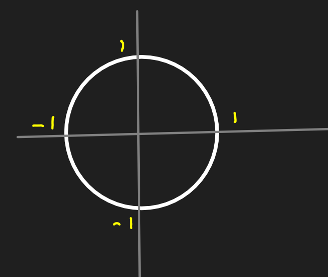
Práctica 1 (video)

Sep 5

Ej 1 : Sean $\sigma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_1(\theta) = (\cos\theta , \sin\theta)$

$\sigma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2} , \sin\frac{\theta}{2}\right)$

- Probar que ambas son parametrizaciones C^1 de la circun. de radio 1 y centro $(0,0)$



- Continuas ✓

  ↳ Pues tienen component. continuas.

- Clase C^1 ✓

  ↳ Pues tienen component. C^1

- Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

  ↳ $Im(\sigma_1) = C$ ✓ pues son los x,y sobre la circunferencia de radio 1 con centro en (x_0,y_0)

  ↳ $Im(\sigma_2) = C$ ✓

Obs

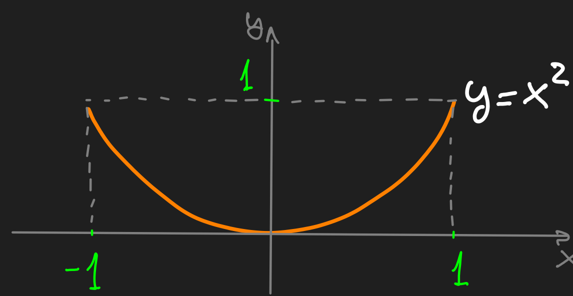
$$\begin{tikzcd}
{[0, 2\pi]} \arrow[dr, "\sigma_1"] & \\
 & C \\
{[0, 4\pi]} \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "\sigma_2"'] &
\end{tikzcd}$$

existe una func.

↳ $h(t) = \frac{t}{2}$

que lleva los ptos de un intervalo al otro

Ej 2) Parábola



$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \;,\; -1 \leqslant x \leqslant 1 \}$

$\sigma_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \sigma_1(t) = (t, t^2)$

↳ $Im(\sigma_1) = C$ ✓

Abierta o Cerrada?

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1(-1) = (-1,1) \\ \sigma_2(1) = (1,1) \end{array}\right] \neq \Rightarrow \text{es abierta}$$

Simple?

Sí, pues σ_1 es inyective.

Suave?

Sí en cada entorno de cada punto de C existe una parametrización regular para C (es abierta simple)

y como $\sigma'(t) \neq (0,0) \quad \forall t \in [-1,1]$

$\Rightarrow$ C es Suave.

- Nota

$\sigma(t) = (t, t^2)$

$\sigma'(t) = (1, 2t)$

$\neq t \ \forall t$

Obs:

$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$t \to (t^3, t^6) = (t, t^2)^3$

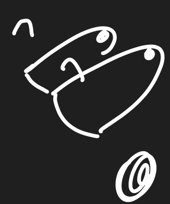
↳ es inyectiva

↳ es clase C^1

↳ es continua

PERO!

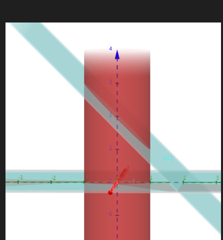
↳ $\sigma_2'(t) = (3t^2, 6t^5) \Rightarrow \sigma_2'(0) = (0,0)$ ✗



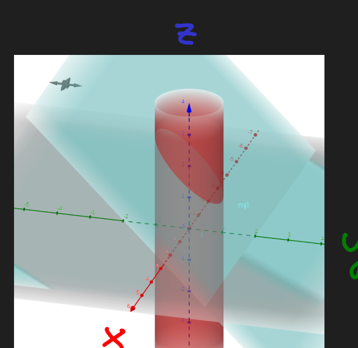
↳ $\therefore$ σ_2 NO es una parametrización regular.

Ej 3.

Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por la intersección de las superficies en $\mathbb{R}^3$



$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$



Probar que $\mathcal{C}$ es una curva

cerrada,

simple,

suave

Propongo parametrización

- Como $x^2+y^2=1 \Rightarrow \exists\, \theta \in [0,2\pi] \;/\; \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$

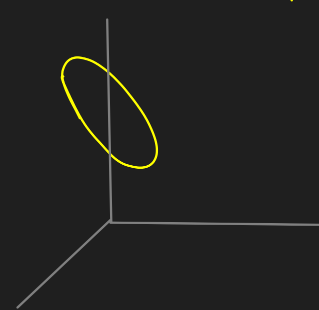
- Como $y+z=2 \Rightarrow z=2-y$

$$z=2-\sin\theta$$

ya tengo las 3 componentes de mi parametrización:

Sea $\sigma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2 \;/\; \sigma(t)=(\cos\theta, \sin\theta, 2-\sin\theta)$

↳ Parametriza la curva elíptica



$\mathcal{C}$ es:

Cerrada?

$$\left.\begin{array}{l}\sigma(0)=(0,1,1)\\ \sigma(2\pi)=(0,1,1)\end{array}\right] = \Rightarrow \text{es cerrada}$$

✓

Preguntar 1

↰ Tengo que chequear $\sigma'(0)=\sigma'(2\pi)$?

Simple ?

σ es inyectiva ✓

Clase C^1 ?

Sí, componentes C^1 ✓

Suave ?

Derivada $\neq 0$?

$$\sigma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, -\cos\theta) \neq (0,0,0) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Misma tangente en extremos ?

$$\left.\begin{array}{l} \sigma'(0) = (0, 1, -1) \\ \sigma'(2\pi) = (0, 1, -1) \end{array}\right] = \Rightarrow \text{es suave} ✓$$

Ej 4:

Sean $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

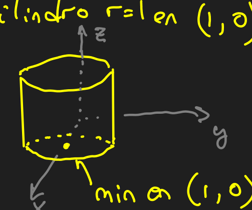
$$t \to \left(1 + \cos t, \sin t, 2 \underbrace{\sin \tfrac{t}{2}}_{\text{siempre} \geq 0 \text{ en } [0,2\pi]}\right)$$

