Complemento a clases teóricas 9 y 10

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3)

⊛ Ejemplo / Comentario sobre Green

⊛ Stokes vale sobre regiones más generales...

Recordemos:

$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} , \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ y $R = B_1(0,0)$.

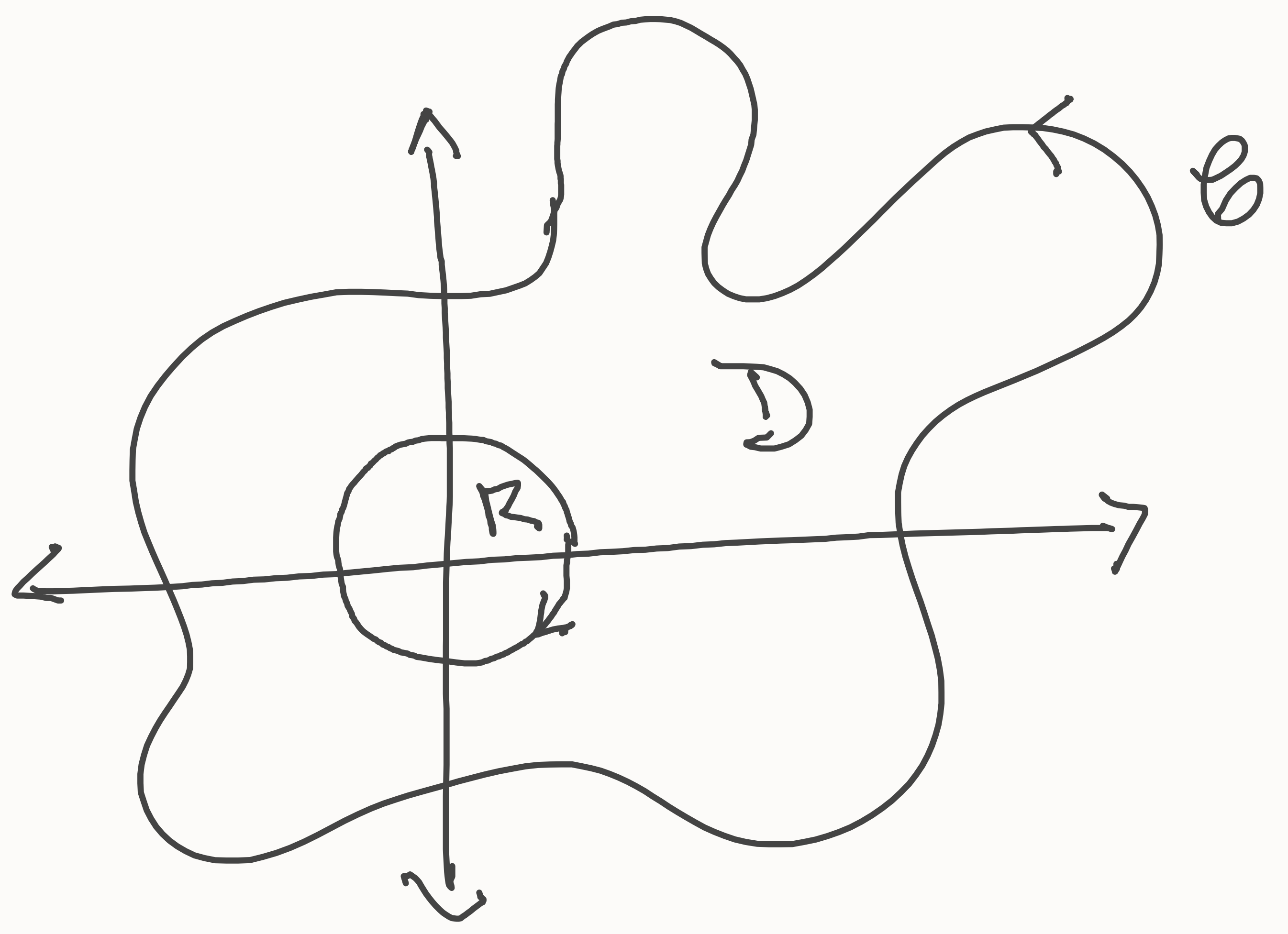
Vimos que:

1) $\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dxdy = 0$ pues $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

2) $\int_{\partial R^+} F \cdot ds = 2\pi$. (hicimos la cuenta)

Observación: Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, simple y suave que encierra una región donde vale el Green que contiene a $R = B_1(0,0)$.

¿Cuánto vale $\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds$?



. Sea D la región que encierra $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $R \subseteq D$.

