

ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

Verano 2021

Práctica 5: Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ejercicio 1. Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a) $x' - 2tx = t$, $x(1) = 0$, b) $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$, $x(1) = 0$,

c) $x' = \frac{1+x}{1+t}$, $x(0) = 1$, d) $x' = \frac{1+x}{1-t^2}$, $x(0) = 1$,

e) $x' - x^{1/3} = 0$, $x(0) = 0$, f) $x' = \frac{1+x}{1+t}$, $x(0) = -1$.

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decidir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

a) $x' - 2tx = t$; $x(1) = 0$

$$x' = t + 2tx$$

$$x' = t(1 + 2x)$$

$$\frac{x'}{1 + 2x} = t$$

$$\int \frac{x'}{1 + 2x} dx = \int t dt$$

CA:

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(1 + 2x) \Rightarrow \text{derivo } \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{2} x'}{1 + 2x} = \frac{x'}{1 + 2x}$$

$$\int \frac{x'}{1+2x} dx = \int t dt$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+2x) = \frac{t^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+2x) = t^2 + 2C$$

$$e^{\boxed{2C}} = e^{\boxed{2C}}$$

$$|1+2x| = e^{t^2} \cdot \underbrace{e^{2C}}_{0 < e^{2C} < +\infty}$$

$$|1+2x| = e^{t^2} \cdot K \quad \text{con } K \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

$$1+2x = \begin{cases} e^{t^2} \cdot K \\ -e^{t^2} \cdot K \end{cases}$$

$$2x = \begin{cases} e^{t^2} \cdot K - 1 \\ -e^{t^2} \cdot K - 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} (e^{t^2} \cdot K - 1) \cdot \frac{1}{2} & \textcircled{\text{I}} \\ (-e^{t^2} \cdot K - 1) \cdot \frac{1}{2} & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (e^{t^2} \cdot K - 1) \cdot \frac{1}{2} & \textcircled{\text{I}} \\ (-e^{t^2} \cdot K - 1) \cdot \frac{1}{2} & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

Usando dato

$$x(1) = 0$$

evalúo en (I)

$$\left(e^{t^2} \cdot k - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \Big|_{t=1} = 0$$

$$\frac{e \cdot k}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$e^k = 1$$

$$k = 0 //$$

evalúo en (II)

$$\left(-e^{t^2} \cdot k - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \Big|_{t=1} = 0$$

$$-e \cdot k - 1 = 0$$

$$e \cdot k = -1$$

$$k = -e^{-1} //$$

Preguntar si
vale un $k < 0$
cuando enter no los
incluye.

Pronto eq:

$$\textcircled{\text{I}} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \times \quad \text{con } t=1, x \neq 0$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad x = -\frac{e^{t^2} \cdot k}{2} - \frac{1}{2} \quad k = -e^{-1}$$

$$x = \frac{e^{t^2-1}}{2} - \frac{1}{2} \quad \checkmark \quad \text{con } t=1 \Rightarrow x=0$$

Sol :

$$x = \frac{e^{t^2-1}}{2} - \frac{1}{2}$$

derivo :

$$x' = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2-1} \cdot (2t) + 0$$

$$x' = t \cdot e^{t^2-1}$$

Datos

$$a) \quad x' - 2tx = t \quad ; \quad x(1) = 0$$

$$t \cdot e^{t^2-1} - 2tx = t$$

$$e^{t^2-1} - 2x = 1$$

$$2x = e^{t^2-1} - 1$$

$t \neq 0$

Preguntas!

$$x = \frac{1}{2} e^{t^2-1} - \frac{1}{2} //$$

con $t \in ?$

otro) Qué es sol particular eod?
Porque despejé C

$$b) \quad x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{x'}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{l} \text{CA} \\ \frac{1}{2} \ln(|1+x^2|) \end{array} \xrightarrow{\text{deriv}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \cdot 2x'$$

$$\frac{1}{2} \ln(|1+x^2|) = \arctan(t) + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$\ln(|1+x^2|) = 2 \cdot \arctan(t) + 2 \cdot C$$

$$\text{deno } e^{\boxed{-2}} \rightarrow e^{\boxed{-2}}$$

$$|1+x^2| = e^{2 \arctan(t)} \cdot \underbrace{e^{2c}}_{>0}$$

como $(1+x^2) > 0$

$$1+x^2 = e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K \quad K \in (0, \infty)$$

$$x^2 = e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K - 1$$

$$|x| = \sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K - 1}$$

Usando dato

$$x(1) = 0$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K - 1} & \textcircled{\text{I}} \\ -\sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K - 1} & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

evaluó $t=1$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad \sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot K - 1} \Big|_{t=1} = \sqrt{e^{\pi/2} \cdot K - 1} = 0$$

