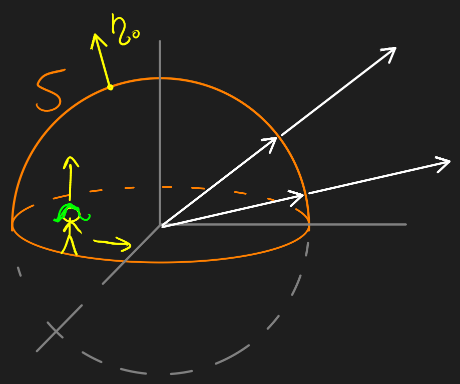
Práctica 4 - Parte I:

Stokes

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0,$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.



- F es C^1 ✓
- qvq

$$\int_S \nabla \times F \cdot ds = \int_{\partial S^+} F \cdot ds$$

Calculo el rotor

$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$F(x,y,z) = (x,y,z)$

$$= \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times F = (0, 0, 0)$$

Ahora, parametrizo la superficie S

$$T : D \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

Con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

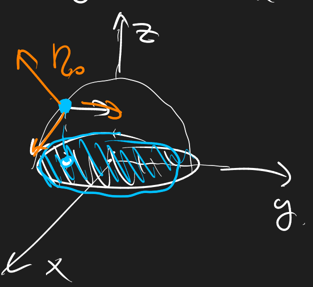
Busco el campo normal que induce T en S
(pues me interesa su orientación)

$$T_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$T_y(x,y) = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$T_x \times T_y(x,y) = \left(+\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$\left(\overline{\|T_x \times T_y\|}\right)$$



coordenada z positiva SIEMPRE

$\therefore$ la normal apunta hacia afuera
(que es lo que quiero

$\Rightarrow$ T respeta la orientación de S ✓

Si resuelvo la integral

$$\int_S \nabla \times F \, dS = \iint_D \left\langle \nabla \times F(T(x,y)), T_x \times T_y(x,y) \right\rangle dxdy$$

$$= \iint_D \langle (0,0,0) , T_x \times T_y \rangle \, dx\,dy$$

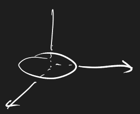
$$= 0 \quad //$$

• Ahora quisiera calcular

$$\int_{\partial S} F \cdot ds$$

y ver que da lo mismo.

curva en $\mathbb{R}^3$



$$\partial S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2 = 1 \wedge z=0 \}$$

Quiero una parametrización de ∂S:

$$\sigma(\theta) = (1 . \cos\theta , 1 \sin\theta , 0) \qquad \circlearrowleft +$$

orientación correcta.

$$\sigma'(\theta) = (-\sin\theta , \cos\theta , 0)$$

con

$$\sigma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\cos\theta, \sin\theta, 0), (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \rangle \, d\theta$$

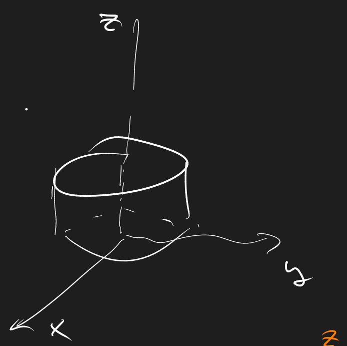
$$= \int_0^{2\pi} -\cos\theta . \sin\theta + \cos\theta . \sin\theta \, d\theta = 0 \quad //$$

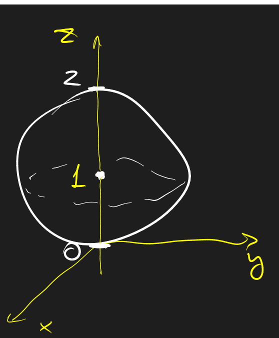
Que da igual que antes! :)

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 dadas por

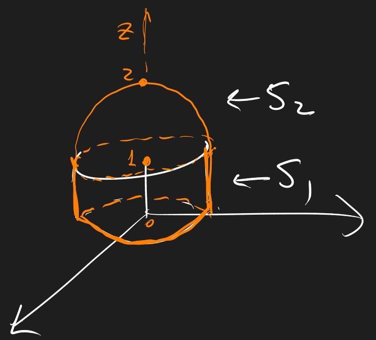
$$S_1: \quad x^2+y^2=1, \quad 0\le z\le 1$$
$$S_2: \quad x^2+y^2+(z-1)^2=1, \quad z\ge 1,$$

orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2\right)$. Calcular $\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$.





