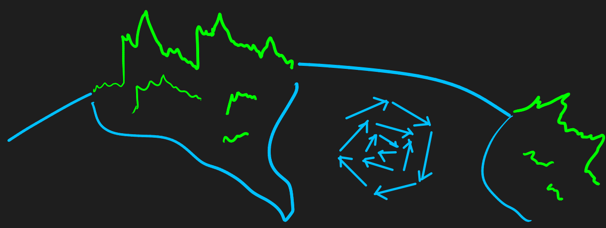
Teórica #4 - Vicky

Mercury 03/02/21

Superficies



Queremos

- Definir Superficies (esta clase)
- Integrar sobre superficies
    - ↳ Cálculo de Área
    - ↳ Integrar funciones escalares
    - ↳ Integrar funciones vectoriales

Definición

Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos que puede describirse como la:

Imágen de una Función Contínua

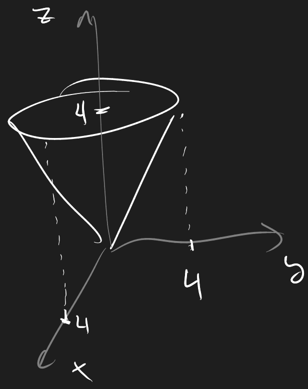
$T : D \to \mathbb{R}^3$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental (tipo 1, tipo 2, ...)

A la función T la llamamos:

Parametrización de S

Ej 1) Cono

$$S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2} \; , \; z \leq 4\}$$



- $T : \overbrace{[0,4] \times [0,2\pi]}^{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

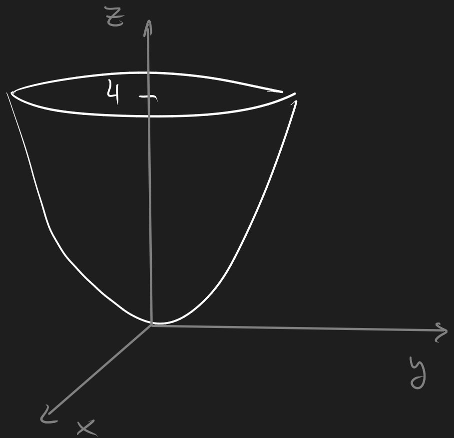
$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta , r \cdot \sin\theta , r)$

(Parametrización continua (componentes continuas) de S

$\Rightarrow$ S es una superficie.

Ej 2) Paraboloide

$$S = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2 \; , \; z \leq 4\}$$



$T : [0,2] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta , r \cdot \sin\theta , r^2)$

Parametrización continua de S

$\Rightarrow$ S es una Superficie.

Ej 3) $S = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \,,\, z = f(x,y)\}$

con $f : D \to \mathbb{R}$ continua,

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ región elemental

$S = \text{graf}(f)$

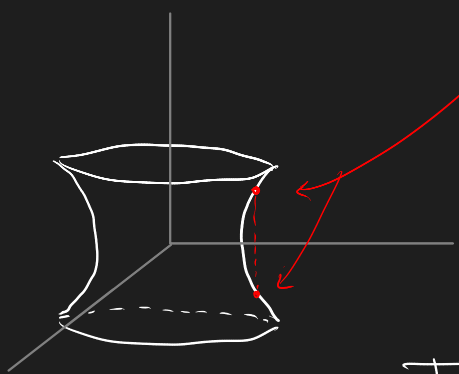
$\Rightarrow T(x,y) = (x, y, f(x,y))$ es una param. de S

$T : D \to S$

Como T es param, de $S \Rightarrow S$ es superficie
(continua)

Ej 4) Paraboloide de 1 hoja

$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1 \,,\, |z| \leq 1\}$

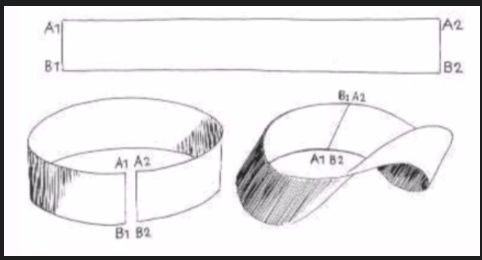


No es gráfico de una función!

