Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 5, 2do. cuatrimestre 2020

Área de una superficie

Un caso simple: sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde D es un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$.

Sean $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b$ y $c = v_0 < v_1 < \cdots < v_n = d$ dos particiones en n intervalos de la misma longitud. Sea

$$D = \bigcup_{i,j=1}^{n} R_{i,j} = \bigcup_{i,j=1}^{n} [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j].$$

Sea $T_{u_i} \times T_{v_j}$ el normal en $\Phi(u_i, v_j)$ $\Rightarrow$ los vectores tangentes $T_{u_{i-1}}(u_i - u_{i-1})$ y $T_{v_{j-1}}(v_j - v_{j-1})$ en $\Phi(u_i, v_j)$ forman un paralelogramo que "cubre" la superficie $\Phi(R_{i-1,j-1})$.

Área de una superficie

Para n "suficientemente grande",

$$\text{área de } \Phi(R_{i-1,j-1}) \sim \| T_{u_{i-1}}(u_i - u_{i-1}) \times T_{v_{j-1}}(v_j - v_{j-1}) \| \\ = \| T_{u_{i-1}} \times T_{v_{j-1}} \| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Por lo tanto,

$$\text{área de } S \sim \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \| T_{u_{i-1}} \times T_{v_{j-1}} \| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}).$$

Cuando n tiende a infinito, esta expresión tiende a

$$\iint_D \| T_u \times T_v \| \, du \, dv.$$

Área de una superficie

Más generalmente, sea $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica. Supongamos que $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ tal que:

(1) cada D_i es una región elemental del plano,

(2) $\Phi_i = \Phi|_{D_i}$ es de clase C^1, inyectiva (salvo la frontera de D_i),

(3) $S_i = \Phi_i(D_i)$ es suave (salvo un conjunto finito de puntos) y $S_i \cap S_j \subset \text{frontera}(S_i) \cup \text{frontera}(S_j)$.

Definimos el área $A(S)$ de S como

$$A(S) = \sum_{i=1}^{n} A(S_i), \quad A(S_i) = \iint_{D_i} \|T_u \times T_v\| \, du \, dv$$

$$= \iint_{D_i} \sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2} \, du \, dv.$$

Ejemplo

Sea $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ y

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u, v) = (u\, cos(v), u\, sen(v), u) \quad \text{(el cono).}$$

Es fácil ver que Φ es inyectiva, salvo en la frontera de D.

Tenemos que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} cos(v) & -u\, sen(v) \\ sen(v) & u\, cos(v) \end{pmatrix} = u,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} sen(v) & u\, cos(v) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -u\, cos(v),$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} cos(v) & -u\, sen(v) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = u\, sen(v).$$

Área de una superficie

Por lo tanto,

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{u^2 + u^2 cos^2(v) + u^2 sen^2(v)} = \sqrt{2}\,u.$$

En consecuencia,

$$\iint_D \|T_u \times T_v\|\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\,u\,du\,dv = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\,dv = \sqrt{2}\pi.$$

Área de una superficie

Una cuestión importante es que el área no cambia por reparametrizaciones. Más precisamente,

Teorema: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.
Sean $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos con $D \subset U$ y $\Psi : \widetilde{U} \to U$ inyectiva de clase C^1 tal que

$$\det J(\Psi)(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \neq 0 \quad \text{para cada } (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{U}.$$

Si $\widetilde{D} = \Psi^{-1}(D)$ y $\widetilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie parametrizada por

$$\widetilde{\Phi} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3, \quad \widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Psi,$$

entonces $\widetilde{S}$ es suave y $A(\widetilde{S}) = A(S)$.

