ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 8

• **Recordar:**

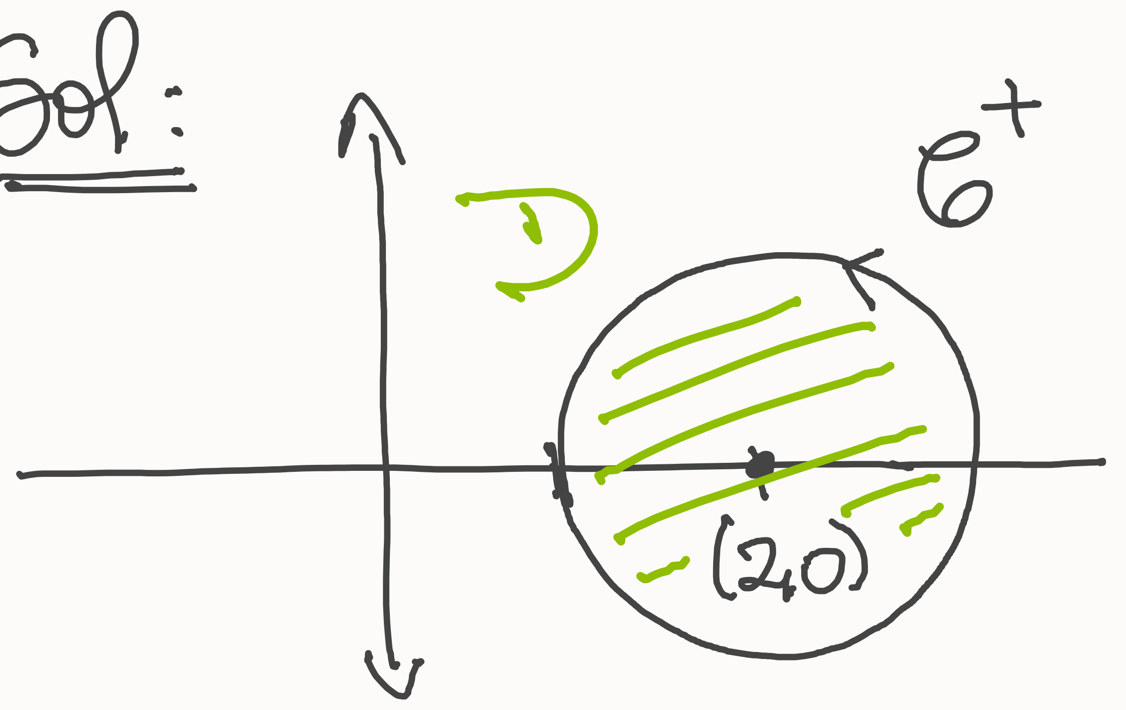
Teorema de Green:

$F=(P,Q)$ campo $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable a trozos que encierra una región $D \subseteq \Omega$ de tipo III. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Ejemplo: Calcular $\int_{\mathcal{C}^+} y e^{-x} dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right) dy$ donde $\mathcal{C}$ es el borde del disco de radio 1 y centro $(2,0)$.

Sol:



$\mathcal{C}$ se parametriza por $\sigma(t) = (\cos(t)+2, \operatorname{sen}(t))$ $t\in[0,2\pi]$

Si calculamos $\int_{\mathcal{C}^+} F\,ds$ con $F=\left(ye^{-x}, \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right)$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} F\,ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}(t) e^{-\cos(t)} \cdot \operatorname{sen}(t) + \left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - e^{-\cos(t)}\right)\cos(t)\, dt$$

¿muy difícil? Probamos con Green:

- $F(x,y) = \left(ye^{-x}, \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right) \in \mathcal{C}^1$
- D región de tipo III.

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D x + e^{-x} - e^{-x}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D x\, dx\, dy \underset{\text{(polares)}}{=} 2\pi \; \boxtimes$$

Observación:

El teorema de Green vale en regiones más generales que los de tipo III. (Ver video complementario 3).

