$

$$= 2\pi \int_5^9 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{8}\, du = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right|_5^9$$

$$= \frac{1}{6}\pi \cdot \left(9^{3/2} - 5^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi \cdot \left(27 - 5^{3/2}\right)$$

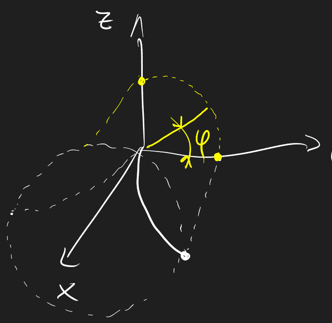
Ejercicio 11. Sea C la curva en el plano xy dada por

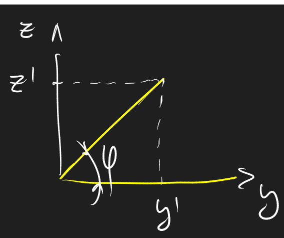
$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \le \theta \le 2\pi$. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva C alrededor del eje x.

(a) Hallar una parametrización de S.

(b) Hallar el área de S.





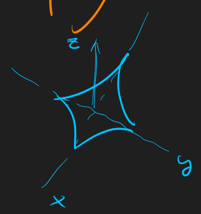
$$\sin\varphi = \frac{z'}{y} = \frac{z'}{\sin^3\theta}$$

$$\cos\varphi = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{\sin^3\theta}$$

$$\begin{cases} x' = x = \cos^3\theta \\ y' = y\cdot\sin\varphi = \sin^3\theta\cdot\sin\varphi \\ z' = y\cdot\cos\varphi = \sin^3\theta\cdot\cos\varphi \end{cases}$$

$$T(\theta,\varphi) = \left(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta\cdot\sin\varphi,\ \sin^3\theta\cdot\cos\varphi\right)$$

con $\varphi\in[0,\pi]$ pues



b) Área de S

$$T_\theta(\theta,\varphi) = \left(-3\cos^2\theta\cdot\sin\theta,\ 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi,\ 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cos\varphi\right)$$

$$T_\varphi(\theta,\varphi) = \left(0,\ \sin^3\theta\cdot\cos\varphi,\ -\sin^3\theta\cdot\sin\varphi\right)$$

- $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \det\begin{vmatrix} -3\cos^2\theta\cdot\sin\theta & 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ 0 & \sin^3\theta\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cos^2\theta\cdot\sin^4\theta\cdot\cos\varphi$$

- $$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \det\begin{vmatrix} -3\cos^2\theta\cdot\sin\theta & 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin^3\theta\cdot\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cos^2\theta\cdot\sin^4\theta\cdot\sin\varphi$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \det \begin{vmatrix} 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta \cos\varphi \\ \sin^3\theta \cdot \cos\varphi & -\sin^3\theta \cdot \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

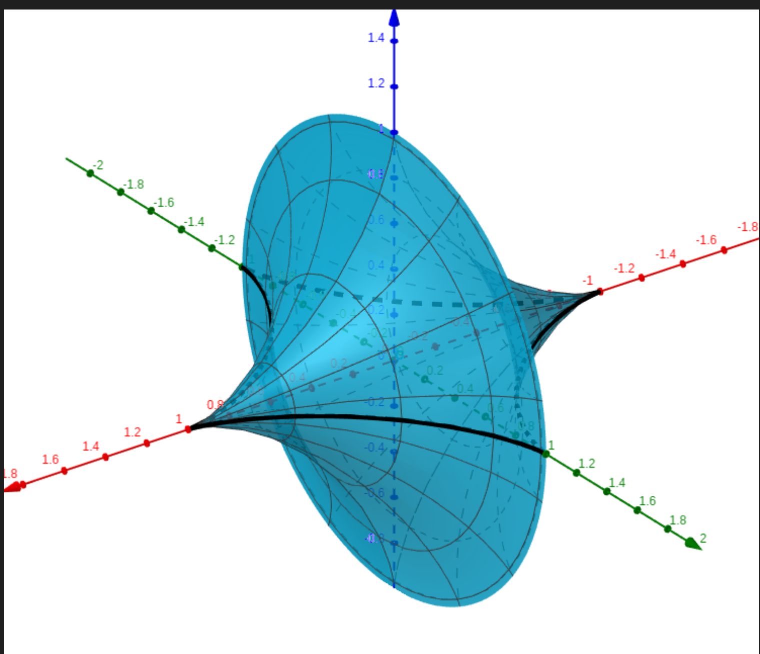
$$= -3\sin^5\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin^2\varphi - 3 \cdot \sin^5\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos^2\varphi$$

