Eze

Luna Mar 15

Diagramas de Fase
(autovalores complejos)

Problema

$$X'(t) = A\,X(t)$$

donde $\det(\lambda I - A)$ tiene raices complejas conjugadas

Auto valor

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

$$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$$

con $\beta i < 0$!

Auto vector

$$\xi = V_1 + i\,V_2$$

Escribo

$$X(t) = \underbrace{y_1(t)}\cdot V_1 + \underbrace{y_2(t)}\cdot V_2$$

Tomo

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cdot r \cdot \cos(\theta - \beta t) \\ e^{\alpha t}\cdot r \cdot \sin(\theta - \beta t) \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad C_1 = r \cdot \cos\theta \qquad C_2 = r \cdot \sin\theta$$

Un ejemplo concreto

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 2) + 10$$

$\lambda_1 = 3 - 3i \Leftarrow$ uso ésta !

puer signo menos

$\lambda_2 = 3 + 3i$

Trabajamos con $\lambda_1 = 3 - 3i$

V_1 : autovector asociado

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ 5 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ya sé que son ld puer $\det(\cdot) = 0$

(Pasa siempre que buscamos autovectores)

Recordar que

$$(1+3i)(1-3i) = 1 + 9 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ 5 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ 5 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= V_1 + i \cdot V_2$$

Escribo

$$X(t) = e^{(3-3i)t} \cdot \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \cdot \left(\overbrace{\cos 3t}^{\cos -3t = \cos 3t} - \overbrace{i \sin 3t}^{\sin -3t = -\sin 3t} \right) \begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$$

Parte Real   Parte Im

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 3t - 3 \sin 3t \\ 5 \cos 3t \end{pmatrix} + i \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \cos 3t - \sin 3t \\ -5 \sin 3t \end{pmatrix}$$

Sol: $\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 3t - 3 \sin 3t \\ 5 \cos 3t \end{pmatrix}, \; e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \cos 3t - \sin 3t \\ -5 \sin 3t \end{pmatrix} \right\}$

Obs

$$\alpha = \mathrm{Re}(\alpha + \beta i) = \underbrace{3 > 0}$$

- Son flechas que se alejan del $(0,0)$

pues $e^{\alpha t} \to \infty$ cuando $t \to \infty$

Obs :

