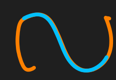
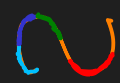
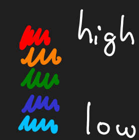
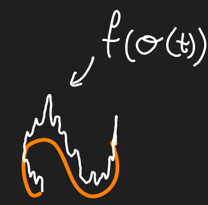
5/Sep/2020

Guía Práctica 1

- Curvas 
- Longitud de Arco 
- Integrales Curvilíneas 





Ej 1.

$$\mathcal{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = r^2 \}$$

- Continuas
  ↳ pues tienen componentes continuas
- Clase C'
  ↳ " " " clase C'
- Si $\mathcal{C} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = r^2 \}$

$$\mathrm{Im}(\sigma_1) = \mathcal{C}$$

Pues

$r \cdot (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ con $t \in [0,1]$

es equiv. a

$r \cdot (\cos \tilde{t}, \sin \tilde{t})$ con $\tilde{t} \in [0, 2\pi]$

ya que $\tilde{t} = 2\pi \cdot t$

Para el otro es igual con $\hat{t} = 4\pi . t$

b) $\mathcal{C}$ es

llamo $\sigma_1(t) = r . \left(\cos 2\pi t , \sin 2\pi t\right)$

Cerrada?

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1(0) = r(1,0)\\ \sigma_1(1) = r(1,0)\end{array}\right] = \Rightarrow \text{es cerrada.}$$

Simple?

Sí, pues es inyectiva

Suave?

$$\sigma_1'(t) = r\left(-2\pi . \sin(2\pi t) , 2\pi . \cos(2\pi t)\right)$$

a ∘ $\sigma_1'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [0,1]$?

Sí, pues cuando $\sin x = 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$

y viceversa

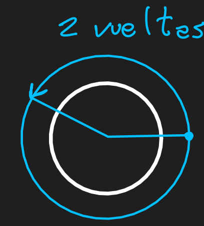
$\Rightarrow \sigma_1'(t) \neq (0,0)$

b ∘

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1'(0) = (0, 2\pi)\\ \sigma_1'(1) = (0, 2\pi)\end{array}\right] = \Rightarrow \text{comparten tangente}$$

$\therefore$ por a y b , $\mathcal{C}$ es suave. (pues $\sigma_1(t)$ la parametriza)

c) No es inyectiva: "da dos vueltas"



Para $t=0$, $t=\frac{1}{2}$ y $t=1$

$$\sigma(t) = 0$$

Ej 2) qvq $\operatorname{Im}(\sigma) = \mathcal{C}$

Donde

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \begin{array}{l} x=0 \wedge 0 \leq y \leq 1 \\ \vee \; y=0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

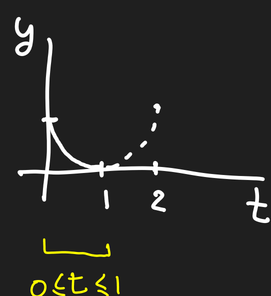
$\operatorname{Im}(\sigma) \subseteq \mathcal{C}$?

Sea $(x,y) \in \operatorname{Im}(\sigma)$

$$\Rightarrow \exists\, t \in [0,2] \;/\; \begin{cases} (x,y) = (0, (1-t)^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (x,y) = ((t-1)^2, 0) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- $(x,y) \overset{0 \leq t \leq 1}{=} (0, (1-t)^2)$

$(x,y) \overset{1 \leq t \leq 2}{=} ((t-1)^2, 0)$



$(1-t)^2$ es inyectiva entre 0 y 1

cont. con imagen y entre 0 y 1

$\therefore \operatorname{Im}(\sigma) \subseteq \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \subseteq I(\sigma)$?

Sea $(x,y) \in \mathcal{C}$ /

$$\Rightarrow \exists\, t \in [0, 2] \ / \ x = \begin{cases} 0 & si\ t<1 \\ (1-t)^2 & si\ t \geq 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (t-1)^2 & si\ t<1 \\ 0 & si\ t \geq 1 \end{cases}$$

Preguntar 1 ó 2

- Cómo se prueba la vuelta ?
- Por qué no hay contradicción en $(0,0)$?

