Complemento de Clases teóricas 1 y 2:

(Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3)

⊛ "Las rectas secantes tienden a la recta de ecuación $L = \lambda\sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$."

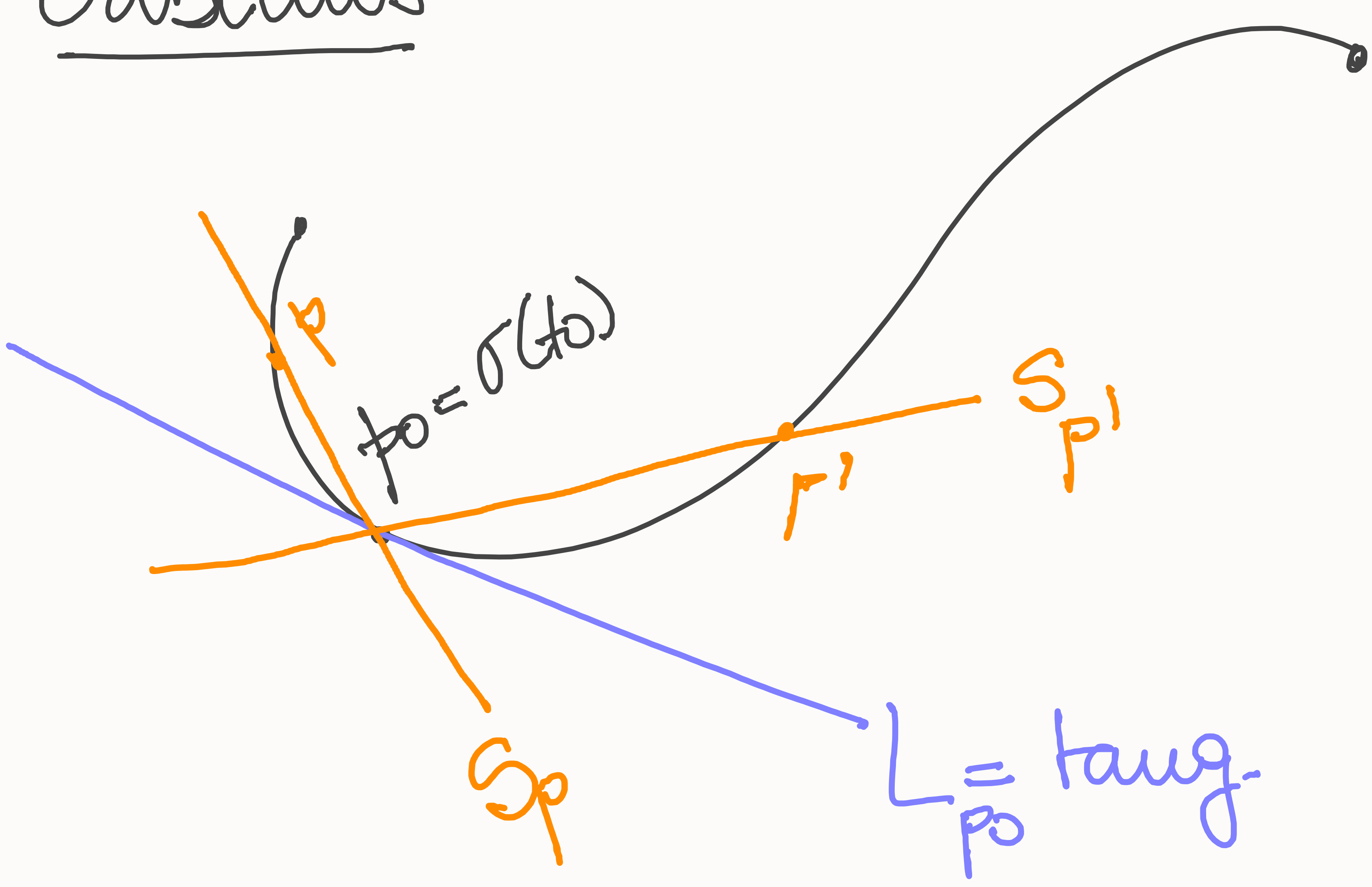
⊛ Si tenemos 2 parametrizaciones reg. de una curva $\Rightarrow$ una es una reparametrización de la otra.

