Superficies

Sep. 15/2020

Sebastián

Recuerdo:

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie si

$\exists$ una función $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

↑ Dominio elemental

tal que

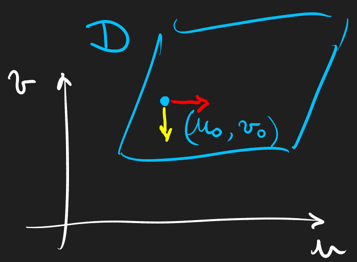
$$S = \operatorname{Im}(T)$$

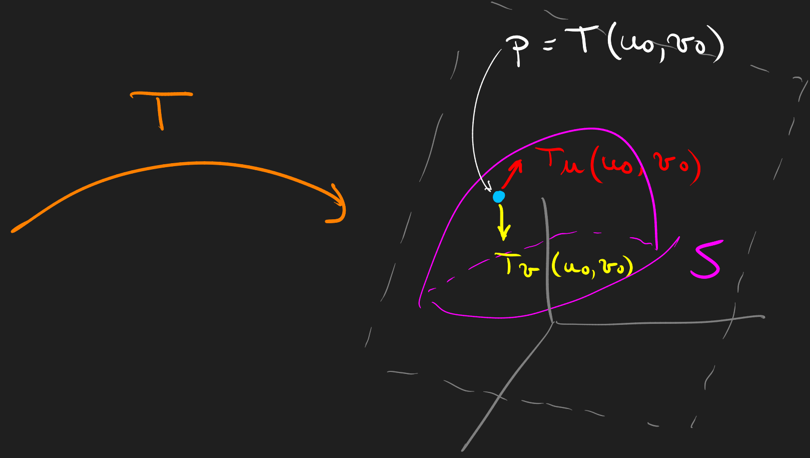
En este caso decimos que T es una parametrización de S.

Decimos que S es suave si tiene

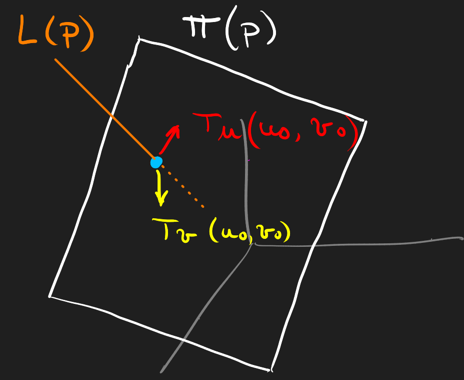
- plano tangente en todos sus puntos, y
- la recta $L(p)$ perpendicular al plano tangente en $p \in S$ varía continuamente con p.

Hace el dibujito que hice antes :3





Si T_u, T_v son li, generan un plano



$L(p)$ tiene dirección

$$\vec{\eta}(u_0, v_0) = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\| T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \|}$$

Ej. 1 : $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z = 0 \ \wedge \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}$

Es una superficie ? es suave ?

- en S, $z = x^2 + y^2$

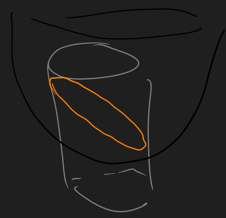
$(x,y,z) \in S \iff (x,y) \in \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x-2)^2 + y^2 \leq 1 \} := D$

y

$$z = x^2 + y^2$$

Sea $f : D \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = x^2 + y^2$. Entonces :

$$S = Gr(f)$$



Como f es de clase $\mathcal{C}^1$

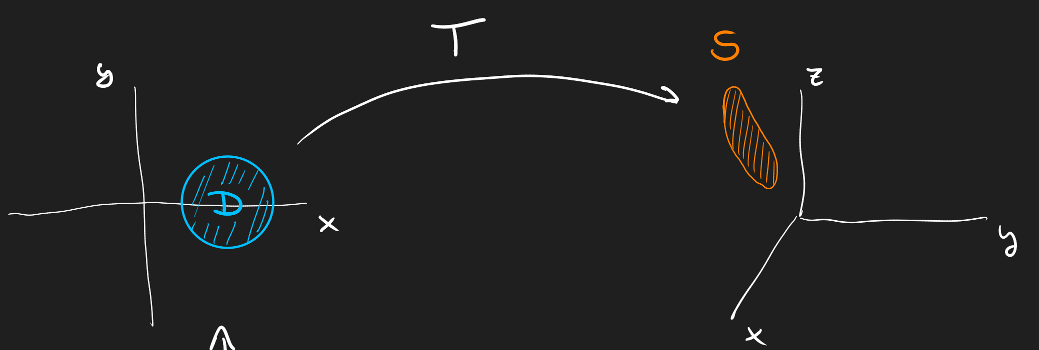
concluimos que S es una superficie suave.

