Complementos de clases teóricas 3 y 4

(Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática III)

⊛ Repaso - Resumen de integrales de long. de arco y curvilíneas. La integral de línea no depende de la parametrización.

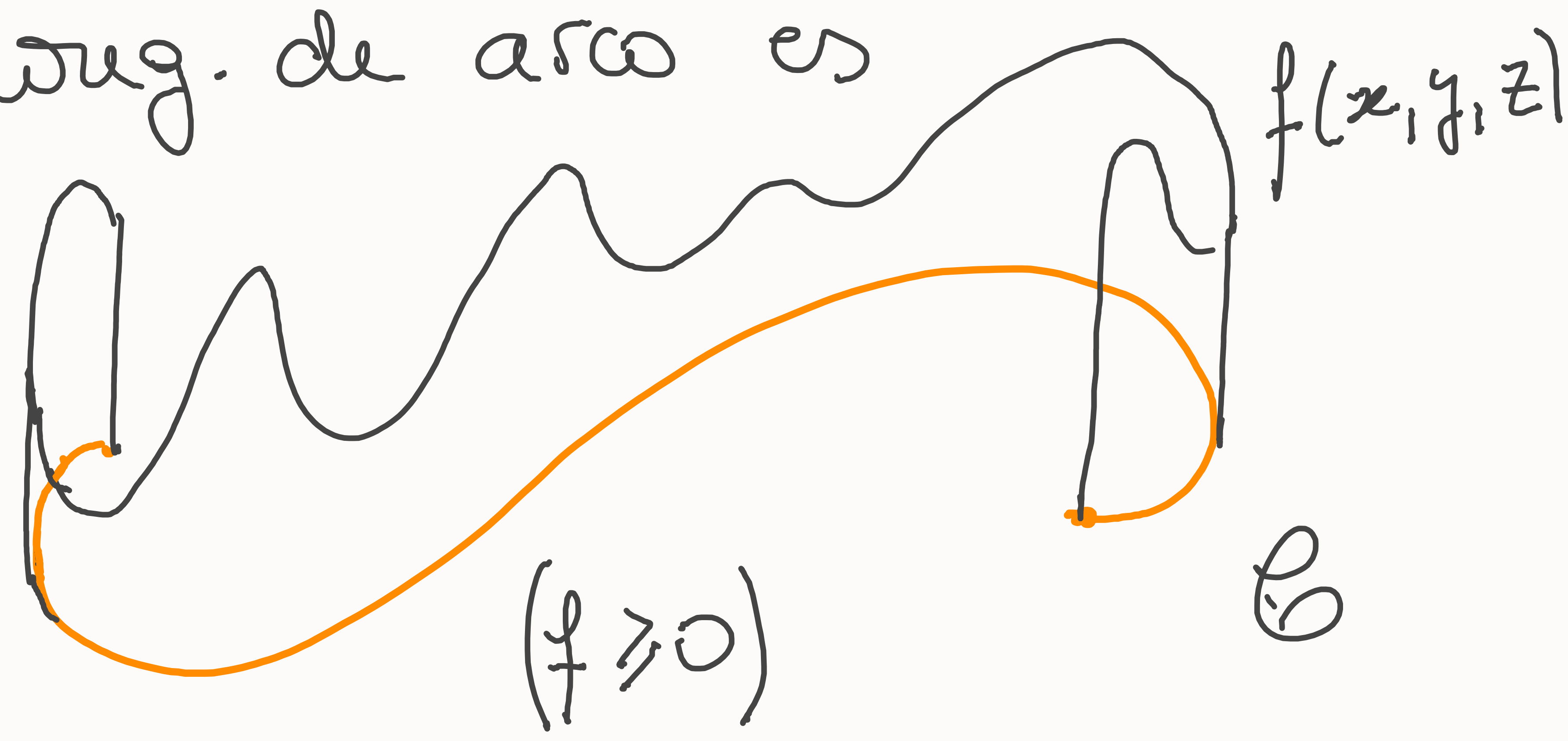
⊛ Plano tangente a una sup. no depende de la parametrización.

