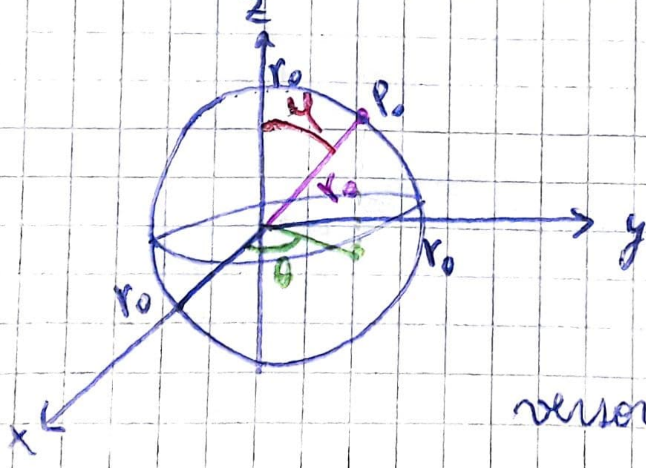
a. Coordenadas esféricas $(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$

$$T(\theta,\varphi) \begin{cases} x = r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\varphi \\ |JT| = |r^2 \operatorname{sen}\varphi| \end{cases}$$

Si $r = r_0 > 0$ constante

$$\begin{cases} x = r_0 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = r_0 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r_0 \cos\varphi \end{cases} \qquad J = r_0^2 \operatorname{sen}\varphi$$



sabemos que

$x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$

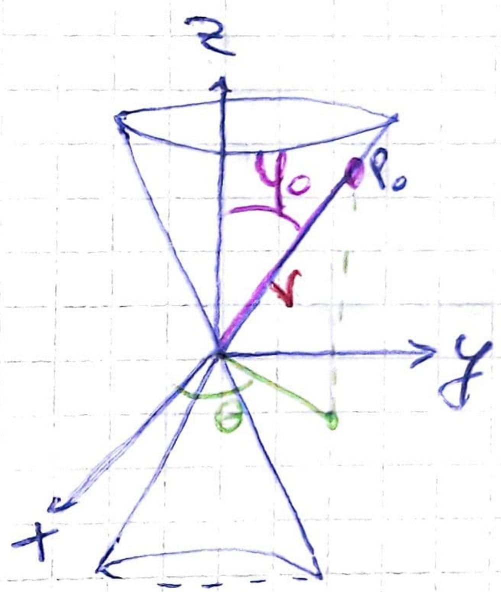
Es una esfera

$$\text{versor normal} = \frac{T_\theta \times T_\varphi}{\|T_\theta \times T_\varphi\|}$$

b. si $\varphi = \varphi_0$ $\quad \varphi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cte.

$\approx 45°$

$$T(r,\theta,\varphi) \begin{cases} x = r \cos\theta \operatorname{sen}\varphi_0 \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi_0 \\ z = r \cos\varphi_0 \end{cases}$$



Para cada altura tengo una circunf. de $\neq$ radio

Cuando φ se mueve de 0 a $\frac{\pi}{2}$ la imagen es un cono

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = z^2$$

Versor normal $\dfrac{P}{\|P\|} = \dfrac{T_\theta \times T_r}{\|T_\theta \times T_r\|}$

2a $a, b > 0$

$\phi_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad D = \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi)$

$\phi_2(u, v) = (a\, u \cos(v),\ b\, u\, sen(v),\ u^2)$

es param de paraboloide elíptico

$S \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \}$

• $\boxed{Im(\phi_2) = S}$ $\qquad$ $Im(\phi) \subset S$

$\exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 / \phi(u,v)$ se puede escribir como $(a\,u \cos(v), b\,u\, sen(v), u^2)$ y cumple que $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

$$u^2 = \frac{(a\,u \cos(v))^2}{a^2} + \frac{(b\,u\, sen(v))^2}{b^2}$$

$$u^2 = \frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}} u^2 \cos^2(v) + \frac{\cancel{b^2}}{\cancel{b^2}} u^2 sen^2(v)$$

$$u^2 = u^2 (\underbrace{\cos^2(v) + sen^2(v)}_{1}) \checkmark \text{ cumple.}$$

$S \subset Im(\phi_2)$ Ahora quiero probar que si agarro un $(x_0, y_0) \in S$ debe $\exists (u_0, v_0) \in Im(\phi)$.

$\exists\ z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

Tomo $P_0 = (0, 0, 0)$

$0 = 0 + 0 \checkmark \Rightarrow (u_0, v_0) = (0, v_0)$

$\phi_2(0, v_0) = (a \cdot 0 \cdot \cos(v_0), b \cdot 0\, sen(v), 0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \phi_2$ es una param de S y como a y $b \neq 0$

$\phi'_2 \neq (0,0,0)\ \forall (u, v) \Rightarrow$ es param. regular

• $\boxed{\phi_2 \text{ es } \mathcal{C}^1}$ porque sus coor son $\mathcal{C}^1$

$\boxed{\text{Inyectividad}}$

$$\phi_2(u_1, v_1) = \phi_2(u_2, v_2)$$

$$\begin{cases} a\, u_1 \cos(v_1) = a\, u_2 \cos(v_2) \\ b\, u_1 \operatorname{sen}(v_1) = b\, u_2 \operatorname{sen}(v_2) \\ u_1^2 = u_2^2 \end{cases}$$

cuando $u=0$ no es inyectiva

Como $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ de la 3 coordenada sale $\boxed{u_1 = u_2}$

$\Rightarrow$ reemplazo en las primeras coordenadas

$$\begin{cases} \cancel{a u} \cos(v_1) = \cancel{a u} \cos(v_2) \\ \cancel{b u} \operatorname{sen}(v_1) = \cancel{b u} \operatorname{sen}(v_2) \end{cases} \quad \text{si } u \neq 0$$

$$\rightsquigarrow v_1 = v_2 + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

pero $v \in [0, 2\pi)$ por lo tanto ϕ_2 es inyectiva ✓ $\Rightarrow$ es param ✓

salvo en los puntos $(0, v)$

$\boxed{¿\phi_u \times \phi_v?}$ $\rightsquigarrow$ si quiero ver que es regular.

$$\phi_u = (a \cos(v), b \operatorname{sen}(v), 2u)$$

$$\phi_v = (-au \operatorname{sen}(v), bu \cos(v), 0)$$

$$\phi_u \times \phi_v = \big(0 + bu\cos(v)\cdot 2u,\ + au \operatorname{sen}(v)\cdot 2u,\ ab\, u \cos^2(v) + ab\, u \operatorname{sen}^2(v)\big)$$

$$= (2bu^2 \cos(v), 2au^2 \operatorname{sen}(v), abu)$$

$\phi_u \times \phi_v (v, 0) = (0,0,0) \rightsquigarrow$ la param no es regular.

$\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \phi_1 = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$

• 1: Llamemos $u = x$, $y = v$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dif

$f(x, y) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$

Definimos al paraboloide como el gráfico de una función dada de manera implícita por lo tanto es una superficie y como todas sus coordenadas son C^1 y la parametrización es regular, la superficie es suave.

$\text{graf}(f) = S = \{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D \}$

• $\text{Im}(\phi) = \ (f)$

• Inyectividad: $\phi(x_1, y_1) = \phi(x_2, y_2)$

$(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) = (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow$ son el mismo punto

$\Phi_x = (1, 0, f_x) \qquad \Phi_y = (0, 1, f_y)$

$\Phi_x \times \Phi_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq (0, 0, 0)$

2.6. El toro

ole!

