Teórica 12

Oct 14

Vicky

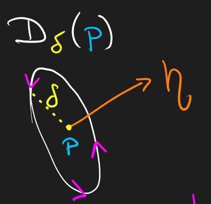
Aplicaciones de Stoke y Gauss

- Interpretación del Rotor
- Leyes de Conservación
- Entidades de Green ← "cómo integrar por partes en $\mathbb{R}^3$"

Interpretación del Rotor

Supongamos que F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

- Sea $p \in \mathbb{R}^3$ un punto y $\eta = \eta(p)$ un vector unitario
- Sea $D_\delta(p)$ = disco de centro p y radio $\delta > 0$ perpendicular a η.



lo oriento para que valga Stokes.

$\Rightarrow$ por Stokes tenemos que

$$\iint_{D_\delta(P)} \nabla \times F \, ds = \int_{\partial D_\delta(P)^+} F \cdot ds$$

Como

$$\iint_{D_\delta(P)} \nabla \times F \, ds = \iint_{D_\delta(P)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, ds$$

entonces

por el Teorema del Valor Medio:

$\exists\, q \in D_\delta(p)$ /

$$\iint_{D_\delta(p)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, ds = \langle \nabla \times F(q), \underbrace{\eta(q)}_{} \rangle \cdot \text{área}\left(D_\delta(p)\right)$$

$= \eta\ \forall q$, pues como D es una sup. chata la normal es siempre $=$.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\text{área}\left(D_\delta(p)\right)} \iint_{D_\delta(p)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, ds}_{} = \langle \nabla \times F(q), \eta(q) \rangle$$

Sabemos por Stokes que esto es igual a

$$\int_{\partial D_\delta(p)^+} F \, ds$$

y si tomamos límite con $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \underbrace{\frac{1}{\text{área}(D_\delta(p))} \int_{\partial D_\delta(p)^+} F \, ds}_{} = \langle \nabla \times F(p), \eta \rangle$$

Da la circulación de F por unidad de área.

pues cuando el radio de la bola tiende a cero, todo punto de la Bola tiende a su centro p.

(uso la continuidad de la función)

$\Rightarrow \langle \nabla \times F(p), \eta \rangle$ es la circulación de F por unidad de área en P en una

superficie $\perp$ η

Observación: Haciendo un razonamiento similar se le puede dar una interpretación a la div(F) (ver aparte).