Iván

Mercury Mar 03

Ec. dif. Lineales

Resolver:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

☆

Cómo? Método particular para funciones lineales.

1° Hallar una solución de la

ec. dif. homogénea asociada a ☆ :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$$

$$\int \frac{y'}{y} \, dy = \int -p(x) \, dx$$

$$\ln |y| = -R(x)$$

$$y = e^{-R(x)}$$

2°.- Plantear que la solución de ✩ es de la forma:

$$y(x) = k(x) \cdot e^{-R(x)}$$

$$y'(x) = k'(x) \cdot e^{-R(x)} + k(x) \cdot e^{-R(x)} \cdot (-p(x))$$

Reemplazo $y = k(x) \cdot e^{-R(x)}$ en ✩

$$k'(x) \cdot e^{-R(x)} + k(x) \cdot \cancel{e^{-R(x)}} (-p(x)) + k(x) \cdot \cancel{e^{-R(x)}} \cdot p(x) = q(x)$$

Variables separables:

$$k'(x) = e^{R(x)} \cdot q(x)$$

$$k(x) = \int e^{R(x)} \cdot q(x) \, dx$$

3° Recupero $y(x)$

Ej:

$$y' + y = \sin x$$

✩

1° Hallo una soluc. de $y' + y = 0$

$$\frac{y'}{y} = -1$$

$$\int \frac{y'}{y}\, dy = \int -1\, dx$$

$$\ln|y| = -x$$

$$y = e^{-x}$$

2° $y(x) = K(x) . e^{-x}$

$$y'(x) = k'(x) . e^{-x} + k(x) . e^{-x} . (-1)$$

Reemplazo en ☆

$$k'(x) . e^{-x} - \cancel{k(x) . e^{-x}} + \cancel{k(x) . e^{-x}} = \sin x$$

$$k'(x) = e^{x} . \sin x$$

$$k(x) = \int e^{x} . \sin\, dx$$

⋮

cuentas

⋮

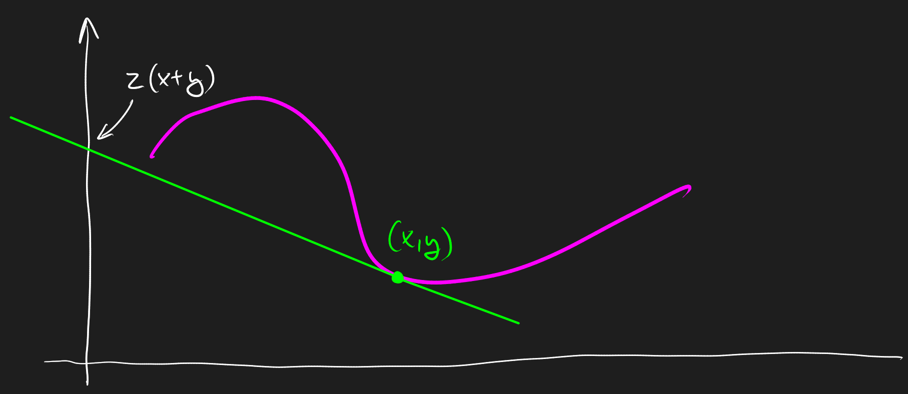
$$k(x) = \frac{1}{2} e^{x} . (\sin x - \cos x) + C$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} e^{x} \cdot (\sin x - \cos x) + c\right) \cdot e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + c \cdot e^{-x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Probar resolver el ej de la guía que da un factor integrante pero sale con esto

PSE 12) Hallar la ec de una curva en el 1° cuadrante tal que para cada punto (x,y) de la misma la ordenada al origen de la recta tangente allí es $2(x+y)$.



Busco ecuación de rta tangente

$(x,y) \rightarrow$ ptos de la curva
$(u,v) \rightarrow$ ptos de la recta tangente

Recta t : $\quad v - y = y'(u - x)$

$$v = \begin{matrix}\text{ordenada}\\\text{al}\\\text{origen}\end{matrix} = 2(x+y)$$

$$2(x+y) - y = y'(-x)$$

$$2x + y = -xy'$$

$$2x = -xy' - y$$

$$\overset{x>0}{-2 = y' + \frac{1}{x}y} \quad \star$$

1° $y' + \frac{1}{x}y = 0$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{y'}{y} = \int -\frac{1}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| \qquad x>0,\, y>0$$

$$\ln y = \ln x^{-1}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

2° $y(x) = k(x) \cdot \frac{1}{x}$

$$y'(x) = k'(x) \cdot \frac{1}{x} + k(x) \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$\star \quad k'(x) \cdot \frac{1}{x} + \cancel{k(x) \cdot \frac{-1}{x^2}} + \cancel{k(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = -2$$

$$k'(x) = -2x$$

$$k(x) = -x^2 + C$$

$$y = (-x^2 + C) \cdot \frac{1}{x} =$$

Solución

$$\boxed{y = -x + \frac{C}{x} \qquad C \in \mathbb{R}}$$

Último de la guía: Ecua. de Bernoulli ¡Recordar!

"casi" lineal

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \left(y(x)\right)^n \quad \star$$

Si $n \neq 1$,

el reemplazo $z = y^{1-n}$

convierte a $\star$

en una eq. dif. Lineal

$$z = y^{1-n}$$

derivo

$$z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

Divido ambos lados por y^n en ☆ (para deshacerme de y^n)

$$\underbrace{y' \cdot y^{-n}}_{\frac{z'}{1-n}} + p(x) \cdot \underbrace{y^{1-n}}_{z} = q(x)$$

eso es una z

$$z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot q(x)$$

EC. DIF LINEAL EN z

EJ: HALLAR LA SOLUC. DE

$$\begin{cases} xy' + y = x^4 y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$x y' + y = x^4 \cdot y^3$$

divido por x $(x \neq 0)$

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x^3 \cdot y^3 \quad ☆$$

← Ec de Bernoulli $n = 3$!

⇒ Uso sustitución $z = y^{-2}$

$$z' = -2y^{-3} \cdot y'$$

Dividir por y^3

$$\cancel{*} \quad \underbrace{y' \cdot y^{-3}}_{-\frac{1}{2}z'} + \frac{1}{x} \cdot \underbrace{y^{-2}}_{z} = x^3$$

$$\Delta \quad z' -$$

$\boxed{1°}$ $z' - \frac{2}{x} z = 0$

$$\int \frac{z'}{z} = \int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|z| = 2\ln|x|$$

$$\ln|z| = \ln x^2$$

$$z = x^2$$

$\boxed{2°}$ $y = k(x) \cdot x^2$

$$y' = k'(x) \cdot x^2 + k(x) \cdot 2x$$

Reemplazo en Δ

$$k'(x) \cdot x^2 + k(x) \cdot 2x + k(x) \cdot x^2\left(-\frac{2}{x}\right) = -2x^3$$

$$k'(x) = -2x$$

$$k(x) = -x^2 + C$$

$$z = (-x^2 + c) \cdot x^2 \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= -x^4 + C x^2$$

Falta volver a y

$$y^{-2} = z$$

$$\frac{1}{y^2} = -x^4 + c x^2$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{-x^4 + C x^2}}$$

Veo valor inicial $y(1) = 3$

Uso:

$$\underset{y(1)=3}{y} = + \frac{1}{\sqrt{-x^4 + C x^2}}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{-1 + C}}$$

$$C = \frac{10}{9}$$

La solución que busco es

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^4 + \frac{10}{9}x^2}}$$ con Dominio

$$\frac{10}{9}x^2 - x^4 > 0$$

$$\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$