Teórica 7 -

# Teorema de Green

Relaciona

una integral de línea alrededor de

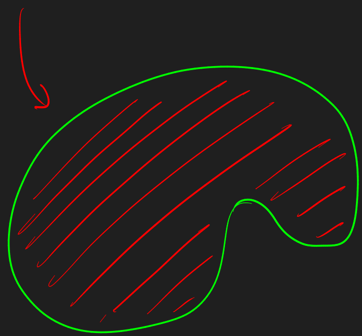
una curva simple, cerrada $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$

con

una integral doble sobre

la región plana encerrada por $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$



Posteriormente vamos a generalizarlo a

curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$

(Teorema de Stokes)

# Regiones

**Tipo 1** : $D \subset \mathbb{R}^2$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2 , \; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

donde

$$\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$$

satisfacen que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$$

para cada $x \in [a_1, a_2]$

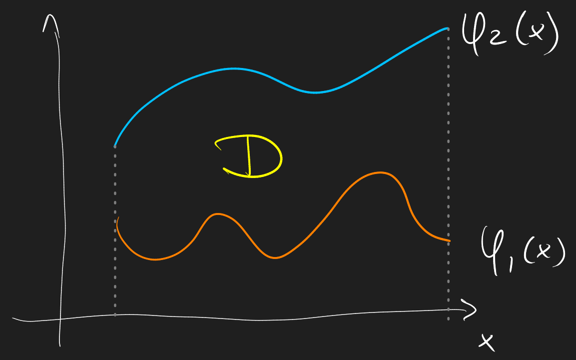
"Conjunto encerrado entre el gráfico de dos funciones

$$\varphi_1 = \varphi_1(x)$$

y

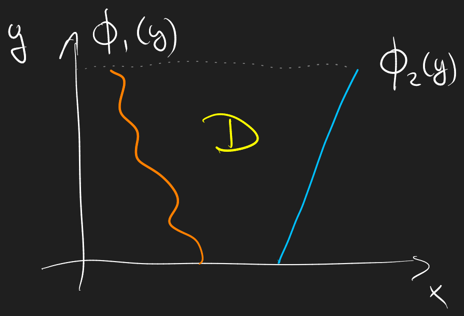
$$\varphi_2 = \varphi_2(x)$$

en un intervalo $[a_1, a_2]$"



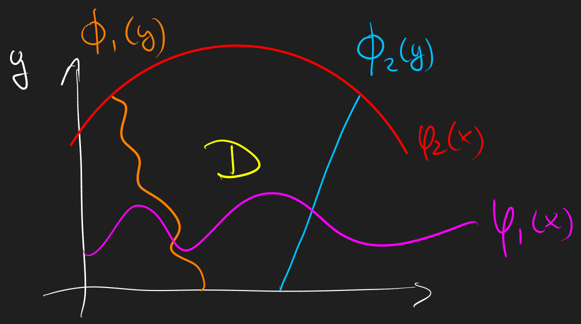

**Tipo II** : $D \subset \mathbb{R}^2$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y) , \; b_1 \leq y \leq b_2 \}$$




Tipo 3: $D \subset \mathbb{R}^2$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y) \\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \end{array} \right\}$$

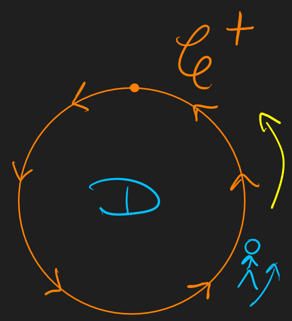


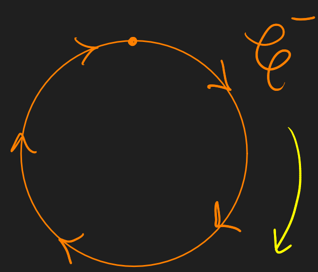

## Orientaciones de curvas cerradas

Si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada, simple, que es la frontera de una región de tipo I, II o III, tiene dos orientaciones: una recorriendo la curva en sentido "contrario a las agujas del reloj", y otra recorriendo la curva en el "sentido de las agujas del reloj".

Llamamos a la primera la orientación positiva, que notamos por $C^+$, y llamamos a la segunda la orientación negativa, que notamos por $C^-$.

En particular, la orientación positiva también puede reconocerse de la siguiente forma: si se recorre la curva $C$ caminando en sentido positivo, la región $D$ que encierra $C$ queda a la izquierda.