Cálculo de áreas

Teorema:

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale el Teorema de Green y $\mathcal{C}^+$ su frontera orientada positivamente. Entonces,

$$\boxed{\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}^+} -y\, dx + x\, dy.}$$

Dem: Sea $F(x,y) = (-y,x)$. Entonces, F es un campo $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^2$. Si queremos usar Green para este campo, calculamos $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 1 = 2$.

$Q(x,y) = x$

$P(x,y) = -y$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} -y\,dx + x\,dy \underset{\text{Green}}{=} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_R 2.\,dx\,dy = 2.\,\text{área}(R)$$

$\boxtimes$

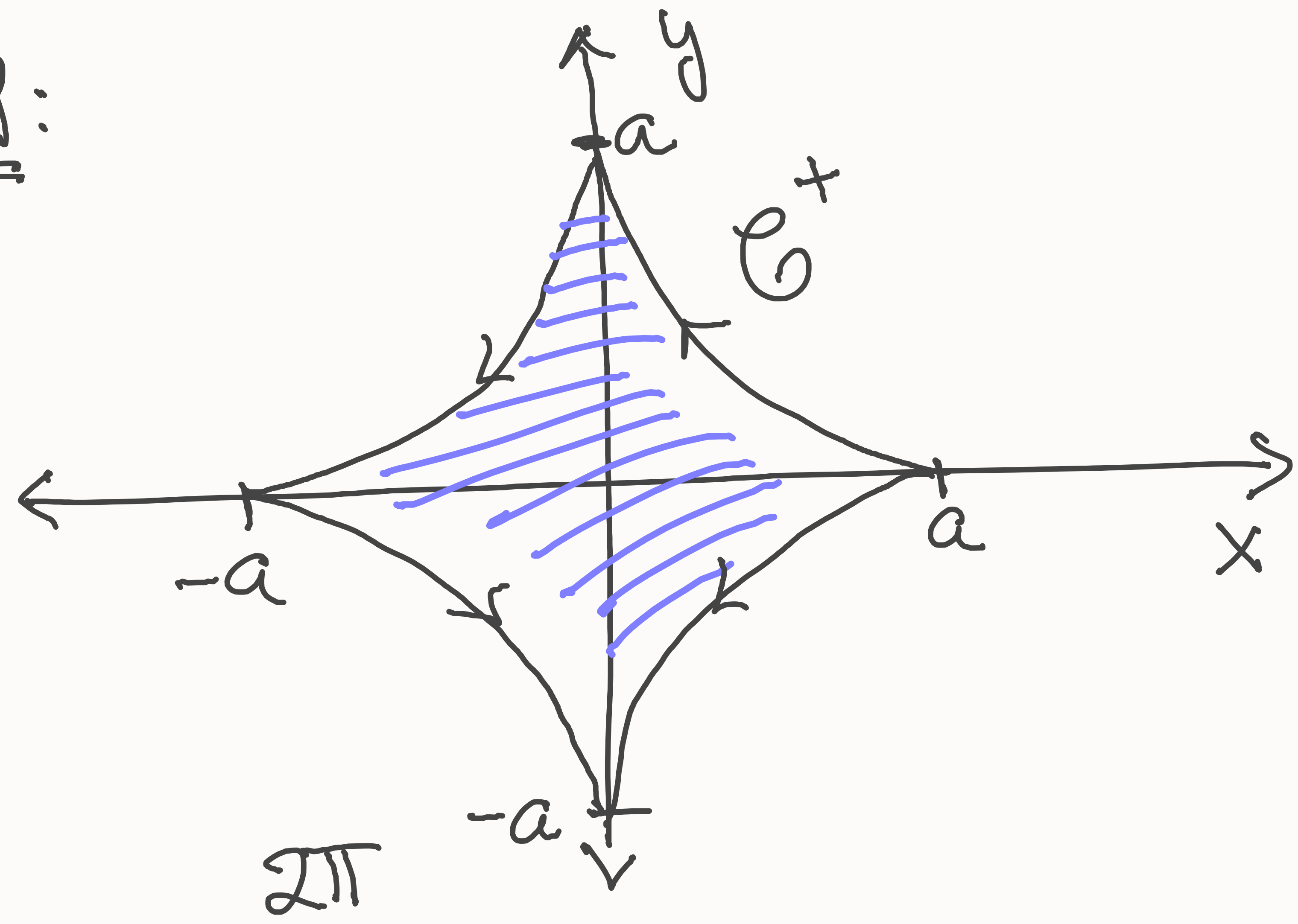
Observación:

Para calcular áreas, podemos usar Green con cualquier campo $F=(P,Q)$ / $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sea constante.

