Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 11, 2do. cuatrimestre 2020

Teorema de Gauss

El Teorema de Gauss (también llamado de la divergencia) asegura que el flujo de salida de un campo a través de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo sobre el volumen encerrado por esa superficie.

Como el teorema involucra integrales de volumen en $\mathbb{R}^3$, recordamos las regiones de $\mathbb{R}^3$ en las cuales podemos integrar "volúmenes".

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo I si se describe como

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\Big\},$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ son continuas.

Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo II si se describe como

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, z) \in D, \ \phi_1(x, z) \leq y \leq \phi_2(x, z)\Big\}$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\phi_1, \phi_2 : D \to \mathbb{R}$ son continuas.

Una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice de tipo III si es de la forma

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (y, z) \in D, \theta_1(y, z) \leq x \leq \theta_2(y, z)\Big\}$$

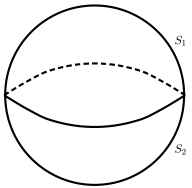
donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\theta_1, \theta_2 : D \to \mathbb{R}$ son continuas.

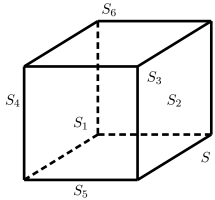
Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$

Por último, una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es de tipo IV si es de tipo I, II y III (ejemplos de regiones de tipo IV son la esfera, el cubo y el cilindro).

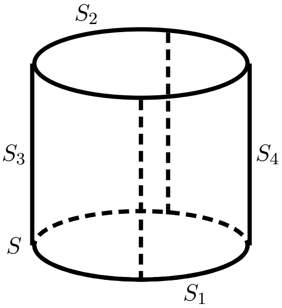
Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ es cerrada si es el borde de una región Ω de tipo I, II o III. En particular, una superficie cerrada S está formada por un número finito $S_1, \ldots, S_N$ de superficies que pueden describirse como gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Vamos a notar $S = \partial\Omega$ y vamos a llamar caras a las componentes $S_1, \ldots, S_N$ de S.

Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$





Superficies cerradas y tipo de regiones en $\mathbb{R}^3$



Superficies cerradas

Las superficies cerradas se pueden orientar con orientación exterior (con la normal que apunta "hacia el exterior") o con orientación interior (con la normal que apunta "hacia adentro"). Supongamos dada una superficie cerrada $S \subset \mathbb{R}^3$ orientada con la normal exterior η, con caras $S_1, \ldots, S_N$, y sea $\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo continuo. Definimos

$$\iint_S \boldsymbol{F} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS := \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS.$$

Esta integral mide el flujo total de F hacia afuera a través de S.

Teorema de Gauss

Con estos términos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema de la divergencia de Gauss: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región de tipo VI. Sea $S = \partial\Omega$ la superficie cerrada, regular a trozos, orientada con la normal exterior η. Si $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1, entonces

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, dV = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \, dV.$$

Teorema de Gauss

Demostración: Sea $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$. Tenemos que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\, dV = \iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Por otro lado, si $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$,

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta\, dS = \iint_S P\,\eta_1\, dS + \iint_S Q\,\eta_2\, dS + \iint_S R\,\eta_3\, dS.$$

Por lo tanto, basta probar que valen las igualdades

$$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\, dV = \iint_S P\,\eta_1\, dS, \quad \iiint_\Omega \frac{Q}{\partial y}\, dV = \iint_S Q\,\eta_2\, dS,$$
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_S R\,\eta_3\, dS.$$

Teorema de Gauss

Demostramos la última igualdad, es decir,

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_S R\,\eta_3\, dS.$$

Como Ω es de tipo IV, es de tipo I, y por lo tanto se describe como

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\Big\},$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ son continuas y $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dV &= \iint_D \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\, dx\, dy \\ &= \iint_D \big(R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))\big)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Teorema de Gauss

Ahora consideramos la integral $\iint_S R\,\eta_3\,dS$. La frontera $S = \partial\Omega$ se compone de:

- una cara de arriba $S_A = \{z = \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$,
- una cara de abajo $S_a = \{z = \varphi_1(x,y),\ (x,y) \in D\}$,
- y la cara lateral S_L, donde la normal es perpendicular al eje z.

Así,

$$\iint_S R\,\eta_3\,dS = \iint_{S_A} R\,\eta_3\,dS + \iint_{S_a} R\,\eta_3\,dS + \iint_{S_L} R\,\eta_3\,dS.$$

En S_L, la normal exterior es de la forma $\eta = (*, *, 0)$ y entonces

$$\iint_{S_L} R\,\eta_3\,dS = \iint_{S_L} 0\,dS = 0.$$

Teorema de Gauss

En $S_A = \{z = \varphi_2(x,y)\}$, la normal exterior es

$$T_x \times T_y = \Big(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y), 1 \Big).$$

Por otro lado, en $S_a = \{z = \varphi_1(x,y)\}$, la normal exterior es

$$T_x \times T_y = \Big(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y), -1 \Big).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S R\,\eta_3\, dS &= \iint_{S_A} R\,\eta_3\, dS + \iint_{S_a} R\,\eta_3\, dS \\
&= \iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y))\, 1\, dx\, dy + \iint_D R(x,y,\varphi_2(x,y))\, (-1)\, dx\, dy \\
&= \iint_D \big(R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y)) \big)\, dx\, dy = \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dV.
\end{aligned}$$

Teorema de Gauss

Esto demuestra la igualdad. Las otras dos igualdades se demuestran de manera similar. $\blacksquare$

Observemos que, del mismo modo que el Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede usar en cualquier dominio que pueda expresarse como una unión finita de dominios de tipo IV, aunque teniendo en cuenta que el vector normal sobre el borde siempre debe apuntar para afuera. Por ejemplo, se puede aplicar el Teorema de Gauss en el dominio

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|(x, y, z)\| < 2\right\}.$$

Teorema de Gauss

Ejemplo: Consideremos la esfera unitaria $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, orientada con la normal exterior, y el campo

$$\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) = (P, Q, R) = (2x, y^2, z^2).$$

Queremos calcular $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS$.

Sea $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ el volumen que encierra S. Por el Teorema de Gauss,

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS &= \iiint_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \, dV \\
&= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\
&= \iiint_\Omega (2 + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz = 2 \, \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Teorema de Gauss

Ejemplo: Queremos calcular $\iint_S (x^2 + y + z)\, dS$, donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es la esfera unitaria, como en el ejemplo anterior.

Para aplicar el Teorema de Gauss, buscamos un campo $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{F}(x, y, z) \cdot \eta(x, y, z) = x^2 + y + z$, donde $\eta(x, y, z)$ es la normal exterior a S en el punto (x, y, z).

Como $\eta(x, y, z) = (x, y, z)$, basta elegir $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, 1, 1)$. Por el Teorema de Gauss,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y + z)\, dS &= \iiint_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{F})\, dV \\ &= \iiint_\Omega 1\, dV = \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$