3 Sep

Teórica 2

Clase anterior:

- Definición de curvas
- Parametrizaciones
- Recta tangente
- Suavidad

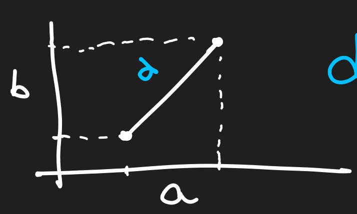
Objetivos:

- Calc. long. de arcos ¿?
- Integrar funciones escalares sobre curvas.

Longitud de Curva

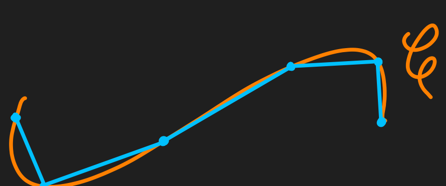
- Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ (ó $\mathbb{R}^n$) una curva abierta y simple

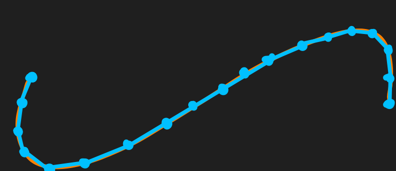
- Como sabemos medir segmentos



$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Aproximamos por Poligonales





Formalicemos

- Consideremos $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

  una parametrización regular de $\mathcal{C}$

- Tomemos

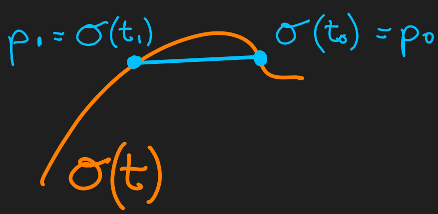
  $$\Pi := a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

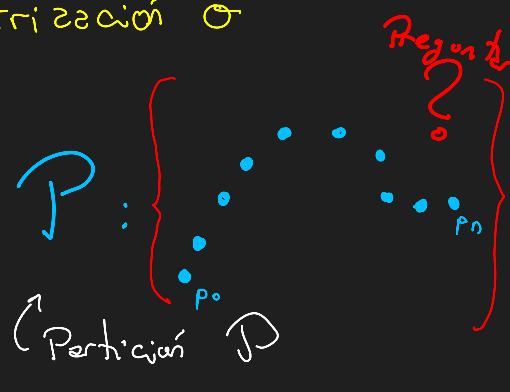
  una partición del $[a,b]$

- Entonces

Π induce una partición $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$ en puntos $p_i = \sigma(t_i)$

↑ a cada t_i lo "observo" sobre la curva $\mathcal{C}$ a partir de la parametrización σ





$\mathcal{L}(\mathcal{P})$ = longitud de la poligonal con puntos en $\mathcal{P}$

$$= \underbrace{\|p_1 - p_0\|}_{} + \underbrace{\|p_2 - p_1\|}_{} + \dots + \|p_n - p_{n-1}\|$$

← norma L2

distancia entre puntos consecutivos

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \| p_{i+1} - p_i \|$$

Observación

Si P' es una partición más fina que P (ie: los puntos de P son puntos de P'), entonces

$$\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(P')$$

↑ con más puntos mide más! (o lo mismo)

Demo:

Con Desigualdad Triangular: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Solo miro dos puntos p_1 y p_2 consecutivos

Si tengo $s_1, \ldots, s_r$ puntos de P' entre dos ptos consecutivos p_1 y p_2 de P

$$\Rightarrow \|p_2 - p_1\| = \|p_2 \underbrace{- s_r + s_r - s_{r-1} + s_{r-1} - \ldots - s_1 + s_1}_{=0} - p_1\|$$

Uso desig. triang

$$\leq \|p_2 - s_r\| + \|s_r - s_{r-1} + s_{r-1} - \ldots - s_1 + s_1 - p_1\|$$

$\vdots$ uso desig. triang. agrupando de a 2 sobre el término restante hasta tener todos pares.

$$\leq \|p_2 - s_r\| + \|s_r - s_{r-1}\| + \|s_{r-1} - s_{r-2}\| + \ldots + \|s_1 - p_1\|$$

Definición

Una curva $\mathcal{C}$ es rectificable

Si $\exists M > 0 \,/\, \mathcal{L}(P) \leq M \quad \forall P$ partición de $\mathcal{C}$.

