ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 4

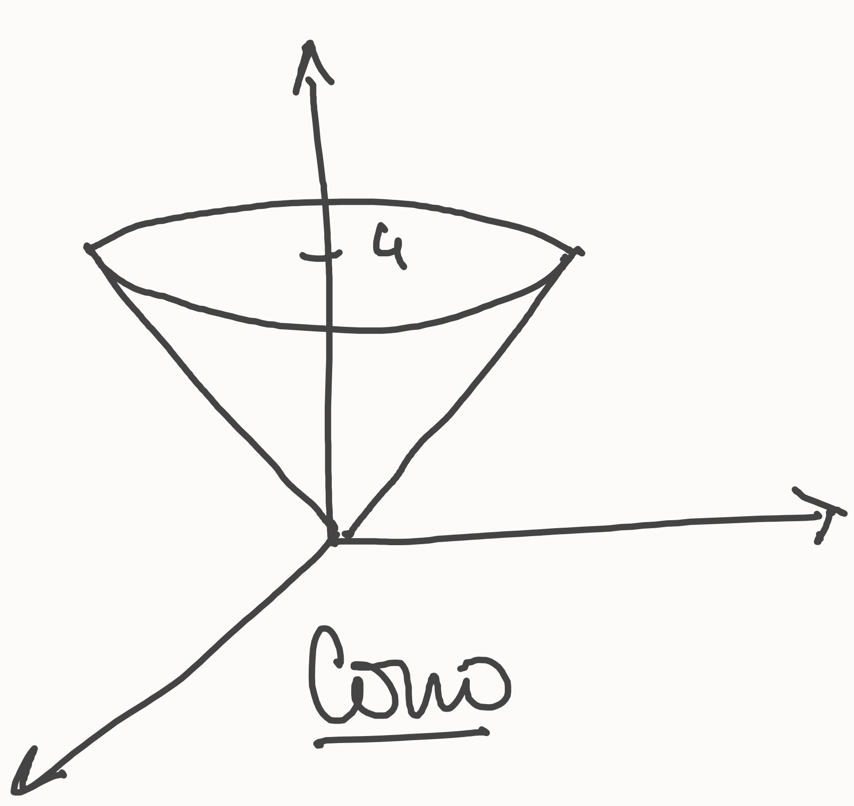
Superficies

Definición: Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos que puede describirse como la imagen de una función continua $T: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental. A la función T la llamamos parametrización de S.

Ejemplos:

$z^2 = x^2 + y^2 \quad 0 \leq z \leq 4$

$\boxed{1}$ $S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}, \; z \leq 4\}$



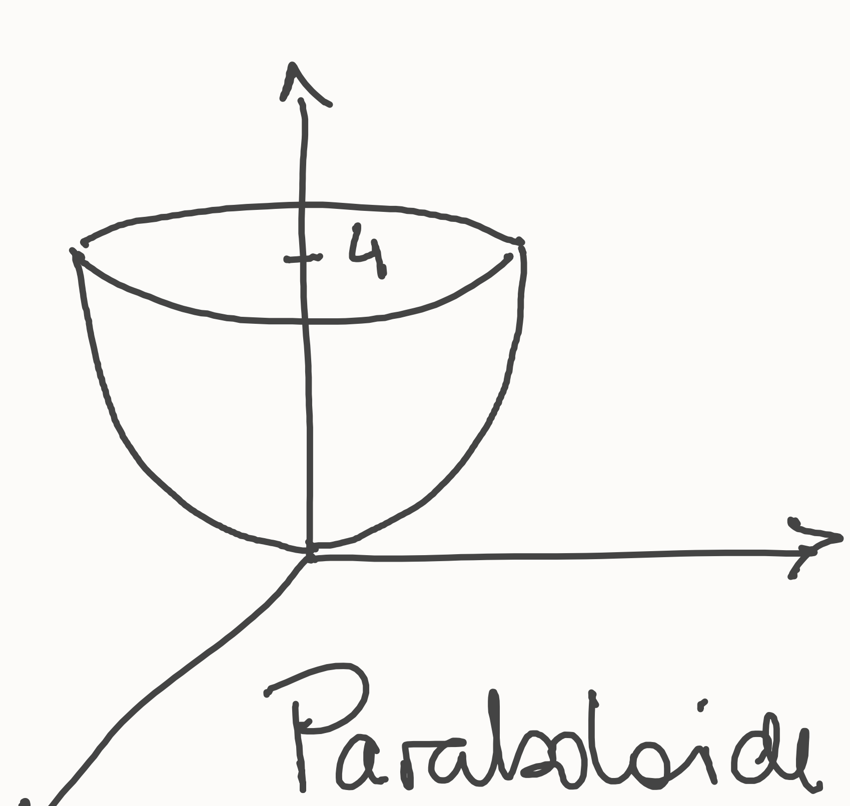
Cono

. $T: \overbrace{[0,4] \times [0,2\pi]}^{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$

parametrización continua de $S \Rightarrow S$ es una superficie.