Nos piden ver que

$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dominio elemental: rectángulo en $\mathbb{R}^2$

$(u, v) \xrightarrow{\Phi} ((a+b\cos(u))\operatorname{sen}(v), (a+b\cos(u))\cos(v),$
$b\operatorname{sen}(u))$

con $b < a$

Φ es una param. de la superficie dada por

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 = b^2 - (a - \sqrt{x^2+y^2}), a > b\}$

- $\boxed{\operatorname{Im}(\Phi) = S}$ $\quad \underline{\operatorname{Im}(\Phi) \subseteq S}$

Sea $((a+b\cos(u))\operatorname{sen}(v), (a+b\cos(u))\cos(v), b\operatorname{sen}(u))$ con $u, v \in [0, 2\pi]$. Queremos ver que es un punto que esté en la superficie, es decir que cumple la ecuación. Tenemos:

$$\begin{cases} x = (a+b\cos(u))\operatorname{sen}(v) \\ y = (a+b\cos(u))\cos(v) \\ z = b\operatorname{sen} u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = (a+b\cos(u))^2 \quad (1) \\ z^2 = b^2\operatorname{sen}^2(u) \quad (2) \end{cases}$$

luego $\underbrace{z^2}_{(2)} = b^2 - (a - \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{(1)}})$ queda

$$b^2\operatorname{sen}^2(u) = b^2 - (a - \sqrt{(a+b\cos(u))^2})^2$$

Obs como $a > b \rightsquigarrow a + b\underbrace{\cos(u)}_{-1 \leq \cdot \leq 1} > 0$

luego $\sqrt{(a+b\cos(u))^2} = a + b\cos(u)$

$$\Longrightarrow \quad b^2 \operatorname{sen}^2(u) = b^2 - (\cancel{a} - \cancel{a} + b\cos(u))^2$$

$$b^2 \operatorname{sen}^2(u) = b^2 - b^2\cos^2(u)$$

$$b^2 \operatorname{sen}^2(u) + b^2\cos^2(u) = b^2$$

$$b^2(\underbrace{\operatorname{sen}^2(u) + \cos^2(u)}_{=1}) = b^2$$

$$\boxed{b^2 = b^2}$$

Son el mismo punto

$$\Longrightarrow \quad \underline{Im(\phi) \subseteq S}$$

$\rightarrow$ $\underline{Im(\phi) \supseteq S}$

Sea $(x_0\, y_0\, z_0)$ que cumple $z_0^2 = b^2 - (a - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2$ y veamos que existen $u_0, v_0 \in [0, 2\pi]$ tales que $\phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

Llamando $t_0 = -\sqrt{x^2 - y^2} + a$ tenemos

$$z_0^2 = b^2 - t_0^2$$

$$z_0^2 + t_0^2 = b^2$$

(t_0, z_0) está en un círculo de radio b y por lo tanto existe $(u_0\, v_0) \in [0, 2\pi]$ tal que (t_0, z_0) $= (b\cos(u_0), \underbrace{b \operatorname{sen}(u_0)}_{=z})$

Entonces, como $t_0 = a - \sqrt{x^2 + y^2} = b\cos(u_0)$

$$\sqrt{x^2 + y} = \underbrace{b\cos(u_0) + a}_{>0}$$

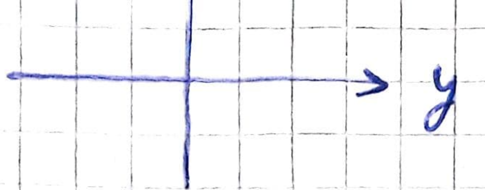
(x_0, y_0) se encuentra en un círculo de radio $a + b\cos(u_0)$ y por lo tanto existe $v_0 \in [0, 2\pi]$ tal que

$$(x_0, y_0) = \big((b\cos(u_0)+a)\cos(v_0), (b\cos(u_0)+a)\operatorname{sen}(v_0)\big)$$

De esta manera

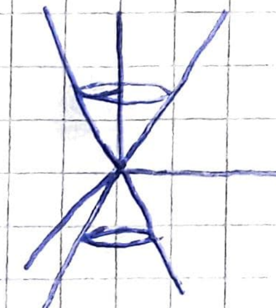
$$(u_0, v_0) \xrightarrow{\phi} \big((b\cos(u)+a)\cos(v_0), (b+\cos(u)a)\operatorname{sen}(v_0), b\operatorname{sen}(u_0)\big)$$

y entonces es efectivamente $\phi(u_0 - v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ como queríamos probar. Esto finaliza la demostración de que $S \subseteq \operatorname{Im}(\phi)$ y por lo tanto $S = \operatorname{Im}(\phi)$ //



ni idea

3. $\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\,\mathrm{sen}(v) \\ z = u \end{cases}$ si $v \in [0, 2\pi)$ y $u \in \mathbb{R}$



$T(u,v) = (u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), u)$

$T(u,v)$ es la parametrización de una superficie S (un cono con $z>0$) y es diferenciable porque todas sus coordenadas son $\mathcal{C}^1$.

• Inyectividad: no es inyectiva ya que el punto $P \in \mathbb{R}^3$, $P = (0,0,0)$ es imagen de $T(0, v)$.

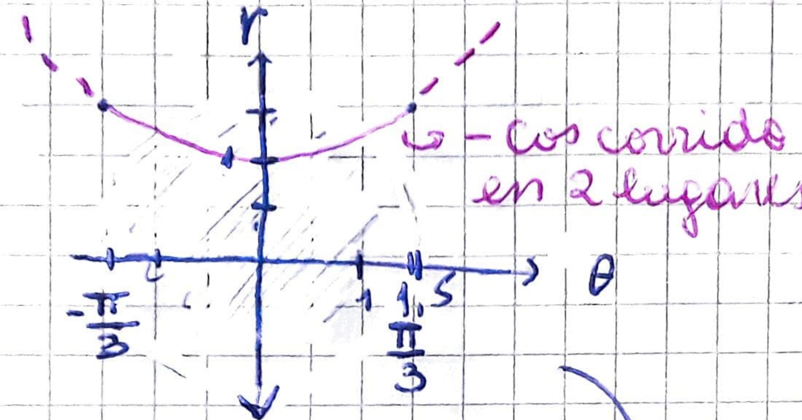
Veamos que pasa para todos los puntos (u, v).

$$T_u \times T_v (u, v) = (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 1) \times (-u \operatorname{sen}(v), u \cos(v), 0)$$

$$= (-u \cos(v), u \operatorname{sen}(v), u \cos^2(v) + u \operatorname{sen}^2(v))$$
$$= (-u \cos(v), u \operatorname{sen}(v), u)$$

En cualquier punto $(0, v)$ la superficie no tiene plano tg $\Rightarrow$ no es suave porque el producto vectorial da $(0, 0, 0)$

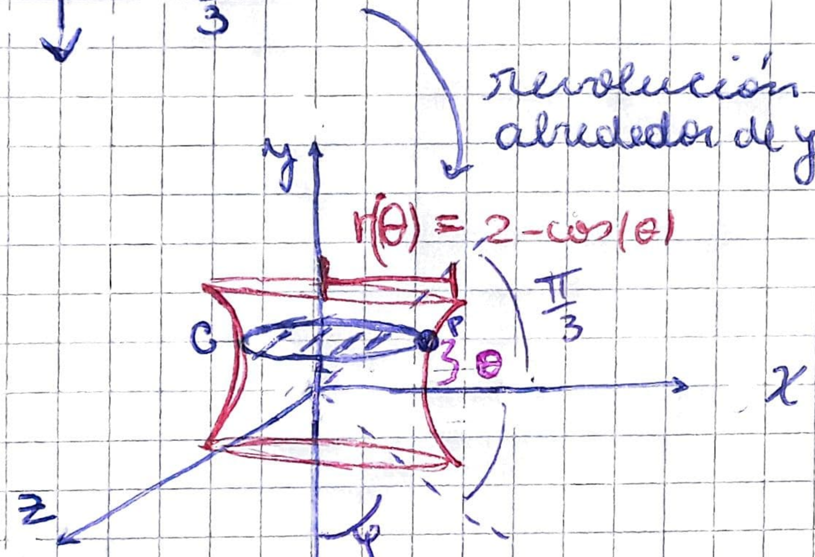
4. C curva en el plano xy



$r = 2 - \cos\theta$

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

S =



$$\begin{cases} x(t) = r\cos\theta = (2-\cos\theta)\cos\theta \\ y(t) = r\,\text{sen}\,\theta = (2-\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

a. Param de la curva C $\quad \Phi(\theta) = (r \overset{x(t)}{\cos\theta}, r\,\overset{y(t)}{\text{sen}\,\theta})$

$\Phi(\theta) = ((2-\cos\theta)\cos\theta, (2-\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta) \rightarrow$ es la curva azul

ahora agrego eje $z(t)$

$$T(\theta,\varphi) = \Big(\underbrace{(2-\cos\theta)\cos\theta}_{r}\cos\varphi,\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{no cambia}}}{(2-\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta},\ \underbrace{(2-\cos(\theta))\cos\theta}_{r}\,\text{sen}\,\varphi\Big)$$

5. Esfera de radio a y centro en el origen.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2+y^2+z^2 = a^2}_{F(x,y,z)}\}$$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$ $\quad C^1$

$\nabla F(x\,y\,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$

La ecuación del plano tg en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0\,y_0\,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0\,y_0\,z_0)(z-z_0) = 0$$

$$\boxed{2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0}$$

6. ¿Plano tg en $P_0 = (0,1,1)$?