M es un valor mayor o igual a cualquier set de puntos que use como partición sobre $\mathcal{C}$

En ese caso, $\exists$ el supremo del conjunto:

$$\{ \mathcal{L}(P) : P \text{ partición de } \mathcal{C} \}$$

conj. de todas las longitudes posibles sobre $\mathcal{C}$

y definimos

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \sup \{ \mathcal{L}(P) : P \text{ partición de } \mathcal{C} \}$$

Cómo calculamos ésto?

el "supremo de un conjunto de todas las posibles particiones"

Idea
(wait for it)

"Suave", ver Teo 1.

Sea $\sigma:[a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$

Si $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ partición del $[a,b]$

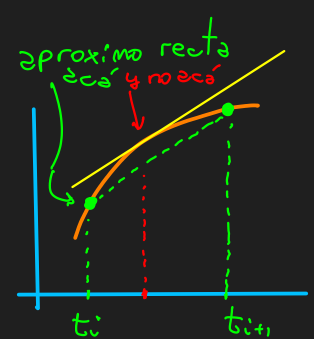
y $\mathcal{P}$ es la partición inducida por π en $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \| p_{i+1} - p_i \|$$

longitud de la poligonal

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \| \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \|$$

(ahí viene)



Como
(cada término)

"Teo de Valor Medio"

elijo extremo izquierdo

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \sim \sigma'(t_i)\,(t_{i+1} - t_i)$$

Puedo tomar norma

$$\| \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \| \sim \| \underbrace{\sigma'(t_i)}_{\in \mathbb{R}^3} \, \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\in \mathbb{R}} \|$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{P}) \sim \sum_{i=0}^{n-1} \| \sigma'(t_i) \| . (t_{i+1} - t_i)$$

Notar que es una Suma de Riemman de la función $\|\sigma'(t_i)\|$ asociada a la partición π

Proposición:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t_i)\| \, dt$$

¿Llevo $n \to \infty$ en la sumatoria ("partición de infinitos puntos bien distribuidos")

Demo:

Apunte. Cap 1, sección 5.

Dejo lugar por si luego pinta... pinta? :P

Parámetro de Longitud de Arco

[Sep 4]

Sea $\mathscr{C}$ una curva simple, abierta y suave

y sea $\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$

una parametrización regular de $\mathscr{C}$

Param reg
- $\sigma'(t) \neq \vec{0} \ \forall t$
- inyectiva en $[a,b]$

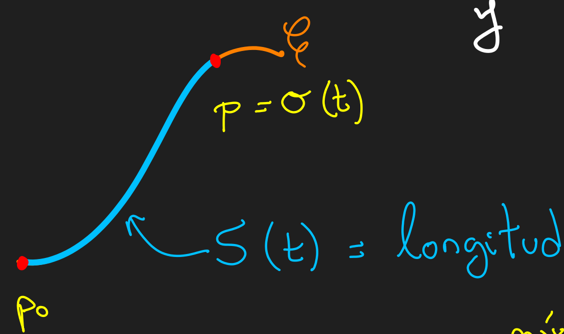
Para cada $t \in [a,b]$

tendremos

$$S(t) := \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr$$

que mide la longitud entre $p_0 = \sigma(a)$

y $p = \sigma(t)$



más valor es long. de $\mathscr{C}$

$$\Rightarrow S : [a,b] \to [0, \mathscr{L}(\mathscr{C})]$$

se llama Función de Longitud de Arco.

Propiedades de la función $s(t)$

- 1) Por Teo. Fundamental del cálculo

noter!

$$s'(t) = \left(s(t)\right)' = \left(\int_a^t \|\sigma'(r)\|\, dr\right)' = \|\sigma'(t)\|$$

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\|$$

Luego s es C^1 en $[a,b]$

pues $\sigma(t)$ es C^1 y $\|\circ\|$ es una oper. que preserva continuidad

- 2) Como $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ en $[a,b]$, pues σ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$

norma: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$s'(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [a,b]$$

- 3) s es un función estrictamente creciente y $\therefore$ es Biyectiva

Consecuencias de las props.

