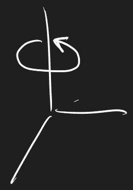
Práctica 2 - Clase 3

Sep 28.

Superficie de Revolución.

ver notas.



$$T \begin{cases} x = \alpha(t) \cdot \cos(\theta) \\ y = \alpha(t) \cdot \sin(\theta) \\ z = \beta(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in [a,b] = \mathrm{dom}(\sigma) \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

Supongamos que σ es regular $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $T(t, \theta)$ es inyectiva en $[a,b] \times [0, 2\pi)$

2) T es $\mathcal{C}^1$

Calculemos $T_t \times T_\theta$

$$T_t = (\ldots$$

$$T_\theta = (\ldots$$

$$\Rightarrow T_t \times T_\theta = (\ldots, \ldots, \ldots)$$

$$\|T_t \times T_\theta\| = |\alpha(t)| \cdot \|\sigma'(t)\|$$

$$\Rightarrow \|T_t \times T_\theta\| \neq 0 \iff \alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

Se gira la curva $f(x) = z$, $x \in [a,b]$

alrededor del eje z

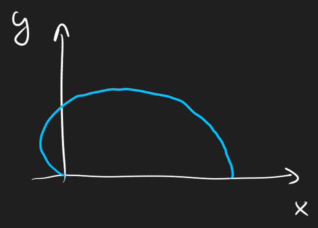
$\Rightarrow \sigma(t) = (t, f(t)) \qquad t \in [a,b]$

y así

$$T(t,\theta) = (\overbrace{t}^{\alpha(t)} \cdot \cos\theta, t \sin\theta, \overbrace{f(t)}^{\beta(t)})$$

Ejemplo :

Sea $\mathcal{C}$ el cardioide $r = 1+\cos\theta$ con $\theta \in [0,\pi]$

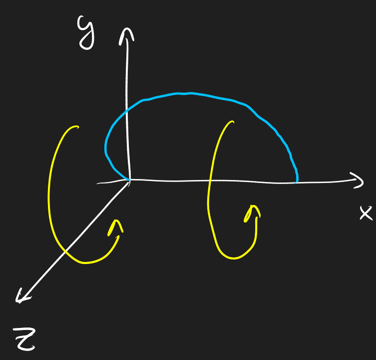


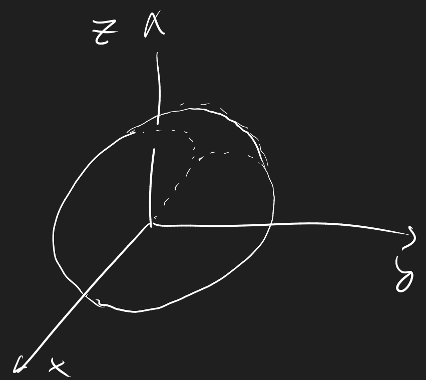
1) Parametrizamos en plano xy

$$\sigma(\theta) : \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta = (1+\cos\theta) \cdot \cos\theta = \alpha(\theta) \\ y = r \cdot \sin\theta = (1+\cos\theta) \cdot \sin\theta = \beta(\theta) \end{cases}$$

$\theta \in [0,\pi]$

2) Parametrizamos el giro





$x = \alpha(\theta)$

$y = \beta(\theta) \cdot \cos\varphi$

$z = \beta(\theta) \cdot \sin\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$

Flujo:

- $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie
- $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S que orienta S

el campo normal que induce T $\left(\dfrac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}\right)$ orienta S

Pregunta tiny: orienta "A" S? ó orienta S?

- $F(x,y,z)$ un campo vectorial contínuo def. en S.

$\Rightarrow$ El flujo de F a través de S es

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S \langle F, \eta \rangle \, dS$$

Para calcularlo:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v \rangle \, du\, dv.$$

Ejemplo 1:

Sea $F(x,y,z) = (0, 0, 4 - x^2 - y^2)$

y S la superficie dada por

$$S := \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

orientada de manera tal que en

$P_0 = (1, 1, 0) \in S$

la normal sea

$$n_0 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Hallar el flujo de F a través de S

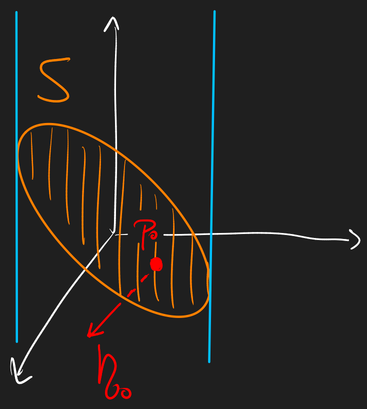
$$\iint_S F \cdot dS$$

Solución

Graficamos

$x^2 + y^2 \leq 4 \leftarrow$ cilindro

$y + z = 1 \leftarrow$ plano



Parametrizamos S
(usamos polares)

$$T \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = 1 - r \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 2] \end{array}$$

- T es inyectiva en $[0, 2] \times [0, 2\pi)$
- T es C^1

$$T_r = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ -\sin\theta)$$

$$T_\theta = (-r\cdot\sin\theta,\ r\cdot\cos\theta,\ -r\cdot\cos\theta)$$

$$\underbrace{T_r \times T_\theta = (0,\ r,\ r)}$$

T invierte la orientación!

pues con

$$P_0 = T\Big(\underbrace{\tfrac{2}{\sqrt2}}_{r},\ \underbrace{\tfrac{\pi}{4}}_{\theta}\Big) = (1, 1, 0)$$

$$T_r \times T_\theta = \left(0,\ \tfrac{2}{\sqrt2},\ \tfrac{2}{\sqrt2}\right) \nearrow$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot dS =$$

T invierte!