. Como vale Green en $D \setminus R$ $\Rightarrow$

$$\iint_{D\setminus R} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dxdy = \int_{\partial (D\setminus R)^+} F \, ds.$$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \iint_{D\setminus R} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\,dy = 0.$

$$\Rightarrow \int_{\partial(D\setminus R)^+} F\, ds = 0$$

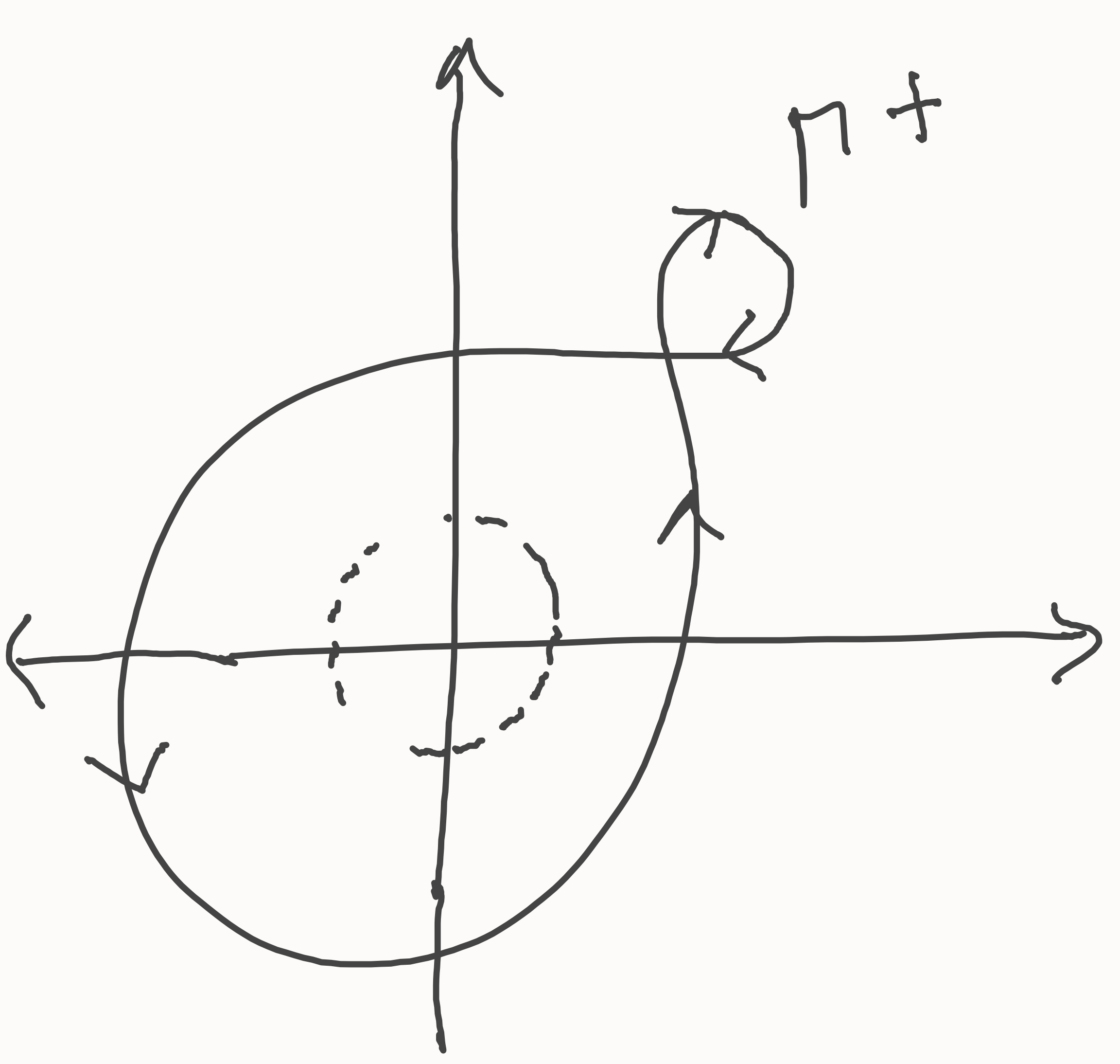
Pero

$$\int_{\partial(D\setminus R)^+} F\, ds = \int_{\mathcal{C}^+} F\, ds - \int_{\partial R^+} F\, ds.$$