<u>Proposición:</u>

Sea $\mathcal{C}$ una curva que admite una parametrización $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ continua, inyectiva y diferenciable en $t_0 \in [a,b]$ con $\sigma'(t_0) \neq (0,0,0)$. Entonces $\mathcal{C}$ admite recta tangente en $p_0 = \sigma(t_0)$. Además su ecuación es

$$L_{p_0} = \lambda\sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$$

<u>Sabemos:</u>




Una recta es tang. a $\mathcal{C}$ en $p_0$ si es límite de secantes.

Dem: Sea $(p_n)_n \in \mathcal{C}$ / $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_0$ y sean $t_n \in [a,b]$ / $p_n = \sigma(t_n)$.

Si $S_n$ = secante que pasa por $p_n$ y $p_0$ $\Rightarrow$ un posible vector director para $S_n$ es

$$\frac{p_n - p_0}{t_n - t_0} = \frac{\sigma(t_n) - \sigma(t_0)}{t_n - t_0}$$

Si supiéramos que $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_0$ cuando $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_0$ $\Rightarrow$ tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n - p_0}{t_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(t_n) - \sigma(t_0)}{t_n - t_0} = \sigma'(t_0).$$

Veamos que si $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_0 \Rightarrow t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_0$.

Supongamos que no. Entonces, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ y una sub suc. $(t_{n_k})_k$ de $(t_n)_n$ /

$$|t_{n_k} - t_0| > \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $(t_{n_k})_k \subseteq [a,b]$ y $[a,b]$ es compacto $\exists\, (t_{n_{k_j}})_j$ sub suc. de $(t_{n_k})_k$ /

$$\lim_{j\to+\infty} t_{n_{k_j}} = t_1 \in [a,b].$$

Como $\sigma$ es continua,

$$\lim_{j\to+\infty} \sigma(t_{n_{k_j}}) = \sigma(t_1).$$

Pero $\sigma(t_{n_{k_j}}) = p_{n_{k_j}}$ y entonces, como $p_{n_{k_j}} \to p_0$, tenemos que $\sigma(t_1) = p_0 = \sigma(t_0)$

$\underset{\sigma \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow}$ $t_1 = t_0$ y $|t_{n_{k_j}} - \underset{t_1}{\underset{\shortparallel}{t_0}}| > \varepsilon_0$ ABS! $\boxtimes$

---

<u>Recordemos</u>: $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva y $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrización de $\mathcal{C}$.

Si $h : [a,b] \to [c,d]$ biyección continua

$\Rightarrow$ $\bar{\sigma} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ dada por

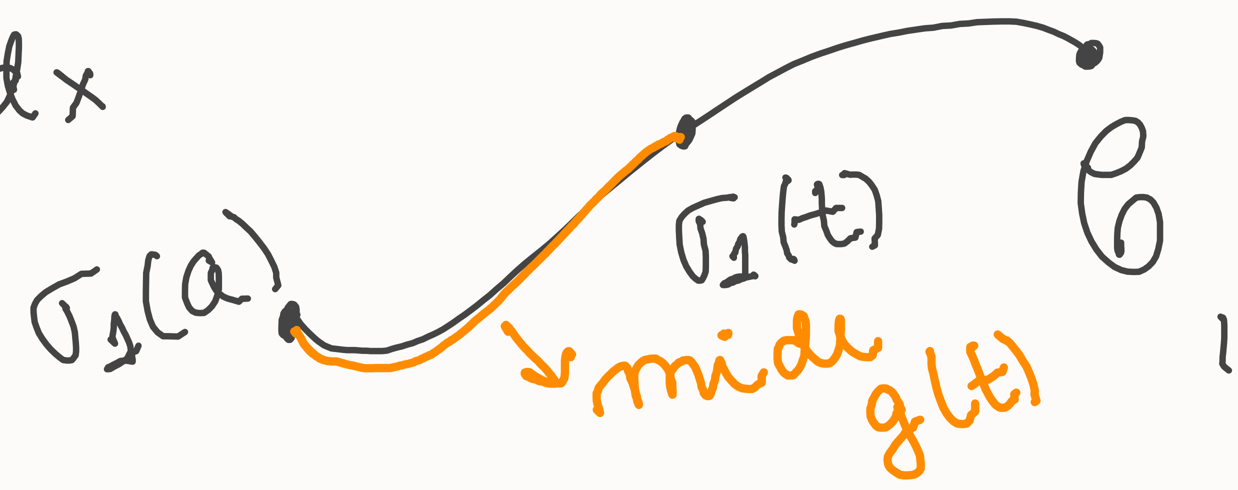
$\bar{\sigma} = \sigma \circ h^{-1} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de $\mathcal{C}$ que llamamos <u>reparametrización</u>.