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad T(u,v) = (2u, u^2+v, v^2)$

$T_u(u,v) = (2, 2u, 0)$

$T_v(u,v) = (0, 1, 2v)$

$T_u \times T_v(u,v) = (4uv, -4v, 2-2u)$

$(0,1,1) = (2u, u^2+v, v^2) \to (u,v) = (0,1)$

$\|T_u \times T_v(0,1)\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$$V_0 = \frac{T_u(0,1) \times T_v(0,1)}{\|T_u(0,1) \times T_v(0,1)\|}$$

$$V_0 = \frac{(2,0,0) \times (0,1,2)}{\sqrt{((2\,0\,0) \times (0\,1\,2))^2}} = \frac{(0,-4,2)}{\sqrt{20}}$$

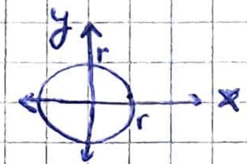
$V_0 = \left(0, \frac{-4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}\right)$ $\quad P_0 = (0,1,1)$ $\quad \boxed{\Pi: -\frac{4}{\sqrt{20}}(y-1) + \frac{2}{\sqrt{20}}(z-1) = 0}$

7. S superficie param por $\phi(r,\theta): [0,1] \times [0, 2\pi] \to R^3$

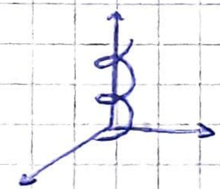
$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \theta)$

- Gráfico S = un helicoide

Plano xy



Pero también se mueve en el eje z $\Rightarrow$ va girando y subiendo



- Vector normal $V_0 = \dfrac{T_r \times T_\theta}{\|T_r \times T_\theta\|}$

$T_r = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$

$T_\theta = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, +r\cos\theta, 1)$

$T_r \times T_\theta = (\mathrm{sen}\,\theta, -\cos\theta, r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta) = (\mathrm{sen}\,\theta, -\cos\theta, r)$

$\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{\underbrace{\mathrm{sen}^2\theta + (-\cos\theta)^2}_{=1} + \underbrace{r}_{>0}} = r$

$$\boxed{V_0 = \left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}, -\frac{\cos\theta}{r}, 1\right)}$$

$A(S) = \iint_D \|T_r \times T_\theta\|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta =$

$r = \mathrm{senh}(t)$
$dr = \cosh(t)\, dt$

Ej. 7

$$= 2\pi \int_0^1 \cancel{\cosh^4(t)}\, \cosh(t)\, dt \;\; 2\pi \int_0^1 \cosh^2(t) = \int_0^1 \frac{1+\cosh(2t)}{2}\, dt\; \pi$$

$$= \pi \left(t\Big|_0^1 + \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{\cosh(u)\, du}{2} \right)$$

$u = 2t$
$du = 2dt$

$$= \pi \left(\frac{\operatorname{senh}(u)}{2} \right)\Big|_0^2$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2} \operatorname{senh}(2)}$$

8. S sup. param. por $\phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$

$$\phi(u,v) = (u - v,\; u + v,\; uv)$$

$$\phi_u = (1,\; 1,\; v)$$

$$\phi_v = (-1,\; 1,\; u)$$

$$\phi_u \times \phi_v = (u - v,\; -u - v,\; 2)$$

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{(u-v)^2 + (u+v)^2 + 4}$$ ← Podría haber desarrollado la cuadrática acá y DESPUÉS hacer el cambio de variable.

$$A(S) = \int_S 1\, dA = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\|\, du\, dv.$$

$(u, v) = (r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ $\quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

JACOBIANO

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{(r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)^2 + (r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)^2 + 4}\; r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\cos^2\theta - \cancel{2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2(\theta) + \cancel{2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} + r^2\operatorname{sen}^2\theta + 4}\; r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1} + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1}) + 4}\; r\, d\theta\, dr.$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{2r^2 + 4}\; r\, dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2}\sqrt{r^2+2}\; r\, dr$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+2}\; r\, dr = \sqrt{2}\pi \int_2^3 \sqrt{u}\, du = \sqrt{2}\pi \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3$$

$r^2 + 2 = u$

$2r\, dr = du$

$$\boxed{= \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\pi\left(\sqrt{27} - \sqrt{8}\right)}$$

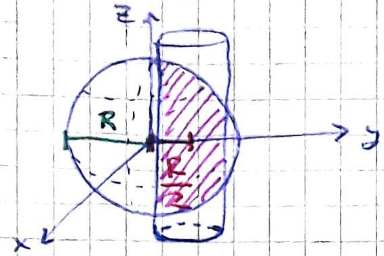
ϕ es inyectiva porque $u - v$ y $u + v$ son inyectivas y para este caso es suficiente para asegurar que es inyectiva

$\varphi(u,v) = (u - v,\, u + v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es inversible!

9 Bóveda de Viviani.

$R>0$ Esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$

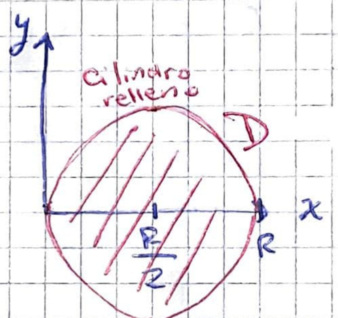
Cilindro relleno $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$



Recomendación del profe: no busques param en coor cilíndricas ni esféricas porque no queda claro cómo se mueven θ, r, φ.

En el plano xy

$D=\left\{(x,y)/\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2,\ 0 \leq x \leq R\right\}$



$T: D \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y)=(x, y, \underbrace{f(x,y)}_{=z})=(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2})$

Esfera $z=\sqrt{R-x^2-y}$ $z>0$, pero como es simétrico después multiplico el Área por 2.

$T_x=\left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

$T_y=\left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

$T_x \times T_y=\left(+\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{+y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right)$

$\|T_x \times T_y\|=\sqrt{\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}+1}$

$$\|T_x \times T_y\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2-1(x^2+y^2)}+1}$$

$$\|T_x \times T_y\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+R^2-(x^2+y^2)}{R^2-(x^2+y^2)}} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2-(x^2+y^2)}}$$

$$A(S) = \iint_D \|T_x \times T_y\|\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy = *$$

$$T(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow D = \left(r\cos\theta - \frac{R}{2}\right)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

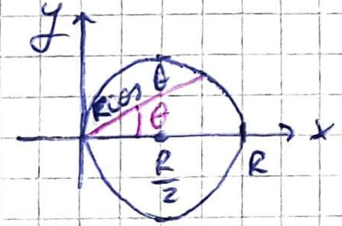
$$r^2\cos^2(\theta) - Rr\cos\theta + \cancel{\left(\frac{R}{2}\right)^2} + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \leq \cancel{\left(\frac{R}{2}\right)^2}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

porque x va de 0 a R

$$r^2 \leq R\cancel{r}\cos\theta$$

$$\boxed{r \leq R\cos\theta}$$



$D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq R\cos\theta\}$

$T(D^*) = D$

$$* \; R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr\,d\theta = -R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^{R\cos\theta} d\theta$$

$$= -R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-R^2\cos^2\theta} - \underset{R>0}{\sqrt{R^2}}\,d\theta = -R\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta}}_{=\,\mathrm{sen}\,\theta} - R\,d\theta$$

$$= -R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,\theta - 1\,d\theta = -R^2\left[-\cos\theta - \theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -R^2\left(-\frac{\pi}{2}+1\right) = \boxed{+R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{R^2\pi}{2} - R^2}$$

$$A(S) = 2\left(\frac{R^2\pi}{2} - R^2\right) = \boxed{R^2\pi - R^2 2}$$

$$\text{o } R^2(\pi - 2)$$

//

10. $\alpha > 0$ $\quad f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ $\quad f > 0$.

