Ejercicios de Parcial

1) Cálculo de área

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; , \right.$$

$$(x+1)^2 + y^2 \geqslant 1 \; ,$$

$$\left. (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1 \right\}$$

S
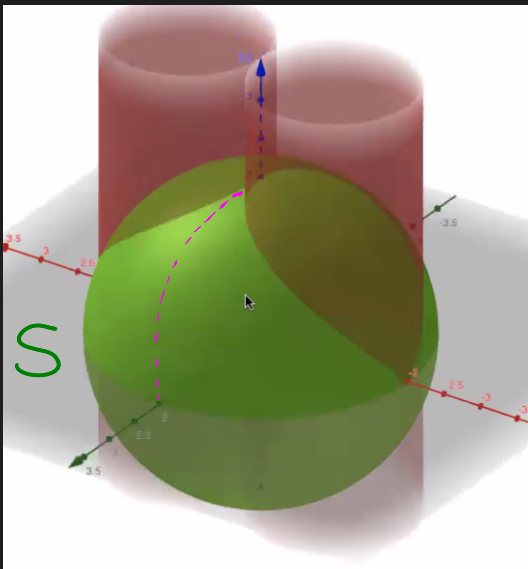
- $\frac{1}{8} S$: trozo donde $x, y, z \geqslant 0$

- Se puede ver como gráfico sobre D

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4 \; , \right.$$
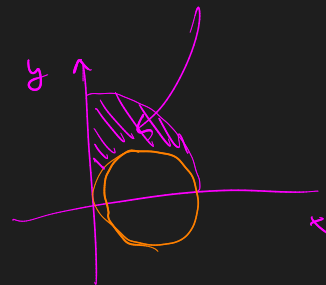
$$\left. (x-1)^2 + y^2 \geqslant 1 \right\}$$

despejo z como

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Parametrización:

$$T : D \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)$$

$$T_x(x, y) = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)$$

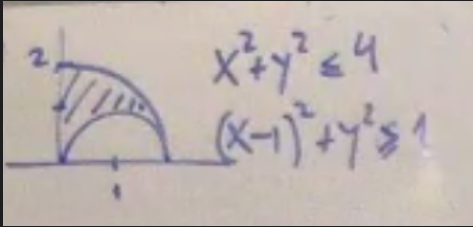$$T_y(x, y) = \left(1, 0, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)$$

$$T_x \times T_y = \left(\frac{x}{\sqrt{\ }}, \frac{y}{\sqrt{\ }}, 1 \right)$$

cuenta

$$\| T_x \times T_y \| = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Resuelvo:

$$A(s) = \iint_D \| T_x \times T_y \| \, dx \, dy$$

$$= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dxdy$$

$x^2+y^2 \leq 4$

$(x-1)^2+y^2 \geq 1$

$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ restrinjo a un solo cuadrante

Polares

$x = r \cdot \cos \theta$

$y = r \cdot \sin \theta$

sé que $r \leq 2$ por primera eq.

despejo la otra $r(\theta)$

$(x-1)^2 + y^2 \geq 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 \geq 1 \qquad \left.\right\}$ Polares

$r^2 - 2r \cdot \cos \theta \geq 0$

$r \geq 2 \cdot \cos \theta$

$\curvearrowright$ por abajo !

Resuelvo

$$\int_0^{\pi/2} \int_{2\cos\theta}^2 \frac{2}{\sqrt{4-r^2}} \, r \cdot dr \, d\theta =$$
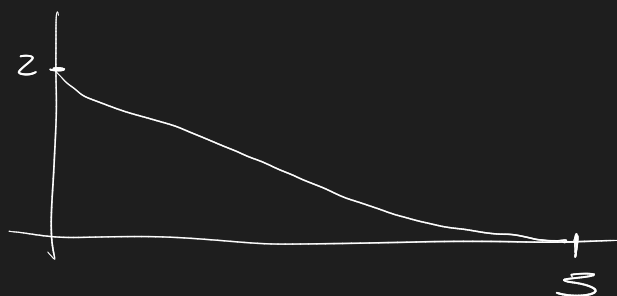
sale con sustitución y listo.

