Análisis 2 / Mate. 3

31 Agosto 2020

Dos partes

- Integración en curvas y superficies en $\mathbb{R}^N$
- Ecuaciones Diferenciales

Queremos integrar en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que resultan "objetos geométricos".

Def: $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función

$$\sigma : [a,b] \to C$$

contínua y suryectiva (sobreyectiva)
ver wiki ...

Ej: Si $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$

entonces C es una curva :

La función

$$\sigma : [0, 2\pi] \to C$$

$$\sigma(t) = (\cos t \, , \, \operatorname{sen} t)$$

es contínua y suryectiva

Para nuestra definición

Toda curva es un conjunto acotado (está contenido en una bola de radio suficientemente grande)

Ej:

$$\sigma : [0, 2\pi] \to C \ , \ \sigma(t) = (\cos(3t), \operatorname{sen}(3t), t)$$

Puedo parametrizar de varias formas

$t := t/3$

$$\tilde{\sigma} : [0, 6\pi] \to C \ , \ \tilde{\sigma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t/3)$$

$t := t^2$

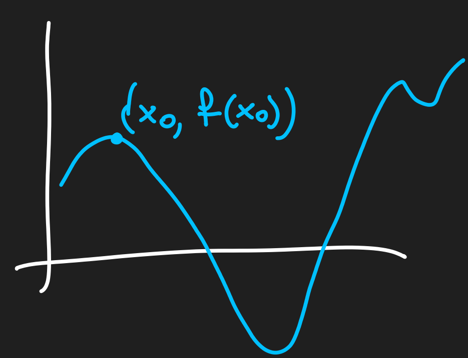
$$\hat{\sigma} : [0, \sqrt{2\pi}] \to C \ , \ \tilde{\sigma}(t) = (\cos(3t^2), \operatorname{sen}(3t^2), t^2)$$

Queremos integrar sobre tales curvas

Función continua como curva

$$\sigma : [a,b] \to G_f$$

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$



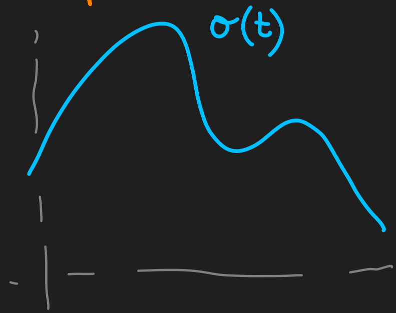
Curvas

Simple, abierta: si **no** se corta

es decir, si admite una parametrización

$$\sigma : [a,b] \to C$$

que es **inyectiva**



Simple, cerrada: si admite ...

$$\sigma : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n$$

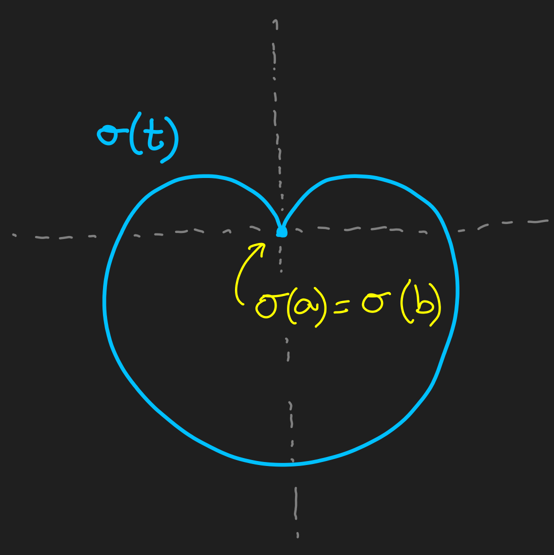
que es inyectiva en

$$[a,b)$$

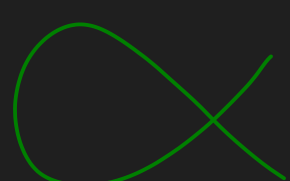
con

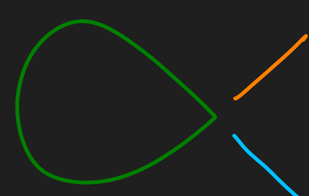
$$\sigma(a) = \sigma(b)$$

La curva une principio con fin



Una curva puede no ser abierta ni cerrada





"Toda curva puede escribirse como unión finita de curvas abiertas y/o cerradas"

que se intersecan (2 a 2) en a lo sumo 1 punto

Concatenar 2 ó más curvas

$\sigma_1 : [a,b] \to C_1$

$\sigma_2 : [b,c] \to C_2$

tales que $\sigma_1(b) = \sigma_2(b)$

entonces $C = C_1 \cup C_2$

está definida por $\sigma(t) : [a,c] \to C$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & \text{si } t \in [a,b) \\ \sigma_2(t) & \text{si } t \in [b,c] \end{cases}$$