• F es C^1 ✓



con la normal que apunta haci
$= \left(zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2\right)$.

$$\nabla\times F = \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ zx+z^2y+x & z^3yx+y & z^4x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(3z^2\cdot yx \,,\, -\left(2xz^4-(x+2zy)\right),\, z^3y-z^2\right)$$

$$= \left(3xyz^2 \,,\, x-2xz^4-2yz \,,\, z^2(yz-1)\right)$$

$$\int_S \nabla\times F\, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F\, ds$$

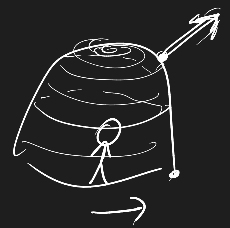
$$= \int_{\partial S_1} F\, ds + \int_{\partial S_2} F\, ds$$

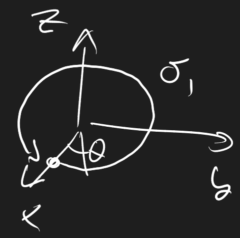
$$\partial S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 = 1 \ \wedge\ z = 1)$$

$$\partial S_2 = \partial S_1$$

$$\sigma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

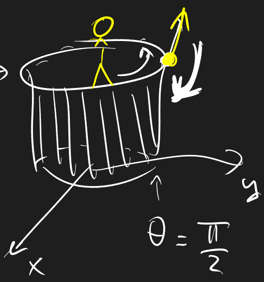
$$\sigma_1'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

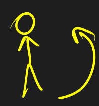




Mantiene la orientación ✓

$z = 1 \rightarrow$





$$\sigma_2(\theta) = \sigma_1(\theta) + (0,0,-1)$$

cilindro $\qquad\qquad$ semi esfera

$$= \underbrace{\int_{\partial S_1} F\, ds}_{\text{el borde de } S_1 \text{ son 2 bordes}} + \int_{\partial S_2} F\, ds$$

$$= \int_{\partial S_1^{\uparrow}} F\, ds + \int_{\partial S_1^{\downarrow}} F\, ds + \int_{\partial S_2} F\, ds$$

cilindro Arriba

$$= -\int_0^{2\pi} \langle F(\sigma_1(\theta)), \sigma_1'(\theta)\rangle + \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma_2(\theta)), \sigma_2'(\theta)\rangle +$$

$$\|$$

$$+ \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma_1(\theta)), \sigma_1'(\theta)\rangle$$

semi-esfera

∴ se anulan :

con la normal que apunta haci
$= (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

$$= \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma_2(\theta)), \sigma_2'(\theta) \rangle =$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos\theta, \sin\theta, 0), (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \rangle \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad " $$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$$= 0 \quad //$$

Rdo —

Ind:

1. $\boxed{0} = \boxed{0}$ ✓
2. $\boxed{n} = \boxed{n} \Rightarrow \boxed{n+1} = \boxed{n+1}$

=

Ejercicio 3.

(a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) Deducir que si S es una superficie cerrada[1], entonces

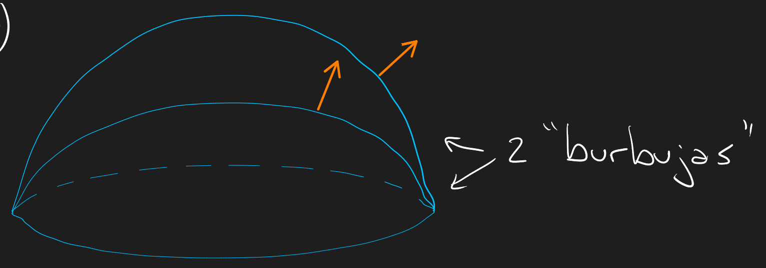
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(c) Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

[1]Una superficie *cerrada* es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada

Oct 14

a)



b) Si S es una Sup. cerrada, no tiene bordes,

$\partial S = 0$

$$\Rightarrow \int_S \nabla \times F \, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F \cdot ds \overset{\partial S = 0}{=} 0$$

c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 10\}$

y

$F = (\sin xy, e^x, -yz)$

Como F es C^1 $\Rightarrow$ Vale Stokes

$$\int_S \nabla \times F \, ds = \int_{\partial S} F \, ds$$

Como el elipsoide $\underline{\text{No}}$ tiene bordes

$\partial S = 0$

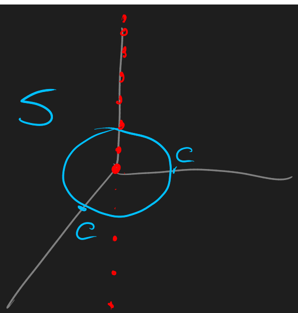
$$\boxed{\int\!\!\int_S \nabla \times F \, dS \overset{\downarrow}{=} 0}$$

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

(a) S : círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.

