

Luna

Mar 8

Resolución de Sistemas Lineales, de coeficientes constantes, homogéneos:

$$X'(t) = A X(t) \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

en el caso de 1 autovalor doble λ

- No el caso

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ pues es trivial:}$$

$$\text{Si } A = \lambda I \Rightarrow X' = \overbrace{\lambda I}^A X(t)$$

$$X' = \lambda X(t)$$

$$X = \frac{1}{\lambda} \cdot X'(t)$$

- Si no el caso con 1 autovalor doble
y A no diagonalizable

Ej:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} X(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 \\ 1 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a$$

Auto vector:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda - a |_{\lambda=a}$

Tengo 1 autovector

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at}$$

primera solución

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

siempre queda $\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$?

Para la otra solución

$$X_1'(t) = a \cdot X_1(t) \Rightarrow X_1(t) = C_1 \cdot e^{at}$$

$$X_2'(t) = C_1 \cdot e^{at} + a X_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_2'(t) - a X_2(t) = C_1 e^{at}$$

$$e^{-at} (x_2' - a x_2) = C_1$$

integro wrt. t

$$(e^{-at} x_2)' = C_1$$

integro wrt. t

(con regla de la cadena vuelvo arriba)

$$e^{-at} x_2 = C_1 t + C_2$$

$$x_2(t) = C_1 t e^{at} + C_2 e^{at}$$

Junto todo

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_1 t e^{at} + C_2 e^{at} \end{pmatrix}$$

$$= C_1 e^{at} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_2 e^{at} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base :

$$\mathcal{B}_s = \left\{ e^{at} (w + t.v), e^{at} v \right\}$$

En general :

$$X'(t) = A X(t)$$

con 1 autov. doble λ y solo 1 autovector v

Una solución :

$$\begin{aligned} e^{-at} x_2 &= C_1 t + C_2 \\ x_2(t) &= C_1 t e^{at} + C_2 e^{at} \\ x(t) &= \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_1 t e^{at} + C_2 e^{at} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X_1(t) = v \cdot e^{\lambda t}$$

La otra será de la forma:

$$X_2(t) = e^{\lambda t} (w + t v)$$

$$X_2'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} (w + t v) + e^{\lambda t} v$$

$$A X(t) = e^{\lambda t} A w + t e^{\lambda t} \lambda v$$

Necesitamos que:

$$A w = \lambda w + v$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{atenti: al orden!}} w = v \quad \leftarrow \text{Siempre tiene solución!}$$

(Prueba en apunte)

Ejemplo:

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - X_2 \\ X_2' = X_1 + 3 X_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores \swarrow luego uso " $(A - \lambda I)w = v$ " (notar orden!)

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 2)^2$$

$\lambda = 2$ doble

Calculo autovector:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Primera solución

$\hookrightarrow X_1(t) = e^{\overset{\lambda \text{ encontrado}}{\downarrow} 2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Para la otra solución:

quiero el w que satisfaga: $(A - \lambda I)w = v$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda \text{ encontrado}$
 \downarrow

$$X_2(t) = e^{2t} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_w + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_v \right)$$

Fin del caso no diagonalizable.

Resolución de Sistemas Lineales,
de coeficientes constantes,
no homogéneos:

$$X'(t) = A X(t) + B(t) \quad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Recordar

Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ base de soluciones

de $X' = A X$ (homogéneo)

Matriz fundamental:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ x_1(t) \\ | \end{array} & \dots & \begin{array}{c} | \\ x_n(t) \\ | \end{array} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) X_i(t)$$

es solución del no homogéneo si

$$Q(t) C'(t) = B(t)$$

Ejemplo:

$$x_1' = -x_2 + 2$$

$$x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Soluciones del homogéneo:

$$X' = AX$$

Autovalor:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \leftarrow \lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = 2$$

Auto vector es :

$$\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{autovector} & \text{autoespacio} \\ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = 2 : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Método de Variación de las constantes

Buscamos

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot X_1(t) + C_2(t) \cdot X_2(t)$$

tal que

$$X_p' = A X_p + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Hay que resolver :