Otro :

2) $(\mathbb{R}^4)$ $F(x,y) = (2y^2x^3 + 2y, x^4y + 2x)$ — inyectiva en x y en y
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (5t, 2(t-1)^2 t^2)$ $\therefore$ es simple
$\mathscr{C}$ = curva dada y orientada por γ
Calcular $\int_{\mathscr{C}} \bar{F} d\bar{s}$

Calculo

$\gamma(0) = (0,2)$
$\gamma(1) = (5,0)$

Calculo el rotor

$Q_x - P_y = 4x^3 y + 2 - (4x^3 y + 2) = 0$

Como $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$ F es conservativo

$\int_{\mathscr{C}} \bar{F} d\bar{s} = f(5,0) - f(0,2)$

donde $\nabla f = F$

$\therefore$ cuentas

$\downarrow$ obtengo

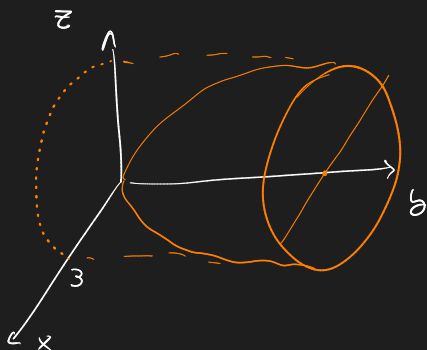$f(x,y) = \dfrac{x^4 \cdot y^2}{2} + 2xy$

$$f(5,0) = 0$$

$$f(0,2) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathscr{C}} \vec{F} \, d\vec{s} = 0$$

También se podría haber usado Green y salía fácilmente (no siempre es el caso que anden "bien" los dos)

3) $\quad S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y \;,\; y \leq 9 \right\}$

a)

a) Campo normal "interior"
b) Plano tangente en $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
c) $F(x,y,z) = (x-z, y, x+z)$, $\displaystyle\int_{S_{int}} F \, d\vec{S}$

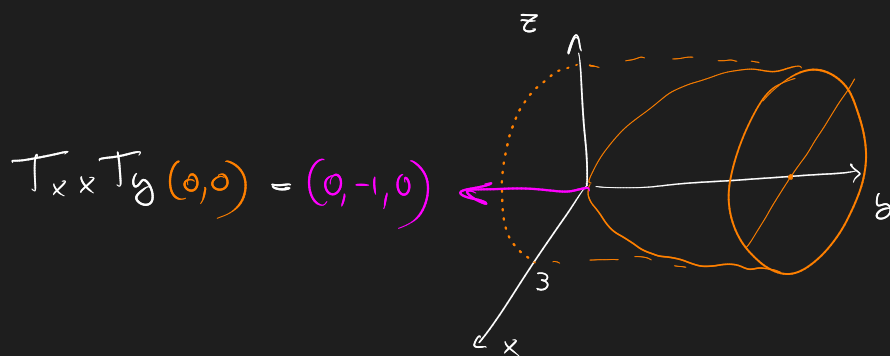a) Parametrizaciones   circunferencia en y

$$T(x,z) = (x, x^2 + z^2, z)$$

$$T: D \to \mathbb{R}^3$$

$$D = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2, \ x^2 + z^2 \leq 9 \}$$

$$T_x = (1, 2x, 0)$$

$$T_z = (0, 2z, 1)$$

$$T_x \times T_y = (2x, -1, 2z)$$

$$T_x \times T_y (0,0) = (0,-1,0)$$

$$\eta(x,y,z) = \frac{(-2x, \ 1, \ -2z)}{\sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}}$$

Otra opción

$$T(r,\theta) = (r \cos \theta, \ r^2, \ r \sin \theta)$$

$$r \in [0, 3]$$
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$T_r = (\cos\theta, \; 2r, \; \sin\theta)$$

$$T_\theta = (-r\sin\theta, \; 0, \; r\cos\theta)$$

$$T_r \times T_\theta = (2r^2\cos\theta, \; -r, \; 2r^2\sin\theta)$$

Notar que para $r = 0$

$$T_r \times T_\theta (0,\theta) = (0, 0, 0) \;\Big|_a$$

Pero eso es porque $\underline{no}$ es inyectiva en $r = 0$

Si tomo otro r, veo que y es negativa.