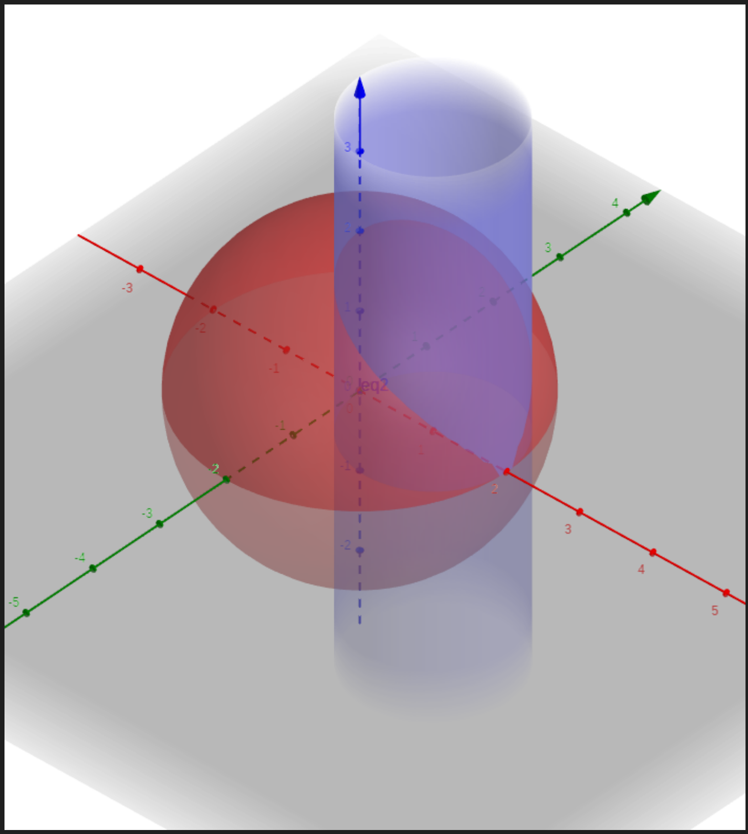
y sea

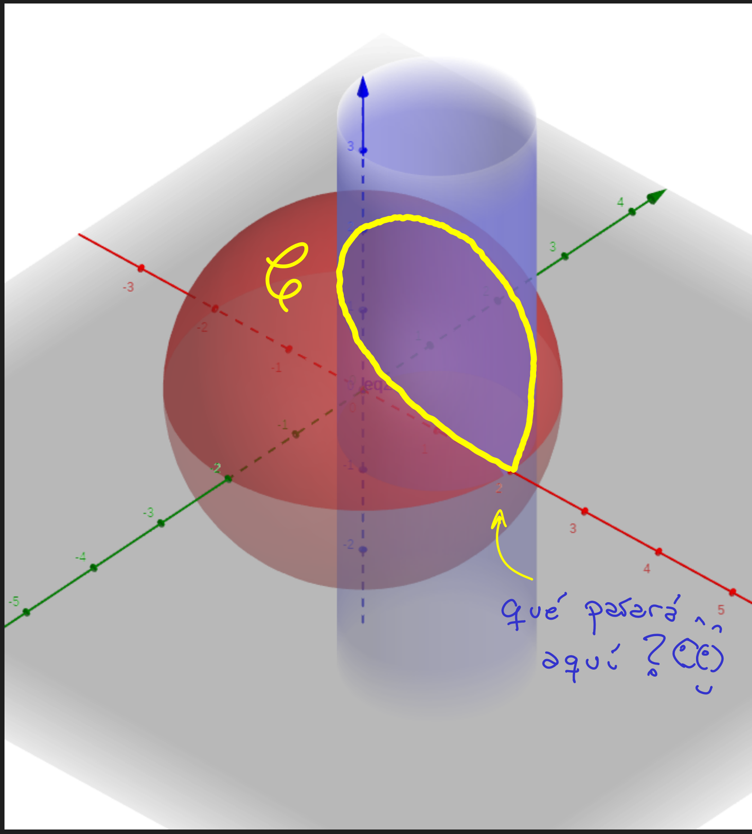
esfera r=2 en (0,0)

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\; (x-1)^2 + y^2 = 1,\; z \geq 0 \right\}$$

Cilindro r=1 en (1,0)







Me pide: Probar que σ es una parametrización de $\mathscr{C}$.

Pruebo doble inclusión para probar

$$\operatorname{Im}(\sigma) = \mathscr{C}$$

$\operatorname{Im}(\sigma) \subseteq \mathscr{C}$:

Sea $(x,y,z) \in \operatorname{Im}(\sigma)$

$$\Rightarrow \exists\, t \in [0, 2\pi] \,/$$

$$(x,y,z) = \left(1+\cos t,\ \sin t,\ 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

Veo que

1. $x^2+y^2+z^2 = (1+\cos t)^2 + (\sin t)^2 + \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2$

$$= 1 + 2\cos t + \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} + 4\sin^2\frac{t}{2}$$

Id. Trig:

$\cos(\alpha+\beta)$

$\shortparallel$

$\cos^2\alpha - \sin^2\beta$

$$= 2 + \underbrace{2\cos t}_{2\cdot\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)} + 4\sin^2\frac{t}{2}$$

$$= 2 + 2\cos^2\frac{t}{2} - 2\sin^2\frac{t}{2} + 4\sin^2\frac{t}{2}$$

$$= 2 + \underbrace{2\cos^2\frac{t}{2} + 2\sin^2\frac{t}{2}}_{2\cdot\left(\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right) = 2}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ✓ (cumple la 1° restricción de $\mathscr{C}$)

2∘ $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$(1+\cos t - 1)^2 + (\sin t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$ ✓

3∘ $z \geqslant 0$

$1 - \sin\frac{t}{2} \geqslant 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$ ✓

pues $\sin\theta$ con $\theta\in[0,\pi]$ es $\geqslant 0$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \mathscr{C}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \mathscr{C}$

Falta la inclusión para el otro lado:

$$\mathcal{C} \subseteq \operatorname{Im}(\sigma) \ ?$$

Sea $(x,y,z) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \exists t \in [0, 2\pi] \ / \ x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t$$

quiero verificar con el término que falta $\left(z = 2 \sin \frac{t}{2} \right)$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$$z^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$= 4 - 1 - 2\cos t \underbrace{- \cos^2 t - \sin^2 t}_{=-1}$$

$$= 2 - 2\cos t$$

$$= 2(1 - \cos t)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{1 - \cos^2 \frac{t}{2}}_{\sin^2 \frac{t}{2} \text{ ó}} + \sin^2 \frac{t}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right)$$

$$z^2 = 4 \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$z = 2 \sin \frac{t}{2} \ ✓ \quad \text{sin módulo (pues } z \geq 0)$$

$$\Rightarrow \quad (x,y,z) = \left(1+\cos t,\ \sin t,\ 2\sin\frac{t}{2}\right) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C} \in \operatorname{Im}(\sigma)$$

$$\therefore \quad \operatorname{Im}(\sigma) = \mathcal{C}$$