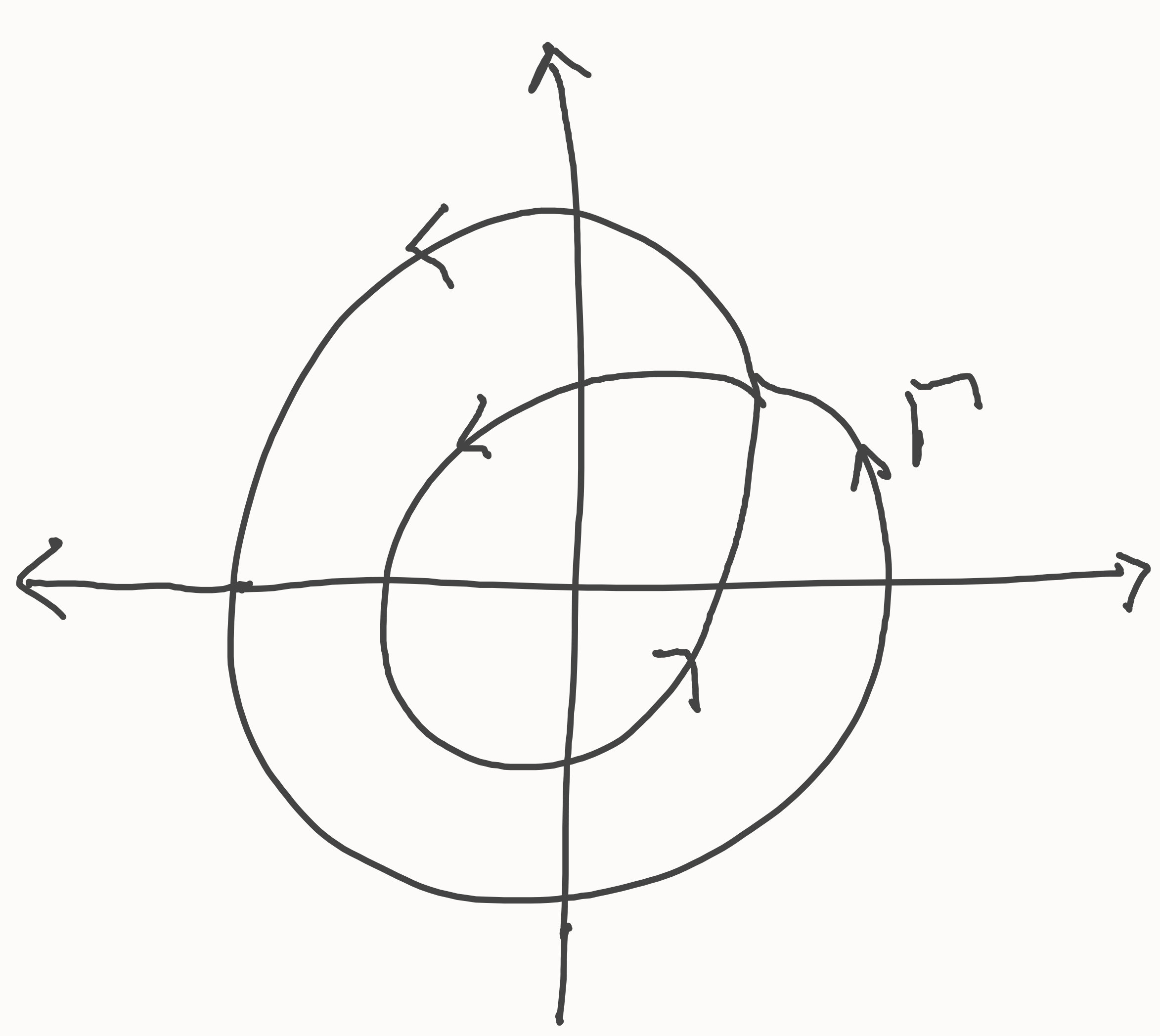
Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\, ds = \int_{\partial R^+} F\, ds = 2\pi.$$

- ¿ $\int_{\Gamma^+} F\cdot ds$?



$$\int_{\Gamma^+} F\cdot ds =$$



$$\Rightarrow \int_{\Gamma^+} F\cdot ds =$$

Teorema Stokes:

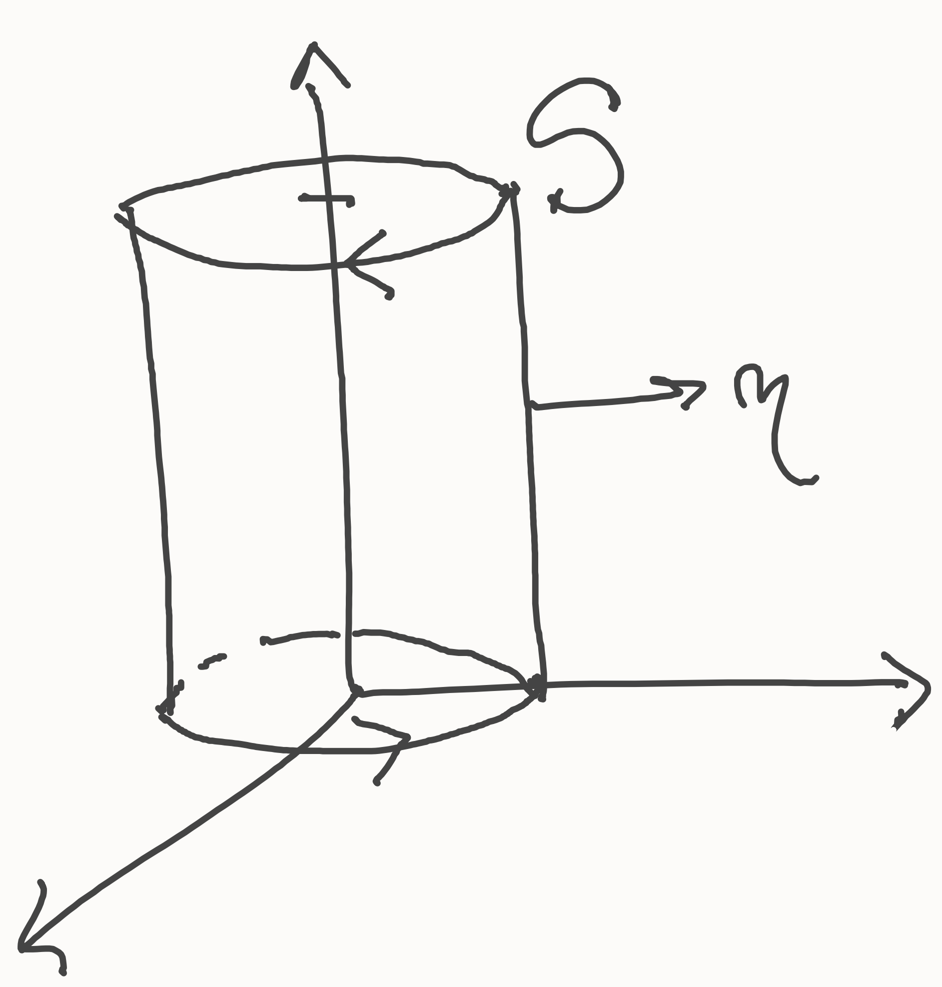
$S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie y $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región donde vale Green.

Supongamos que $T \in \mathcal{C}^2$ y que ∂S^+ es la orientación dada por $T(\partial D^+)$.

Si F es un campo $\mathcal{C}^1$ dif. en $S \Rightarrow$

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = \int_{\partial S^+} F \cdot ds.$$

Ejemplo: Sea $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1, \ 0 \le z \le 2\}$ (cilindro)



S se parametriza como

$T(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$

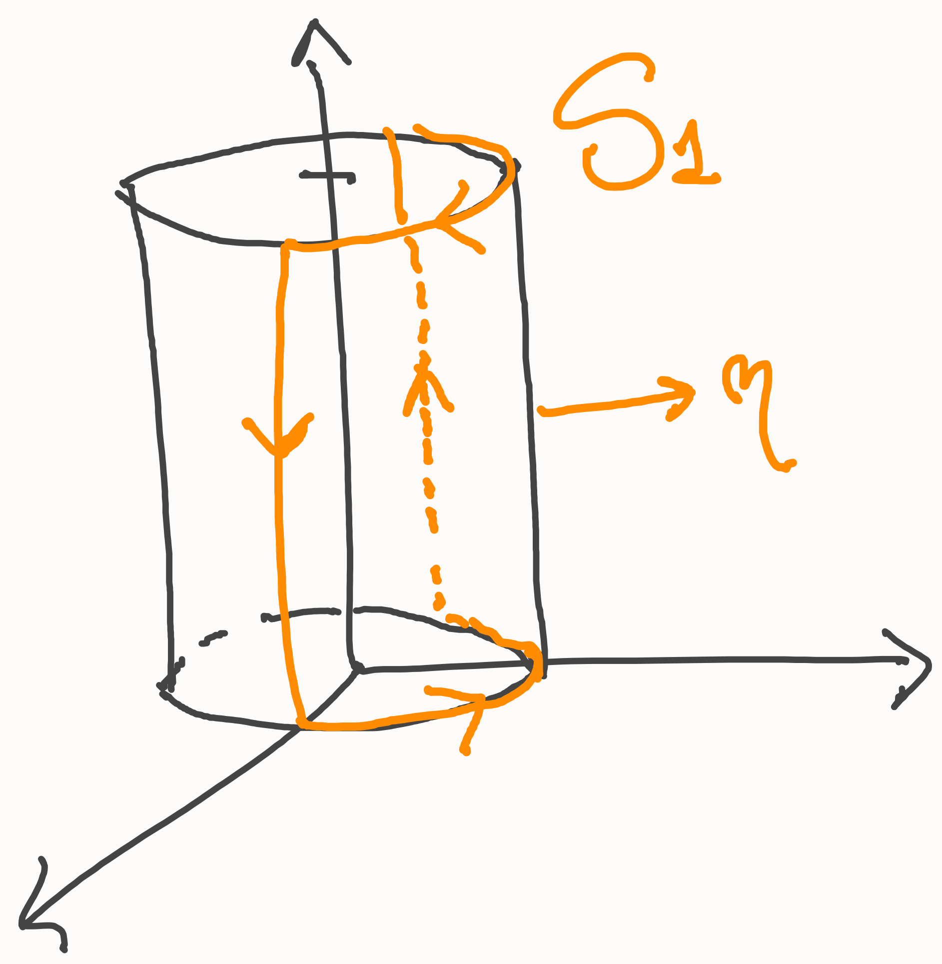
$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0,2]$.