$T : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(u,v) = \left(\cos u \cdot \sqrt{v^2+1} \,,\, \sin u \cdot \sqrt{v^2+1} \,,\, v\right)$

5) Cinta de Moebius



$$T : [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = \Big(\cos v \cdot \left(1 + \cos\left(\tfrac{v}{2}\right) \cdot u\right),$$
$$\sin v \cdot \left(1 + \cos\left(\tfrac{v}{2}\right) \cdot u\right),$$
$$\sin\left(\tfrac{v}{2}\right) \cdot u \Big)$$

Definición

Sea S una sup. en $\mathbb{R}^3$,

$p_0 \in S$

y Π_0 un plano que pasa por p_0

Sea η_0 un vector de norma 1 perpendicular a Π_0 (normal)

Decimos que

Π_0 es el Plano tangente a S en p_0

si la recta que pasa por p_0 y $p \in S$

tiende a ser perpendicular a η_0

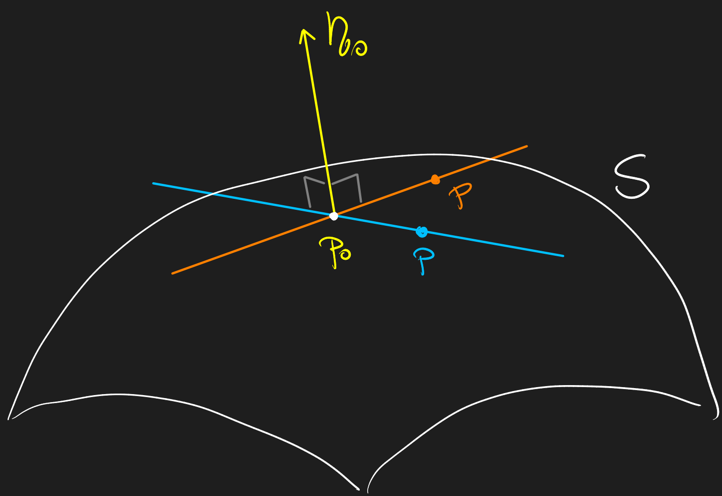
cuando $p \to p_0$.

Esto es, si

$$\left\langle \underbrace{\frac{p_0 - p}{\|p_0 - p\|}}, \eta_0 \right\rangle \xrightarrow[p \to p_0,\ p \in S]{} 0$$

dirección de la recta que une p con p_0 (norma 1)

(producto interno mide $\cos\theta \cdot$ normas)



¿Qué nos garantiza que hay plano tangente?

Teorema:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Si existe una parametrización $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de S inyectiva, diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$ / $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ no son paralelos y son no nulos, entonces el plano Π_0 que pasa por $p_0 = T(u_0, v_0)$ determinado por estos dos vectores es tangente a S en p_0.

Recordar:

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \big)$$

$$\Rightarrow T_u = \left(\frac{\partial}{\partial u} x, \frac{\partial}{\partial u} y, \frac{\partial}{\partial u} z \right)$$

$$T_v = \left(\frac{\partial}{\partial v} x, \frac{\partial}{\partial v} y, \frac{\partial}{\partial v} z \right)$$

- T_u y T_v NO son paralelos
- $T_u \neq \vec{0} \wedge T_v \neq \vec{0}$

} $\exists \pi$ y puedo hallarlo.

En las condiciones del Teorema, se puede tomar

$$\boxed{\eta_0 = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\| T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \|}}$$

Demo. P.38.

Def:

Una Superficie S es Suave si

- tiene plano tangente en todos sus puntos

y

- la recta $L(p)$ perpendicular al plano tangente en $p \in S$ varía con continuidad.

Def:

S: $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización inyectiva, clase C^1,

y tal que

$T_u \times T_v \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in D$, decimos que T es una

Parametrización Regular

Proposición

Si S tiene una parametrización regular

$\Longrightarrow$ S es Suave

Demo: P. 39.

Ej: El cono no es suave (pues pincha! )

Para probarlo, vemos que no admite plano tangente en $(0,0,0)$

Por Absurdo)

Supongamos que sí lo tiene.

Llamamos $\eta_0 = (a, b, c)$ a una normal

Tomo puntos del cono de la forma

$$p_n = \left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right) \in S \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|p_n\| = \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{|n|} \overset{n \in \mathbb{N}}{=} \frac{\sqrt{2}}{n}$$

$$\frac{p_n}{\|p_n\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{p_n}{\|p_n\|}, \eta_0 \right\rangle = \frac{a+c}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow a = -c$$

Tomando

$$q_n = \left(-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right)$$

y haciendo lo mismo, obtengo

$$\Rightarrow a = c$$

Que junto con con el resultado anterior

$$\Rightarrow a = c = 0$$

Finalmente,

con $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ se puede ver que

$$\Rightarrow b = 0$$

O sea que

$$a = b = c = 0$$

Que implica que

$\eta_0 = (0,0,0)$ Abs! pues tiene norma 0.

$\therefore$ No hay plano tangente en $\vec{0}$

$\therefore$ el cono NO es suave.