Otra opción

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$G(x,y,z) = y - x^2 - z^2$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; G(x,y,z) = 0, \; y \leq 9\}$$

$$\nabla G(x,y,z) = (-2x, \; 1, \; -2z)$$

$$\uparrow \text{que es lo que buscaba}$$

hacia adentro, pero no importa para el plano

$$b) \quad P = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \quad \eta(P) = (-1, 1, -1)$$

$$\Pi : \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle (x, y, z) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (-1, 1, -1) \right\rangle = 0 \right\}$$

$$-(x - \tfrac{1}{2}) + (y - \tfrac{1}{2}) + (-1)(z - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\boxed{y = x + z - \tfrac{1}{2}}$$

$$\Pi : \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle (x, y, z) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (-1, 1, -1) \right\rangle = 0 \right\}$$

Opción 2: Taylor

$$y(x, z) = x^2 + z^2$$

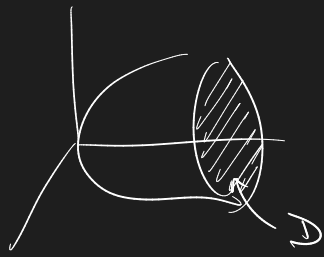$$y(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

$$y_x(x, z) = 2x$$

$$y_z(x, z) = 2z$$

$$T(x, z) = y(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + y_x(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})$$
$$+ y_z(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})(z - \tfrac{1}{2})$$

$$= x + z - \tfrac{1}{2}$$

c) $F(x,y,z) = (x-z, \ y, \ x+z)$

$\operatorname{div} F = 3$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + z^2 \leq 3, \ y = 9\}$$

$$\int_{S_{int}} F \, d\vec{s} \ + \ \int_{D} F \cdot d\vec{s} \ = \ - \iiint_{\Omega} 3 \, dV$$

$$\partial \Omega = S \cup D$$

$$\iiint_{\Omega} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{3} \overset{\text{cilíndricas}}{(9-r^2)} \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_{0}^{3} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{81}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 81$$

$$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \langle (x-z, y, x+z), (0, -1, 0) \rangle \, dS$$

$$= \iint_D -y \, dS$$

Pero y está fijo

$$= -9 \underbrace{\iint_D dS}_{\text{Área } D = \pi \cdot 9}$$

$$= -81\pi \quad /\!/$$

$$\int_{S_{int}} \vec{F} \, d\vec{s} + (-81\pi) = -\frac{3}{2}\pi \cdot 81$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{S_{int}} \vec{F} \, d\vec{s} = -\frac{81}{2}\pi}$$

Opción 2: Cálculo directo.

$$T : (x, z) = (x, x^2 + z^2, z) \quad \text{param.}$$

$$\int_{S_{int}} \vec{F} \, d\vec{s} = \oint\int_D \left\langle (x-z, \ x^2+z^2, \ x+z), (-2x, 1, -2z) \right\rangle dx dz$$

$$= \oint\int_D -2x^2 + 2\cancel{xz} + x^2 + z^2 - 2z^2 - 2\cancel{xz}$$

$$= \oint\int_D -x^2 - z^2 \, dx dz$$

Polares

Jacobiano

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 \cdot r \cdot dr d\theta$$

$$= -2\pi \cdot \frac{81}{4}$$

$$\boxed{\int_{S_{int}} \vec{F} \, d\vec{s} = -\frac{81}{2}\pi}$$