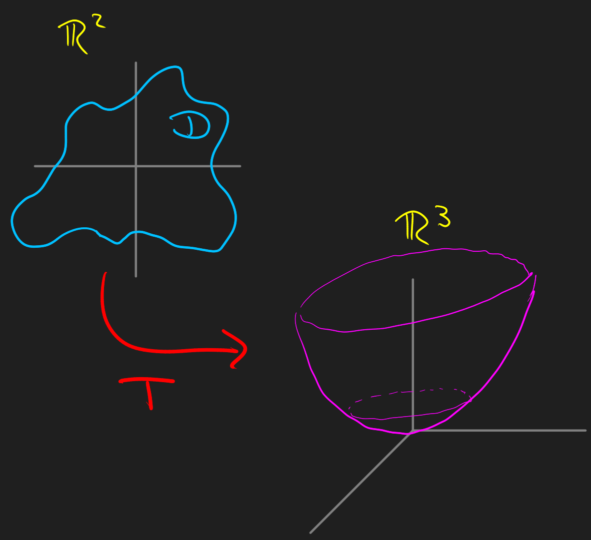
Teórica 4 — Superficies

Vicky

- Mismo camino que con curvas, pero con superficies.

Superficies Parametrizadas.



Definición:

Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos que puede describirse como la imagen de una función continua

$$T : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{D} \to \mathbb{R}^3,$$

donde

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental

A la función T la llamamos

"Parametrización de la superficie S"

Ejemplos :

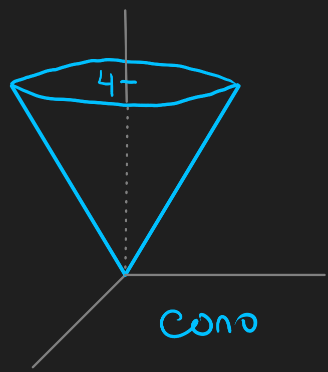
$z^2 = x^2 + y^2 \quad 0 \leq z \leq 4$

1. $S = \left\{ (x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ z \leq 4 \right\}$

$$T : \overbrace{[0,4] \times [0,2\pi]}^{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(r,\theta) = (r.\cos\theta \ , \ r.\sin\theta \ , \ r)$$

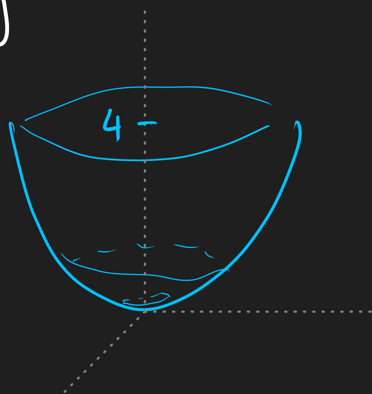
parametrización contínua de S ✓



$\Rightarrow S$ es una superficie.

2. $S = \left\{ (x,y,z) : z = x^2 + y^2 \ , \ z \leq 4 \right\}$

paraboloide



$$T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$T : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(r,\theta) = (r.\cos\theta \ , r.\sin\theta \ , r^2)$$

Parametrización contínua de S ✓

Generalizamos un poco:

3. $S = \left\{ (x,y,z) : (x,y) \in D \ , \ z = f(x,y) \right.$

con $f : D \to \mathbb{R}$ contínua ,

y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ región elemental $\left. \right\}$

$S = \mathrm{graf}(f)$

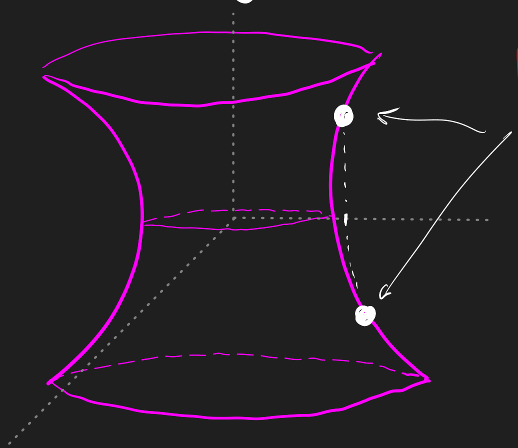
$$\Rightarrow T(x,y) = (x,\ y,\ f(x,y))$$