$\boxed{2}$ $S = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2, \; z \leq 4\}$



Paraboloide

$T: [0,2] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$

parametrización continua de $S \Rightarrow S$ es superficie.

3 $S = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)$ con $f: D \to \mathbb{R}$ continua, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ región elemental$\}$

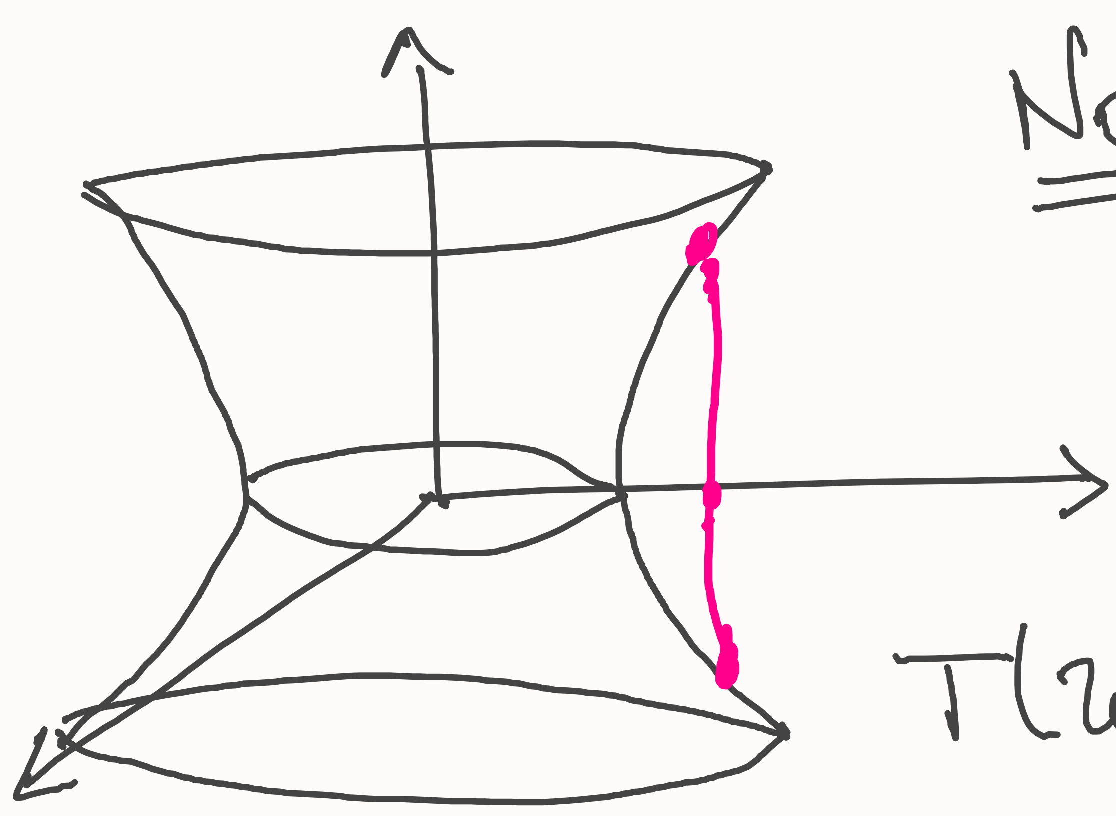
$S = \mathrm{graf}(f)$.

$\Rightarrow T(x,y) = (x, y, f(x,y))$ es una param. de S

$T: D \to S$.

4 Paraboloide de una hoja

$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ |z| \leq 1\}$.

