Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Segundo cuatrimestre de 2020

Práctica 2: Integrales de superficie

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar.

(a) $r = r_0, \quad r_0 > 0$ constante.
(b) $\varphi = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

Ejercicio 2. Sean $a, b > 0$.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \Big(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\Big),$$
$$\Phi_2(u, v) = \big(au\cos(v), bu\sin(v), u^2\big),$$

son dos parametrizaciones del *paraboloide elíptico* dado cartesianamente por

$$z = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2.$$

(b) Supongamos $b < a$. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big),$$

con $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del *toro* dado cartesianamente por

$$z^2 = b^2 - \Big(a - \sqrt{x^2 + y^2}\Big)^2.$$

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\mathrm{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Ejercicio 4. Sea C la curva en el plano xy dada en coordenadas polares por:

$$r = 2 - \cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea S la superficie que se obtiene por revolución de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.
(b) ¿Es suave esta superficie?

Ejercicio 5. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio a y centro en el origen en un punto (x_0, y_0, z_0) genérico de la esfera.

Ejercicio 6. Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

Ejercicio 7. Sea S la superficie parametrizada por la función $\Phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

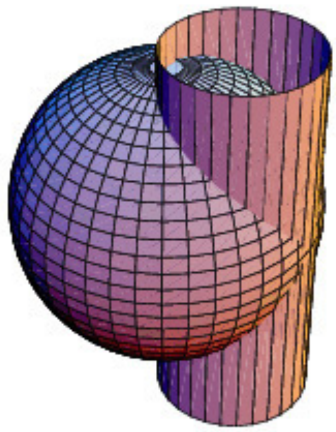
Graficar S, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

Ejercicio 8. Sea D el disco unitario centrado en el origen. Sea S la superficie parametrizada por la función $\Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u,v) = (u - v, u + v, uv).$$

Calcular el área de S.

Ejercicio 9. Sea $R > 0$. Calcular el área de la superficie que se obtiene de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ con el cilindro (relleno) $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$.



Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani.*

Ejercicio 10. Sea $\alpha > 0$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función positiva. Consideremos la curva $z = f(x)$ girada alrededor del eje z. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

Ejercicio 11. Sea C la curva en el plano xy dada por

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva C alrededor del eje x.

(a) Hallar una parametrización de S.
(b) Hallar el área de S.

Ejercicio 12. Calcular $\int_S xy\, dS$ donde S es el borde del tetraedro con lados

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x + z = 1, \quad x = y.$$

Ejercicio 13. Calcular $\int_S (x + y + z) dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Ejercicio 14. Hallar la masa de una superficie esférica de radio r tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre (x,y,z) y el punto $(0,0,r)$.

Definición. Decimos que una superficie S es *orientable* si hay una forma de elegir en cada punto P de S un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre S resulte continua.

Por ejemplo, si S es el gráfico de una función, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente z positiva). Esta elección es continua en S.

Si S es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipo I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de Ω.

Proposición. *Sea S una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S. Para cada $P \in S$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \textit{donde } (u,v) \textit{ es tal que } P = T(u,v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie S. En este caso, decimos que S está orientada por la parametrización T.

Definición. Sea S una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre S. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de S a la integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \ := \int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Proposición. *Sea S una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de T que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre S. Entonces, el cálculo de $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización T o la parametrización T_1. Si T_1 invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

Ejercicio 15. Probar esta proposición.

Ejercicio 16. Considerar la superficie dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = \cos\theta + t \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cos\theta \\ y = \sin\theta + t \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\theta \\ z = t\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

con $t \in [-1,1], \theta \in [0, 2\pi]$. Probar que es suave. Esta superficie es la *cinta de Moebius*, y es un ejemplo de una superficie no orientable.

Ejercicio 17. Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Ejercicio 18. Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0,0,\sqrt{2})$ sea (0,0,1).

Ejercicio 19. Sea S la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta.$$

Ejercicio 20. Sea S la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2, orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

Ejercicio 21. Sean S una superficie orientada y C una curva cerrada simple que es el borde de S con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\,\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

Ejercicio 22. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.