es una parametrizacion de S

con $T: D \to S$

4. Paraboloide de una hoja

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ |z| \leq 1\}$$



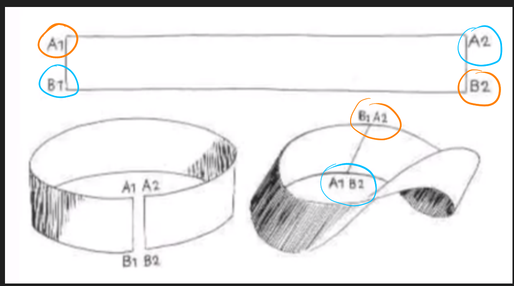
No es gráfico de una función!

$$T: [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = \left(\cos u \cdot \sqrt{v^2+1},\ \sin u \cdot \sqrt{v^2+1},\ v\right)$$

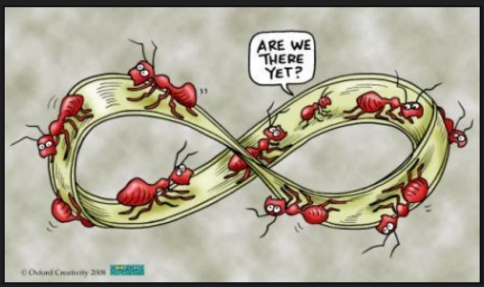
5. Hito en la carrera

Cinta de Moebius (o Möbius)

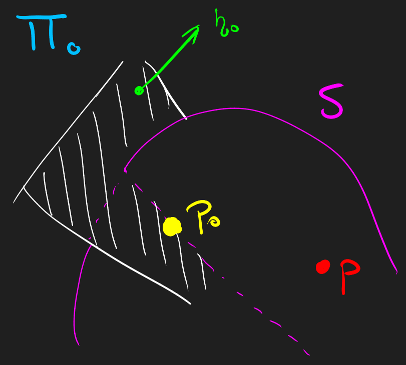


$$T: [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = \left(\cos v \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{v}{2}\right) \cdot u\right),\ \sin v \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{v}{2}\right) \cdot u\right),\ \sin\left(\frac{v}{2}\right) \cdot u\right)$$



Definición



Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$,

$p_0 \in S$

y

Π_0 un plano que pasa por p_0

Sea η_0 un vector de norma 1

perpendicular a Π_0

(normal)

Decimos que

Π_0 es el plano tangente a S en p_0

si la recta que pasa por

p_0 y $p \in S$ otro p

tiende a ser

perpendicular a η_0

cuando

$p \longrightarrow p_0$

Rcdo

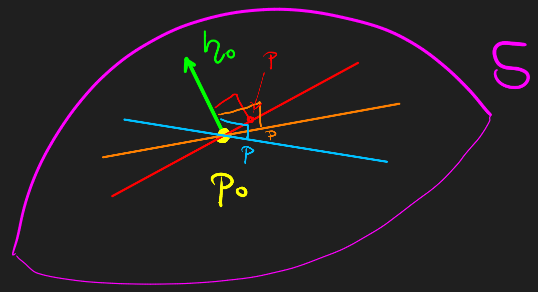
$\langle\, ,\rangle = \cos\alpha \cdot \underbrace{\| \quad \|}_{=1}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Esto es, si

$$\left\langle \frac{p_0 - p}{\|p_0 - p\|}, \eta_0 \right\rangle \xrightarrow[p \to p_0,\ p \in S]{} 0$$

Dirección de la recta que une p_0 con p



Teorema

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie

Si existe una parametrización de S

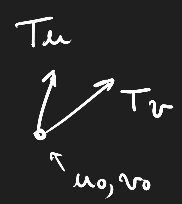
$$T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

que sea

inyectiva,

diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$ /

$$\left.\begin{matrix} T_u(u_0, v_0), \\ T_v(u_0, v_0) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} T_u = \frac{\partial}{\partial u} T \\ T_v = \frac{\partial}{\partial v} T \end{matrix}$$



No son paralelos

y son No nulos

entonces,

el plano Π_0 que pasa por

$$p_0 = T(u, v)$$

$T_u(u_0, v_0)$
$T_v(u_0, v_0)$

determinado por estos dos vectores

es tangente a S en p_0.