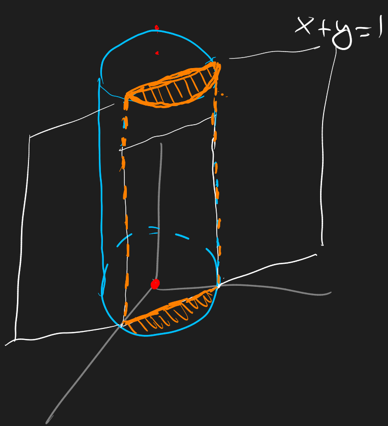
(b) S : región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

a)



$\underline{\text{No}}$! pues el problema es en todo z!

b)



Sí! no hay drama! :)

Ejercicio 5.

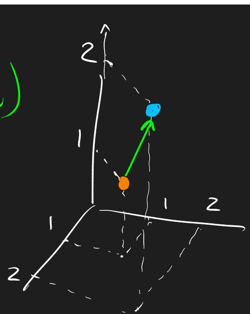
(a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ a lo largo de:

i. el segmento que une los dos puntos.

ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

a) i)



Quiero

$$\int_{\mathcal{C}} F \, ds =$$

Parametrizo $\mathcal{C}$

$$\sigma(t) = (t, t, t) \qquad t \in [1,2]$$
$$\sigma'(t) = (1, 1, 1)$$

$$\int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_1^2 \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

$$F(x,y,z) = \text{Const} \cdot \frac{X}{\|X\|^3} \qquad \text{donde Const} = -GmM$$
$$\text{y } X = (x, 0, 0)$$

$$\Rightarrow F(\sigma(t)) = \left(\text{Const} \cdot \frac{t}{\|t\|^3}, 0, 0 \right)$$

$$\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle = \text{Const} \cdot \frac{t}{\|t\|^3}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \text{Const} \cdot \frac{t}{\|t\|^3} = \text{Const} \int_1^2 \frac{t}{\|t\|^3} \, dt$$

$$\|t\|^3 = \left(\sqrt{t^2}\right)^3$$

$t > 0$

$$= \text{Const} \cdot \int_1^2 \frac{t}{t^3} \, dt$$

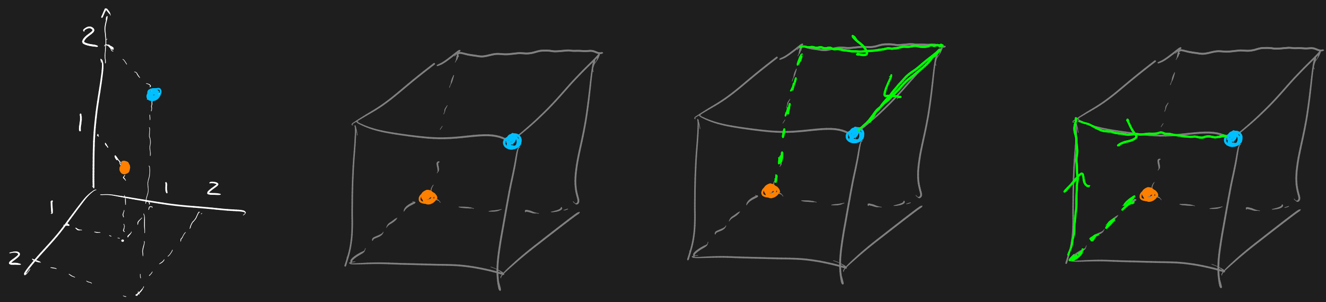
$$= \text{Const} \cdot \int_1^2 \frac{1}{t^2} \, dt$$

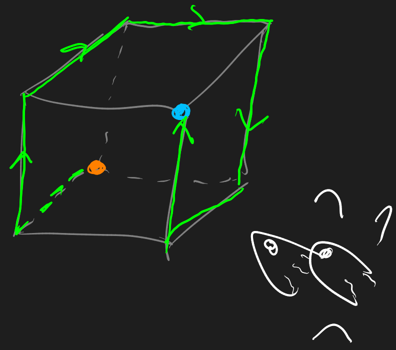
$$= \text{Const} \cdot \left[-t^{-1} \right]_1^2$$

$$-\tfrac{1}{2} + 1$$

$$= -\frac{1}{2} G m M$$

//





Calculo integrales sobre curvas y las sumo.