# Curvas Cerradas

Si $\mathcal{C}^+$ encierra a $D$ de Tipo I

Podemos descomponerla en dos partes

Las partes horizontales

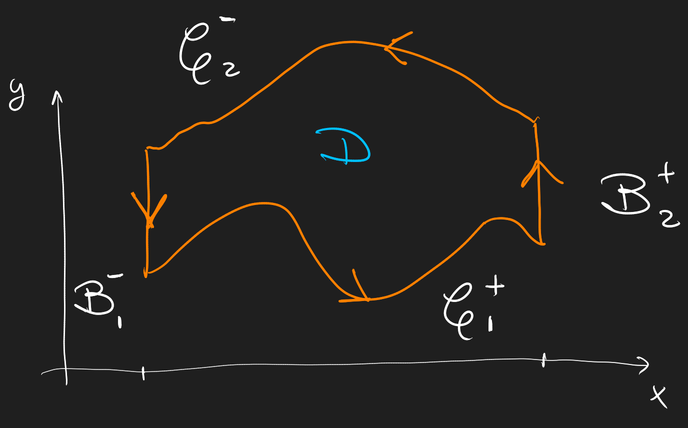
- Inferior : $\mathcal{C}_1^+$
- Superior : $\mathcal{C}_2^-$

Las partes verticales

- Izquierda : $B_1^-$
- Derecha : $B_2^+$

Que forman

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+$$




Si:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a_1 \leq x \leq a_2 ,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

Puedo escribir "cada parte" como

$$\mathcal{C}_1^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2 \ , \ y = \varphi_1(x)\}$$

↳ se recorre de izq $(a_1)$ a derecha $(a_2)$

$$\mathcal{C}_2^- = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2 \ , \ y = \varphi_2(x)\}$$

↳ se recorre de derecha $(a_2)$ a izq $(a_1)$

$$B_2^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = a_2 \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

↳ de abajo $(\varphi_1)$ a arriba $(\varphi_2)$

$$B_1^- = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = a_1 \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

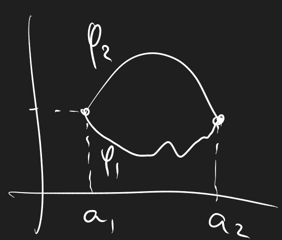
↳ de arriba $(\varphi_2(x))$ a abajo $(\varphi_1(x))$.

Obs :

$B_1^-$ y/o $B_2^+$ pueden no aparecer.

Ej: $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$

y $\varphi_1(a_2) = \varphi_2(a_2)$




# Teorema de Green

## Lema 1:

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo I,

definida por funciones $\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$

continuas

y sea

$\mathcal{C}$ la curva simple, cerrada

que consiste de la frontera de $D$

Si: $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$

(donde $P$ es la 1° componente del campo $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$)

entonces

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

donde

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + \underbrace{Q}_{=0}\cdot dy \quad \text{con } Q = 0$$

**Demo:**

D tipo I

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{a_1}^{a_2}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx$$

Teorema de Fubini

Teo. Fund. del Calc.

$$= -\left(\int_{a_1}^{a_2} P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\,dx\right)$$

$$= -\left( \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \, dx \right)$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x)) \, dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x)) \, dx$$

Ahora calculamos la integral sobre (las partes de) $\mathcal{C}^+$

$$\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^- \cup B_2^+ \cup B_1^-$$

Integramos a ambos lados

$$\int_{\mathcal{C}^+} P \, dx = \underbrace{\int_{\mathcal{C}_1^+} P dx}_{1} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_2^-} P dx}_{2} + \int_{B_2^+} P dx + \int_{B_1^-} P dx$$

1 $\int_{\mathcal{C}_1^+} P dx$ ) Parametrizo $\mathcal{C}_1^+$

Tipo 1

$$\sigma_1 : [a_1, a_2] \to \mathcal{C}_1$$

$$\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$$

[ recorre $\mathcal{C}_1$ de izq a derecha (+)

$$\int_{\mathcal{C}_1^+} P \, dx = \int_{t=a_1}^{t=a_2} (P, 0) \cdot (\overset{T_t}{1}, \overset{T_\varphi}{\varphi_1'(t)}) \, dt$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t)) \, dt \; //$$

② $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx \Big)$ $\quad \sigma_2 : [a_2, a_1] \longrightarrow \mathcal{C}_2$

$\sigma_2(t) = (t, \varphi_2(t))$

$Q = 0$ ?