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 2F_1$$

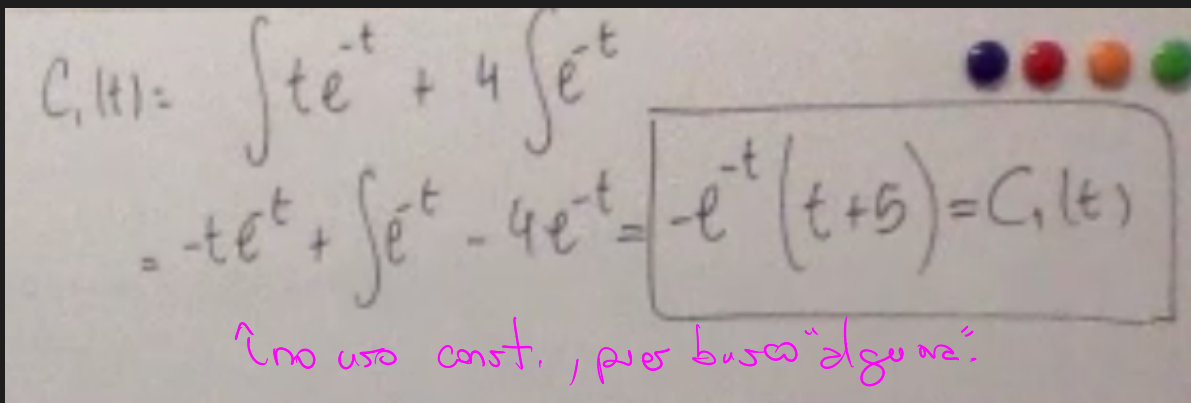
$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

$$C_1'(t) \cdot e^t + 0 = t + 4$$

$$C_1'(t) = e^{-t} \cdot t + 4e^{-t}$$

integro

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int e^{-t} \cdot t + 4e^{-t} dt \\ &= \int e^{-t} \cdot t dt + \int 4e^{-t} dt \end{aligned}$$



Handwritten solution for $C_1(t)$:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int t e^{-t} + 4 \int e^{-t} \\ &= -t e^{-t} + \int e^{-t} - 4 e^{-t} = \boxed{-e^{-t}(t+5) = C_1(t)} \end{aligned}$$

↑ no uso const., por busca "alguna".

Volviendo

Reemplazando C_1' en ↴

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

Obtengo

$$e^t C_1'(t) - e^{2t} C_2'(t) = 2$$

$$t+4 - e^{2t} \cdot C_2'(t) = 2$$

$$C_2'(t) = (t+2) \cdot e^{-2t}$$

Integro

$$C_2(t) = \int (t+2) \cdot e^{-2t} dt$$

$$= - (t+2) \cdot \frac{e^{-2t}}{2} + \int \frac{e^{-2t}}{2} dt$$

$$= - e^{-2t} \cdot \frac{(t+2)}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$C_2(t) = -e^{-2t} \frac{2t+5}{4}$$

Variación de las constantes

• Buscamos solución particular $X_p(t)$

$$X_p(t) = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t) /$$

$$X_p(t) = -e^{-t} (t+5) \cdot e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + -\frac{e^{-2t}}{4} (2t+5) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = (t+5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2t+5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

↑
notar que es un polinomio.

acomodando :

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \underbrace{X_p(t)}_{\text{constante}} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{X_p(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol final será:

$$X = A X_1(t) + B X_2(t) + X_p(t)$$

Observación :

Ecuaciones de orden 2 :

$$X''(t) + a X'(t) + b X(t) = 0$$

Podemos traducirlo a un sistema de 2×2

\Rightarrow el polinomio característico de la matriz

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

← Remember!

siempre así!

Soluciones:

$$X(t) = e^{\lambda t} \quad \text{con } \lambda \text{ raíz de } P$$
$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Cuando tengas raíz doble:

$$e^{\lambda t}, t \cdot e^{\lambda t}$$