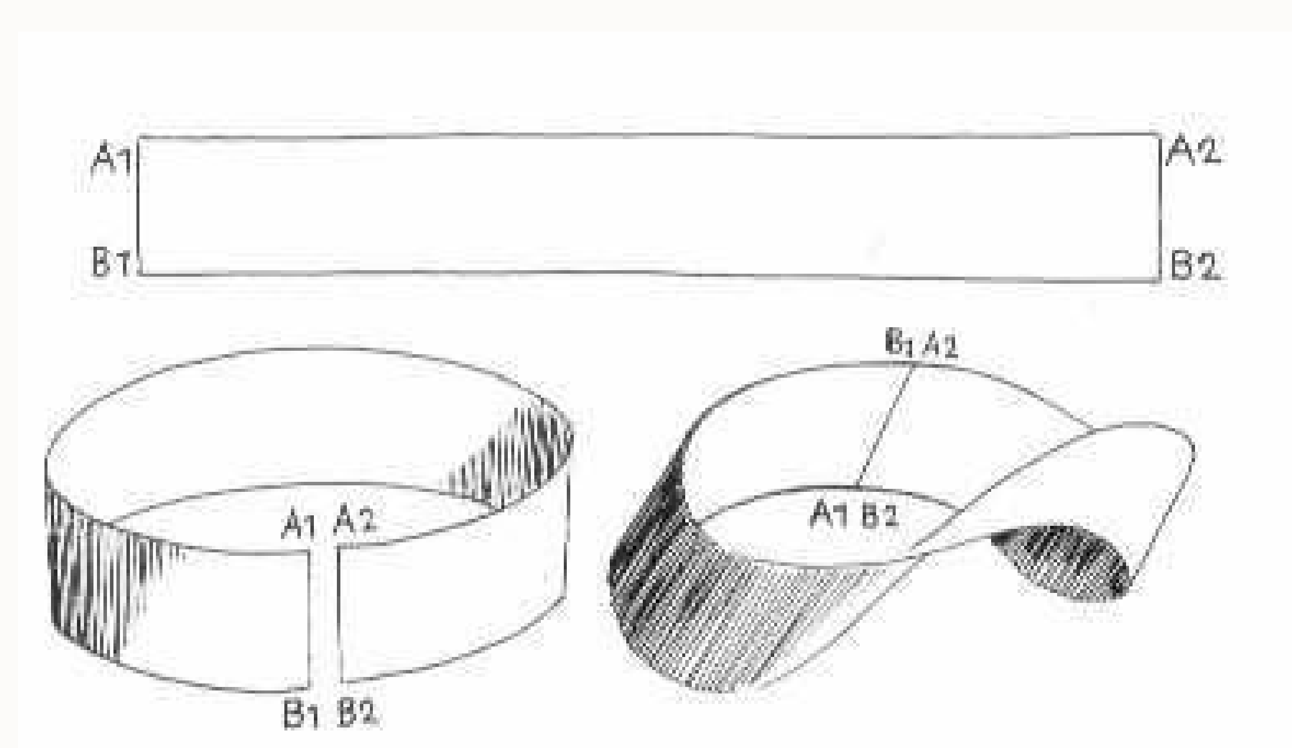


No es gráfico de una función.

$T: [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$

$T(u,v) = (\cos(u)\sqrt{v^2+1},\ \mathrm{sen}(u)\sqrt{v^2+1},\ v)$.