- **Integrales de long. de arco:**

  - $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ curva suave
  - $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

La integral de long. de arco es

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds.$$



¿Cómo calcularla?

Consideramos $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de $\mathcal{C}$ y

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

Observación importante! $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ No depende de σ.

(Ejercicio 10, P1)

Dem: Sea $\bar{\sigma}:[c,d] \to \mathbb{R}^3$ otra parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Entonces sabemos que existe $g:[c,d] \to [a,b]$ C^1, biyectiva, con $g'(s) \neq 0$ $\forall s \in (c,d)$ /

$$\bar{\sigma}(s) = \sigma(g(s)).$$

Recordemos: $\bar{\sigma}'(s) = \sigma'(g(s)) \cdot g'(s)$.

Si usamos $\bar{\sigma}$ para calcular $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$ tenemos:

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_c^d f(\bar{\sigma}(s)) \cdot \|\bar{\sigma}'(s)\| \, ds$$

$$= \int_c^d f(\sigma(g(s))) \|\sigma'(g(s))\| \cdot |g'(s)| \, ds = \boxed{*}$$

Pueden pasar 2 cosas:

1) $g(c) = a \wedge g(d) = b$ ($\sigma \wedge \bar{\sigma}$ recorren $\mathcal{C}$ en el mismo sentido).

2) $g(c) = b \wedge g(d) = a$ (la recorren en sentidos distintos).

Caso 1: $g'(s) \neq 0$ $\forall s \in (c,d) \Rightarrow g'$ mantiene el signo en (c,d) porque es continua.

Como $g(c) = a < g(d) = b \Rightarrow g \nearrow \Rightarrow g' > 0$.

Luego,

$$\boxed{*} = \int_c^d f(\sigma(g(s))) \|\sigma'(g(s))\| g'(s) \, ds$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

$t = g(s)$
$dt = g'(s)\,ds$

Caso 2: Como $g(c) = b > g(d) = a \Rightarrow g \searrow \Rightarrow g' > 0$

Luego,

$$\boxtimes = -\int_c^d f(\sigma(g(s))) \|\sigma'(g(s))\| \, g'(s) \, ds$$

$$= -\int_b^a f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$t = g(s)$
$dt = g'(s)\,dt$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

- **Integrales curvilíneas:**

  - $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ curva suave orientada.
  - $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo.

$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$ = integral curvilínea del campo F en $\mathcal{C}$.

¿Cómo se calcula?

Consideramos $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$ que respeta la orientación. Entonces,

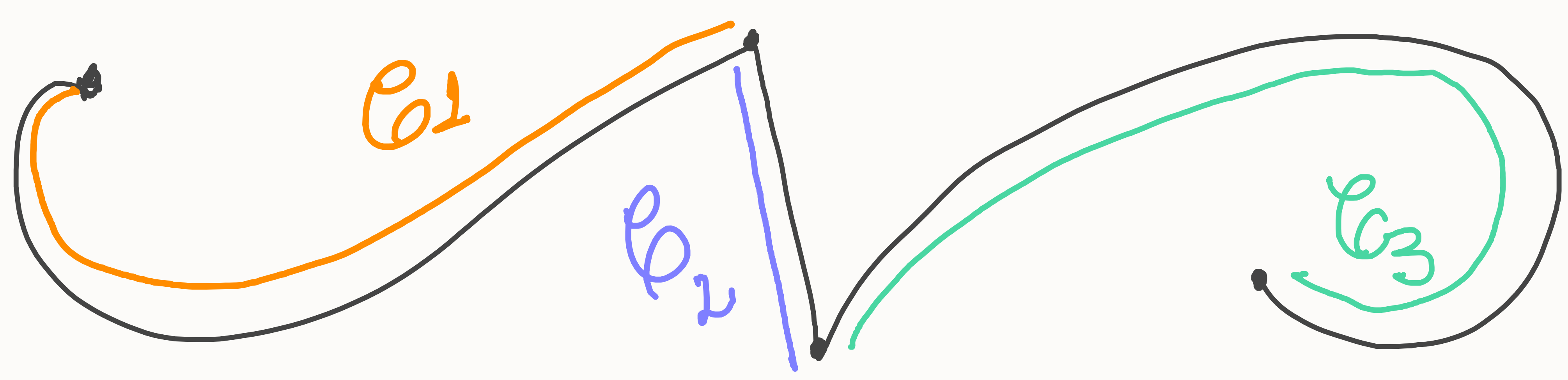
$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt.$$

