LONGITUD DE ARCO

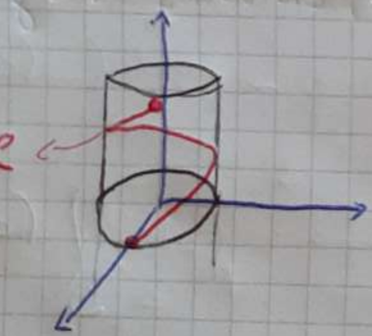
RECORDAR: SEA C UNA CURVA SIMPLE, SUAVE A TROZOS, Y SEA $\Gamma: I \to \mathbb{R}^n$ UNA PARAMETRIZACIÓN REGULAR A TROZOS DE C.
LA LONGITUD DE C ES

$$\ell(C) = \int_I \|\Gamma'\|$$

OBS: NO DEPENDE DE $\underline{\Gamma}$

EJEMPLOS:

1) $\Gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



HÉLICE

TENEMOS QUE $\ell(C) = \int_0^{2\pi} \|\Gamma'(t)\| dt$

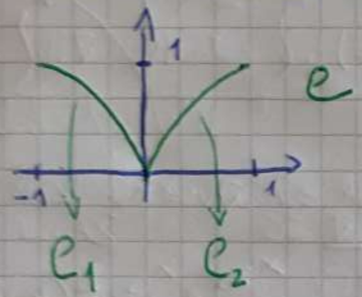
$\Gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$

ASÍ, $\ell(C) = \int_0^{2\pi} \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

2) CALCULAR LA LONGITUD DE LA CURVA DE ECUACIÓN $x^2 = y^3$, CON x TOMANDO VALORES ENTRE -1 Y 1

EL GRÁFICO DE LA CURVA ES



$\mathcal{C}$ ES UNA CURVA SUAVE A TROZOS

ENCONTREMOS UNA PARAMETRIZACIÓN DE $\mathcal{C}$. AFIRMO QUE ES:

$\Gamma(t) = (t^3, t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$

ES OBVIO QUE $Im(\Gamma) \subset \mathcal{C}$: $(t^3)^2 = (t^2)^3$

VEAMOS QUE $\mathcal{C} \subset Im(\Gamma)$: SEA $(x,y) \in \mathcal{C}$, ENTONCES $x^2 = y^3$

POR LO TANTO $y \geq 0$ Y EXISTE $\sqrt{y}$

SUPONGAMOS $x \geq 0$. ES OBVIO QUE $y = (\sqrt{y})^2$

ADEMÁS, $x^2 = y^3 = (\sqrt{y})^6 \longrightarrow x = (\sqrt{y})^3$

LUEGO, $(x,y) = ((\sqrt{y})^3, (\sqrt{y})^2) = \Gamma(\sqrt{y})$. SI $x \leq 0$, $(x,y) = \Gamma(-\sqrt{y})$.

CALCULEMOS LA LONGITUD DE $\mathcal{C}$

$$\ell(\mathcal{C}) = \ell(\mathcal{C}_1) + \ell(\mathcal{C}_2) = \int_{-1}^{0} \|(3t^2, 2t)\| dt + \int_{0}^{1} \|(3t^2, 2t)\| dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt + \int_{0}^{1} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_{-1}^{0} |t| \sqrt{9t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{1} |t| \sqrt{9t^2 + 4}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (-t) \sqrt{9t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{1} t \sqrt{9t^2 + 4}\, dt$$

$s = 9t^2 + 4$
$ds = 18t\,dt$
$$= \int_{13}^{4} \frac{-1}{18} \sqrt{s}\, ds + \int_{4}^{13} \frac{1}{18} \sqrt{s}\, ds = \frac{2}{18} \int_{4}^{13} \sqrt{s}\, ds = \frac{1}{9} \left. \frac{s^{3/2}}{3/2} \right|_{4}^{13} = \frac{2}{27} (13^{3/2} - 8)$$

3) $r(t) = \left(\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{t^2}{2}\right)$, $\quad 0 \leq t \leq 1$

CALCULEMOS SU LONGITUD:

$$l(C) = \int_0^1 \|r'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt$$

DEBEMOS RESOLVER ESTA INTEGRAL. PARA ELLO INTRODUCIMOS LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

PROPIEDADES: • $(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$, $\quad (\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$

• $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

• $\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1$, $\quad \operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

• $\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\hookrightarrow$ RAMA POSITIVA

VOLVAMOS A LA INTEGRAL: $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt$

PROPONEMOS EL CAMBIO DE VARIABLE $\quad t = \operatorname{senh}(x) \quad \operatorname{arcsenh}(0) = 0$

$dt = \cosh(x)\, dx \quad \operatorname{arcsenh}(1) = \ln(1+\sqrt{2})$

LUEGO, $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x)}\, \overbrace{\cosh(x)\, dx}^{dt} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{\cosh^2(x)}\, \cosh(x)\, dx$

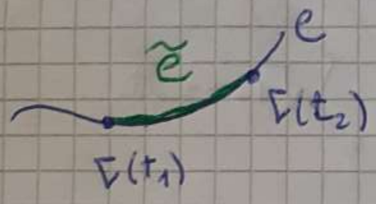
$$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2(x)\, dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\, dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{8} + \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{8} \Bigg|_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{8} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} - \frac{(1+\sqrt{2})^{-2}}{8}.$$

RECORDAR: SEA $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ UNA PARAMETRIZACIÓN DE UNA CURVA $\mathcal{C}$

γ ES UNA PARAMETRIZACIÓN POR LONGITUD DE ARCO SI
(PPLA)

$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t$



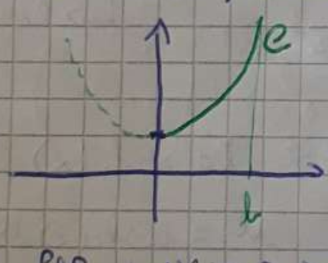
SI $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t$

$\rightsquigarrow \ell(\tilde{\mathcal{C}}) = t_2 - t_1$

EJERCICIO 11, P I : SEA γ UNA PARAMETRIZACIÓN REGULAR DE $\mathcal{C}$

SI $h(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| \, ds$, ENTONCES : $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h^{-1}(t))$ ES UNA PARAMETRIZACIÓN POR LONGITUD DE ARCO DE $\mathcal{C}$

EJEMPLO: SEA $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$, $0 \leq t \leq b$



CATENARIA

PARAMETRIZARLA POR LONGITUD DE ARCO.

$$h(t) = \int_0^t \|\gamma'(s)\| \, ds = \int_0^t \|(1, \operatorname{senh}(s))\| \, ds = \int_0^t \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(s)} \, ds$$

$$= \int_0^t \cosh(s) \, ds = \operatorname{senh}(s) \Big|_0^t = \operatorname{senh}(t)$$

$$h^{-1}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)$$

POR LO QUE $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h^{-1}(t)) = \left(\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \cosh\left(\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right)\right)$

ES UNA PPLA DE $\mathcal{C}$