

Problema general

Dado $I \subseteq \mathbb{R}$, encontrar una función

$$y: I \rightarrow \mathbb{R} / y \in C^1$$

$$y^{(k)} = F(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

con cierta F dada.

k : orden de la ecuación

Ejemplo:

$$y' = xy \quad (\text{primer orden})$$

$$\text{Si } y(x) \neq 0, \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

$$\ln(|y(x)|) = \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot A$$

Las soluciones son

$$y(x) = B \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ con } B \in \mathbb{R}$$

Problema de valores iniciales

1° orden $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{Bajo ciertas condiciones,} \\ \text{asegurar } \exists \text{ y unicidad.} \end{matrix}$ sobre F ✓

General $\begin{cases} y^{(k)} = F(x, y, \dots, y^{(k)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)} \end{cases}$

Sistemas de Ecuaciones de 1° orden
(n variables)

Inógnita (Solución del Problema)

$$\overset{\text{mayúscula}}{X}(t) = \begin{pmatrix} \overset{\text{minúsculas}}{x_1(t)} \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ecuaciones diferenciales

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, \quad, x_n) \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineales

$$X'(t) = A(t) X(t), \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Caso Particular

$$\text{de } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \text{ (constante)}$$

$$X'(t) = A \cdot X(t) \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

• Equivalencias entre sistemas $n \times n$, orden n

Supongamos que tenemos la ecuación

$$X^{(n)}(t) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

• Si definimos $X_0 = x$

$$X_1 = x'$$

$$X_2 = x''$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1} = x^{(n-1)}$$

el vector de funciones

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

es solución de

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Existencia y Unicidad

Teorema: (1 variable)

$$I \subseteq \mathbb{R},$$

$$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Localmente Lipschitz en } x$$

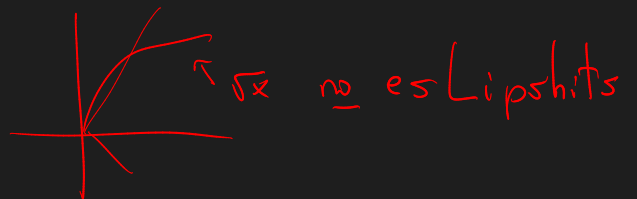
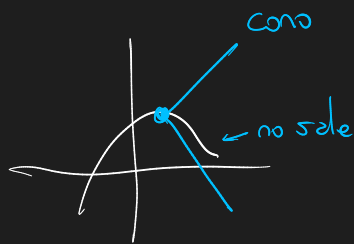


Funciones (localmente) Lipschitz

$\forall [a, b] \subset I$, $K \subset \mathbb{R}$ compacto (cerrado y acotado)
vale que:

$$\exists L > 0 /$$

$$|f(t, x_0) - f(t, y_0)| \leq L |x - y|$$



Puedo verlo como

$$\exists L > 0 /$$

$$\frac{|f(t, x_0) - f(t, y_0)|}{|x - y|} \leq L$$

"pendiente" acotada por L

en cada x hay un "cono"

con amplitud dada
por L .

• Una poligonal es Lipschitz



constante L distinta
en cada vértice
(pendiente dada por el
segmento)

• "Noción de regularidad"

• "Funciones cuyo crecimiento no es abrupto"

Teorema: (1 variable)



$$I \subseteq \mathbb{R},$$

$$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(t, x)

Localmente Lipschitz en x

$$\text{Si } (z, \tilde{z}) \in I \times \mathbb{R} \quad z \in I^\circ$$

↙ exterior

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ a \quad z \quad b \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda > 0 \quad y$$

una función

$$x: [z - \lambda, z + \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Solución de } \begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(z) = \tilde{z} \end{cases}$$

Continuidad Respecto del Dato Inicial

↗ no tengo demasiada variación para $t_1 \approx t_2$

$$\begin{cases} x'_1 = f(t, x_1) \\ x_1(z) = z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_2 = f(t, x_1) \\ x_2(z) = z_2 \end{cases}$$

$$\exists C > 0 /$$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C \cdot |z_1 - z_2|$$

(Bajo las condiciones del teorema)

Consecuencia:

$$\textcircled{P} \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(z) = z \end{cases} \text{ tiene solución única}$$



$$\left. \begin{array}{l} x_1 \text{ sol de } P \text{ en } J_1 \\ x_2 \text{ sol de } P \text{ en } J_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Un no ejemplo

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, +\infty)$$

$$\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} dt = \int 1 dt = t + C$$

$$2\sqrt{x} = t + C$$

$$x = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{4}$$

$$x'(t) = \frac{t}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 & t > 1 \end{cases}$$

$$\tilde{x}'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \\ \frac{t-1}{2} & \end{cases}$$

$$\sqrt{\tilde{x}(t)} = \begin{cases} 0 \\ \frac{t-1}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

X y \tilde{X} son soluciones para el sistema,

también hay otras infinitas trayectorias en el eje x .

Esto pasa pues \sqrt{x} no es Lipschitz en
cualquier intervalo que contenga al cero
(pues $X(0) = 0$)

Semana que viene

↳ Sistemas Lineales

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$$

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$