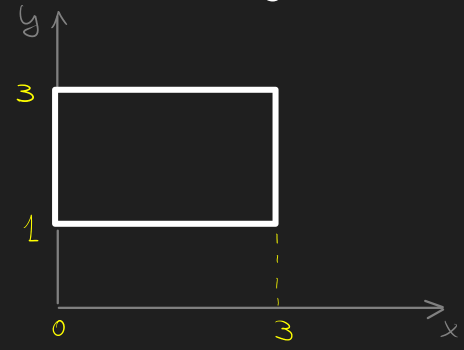
Cambio de variables

06/09/2020

Ej 11.

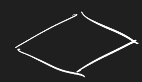
Sea $T(u,v) = (4u + v, u + 2v)$

D^* el rectángulo $[0,3] \times [1,3]$



a) Observar que

$D = T(D^*)$ es un paralelogramo, y hallar su área usando geometría elemental



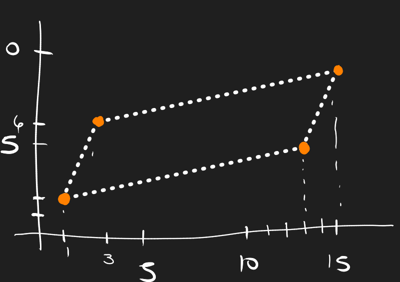
(¿Por qué escribir todo ??)

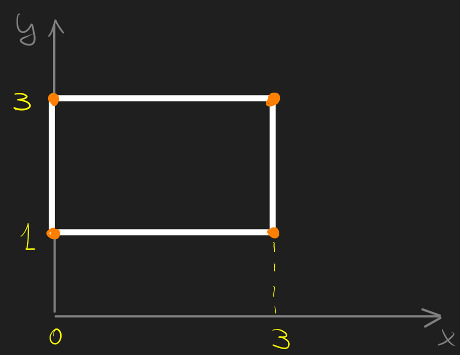
T es una transformación afín que deforma y desplaza paralelogramos en paralelogramos

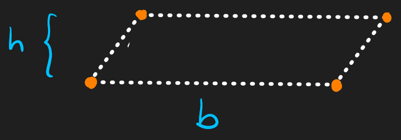
$\Rightarrow$ Puedo transformar las esquinas, que serán transformadas en las esquinas de la transformación

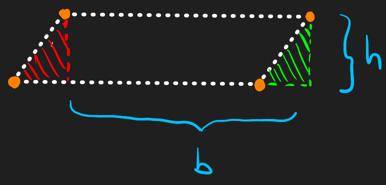
$$\text{Esquinas}_{D^*} = \{(0,1), (0,3), (3,1), (3,3)\}$$

$$T(0,1) = (1,2)$$
$$T(0,3) = (3,6)$$
$$T(3,1) = (13,5)$$
$$T(3,3) = (15,9)$$









Son puntos en el espacio, calculo distancias con norma L2

entre $(1,2)$ y $(13,5)$ $= \| 1-13, 2-5 \| = \| 12, 3 \| = \sqrt{153} = b$

y h ?

Calculate vector by initial and terminal points:

$\overline{AB} = \{B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z\} = \{3 - 1; 6 - 2; 0 - 0\} = \{2; 4; 0\}$

$\overline{AC} = \{C_x - A_x; C_y - A_y; C_z - A_z\} = \{13 - 1; 5 - 2; 0 - 0\} = \{12; 3; 0\}$

$A = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

Calculate cross product of vectors:

$\bar{c} = \overline{AB} \times \overline{AC}$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(4\cdot 0 - 0\cdot 3) - \boldsymbol{j}(2\cdot 0 - 0\cdot 12) + \boldsymbol{k}(2\cdot 3 - 4\cdot 12) = \boldsymbol{i}(0 - 0) - \boldsymbol{j}(0 - 0) + \boldsymbol{k}(6 - 48) = \{0; 0; -42\}$$

Calculate magnitude of a vector:

$|\bar{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-42)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1764} = \sqrt{1764} = 42$

Calculate parallelogram area:

A = 42

Area = 42

b) $T: D^* \to D$ es biyectiva

Hallar el área de D usando una integral sobre D^*

Teorema de cambio de Variable (versión lineal)

$$\int_D f = \int_{D^*} f \circ T \cdot |\det T|$$

Factor de escalamiento

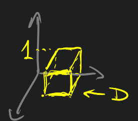
Integrar f sobre el rectángulo D

Es igual a integrar sobre el paralelogramo D^* que "pasa" por una transformación T que recupera los valores del rectángulo D

Entonces integro con $f := 1$

$$\int_D 1 = \int_{D^*} T \cdot |\det T|$$

Área de D



$$\det T = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 8 - 1 = 7$$

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{T(0,1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{T(0,1)}$$

$$\text{Área } D = \int_{u=0}^{u=3} \int_{v=1}^{v=3} 7$$

$$= \int_0^3 14 = 42 \ //$$

Ej 12) Sea $D = \{(1,2), (5,3), (2,5), (6,6)\}$

a) $\displaystyle\int_D xy \cdot dx\, dy$

- Quiero una Transformación T que mande los puntos del cuadrado $D^* = [0,1] \times [0,1]$ a D

Como son paralelogramos, solo debo "mapear" las esquinas con una transformación lineal.

Quiero T /

$$\begin{array}{l} T(\overset{u}{1}, \overset{v}{2}) = (0,0) \\ T(5,3) = (1,0) \\ T(2,5) = (0,1) \\ T(6,6) = (1,1) \end{array}$$

elijo $\overset{\text{coef de } u}{a} = 1$, despejo b, coef de v

$(au + bv, cu + dv) = T(u,v)$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 2 = 0 \\ a \cdot 5 + b \cdot 3 = 1 \\ a \cdot 2 + b \cdot 5 = 0 \\ a \cdot 6 + b \cdot 6 = 1 \end{cases}$$