Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 1, 2do. cuatrimestre 2020

La materia

1. Notas + clases teóricas + videos complementarios + videos prácticos + clases reducidas.
2. Zoom + Campus virtual + email
   Por favor, verifiquen que están inscriptos en SIU Guarani + Campus + un turno práctico.
3. Dos partes.
   - Integración en curvas y superficies en $\mathbb{R}^N$.
   - Ecuaciones diferenciales.
4. Dos parciales, dos recuperatorios (uno para cada parcial).

Curvas

Ya sabemos cómo integrar en “regiones elementales” de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Ahora queremos integrar en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que resultan “objetos geométricos”. En particular, nos interesa integrar en curvas.

Definición: $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$$

continua y suryectiva.

Ejemplo: Si $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, entonces $\mathcal{C}$ es una curva: la función $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}$, $\sigma(t) = (cos(t), sen(t))$ es continua y suryectiva.

Curvas

La función σ de la definición se denomina una parametrización de $\mathcal{C}$.

Observación: La continuidad de σ implica la continuidad de todas sus coordenadas. Por ejemplo, si $n = 3$ y

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

entonces las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, definidas en $[a, b]$, son continuas.

En particular, toda curva es un conjunto acotado (es decir, está contenida en una bola de radio suficientemente grande).

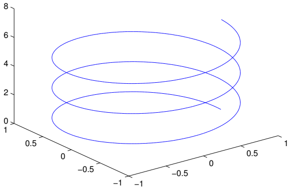
Para ver esto, observamos que todas las coordenas están acotadas por ser funciones continuas definidas sobre un intervalo compacto.

Curvas

Una curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Ejemplo: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida por la parametrización

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = (cos(3t), sen(3t), t).$$



Notemos que la curva $\mathcal{C}$ puede parametrizarse de otras formas:

$$\tilde{\sigma} : [0, 6\pi] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(t) = (cos(t), sen(t), t/3),$$

$$\hat{\sigma} : [0, \sqrt{2\pi}] \to \mathcal{C}, \quad \hat{\sigma}(t) = (cos(3t^2), sen(3t^2), t^2).$$

Curvas

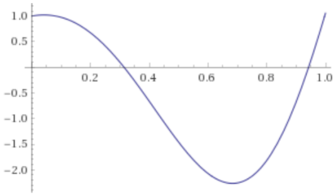
Un ejemplo simple de curva plana (en $\mathbb{R}^2$) es el gráfico de una función continua:

Ejemplo: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$G_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x),\ a \leq x \leq b \right\}.$$

Entonces G_f (el gráfico de f) es una curva, que admite la parametrización

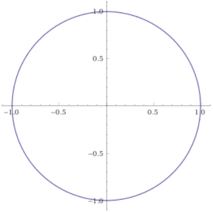
$$\sigma : [a, b] \to G_f, \quad \sigma(x) = (x, f(x)).$$



Curvas

Una curva $\mathcal{C}$ se dice simple, abierta, si no se corta a si misma, es decir, si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ que es inyectiva.

A su vez, $\mathcal{C}$ se dice simple, cerrada, si admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ que es inyectiva en $[a, b)$ con $\sigma(a) = \sigma(b)$.



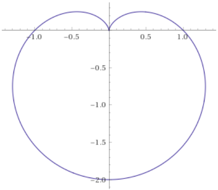


Figura: Curvas cerradas simples: el círculo y la cardiodie.

Curvas

Una curva puede no ser abierta ni cerrada (ver la figura). En lo que sigue, vamos a suponer que toda curva puede escribirse como unión finita de curvas abiertas y/o cerradas que se intersecan –de dos en dos– en a lo sumo un punto.

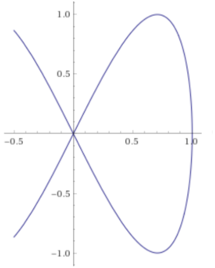


Figura: $\sigma(t) = (cos(t), sen(2t))$ con $t \in [-2\pi/3, 2\pi/3]$

Curvas

La propia definición de curva implica que podemos concatenar dos o más curvas para obtener una nueva. Por ejemplo, si $\sigma_1 : [a,b] \to \mathcal{C}_1$ y $\sigma_2 : [b,c] \to \mathcal{C}_2$ son parametrizaciones de dos curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tales que $\sigma_1(b) = \sigma_2(b)$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es la curva cuya parametrización está definida por

$$\sigma(t) : [a,c] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t), \text{ si } t \in [a,b], \\ \sigma_2(t), \text{ si } t \in [b,c]. \end{cases}$$

Curvas

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una curva que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ y sea $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección continua. Si definimos $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ por $\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma\big(h^{-1}(\tau)\big)$, entonces $\tilde{\sigma}$ es una parametrización de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una "reparametrización de σ".

Notar que esto implica la existencia y continuidad de $h^{-1} : [c, d] \to [a, b]$.

Recta tangente y suavidad

Un concepto central es el de suavidad. Intuitivamente, una curva suave es una que admite recta tangente en cada punto.

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una curva y $P_0 \in \mathcal{C}$. Una recta L por P_0 se llama tangente a $\mathcal{C}$ en P_0 si es el límite de rectas secantes por P y P_0, con $P \in \mathcal{C}$. Por "límite" entendemos que el ángulo (entre 0 y $\pi/2$) entre L y la secante por P_0 y P tiende a 0 cuando P tiende P_0.

