Ejercicio 2) b)

Hagamos primero las cuentas estrictamente necesarias para el ejercicio. Como bonus track, más adelante podemos hablar de geometría.

Nos piden ver que:

$$\phi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \overset{\phi}{\longmapsto} \big((a+b\cos(u))\,\text{sen}(v),\ (a+b\cos(u))\cos(v),\ b\,\text{sen}(u)\big)$$

es una parametrización de la superficie dada por los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación $z^2 = b^2 - (a-\sqrt{x^2+y^2})^2$ donde $a>b$.

Para esto debemos ver las inclusiones $\text{Im}(\phi)\subseteq S$ y $S\subseteq \text{Im}(\phi)$ y entonces concluir que $\text{Im}(\phi) = S$.
Veamos primero $\text{Im}(\phi)\subseteq S$.

Sea $((a+b\cos(u))\,\text{sen}(v), (a+b\cos(u))\cos(v), b\,\text{sen}(u))$ con $u,v\in[0,2\pi]$. Queremos ver que es un punto que esté en la superficie, es decir que cumple la ecuación. Tenemos:

$$\begin{cases} x = (a+b\cos(u))\,\text{sen}(v) \\ y = (a+b\cos(u))\cos(v) \\ z = b\,\text{sen}(u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = (a+b\cos(u))^2 & (1) \\ z^2 = b^2\,\text{sen}^2(u) & (2) \end{cases}$$

luego $\underbrace{z^2}_{(2)} = b^2 - (a - \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{(1)}})^2$ queda

$$b^2\,\text{sen}^2(u) = b^2 - \left(a - \sqrt{(a+b\cos(u))^2}\right)^2$$

$b^2 \operatorname{sen}^2(u) = b^2 - \left(a - \sqrt{(a+b\cos(u))^2}\right)^2.$ (///)

observemos que como $a > b$ entonces $a + b\underbrace{\cos(u)}_{\text{entre } -1 \text{ y } 1} > 0$

luego $\sqrt{(a+b\cos(u))^2} = a + b\cos(u)$ y entonces volviendo a (///) tenemos $b^2\operatorname{sen}^2(u) = b^2 - (\cancel{a} - \cancel{a} - b\cos(u))^2$

de donde $b^2\operatorname{sen}^2(u) + b^2\cos^2(u) = b^2$, y entonces $b^2 = b^2$

con lo cual efectivamente $\operatorname{Im}(\phi) \subseteq S$.

— o —

Ahora veamos que $S \subseteq \operatorname{Im}(\phi)$. Es decir, sea (x_0, y_0, z_0) que cumple $z_0^2 = b^2 - (a - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2$ y veamos que existen $u_0, v_0 \in [0, 2\pi]$ tales que $\phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Llamando $t_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - a$ tenemos $z_0^2 = b^2 - t_0^2$

o sea $z_0^2 + t_0^2 = b^2$, es decir (t_0, z_0) está en un círculo de radio b y por tanto existe $u_0 \in [0,2\pi]$ tal que $(t_0, \underbrace{z_0}_{■}) = (b\cos(u_0), \underbrace{b\operatorname{sen}(u_0)}_{■})$.

Entonces, como $t_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - a = b\cos(u_0)$ tenemos que $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \underbrace{b\cos(u_0) + a}_{>0}$, luego (x_0, y_0) se encuentra en círculo de radio $b\cos(u_0) + a$ y por lo tanto existe $v_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $(\underbrace{x_0}_{\star}, \underbrace{y_0}_{▲}) = (\underbrace{(b\cos(u_0) + a)\cos(v_0)}_{\star}, \underbrace{(b\cos(u_0) + a)\operatorname{sen}(v_0)}_{▲})$.

De esta manera:

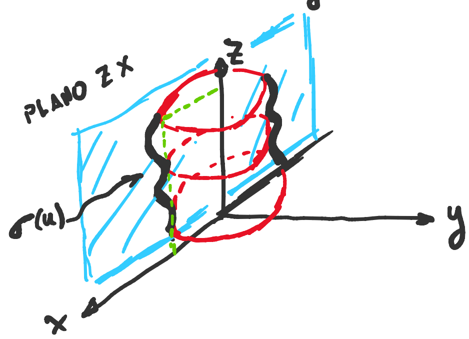
$$(u_0, v_0) \xmapsto{\phi} \left(\underbrace{(b\cos(u_0) + a)\cos(v_0)}_{\star = x_0}, \underbrace{(b\cos(u_0) + a)\operatorname{sen}(v_0)}_{▲ = y_0}, \underbrace{b\operatorname{sen}(u_0)}_{■ = z_0}\right)$$

y entonces efectivamente $\phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ como queríamos probar. Esto finaliza la demostración de que $S \subseteq \operatorname{Im}(\phi)$ y por lo tanto $S = \operatorname{Im}(\phi)$. //

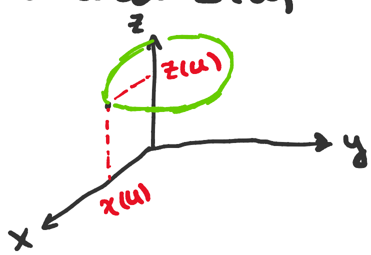
como queríamos probar. Esto finaliza la demostración de que $S \subseteq Im(\phi)$ y por lo tanto $S = Im(\phi)$. ////

BONUS TRACK (un poco sobre superficies de revolución)

Tratemos de obtener un poco de intuición geométrica.
Recordemos que si nos dan una curva parametrizada por $\sigma(u) = (x(u), z(u))$, $u \in [a,b]$, entonces la superficie de revolución alrededor del eje z es $\phi(u,v) = (x(u)\cos(v), x(u)\operatorname{sen}(v), z(u))$

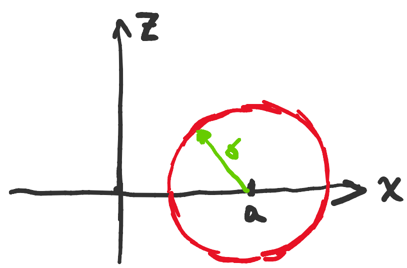


- dejando fijo un u justamente se dibuja un círculo de radio $x(u)$ a la altura $z(u)$:

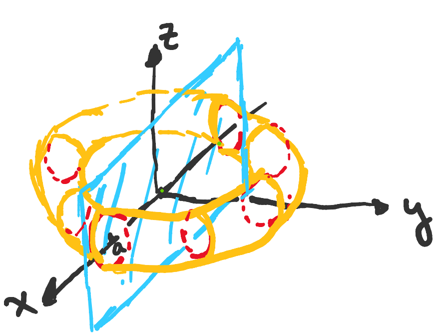


Notemos que en el caso de la ϕ dada tenemos: $\begin{cases} x(u) = a + b\cos(u) \\ z(u) = b\operatorname{sen}(u) \end{cases}$

Notemos que esto es una parametrización del círculo $(x-a)^2 + z^2 = b^2$



y giramos este círculo alrededor del eje z (aquí vemos geométricamente porque es importante que $a > b$)



y girado queda esta figura!