Ejemplo: Hallar el área encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ c/ $a>0$, usando la parametrización

$$x = a\cos^3(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$
$$y = a\,\text{sen}^3(\theta),$$

Sol:



Usando el teorema anterior:

$$\text{área} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}^+} -y\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} +a\,\text{sen}^3\theta \cdot 3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + a\cos^3\theta\, 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

la parametrización orienta positivamente

$$= \frac{1}{2}\cdot 3a^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^4\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\,\text{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{3}{8}\pi . a^2 . \quad \boxtimes$$

Formas vectoriales del Teorema de Green.

Definición: Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. El rotor de F es el campo vectorial definido como:

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Fórmula

$$\text{rot}(F) = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Notación: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{rot}(F) = \nabla \times F.$

Rotor en $\mathbb{R}^2$:

Si $F = (P, Q)$ con $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podemos pensar a F como un campo en $\mathbb{R}^3$ con 3^{er} coord igual a cero y que no depende de z $\rightsquigarrow$ $F(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$

$$\Rightarrow \nabla \times F = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0-0, -(0-0), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Abuso de notación: $\nabla \times F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ rotor escalar.

Proposición:

Sea F un campo C^1 en $\mathbb{R}^3$ que es un campo gradiente, ie: $\exists f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^2 / $F = \nabla f$. Entonces, $\nabla \times F = (0,0,0)$

Dem: Sale directo pues las derivadas cruzadas de f son iguales. Ejercicio.

Ejemplo: Sea $F(x,y,z)=(y,-x,0) \Rightarrow F$ no es un campo gradiente.
Si lo fuera, debería ocurrir $\nabla \times F=(0,0,0)$
pero $\nabla \times F=(0,0,-2)$.

Definición: Sea $F=(P,Q,R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$.
La **divergencia de F** se define como:

$$\operatorname{div}(F)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Notación: $\operatorname{div}(F)=\langle \nabla, F\rangle=\nabla \cdot F$.

- Si $F=(P,Q)$ campo en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\operatorname{div}(F)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Proposición:
Sea F un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ definido en $\mathbb{R}^3$. Entonces,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))=\nabla \cdot (\nabla \times F)=0.$$

Dem: Ejercicio.

Teorema: (forma vectorial del Teorema de Green)
Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea $F = (P, Q)$ un campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

