Cuando es regular ?

$$\text{Si} \begin{cases} \sigma \in C^1 \\ \sigma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \end{cases} \Rightarrow \sigma \text{ es regular}$$

Recta tangente en to

$$L: \lambda . \sigma'(t_0) + \sigma(t_0) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

La Parametrizo

$$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\ell(t) = (t - t_0) . \sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$$

Longitud de curva

$$S(t) = \int_a^t \| \sigma'(r) \| \, dr \quad , \quad t \in [a, b]$$

función escalar

Integración sobre $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$

$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ regular

$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

función escalar

- Integración de **Campos Vectoriales** sobre $\mathcal{C}$

función vectorial

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

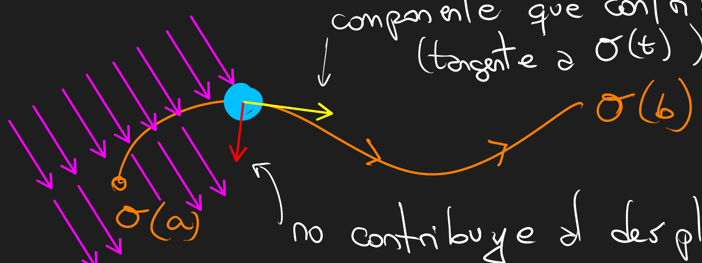
los ceros en alguna coordenada, o simplifican el prod.

notar que

$$= \int_a^b \underbrace{\left\langle F(\sigma(t)), \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right\rangle}_{\text{Componente Tangencial del campo sobre } \mathcal{C}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

(unitario)

Nos interesa lo que aporta el campo en la dirección y sentido de recorrido de la curva.



Obs: Si $F \perp \mathcal{C} \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = 0$

Campos Gradientes

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F = \nabla f$

función potencial

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = f(b) - f(a)$$

(no depende de camino recorrido)

Agregamos 1 dimensión:

Superficies

equivalente a la de longitud (con $\|\sigma'(t)\|$)

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, dS$$

S grande sin flecha

superficie

func. escalar.

Integrales sobre estas superficies

$$\int_S f \cdot dS = \iint_D f(T(u,v)) \cdot \underbrace{\|\eta(u,v)\|}_{} \, du\,dv$$

Ahora es Normal! no "tangente" como en curvas con $\|\sigma'(t)\|$

con $\eta(u,v) = \left(T_u \times T_v\right)(u,v)$

Orientabilidad

Una Sup. es orientable si

$\exists$ un campo normal unitario continuo

$$\eta : S \to \mathbb{R}^3 \text{ continuo.}$$

Integrales de Flujo

(funciones vectoriales)

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

↑ param regular de S

F campo continuo

campo vectorial en cada punto de S

que atraviesa la malla.

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \pm \iint_D \langle F(T(u,v)), \eta(u,v) \rangle \, du\,dv$$

donde $\begin{cases} + & \text{si } T \text{ orienta ok a } S \\ - & \text{si en sentido opuesto} \end{cases}$

Teorema de Green

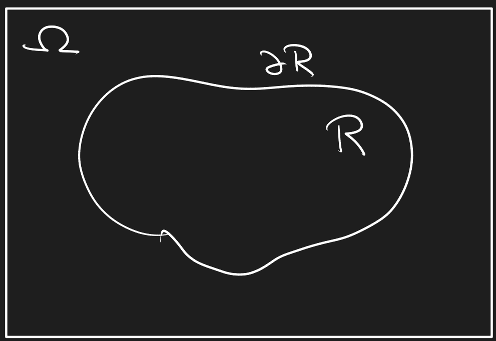
Hipótesis:

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(\Omega)$

$R \subset \Omega$ región de tipo III

de borde ∂R suave, diferenciable a trozos.

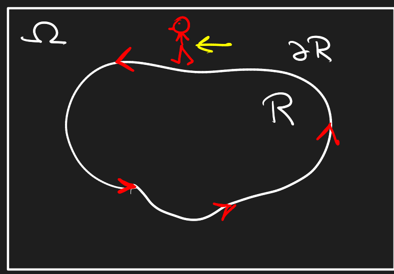


Teorema:

- Si $\mathcal{C} = \partial R^+$ curva cerrada, simple

y

$$F(x,y) = \left(P(x,y),\ Q(x,y)\right)$$



entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy$$

relaciona una integral de campo sobre una curva

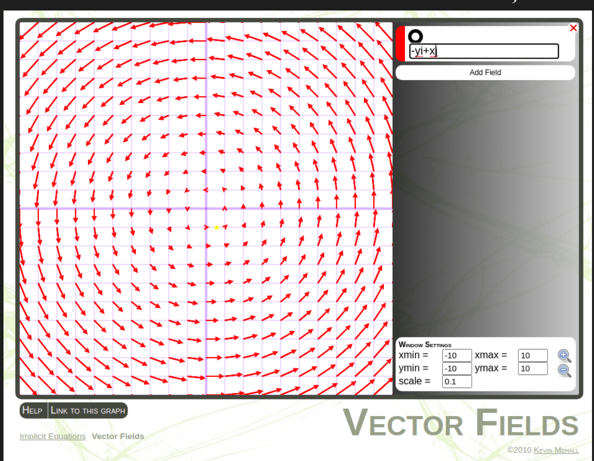
con el rotor en toda la región R

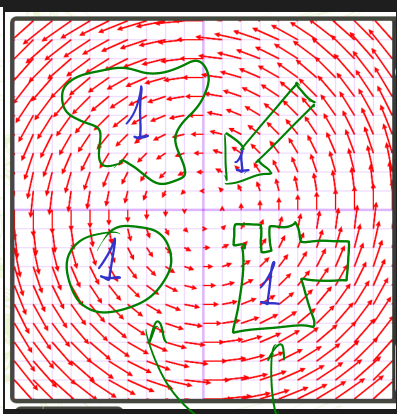
Atent: con la orientación!