Recordar:

$$T(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right)$$

$$\Rightarrow T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

En las condiciones del Teorema, se puede tomar:

$$n_0 = \frac{T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}{\| T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0) \|}$$

prod vectorial

Demo de Teo:

Pág 38 del apunte

Más definiciones

(que son "lo mismo" que en curvas)

Definición

Una superficie S es suave si tiene plano tangente en todos sus puntos y la recta $L(p)$ perpendicular al plano tangente en $p \in S$ varía con continuidad.

Definición

Si $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización inyectiva, C^1 y tal que

$T_u \times T_v \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in D,$

decimos que

T es una Parametrización Regular

Proposición

Si S tiene una Parametrización Regular

$\Rightarrow S$ es suave.

Demo: pág. 39

Ejemplo:

El cono no es suave ("el cono pincha")

Veamos que no admite plano tg. en $(0,0,0)$

Supongamos que sí, y llamemos $n_0 = (a,b,c)$ a una normal.

Tomemos $p_n = \left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right) \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

puntos en el cono

pues $\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

$$\frac{p_n}{\|p_n\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

perpendicular

$$\Rightarrow \left\langle \frac{p_n}{\|p_n\|}, \eta_0 \right\rangle = \frac{a+c}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow a = -c$$

Tomando $q_n = \left(-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right)$ y haciendo lo mismo

obtenemos que

$$\Rightarrow a = c$$

Luego, por los dos resultados anteriores

$$a = c = 0$$

Finalmente con

$$t_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

se puede ver que

$$b = 0$$

era normal!

Esto implica que $\eta_0 = (0,0,0)$, que es absurdo!

(tenía norma $= 1$)

El absurdo provino de suponer plano tg. en el origen
$\therefore$ no lo hay.

Proposición

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ elemental

y $f : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

Si
$$S = \text{graf}(f)$$
$\Rightarrow$ S es suave

y la eq. del plano tg. a S en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Dem :

Sea $T : D \to \mathbb{R}^3$
$$T(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$\Rightarrow$ T es inyectiva ,

y como $f \in C^1$,
$$T \in C^1$$

Además

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

y

$$T_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

pues tengo un 1

$$\Rightarrow T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq (0,0,0)$$

$$\forall (x,y) \in D$$

Luego,

T es una parametrización regular de S

y $\therefore$ S es suave. ✓

Falta armar el plano tangente

El plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es:

$$\left\langle \underbrace{T_x(x_0,y_0) \times T_y(x_0,y_0)}_{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}, (x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0$$

eq del plano tangente

▨

Proposición

Sea S una superficie dada en forma implícita, esto es:

$$S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\},$$

con

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1

tal que

$\nabla F(x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z)$

Entonces

S es suave

y la eq. del plano tg. a S en (x_0, y_0, z_0) es:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) +$$
$$F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) +$$
$$F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Dice:

Si me dan S de forma implícita y cumple C^1 y $\nabla \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow S$ es suave

- Superficie de nivel de F, con una F buena.
  - ↳ Superficie suave

Dem

Dem: Como $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ alguna coord es $\neq 0$. Sup. que $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Por el Teorema de la función implícita existe un entorno $\mathcal{U}$ de (x_0,y_0,z_0) y una función $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0,y_0) / los puntos de $S \cap \mathcal{U}$ son de la forma $(x,y,f(x,y))$ para un único $(x,y) \in D$ y $\underbrace{z_0 = f(x_0,y_0)}$.

despeje

Entonces, $S \cap \mathcal{U}$ es suave y la ec. del plano tang a (x_0,y_0,z_0) es

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) = z.$$

Pero por el teorema de la función implícita,

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{-F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \quad y \quad f_y(x_0,y_0) = \frac{-F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$\Rightarrow$ V $\boxtimes$

Ejemplos

cono

1. $S = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = z,\ z \leq 4\}$

se parametriza por

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta,\ r)$$

y es C^1

T no es regular pues no es inyectiva:

- $T(r,0) = T(r,2\pi) \quad \forall r \in [0,4]$

- $(0,0,0) = T(0,\theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

Además!