5 Cinta de Moebius



$T: [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

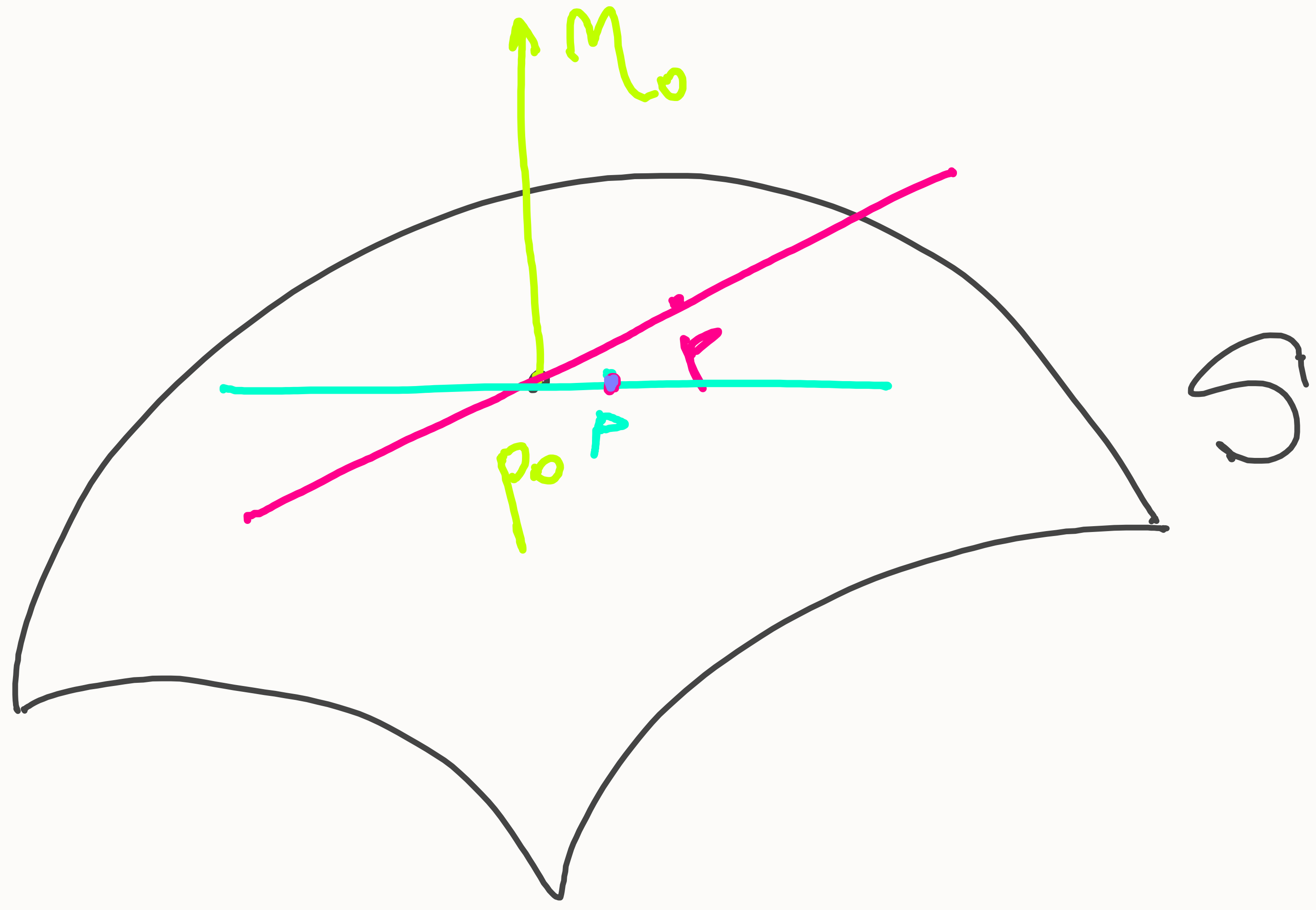
$T(u,v) = (\cos(v)(1 + \cos(v/2)u),\ \mathrm{sen}(v)(1 + \cos(v/2)u),$

$\mathrm{sen}(v/2)u)$.

Definición: Sea S una sup. en $\mathbb{R}^3$, $p_0 \in S$ y Π_0 un plano que pasa por p_0. Sea η_0 vector de norma 1 perpendicular a Π_0 (normal).
Decimos que Π_0 es el plano tangente a S en p_0 si la recta que pasa por p_0 y $p \in S$ tiende a ser perpendicular a η_0 cuando $p \to p_0$.

Esto es, si

$$\left\langle \frac{p_0 - p}{\|p_0 - p\|}, \eta_0 \right\rangle \xrightarrow[p \to p_0,\ p \in S]{} 0$$



Pregunta: ¿qué nos garantiza que hay plano tang?

Teorema:
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Si existe una parametrización $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de S inyectiva, diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$ / $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ no son paralelos y son no nulos, entonces el plano Π_0 que pasa por $p_0 = T(u_0, v_0)$ determinado por estos dos vectores es tangente a S en p_0.

Recordar: $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\Rightarrow T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

En las condiciones del teorema, se puede tomar

$$n_0 = \frac{T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}{\|T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)\|}.$$

$\boxed{\text{Nota}}$: dem del Teorema en el apunte (pag 38).

Definición: Una superficie S es **suave** si tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta $L(P)$ perpendicular al plano tang. en $p \in S$ varía con continuidad.

Definición: Si $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización inyectiva, C^1 y tal que $T_u \times T_v \neq (0,0,0)$ $\forall (u,v) \in D$, decimos que T es una **parametrización regular**.

Proposición:
Si S tiene una parametrización regular $\Longrightarrow$ S es suave.

