
ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

Segundo cuatrimestre de 2020

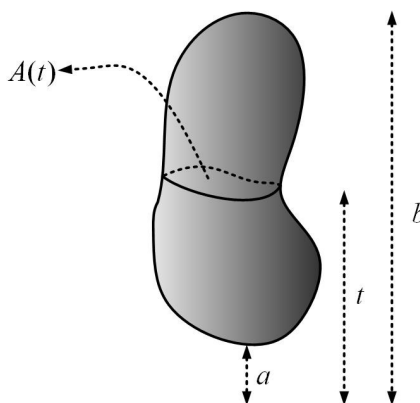
Práctica 0: Repaso de integración y cambio de variables

1. PRINCIPIO DE CAVALIERI

Considere un cuerpo que ocupa una región en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$. Entonces el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^b A(t) dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenida al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 1. Calcular el volumen de una región cilíndrica, utilizando el Principio de Cavalieri. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula *superficie de la base por altura*.

Ejercicio 2. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, utilizando el Principio de Cavalieri.

2. TEOREMA DE FUBINI

Ejercicio 3. Sea R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y \, dA$

(b) $\iint_R x \cos(xy) \, dA$

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y) \, dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y)$

(b) $F(x, y) = f(x) + g(y)$

3. DESCRIPCIÓN DE REGIONES

Ejercicio 5. Sea T el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(3, 5)$. Describirlo como una región de tipo 1, y como una de tipo 2. Hallar su área.

Ejercicio 6. Graficar cada una de las siguientes regiones dadas analíticamente, y calcular el área respectiva.

$$(a) -1 \leq x \leq 1 + y; -1 \leq y \leq 1$$

$$(b) 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

Ejercicio 7. Sea P la pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Describirla analíticamente. Hallar su volumen.

4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Ejercicio 8. *Valor medio.* Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1, 1)$, $(2, 0)$ y $(0, 1)$.

Ejercicio 9. *Masa.* Hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa ϱ es proporcional a la componente z , digamos $\varrho = \lambda z$.

Ejercicio 10. *Campo gravitatorio.* Consideremos un cuerpo material con densidad $\varrho(x, y, z)$ que ocupa una región acotada $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea \mathbf{r} un punto de \mathbb{R}^3 . A partir de las leyes de Newton, se sabe que el **vector** campo gravitatorio $E(\mathbf{r})$ que aparece en el punto \mathbf{r} está dado por la integral a valores vectoriales

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \varrho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}'),$$

donde G es una constante universal. Notar que $\|E(\mathbf{r})\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2}$ cuando $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$.

A medida que $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$, la dirección del vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ con $\mathbf{r}' \in \Omega$ se parece más y más a la dirección de \mathbf{r} . Esto hace suponer para puntos *lejanos*, el campo puede aproximarse por el campo gravitatorio que se obtiene al concentrar la masa total M en el origen: $E_0(\mathbf{r}) = -MG \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$.

Probar que esto es realmente así. Es decir, probar que

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{r}\|^2 \|E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})\| = 0.$$

5. CAMBIO DE VARIABLES

Ejercicio 11. Sean $T(u, v) = (4u + v, u + 2v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 3] \times [1, 3]$.

- (a) Observar que $D = T(D^*)$ es un paralelogramo, y hallar su área usando geometría elemental.
- (b) Observar que $T : D^* \rightarrow D$ es biyectiva, y hallar el área de D en términos de una integral sobre D^* .

Ejercicio 12. Sea D el paralelogramo de vértices $(1, 2)$, $(5, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 6)$. Calcular

- (a) $\int_D xy \, dx dy$
- (b) $\int_D (x - y) \, dx dy$

Sugerencia: usar un cambio de variables para plantear ambas como integrales sobre el cuadrado $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

Ejercicio 13. Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y P la transformación dada por $P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Hallar $D = P(D_1)$.
- (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2) \, dx dy$ y $\int_{D_1} r^2 J \, dr d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 14. Hallar el área acotada por la *lemniscata*, esto es, la curva dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Ejercicio 15. Calcular $\int_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$ donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es la región delimitada por plano xy , el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y el cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Ejercicio 16. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

(a) Hallar el volumen de E .

(b) Calcular $\int_E (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio 17. Hallar el centro de masa del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si su densidad está dada por $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)z^2$.

Ejercicio 18. Si un sólido $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene densidad ρ , el *momento de inercia* de Ω alrededor del eje x está definido por

$$I_x = \int_{\Omega} \rho (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

y análogamente se definen los momentos de inercia I_y e I_z .

Consideremos el sólido Ω delimitado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por $\phi = \phi_0$, donde ϕ_0 es una constante tal que $0 < \phi_0 < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z , suponiendo que su densidad es constante.