Ejercicio 10. *Campo gravitatorio.* Consideremos un cuerpo material con densidad $\varrho(x,y,z)$ que ocupa una región acotada $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{r}$ un punto de $\mathbb{R}^3$. A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio $E(\mathbf{r})$ que aparece en el punto $\mathbf{r}$ está dado por la integral a valores vectoriales

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\,\varrho(\mathbf{r}')\,dV(\mathbf{r}'),$$

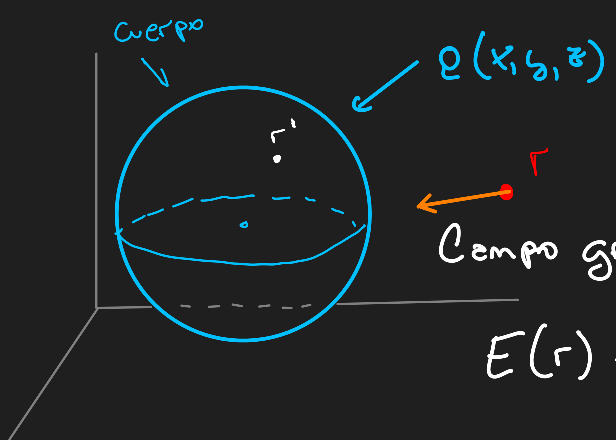
pues es $\sim \frac{r}{\|r\|^3}$

donde G es una constante universal. Notar que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \to \infty$.

A medida que $\|\mathbf{r}\| \to \infty$, la dirección del vector **r-r'** con $\mathbf{r}' \in \Omega$ se parece más y más a la dirección de $\mathbf{r}$. Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E_0(\mathbf{r}) = -MG\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\|\to\infty} \|\mathbf{r}\|^2 \big\|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\big\| = 0.$$



Depende de la estructura y densidad del cuerpo (por eso integramos)

Campo gravitatorio $E(r)$

$$E(r) = -G \cdot \iint_\Omega \frac{r-r'}{\|r-r'\|^3}\,\varrho(r')\,dV(r')$$

región del cuerpo

- Notar que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \to \infty$.

↳ La norma del campo vectorial es aprox. inversamente prop. al □ de la distancia?

* Cuando $\|r\| \to \infty$, las otras variables son despreciables, y por eso podemos decir que

Cuando $\|r\| \to \infty$

$$\|E(r)\| \approx \frac{1}{\|r\|^2}$$

Toda la masa en un único punto, donde $M = \varrho \cdot V$

y

$$E(r) \approx E_0(r) = -M \cdot G \cdot \frac{r}{\|r\|^3}$$

Quiero probar

$$\lim_{\|r\| \to \infty} \|r\|^2 \| E(r) - E_0(r) \| = 0$$

necesito que vaya a ∞ más rápido que $\frac{1}{\|r\|^2}$, ej: $\frac{1}{\|r\|^3}$ para que sea 0.

$$\lim_{\substack{\|r\| \to \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty}} \|r\|^2 \cdot \left\| -G \iint_\Omega \underbrace{\frac{r-r'}{\|r-r'\|^3}}_{\left\|\frac{r-r'}{\|r-r'\|}\right\| = 1} \rho(r') \, dV(r') + M \cdot G \cdot \frac{r}{\|r\|^3} \right\|$$

De Vicky:

Sabemos que

$$r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$$

r': punto dentro de Ω

$$E[r] = \left(-G \iint_\Omega \frac{r_1 - r_1'}{\|r_1 - r_1'\|} \rho(r') \, dV(r'), \quad \text{''} \ \frac{r_2 - r_2'}{\|r_2 - r_2'\|} \ \text{''}, \quad \text{''} \ \frac{r_3 - r_3'}{\|r_3 - r_3'\|} \ \text{''} \right)$$

Masa $M = \iint_\Omega \rho$ ← densidad

← volumen

$$\|E(r) - E(r_0)\| =$$

$$= \left\| -G \iint_\Omega \frac{r-r'}{\|r-r'\|} \cdot \rho(r') \cdot dV(r') + M \cdot G \cdot \frac{r}{\|r\|^3} \right\|$$

$$= \left\| -G \iint_{\Omega} \frac{r - r'}{\|r - r'\|} \cdot \rho(r') \cdot dV(r') + G \cdot \iint_{\Omega} \rho(r') \cdot \frac{r}{\|r\|^3} dV(r') \right\|$$

saco factor común $-G$

$$= \left\| -G \cdot \left(\iint_{\Omega} \frac{r - r'}{\|r - r'\|} \cdot \rho r' dV(r') - \iint_{\Omega} \frac{r}{\|r\|^3} \cdot \rho(r') \cdot dV(r') \right) \right\|$$

$$= \left\| -G \left(\iint_{\Omega} \left(\frac{r - r'}{\|r - r'\|} - \frac{r}{\|r\|^3} \right) \cdot \rho(r') \, dV(r') \right) \right\|$$

entra norma a la integral

?

$$\leq G \cdot \iint_{\Omega} \left\| \frac{r - r'}{\|r - r'\|^3} - \frac{r}{\|r\|^3} \right\| \cdot |\rho(r')| \, dV(r)$$

Volviendo, teníamos

$$\|r\|^2 \cdot \| E(r) - E(r_0) \|$$

$$= \|r\|^2 \cdot \left\| \frac{r - r'}{\|r - r'\|^3} - \frac{r}{\|r\|^3} \right\| =$$

$$= \left\| \|r\|^2 \cdot \frac{r - r'}{\| \quad \|^3} - \|r\|^2 \cdot \frac{r}{\|r\|^3} \right\| =$$

$$= \left\| \|r\|^2 \cdot \frac{r - r'}{\| \quad \|^3} - \frac{r}{\|r\|} \right\|$$

$$= \left\| \frac{r - r'}{\|r - r'\|} \cdot \frac{1}{C(r)} - \frac{r}{\|r\|} \right\|$$

armo una cajita

$$C(r) = \frac{\|r - r'\|^2}{\|r\|^2}$$

$$C(r) \xrightarrow{\|r\| \to \infty} 1$$

(pues r' es finito y despreciable)