Observación: $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$ No depende de Γ.

. $\mathcal{C}$ curva suave a trozos:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \dots \cup \mathcal{C}_N$$

con $\mathcal{C}_i$ curva suave $\forall\, 1 \leq i \leq N$.



Para curvas suaves a trozos definimos

- Integral de long de arco:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{C}_i} f\, ds} \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

- Integral curvilíneo:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{C}_i} F \cdot ds} \qquad F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie suave y $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S.

Entonces S admite plano tang en cada uno de sus puntos.

Además, si $p_0 \in S$, $(x_0, y_0, z_0) = p_0 = T(u_0, v_0)$

$\Rightarrow$ el plano tangente a S en p_0 es el que pasa por p_0 y tiene normal

$$\frac{T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}{\|T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)\|}.$$

Si $\overline{T} : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización regular de S y $p_0 = \overline{T}(w_0, t_0)$ queremos ver que

$$\boxed{\overline{T}_w(w_0,t_0) \times \overline{T}_t(w_0,t_0) \;//\; T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}$$

Para ver esto usamos que T es una reparametrización de $\overline{T}$:

Existe $G : D \longrightarrow \overline{D}$ C^1, biyectiva $\wedge$ $|\det(DG(u,v))| \neq 0$ $\forall (u,v) \in D$ /

$$T(u,v) = \overline{T}(G(u,v))$$

Entonces:

$$\boxed{T_u \times T_v = \overline{T}_w(G) \times \overline{T}_t(G) \cdot \det(DG)}$$

<u>Esquema de dem:</u>

Digamos que $G = (G_1, G_2)$. Usando regla de la cadena:

$$DT(u,v) = D\overline{T}(G(u,v)) \cdot DG(u,v)$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} T_u & T_v \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c} \overline{T}_w(G) & \overline{T}_t(G) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \hline \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow T_u = \overline{T}_w(G(u,v))\frac{\partial G_1}{\partial u} + \overline{T}_t(G(u,v))\frac{\partial G_2}{\partial u}$$

$$T_v = T_w(G(u,v))\frac{\partial G_1}{\partial v} + T_t(G(u,v))\frac{\partial G_2}{\partial v}$$

Recordamos que:

1) $V \times V = 0$

2) $V \times W = -W \times V$

3) $(V_1 + V_2) \times W = V_1 \times W + V_2 \times W$

4) $(aV) \times W = a(V \times W)$.

Tenemos:

$$T_u \times T_v = \left[\overline{T}_w(G) \times \overline{T}_t(G)\right] \cdot \frac{\partial G_1}{\partial u}\frac{\partial G_2}{\partial v} +$$

$$\left[\overline{T}_t(G) \times \overline{T}_w(G)\right] \cdot \frac{\partial G_2}{\partial u}\frac{\partial G_1}{\partial v}$$

$$= \overline{T}_w(G) \times \overline{T}_t(G) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial G_1}{\partial u}\frac{\partial G_2}{\partial v} - \frac{\partial G_2}{\partial u}\frac{\partial G_1}{\partial v}\right)}_{\det(DG).}$$

$\boxtimes$