Curva $z = f(x)$ girada alrededor del eje z.

$T(x) = (x, 0, f(x)) \rightarrow$ gráfico en plano xz

$T(x, \theta) = (\underbrace{x}_{\text{x sería el radio}} \cos\theta, x \operatorname{sen}\theta, f(x)) \rightarrow$ gira alrededor de z

$T_x = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, f'(x))$

$T_\theta = (-x \operatorname{sen}\theta, x\cos\theta, 0)$

$$T_x \times T_\theta = (-x\cos\theta f'(x), -x\operatorname{sen}\theta f'(x), x\cos^2\theta + x\operatorname{sen}^2\theta)$$
$$= (-x\cos\theta f'(x), -x\operatorname{sen}\theta f'(x), x)$$

$$\|T_x \times T_\theta\|^2 = (-x\cdot\cos\theta \cdot f'(x))^2 + (-x\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot f'(x))^2 + x^2$$

$$= x^2\cos^2\theta \cdot f'(x)^2 + x^2\,\mathrm{sen}^2\theta\, f'(x)^2 + x^2 .$$

$$= x^2\left(f'(x)^2\,(\underbrace{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}_{=1}) + 1\right)$$

$$\|T_x \times T_\theta\| = \sqrt{x^2}\sqrt{1+(f'(x))^2} = x\sqrt{1+f'(x)^2}$$

Como $f>0$, $x>0$.

$$A(S) = \int_D \|T_x \times T_\theta\|\,dx\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\,d\theta .$$

$$\boxed{A(S) = 2\pi\int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

. *Área del paraboloide elíptico*

$1 \leq z \leq 2$ $\quad a=b=1.$ $\quad f(x)=x^2=2$ $\quad y=0.$

$\phi(x) = (x, 0, x^2)$ * $\quad \phi\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\|\phi_x \times \phi_\theta\| = x\sqrt{1+f_x^2} = x\sqrt{1+4x^2}$$

$* \ \phi(x,\theta) = (x\cos\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x^2)$

$$A(S) = 2\pi\int_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\int_5^{17}\sqrt{u}\ \cancel{x}\ \frac{du}{8\cancel{x}} = \frac{\pi}{4}\frac{2u^{3/2}}{3}\Big|_5^{17}$$

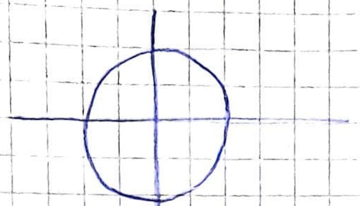
$u = 1+4x^2$
$du = 8x\,dx$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right) \cong \boxed{9{,}819\,\pi}$$

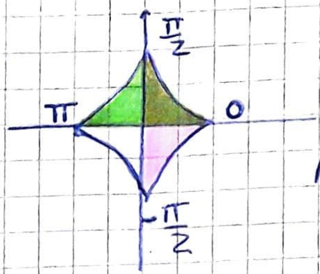
11. C en el plano xy

$$\sigma(\theta) = (\cos^3\theta, \operatorname{sen}^3\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

S sup girar C en x



elevo al cubo



No es suave ni a palos

$\sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$$\sigma(\theta) = (\cos^3\theta, \operatorname{sen}^3\theta)$$

$$\sigma'(\theta) = (-3\cos^2\theta \cdot \operatorname{sen}\theta, \; 3\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta)$$

$\sigma'(\theta) = 0$ cuando

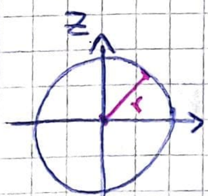
$$\theta = \{0, \tfrac{\pi}{2}, \pi, 3\tfrac{\pi}{2}\}$$

Al revolucionar tengo que fijarme que la curva no se superponga consigo misma.

Se puede revolucionar alrededor del eje y si:

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

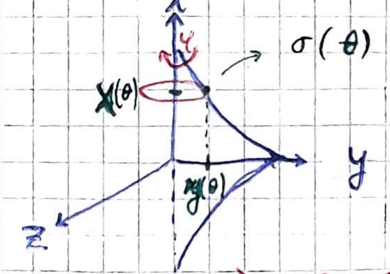
eje x si $0 \le \theta \le \pi$



$C = (r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\sigma(\theta) = (\underbrace{x(\theta)}_{\text{altura}}, \underbrace{y(\theta)}_{\text{radio}})$$



Agarro el punto verde $\sigma(\theta)$ sobre la curva C y lo hago girar sobre el eje X.

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

es análogo a $0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

$T(\theta, \varphi) = (x(\theta),\ y(\theta)\cos(\varphi),\ y(\theta)\,\text{sen}\,\varphi)$

$x(\theta) = \cos^3(\theta) \qquad y(\theta) = \text{sen}^3(\theta)$

a. $\boxed{T(\theta,\varphi) = (\cos^3(\theta),\ \text{sen}^3(\theta)\cos(\varphi),\ \text{sen}^3(\theta)\,\text{sen}(\varphi))}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi \rightarrow$ al rotar π ya tengo la superficie

b. $A(S) = \iint_D \| T_\theta \times T_\varphi \| \, d\theta\, d\varphi$

$T_\theta = (-3\cos^2(\theta)\cdot\text{sen}(\theta),\ 3\,\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi),\ 3\,\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi))$

$T_\varphi = (\ 0\ ,\ -\text{sen}^3(\theta)\,\text{sen}(\varphi),\ \text{sen}^3(\theta)\cos(\varphi)\ )$

$T_\theta \times T_\varphi = (3\,\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\,\text{sen}^3(\theta)\cos^2(\varphi) + 3\,\text{sen}^3(\theta)\,\text{sen}(\varphi)\,\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi),$
$+ 3\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}^3(\theta)\cos(\varphi),$
$3\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}^3(\theta)\,\text{sen}(\varphi))$

$= 3\,(\text{sen}^5(\theta)\cos(\theta)\cos^2(\varphi) + \text{sen}^5(\theta)\cos(\theta) + \text{sen}^2(\varphi),$
$\text{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)\cos(\varphi),$
$\text{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\varphi))$

$= 3\,(\text{sen}^5(\theta)\cos(\theta)\underbrace{(\cos^2(\varphi) + \text{sen}^2(\varphi))}_{=1},$
$\text{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)\cos(\varphi)$
$\text{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\varphi))$

$\| T_\theta \times T_\varphi \|^2 = 3^2 (\text{sen}^{10}(\theta)\cos^2(\theta) + \underline{\text{sen}^8(\theta)\cos^4(\theta)}\cos^2(\varphi)$
$+ \underline{\text{sen}^8(\theta)\cos^4(\theta)}\,\text{sen}^2(\varphi))$

$= 3^2 (\text{sen}^8(\theta)\cos^4(\theta)) \left(\text{sen}^2(\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \underbrace{\cos^2(\varphi) + \text{sen}^2(\varphi)}_{=1}\right)$

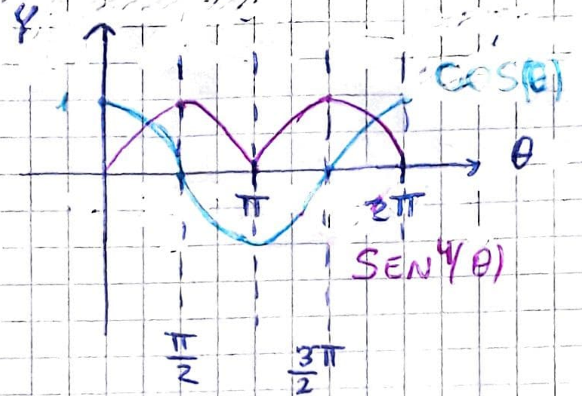
$= 3^2\,\text{sen}^8(\theta)\cos^4(\theta)\,(\text{tg}^2(\theta) + 1)$

$= 3^2\,\text{sen}^8(\theta)\cos^2(\theta)\,\cancel{\cos^2(\theta)}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}$