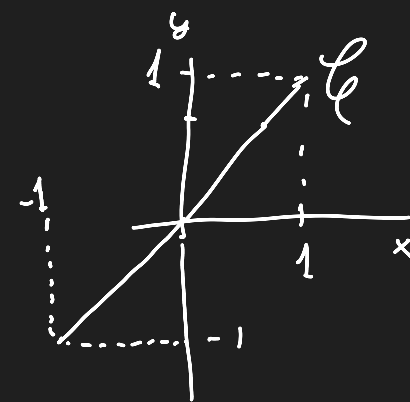
no tiene tg.

Porque es unión de 2 curvas ?

Ej 3) Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \leq t \leq 1$

$(-1 \leq t^3 \leq 1)$

$$\mathcal{C} = \left\{ x, y \in \mathbb{R} \;/\; y = x, \; -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1 \right\}$$



qvq $Im(\sigma) = \mathcal{C}$

$Im(\sigma) \subseteq \mathcal{C}$?

Sí pues $\sigma(t) = t^3 \cdot \underbrace{(1,1)}_{y = x}$ está en el segmento

$-1 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq t^3 \leq 1$

$\mathcal{C} \subseteq Im(\sigma)$?

Si $y = x$ y $-1 \leq x \leq 1$

$(x, y) = (x, x) = x(1,1)$ con $-1 \leq x \leq 1$

que es exactamente la parametrización $\sigma(t)$

Obs

$\sigma'(t) = 3t^2 \cdot (1,1)$ $\quad \sigma'(0) = 0$!

no es param. regular.

Pero $\mathscr{C}$ es suave!

Look at this \$hit

$$\sigma(t) = (t^3, t^3)$$

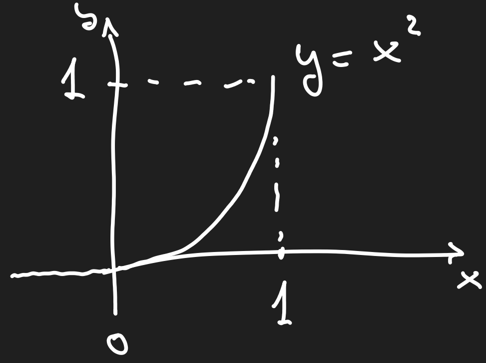
$$\gamma(t) = (t, t) = \frac{\sigma(t)}{t^2}$$

$$\gamma'(t) = (1, 1) \neq (0,0) \quad \forall t$$

$\therefore$ como existe UNA parametrización con $\frac{\partial}{\partial t} \neq \vec{0}$
al menos

$\mathscr{C}$ es suave.

Ej 4) $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$



a) $\mathcal{C} = \{ x, y \in \mathbb{R} \,/\, y = x^2 \,,\ 0 \leq x \leq 1 \}$

$\sigma(t) = (t, t^2) \,,\ 0 \leq t \leq 1$

Abierta ?

$\sigma(0) \overset{?}{=} \sigma(1)$? No $\Rightarrow$ es abierta ✓

Simple :

$y = x^2$ es inyectiva $\Rightarrow$ es simple ✓

Suave : ✓

- $\sigma'(t) = (1, 2t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [0,1]$
- clase C^1

b) $\bar{\sigma}(s) = \left(e^s - 1, (e^s - 1)^2\right)$ con $s \in [0, \ln(2)]$

- Continua / compo continuas

- C^1 :✓ componentes C^1

- $Im(\bar{\sigma}) = \mathcal{C}$?

$Im(\sigma) \subseteq \mathcal{C}$

$e^s - 1$ es creciente

$$\left.\begin{array}{l} e^0 - 1 = 0 \\ e^{\ln 2} - 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 \leqslant e^s - 1 \leqslant 1 \\ 1 \leqslant e^s \leqslant 2 \end{array}$$

$$\log(1) \leqslant \log(e^s) \leqslant \log(2)$$

$$0 \leqslant s \leqslant \log(2)$$ ✓ donde se mueve t

$\mathcal{C} \subseteq Im(\bar{\sigma})$?