Área de una superficie

Demostración: Por la Regla de la cadena, $J(\widetilde{\Phi}) = J(\Phi)(\Psi) \cdot J(\Psi)$. En particular, si

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (\widetilde{x}(\widetilde{u},\widetilde{v}),\widetilde{y}(\widetilde{u},\widetilde{v}),\widetilde{z}(\widetilde{u},\widetilde{v})),$$

entonces

$$\frac{\partial(\widetilde{x},\widetilde{y})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\widetilde{\Psi}(\widetilde{u},\widetilde{v})) \cdot J(\Psi)(\widetilde{u},\widetilde{v}),$$

$$\frac{\partial(\widetilde{y},\widetilde{z})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(\widetilde{\Psi}(\widetilde{u},\widetilde{v})) \cdot J(\Psi)(\widetilde{u},\widetilde{v}),$$

$$\frac{\partial(\widetilde{x},\widetilde{z})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(\widetilde{\Psi}(\widetilde{u},\widetilde{v})) \cdot J(\Psi)(\widetilde{u},\widetilde{v}).$$

Área de una superficie

Por lo tanto,

$$A(\widetilde{S}) = \iint_{\widetilde{D}} \sqrt{\frac{\partial(\widetilde{x},\widetilde{y})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}^2 + \frac{\partial(\widetilde{y},\widetilde{z})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}^2 + \frac{\partial(\widetilde{y},\widetilde{z})}{\partial(\widetilde{u},\widetilde{v})}^2} d\widetilde{u}\, d\widetilde{v}$$

$$= \iint_{D} \sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\Psi(\widetilde{u},\widetilde{v}))^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(\Psi(\widetilde{u},\widetilde{v}))^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(\Psi(\widetilde{u},\widetilde{v}))^2}$$
$$|J(\Psi)(\widetilde{u},\widetilde{v})|\, d\widetilde{u}\, d\widetilde{v}$$

$$= \iint_{D} \sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2} du\, dv = A(S). \qquad \blacksquare$$

Integral de superficie

Queremos ahora integrar funciones continuas sobre superficies. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1,

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Procediendo de manera similar al caso de áreas, si D es un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$, y $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b$ y $c = v_0 < v_1 < \cdots < v_n = d$ son particiones uniformes, tenemos

$$D = \bigcup_{i,j=1}^{n} R_{i,j} = \bigcup_{i,j=1}^{n} [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j].$$

Sea $S_{i,j} = \Phi(R_{i,j})$ y $A(S_{i,j})$ el área de $S_{i,j}$. Si n es "grande" y $f : S \to \mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow$ f es "aproximadamente constante" en $S_{i,j}$ y por lo tanto su integral es aproximadamente

$$f(\Phi(u_i, v_j))\, A(S_{i,j}).$$

Integral de superficie

Por lo tanto, la integral total es aproximadamente

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\Phi(u_i, v_j))\, A(S_{i,j}).$$

Como $A(S_{i,j}) = \iint_{R_{i,j}} \| T_u \times T_v \| \, du \, dv$, por el TVM integral,

$$A(S_{i,j}) = \| T_{u_i^*} \times T_{v_j^*} \| \, \Delta u \, \Delta v,$$

para cierto $(u_i^*, v_j^*) \in R_{i,j}$. Por lo tanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\Phi(u_i, v_j)) \, \| T_{u_i^*} \times T_{v_j^*} \| \, \Delta u \, \Delta v.$$

Cuando n tiende a infinito, esta expresión tiende a

$$\iint_D f(\Phi(u, v)) \| T_u \times T_v \| \, du \, dv.$$

Integral de superficie

Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

de clase C^1, y $f : S \to \mathbb{R}$ es continua. Definimos la integral de f sobre S como

$$\begin{aligned} \iint_S f\, dS &= \iint_D f(\Phi(u, v)) \| T_u \times T_v \| \, du\, dv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \\ &\qquad \sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2} du\, dv. \end{aligned}$$

En particular, si $f = 1$, entonces obtenemos el área de S.