$$e^{\pi/2} \cdot K - 1 = 0$$

$$e^{\pi/2} \cdot K = 1$$

$$K = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$K = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$\textcircled{\pi}$ es igual con $K = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Vuelvo

$$X = \sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}$$

$$e^{2 \cdot \arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \geq 1$$

$$e^{2 \cdot \arctan t - \frac{\pi}{2}} \geq 1$$

$$\stackrel{\log}{2 \cdot \arctan t - \frac{\pi}{2}} \geq 0$$

$$2 \arctan t \geq \frac{\pi}{2}$$

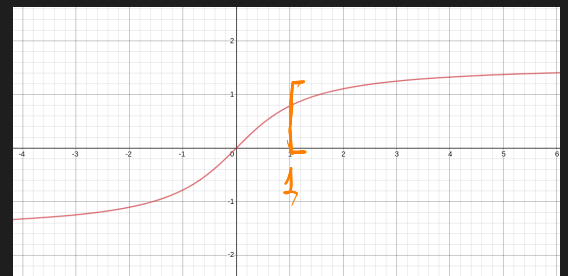
$$\arctan t \geq \frac{\pi}{4}$$

$$t \geq 1$$

Sol:

$$X = \sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}$$

$$\text{con } t \in [1, +\infty)$$



Preguntar: Vale también: \rightarrow

$$X = -\sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}$$

\rightarrow

Ejercicio 4. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

(a) $tx' = x + 2t \exp(-x/t)$ (b) $txx' = 2x^2 - t^2$ (c) $x' = \frac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

Ecuaciones Homogéneas

$f(t, x)$ es homogénea de grado n si:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n \cdot f(t, x) \quad \forall \lambda \neq 0, \forall (t, x)$$

a) $tx' = x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}$

$$x' = f(t, x) = \frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\cancel{\lambda} \left(x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}} \right)}{\cancel{\lambda} \cdot t}$$

$$= \lambda^0 \left(\frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t} \right) \quad \checkmark \text{ es de grado } 0$$

Si x' es homogénea de grado 0

$$\Rightarrow y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

$$x = y \cdot t$$

$$x' = y' \cdot t + y$$

$$x' = f(t, x) = \frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t}$$

$$\text{or } \lambda = \frac{1}{t}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{t}, \frac{x}{t}\right) &= f(1, y) = \frac{y + 2 \cdot e^{-y}}{1} \\ &= y + 2 \cdot e^{-y} \end{aligned}$$

$$x' = y' \cdot t + y = y + 2e^{-y}$$

$$y' t = y + 2e^{-y} - y$$

$$y' = \frac{\cancel{y} + 2e^{-y} - \cancel{y}}{t}$$

$$\frac{y'}{2e^{-y}} = \frac{1}{t}$$

Integro

$$\int \frac{y'}{2e^{-y}} dy = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\int \frac{y' \cdot e^y}{2} dy = \ln t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot e^y = \ln t + \tilde{C} \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$e^y = 2 \ln t + 2 \tilde{C}$$

$$y = \ln(2 \cdot \ln t + 2 \cdot \tilde{C})$$

$$y = \ln(2 \cdot \ln t + k)$$

con $k \in \mathbb{R}$
 $/ 2 \ln t + k > 0$
 $k > -2 \ln t$

$$y = \frac{x}{t}$$

Sol

$$x = t \cdot \ln(2 \cdot \ln t + k)$$

$$(b) \quad txx' = 2x^2 - t^2$$

$$x' = f(t, x) = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda^2 (x^2 - t^2)}{\lambda^2 t \cdot x} \quad \checkmark \quad \text{es homog. de grado 0}$$

Puedo usar $y = \frac{x}{t}$

$$\Rightarrow x = y \cdot t$$

$$x' = y' \cdot t + y$$

Como,

$$x' = f(t, x) = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

$$\Rightarrow y' \cdot t + y \stackrel{\lambda = \frac{1}{t}}{\downarrow} = f(1, y) = \frac{2y^2 - 1^2}{1 \cdot y} = \frac{2y^2 - 1}{y}$$

$$y' \cdot t + y = \frac{2y^2 - 1}{y}$$

$$y' \cdot t = \frac{2y^2 - 1}{y} - y$$

$$\begin{aligned} y' \cdot t &= \frac{2y^2 - 1 - y^2}{y} \\ &= \frac{y^2 - 1}{y} \end{aligned}$$

$$t = \frac{y^2 - 1}{y} \cdot \frac{1}{y'}$$

$$\frac{y' \cdot y}{y^2 - 1} = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{y' \cdot y}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{t} dt$$

