Sep 16/2020

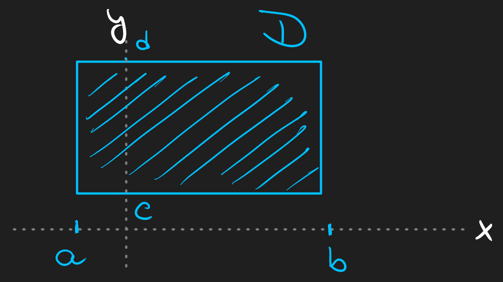
Teórica 4 - Área de una Superficie

Caso simple

$S \subset \mathbb{R}^3$ una sup. suave parametrizada por

$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

donde D es un rectángulo $[a,b]\times[c,d]$



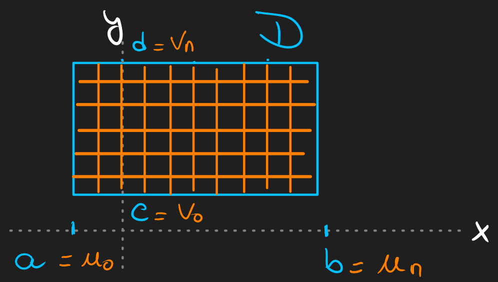
Sean $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$

y $c = v_0 < v_1 < \dots < v_n = d$

dos particiones en n intervalos de la misma longitud

$$D = \bigcup_{i,j=1}^{n} R_{i,j}$$

$$= \bigcup_{i,j}^{n} [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$$



⋮

Sea $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie paramétrica.

Supongamos que

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

tal que:

1. cada D_i es una región elemental del plano.
2. $\phi_i = \phi|_{D_i}$ es de clase $\mathcal{C}^1$
   inyectiva (salvo la frontera)
3. $S_i = \phi_i(D_i)$ es suave (salvo en conj. cto de puntos)

y

$$S_i \cap S_j \subset \text{frontera}(S_i) \cup \text{frontera}(S_j)$$

se intersecan en sus fronteras

Definimos el área $A(S)$ de S como

$$A(S) = \sum_{i=1}^{n} A(S_i)$$

en el límite

$$= \iint_{D_i} \| T_u \times T_v \| \, du\,dv$$

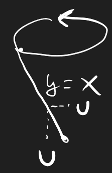
$$= \iint_{D_i} \sqrt{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2} \, du\,dv$$

determinante de la matriz jacobiana respecto de u, v

Ejemplo:

Sea $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$

$\phi : D \to \mathbb{R}^3$

$\phi(v,u) = (u \cdot \cos v,\ u \cdot \sin v,\ u)$ ← Cono 

ϕ es inyectiva, salvo en la frontera

Calculo determinantes

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{vmatrix} \cos v & -u \cdot \sin v \\ \operatorname{sen} v & u \cdot \cos v \end{vmatrix} = u$$

uso estas para pifiar menos

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \det \begin{vmatrix} \sin v & u \cdot \cos v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u \cdot \cos v$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \det \begin{vmatrix} \cos v & -u \cdot \sin v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = u \cdot \sin v$$

$$\| T_u \times T_v \| = \left(u^2 + u^2 \cdot \cos^2 v + u^2 \cdot \sin^2 v \right)^{1/2}$$

$$= \left(u^2 \cdot (1 + 1) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \cdot u$$

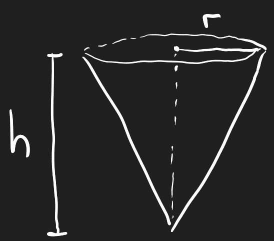
Solo basta integrar

$$\iint_D \|T_u \times T_v\| \, du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\cdot u \cdot du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot dv = \sqrt{2}\,\pi \;//$$

- Que efectivamente es la superficie de un cono:

$$\text{Área}_{\text{Cono}} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} + \text{Área círculo Base}$$



En el límite superior de r

$r = 1 \Rightarrow h = 1$

$\therefore$ $\text{Área} = \pi \cdot \sqrt{2}$

[⋮]

Integral de Superficie

Queremos integrar funciones continuas sobre superficies

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por:

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ de clase } \mathcal{C}^1$$

$$\Phi(u,v) = \left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \right)$$

[⋮] Se procede como en integral de área.

Voy a querer integrar sobre una función

$f : S \to \mathbb{R}$ continua

f será aproximadamente constante sobre cada cuadradito i,j de la partición.

[Demo]

Definición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie suave parametrizada por

$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\phi(u,v) = \Big(x(u,v) \, , \, y(u,v) \, , \, z(u,v) \Big)$$

de clase $\mathcal{C}^1$

y $f : S \to \mathbb{R}$

continua

Definimos la integral de f sobre S como

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\phi(u,v)) \, \| T_u \times T_v \| \, du \, dv$$

donde

$$f(\phi(u,v)) = f\Big(x(u,v) \, , \, y(u,v) \, , \, z(u,v) \Big)$$

y

$$\| T_u \times T_v \| = \sqrt{ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2 + \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}^2 }$$

En particular:

- Si $f = 1$ $\Longrightarrow$ obtenemos el área de S

  ↑ ctemente 1.