Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 9, 2do. cuatrimestre 2020

Teorema de Stokes para gráficos

El Teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo en una curva de $\mathbb{R}^3$ con una integral de superficie (la superficie que "encierra" la curva). Empezamos con un caso donde esto está claro: la superficie que define el gráfico de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que vale el Teorema de Green. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie que define el gráfico de f con la parametrización usual:

$$\Phi : D \to S,\ \Phi(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)\ \left(\Rightarrow T_u \times T_v = \left(-\tfrac{\partial f}{\partial u}, -\tfrac{\partial f}{\partial v}, 1\right)\right).$$

Si $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1,

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (\boldsymbol{F} \circ \Phi) \cdot (T_u \times T_v)\, du\, dv$$

$$= \iint_D \Big((F_1 \circ \Phi)(-\tfrac{\partial f}{\partial u}) + (F_2 \circ \Phi)(-\tfrac{\partial f}{\partial v}) + F_3 \circ \Phi \Big)\ du\, dv.$$

Teorema de Stokes para gráficos

Ahora definimos “la curva que encierra a S”. Si $\sigma : [a, b] \to C$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de la frontera C de D, recorrida de forma simple, positiva, definimos la curva frontera ∂S de S como la parametrizada por

$$\eta : [a, b] \to \partial S, \quad \eta(t) = \big(u(t), v(t), f(u(t), v(t))\big).$$

Esta parametrización hace que ∂S se recorra de forma simple, con orientación positiva. Tenemos:

Teorema: Si f es de clase C^2 y $\boldsymbol{F}$ es de clase C^1, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot dS.$$

Teorema de Stokes para gráficos

Demostración: Tenemos que

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \operatorname{rot}(\boldsymbol{F})(\Phi(u,v)) \cdot \left(-\tfrac{\partial f}{\partial u}, -\tfrac{\partial f}{\partial v}, 1\right) du\, dv \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)(u,v,f(u,v))\, \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\, du\, dv \\
&\quad - \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)(u,v,f(u,v))\, \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\, du\, dv \\
&\quad + \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(u,v,f(u,v))\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Teorema de Stokes para gráficos

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\eta'(t) = \left(u'(t), v'(t), \tfrac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t))\, u'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t))\, v'(t)\right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds &= \int_a^b (F_1, F_2, F_3)(\eta(t)) \cdot \eta'(t)\, dt \\
&= \int_a^b F_1\big(\eta(t)\big)\, u'(t)\, dt + \int_a^b F_2\big(\eta(t)\big)\, v'(t)\, dt \\
&+ \int_a^b F_3\big(\eta(t)\big) \left(\tfrac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t))\, u'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t))\, v'(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Teorema de Stokes para gráficos

Agrupando términos, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds \\
&\quad = \int_a^b \Big(F_1(\eta(t)) + F_3(\eta(t)) \tfrac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) \Big) u'(t)\, dt \\
&\qquad + \int_a^b \Big(F_2(\eta(t)) + F_3(\eta(t)) \tfrac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)) \Big) v'(t)\, dt \\
&\quad = \int_{\partial D^+} \Big(F_1(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \tfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) \Big) du \\
&\qquad + \int_{\partial D^+} \Big(F_2(u, v, f(u, v)) + F_3(u, v, f(u, v)) \tfrac{\partial f}{\partial v}(u, v) \Big) dv.
\end{aligned}$$

Teorema de Stokes para gráficos

Sean

$$P(u,v) = F_1(u,v,f(u,v)) + F_3(u,v,f(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}(u,v),$$

$$Q(u,v) = F_2(u,v,f(u,v)) + F_3(u,v,f(u,v))\frac{\partial f}{\partial v}(u,v).$$

Tenemos que

$$\int_{\partial S^+} \boldsymbol{F}\cdot ds = \int_{\partial D^+} P(u,v)\,du + Q(u,v)\,dv.$$

Como D es una región donde vale el Teorema de Green, podemos aplicarlo y obtener

$$\int_{\partial S^+} \boldsymbol{F}\cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u,v)\right) du\,dv.$$