$1 + \text{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$

$$\|T_\theta \times T_\varphi\| = \sqrt{3^2 \,\text{sen}^8(\theta)\cos^2(\theta)} = 3\,|\text{sen}^4(\theta)||\cos(\theta)|$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\sqrt{\text{sen}^8(\theta)\cos^2(\theta)}\; d\varphi\, d\theta .$$



Hay partes positivas y negativas $\Rightarrow$ es importante el módulo

$$= \pi \cdot 3 \int_0^{2\pi} |\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)|\, d\theta$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad |\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)| = \text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ $\quad |\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)| = -\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)$

$\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ $\quad$ " $\quad = -\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)$

puedo unirlos

$\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi$ $\quad$ " $\quad = \text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)$

$$= 3\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4(\theta)\cos(\theta) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\text{sen}^4(\theta)\cos(\theta) + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \text{sen}^4(\theta)\cos(\theta)\right) d\theta$$

$u = \text{sen}(\theta)$

$du = \cos(\theta)\, d\theta$

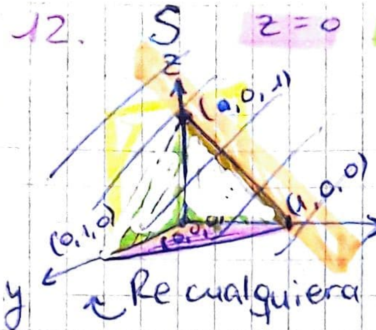
$$= \pi\left(\int_0^1 u^4 + \int_1^{-1} -u^4 + \int_{-1}^0 u^4\right) du$$

$$= \pi\left(\frac{u^5}{5}\Big|_0^1 + \int_{-1}^1 u^4\, du + \frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^0\right) = 6\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{5}\right)$$

$$= 3\pi\left(\frac{2}{5} + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right]\right) = \pi\frac{4}{5} = \boxed{\frac{12}{5}\pi} = A(S)$$

//

12. S $z=0$ $y=0$ $x+z=1$ $x=y$ BORDE DEL TETRAEDRO



◣ → 2 caras
Δ → base
Δ → "adelante"

$x+z=1$ → pasa por el $(0,0,1)$ y $(1,0,0)$ pero no cruza al eje y.

$x=y$ plano con $z \in \mathbb{R}$ pasa por $(0,0,0)$.

$\int_S xy \, dS$ Integral de superficie

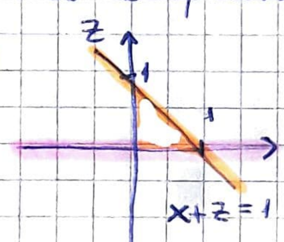
S admite T param regular

$$\boxed{\iint_S f \, dS = \iint_D f(T(u,v)) \, \|T_u \times T_v\|(u,v) \, du \, dv.}$$

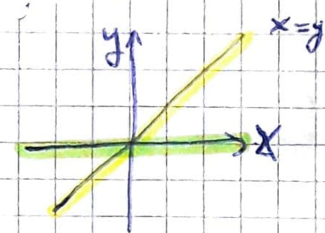
Obs: Práctica 0 Ej 7 tiene un tetraedro parecido.

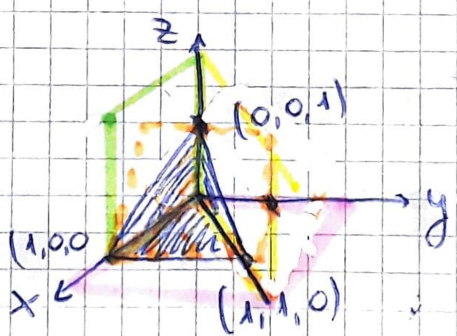
Como el plano:

$\boxed{xz}$



$\boxed{xy}$





Hay que parametrizar cada plano.

$D: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Plano $y=0$ $\quad \int xy \, dS = \boxed{0}$ porque $y=0$ siempre

Plano $z=0$ $\boxed{xy}$ "El piso" $D\{0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\}$

$$\int_0^1 \int_0^x xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Plano $x=y$ $\qquad D\ \{\ 0\leq u\leq 1\ ,\ 0\leq v\leq \underset{\substack{z+x=1\\ v+u=1}}{1-u}\ \}$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u \\ z=v \end{cases} \qquad \begin{aligned} &T_u=(1,1,0) \qquad T_v=(0,0,1)\\ &T_u\times T_v=(1,-1,0)\\ &\|T_u\times T_v\|=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\iint_S xy\ ds=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{1-u} u^2\ dv\,du=\sqrt{2}\int_0^1 u^2(1-u)\,du$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1(u^2-u^3)\,du=\sqrt{2}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}}$$

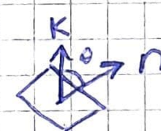
Cuando la sup. se puede representar como un gráfico

$$\boxed{\int_S f\ ds=\int_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}\ dx\,dy}$$

Pág 467 del Marsden-Tromba.

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con el vector unitario k

$$\cos\theta=\frac{n\cdot k}{\|n\|}$$



En este caso $\quad z=f(x)=-x+1 \qquad$ Plano $x+z=1$

Gráfico $(\ \ ,\ 0,\ \cdot\ +1)=T(u,v)$

$\vec{n}=$ normal al plano $=\dfrac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

k tiene la dirección del eje z

$\vec{k}=(0,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\cdot(0,0,1)=0+0+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leq x\leq 1 \qquad 0\leq z\leq -x+1\rightarrow$ miro la proyección en $z=0$ $\rightarrow$ plano xy y se mueve entre 0 y x.

$$\int_0^1\int_0^x xy\cdot\sqrt{2}\ dy\,dx=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\Rightarrow \iint_S xy\,dS = 0 + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cong 0,41$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{8}{12}$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{8}{12}\right) = \boxed{\left(1 + \frac{5}{3}\sqrt{2}\right)\frac{1}{8}}$$

SOSPECHOSO, A NADIE LE DIO IGUAL IDK

13. S BORDE (esfera) $\quad S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\iint_S (x + y * z)\,dS = \iint_D f(T(u,v))\, \|T_u \times T_v\|(u,v)\,du\,dv$$

$$T(u,v) = \begin{cases} x = r\cos(u)\,\text{sen}(v) \\ y = r\,\text{sen}(u)\,\text{sen}(v) \\ z = r\cos(v) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \cos(u)\,\text{sen}(v) \\ y = \text{sen}(u)\,\text{sen}(v) \\ z = \cos(v) \end{array}$$

$u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$

Como la esfera tiene radio 1 $\boxed{r = 1}$

$$T_u = (-\text{sen}(u)\,\text{sen}(v), \cos(u)\,\text{sen}(v), 0)$$
$$T_v = (\cos(u)\cos(v), \text{sen}(u)\cos(v), -\text{sen}(v))$$
$$T_u \times T_v = (-\cos(u)\,\text{sen}^2(v), -\text{sen}(u)\,\text{sen}^2(v),$$
$$-\text{sen}^2(u)\,\text{sen}(v)\cos(v) - \cos^2(u)\cos(v)\,\text{sen}(v))$$