$$X(0) = p \Rightarrow X'(0) = A.p$$

en $t=0$ estoy acá

- $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = V_1$

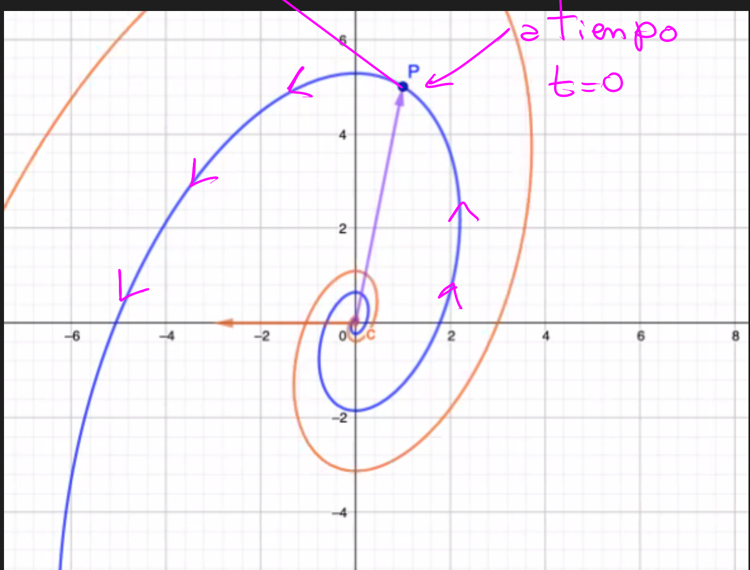
en $t=0$ el vector tangente es

- $X'(0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-6}{15}$

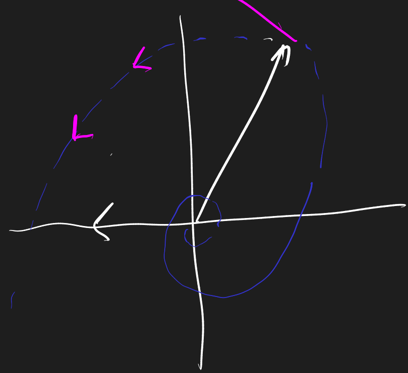
vector tangente a p

$-6/15$

a tiempo $t=0$



$-6/15$



Para parcial, saber

- Boceto aproximado
- Sentido de giro
- Hacia adentro / afuera

Linealización

$X' = F(X)$ con F no lineal

X grande

(F no es AX como antes)

x chica

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(x, y)$$

Notación

$\in \mathbb{R}^n$	$\in \mathbb{R}$
X	x
Y	y

Ejemplo

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x(2 - x - y) \\ y(-1 + x - y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x - x^2 - xy \\ -y + xy - y^2 \end{pmatrix}$$

Idea :

X grande, x chica, X grande

- Si $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \,/\, F(X_0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

estos "X_0" son llamados :

"Puntos de Equilibrio"

Obs :

Y grande

Si escribo $Y = X - X_0$

Taylor orden 1.

$\Rightarrow$ usando que $F(X) \cong DF(X_0)(X - X_0)$

$$Y' = X' = F(X) \cong \underbrace{DF(X_0)}_{A}(X - X_0) = AY$$

Miramos $\boxed{Y' = AY}$ que sabemos que se aproxima por el Teorema de abajo

Teorema :

- Cerca de X_0 (equilibrio) las soluciones de

$$X' = F(X)$$

se parecen a las soluciones de

$$Y' = DF(X_0)\, Y$$

Ejemplo

Puntos de equilibrio

Busco todas las soluciones

$$\begin{cases} x(2-x-y)=0 \\ y(-1+x-y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} P_0=(0,0) \\ P_1=(0,-1) \\ P_2=(2,0) \end{array}$$

$$P_3=(\,?\,,\,?\,)$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x=1+y$$

$$1+2y=2$$

$$2y=1$$

$$y=\tfrac{1}{2} \Rightarrow x=\tfrac{3}{2}$$

$$P_3=\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

De arriba:

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x(2-x-y) \\ y(-1+x-y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-x^2-xy \\ -y+xy-y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Escribo DF:

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}F_1 & \frac{\partial}{\partial y}F_1 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_2 & \frac{\partial}{\partial y}F_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ y & -1+x-2y \end{pmatrix}$$

Para:

$P_0=(0,0)$:

$$DF(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

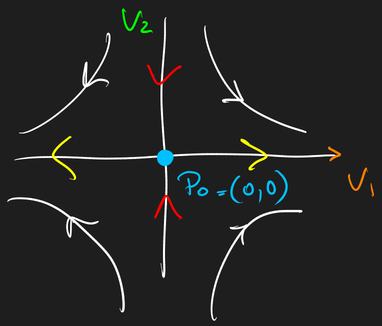
← ya está diagonalizada! (tengo los autovalores en la diagonal)

$\lambda_1=2$ ← hacia afuera en V_1

$\lambda_2=-1$ ← hacia adentro en V_2 (se acerca a P_0)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Para

$P_1 = (0,-1)$:

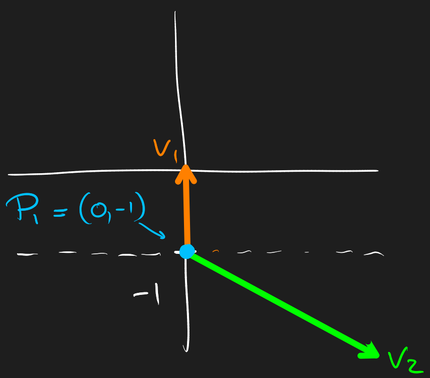
$$DF(0,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 1$
} Positivos $\Rightarrow$ hacia afuera (se alejan de P_1)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Importante! no estamos en el (0,0)!



