Análisis 2 / Análisis Matemático II / Matemática 3

Primer Parcial

Segundo cuatrimestre - 21/10/2020

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

Ejercicio 1 Sea S una superficie con parametrización

$$T(\theta,\varphi) = (\cosh\theta\cos\varphi, \cosh\theta\sin\varphi, \sinh\theta),$$

con $0 \leq \varphi \leq \pi$ y $-1 \leq \theta \leq 1$.

a) Probar que T es una parametrización regular. Calcular el plano tangente a S en el punto $(1,0,0)$. (Ayuda: Probar que $f(x) = \sinh(x)$ es una función inyectiva).

b) Si $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la función densidad de masa, calcular la masa total de S.

Ejercicio 2 Sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ una función C^1 y positiva tal que $r(\frac{\pi}{2}) = 2$ y $r(\frac{3}{2}\pi) = 1$ y sea $\mathcal{C}$ la curva parametrizada y orientada por

$$\sigma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)),$$

con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$.

Calcular el área de la región encerrada por $\mathcal{C}$ y el eje y si se sabe que

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{2}e^{y^2} + \cos(x^3)\right) dx + \left(x + e^{y^2}y(x+1)\right) dy = \frac{e}{2}.$$

Ejercicio 3 Sea S la porción del cono $S = \{(z+1)^2 = x^2+y^2; 0 \leq z \leq 1, y \geq 0\}$ orientado de forma tal que la normal en el punto $(0,1,0)$ sea $(0,1,-1)$.

a) Parametrice el borde de S respetando la orientación de S.

b) Sea $\mathbf{F}$ el campo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = -\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})}{\|(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\|^{\mathbf{3}}} + \left(\mathbf{e}^{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^{\mathbf{3}}}, \mathbf{x} + \mathbf{e}^{(\mathbf{x}+\mathbf{y})^{\mathbf{3}}}, \mathbf{e}^{\mathbf{z}^{\mathbf{4}}}\right).$$

Calcular

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde el borde de S está orientado como se pide en el item anterior.

Ejercicio 4 Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ orientada con la normal interior y consideremos el campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(\frac{xz^2}{x^2+y^2}, \frac{yz^2}{x^2+y^2}, e^{x^2y}cos(x^2+y)\right).$$

Calcular

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$