Da el mismo resultado:

$$-\frac{1}{2} G m M$$

Lo cual "ya sabemos" pues es un campo gradiente y $\int_C F\,ds = f(2,2,2) - f(1,1,1)$

Campos Conservativos:

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy)$

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C \qquad C \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ es campo gradiente $\therefore$ es conservativo

b) $\nabla \times F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ x^2+y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 2y - 2y = 0$

Como el rotor es $= 0 \Rightarrow$ es campo conservativo

$\Rightarrow$ es campo gradiente

c) $\nabla \times F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ \cos xy - xy \cdot \sin xy & x^2 \cdot \operatorname{sen} xy \end{vmatrix}$

$\neq 0$ $\therefore$ no es campo gradiente.

(pues no es conservativo)

Ejercicio 7. Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

(a) $\mathbf{F} = \left(2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y\right)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $\left(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4\right)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $\mathbf{F} = \left(\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2, 0\right)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\left(e^t, e^{t+1}, 0\right)$, $-1 \leq t \leq 0$.

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_{t=0}^{t=\pi} \left\langle F\left(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4\right), \sigma'(t) \right\rangle dt$$

hacer esto sería trabajoso

Qué pasaría si...

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xyz + \sin x & x^2 z & x^2 y \end{vmatrix}$$

$$= \left(2xz - 2xz,\ 2xy - 2xy,\ 2xz - 2xz\right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$\therefore$ F es campo gradiente.

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds \overset{\downarrow}{=} f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0))$$

$$\sigma(t) = \left(\cos^5 t,\ \sin^3 t,\ t^4\right)$$

$$\sigma(\pi) = \left(-1,\ 0,\ \pi^4\right)$$

$$\sigma(0) = \left(1,\ 0,\ 0\right)$$

$$F(x,y,z) = \left(2xyz + \sin x,\ x^2 z,\ x^2 y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + \sin x \quad \Rightarrow \quad f = x^2yz - \cos x + C(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z \quad \Rightarrow \quad f = x^2yz + C(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y \quad \Rightarrow \quad f = x^2yz + C(x,y)$$

Todo junto

$$f(x,y,z) = x^2yz - \cos x$$

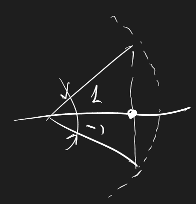
elegí:

$$C(y;z) = 0$$
$$C(x,z) = -\cos x$$
$$C(x,y) = -\cos x$$

$\therefore$

$$\int_{\mathcal{C}} F\,ds = f(-1,0,\pi^4) - f(1,0,0)$$

$$= -\cos(-1) + \cos(1)$$



$$= 0 \,//$$

(b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2y \operatorname{sen} xy^2, 0)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Calculo rotor para verificar que sea campo gradiente.

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2 & -2xy^2 \sin xy^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, -2y^2 \cdot \sin xy^2 - 2xy^2 \cdot \cancel{\cos xy^2}$$

... confío en que es cero

$\therefore$ es campo gradiente

$\Rightarrow$ calculo f

$\Rightarrow f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$

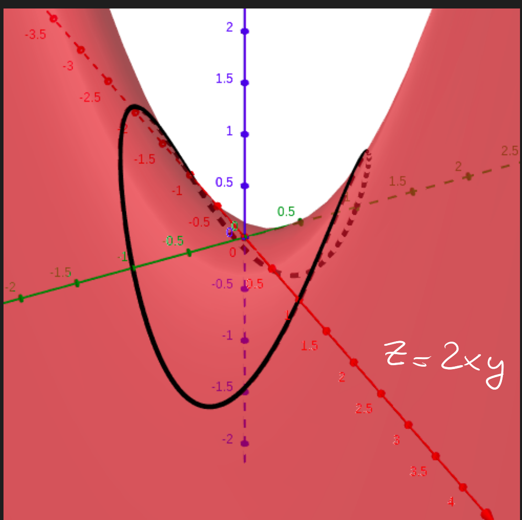
(da: $\cos(e^2) - \dfrac{\cos(e^{-1})}{e}$)

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x)\, dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3\, dz,$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$.



$F(x,y,z) = \left(y + \sin x, \frac{3}{2}z^2 + \cos y, 2x^3\right)$

$\nabla \times F \neq (0,0,0) \Rightarrow$ no es campo gradiente

Como F es C^1 $\Rightarrow$ Puedo usar Stokes

$$\boxed{\int_S \nabla \times F \, ds = \int_{\partial S^+} F \, ds}$$ Stokes

el borde de S se parametriza con

$\partial S^+ : \sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$ Oct 15

$t \in [0, 2\pi]$

Como $z = 2xy$

Puedo describir a S como el gráfico de una función

$$\phi(x,y) = (x, y, 2xy)$$

con $(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$D = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

en Polares

$$T(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta, r \sin\theta, 2r^2 \sin\theta . \cos\theta)$$

$$\overset{\text{identidad}}{=} (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, r^2 . \sin 2\theta)$$