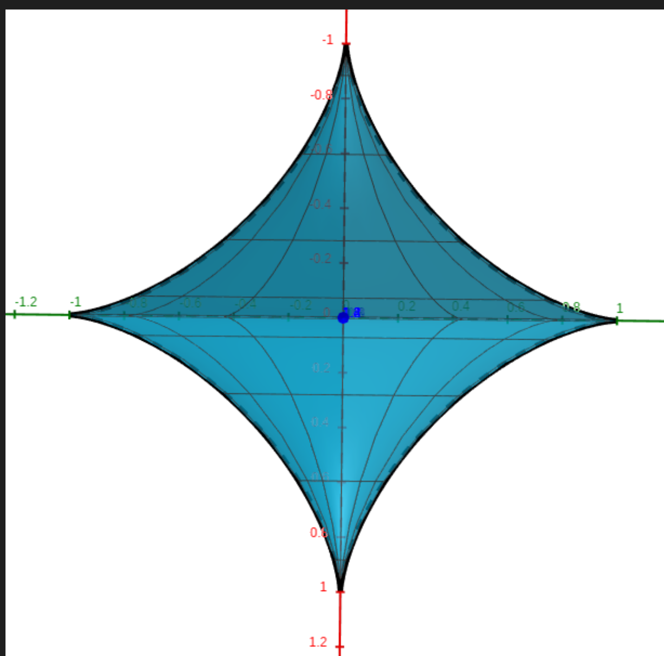
$$= -3\sin^5\theta \cdot \cos\theta$$

$$\| T_\theta \times T_\varphi \| = \Big[\left(-3\cos^2\theta \cdot \sin^4\theta \cdot \cos\varphi\right)^2 + \left(3\cos^2\theta \cdot \sin^4\theta \cdot \sin\varphi\right)^2 + \left(-3\sin^5\theta \cdot \cos\theta\right)^2 \Big]^{1/2}$$

$$= \left[9 \cdot \cos^4 \cdot \sin^8\theta + 9 \cdot \sin^{10}\theta \cos^2\theta \right]^{1/2}$$

$$= 3 \cdot \left(\cos^4 \cdot \sin^8\theta + \cos^2\theta \cdot \sin^{10}\theta \right)^{1/2} =$$





$$= 3 \cdot \left(\cos^4 \cdot \sin^8\theta + \cos^2\theta \cdot \sin^{10}\theta \right)^{1/2} =$$

$$= 3 \cdot \left(\cos^2\theta \cdot \sin^8\theta \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \right) \right)^{1/2}$$

$$= 3 \cos\theta \cdot \sin^4\theta = \| T_\theta \times T_\varphi \|$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} 3 \cdot \cos\theta \cdot \sin^4\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi =$$

$$= \iint 3 \cdot u^4 \cdot d\theta \, d\varphi = \pi \cdot 2 \cdot \int_{u=0}^{u=1} 3 \cdot u^4 \cdot d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin\theta \\ du &= \cos\theta \, d\theta \end{aligned} \right\}$$

$\theta = 0$: $u = 0$

$\theta = 2\pi$: $u = 0$

$\theta = \pi$: $u = 1$

$$= 6\pi \cdot \frac{1}{5} u^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{6}{5}\pi$$