Preguntar 1

Como es biyectiva, admite una inversa $t(s)$

$$t : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to [a, b]$$

de clase C^1 en $[0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$.

Además,

$$t'(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

pues no es cero!

Pregunta también!

Con todo esto, podemos considerar la reparametrización de $\mathcal{C}$ dada por:

Preguntar 2 !

inversa de s

$$\tilde{\sigma}(s) := \sigma(t(s)) \quad \text{con} \quad \tilde{\sigma} : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$$

qué para acá?

Decimos que $\tilde{\sigma}$ es la

parametrización por longitud de arco.

Notemos

$$\tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$= \sigma'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

$$\Rightarrow \left\| \sigma'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|} \right\| = \|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1$$

$$\forall s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$$

para toda longitud!

La longitud de una curva NO depende de la parametrización.

(se prueba)

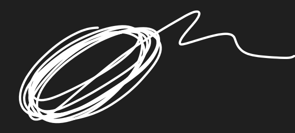
$$\int_0^r \|\tilde{\sigma}'(s)\| \, ds = \int_0^r 1 \, ds = r$$

la norma de la velocidad es 1

Integra desde 0 hasta $\int_0^r 1$ ← con velocidad constante 1

Integral de longitud de arco

Supongamos que tenemos un alambre representado por una curva $\mathcal{C}$ suave. Si el alambre está formado por un material inhomogéneo, la densidad de masa será una función $\rho(x,y,z)$ definida sobre $\mathcal{C}$ que suponemos continua.



Queremos calcular la masa total del alambre

- Si ρ fuera constante (material homogéneo)

$$\Rightarrow \quad \text{masa} = \rho \cdot \text{long}(\mathcal{C})$$

$$= \rho \cdot \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

- Sino :

Sea $\ell = \mathcal{L}(\mathcal{C})$ y $n \in \mathbb{N}$

Partimos el alambre "$\mathcal{C}$" en n pedacitos de $\frac{\ell}{n}$:

Consideramos

$$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$$

una parametrización regular de $\mathcal{C}$ y

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr$$

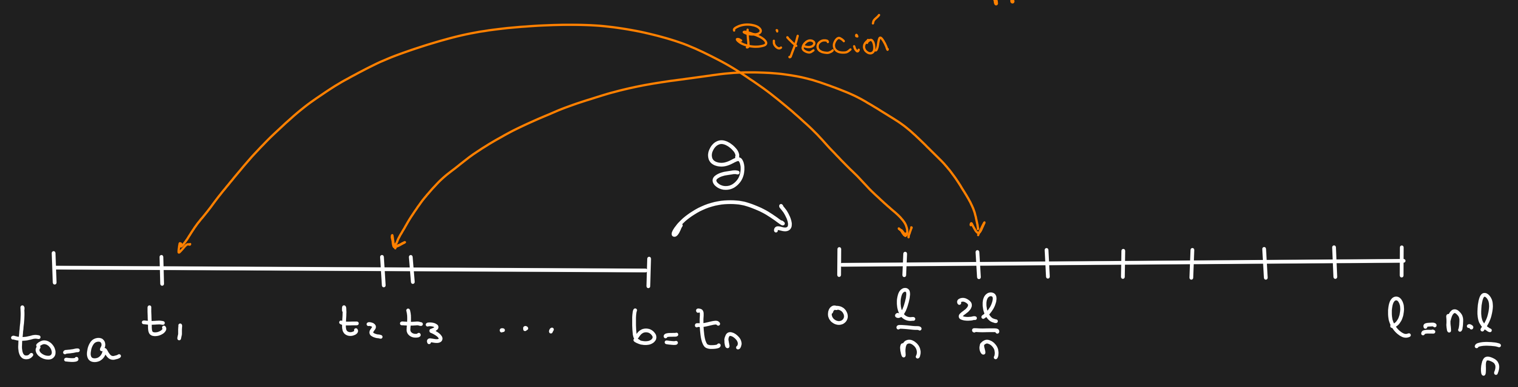
la función longitud de arco (que antes era S)