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \big\langle F(\overbrace{r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ 1-r\cdot\operatorname{sen}\theta}^{T(r,\theta)}),\ (0, r, r)\big\rangle\, dr\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \big\langle (0,\ 0,\ 4-r^2\cdot\cos^2\theta - r^2\cdot\sin^2\theta), (0, r, r)\big\rangle\, dr\, d\theta$$

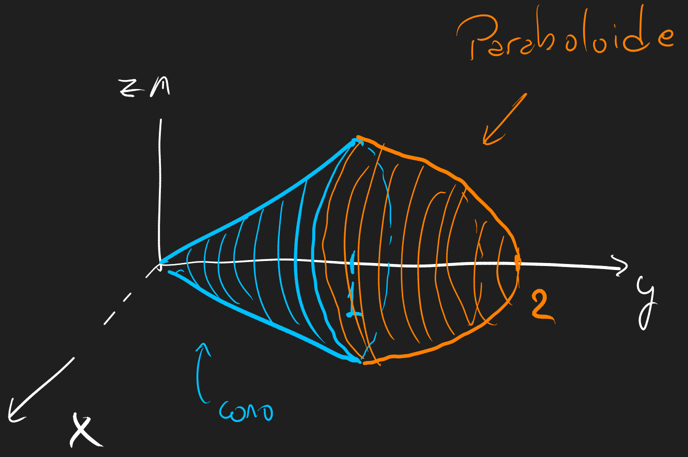
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (4-r^2)\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= -\iint_0^2 4r - r^3\, dr\, d\theta = -(16\pi - 8\pi) = -8\pi \,/\!/$$

Ejemplo 2:

Sea $S_1: \begin{cases} y^2 = z^2 + x^2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$S_2: \begin{cases} y = 2 - x^2 - z^2 \\ y \geq 1 \end{cases}$



Consideramos $S = S_1 \cup S_2$

Dado

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

calcular el flujo saliente a través de S

$\Downarrow$

S con normal exterior

normal exterior por la dirección de F? si F fuera $F(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ sería normal interior para que el flujo sea saliente?

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_{S_1} F \cdot ds + \iint_{S_2} F \cdot ds$$

con S_1 y S_2 orientados con normal exterior.

Parametrizamos S_1

$$T(r,\theta) = (r.\cos\theta, r, r.\sin\theta)$$

$$T_r = (\cos\theta, 1, \sin\theta)$$

$$T_\theta = (-r.\sin\theta, 0, r.\cos\theta)$$

$$T_r \times T_\theta = (r\cos\theta,\ -r,\ r\sin\theta)$$

$$P_0 \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\eta_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

no invierte !

$$\iint_{S_1} F\cdot dS \overset{+}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \langle F(T(r,\theta)),\ T_r \times T_\theta \rangle \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 - r^2 \, dr\, d\theta = 0$$

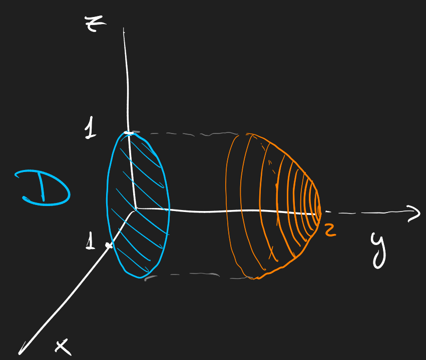
lo cual es lógico pues el campo "es paralelo" a la superficie de ese cono (no lo cruza)

Parametrizamos S_2:

(usamos gráfico)

$$T(x,z) = (x,\ 2 - x^2 - z^2,\ z)$$

$$D:\ x^2 + z^2 \leq 1$$



$$T_x = (1,\ -2x,\ 0)$$

$$T_z = (0,\ -2z,\ 1)$$

$$\Rightarrow T_x \times T_z = (-2x,\ -1,\ -2z)$$

$$T(0,0) = (0, 2, 0)$$

$$T_x \times T_z = (0, -1, 0)$$

apunta hacia adentro

$$\iint_{S_2} F \cdot dS = \langle F(T(x,z)), T_x \times T_z \rangle$$

$$= - \iint_D -2x^2 - 2 + x^2 + z^2 - 2z^2 \, dx\, dz$$

$$= - \iint_D -2 - x^2 - z^2 \, dx\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + r^2) \cdot r \, dr\, d\theta = 2\pi \left(r^2 + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

Polares

$x = r \cos\theta$

$z = r \sin\theta$

$$= \frac{5}{2} \pi$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot dS = \frac{5}{2} \pi \quad (+0 \text{ del cono})$$