Ejemplo

Calculamos

$$\iint_{Cil} (x + y + z)\, dS,$$

donde *Cil* es la pared lateral del cilindro unitario:

$$Cil = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Una parametrización del cilindro es

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to Cil, \quad \Phi(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z).$$

Dado que $T_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$ y $T_z = (0, 0, 1)$, resulta

$$\|T_\theta \times T_z\| = \|(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\| = 1.$$

Integral de superficie

Ahora bien, dado que estamos integrando $f : Cil \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$, calculamos

$$f(T(\theta, z)) = \cos(\theta) + \sin(\theta) + z.$$

Así, obtenemos

$$\iint_{Cil} (x + y + z)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(\cos(\theta) + \sin(\theta) + z \big) \cdot 1\, dz\, d\theta = \pi.$$

Integral de superficie y reparametrizaciones

Del mismo modo que para áreas, la integral de funciones en superficies no varía por reparametrizaciones:

Teorema: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.
Sean $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos con $D \subset U$ y $\Psi : \widetilde{U} \to U$ inyectiva de clase C^1 tal que

$$\det J(\Psi)(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \neq 0 \ \text{ para cada } (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{U}.$$

Si $\widetilde{D} = \Psi^{-1}(D)$ y $\widetilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie parametrizada por

$$\widetilde{\Phi} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^3, \quad \widetilde{\Phi} = \Phi \circ \Psi,$$

y $f : S \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\iint_S f\, dS = \iint_{\widetilde{S}} f\, d\widetilde{S}$$

.

Integral de superficie y reparametrizaciones

Demostración: Por la demostración para el caso de áreas,

$$\|T_{\widetilde{u}} \times T_{\widetilde{v}}\| = \|(T_u \times T_v)(\Psi(\widetilde{u}, \widetilde{v}))\| \, |J(\Psi(\widetilde{u}, \widetilde{v}))|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{\widetilde{S}} f \, d\widetilde{S} &= \iint_{\widetilde{D}} f(\widetilde{\Phi}(\widetilde{u}, \widetilde{v})) \|T_{\widetilde{u}} \times T_{\widetilde{v}}\| \, d\widetilde{u} \, d\widetilde{v} \\
&= \iint_{\widetilde{D}} f(\widetilde{\Phi}(\widetilde{u}, \widetilde{v})) \|(T_u \times T_v)(\Psi(\widetilde{u}, \widetilde{v}))\| \, |J(\Psi(\widetilde{u}, \widetilde{v}))| \, d\widetilde{u} \, d\widetilde{v} \\
&= \iint_{D} f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \, du \, dv = \iint_{S} f \, dS. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Integral de superficie: aplicaciones

Una aplicación interesante de las integrales de superficie es el cálculo del centroide o baricentro (= el punto donde se encuentra el centro de masa).

Recordamos que, dada una región elemental $D \subset \mathbb{R}^2$ y una función integrable $f : D \to \mathbb{R}$, definimos el promedio de f como

$$Prom(f) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(u, v)\, du\, dv.$$

En particular, el centroide de D es el punto $(\overline{u}, \overline{v})$ definido como

$$\overline{u} = Prom(u) = \frac{1}{A(D)} \iint_D u\, du\, dv,$$

$$\overline{v} = Prom(u) = \frac{1}{A(D)} \iint_D v\, du\, dv.$$

Integral de superficie: aplicaciones

Extendemos esta noción a superficies: si $S \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie suave parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, definimos su centroide como el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ definido por

$$\overline{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x \, dS = \iint_S x(u,v) \| T_u \times T_v \| \, du \, dv,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A(S)} \iint_S y \, dS = \iint_S y(u,v) \| T_u \times T_v \| \, du \, dv,$$

$$\overline{z} = \frac{1}{A(S)} \iint_S z \, dS = \iint_S z(u,v) \| T_u \times T_v \| \, du \, dv.$$

Integral de superficie: aplicaciones

Por último, cabe mencionar que podemos utilizar integrales de superficie para calcular la masa, conocida la función de densidad de masa.

En efecto, si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie como antes y $m : S \to \mathbb{R}$ es una función de densidad de masa, la masa total es

$$M(S) = \iint_S m(x, y, z)\, dS.$$