Reparametrización

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$h : [a,b] \to [c,d]$ una biyección continua

Si definimos

$\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$

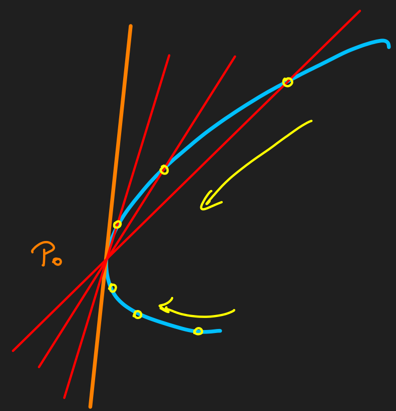
por $\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(h^{-1}(\tau))$

entonces $\tilde{\sigma}$ es una "reparametrización de C"

Suavidad

La recta tangente en c/punto

Def de recta tangente



Proposición

Si $C \subset \mathbb{R}^3$ es una curva que admite una parametrización

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ inyectiva,

diferenciable en

$t_0 \in [a,b]$

tal que

$$\sigma'(t_0) := (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0,0,0)$$

entonces

C tiene recta tangente en $P_0 = \sigma(t_0)$

con dirección $\sigma'(t_0)$

Recta tangente: $L_{P_0} \equiv \lambda \sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$

Parametrización regular

Definición: Una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ de clase C^1 de una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ con $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ para todo $t \in [a,b]$ tal que:

cerrado

1. σ es inyectiva en $[a,b]$, o

misma tangente

se une — se une — "sin picos"

abierto

2. σ es inyectiva en $[a,b)$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$,

se denomina una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Una curva C se dice suave si admite una parametrización regular.

Ej: Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por

$$\sigma : [-1,1] \to C$$

$$\sigma(t) = (t, |t|)$$

es claro que σ no es regular en $t=0$

Sin embargo, esto no implica que C no sea regular!

Podría existir OTRA curva que sea regular.
(spoiler: no existe)

Ejemplo 2:

$$\sigma : [-1,1] \to C$$

$$\sigma(t) = (t, t^2)$$

σ es regular (admite parametrización regular)

otra parametrización

$$\tilde{\sigma} : [-1,1] \to C$$

$$\tilde{\sigma}(t) = (sg(t)\sqrt{|t|}, |t|)$$

$\tilde{\sigma}$ no es regular

¿Depende la integración de las distintas parametrizaciones?

Definición: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva abierta, simple, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección C^1 con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea

$$\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(h^{-1}(\tau)).$$

Observamos que $\tilde{\sigma}$ es continua, suryectiva, de clase C^1 con

$$\tilde{\sigma}'(t) = \sigma'(h(t))\, h'(t) \neq (0, 0, 0)$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, es una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de $\mathcal{C}$.

Es claro que

$$h(c) = a \quad y \quad h(d) = b$$

ó

$$h(c) = b \quad y \quad h(d) = a$$

Así

$$\tilde{\sigma}(c) = \sigma(a) \quad y \quad \tilde{\sigma}(d) = \sigma(b)$$

Preserva orientación

preserva (ptos iniciales)

ó

Invierte orientación

$$\tilde{\sigma}(c) = \sigma(b) \quad y \quad \tilde{\sigma}(d) = \sigma(a)$$

invierte (ptos inicial/final)

Ejemplo : Trayectoria opuesta

Si $\sigma : [a,b] \to C$ es una param. de clase C^1 de una curva C la parametrización

compongo con h^{-1}

$$\sigma_{op} : [a,b] \to C$$

$$\sigma_{op}(t) = \sigma(a+b-t)$$

Se dice la trayectoria opuesta a σ, que invierte la orientación.

- Recorre la curva C en el sentido contrario al usual.

Velocidad Canónica

$$\tilde{\sigma} : [0,1] \to C$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a+(b-a)t)$$

Preserva orientación.

Ejemplo 3 :

Si $\sigma : [0,2\pi] \to C$,

$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una parametrización de la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$

$\tilde{\sigma} : [0,\pi] \to C$,

$\tilde{\sigma}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ es una reparametrización de C

Sin embargo

$$\rho : [0, 4\pi] \to C,$$

$$\rho(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

pasa 2 veces por todo C

no es una reparametrización. $\blacksquare$