Ejercicio 1

Dada la siguiente superficie en coordenadas cilíndricas, $z = r^2 \cos(2\theta)$, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y construir el plano tangente en el punto $(2, 0, 4)$

Solución:

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$z = r^2 \cos 2\theta$$

Recordemos $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$a = b = \theta$$

$$z = r^2 (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$z = r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\boxed{z = x^2 - y^2}$$ (Paraboloide Hiperbolico)

$\phi(r,\theta) = \left(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ r^2\cos 2\theta\right)$

$\phi: [0,+\infty) \times [0,2\pi)$

$P = (2,0,4)$

$P = \phi(2,0)$

Propiedad: S una superficie. Si existe una param. $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, diferen. $(u_0,v_0) \in D$ tal que $\phi_u(u_0,v_0) \neq 0$, $\phi_v(u_0,v_0) \neq 0$ y $(\phi_u \times \phi_v)(u_0,v_0) \neq 0$. Entonces en $P = \phi(u_0,v_0)$ el vector $(\phi_u \times \phi_v)(u_0,v_0)$ es normal a S en P y la ecuación del plano tg. es.

$$\Pi_P: \quad (\phi_u \times \phi_v)(u_0,v_0) \cdot (X - P) = 0$$

ϕ es diferenciable en $(2,0)$

$$\phi_r = (\cos\theta, \ \text{sen}\,\theta, \ 2r\cos 2\theta)$$

$$\phi_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, \ r\cos\theta, \ -2r^2\,\text{sen}\,2\theta)$$

$$\phi_r(2,0) = (1,0,4) \neq 0$$

$$\phi_\theta(2,0) = (0,2,0) \neq 0$$

$$\phi_r \times \phi_\theta = \Big(-2r^2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,2\theta - 2r^2\cos\theta\cos 2\theta, \\ -2r^2\,\text{sen}\,\theta\cos 2\theta + 2r^2\cos\theta\,\text{sen}\,2\theta, \ r\Big)$$

$$(\phi_r \times \phi_\theta)(2,0) = (-8,0,2)$$

$$\boxed{\Pi_P : \ (-8,0,2)\cdot\big[(x,y,z)-(2,0,4)\big] = 0}$$

Ejercicio 2

Sea S la esfera de centro $(1,2,0)$ y radio $a>0$. Verificar que S es suave y calcular su plano tangente en punto genérico (x_0, y_0, z_0).

Solución:

$$S = \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = a^2\}$$

S está dada en forma implícita.

$$S = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0\}$$

donde $F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - a^2$

Propiedad. S es una superficie dada por $S = \{\bar{X} \mid F(\bar{X}) = 0\}$ con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $\nabla F(\bar{X}) \neq 0$ para todo $\bar{X} \in S$. Entonces S es suave, y la ecuación del plano tg en $\bar{X}_0$ viene dada por

$$\Pi_{\bar{X}_0} : \nabla F(\bar{X}_0) \cdot (\bar{X} - \bar{X}_0) = 0$$

F es de clase $\mathcal{C}^1$

$$\nabla F(x,y,z) = \left(2(x-1),\ 2(y-2),\ 2z \right)$$

$$\nabla F(x,y,z) \neq 0 \quad \forall\ (x,y,z) \in S.$$

Entonces S es suave.

$$\bar{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\boxed{\Pi_{\bar{X}_0} : \left(2(x_0-1),\ 2(y_0-2),\ 2z_0 \right) \cdot \left((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \right) = 0}$$