Jue Mar 04

Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\big(A(t)\big)_{ij} = a_{ij}(t)$$

Teorema

Las soluciones de (1) son un E.V. de dimensión n.

Recuerdo sobre e.v.

Conjunto $\mathbb{V}$, $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

Espacios vectoriales de funciones

$$\mathbb{V} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ , \ f \text{ continua} \}$$

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(\lambda f)(t) = \lambda . f(t)$$

$$\mathbb{W} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \ , \ f \in C^1 \}$$

$$f, g \in \mathbb{W}$$

$$\Rightarrow f+g \in \mathbb{W}$$

$$\lambda f \in \mathbb{W} \qquad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{W}$ es subespacio de $\mathbb{V}$

El elemento neutro en $\mathbb{V}$ es

la función $f \equiv 0$, $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Base de $\mathbb{V}$ es $\{v_1, \dots, v_k\}$ /

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} \ \{v_1, \dots, v_k\} \text{ es li} \\ \boxed{2} \ \text{genera todo } \mathbb{V} \end{array}\right\} \text{Dim} = k$$

$\boxed{1}$ Si $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k . v_k = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

(ningún vector es cl de los otros)

$\boxed{2}$ Si $v \in V$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \;/$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k$$

Demo. del Teo

X_1, X_2 son Sol. de ①, $\lambda \in \mathbb{R}$

$X_1 + X_2$, λX_1 son sol. de ①

$$(X_1 + X_2)' = X_1' + X_2' = A X_1 + A X_2$$
$$= A(X_1 + X_2)$$

Una base de soluciones:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{posición } i$$

$$(P_i) \begin{cases} X' = AX \\ X(\tau) = e_i \end{cases}$$

$\tau \in I$

P_i tiene solución única : X_i

$X_i : I \to \mathbb{R}^n$

$X_i(\tau) = e_i$

Afirmación

$\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ es base de sol 1.

1) Son li

Suponer que $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} /$

$$\alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_n X_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ en $t = \tau$

$$\alpha_1 X_1(\tau) + \dots + \alpha_n X_n(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

2) Sistema de generadores (genera todo)

Sea $y(t)$ solución de

$$X'(t) = A(t)\,X(t)$$

Obs:

$$y(\tau) = \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Afirmación

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot X_i(t) =: \tilde{y}(t)$$

$\tilde{y}(t)$ es solución de $\begin{cases} X' = AX \\ X(\tau) = \xi \end{cases}$

$y(t)$ también!

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) = y(t) \qquad \forall t \in I$$

Lema:

$\{X_1, \dots, X_n\}$ base de soluciones de

$$X' = AX$$

$\Rightarrow \{X_1, \dots, X_n\}$ es li $\Leftrightarrow \{X_1(r), \dots, X_n(r)\}$
como funciones es li en $\mathbb{R}^n$

(esto vale porque son sol. de un sistema de eq. dif)

$\Leftarrow)$ Suponer que $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \,/$

$$\alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_n X_n(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \alpha_1 X_1(r) + \dots + \alpha_n X_n(r) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$\Rightarrow)$ Supongamos que

$$\alpha_1 X_1(r) + \dots + \alpha_n X_n(r) = 0$$

defino

$$Y(t) = \alpha_1 X_1(t) + \dots + \alpha_n X_n(t)$$

Y es solución de $\begin{cases} X' = AX \\ X(r) = 0 \end{cases}$

Pero $X \equiv 0$ también es solución!

$\therefore \; Y = X \equiv 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Def: matriz fundamental

$$Q(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

con $\{X_1, \dots, X_n\}$ base de sol. de $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$

Prop:

- $Q'(t) = A(t) \cdot Q(t)$
- Si X es sol de $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$

$$\Rightarrow X = C_1 X_1 + \dots + C_n X_n \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

$$X(t) = Q(t) \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

Sistemas <u>no</u> homogéneos

de la forma

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + b(t)$$

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$b(t) \in \mathbb{R}^{n}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$$

$$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{coef constantes}} \cdot X(t) + \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

Problema (H) $X'(t) = A(t)X(t)$

Problema (NH) $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$

Importante

Toda solución de (NH)

es de la forma $y = y_H + y_P$

donde y_P es alguna solucion de (NH)

e y_H es solución de (H)

Si y, y_p son sol de NH

$$(y - y_p)' = y' - y_p'$$

$$= Ay + b - (Ay_p + b$$

$$= A(y - y_p)$$

$$\Rightarrow y - y_p = y_H \text{ sol del } (H)$$

Método de variación de las constantes

El problema

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t) + b(t)$$

admite una sol del tipo:

$$X(t) = C_1(t) \cdot X_1(t) + \dots + C_n(t) \cdot X_n(t)$$

donde $\{X_1, \dots, X_n\}$ es de la base de sol del problema homogéneo asociado.