Puedo usar campo $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ $\left(\text{o también } \frac{1}{2}(y,-x) \right.$ ¿con signo opuesto $\left.\right)$

Por Green

$$\text{Área}(R) = \iint_R \underbrace{Q_x - P_y}_{=1} \, dx\, dy = \int_{\partial R} F \cdot ds = \int_{\partial R} P dx + Q dy$$





$$\int_{\partial R} -\frac{1}{2} y\, dx + \frac{1}{2} x\, dy$$

$$Q_x - P_y = 1 \quad \forall\, \partial R$$

Uso de Green:

Me dan F fea y piden

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \,?$$

Composición $F(\sigma(t))$ muy fea!

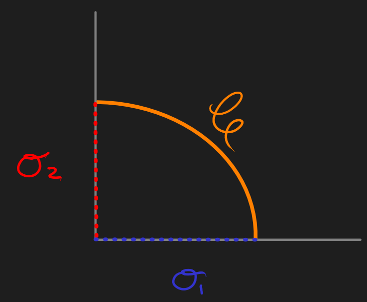
- Veo si el campo F puede quedar simple al calcular su rotor $(Q_x - P_y)$

- Green pedía que $\mathcal{C}$ sea el borde de R cerrada

↳ Cerramos Curvas

Cómo? • Veo cómo mejor queda el campo al integrar los pedacitos de curva que usé para cerrarla

Ej:

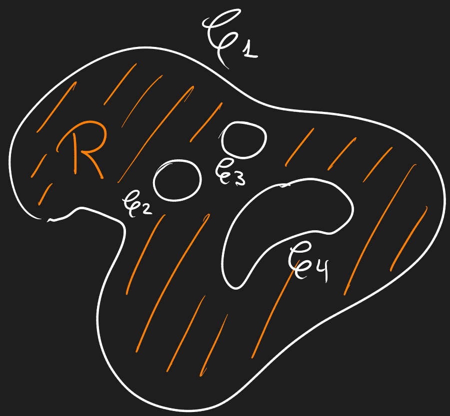


$$\underbrace{\iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy}_{\text{Fácil de calcular}} = \overbrace{\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}}^{\text{incógnita}} + \int_{\sigma_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\sigma_2} F \cdot d\vec{s}$$

Posiblemente un área en polares!

Agujeros :

Si R tiene agujero/s



$$\Rightarrow \partial R = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$$

Con orientaciones:

$\circlearrowleft \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright$

$$\int_{\partial R} F \cdot d\vec{s} =$$

Por Green

$$= \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_4} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$\circlearrowleft \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright$

Rotor de un Campo Gradiente es cero.

Por Green: $F = (P, Q) \xRightarrow{F = \nabla f} F = (f_x, f_y)$

$$\begin{cases} Q = f_y \\ P = f_x \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_x = f_{yx} \\ P_y = f_{xy} \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$= \iint_R f_{yx} - f_{xy} \, dx\,dy$$

Como f es C^2 : $f_{yx} = f_{xy}$

$= 0$ //

Campos :

Recordar que :

↳ Puedo separarlo en la suma de

2 campos :

$$F = (P + A, Q + B)$$
$$= (P, Q) + (A, B)$$
$$= \underbrace{F_1 + F_2}$$

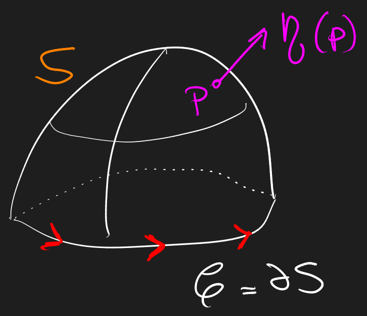
y ahora separar la integral

$\int_{\mathcal{C}} F ds$ en $\int_{\mathcal{C}} F_1 ds + \int_{\mathcal{C}} F_2 ds$

Stokes :

Como Green pero +1 dimensión :

- $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientada



- $\mathcal{C} = \partial S$ cerrada, simple, orientada por S

- F campo Vectorial C^1

$$\Rightarrow \iint_S \underbrace{\nabla \times F}_{\text{rotor}} \, d\overset{\overset{\text{sobre superficie}}{\text{S grande, vectorial}}}{\vec{S}} = \int_{\partial S^+} F \cdot d\underbrace{\vec{s}}_{\substack{\text{s chico, vectorial} \\ \text{sobre curva}}}$$

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Usos

- Calcular $\iint_S \nabla \times F \, d\vec{S}$ en vez de $\int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$

o vice versa.

- Dada una curva $\mathcal{C}$,

  y un campo F

  encontrar alguna superficie S

  con borde $\partial S = \mathcal{C} \cup$ Alguna otra curva

- Dada S, quiero

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} =$$

Por Stokes

$$= \int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$$

Por Stokes de nuevo, elijo OTRA Sup $\tilde{S}$

$$= \underbrace{\iint_{\tilde{S}} \nabla \times F \cdot d\vec{S}}_{\text{buscando que con esta superficie } \tilde{S}, \text{ las cuentas salgan más facilmente}}$$

$$\iint \langle (\mathrm{rot}_P, \mathrm{rot}_Q, \mathrm{rot}_R), \overrightarrow{\mathrm{Normal}} \rangle \, dx\,dy\,dz$$