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \neq (0,0,0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, r \cdot \cos\theta, 0) \neq (0,0,0) \text{ con } r \neq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_r \times T_\theta}_{\text{"normal" que inducen}} = (-r \cdot \cos\theta, -r \cdot \sin\theta, r)$$

y ...

normal

$$\frac{T_r \times T_\theta}{\| T_r \times T_\theta \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$

estas normales solo dependen del ángulo

Si llamamos

$$\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$

con $p = T(r, \theta)$

y hacemos

$$p \longrightarrow (0,0,0)$$

vemos que

$\eta(p)$ <u>no</u> tiene límite.

campos normales / de vectores de norma 1.

Esto es pues, para que $p \to (0,0,0)$

si $r \to 0$ y θ es fijo

$\eta(p)$ NO depende de r!

- $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$

$\eta(p)$ vale siempre lo mismo.

→ Ahora si me acerco con otro p (otro θ)

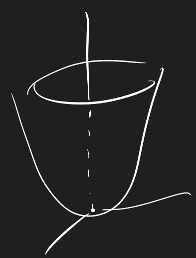
$\eta(p)$ vale otra cosa (también constante)

Luego, S no es suave.

Obs: Anteriormente vimos esto en términos de parametrización

2. Paraboloide

$T(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta, r^2)$



Esta param. NO es inyectiva

y ∴ NO es regular

Sin embargo, S es suave. Veamoslo:

- Calculo derivadas parciales

$T_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2r)$

$T_\theta(r,\theta) = (-r\cdot\sin\theta, r\cdot\cos\theta, 0)$

$$T_r \times T_\theta = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r.\sin\theta & r.\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i \,.\, \det\begin{vmatrix} \sin\theta & 2r \\ -r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} - j.\begin{vmatrix} \cos\theta & 2r \\ -r.\sin\theta & 0 \end{vmatrix} + k.\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r.\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= -i.2r^2\cos\theta - j.2r^2\sin\theta + k.\underbrace{(r.\cos^2\theta + r.\sin^2\theta)}_{=r}$$

$$T_r \times T_\theta = (-2r^2.\cos\theta, -2r^2.\sin\theta, r)$$

$$\|T_r \times T_\theta\| = (4r^4\cos^2\theta + 4r^4.\sin^2\theta + r^2)^{1/2} = (4r^4 + r^2)^{1/2}$$

$$= (r^2(4r^2+1))^{1/2}$$

$$\overset{r>0}{=} r.(4r^2+1)^{1/2}$$

$$\frac{T_r \times T_\theta}{\|T_r \times T_\theta\|} = \frac{1}{r.(4r^2+1)^{1/2}}(-2r^2.\cos\theta, -2r^2.\sin\theta, r)$$

$$= \frac{1}{(4r^2+1)^{1/2}}.(-2r.\cos\theta, -2r.\sin\theta, 1)$$

- Miramos los versores normales:

$$\eta(p) = \frac{1}{(4r^2+1)^{1/2}}.(-2r.\cos\theta, -2r.\sin\theta, 1)$$

$p = T(r,\theta) \neq (0,0,0)$

Si $p \to (0,0,0)$ $\quad$ (con $r \to 0$)

$\Rightarrow \eta(p) \to (0,0,1)$

estos versores tienen límite y se mueven con continuidad.

$\Rightarrow$ Varía con continuidad $\therefore$ es suave //

Otra forma de ver esto:

Busco otra parametrización que sí es regular

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad (x,y) \in D = \overline{B}_2(0,0)$$

$\Rightarrow f$ es $\mathcal{C}^1$

y $\therefore$ $T(x,y) = (x,\ y,\ x^2 + y^2)$

es una parametrización regular de S

y entonces:

S es suave. //