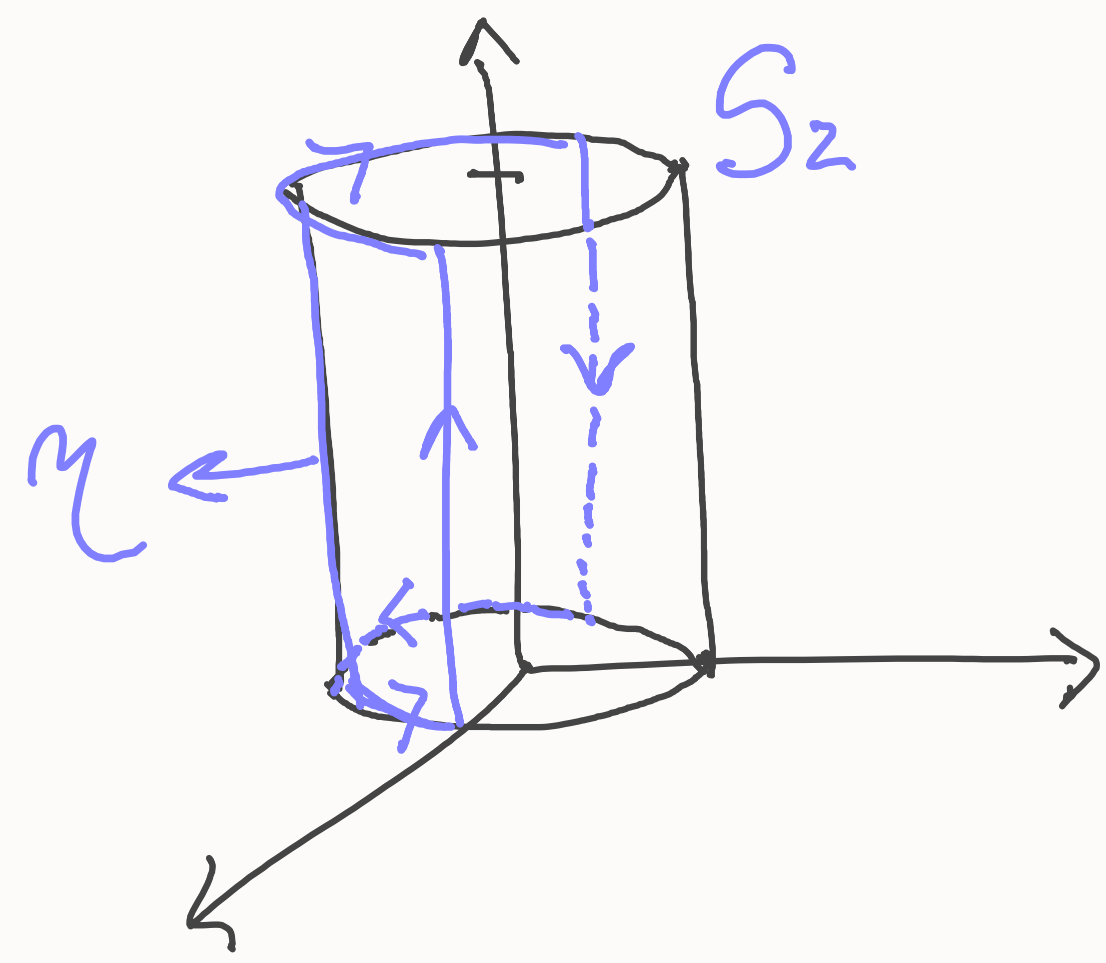
- No es regular:
  - T es $\mathcal{C}^2$ ✓
  - $T_\theta \times T_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \neq (0,0,0)$
  - T no es inyectiva.

Objetivo: Si F es un campo $\mathcal{C}^1$ en S, queremos ver que vale Stokes.