Para cada

$k \in \{0, 1, \ldots, n\} \ \exists \ t_k \in [a, b] \ /$

$$g(t_k) = \frac{k \cdot \ell}{n}$$

sumo k pedacitos de $\frac{\ell}{n}$ de largo



De esta forma construyo una partición con t_i ordenados

Como g es estrictamente creciente,

$\Pi : t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$

es una partición del $[a, b]$

Si llamamos

$$p_k = \sigma(t_k)$$

$\Rightarrow$ tenemos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ puntos en $\mathcal{C}$ /

la longitud de $\mathcal{C}$ entre p_k y p_{k+1} es $\frac{\ell}{n}$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_{\frac{k\ell}{n}}^{\frac{(k+1)\ell}{n}} \|\sigma'(g^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|} \, ds = \frac{\ell}{n}$$

$t = g^{-1}(s)$

$dt = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))} ds$ ← Preguntar 3 !

$= \|\sigma'(g^{-1}(s))\|$

$g^{-1}(s)$

derivo

$(g^{-1}(s))' \overset{?}{=} (g'(s))^{-1}$

$= \frac{1}{\quad}$

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr$$

Como ρ es continua, la aproximamos con el valor que toma en el punto

$$P_k^* = \sigma(t_k^*)$$

con $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$

$\Rightarrow$ la masa del alambre entre P_k a P_{k+1} es aproximadamente

elijo punto como límite inf. del intervalito, al azar, etc

$$\rho(P_k^*) \cdot \frac{\ell}{n}$$

← densidad . largo del interv. = masa del pedacito de alambre

$\Rightarrow$ la masa total $M \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \rho(p_k^*) \cdot \frac{\ell}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(p_k^*) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Por otro lado tenemos que

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

para ciertos

$$\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

Dem:

$$M_k = \max \rho(\sigma(t)) \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

$$m_k = \min \rho(\sigma(t)) \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt}_{= \int_{t_k}^{t_{k+1}} m_k \|\sigma'(t)\| \, dt} \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt \leq M_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) . \|\sigma'(t)\| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) . \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Aproximo una función con un punto

Entonces tenemos:

$$M \sim \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

y

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) . \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Dos expresiones muy parecidas.

Con esto tenemos que la masa de $\mathcal{C}$ es

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) . \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Def:

- Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$
- Si f es una función contínua en $\mathcal{C}$

llamamos integral de f en $\mathcal{C}$ respecto a la longitud de arco a

Observacion importante

Si $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathcal{C}$ es otra parametrización regular de $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt = \int_c^d f(\tilde{\sigma}(s)) \cdot \|\sigma'(s)\| \cdot ds$$

Cualquier parametrización resulta igual, pues no depende de ella.

Esto da lugar a la siguiente notación:

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds$$

para la integral de f a lo largo de la curva $\mathcal{C}$

Dem:

siempre $\neq$

$\exists\, h : [a,b] \to [c,d]$ biyectiva, C^1 / $h' \neq 0$

y $\tilde{\sigma} = r \circ h^{-1}$

$$\Rightarrow \int_c^d f(\tilde{\sigma}(s))\, \|\tilde{\sigma}'(s)\| ds = \int_c^d f(\sigma(h^{-1}(s)))\, \|\sigma'(h^{-1}(s))\| \cdot |(h^{-1}(s))'|\, ds$$

$\tilde{\sigma}' = \sigma'(h^{-1}) \cdot (h^{-1})'$

puedo sacar el módulo

$t = h^{-1}(s)$

$dt = (h^{-1})'(s)\, ds$

Supongo $h^{-1}(c) = a$ $\Rightarrow (h^{-1})' > 0$

$\underbrace{h^{-1}(d) = b}_{\text{creciente, pues asumo que la derivada es } \neq 0}$

h resulta estrictamente creciente y $\therefore h^{-1}$ tmb

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|\, dt \quad \blacksquare$$