Éste es "al revés", pues calculo directamente:

$$\int_S \nabla \times F \, ds = \iint_T \langle \nabla \times F(T(r,\theta)), T_r \times T_\theta \rangle \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \nabla \times F \ \ldots$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+\sin x & \frac{3}{2}z^2+\cos y & 2x^3 \end{vmatrix}$$

$F(x,y,z) = \left(y+\sin x,\ \frac{3}{2}z^2+\cos y,\ 2x^3\right)$

$$\nabla \times F = \left(-3z,\ 6x^2,\ -1\right)$$

identidad

$= \left(r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ r^2\cdot\sin 2\theta\right)$

$$T_r = \left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 2r\cdot\sin 2\theta\right)$$

$$T_\theta = \left(-r\cdot\sin\theta,\ r\cdot\cos\theta,\ 2r^2\cdot\cos 2\theta\right)$$

$$T_r \times T_\theta = \left(2r^2\cdot\cos 2\theta\cdot\sin\theta - 2r^2\cdot\sin 2\theta\cdot\cos\theta,\right.$$

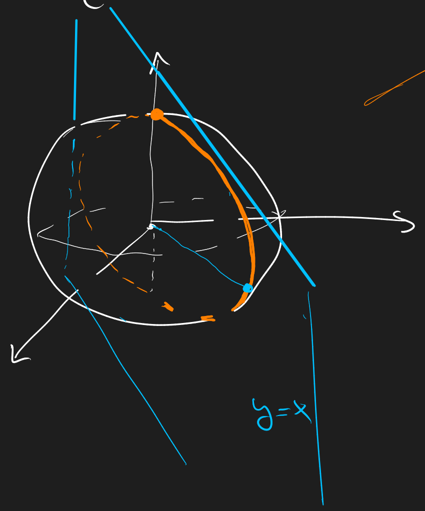
Imaginemos que lo resolví ^^

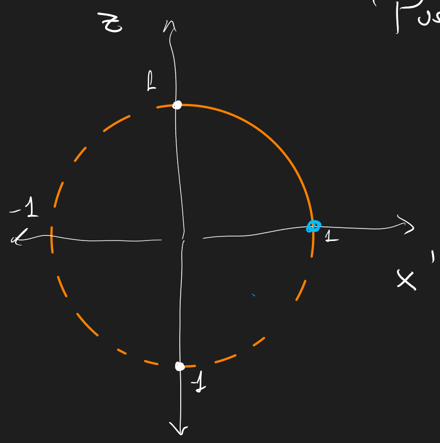
Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2\right)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano de ecuación $y=x$ recorrida desde el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds =$$





Pues si $y = x$

$x^2 + y^2 = 2x^2 = z^2$

x'

Calculo el rotor de F

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^2 & x^2 - 2yz & 2xz - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-2y + 2y,\ 2z - 2z,\ 2x - 2x\right)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$\therefore$ es campo gradiente:

$$\int_S F\, ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Calculo la f:

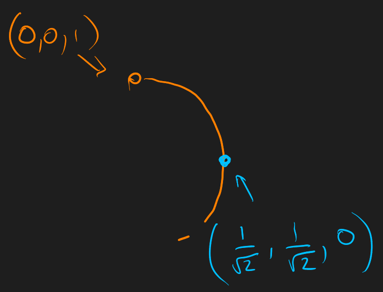
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2 \Rightarrow f = x^2 y + x z^2 + c(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2yz \Rightarrow f = x^2 y - y^2 z + c(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz - y^2 \Rightarrow f = xz^2 - y^2 z + c(x,y)$$

$$f(x,y,z) = \underbrace{x^2 y}_{c(x,y)} + \underbrace{x^2 z}_{c(x,z)} - \underbrace{y^2 z}_{c(y,z)} + C$$

Necesito los puntos donde "empieza" y "termina"



$$f(0,0,1) = C$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} + C$$

$$\int F\, ds = C - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + C\right)$$

$$\therefore \int_S F\, ds = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \Big] //$$

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 17 de la práctica 2 usando el teorema de Gauss.

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Gauss dice que

$$\iint_S F \cdot \eta\, ds = \iiint_\Omega \overbrace{\nabla \cdot F}^{\text{div } F}\, dA = \iiint_\Omega \text{div}(F)\, dA$$

$$\text{div}(F) = 3$$

$$\iiint F\, ds = 3 \cdot \text{Vol(cubo)} = 3 \, //$$

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x+y+z)\,dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir
$$S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

Veo que si tuviera un campo F tal que

$$F \cdot \eta = x+y+z$$

en $\iint_S F\cdot\eta$ podría usar gauss ← mayúscula!