Proponemos

$$X(t) = Q(t) \cdot C(t)$$

donde $C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix}$

Buscamos las funciones $C_i(t)$

Calculo

$$X' = \underbrace{Q'(t)}. C(t) + Q(t) \cdot C'(t)$$

(vale regla del prod para esto)

$$= A(t) . Q(t) . C(t) + Q(t) C'(t)$$

$$X'(t) = A(t) . X(t) + Q(t) C'(t)$$

Pedimos

$$Q(t) C'(t) = b(t)$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Homogéneo

$$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(3-\lambda)+2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ -e^t & -2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Sumando Filar

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$C_2'(t)\cdot\left(-e^{2t}\right) = t+2$$

$$C_2'(t) = -(t+2)\cdot e^{-2t}$$

Integro

$$C_2(t) = \int -(t+2)\cdot e^{-2t}\, dt$$

(sale con partes)

Meto C_2 en ☆ y calculo C_1.

Fin //

Pregunta sobre factor integrante: 7e)

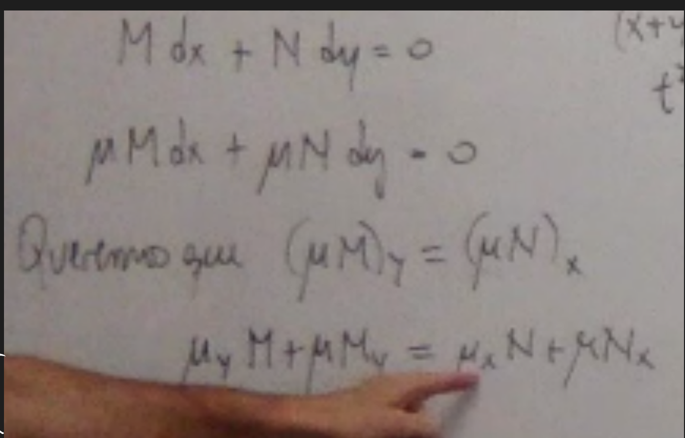
(e) $2(x+y)\operatorname{sen} y\, dx + \big(2(x+y)\operatorname{sen} y + \cos y\big)\, dy = 0$

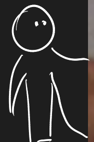
Proponemos

$$\mu(x,y) = g(x+y) \quad \text{con} \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ejemplos:

$\mu(x,y)$	$(x+y)^3$	$\sqrt{x+y}$	$\frac{x+y}{3}$
$g(t)$	t^2	$\sqrt{t}$	$\frac{t}{3}$





$$\mu_y(x,y) = g'(x+y)\cdot 1$$

$$\mu_x(x,y) = g'(x+y)\cdot 1$$

Obs

si fuera $\mu(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\mu_y(x,y) = g'(\ )\cdot \frac{-x}{y^2}$$

$$\mu_x(x,y) = g'(\ )\cdot \frac{1}{y}$$

$$g'(x+y)\cdot 2(x+y)\cdot \sin y + g(x,y)\left(2\cdot \sin y + 2(x+y)\cdot \cos y\right) \quad (1)$$

$$g'(x+y)\left(\cancel{2(x+y)\operatorname{sen} y} + \cos(y)\right) + \cancel{g(x+y)\, 2 \operatorname{sen} y} \quad (2)$$

$$g(x+y)\cdot 2(x+y)\cos y = g'(x+y)\cos y$$

$$g(x+y)\cdot 2(x+y) = g'(x+y) \qquad t = x+y$$

$$g'(t) = g(t)\cdot 2t$$

$$\Rightarrow g(t) = e^{t^2}$$

↑

factor integrante.