Dem: en el apunte (pag 39)

Ejemplo: El cono no es suave.
Veamos que no admite plano tangente en $(0,0,0)$.
Supongamos que sí y llamemos $n_0 = (a,b,c)$ a una normal.

Tomemos $p_m = \left(\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}\right) \in S \;\forall m \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_m}{\|p_m\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left\langle \frac{p_m}{\|p_m\|}, \eta_0 \right\rangle = \frac{a+c}{\sqrt{2}} = 0$$

$\Rightarrow a = -c.$

Tomando $q_m = \left(-\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}\right)$ y haciendo lo mismo obtenemos que $a = c$.

Luego, $a = c = 0$.

Finalmente, con $\left(0, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ se puede ver que $b = 0$.

Esto implica que $\eta_0 = (0,0,0)$ que es un abs $\boxtimes$

Proposición:
Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ elemental y $f: D \to \mathbb{R}$ de clase C^1.
Si $S = \text{graf}(f) \Rightarrow S$ es suave y la ecuación del plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dem: Sea $T: D \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x, y, f(x,y))$

$\Rightarrow T$ es inyectiva y como $f \in C^1$, $T \in C^1$.

Además

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad y \quad T_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq (0,0,0) \;\forall (x,y) \in D.$$

Luego, T es una param. regular de S y $\therefore S$ es suave.

El plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

es: $\langle T_x(x_0,y_0) \times T_y(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0))\rangle = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0$$

$\boxtimes$

Proposición:

Sea S una superficie dada en forma implícita esto es:

$$S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\},$$

con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ / $\nabla F(x,y,z) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y,z)$. Entonces S es suave y la ecuación del plano tang a S en (x_0,y_0,z_0) es

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Dem: Como $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ alguna coord es $\neq 0$. Sup. que $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Por el Teorema de la función implícita existe un entorno $\mathcal{U}$ de (x_0,y_0,z_0) y una función $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0,y_0) / los puntos de $S \cap \mathcal{U}$ son de la forma $(x,y,f(x,y))$ para un único $(x,y) \in D$ y $z_0 = f(x_0,y_0)$.

Entonces, $S \cap \mathcal{U}$ es suave y la ec. del plano tang a (x_0,y_0,z_0) es

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) = z.$$

Pero por el teorema de la función implícita,

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{-F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \quad y \quad f_y(x_0,y_0) = \frac{-F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$\Rightarrow$ V ☒

Ejemplos:

$\boxed{1}$. $S=\{(x,y,z): \sqrt{x^2+y^2}=z,\ z\leq 4\}$ se param. por $T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, r)$ y es C^1.

T no es regular pues no es inyectiva:

. $T(r,0)=T(r,2\pi)$ $\forall r\in[0,4]$.

. $(0,0,0)=T(0,\theta)$ $\forall\theta\in[0,2\pi]$.

Además $T_r=(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$

$T_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$

$\Rightarrow T_r\times T_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\text{sen}\,\theta, r)$ y $\therefore$

$$\frac{T_r\times T_\theta}{\|T_r\times T_\theta\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\text{sen}\,\theta, 1).$$

Si llamamos $\eta(p)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta,-\text{sen}\,\theta,1)$ con $p=T(r,\theta)$ y hacemos $p\to(0,0,0)$ vemos que $\eta(p)$ no tiene límite.

Esto es pues $p\to(0,0,0)$ si $r\to0$ y θ fijo y $\eta(p)$ no depende de r. Luego, S no es suave.

. Obs: Nosotros vimos esto mismo de otra manera.

$\boxed{2}$ Paraboloide.

$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r^2)$. Esta param. no es inyectiva y $\therefore$ T no es regular.

Sin embargo S es suave.

Miramos los versores normales:

$$\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{1+4r^2}} \cdot (-2r\cos\theta, -2r\,\mathrm{sen}\,\theta, 1)$$

$p = T(r,\theta) \neq (0,0,0)$

$\downarrow$ $p \to (0,0,0)$ $(r \to 0)$

$(0,0,1)$

$\Rightarrow$ varía con continuidad $\therefore$ es suave.

- Otra forma de ver esto:

$f(x,y) = x^2+y^2$ y $(x,y) \in D = \overline{B}_2(0,0)$

$\Rightarrow$ f es $\mathcal{C}^1$ y $\therefore$ $T(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ es una param. regular de S y entonces S es suave.