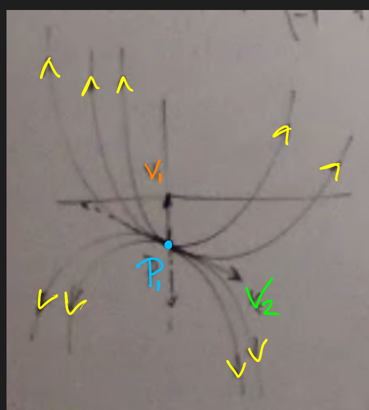
más grande

$$y_1 = e^{3t} \cdot V_1$$

$$y_2 = e^{t} \cdot V_2$$

pienso que

$$y_1 = (y_2)^3$$



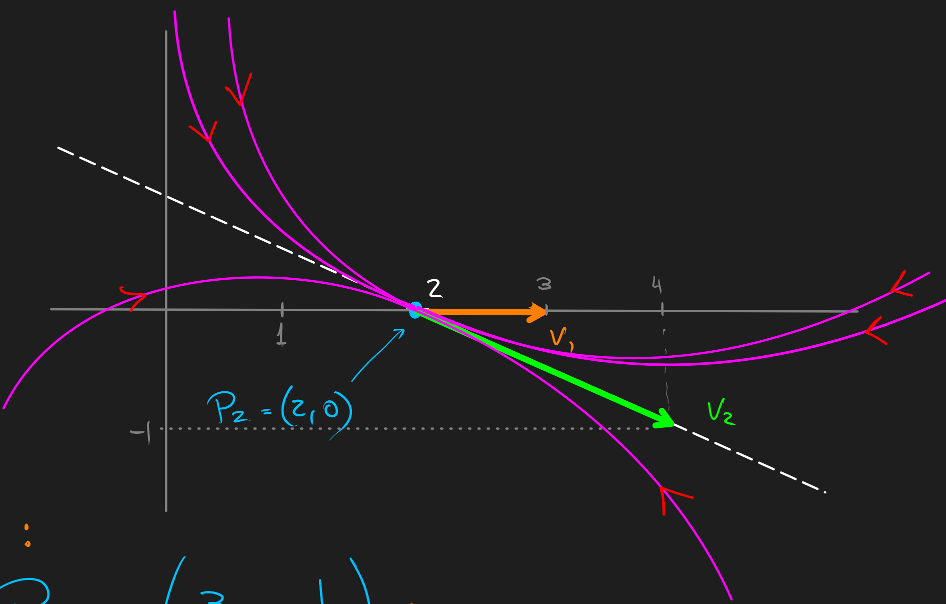
concav. posit.

$P_2 = (2,0)$:

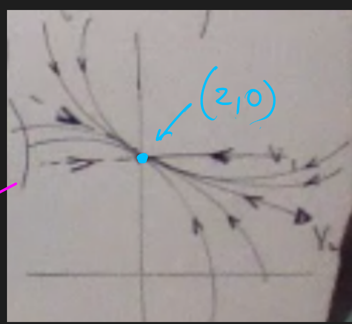
$$DF(2,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ hacia el punto de equilibrio P_2

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Creo que el punto tiene coordenadas al revés.



Para :

$P_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$DF\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+3 & 3 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1) + 3$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 6$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$$ complejas

(tarea)

Linealización: Lo que nos interesa

- Puntos de equilibrio
- Estabilidad: Diagrama de Fase

Preguntas:

De la 6, 12:

$$\boxed{y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2y = 0}$$

$$W = e^{-\int a} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

$$\boxed{x = e^{x^2}y_2' - y_2 2xe^{x^2}}$$

$$y_2' - 2xy_2 = xe^{-x^2}$$

$$xy'' - y' - 4x^3y = x^3$$

$$y = \frac{-1}{4}$$

$$\boxed{y=0}$$