<u>Proposición</u>: Si $\sigma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ y $\sigma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ son 2 parametrizaciones regulares de una curva $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\sigma_2$ es una reparametrización de $\sigma_1$ [ie: $\exists\, h : [a,b] \to [c,d]$ biyectiva, $\mathcal{C}^1$ / $h' \neq 0$ y $\sigma_2 = \sigma_1 \circ h^{-1}$].

Dem: Supongamos que $\sigma_1(a)=\sigma_2(c)$.

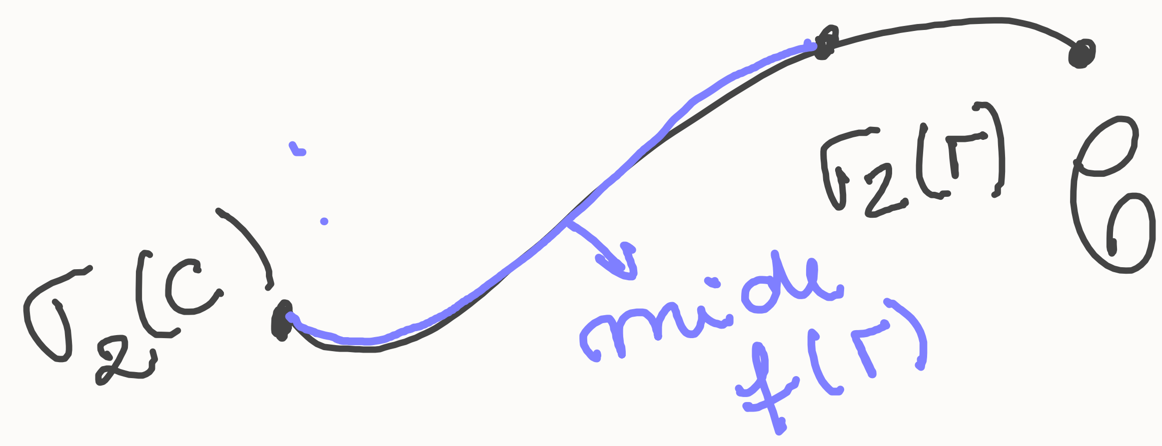
Llamemos $g(t) =$ long. de arco entre $\sigma_1(a)$ y $\sigma_1(t)$

$$= \int_a^t \|\sigma_1'(x)\|\,dx$$




y $f(r) =$ long. de arco entre $\sigma_2(c)$ y $\sigma_2(r)$

$$= \int_c^r \|\sigma_2'(x)\|\,dx.$$




Entonces, si $l = \text{long}(\mathcal{C})$, tenemos que

$g:[a,b]\to[0,l]$ estrictamente crec ($\therefore$ biy), $\mathcal{C}^1$ y con $g'\neq 0$ en $[a,b]$

y lo análogo vale para $f:[c,d]\to[0,l]$

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & {[c,d]} \arrow[dl, "f"] \\ & {[0,l]} & \end{tikzcd} \qquad h := f^{-1}\circ g$$

Tenemos que $h$ es $\mathcal{C}^1$, estrictamente creciente y $\mathcal{C}^1$ con $h'(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$.

Veamos que $\sigma_1(t)=\sigma_2(h(t))$ $\forall t\in[a,b]$.

Si $t\in[a,b] \Rightarrow$ existe $r\in[c,d]$ /

$$\sigma_1(t)=\sigma_2(r).$$

Entonces, $g(t)=f(r)$ y $r=f^{-1}(g(t))$

Por lo tanto,

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(r) = \sigma_2(f^{-1}(g(t))) = \sigma_2(h(t))$$

como queríamos $\boxtimes$