← vectores normales de una esfera son de la forma $\eta = \dfrac{(x,y,z)}{\underbrace{\|x,y,z\|}_{=1}}$

$$\text{Si } F(T(r,\theta)) = (1,1,1)$$

$$\Rightarrow F\cdot\eta = (1,1,1)\cdot(x,y,z)$$

$$= x+y+z.$$

$$\nabla\cdot F = 0$$

$$\therefore \iiint_\Omega \nabla\cdot F = 0 \Rightarrow \iint_S x+y+z = 0 \quad //$$

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$ considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

$$F = -C\cdot\left(\frac{x}{x^3}, 0, 0\right) = -C\cdot\left(\frac{1}{x^2}, 0, 0\right)$$

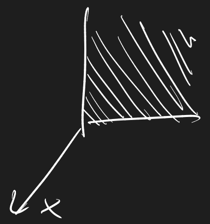
↑ $x>0$

$$\iint_S F\cdot\eta\, ds = \iiint_\Omega \nabla\cdot F\, ds =$$

$$\nabla\cdot F = 2.C.x^{-3}$$

Si la bola unitaria no contiene $X=0$ $\Rightarrow$ se puede usar Gauss

- F es C^1
- S es cerrada
- orientación



la bola no puede intersecar el plano yz.

Ejercicio 14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

$$\iint_S F \cdot ds \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dv$$

$$= \iiint_\Omega 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \, dx\,dy\,dz$$

Puedo usar Gauss pues

- F es C^1
- S es cerrada
- Orientación exterior $\leftarrow$ debo cambiar signo!

Parametrizo la esfera con coord. esféricas.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \qquad J = r^2 \cdot \sin\varphi$$

$$\iiint_\Omega 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 =$$

$$\int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} 3r^2 \cdot \left(\underbrace{\cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi}_{\sin^2\varphi \cdot 1} + \cos^2\varphi \right) \cdot J$$

$$= \int \int \int_{\theta=0}^{2\pi} 3r^2 \cdot r^2 \cdot \sin\varphi =$$

$$= 6\pi \cdot \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi} r^4 \cdot \sin\varphi = 6\pi \cdot \int_0^R r^4 \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi dr$$

$$= 6\pi \cdot \int_0^R r^4 \cdot \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} = 12\pi \int_0^R r^4 \, dr$$

$$= 12\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{12}{5}\pi \cdot R^5$$

Como la orientación de η era opuesta a Gauss:

$$\int_S F \, ds = -\frac{12}{5}\pi \cdot R^5$$

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,(2 - \cos(2\theta))\,, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

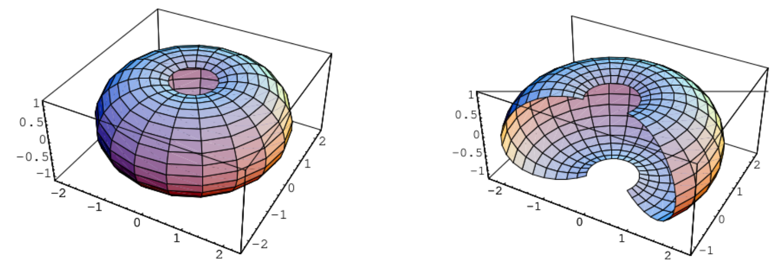


FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S; en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el flujo a través de S en el sentido "externo" del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

$$\int_S F \cdot \eta \, ds = ?$$

Veo que:

$$\text{div } F = 1 + 1 - 2 = 0$$

$\therefore$ estaría bueno usar Gauss

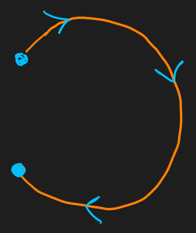
Pero para eso necesito una superficie cerrada con normal exterior.

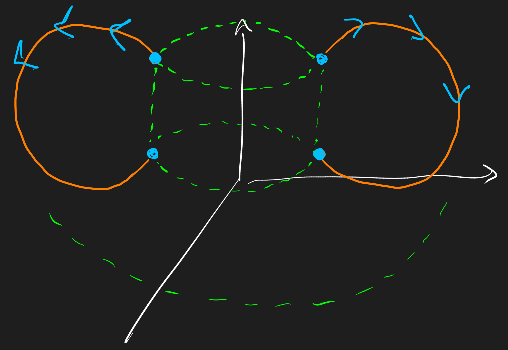
De esa forma, como F es C^1

el volumen Ω de la sup. cerrada tendrá un borde

$\partial\Omega = S \cup$ "alguna cosa"