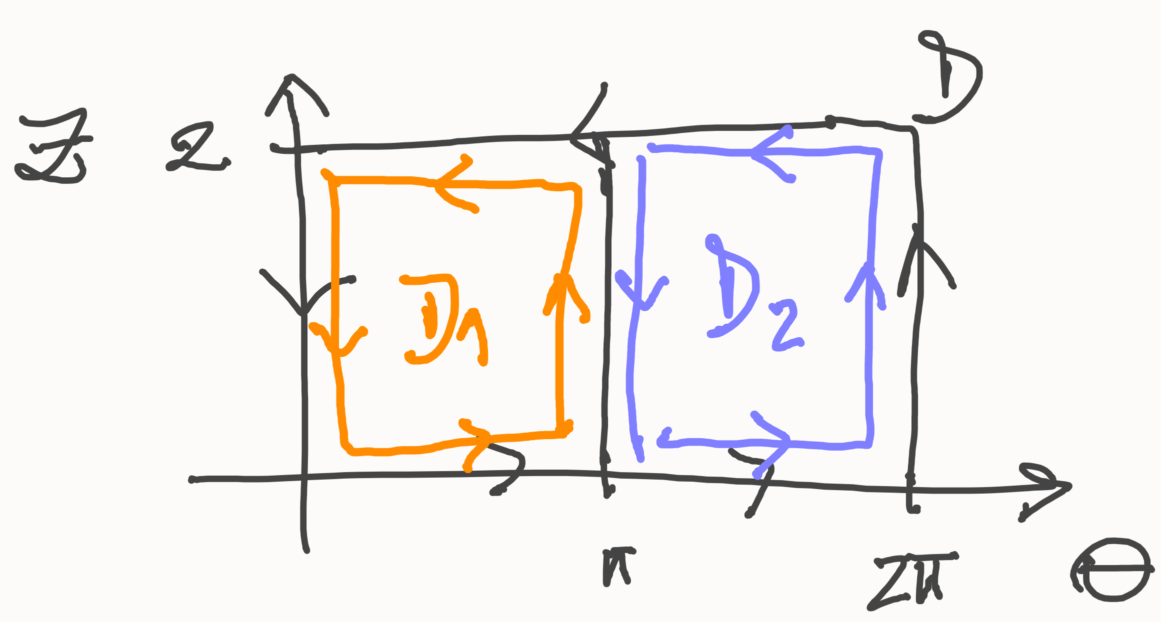
Partimos $S = S_1 \cup S_2$ donde

- $S_1 = T([0,\pi] \times [0,2])$
- $S_2 = T([\pi, 2\pi] \times [0,2])$





Además



Vale Stokes en S_1 con $T_1 = T|_{D_1}$ y vale Stokes en S_2 con $T_2 = T|_{D_2}$.

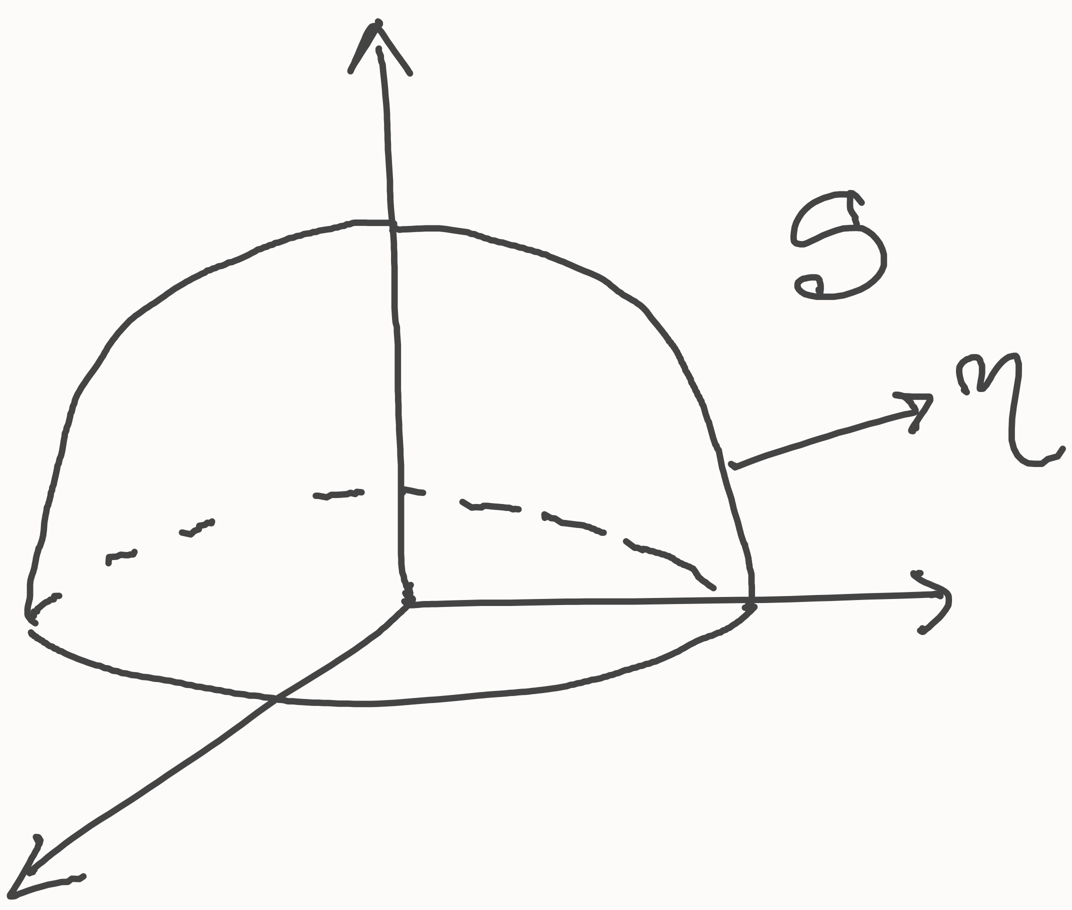
Entonces:

$$\iint_S \nabla \times F\, dS = \iint_{S_1} \nabla \times F \cdot dS + \iint_{S_2} \nabla \times F\, dS$$

$$= \int_{\partial S_1^+} F \cdot dS + \int_{\partial S_2^+} F\, dS$$

$$= \int_{\partial S^+} F \cdot ds \quad \boxtimes$$

Ejemplo: Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ → hemisferio Norte de la esfera de radio 1 y centro $(0,0,0)$.