CA

$$\frac{1}{2} \ln(|y^2 - 1|) \xRightarrow{\text{deriv}} \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 - 1} \cdot 2y \cdot y'$$

$$\frac{1}{2} \ln(|y^2 - 1|) = \ln t + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$|y^2 - 1| = e^{2 \ln t} \cdot e^C$$

$$|y^2 - 1| = t^2 \cdot k$$

$$k \geq 0, k \in \mathbb{R}$$

$$y^2 - 1 = \begin{cases} t^2 \cdot k & \textcircled{\text{I}} \\ -t^2 \cdot k & \textcircled{\text{II}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad y^2 = t^2 \cdot k + 1$$

$$|y| = \sqrt{t^2 k + 1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{maximal}$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad y^2 = -t^2 \cdot k + 1$$

$$|y| = \sqrt{-t^2 k + 1} \quad \forall t \mid \begin{matrix} t^2 k \leq 1 \\ t^2 \leq \frac{1}{k} \end{matrix}$$

Siga con $\textcircled{\text{I}}$

$$|y| = \sqrt{t^2 k + 1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{t^2 k + 1} \\ -\sqrt{t^2 k + 1} \end{cases}$$

?

Reap

$$y = \frac{x}{t}$$

Por int. maximal
elijo $\textcircled{\text{I}}$

$$\frac{x}{t} = \sqrt{t^2 k + 1}$$

$$x = \sqrt{t^2 \cdot k + 1} \cdot t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Podría haber usado

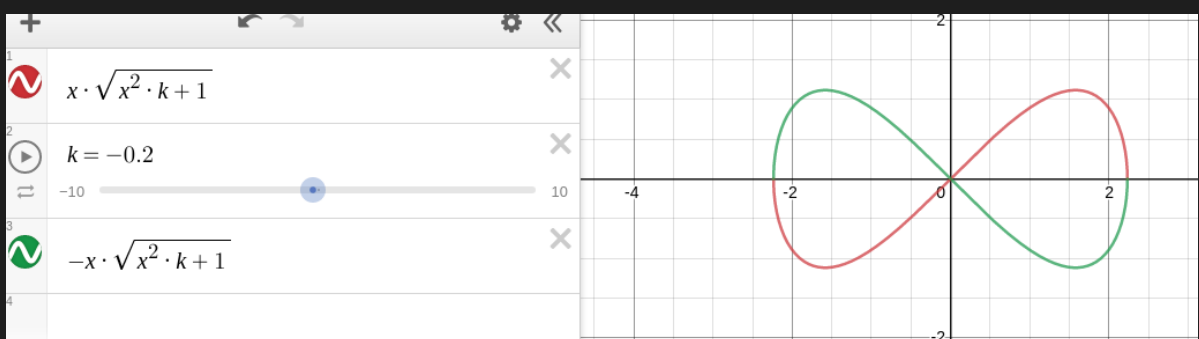
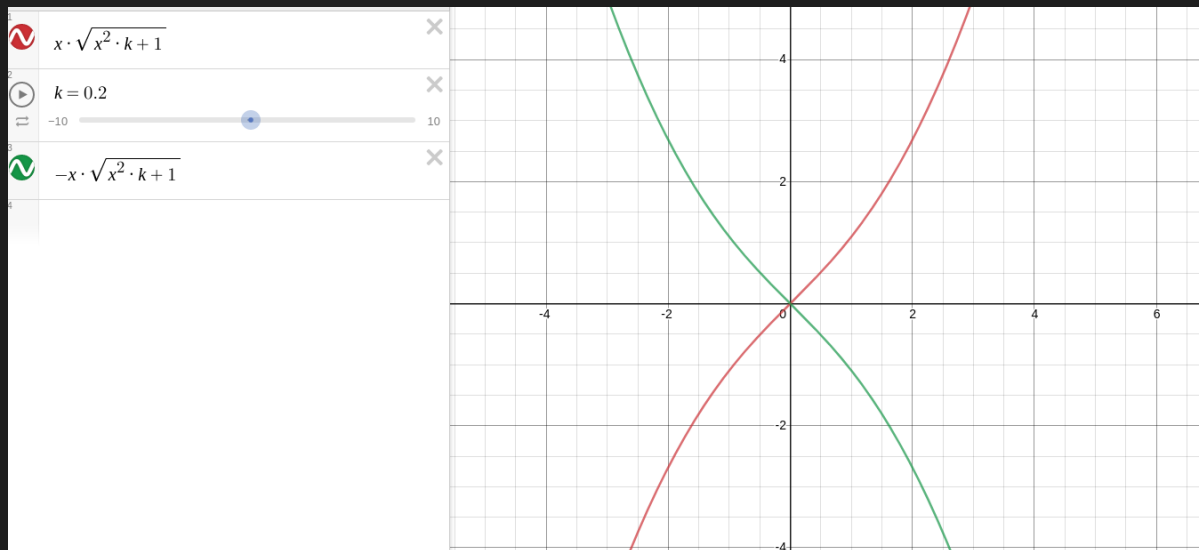
$$-\sqrt{t^2 \cdot k + 1}$$