Parametrizo el borde de la sup de revolución:

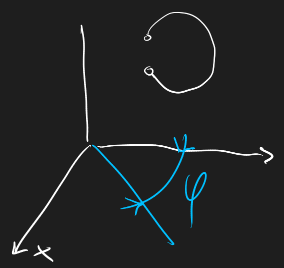




$$r(\theta) = a\cdot\left(2-\cos(2\theta)\right) \quad \text{con} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

introduzco ángulo φ

en $\theta = 0$
$x = 0$



$$x = r\cdot\cos\theta\,.\,\sin\theta$$
$$y = r\cdot\sin\theta\,.\,\cos\theta$$
$$z = r(\theta)\,.\,\sin\theta$$

$x = r\,.\,\cos\theta\,.$ (con r, $=1$, 0 indicados encima)

$y = r.\ \sin$

Primero

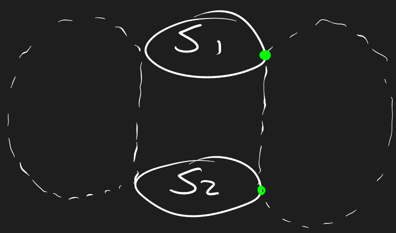
Sé que $\operatorname{div} F = 0$

y $$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dv = \int_{\partial\Omega} F\, ds$$

$$= \int_{S} F\, ds + \int_{\text{Tapas}} F\,.\,ds$$

$$\int_S F\,ds = -\int_{\text{Tapas}} F\cdot ds$$

$$= -\int_{S_1} F\,ds - \int_{S_2} F\,ds$$



$$\int_{S_1} F\,ds = \int_{r=0}^{?} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle F(r(r,\theta)), T_r \times T_\theta \rangle \, d\theta\, dr$$

$$r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2}\left(2 - \overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{1/2}\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$r\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \checkmark$$

radio de las tapas en $z = r(\theta)\cdot\sin\theta$

$$z\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

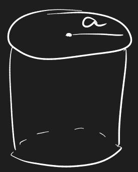
Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

(a) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0,0,1)$ apunte en la dirección $(0,1,1)$.

(b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0,0,0)$ apunte en la dirección $(0,0,1)$.

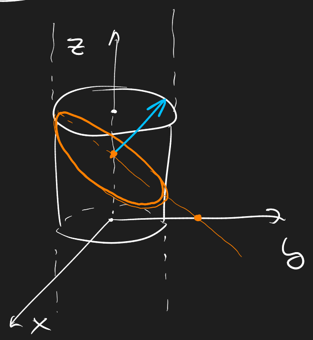
¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.

$$F(x,y,z) = (0,0,a^2 - x^2 - y^2)$$

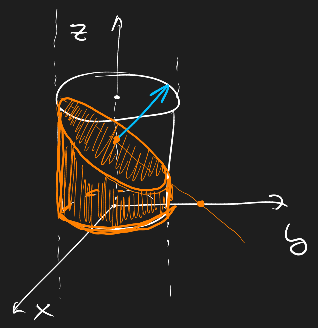


$x^2 + y^2 \leq a^2$

a)



Puedo usar



$$\int_S F\,ds + \int_{\tilde{S}} F\,ds = \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\,ds$$

$$\operatorname{div} F = 0$$

$$\int_S F\,ds = -\int_{\tilde{S}} F\,ds$$

$$= -\int_{S_1} F\,ds - \int_{S_2} F\,ds$$

S_1: cara

S_2: Tapa abajo

Como el campo solo tiene componente en z, nunca cruza con las caras verticales del cilindro

$$\therefore \quad \int_{S_1} F \, ds = 0$$

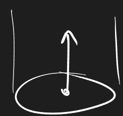
Para la tapa de abajo

$$S_2 : T(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, 0)$$

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, r \cdot \cos\theta, 0)$$

$$T_r \times T_\theta = (0, 0, r)$$

$\uparrow$ apunta hacia arriba 

$\therefore$ invierte orientación.