- S orientada con normal exterior.

¿Si F es un campo $\mathcal{C}^1$ en S, vale Stokes?

Sea $T(\theta,\varphi)=(\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)$

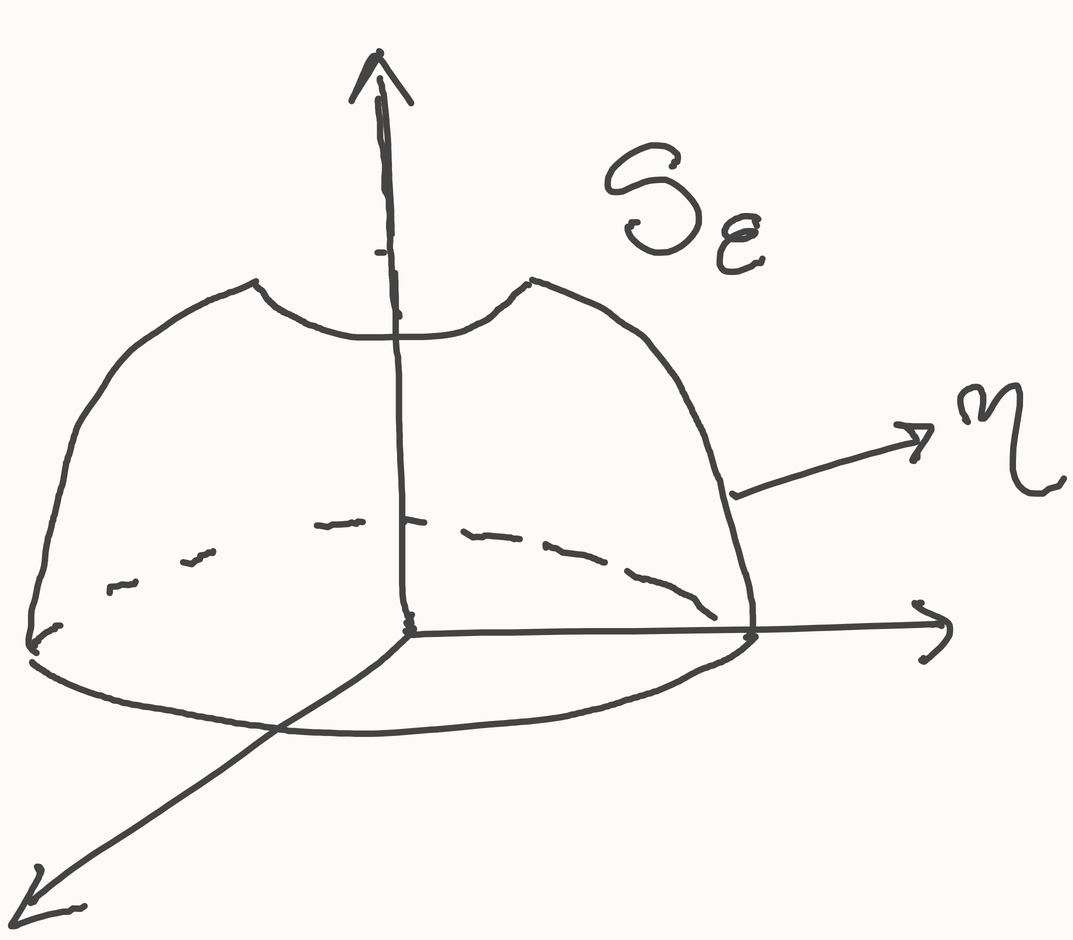
$\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$.

- T es $\mathcal{C}^2$
- T no es inyectiva / $T(0,\varphi)=T(2\pi,\varphi)\ \forall\varphi$
- $T_\theta\times T_\varphi=\operatorname{sen}\varphi\, T(\theta,\varphi)$

$\Rightarrow T_\theta\times T_\varphi=(0,0,0)$ en $\varphi=0$ ie en $(0,0,1)$

Veamos que vale el teorema de Stokes en S.

Para $\varepsilon>0$, consideramos $S_\varepsilon=T([0,2\pi]\times[\varepsilon,\pi/2])$



- Seguimos teniendo el problema de la inyectividad de $T_\varepsilon:=T|_{[0,2\pi]\times[\varepsilon,\pi/2]}$

- Pero ya no más el de la normal.