Sea $(x,y) \in \mathcal{C}$,

$$\Rightarrow \exists\, t \in [0, \log 2] \Big/ \begin{array}{l} x = e^t - 1 \\ y = (e^t - 1)^2 \end{array}$$

Como por $\mathcal{C}$, $y = x^2$

$$(x, x^2) = \left(e^t - 1, (e^t - 1)^2 \right)$$ con $t \in [0, \log 2]$

que son los puntos de la $Im(\bar{\sigma})$

c) $\sigma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ es param. regular.

Continua, C^1, (abierta), simple $Im(\sigma) = \mathcal{C}$ por lo mismo que arriba.

d) $g : [0,1] \to [0, \ln 2]$

$\bar{\sigma}(g(t)) = \sigma(t) \quad \forall t \in [0,1]$

quiero $\quad (g(t) \in [0, \ln 2])$

$\bar{\sigma}(t) = (e^t - 1, (e^t - 1)^2)$

$\sigma(t) = (t, t^2)$

$t = e^t - 1 \qquad g(t)$

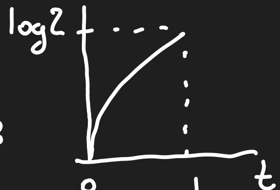
$t + 1 = e^t$

$\log(t+1) = t$

$g(t) = \log(t+1)$ con $t \in [0,1]$

$\Rightarrow g(t) \in [\log 1, \log 2]$
$\in [0, \log 2]$

- Biyectiva

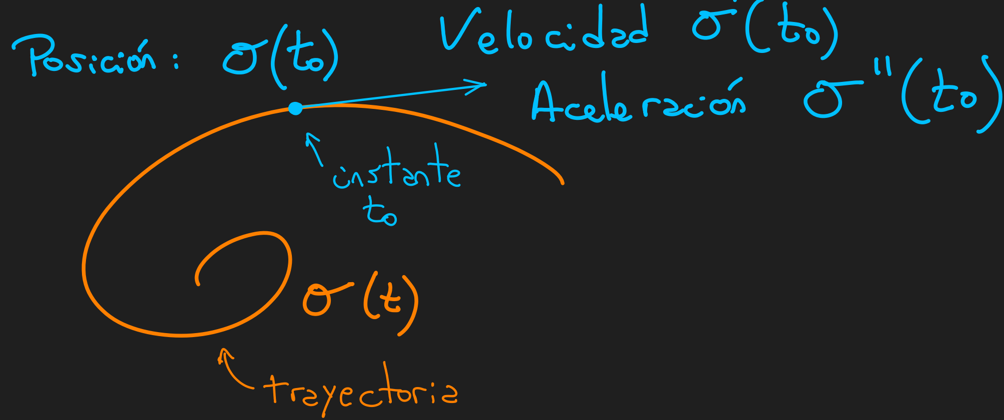


como $\log(t+1)$ es creciente

$g(t) \in [g(0), g(1)] \ \forall t$

- C^1 pues $g'(t) = \frac{1}{t+1}$ continua en $t \in [0,1]$

Partícula en movimiento



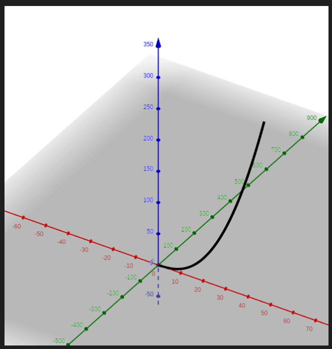
Ej 5) a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ $\quad t = 0$

