Mars 02/02/21

Ezequiel

Repaso

Continuidad opuesto a Tazad Arroz

Curvas y Parametrizaciones

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ conjunto tal que

existe

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$$ continua sobreyectiva

Ejemplos :

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma : [\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$$

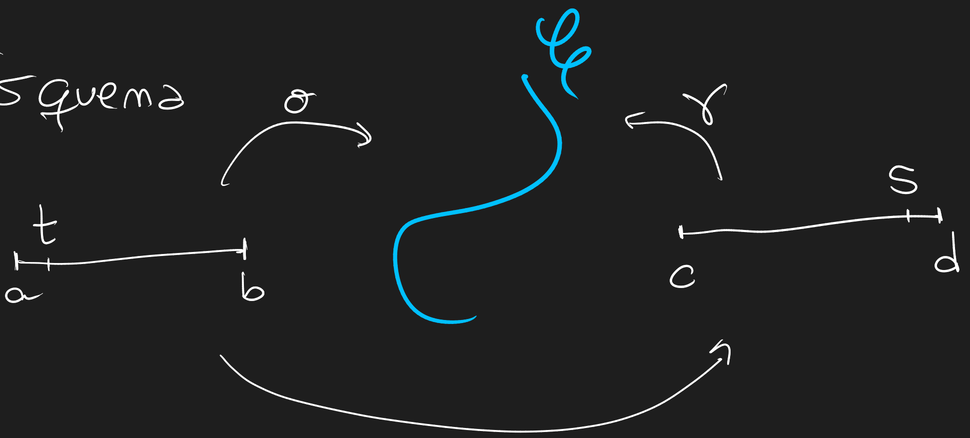
$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$$

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Reparametrizaciones

Esquema



h biyección continua

h^{-1} cont.

$(h \in C^1$ y $h^{-1} \in C^1)$

$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$

$\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$

Dos Problemas

1) Dada σ y h, conseguir γ

2) Dada σ y h, encontrar h

1) Si σ parametriza $\mathcal{C}$

y h es una biyección continua,

puedo definir

$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$ que parametriza $\mathcal{C}$.

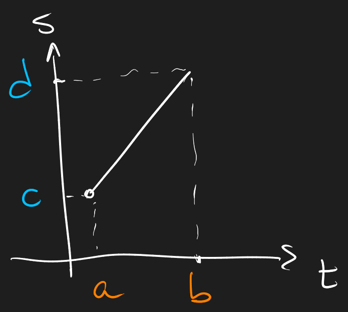
Cambio de Intervalo.

Tengo $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$

Quiero $\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$

Necesito

$$h : [a,b] \to [c,d] \quad \text{biyectiva, continua}$$



$$h(t) = (d-c)\left(\frac{t-a}{b-a}\right) + c$$

$$\gamma(s) = \sigma\left(h^{-1}(s)\right)$$

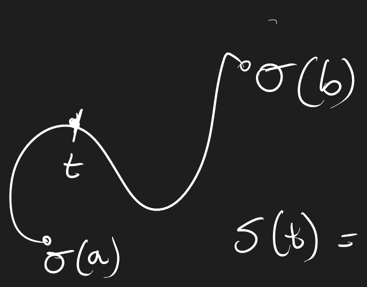
Parametrización por Longitud de Arco

$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ regular $\left(\begin{array}{l} \sigma \in C^1 \\ \sigma'(t) \neq \bar{0} \quad \forall t \in [a,b] \end{array} \right)$

Busco

$$\gamma : [0, \text{long}(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$$

$$s(t) = \int_a^t \| \sigma'(r) \| \, dr$$



$s(t) =$ long. a tiempo t

Podemos definir

$$\gamma : [0, Long(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$$

$$\gamma(s) = \sigma(s^{-1}(t))$$

Teo :

Si σ, γ son param regulares de $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \exists h : [a,b] \to [c,d]$$

$$h \in C^1, \ h^{-1} \in C^1,$$

$$h'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$$

Aplicación

$\mathcal{C}$ curva, $\left.\begin{array}{l} \sigma : [a,b] \to \mathcal{C}, \\ \gamma : [c,d] \to \mathcal{C}, \end{array}\right\}$ dos params. regulares

$$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

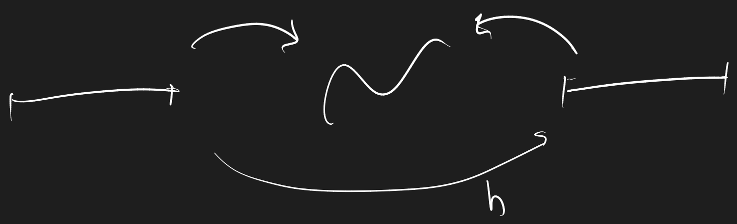
Obs:

$\exists\, h:[a,b]\to[c,d]$

$h\in C^1 \,/\, h^{-1}{}'(t)\neq 0 \quad \forall t\in[a,b]$

$$\left((h^{-1})'(s)\neq \quad \forall s\in[c,d]\right)$$

$$\gamma(s) = \sigma\left(h^{-1}(s)\right)$$



$$\int_c^d f(\gamma(s))\cdot\|\gamma'(s)\|\,ds =$$

$$= \int_c^d f\left(\sigma\left(h^{-1}(s)\right)\right)\cdot\left\|\sigma'\left(h^{-1}(s)\right)\underbrace{\left(h^{-1}\right)'(s)}_{\in\mathbb{R}}\right\|\,ds$$

$$= \text{---} \qquad \cdot\underbrace{\left|\left(h^{-1}\right)'(s)\right|\,ds}$$

$t = h^{-1}(s)$

$dt = (h^{-1})'(s)\,ds$

$$= \int_c^d f(\sigma(t))\cdot\|\sigma'(t)\|\ \cdot \quad dt$$

en el otro caso también queda igual.

$\therefore$ la param no influye ✓