- Haciendo como con el cilindro, vemos que

vale Stokes en S_ε [la partimos en 2:
$T([0,\pi]\times[\varepsilon,\pi/2])$ ∧ $T([\pi,2\pi]\times[\varepsilon,\pi/2])$ etc...]

$$\Rightarrow \iint_{S_\varepsilon} \nabla\times F\, dS = \int_{\partial S_\varepsilon^+} F\cdot ds.$$

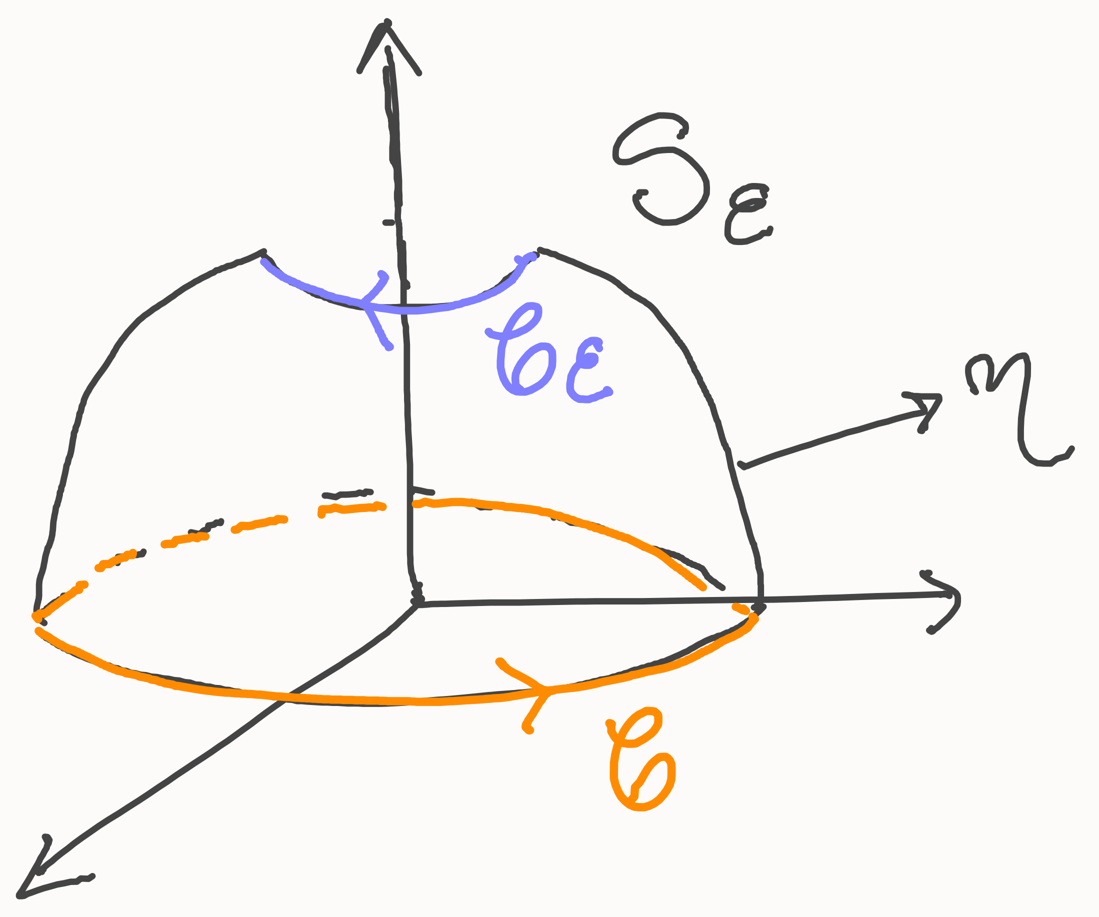
Tenemos lo siguiente:

$$\iint_S \nabla\times F\, dS = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{S_\varepsilon} \nabla\times F\, dS$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial S_\varepsilon^+} F\, ds.$$

Pero:

$$\int_{\partial S_\varepsilon^+} F\, ds = \int_{\mathcal{C}^+} F\, ds + \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^+} F\, ds$$



$$\Rightarrow \left|\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^+} F\, ds\right| = \left|\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^+} \langle F, \mathcal{T}\rangle ds\right| \leq \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^+} |\langle F, \mathcal{T}\rangle|\, ds$$

$$\leq M.\, \mathrm{long}(\mathcal{C}_\varepsilon^+) \xrightarrow[\varepsilon\to]{} 0$$

Luego, $$\iint_S \nabla\times F\, dS = \int_{\mathcal{C}^+} F\, ds + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^+} F\, ds$$

$$= \int_{\mathcal{C}^+} F\, ds \quad \wedge \quad \boxed{\mathcal{C}^+ = \partial S^+} \Rightarrow \checkmark$$

☒