$$\int_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx = \int_{t=a_2}^{t=a_1} (P, 0) \cdot (1, \varphi_2'(t))\,dt$$

$$= -\int_{t=a_1}^{t=a_2} (P, 0) \cdot (1, \varphi_2'(t))\,dt$$

$$= -\int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t)) \;//$$

③ $\displaystyle\int_{\mathcal{B}_2^+} P\,dx \Big)$ Parametrizo $\mathcal{B}_2$ (↑) como

$\sigma_3 : [\varphi_1(a_2), \varphi_2(a_2)] \longrightarrow \mathcal{B}_2$

$\sigma_3(t) = (a_2, t)$

$\therefore$

$$\int_{\mathcal{B}_2^+} P\,dx = \int_{\varphi_1(a_2)}^{\varphi_2(a_2)} (P(\sigma_3(t)), 0) \cdot (0, 1)\,dx = 0 \;//$$

④ same :

$$\int_{\mathcal{B}_1^-} P\,dx = 0 \;//$$

Finalmente

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx + \int_{\mathcal{C}_2^-} P\,dx + \int_{\mathcal{B}_2^+} P\,dx + \int_{\mathcal{B}_1^-} P\,dx$$

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t))\,dt - \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t))$$

Concluimos que

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

# Tipo II:

Similarmente sucede con $D \subset \mathbb{R}^2$ de tipo II

Lema

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo II, definida por funciones

$$\phi_1, \phi_2 : [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$$

continuas,

y sea

$\mathcal{C}$ la curva cerrada, simple que recorre la frontera de $D$.

Si $Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$,

(donde Q es la 2° componente del campo)

entonces

$$\int_{\mathcal{C}^+} Q\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$$

# Teorema de Green

Teorema :

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de Tipo III

y $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple

que recorre la frontera de D.

Si $P, Q : D \to \mathbb{R}$

son de clase $C^1$

(con el campo $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$)

entonces

$$\int_{\mathcal{C}^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

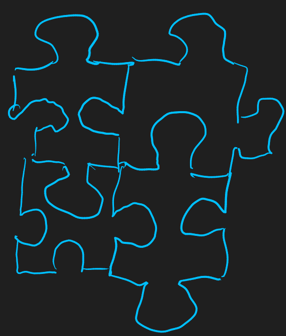
Demo:

Separo la integral en 2 y uso lemas previos.

## Generalizamos

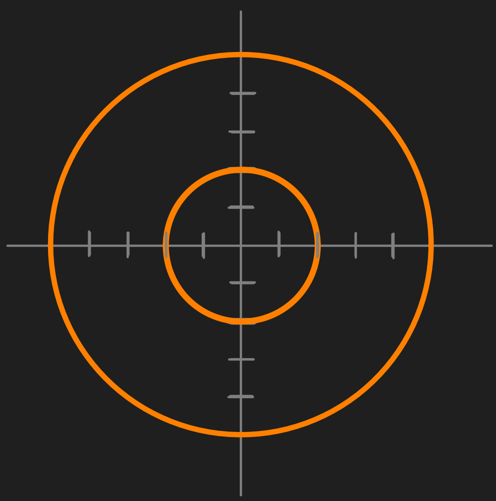
El Teorema de Green se puede aplicar a regiones más generales que las de tipo III.

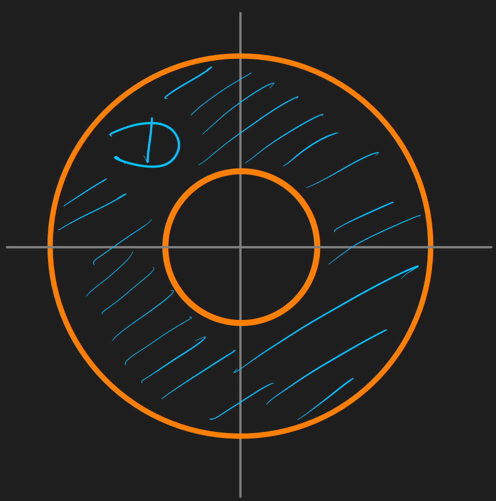
Un ejemplo de uso es con una región $D \subset \mathbb{R}^2$ la cual se puede descomponer en una unión finita y disjunta de regiones de tipo III



Ej: Anillo

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \}$$






Si: $\mathcal{C} = \partial D$, borde

entonces $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}_1^- \cup \mathcal{C}_2^+$

donde

$$\mathcal{C}_1^- = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2 \}$$

$$\mathcal{C}_2^+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5 \}$$