$$\int_{S_2} F \, ds = -\int_{r=0}^{a} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle (0, 0, a^2 - r^2), (0, 0, r) \rangle \, d\theta \, dr$$

$$= -\int \int_{\theta=0}^{2\pi} a^2 r - r^3 \, d\theta \, dr$$

$$= -2\pi \int_{r=0}^{a} a^2 r - r^3 \, dr$$

$$= -2\pi \cdot \left(a^2 \frac{r^2}{2} \Big|_0^a - \frac{r^4}{4} \Big|_0^a \right)$$

$$= -2\pi \cdot \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot a^4$$

//

$$\therefore \quad \int_S F\,ds = +\frac{\pi}{2}\cdot a^4 \;//$$

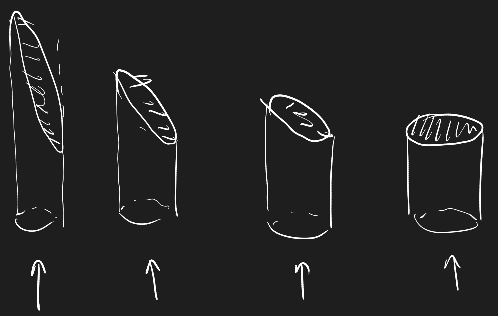
b) de a) ya se que es $\int$

pues es la misma base en $z=0$

Pregunta

Oct 16

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.



el flujo no depende del área, pues este flujo corresponde a lo que "sale" por la tapa, que es siempre igual pues depende de "lo que entra" por la base.

17)

Ejercicio 17. Dada la función $f(z) = \frac{1}{2}ze^{2-2z}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \leq z \leq 1$.

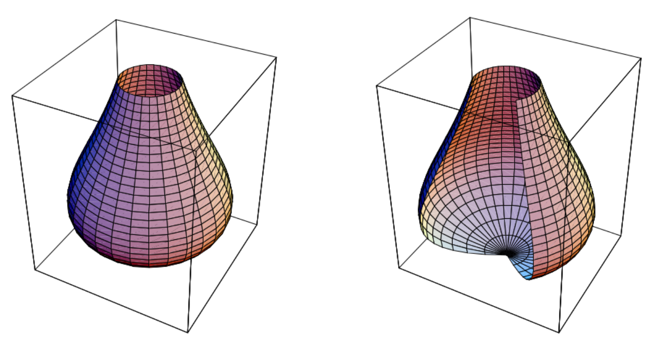


FIGURA 2

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right).$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Me piden:

Flujo térmico saliente (o flujo del campo a través de la superficie del mate)

- $\displaystyle\int_S F\,ds = \int_S F\cdot n\,ds$

Sospecho que puedo usar Gauss pues

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$$

y como F es C^1

$$\int_S F\,ds + \int_{\tilde{S}} F\,ds \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_R \operatorname{div} F\,dv$$

$\tilde{S}$: Tapa

R: región encerrada por S

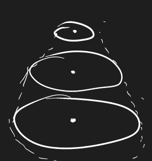
$$= \iiint_R 3\,dv$$

Superficie S

$$= 3 \cdot \operatorname{Vol}(\text{Mate})$$

Solo basta calcular su volumen

Son circunferencias de radio $f(z) = \frac{1}{2} z \cdot e^{2-2z}$



$$\text{Vol} = \int_{z=0}^{1} \pi \cdot r^2 \, dz$$

con $r = f(z)$

$$= \pi \int_{z=0}^{1} \frac{1}{4} \cdot z^2 \cdot e^{4-4z} \, dz$$

integral calculator with steps!

$$= \frac{(e^4 - 13)\pi}{128} \quad // \text{Vol(Mate)}$$

Falta la integral de la tapa

$$\int_{\tilde{S}} F \, ds = \int \langle F(T(r,\theta)), T_r \times T_\theta \rangle \, dr \, d\theta$$

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, \; r \cdot \sin\theta, \; \underset{\uparrow \, 0 \le z \le 1}{1})$$

con $r \in [0, f(1)]$
$\in [0, \frac{1}{2}]$

$$T_r = (\cos\theta, \; \sin\theta, \; 0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, \; r \cdot \cos\theta, \; 0)$$

$$F = (x, y, z - \tfrac{1}{2})$$

$$T_r \times T_\theta = (0, \; 0, \; r)$$

apunta hacia arriba: respeta orientación.

$$\int_{\tilde{S}} F \, ds = \int_{r=0}^{1/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle (\ldots, \ldots, \tfrac{1}{2}), (0, 0, r) \rangle \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{1/2} \frac{1}{\cancel{2}} r \cdot \cancel{2}\pi \, dr = \pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{1/2}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Todo junto, tenía:

quiero

$$\int_S F\,ds + \int_{\tilde{S}} F\,ds \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_R \operatorname{div} F\,dv$$

Tapa

región encerrada por S

$$\int_S F\,ds = \frac{3\cdot(e^4-13)}{128}\pi - \frac{\pi}{8}$$

Muy de mala persona este término en un ej. ^^

Ejercicio 18. Se sabe que $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned}
G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt, \\
G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt, \\
G_3(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$?

Sugerencia: ver el ejercicio 13.

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$ considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.