Recta tangente y suavidad

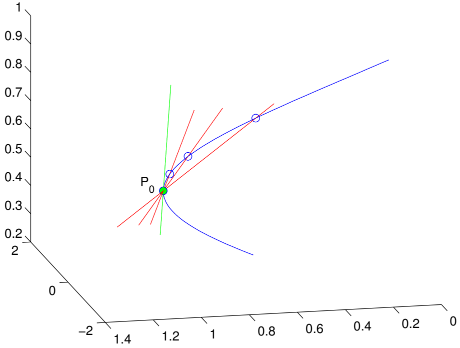


Figura: Recta tangente por P_0 y secantes por P_0 y distintos P (los puntos P están de un solo "lado" de P_0 por una cuestión gráfica).

Recta tangente y suavidad

¿Cómo determinar una recta tangente? Por medio de una parametrización. Más precisamente, si tenemos una “buena” parametrización podemos determinar rectas tangentes con el siguiente resultado.

Proposición: Si $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ es una curva que admite una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ inyectiva, diferenciable en $t_0 \in [a, b]$, tal que

$$\sigma'(t_0) := \big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big) \neq (0, 0, 0),$$

entonces $\mathcal{C}$ tiene recta tangente en $P_0 = \sigma(t_0)$, con dirección $\sigma'(t_0)$. En particular, la tangente se puede escribirse como

$$L_{P_0} \equiv \lambda\sigma'(t_0) + \sigma(t_0).$$

Recta tangente y suavidad

La Proposición anterior nos provee un criterio para determinar cuando existe una recta tangente. En tal sentido, tenemos la siguiente definición.

Definición: Una parametrización $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ de clase C^1 de una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ con $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in [a, b]$ tal que:

1. σ es inyectiva en $[a, b]$, o
2. σ es inyectiva en $[a, b)$, $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $\sigma'(a) = \sigma'(b)$,

se denomina una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

Una curva $\mathcal{C}$, abierta o cerrada, se dice suave si admite una parametrización regular.

Recta tangente y suavidad

Ejemplo 1: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por

$$\sigma : [-1, 1] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = (t, |t|).$$

Es claro que σ no es regular en $t = 0$. Sin embargo, esto no implica que $\mathcal{C}$ no sea regular.

Ejemplo 2: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la curva parametrizada por

$$\sigma : [-1, 1] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = (t, t^2).$$

Es claro que σ es regular. Ahora, también

$$\tilde{\sigma} : [-1, 1] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(t) = (sg(t)\sqrt{|t|}, |t|)$$

es otra parametrización, que no es regular en $t = 0$.

Ejemplo 3: La circunferencia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ es una curva suave, dado que admite la parametrización regular

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}, \quad \sigma(t) = (cos(t), sen(t)).$$

Recta tangente y suavidad

Hablamos de curvas dado que queremos integrar funciones en curvas. Ahora bien, una curva puede parametrizarse de muchas maneras, lo cual podría significar que tenemos problemas con la integral de curvas. En tal sentido, tenemos:

Definición: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva abierta, simple, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $h : [a, b] \to [c, d]$ una biyección C^1 con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea

$$\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(\tau) = \sigma\big(h^{-1}(\tau)\big).$$

Observamos que $\tilde{\sigma}$ es continua, suryectiva, de clase C^1 con

$$\tilde{\sigma}'(t) = \sigma'(h(t))\, h'(t) \neq (0, 0, 0)$$

para todo $t \in [a, b]$, es decir, es una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de $\mathcal{C}$.

Recta tangente y suavidad

Es claro que $h(c) = a$ y $h(d) = b$, o $h(c) = b$ y $h(d) = a$. Así,

$$\tilde{\sigma}(c) = \sigma(a) \text{ y } \tilde{\sigma}(d) = \sigma(b), \ o$$

$$\tilde{\sigma}(c) = \sigma(b) \text{ y } \tilde{\sigma}(d) = \sigma(a).$$

En el primer caso, decimos que $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación, mientras que en el segundo se dice que $\tilde{\sigma}$ invierte la orientación.

Ejemplo 1: Si $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ es una parametrización de clase C^1 de una curva $\mathcal{C}$, la parametrización

$$\sigma_{op} : [a, b] \to \mathcal{C}, \quad \sigma_{op}(t) = \sigma(a + b - t),$$

se dice la trayectoria opuesta a σ, que invierte la orientación.

Recta tangente y suavidad

Ejemplo 2: Si $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ es una parametrización de clase C^1 de una curva $\mathcal{C}$, la parametrización

$$\tilde{\sigma} : [0, 1] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(t) = \sigma(a + (b - a)t),$$

preserva la orientación.

Ejemplo 3: Si $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}$, $\sigma(t) = (cos(t), sen(t))$ es una parametrización de la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$,

$$\tilde{\sigma} : [0, \pi] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(t) = (cos(2t), sen(2t)),$$

es una reparametrización de $\mathcal{C}$. Sin embargo,

$$\rho : [0, 4\pi] \to \mathcal{C}, \quad \rho(t) = (cos(t), sen(t)),$$

no es una reparametrización de $\mathcal{C}$.