Otra forma de justificarlo

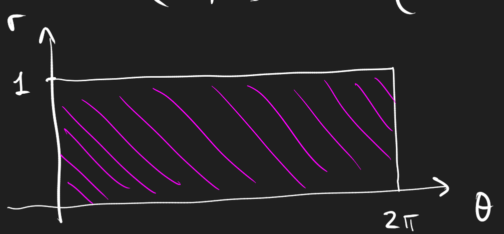
Parametricemos S

$$T : D \to \mathbb{R}^3 \;/\; T(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$$

T es una parametrización regular $\left(\begin{array}{l} \mathcal{C}^1 \\ T_u \times T_v \neq (0,0,0) \end{array} \right)$



$\tilde{T} \uparrow \quad (\theta, r) \mapsto (r \cdot \cos\theta + 2, \; r \cdot \sin\theta)$



$$\tilde{T} : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 \;/$$

$$\tilde{T}(\theta, r) = \left(r \cdot \cos\theta + 2, \; r \cdot \sin\theta, \; (r \cdot \cos\theta + 2)^2 + (r \cdot \sin\theta)^2 \right)$$

Ej 2. $S = \{x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Considero $\bar{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y,z)} = 0\}$ con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Como F es $\mathcal{C}^1$ y

$$\nabla F(x,y,z) = \left(2x, 2y, 0\right) \neq 0 \text{ en } \bar{S}$$

Concluímos que S es una superficie suave.

Otra forma:

$$T : [0, 2\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$$

$$T(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

- $\operatorname{Im} T = S$ ✓ (hay que hacer la cuenta)
- T es $\mathcal{C}^1$ ✓
- Es inyectiva?

Supongamos $T(\theta_1, z_1) = T(\theta_2, z_2)$

Entonces

$$z_1 = z_2$$

y $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow T : [0, 2\pi) \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva ✓

y $T(0,z) = T(2\pi, z) \quad \forall z \in (0,2)$

$= (1, 0, z)$

Calculemos la normal a S en (θ_0, z_0)

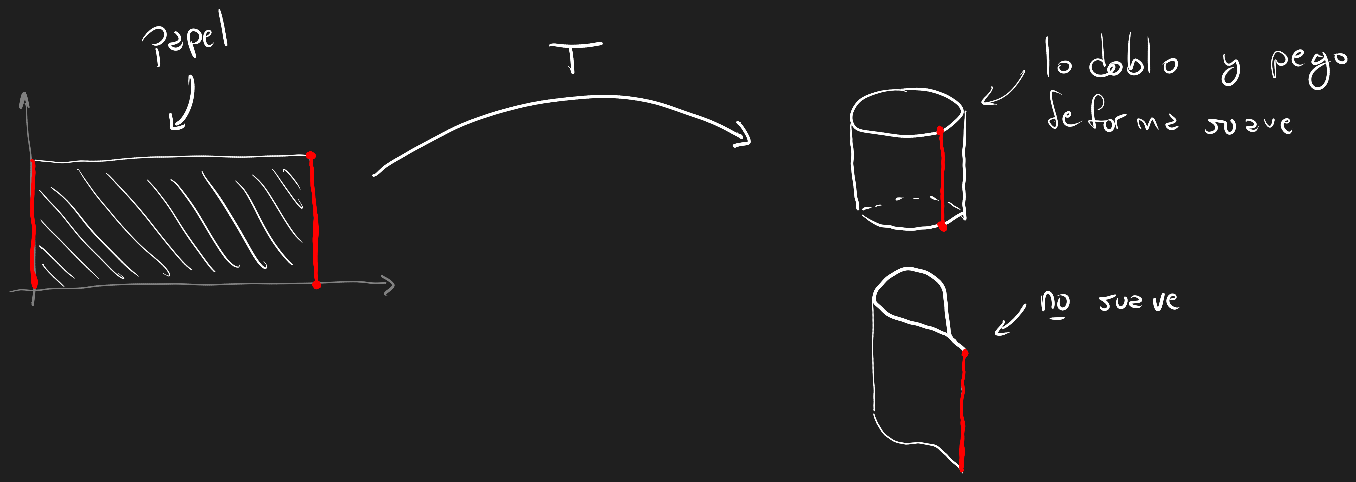
$$T_\theta(\theta, r) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$T_z(\theta, r) = (0, 0, 1)$$

