

# Resolución de ejercicios de Parcial

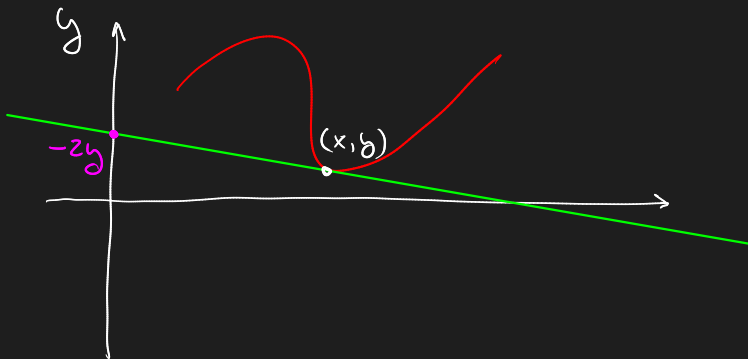
1) 16/3/2021 - CLASE 22 - PARCIAL RESUELTO

2° PARCIAL 30/11/2013

1) DE STOKES/GAUSS

2) ENCONTRAR TODAS LAS FUNCIONES  $f=f(x)$ ,  
 $x \geq 0$ , DERIVABLES TALES QUE TODAS LAS  
 RECTAS TANGENTES AL GRÁFICO CORTEN  
AL EJE Y EN EL DOBLE DEL ORIGEN  
 A LA ORDENADA DEL PUNTO DE TANGENCIA.

Arrancamos a graficar



Ec. de la recta tangente

$(x, y) \rightarrow$  puntos del gráfico de  $y(x)$

$(u, v) \rightarrow$  de la recta tangente

$$v - y = y' \cdot (u - x)$$

punto:  $(0, -2y)$

$$-2y - y = y' \cdot (0 - x)$$

$$-3y = -y'x$$

← Separar

$$\frac{3}{x} = \frac{y'}{y}$$

$$\int \frac{3}{x} dx = \int \frac{y'}{y} dy$$

$$\exists \ln|x| + C = \ln|y| \quad (x \geq 0)$$

$$e^{3 \ln x + C} = |y|$$

$$\underbrace{e^{3 \ln x}}_{x^3} \cdot \underbrace{e^C}_k = |y|$$

$$x^3 \cdot k = |y| \quad k > 0$$

Solución

$$(k \in \mathbb{R}) \quad k \cdot x^3 = y$$

3) Resolver

$$\textcircled{\star} \quad x \cdot y'' - (x+1) y' + y = 3x^2 \quad \text{con } x > 0$$

Sabiendo que

$$y = e^x$$

es solución de la ec. homogénea asociada

- Con coef. no constantes, nos tienen que dar  
una solución.

ec. homogénea asociada

$$x \cdot y'' - (x+1) y' + y = 0$$

Chequeo sol. dada  $y = e^x$

$$y = y' = y'' = e^x$$

$$x \cdot e^x - (x+1) \cdot e^x + e^x = e^x (x - x - 1 + 1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\mathcal{B}_{\text{sol}} = \{ e^x, \phi(x) \}$$

↖ la que falta

$$y'' - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{b(x)} y = 0 \quad \textcircled{\star}$$

$$W(x) = e^{-A(x)}$$

$$A'(x) = a(x)$$

$$A(x) = \int -\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -x - \ln x$$

$$W(x) = e^{x + \ln x} = e^x \cdot x$$

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & \phi(x) \\ e^x & \phi'(x) \end{pmatrix}$$

$$= e^x \cdot \phi'(x) - e^x \cdot \phi(x)$$

Ecuação para obter  $\phi$

$$e^x \cdot \phi'(x) - e^x \cdot \phi(x) = e^x \cdot x \quad (\star)$$

$$\phi'(x) - \underbrace{\phi(x)}_{-1 = p(x)} = \underbrace{x}_{q(x)}$$

i) Busco um factor integrante  $\mu(x)$  /  
 el lado izquierdo queda  $(\mu(x) \cdot \phi(x))'$

ii) RESOLVER EC. HOMOG. ASSC., HALAR SOLUC.  $\psi(x)$

Y PROPONER FORMATO PARA  $\phi$  :  $\phi(x) = k(x) \cdot \psi(x)$

iii) PROPONER  $\phi(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  y usar como  
 VOZ A ENCONTRAR  $a$  y  $b$  QUE CUMPLAN

i) Busquemos factor integrante

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

$$\mu(x) = e^{R(x)}$$

$$R'(x) = p(x)$$

$$R(x) = -x$$

$$e^{-x} \cdot \phi'(x) - e^{-x} \cdot \phi(x) = e^{-x} \cdot x$$

$$(e^{-x} \cdot \phi(x))' = e^{-x} \cdot x$$

$$e^{-x} \cdot \phi(x) = e^{-x} (-x-1)$$

$$\phi(x) = -x-1$$

$$B_{\text{inh}} = \{e^x, -x-1\}$$

Busquemos sol. particular de  $\textcircled{\star}$

i) VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS

ii) COEFICIENTES INDETERMINADOS ("A O Z")

$$x y'' - (x+1) y' + y = 3x^2 \textcircled{\nabla}$$

Propongo:

- $y = ax^2 + bx + c$
- $y' = 2ax + b$
- $y'' = 2a$

$$x \cdot 2a - (x+1) \cdot (2ax+b) + ax^2 + bx + c \stackrel{\text{Quiero}}{\downarrow} = 3x^2$$

$$-2ax^2 - b + ax^2 + c = 3x^2$$

$$-a \cdot x^2 + (c - b) = 3x^2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{elijo } b = c = 0$$

$$y_p = -3x^2$$

Solución del ejercicio

$$y = -3x^2 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot (-x - 1) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

4) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  tales que todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + a \cdot x_2(t) \\ x_2'(t) = a x_1(t) - 4 \cdot x_2(t) \end{cases}$$

Permanezcan acotadas cuando  $t \rightarrow +\infty$  no se van a infinito

Para  $a = 2$  esbozar un diagrama de fase.

Armo matriz asociada al sist.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a \\ a & -4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$(\lambda + 4)^2 - a^2 = 0$$

$$|\lambda + 4| = |a|$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \searrow \\ \lambda_1 = -4 + |a| \quad \lambda_2 = -4 - |a| \end{array}$$

Autovectores

$$z_1 \text{ y } z_2 \quad \text{de } \lambda_1 \text{ y } \lambda_2$$

$$x(t) = c_1 \cdot z_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot z_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

no quiero que se vaya a  $\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$

$\text{Si } \lambda_i > 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$	✗
$\text{Si } \lambda_i < 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$	✓

$$\text{Si } \lambda_i = 0 \Rightarrow e^{0 \cdot t} \equiv 1 \quad \checkmark$$

Para asegurar lo que pide la consigna debo pedir

$$\lambda_i \leq 0 \quad \text{para } i \in \{1, 2\}$$

Tenía autovalores

$$-4 + |a| \leq 0$$

$$|a| \leq 4$$

$$-4 - |a| \leq 0$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |a| \leq 4$$

⊙!⊙! todo esto lo hicimos suponiendo que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Caso aparte:

$$\text{Si } -4 - |a| = -4 + |a|$$

$$|a| = 0$$

$$a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

La solución es

↑ caso diagonalizable "o"

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-4t}$$

Anda todo igual!

Solución:

$$a \in [-4, 4]$$

Di. De Fese

$$a = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$



$$\lambda_1 = -6$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underbrace{C_1 \cdot e^{-6t}}_{y_1(t)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{C_2 \cdot e^{-2t}}_{y_2(t)}$$