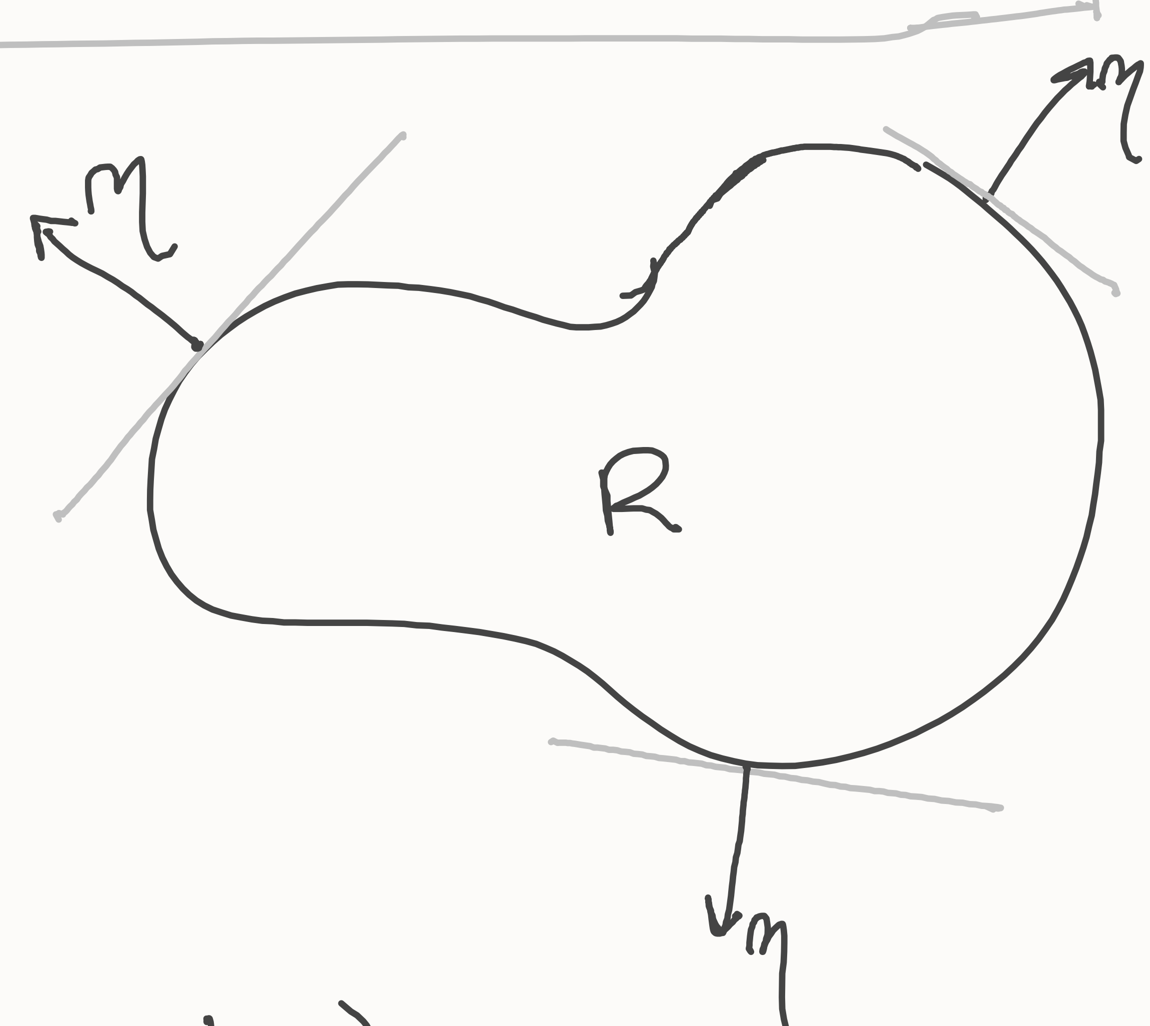
$$\iint_R \operatorname{rot}(F) = \iint_R \nabla \times F \cdot (0,0,1)\, dS = \int_{\partial R^+} (P, Q)\, ds.$$

Dem: es pura notación.

Teorema: (de la divergencia en el plano)
Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea η la normal exterior a ∂R. Si $F = (P, Q)$ es un campo vectorial $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\int_{\partial R} F \cdot \eta\, ds = \iint_R \operatorname{div}(F).$$

Dem: Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrización de ∂R, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ que orienta ∂R positivamente



$\Rightarrow$ Si $p = \sigma(t)$, $\eta(p) = \dfrac{(y'(t), -x'(t))}{\|\sigma'(t)\|}$

es la normal exterior.

Luego,

$$\int_{\partial R} F \cdot \eta\, ds = \int_a^b \left\langle F(\sigma(t)), \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\sigma'(t)\|} \right\rangle \|\sigma'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b P(\sigma(t)) \cdot y'(t) - Q(\sigma(t)) \cdot x'(t)\, dt$$

$$= \int_{\partial R^+} -Q\, dx + P\, dy \underset{\uparrow \atop \text{Green}}{=} \iint_R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= \iint_R \operatorname{div}(F)\, dx\, dy. \quad \boxtimes$$