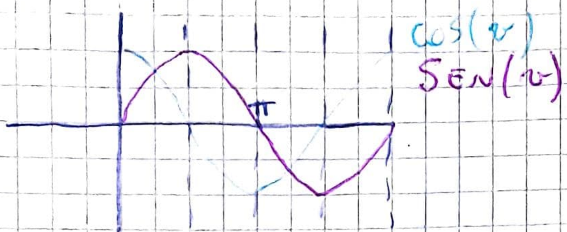
$$\|T_u \times T_v\|^2 = (-\cos(u)\,\text{sen}^2(v))^2 + (-\text{sen}(u)\,\text{sen}^2(v))^2 +$$
$$(-\text{sen}^2(u)\,\text{sen}(v)\cos(v) - \cos^2(u)\cos(v)\,\text{sen}(v))^2$$
$$= \cos^2(u)\,\text{sen}^4(v) + \text{sen}^2(u)\cdot\text{sen}^4(v)$$
$$+ (-\text{sen}(v)(\text{sen}^2(u)\cos(v) + \cos^2(u)\cos(v)))^2$$
$$= \text{sen}^4(v)\underbrace{(\cos^2(u) + \text{sen}^2(u))}_{=1} + \text{sen}^2(v)\cdot$$
$$(\cos(v)\underbrace{(\text{sen}^2(u) + \cos^2(u))}_{1})^2$$

$$= \boxed{\text{sen}^4(v) + \text{sen}^2(v)\cos^2(v)}$$

$$\| T_u \times T_v \| = \sqrt{sen^4(v) + sen^2(v)\cos^2(v)}$$

$$= \sqrt{sen^2(v)\,\underbrace{(sen^2(v) + \cos^2(v))}_{=1}}$$

$$\| T_u \times T_v \| = \sqrt{sen^2(v)} = |sen(v)|$$



$0 \leq v \leq \pi \quad sen(v)$

$\pi \leq v \leq 2\pi \quad -sen(v)$

Falta evaluar $f(T(u,v))$

$$x + y + z = \cos(u)\,sen(v) + sen(u)\,sen(v) + \cos(v)$$

$$u \in [0, 2\pi] \qquad v \in [0,\pi] \Rightarrow |sen(v)| \geq 0$$

$$\int_S f\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos(u)\,sen(v) + sen(u)\,sen(v) + \cos(v)\right) sen(v)\,dv\,du$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\cos(u)\,sen^2(v)\,dv\,du}_{1} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{sen(u)\,sen^2(v)\,dv\,du}_{2}$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\cos(v)\,sen(v)\,dv\,du}_{3}$$

1 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(u)\,du\int_0^{\pi} sen^2(v)\,dv = \underbrace{sen(u)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \int_0^{\pi} sen^2(v)\,dv = \boxed{0}$

2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} sen(u)\,du\int_0^{\pi} sen^2(v)\,dv = \underbrace{-\cos(u)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \int_0^{\pi} sen^2(v)\,dv = \boxed{0}$

3 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\,dt\,du = 2\pi\int_0^{0} t = \boxed{0}$

$t = sen(v)$
$dt = \cos(v)\,dv$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_S f\,ds = 0$ //

$\displaystyle\int_S f\,ds = \int_S f(-y)\,dy$; $x = -y$

Por Teo cambio variable Prop $\int_S f = 0$ si $f(-x) = -f(x)$ f es impar.

14. S esfera radio r para cada $(x,y,z) \in S$

$\rho = \|(x,y,z) - (0,0,r)\| = \|x, y, z-r\|$

$\downarrow$ densidad

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2-2zr+r^2}$

$$\text{masa}(S) = \int_S \rho \, dS$$

$$T(u,v) = \begin{cases} x = r\cos(u)\operatorname{sen}(v) \\ y = r\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) \\ z = r\cos(v) \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, \pi] \end{matrix}$$

$$\rho(T(u,v)) = \sqrt{r^2\cos^2(u)\operatorname{sen}^2(v) + r^2\operatorname{sen}^2(u)\operatorname{sen}^2(v) + r^2\cos^2(v) - 2r^2\cos(v) + r^2}$$

$$= \sqrt{r^2\operatorname{sen}^2(v)\left(\cos^2(u)+\operatorname{sen}^2(u)\right) + r^2\cos^2(v) - 2r^2\cos(v) + r^2}$$

$$= \sqrt{r^2\left(\operatorname{sen}^2(v)+\cos^2(v)\right) - 2r^2\cos(v) + r^2}$$

$$= \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(v)} = \sqrt{2r^2(1-\cos(v))} \underset{r>0}{=} \sqrt{2}\, r\sqrt{1-\cos(v)}$$

$T_u = (-r\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), r\cos(u)\operatorname{sen}(v), 0)$

$T_v = (r\cos(u)\cos(v), r\operatorname{sen}(u)\cos(v), -r\operatorname{sen}(v))$

$T_u \times T_v = (-r^2\cos(u)\operatorname{sen}^2(v), -r^2\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}^2(v),$

$-r^2\operatorname{sen}^2(u)\operatorname{sen}(v)\cos(v) - r^2\cos^2(u)\cos(v)\operatorname{sen}(v))$

$\|T_u \times T_v\|^2 = r^4\cos^2(u)\operatorname{sen}^4(v) + r^4\operatorname{sen}^2(u)\operatorname{sen}^4(v) +$

$\left((-r^2)\operatorname{sen}(v)\cos(v)\underbrace{\left(\operatorname{sen}^2(u)+\cos^2(u)\right)}_{=1}\right)^2$

$= r^4\operatorname{sen}^4(v)\underbrace{\left(\cos^2(u)+\operatorname{sen}^2(u)\right)}_{=1} + r^4\operatorname{sen}^2(v)\cos^2(v)$

$= r^4\operatorname{sen}^2(v)\underbrace{\left(\operatorname{sen}^2(v)+\cos^2(v)\right)}_{=1}$

$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{r^4\operatorname{sen}^2(v)} \underset{r>0}{=} \boxed{r^2\operatorname{sen}(v)}$

$\operatorname{sen}(v) > 0$ si $v \in [0, \pi]$

$$\int_S \rho \, dS = \int_D \rho(T(u,v)) \, \|T_u \times T_v\| \, du\,dv$$

Asumo r fijo $\boxed{r = r_0}$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\, r \sqrt{1-\cos(v)}\; r^2 \operatorname{sen}(v)\; dv\, du$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\, r^3 \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(v)}\, \operatorname{sen}(v)\, dv$$

$$t = 1-\cos(v)$$

$$dt = \operatorname{sen}(v)\, dv$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\, r^3 \int_{t(0)}^{t(\pi)} \sqrt{t}\, dt = 2\pi\sqrt{2}\, r^3 \left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right)\Big|_0^2$$

$$= \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{2}\,\pi\, r^3 \sqrt{8}} = \text{masa} = \frac{8}{3}\pi r^3$$

//

$$\int_S F\, dS := \int_S \langle F\ \nu\rangle\, dS$$ Flujo de F a través de S.

15. Proposición: sea S una sup. suave orientada por la param. regular $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Sea $T_1: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación.
Sea F un campo vectorial continuo sobre S.
Entonces el cálculo $\int_S F \cdot dS$ da el mismo resultado cuando se utiliza la param. T o T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren solo en el signo.

Dem) Si T preserva la orientación

$$V(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|} \qquad P = T(u,v)$$

pero si T invierte la orientación $V(P)$ es el opuesto ya que solo hay 2 orientaciones porque son 2 vectores unitarios perp al mismo plano tg (son múltiplos entre sí)

$$V(P) = -\frac{T_u \times T_v\,(u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} \qquad P = T(u,v)$$

Como T_1 es una reparam de T, existe G una biyección C^1 con Jacobiano no nulo.

$$T_1(u_1, v_1) = T(G(u_1, v_1))$$

T_1 y T tienen la misma orientación si $JG(u_1, v_1) > 0$ $\forall (u_1, v_1) \Rightarrow$

$$V(P) = \frac{T_u \times T_v(u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} = \frac{T_{u_1} \times T_{v_1}(u_1,v_1)}{\|T_{u_1} \times T_{v_1}\|(u_1,v_1)}$$

si $JG(u_1, v_1) < 0 \Rightarrow$

$$v(P) = \frac{T_u \times T_v(u,v)}{\|T_u \times T_v\|(u,v)} = - \frac{T_{u_1} \times T_{v_1}(u_1, v_1)}{\|T_{u_1} \times T_{v_1}\|(u_1, v_1)}$$

Entonces al evaluar la integral se tiene que si T y T_1 preservan la orientación:

$$\int_S F\, dS = \int_S \langle F \cdot v(P)\rangle\, dS$$

$$= \iint_D \left\langle F\left(T(u,v)\right) \cdot \frac{T_u \times T_v(u,v)}{\cancel{\|T_u \times T_v\|(u,v)}} \right\rangle \cdot \cancel{\|T_u \times T_v\|}(u,v)\, dv\, du$$

$$= \iint_D \left\langle F\left(T\left(G(u_1, v_1)\right)\right) \cdot T_u \times T_v(G(u_1, v_1))\right\rangle du\, dv$$

$$= \iint_D \left\langle F\left(T_1(u_1, v_1)\right) \cdot T_{u_1} \times T_{v_1}(u_1, v_1)\right\rangle du\, dv.$$

y si T_1 invierte la orientación

$$= \iint_D \left\langle F\left(T(G(u_1, v_1))\right) \cdot T_u \times T_v(G(u_1, v_1))\right\rangle du\, dv.$$

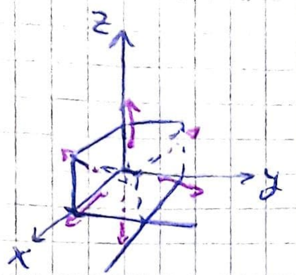
$$= \iint_D \left\langle F\left(T_1(u_1, v_1)\right) \cdot \left(- T_{u_1} \times T_{v_1}(u_1, v_1)\right)\right\rangle du\, dv.$$

(El menos sale afuera)

$$= - \iint_D \langle F(T_1(u_1, v_1)) \, T_{u_1} \times T_{v_1}(u_1, v_1)\rangle\, du\, dv.$$

Queda probada la prop.

17. Cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$



El cubo
$$\begin{cases} T_1 = (x, y, 0) \to \text{el piso} \\ T_2 = (x, y, 1) \to \text{el techo} \\ T_3 = (0, y, z) \\ T_4 = (1, y, z) \\ T_5 = (x, 0, z) \quad T_6 = (x, 1, z) \end{cases}$$
las caras

$$\iint_S F\,ds = \iint_S \langle F\cdot n\rangle\, dS = \iint_D \langle F(T(u,v)) \cdot T_u\times T_v(u,v)\rangle\, du\, dv.$$

$F(x,y,z) = (x,y,z)$

invierte la orientación: apunta hacia el centro del cubo y no "hacia afuera" como quería

T_1 $$-\int_0^1\int_0^1 (x,y,0)(0,0,1)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 0 = 0$$

$T_x = (1,0,0)$ | $T_x = (1,0,0)$

$T_y = (0,1,0)$ | $T_y = (0,1,0)$

$T_x\times T_y = (0,0,1)$ | $T_x\times T_y = (0,0,1)$

T_2 $$\int_0^1\int_0^1 (x,y,1)(0,0,1)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy = \int_0^1 1\,dy = 1$$

→ preserva orientación

T_3 T_4

$T_y = (0\ 1\ 0)$

$T_z = (0\ 0\ 1)$

$T_y\times T_z = (1\ 0\ 0)$

$$-\int_0^1\int_0^1 (0\ y\ z)(1\ 0\ 0)\,dy\,dz = 0$$

$$\int_0^1\int_0^1 (1\ y\ z)(1\ 0\ 0)\,dy\,dz = 1$$

$T_x = (1\ 0\ 0)$

$T_z = (0\ 0\ 1)$

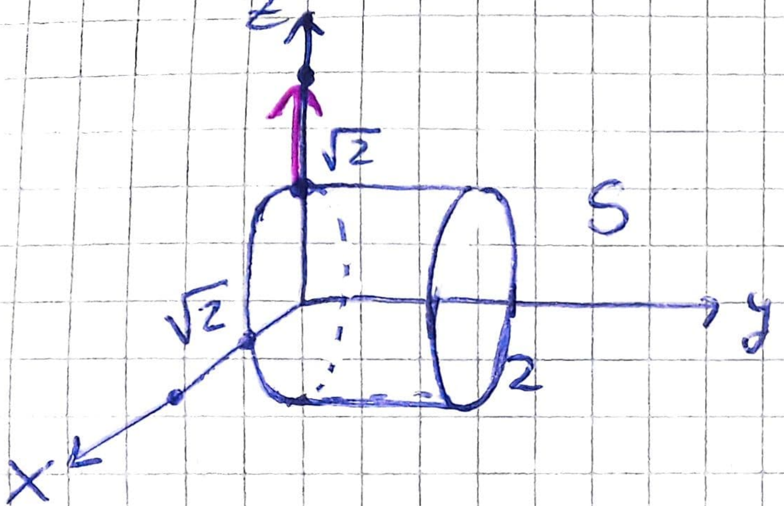
$T_x\times T_z = (0\ {-1}\ 0)$

T_5 T_6 $$\int_0^1\int_0^1 (x\ 0\ z)(0\ {-1}\ 0)\,dx\,dz = 0$$

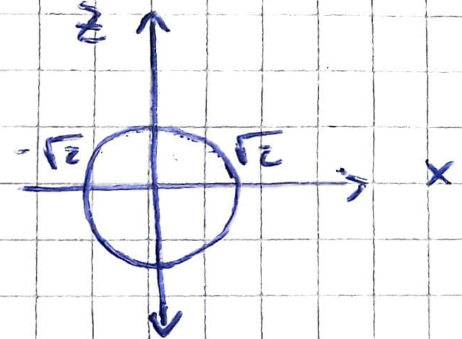
$$-\int_0^1\int_0^1 (x\ 1\ z)(0\ {-1}\ 0)\,dx\,dz = 1$$

$$\int_S F\,dS = 0+1+0+1+0+1 = \boxed{3}$$

18. Superficie $x^2 + z^2 = 2$ $\quad 0 \le y \le 2$



En el plano xz es una circ de radio $\sqrt{2}$



La sup está orientada: normal en $(0, 0, \sqrt{2})$

$\vec{n} = (0, 0, 1)$

La temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por

$T = 3x^2 + 3z^2$ $\quad$ ¿flujo del campo $-\nabla T$ a través de S?

$-\nabla T = (-6x, 0, -6z)$

El gradiente por definición apunta hacia donde crece la función. El calor siempre se mueve hacia donde hay menos calor. El calor está dentro de la superficie y "sale" entonces flujo de campo calor $= -\nabla T$

Obs $\quad$ T es cte en la superficie

$T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2 = 3\underbrace{(x^2+z^2)}_{=2} = 6$

$\phi(\theta, y) = (\sqrt{2}\cos\theta, y, \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)$ sup de revolución alrededor de y.

$\phi : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$

$\phi_\theta = (-\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta, 0, \sqrt{2}\cos\theta)$

$\phi_y = (0, 1, 0)$

$\phi_\theta \times \phi_y = (-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)$

↳ normal, no es unitaria

Queremos $\eta = (0,0,1)$ en $(0,0,\sqrt{2})$ para saber si mi parametrización respeta la orientación

$\Rightarrow \phi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, \sqrt{2})$

$\phi_\theta \times \phi_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, 0, -\sqrt{2}) \rightarrow$ invierte la orientación

$$\text{FLUJO} = \ominus \iint_D -\nabla T(\phi(\theta,y)) \cdot \phi_\theta \times \phi_y(\theta,y)\, d\theta\, dy$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-6x, 0, -6z)\cdot(-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\cos\theta)\, dy\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-6\sqrt{2}\cos\theta, 0, -6\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta)(-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\cos\theta)\, dy\, d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} 12\cos^2\theta + 12\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta = -24\int_0^{2\pi}\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta.$$

$$= -24 \left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \cos \theta \ldots}_{=0} \right.$$

$$= -24\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \, d\theta \right)$$

Identidad

$$\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

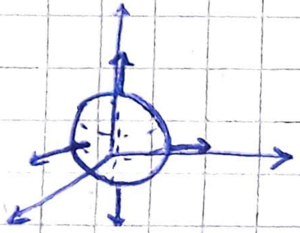
$$= -12 \left(\int_0^{4\pi} \cos(u) \frac{du}{2} + 2\pi \right)$$

↓

$u = 2\theta$

$du = 2\, d\theta$

$$= -12 \left(\underbrace{\operatorname{sen}(u) \Big|_0^{4\pi}}_{=0} + 2\pi \right) = \boxed{-24\pi}$$

19. 