Claro!
(Pregunté a Esteban)

Sol

una familia de soluciones $\rightarrow x = t \sqrt{t^2 \cdot k + 1}, t \in \mathbb{R}$

otra familia de soluciones $\rightarrow x = -t \sqrt{t^2 \cdot k + 1}, t \in \mathbb{R}$



Ejercicio 5. Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

(a) $x' = (x + t)^2$ (b) $x' = \sin^2(t - x + 1)$

1

a) $x' = x^2 + 2tx + t^2 = \tilde{f}(x, t)$?
 $y = at + bx + c$

derivo $\left(\frac{y}{dt}\right)$

$$y' = a + bx'$$

despejo x'

$$x' = \frac{y' - a}{b}$$

Junto todo

$$(x + t)^2$$

$$\rightarrow x' = x^2 + 2tx + t^2 = \frac{y' - a}{b}$$

$$y' = a + b \underbrace{(x + t)^2}$$

$$f(at + bx + c) = f(y)$$

veo que

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

o sea que $y = x + t$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot y^2$$

$$y' = 1 + y^2$$

Observe que

$$\frac{y'}{(1+y^2)} = 1 \quad \text{com } (1+y^2) \neq 0$$

;

Ejercicio 6.

- (a) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes h, k de modo que las sustituciones $t = s - h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

- (b) Resuelva las ecuaciones:

i) $x' = \frac{2x - t + 4}{x + t - 1}$

ii) $x' = \frac{x + t + 4}{t - x - 6}$

iii) $x' = \frac{x + t + 4}{x + t - 6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

$$A \times = b$$
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \underline{\text{no inv.}}$$

Ejercicio 7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

(b) $\cos x \cos^2 y dx - 2 \sin x \sin y \cos y dy = 0$

(c) $(3x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0$

(d) $x dy = (x^5 + x^3 y^2 + y) dx$

(e) $2(x + y) \sin y dx + (2(x + y) \sin y + \cos y) dy = 0$

(f) $3y dx + x dy = 0$

(g) $(1 - y(x + y)\tan(xy)) dx + (1 - x(x + y)\tan(xy)) dy = 0.$

a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

divido por dx

$$(y - x^3) \frac{dx}{dx} + (x + y^3) \frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$(y - x^3) + (x + y^3) y' = 0$$

$$\exists F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^2 /$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$$

" " "
 $\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}$

donde

$$\underbrace{(y - x^3)}_M \underbrace{dx}_1 + \underbrace{(x + y^3)}_N \underbrace{dy}_1 = 0$$

" " "
 $\frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}$

$$M(x,y) = y - x^3 \xRightarrow{\text{deriva}} M_y(x,y) = 1$$

$$N(x,y) = x + y^3 \quad N_x(x,y) = 1$$

✓ es exacto!

Busco F

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = y - x^3 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x + y^3 \end{cases}$$

• Integro $\frac{\partial F}{\partial x}$ wrt x

$$\int y - x^3 dx = xy - \frac{x^4}{4} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\int x + y^3 dy = xy + \frac{y^4}{4} + \gamma(x)$$

Junto ambos

$$F(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4}$$

$$+ C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Solución

$$F(x, y) = C$$

$$xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$(b) \cos x \cos^2 y \, dx - 2 \sin x \sin y \cos y \, dy = 0$$

$$M = \cos x \cos^2 y$$

$$N = -2 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y$$

\Rightarrow

$$M_y = 2 \cos x \cdot \cos y \cdot (-\sin y)$$

$$N_x = -2 \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y$$

✓ es exacta!

$$\Rightarrow \exists F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F \in C^2 /$$

$$\nabla F = \left(\underbrace{M}_{\frac{\partial F}{\partial x}}, \underbrace{N}_{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = \cos x \cos^2 y \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = -2 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y \quad \textcircled{\text{II}}$$

Integro (I) wrt x

$$F(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y + \varphi(y)$$

(II) wrt y

$$F(x,y) = -2 \cdot \sin x \int \sin y \cdot \cos y \, dy + \gamma(x)$$

$$\begin{aligned} u &= \sin y \\ du &= \cos y \cdot dy \end{aligned}$$

$$\int u \, du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$(\cos^2 y)' = 2 \cdot \cos y \cdot (-\sin y)$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 y + \gamma(x)$$

$$F(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y + \gamma(x)$$

Juntando ambas

$$F(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y$$

\therefore como (b) es exacta y F es C^2

\Rightarrow

Sol (b)

$$\sin x \cdot \cos^2 y = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$(c) (3x^2 - y^2) dy - 2xy dx = 0$$

Probar resolver el ej de la guía que da un factor
integrante pero sale con esto (Prácticas
homogéneas)