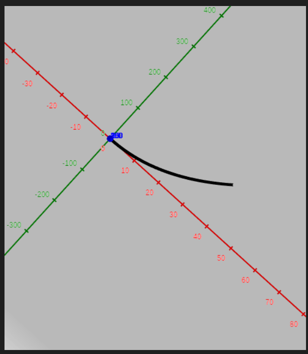
- Velocidad

$$\sigma'(t) = (6, 6t, 3t^2)$$

en el instante $t = 0$

$$\sigma'(0) = (6, 0, 0)$$





- Aceleración

$$\sigma''(t) = (0, 6, 6t)$$

en $t = 0$

$$\sigma''(t) = (0, 6, 0)$$

- Recta tangente

$$L(t) = \sigma(t) + \sigma'(t) . \lambda$$

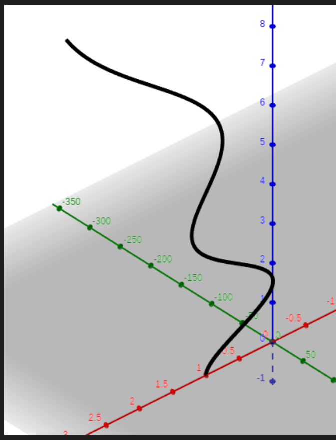
en $t=0$

$$L(0) = (0,0,0) + (6,0,0) . \lambda$$

$$= (6,0,0)\lambda$$

b) $\sigma(t) = (\cos^2 t, \ 3t - t^3, \ t)$, $t = 0$

Velocidad



$\sigma'(t) = (2\cos t.(-\sin t), \ 3 - 3t^2, \ 1)$

en $t=0$

$\sigma'(0) = (0, 3, 1)$

Aceleración

$\sigma''(t) = (2\sin t.\sin t - 2\cos t \sin t, \ -6t, \ 0)$

en $t=0$

$\sigma''(0) = (0, 0, 0)$

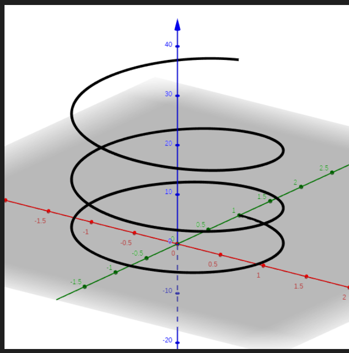
Recta tangente

$L_t = \lambda.\sigma'(t) + \sigma(t)$

$L_{t=0} = \lambda(0,3,1) + (1,0,0)$

c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen} 3t, \ \cos 3t, \ 2t^{3/2})$, $t = 1$

Velocidad



$\sigma'(t) = (3\cos 3t, -3\operatorname{sen} 3t, \ 3t^{1/2})$

en $t=0$

$\sigma'(0) = (3, 0, 0)$

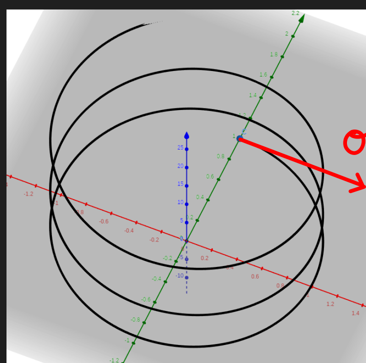
Aceleración

$$\sigma''(t) = \left(-9\sin 3t\ ,\ -9\cos 3t\ ,\ \frac{3}{2}\cdot t^{-1/2}\right)$$

$t=0$

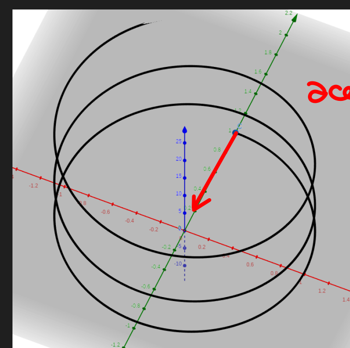
$$\sigma''(0) = (0\ ,\ -9\ ,\ 0)$$

se desplaza en la dirección de x



$\sigma'(t=0)$

x

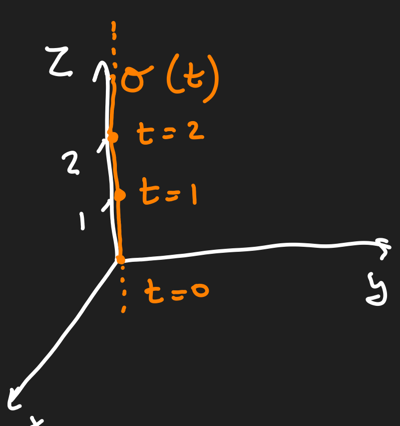


acelera en y (hacia donde "dobla")

Recta tangente

$$L_{t=0} = \lambda\cdot(3,0,0) + (0,1,0)$$

d) $\sigma(t) = (0,0,t)\quad ,\quad t=1$



Velocidad

$$\sigma'(t) = (0,0,1)$$

constante en una misma dir. y sentido pues $\forall t$ misma $V(t)$

$t = 1$

$$\sigma(1) = (0,0,1)$$

Aceleración

$$\sigma''(t) = (0,0,0)$$

no acelera, velocidad constante

NUNCA!