S esfera $\underbrace{\text{unitaria}}_{r=1}$ orientada con $\vec{n}$ exterior

F campo vectorial, Fr su comp radial

$$T(\theta,\phi) = (\overset{=1}{r}\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\phi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\phi,\ r\cos\phi)$$

$\theta \in [0,2\pi]$ $\quad T_\theta = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\phi,\ r\cos\theta\ \mathrm{sen}\,\phi,\ 0)$

$\phi \in [0,\pi]$ $\quad T_\phi = (r\cos\theta\cos\phi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi,\ -r\,\mathrm{sen}\,\phi)$

$\|T_\theta \times T_\phi\| = \underset{=1}{r^2}\,\mathrm{sen}(\phi)$ → Lo hice en ej 14.

$$\int_S F \cdot ds = \int_D \left(F(T(\theta,\phi)) \cdot v \right) \cdot \|T_\theta \times T_\phi\| (\theta,\phi) \quad d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle F(T(\theta,\phi)) \cdot \frac{T_\theta \times T_\phi}{\cancel{\|T_\theta \times T_\phi\|}} (\theta,\phi) \right\rangle \cancel{\|T_\theta \times T_\phi\|} (\theta,\phi) \; d\theta \, d\phi$$

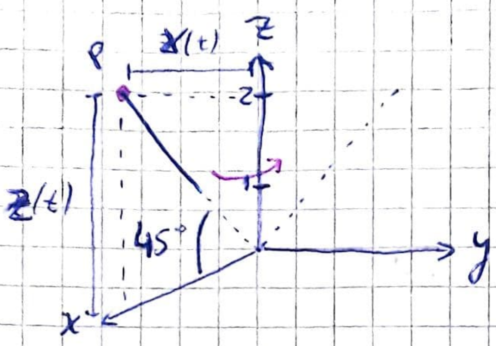
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \quad F_r \cdot \operatorname{sen}(\phi) \quad d\theta \, d\phi$$

$T_\theta \times T_\phi$ nos queda un vector y se puede sacar sen(ϕ) de factor común. No queda claro qué es comp. radial.

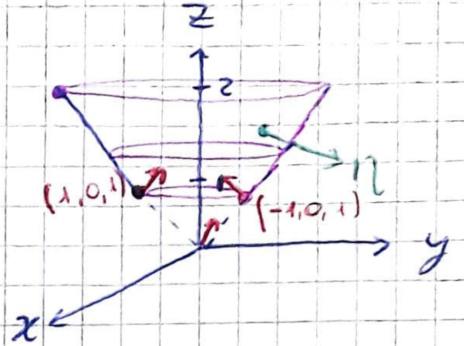
A la función nos la dan en cilíndricas $\rightarrow$ nos da un (F_r, θ, φ) para cada punto.

20. $z^2 = x^2 + y^2 \quad 1 \leq z \leq 2$ orientada η exterior

Voy a pensar al cono como una sup de revolución:



$\longrightarrow$



plano xz

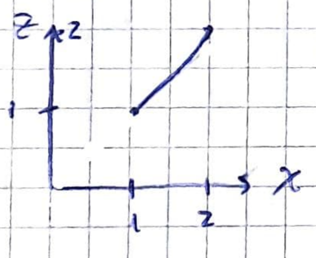
$P = (\underbrace{x(t)}_{\text{radio}}, 0, \underbrace{z(t)}_{\text{altura}}) \xRightarrow{\text{revolución}} T = \begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = x(t)\,\text{sen}\,\theta \\ z = z(t) \end{cases}$

La altura siempre es $z(t) = z$

$\theta \in [0, 2\pi]$

La recta del plano xz es

$\sigma(t) = (x(t), \; z(t)) = (t, t) \qquad t \in [1, 2]$



$z = x$

Entonces param del cono.

$\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ no es inyectiva

$T(t, \theta) = (t\cos\theta, \; t\,\text{sen}\,\theta, \; t) \rightarrow$ Geogebra approves ✓

$T_t = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1)$

$T_\theta = (-t\,\text{sen}\,\theta, \; t\cos\theta, \; 0)$

$T_t \times T_\theta = (-t\cos\theta, \; -t\,\text{sen}\,\theta, \; t) \rightarrow$ si $t > 0$ apunta hacia adentro
$\downarrow$
en coor z

$T_t \times T_\theta(1, 0) = (-1, 0, 1)$ | $T_t \times T_\theta(1, \pi) = (1, 0, 1)$

$T(1, 0) = (1, 0, 1)$ | $T(1, \pi) = (-1, 0, 1)$

$$\int_S F \cdot dS = \int_S (x^2, y^2, z^2) = \int_D F(T(t,\theta)) \, \| T_t \times T_\theta \| \, dt \, d\theta .$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (t^2\cos^2\theta, t^2 sen^2\theta, t^2)(-t\cos\theta, -t\, sen\,\theta, t) \, dt \, d\theta .$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -t^3\cos^3\theta - t^3 sen^3\theta + t^3 \quad dt \, d\theta$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -t^3 (\cos^3\theta + sen^3\theta) \, dt\,d\theta + \int_1^2\int_0^{2\pi} t^3 \, dt \, d\theta$$ Separo la integral

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{t^4}{4}\Big|_1^2 (\cos^3\theta + sen^3\theta) \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{t^4}{4}\Big|_1^2 \, d\theta .$$

$$= -\left[4 - \frac{1}{4}\right] \int_0^{2\pi} \cos^3\theta + sen^3\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{15}{4}$$

$$= -\frac{15}{4}\Bigg[\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^3\theta \, d\theta}_{1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} sen^3\theta \, d\theta}_{2}\Bigg] + \underbrace{2\pi \, \frac{15}{4} \, \frac{1}{2}}$$

1) $$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot \cos\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - sen^2(\theta)) \cos\theta \, d\theta$$

$u = sen\,\theta$

acá ya nos damos cuenta que da 0

$du = \cos\theta \, d\theta$

$$= \int_{u(0)}^{u(2\pi)} (1 - u^2) \, du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{u(0)}^{u(2\pi)}$$

$$= \left[sen\,\theta - \frac{sen\,\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

2) $$\int_0^{2\pi} sen^2(\theta)\cos(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2\theta) \cos(\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) \, d\theta}_{=0} = sen\,\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_S F \, dS = \boxed{-15\,\frac{\pi}{2}}$$ Como mi param invertía la orientación agrego un menos.

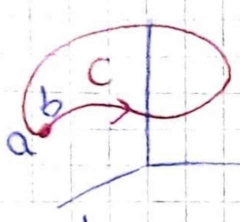
21. (Spoiler teorema de Stokes)

S superficie orientada. C curva cerrada borde de S

F campo gradiente $F = \nabla f$.

$$\int_C F\, ds = 0$$ porque campo gradiente en curva cerrada

$$= f(b) - f(a) = 0.$$



$a = b$

Queremos ver que

$$\int_S \nabla \times F \cdot dS = 0$$ siempre que $F = \nabla F$

$\nabla \times F$ campo, "rotor de F"

Def: $$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$ Prod vectorial entre ∇ y F gradiente
↓
notación

$$\text{Rotor} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Falta probar que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ $\forall f$ de clase C^2

. derivar dos veces me va a dar cero : La integral es cero porque $\nabla \times \nabla f = 0$

$$\nabla f = F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (F_1, F_2, F_3)$$

Reemplazo en "rotor"

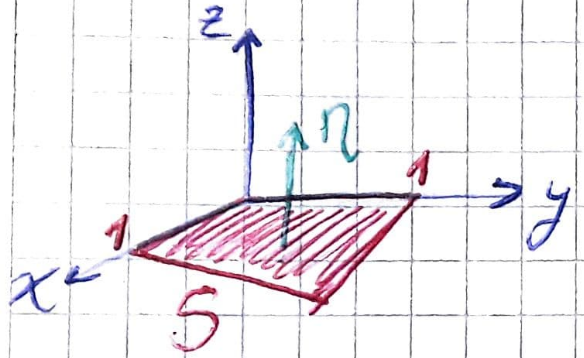
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

Como las derivadas cruzadas son iguales (Clairaut - Schwartz) se cancelan todas entre sí

$$= (0, 0, 0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \int_S \nabla \times F\, dS = 0 \text{ cuando } \nabla f = F$$

22. $F(x,y,z) = (x, x^2, y x^2)$ campo

Plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.



Param el cuadrado:

$$T(x,y) = (x, y, 0)$$

con $0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$

$$T_x(x,y) = (1,0,0) \qquad T_y(x,y) = (0\ 1\ 0)$$

$$T_x \times T_y = (0\ 0\ 1)$$

$$\iint_S F = \int_0^1 \int_0^1 (x, x^2, yx^2)(0\ 0\ 1)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 y x^2\, dx\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$