Teorema de Stokes para gráficos

Obtenemos una expresión explícita para $\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(F_2(u,v,f(u,v)) + F_3(u,v,f(u,v))\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)\\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(F_1(u,v,f(u,v)) + F_3(u,v,f(u,v))\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right)\\
&= \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = -\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial u} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Teorema de Stokes para gráficos

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds \\
&= \iint_D \left(-\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial u} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) du\, dv \\
&= \iint_S \operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Teorema de Stokes para gráficos

Ejemplo: Sea C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$. Se trata de calcular

$$\int_C -y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz.$$

Para aplicar el Teorema de Stokes, queremos relacionar esta integral del campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) = (-y^3, x^3, -z^3)$ con una integral de $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})$ sobre una superficie "encerrada" por C, que sea el gráfico de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Definimos $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 1 - x - y.$$

Entonces

$$\Phi : D \to S, \quad \Phi(x, y) := (x, y, 1 - x - y)$$

parametriza el gráfico de f, y C resulta la curva frontera de S.

Teorema de Stokes para gráficos

Por lo tanto,

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz = \iint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Dado que $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^2 \cdot r\,d\theta\,dr = 6\pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Teorema de Stokes

Nos gustaría extender el Teorema de Stokes a superficies S y curvas "frontera" ∂S más generales. Una dificultad es cómo extender el concepto de curva frontera.

Si S está definida por una parametrización $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ tal que vale el Teorema de Green en D y ∂D se parametriza por $\sigma : [a, b] \to \partial D$, $\sigma(t) = (u(t), v(t))$, es "tentador" definir ∂S como la curva de $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\eta : [a, b] \to \partial S, \quad \eta(t) = \Phi(u(t), v(t)).$$

En el caso de la esfera unitaria parametrizada por

$$\Phi : [0, 2\pi] \to S, \quad \Phi(\theta, \phi) = (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi),$$

como $\partial D = [0, 2\pi] \times \{0, \pi\} \cup \{0, 2\pi\} \times [0, \pi]$, tenemos

$$\Phi(0, \phi) = \Phi(2\pi, \phi) = (\sin\phi, 0, \cos\phi) \quad (0 \le \phi \le \pi)$$
$$\Phi(\theta, 0) = (0, 0, 1), \qquad \Phi(\theta, \pi) = (0, 0, -1).$$

Teorema de Stokes

Si la parametrización Φ es inyectiva en todo D, entonces $\Phi(\partial D)$ resulta la "frontera geométrica" de $S = \Phi(D)$. Así, si $\sigma : [a, b] \to \partial D$, $\sigma(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización simple, con orientación positiva de ∂D, definimos ∂S por

$$\eta : [a, b] \to \partial S, \quad \eta(t) = \Phi \circ \sigma(t) = \Phi(u(t), v(t)).$$

Así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie definida por una parametrización inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tal que vale el Teorema de Green en D. Sea $\partial S^+ = \Phi(\partial D^+)$ la frontera orientada de S, donde ∂D^+ es la frontera de D recorrida de forma simple, orientada positivamente. Si $\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds.$$

Teorema de Stokes

La demostración la encuentran en el apunte de Victoria Paternostro y Julio D. Rossi.

Ejemplo: Se trata de determinar la integral

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{S},$$

donde $\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (y^2, xy, xz)$, y $S \subset \mathbb{R}^3$ es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, con la normal unitaria con componente z positiva (orientación "exterior").

Tenemos una parametrización inyectiva (por ejemplo, con coordenadas cartesianas). Por el Teorema de Stokes,

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds.$$

Teorema de Stokes

Podemos parametrizar a ∂S^+ por

$$\eta : [0, 2\pi] \to \partial S, \quad \eta(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_{\partial S^+} y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t\,(-\sin t) + \cos^2 t\, \sin t \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin t\,(\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sin t \cos(2t)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \cos(2t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$