$t=0$

$$\sigma''(0) = \vec{0}$$

Recta tangente (misma curva)

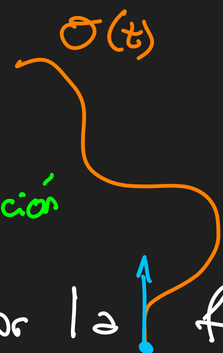
$$L_{t=1} = \lambda(0,0,1) + (0,0,0)$$

$$= \lambda(0,0,1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ej 6) $t=0$

masa $= m$

Fuerza $= m \cdot$ aceleración



Sigue la trayectoria dada por la función σ del 5b

$$\sigma(t) = (\cos^2 t,\ 3t - t^3,\ t)$$

De antes

$$\sigma(0) = (1\ \ 0\ \ 0)$$

$$\sigma'(0) = (0,3,1)$$

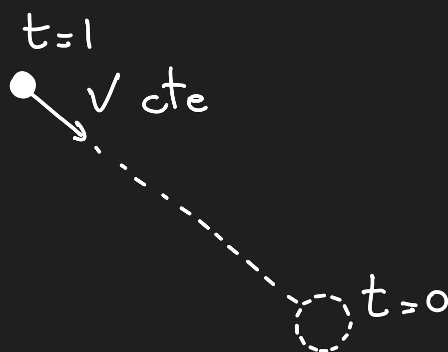
$$\sigma''(0) = (0,0,0)$$

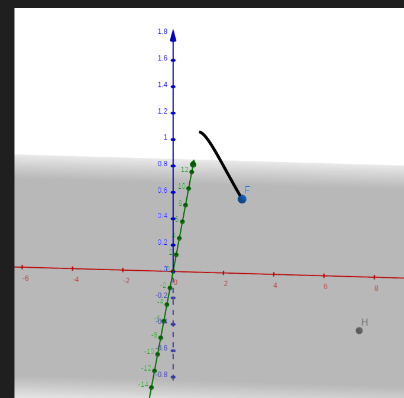
$\Rightarrow$ Fuerza $= m \cdot (0,0,0) = (0,0,0)$

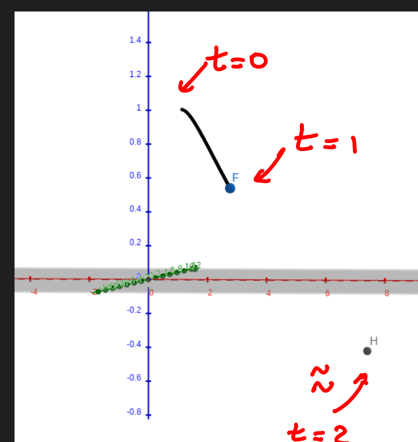
No hay ninguna fuerza $\therefore$ no acelera

Ej 7) $\sigma(t) = (e^{t}, e^{-t}, \cos t)$

En $t = 1$ es MRU
↳ sin aceleración







Veo velocidad en $t=1$

$\sigma'(t) = (e^{t}, -e^{-t}, -\sin t)$

$\sigma'(1) = (e, -e^{-1}, -\sin 1)$

Posición en $t = 1$:

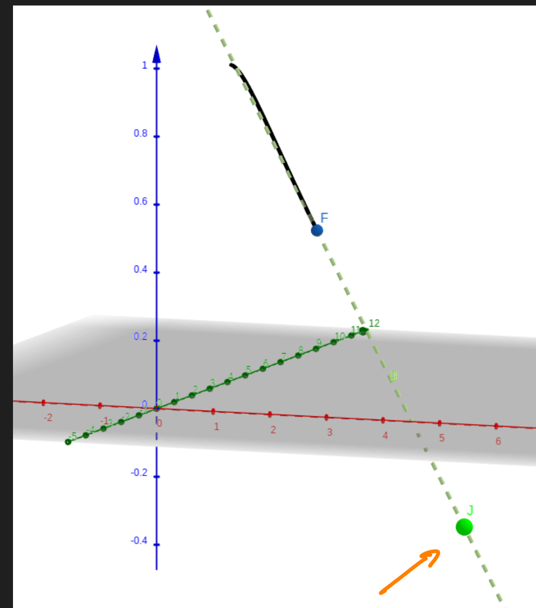
$\sigma(1) = (e, e^{-1}, \cos 1)$

Posición en $t = 2$

Pos$(t=2)$ = Pos$(t=1)$ + Velocidad $\cdot$ Tiempo de desplazamiento

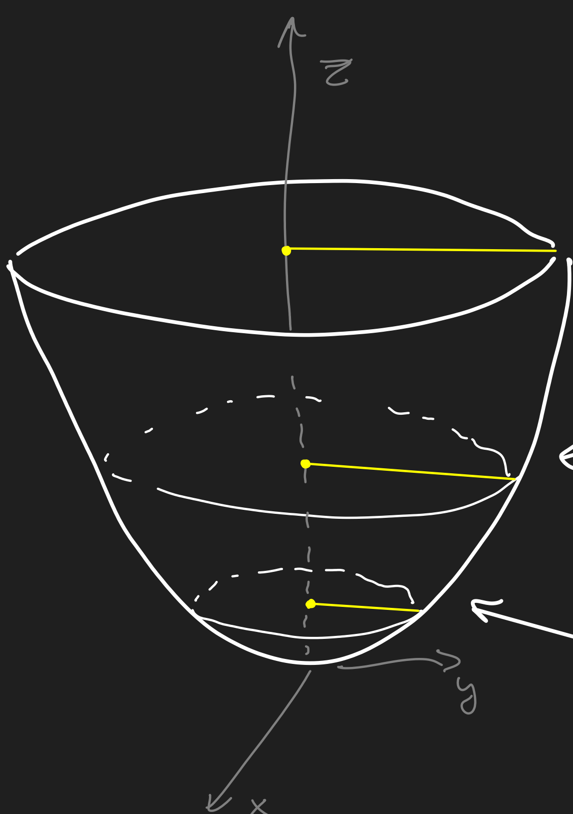
$= (e, e^{-1}, \cos 1) + (e, -e^{-1}, -\sin 1) \cdot 1$ ← $t_2 - t_1 = 2 - 1$

$$= \left(2e,\ 0,\ \cos 1 - \sin 1\right)$$

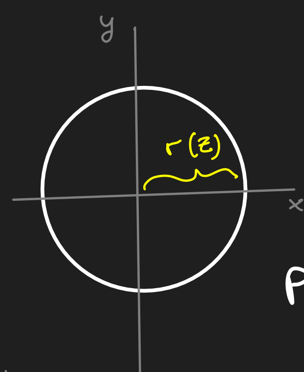


$$Pos(t=2) = \left(2e,\ 0,\ \cos 1 - \sin 1\right)$$

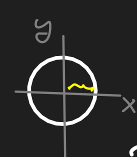
posición en $t = 2$



para $z = 2$

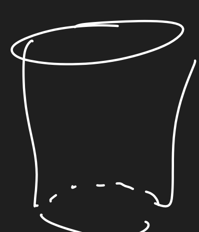


para $z = 1$



para $z = \frac{1}{2}$

Área del círculo



$$A = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Volumen} = \int_{z=a}^{z=b} \pi \cdot r^2 \, dz = \pi \cdot r^2 \cdot \underbrace{h}_{(b-a)}$$

$$h^{-1}(t) = e^{x}$$

$$\left(h^{-1}(t)\right)' = e^{x} \qquad h(t) = \ln(t)$$