$$T_\theta \times T_z = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= i \cdot \cos\theta + j \cdot \sin\theta$$

$$= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \neq 0 \quad \forall (\theta, z)$$



Recuerdo:

S es suave si tiene plano tg. en todos sus puntos

y $L(p)$ (recta $\perp$) varía continuamente con p

$$T(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) = (x_0, y_0, z_0) = p$$

$$T_\theta \times T_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

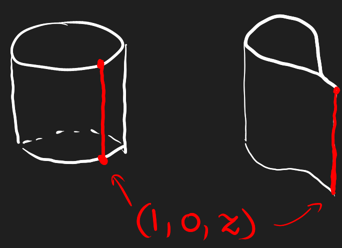
$$= (x_0, y_0, 0)$$

$$\Rightarrow L(p) = p + \lambda \cdot (x_0, y_0, 0)$$

$$= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_0, y_0, 0)$$

- L varía continuamente en S ✓
- Es $\perp$ al plano tangente en los puntos de la forma

$T(0,z) = (1,0,z)$?



Doy otra parametrización

$$\tilde{T} : [\pi, 3\pi] \times [0,2] \to \mathbb{R}^3 \; /$$

$$\tilde{T}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Haciendo las mismas cuentas que con T

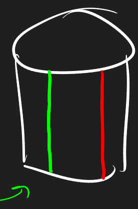
$\tilde{T}$ es inyectiva en $[\pi, 3\pi) \times [0,2]$

y

$$\tilde{T}(\pi, z) = \tilde{T}(3\pi, z) \qquad \forall z$$

$$= (-1, 0, z)$$

Ahora "cambié" mi problema



Calculo el plano tg usando $\tilde{T}$

da lo mismo que antes

Concluyo que S es suave porque L es una recta

$\perp$ al plano tg. en cada punto que varía continuamente.

Conclusión

Aprenderse las definiciones ahorra cuentas.

Ej 3.

Sea S la superficie parametrizada por

$$T : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 /$$

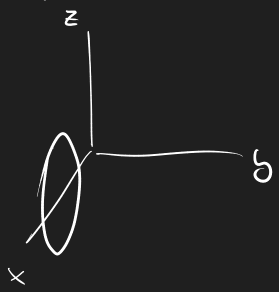
$$T(a,b) = \Big((2 + \sin b) . \cos a \; , \; (2 + \sin b) . \sin a \; , \; a + \cos b \Big)$$

- Analizar la regularidad de T y dar una normal a S en el punto $(3,0,0)$ que "apunte hacia adentro".

Dibujo aprox.

- si fijo $a = 0$

$$T(0,b) = \left(2+\sin b,\ \underset{\uparrow \atop y}{0},\ \cos b\right)$$



$$T(a,b) = \big((2+\sin b)\cdot\cos a,\ (2+\sin b)\cdot\sin a,\ a+\cos b \big)$$

- Si fijo $a = a_0$:

$$T(a_0,b) = (2\cdot\cos a_0,\ 2\cdot\sin a_0,\ a_0) +$$

$$+ (\sin b\cdot\cos a_0,\ \sin b\cdot\sin a,\ \cos b)$$

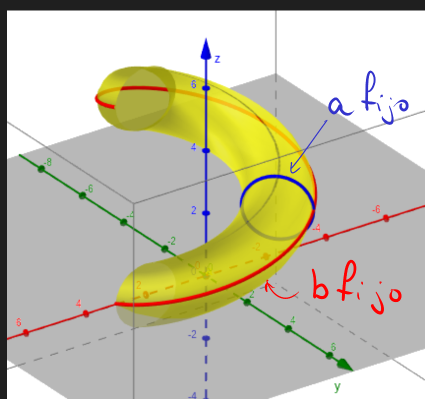
$$= (2\cdot\cos a_0,\ 2\cdot\sin a_0,\ a_0) +$$ ← fijo ← centrado en

$$+ \sin b\cdot(\cos a_0,\ \sin a,\ 0) +$$ ← círculo de radio

$$+ \cos b\cdot(0,\ 0,\ 1)$$

variable

Para cada 1° coordenada tenemos un círculo distinto (cambia el centro)