Jupiter 04/02/21

Proposición

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ elemental

y $f : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1

si $S = \text{graf}(f)$

$\Rightarrow$ S es suave y la ecuación del plano tangente

a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

es

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Dem :

Sea $T : D \to \mathbb{R}^3$,

$$T(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

$\Rightarrow T$ es inyectiva,

y como $f \in C^1$, $T \in C^1$

Además

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

y

$$T_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow T_x \times T_y = (-f_x, -f_y, \underbrace{1}_{\neq 0 \ \forall x,y}) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y) \in D$$

Luego, T es una param. regular de S

y $\therefore$

S es suave.

y también tenemos que:

el plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

es (por prop. anterior):

$$\left\langle T_x(x_0,y_0) \times T_y(x_0,y_0), \ (x-x_0, \ y-y_0, \ z-f(x_0,y_0)) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + 1\,(z-f(x_0,y_0)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\boxtimes$

Proposición :

Sea S una superficie dada en forma implícita

$$S = \{ (x,y,z) : F(x,y,z) = 0 \}$$

con $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1

tal que

$$\nabla F(x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces S es suave y

la ecuación del plano tang. a S en (x_0, y_0, z_0)

es

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Demo

Dem: Como $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ alguna coord es $\neq 0$. Sup. que $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Por el Teorema de la función implícita existe un entorno $\mathcal{U}$ de (x_0,y_0,z_0) y una función $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0,y_0) / los puntos de $S \cap \mathcal{U}$ son de la forma $(x,y,f(x,y))$ para un único $(x,y) \in D$ y $z = f(x_0,y_0)$. ← "despejé" $z = f(x,y)$

Entonces, $S \cap \mathcal{U}$ es suave y la ec. del plano tang a (x_0,y_0,z_0) es

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) = z.$$

Pero por el teorema de la función implícita,

- $f_x(x_0,y_0) = \dfrac{-F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$ ← despejada y
- $f_y(x_0,y_0) = \dfrac{-F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

$\Rightarrow$ V ☒

Reemplazo f_x y f_y ↗ en la ecuación del plano de arriba y obtengo la ecuación que buscaba.

Ejemplos

1) $S = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = z,\ z \leq 4\}$

se parametriza por

$$T(r,\theta) = (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ r) \quad \text{y es } C^1$$

T NO es regular pues NO es inyectiva :

$$T(r,0) = T(r,2\pi) \quad \forall r \in [0,4]$$

$$(0,0,0) = T(0,\theta) \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$$

Además

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \qquad \neq (0,0,0) \ \forall \theta$$

$$T_\theta = (-r\cdot\sin\theta, r\cdot\cos\theta, 0) \quad \neq (0,0,0) \text{ con } r \neq 0$$

$$\Rightarrow T_r \times T_\theta = (-r\cdot\cos\theta, -r\cdot\sin\theta, r)$$

y ∴ la normal que inducen

$$\frac{T_r \times T_\theta}{\|T_r \times T_\theta\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$$

Si llamamos $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$

con $p = T(r,\theta)$

y hacemos $p \longrightarrow (0,0,0)$

vemos que $\eta(p)$ no tiene límite:

Pues si $p \to (0,0,0)$

es porque $r \to 0$
con algún θ fijo.

Pero $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 1)$

No depende de r, solo de θ,

entonces si elijo dos $\theta_1 \neq \theta_2$ obtengo distintos valores

para $\eta(p)$ cuando $p \to \vec{0}$

$\therefore$ $\eta(p)$ no tiene límite.

Luego, S no es suave. //

Obs:

Anteriormente lo vimos de otra forma,

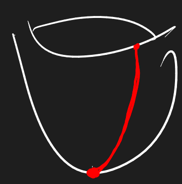
en términos de parametrización:

"Los vectores normales que inducía la param no se

movían con continuidad"

2) Paraboloide

$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, r^2)$

Esta param. no es inyectiva! 

$\therefore$ T no es regular.

S sin embargo S es suave.

Miramos los versores normales

$$\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{1+4r^2}} \cdot \left(-2r\cdot\cos\theta, -2r\cdot\sin\theta, 1\right)$$

$$p = T(r,\theta) \neq (0,0,0)$$

vemos que si $p \longrightarrow (0,0,0)$

debe darse que $r \longrightarrow 0$

y si esto sucede,

$\eta(p) \longrightarrow (0,0,1)$ siempre

$\Rightarrow$ $\eta(p)$ varía con continuidad

$\therefore$ S es suave. //

Otra forma de ver esto

Busco otra param. regular: Gráfico de una función C^1

$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{con} \quad (x,y) \in D = \overline{B}_2(0,0)$$

$\Rightarrow$ f es C^1

y $\therefore$ $T(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big)$

es una param. regular

$\Rightarrow$ S es suave. //