

Ecuación de orden n

$$\textcircled{1} \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + a_1(t) x' = 0$$

Plan:

↳ Traducir a un sistema de $n \times n$
y usar la teoría que tenemos allí.

Considerar el sistema

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \dots - a_{n-2} x_{n-2} \end{cases}$$

Si x es solución de $\textcircled{1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ es sol de $\textcircled{2}$

Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ es sol de $\textcircled{2} \Rightarrow x_0$ es sol de $\textcircled{1}$

$$x_1 = x_0'$$

$$x_1' = x_0'' = x_2$$

$$x_2' = x_0^{(n)} = x_3$$

⋮

$$x_0^{(n)} = -a_0 x_0 - a_1 x_1' - \dots - a_{n-1} x_{n-2}$$

Si tenemos

$$\{x_1, \dots, x_n\} \text{ soluciones de } \textcircled{1}$$

ver si son li es mirar:

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & & x_n \\ x_1' & & x_n' \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

El caso de orden 2

$$x'' + a x' + b x = 0$$

$$\text{llamo } \begin{cases} x_0' = x \\ x_1' = -b x_0 - a x_1 \end{cases}$$

Sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X(t)$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + a) + b \end{aligned}$$

Hay que buscar raíces de

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

↑ notar que el grado se corrige ^{de los} pesos con exp.

Casos

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$X_1(t) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2(t) = v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$\text{Base de sol de } \textcircled{1} = \left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ($\lambda, \bar{\lambda}$ raíces conjugadas)

Sol :

$$x(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t}$$

$$= e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$\text{Base} = \left\{ e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t, e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t \right\}$$

El caso de autovector doble

$$X_1(t) = v \cdot e^{\lambda t}, \quad v \text{ autovector}$$

$$X_2(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} v + C_2 e^{\lambda t} (w + t v)$$

Resolviendo
 $(A - \lambda I)w = v$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} v_1 + C_2 e^{\lambda t} (w_1 + t v_1) \quad \text{es solución de ①}$$

Explica el caso :

$$x'' - 2x' + x = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Soluciones

$$x_1(t) = e^t$$

$$x_2(t) = t \cdot e^t$$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= e^t + t e^t = (t+1)e^t \\ x_2'(t) &= e^t + (t+1)e^t = (t+2)e^t \\ x_2'' - 2x_2' + x_2 &= e^t (t+2 - 2t - 2 + t) = 0 \end{aligned}$$

Método de variación de constantes :

$$x'' + a x' + b x = f(x)$$

Buscar $C_1(t)$, $C_2(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

con $\{x_1, x_2\}$ Solución del homogéneo.

Idea para resolver

• Problema

$$x'' + ax' + bx = f(x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

• Proposición

$x(t)$ en base a la "pinta" de f

ej: Ver intuitivamente

↙ operador diferencial

$$D(x) = x'' + 3x' + x = t^2$$

Propongo una familia de soluciones

$$X(t) = a + bt + ct^2$$

↖ grado de x

derivado

$$X'(t) = b + 2tc$$

$$X''(t) = 2c$$

$$2c + 3b + 6tc + a + bt + ct^2 = t^2$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ 6 + b = 0 \\ 2 + 3b + a = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$x'' - 3x' + 2x = f(t)$$

Base $\{e^t, e^{2t}\}$ del homogéneo

$$x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$$

Propongo

$$x(t) = A e^{3t}$$

→ Pero en el caso

$$x'' - 3x' + 2x = e^{2t}$$

↑ es la misma sol!

!

Propondré

$$x(t) = (at + b) \cdot e^{2t}$$

→ y en el caso

$$x'' - 2x' + x = e^t \quad \text{ó} \quad t \cdot e^t$$

con base

$$\{e^t, t \cdot e^t\}$$

↑ no puedo usar la de antes

Propongo

$$x(t) = (c \cdot t^2 + at + b) \cdot e^{2t}$$

→ Caso

$$X'' + X = \sin(2t)$$

$$\lambda^2 + 1 \rightarrow \{ \cos t, \sin t \}$$

hom

Prop

$$X(t) = \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)$$

2° Parcial

• 1 de 1° orden

Bernoulli, $z = \frac{y}{x}$

• Problema geométrico

• exacto

• Orden 2

• sistemas

• diagrama de fase