Veamos si T es regular:

- T es $\mathcal{C}^1$ ✓

- Inyectividad

Si $T(a_1,b_1) = T(a_2,b_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2+\sin b_1).\cos a_1 = (2+\sin b_2).\cos a_2 & (1) \\ (2+\sin b_1).\sin a_1 = (2+\sin b_2).\sin a_2 & (2) \\ a_1+\cos b_1 = a_2+\cos b_2 & (3) \end{cases}$$

$$(1)^2+(2)^2 = (2+\sin b_1)^2 = (2+\sin b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin b_1 = \sin b_2$$

Volviendo a (1) y (2)

$$\begin{cases} \cos(a_1) = \cos(a_2) \\ \sin(a_1) = \sin(a_2) \end{cases}$$

es decir

$$a_2 = a_1 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (3): \quad a_1 + \cos(b_1) = a_1 + 2k\pi + \cos(b_2)$$

$$\cos b_1 - \cos b_2 = 2k\pi$$

$$\Rightarrow k = 0$$

$$\text{y } a_1 = a_2$$

$\therefore$ como

$a_1 = a_2$ y $\begin{cases} \cos b_1 = \cos b_2 \\ \sin b_1 = \sin b_2 \end{cases}$

Concluimos que

T es inyectiva en $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ ✓

y

$T(a,0) = T(a,2\pi) \quad \forall\, 0 \leq a \leq 2\pi$ ✓

Falta la normal

$T(a,b) = \big((2+\sin b).\cos a \,,\ (2+\sin b).\sin a \,,\ a + \cos b \big)$

$$T_a(a,b) = \begin{pmatrix} -(2+\sin b)\sin a \\ (2+\sin b).\cos a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_b(a,b) = \begin{pmatrix} \cos b.\cos a \\ \cos b.\sin a \\ -\sin b \end{pmatrix}$$

$$T_a \times T_b = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(2+\sin b)\sin a & (2+\sin b).\cos a & 1 \\ \cos b.\cos a & \cos b.\sin a & -\sin b \end{vmatrix}$$

: resuelvo ... :/

Veo que $T_a \times T_b\,(a_0,b_0) \neq (0,0,0)$

Supongo que $T_a \times T_b\,(a_0,b_0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = 0 \\ \sin a = 0 \end{cases} \quad \text{Abs!}$$

$\therefore\ T_a \times T_b\,(a,b) \neq (0,0,0) \quad \forall a,b$

Si dijo $[0, 2\pi]$ No! es regular

$[0, 2\pi)$ sí

Normal que apunta hacia adentro:

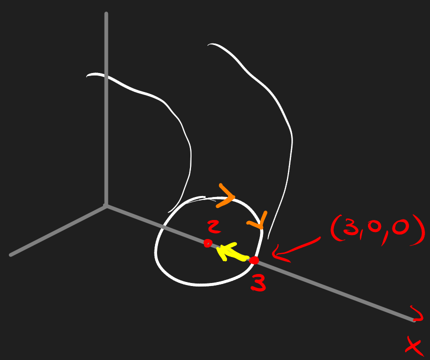
Escribo el $(3,0,0)$ como imagen de la parametrización

$$T(a,b) = (3,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pi/2 \end{cases}$$

Entonces $\dfrac{T_a \times T_b}{\|T_a \times T_b\|}(0, \frac{\pi}{2})$ es una normal a S

en el punto $(3,0,0)$



Falta el signo (sentido)

Veo sentido de giro de parametrizacion

Si

posible error de cuentas!

$$T_a \times T_b(0, \tfrac{\pi}{2}) = (-3, 0, 0)$$

$(-1,0,0)$ es una normal unitaria a S en el punto $(3,0,0)$ que apunta "hacia adentro."