Dom 31/01/2021

Teórica 2 - Vicky

Clase anterior

- Def de Curvas
- Parametrizaciones
- Recta tangente
- Suavidad

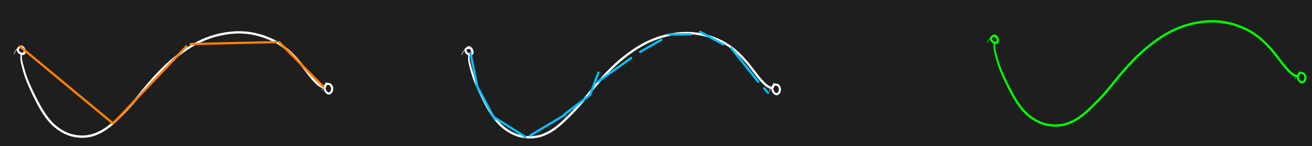
Objetivos de esta clase

- Calcular longitudes de curvas
- Integrar funciones escalares sobre curvas

Longitud de Curva

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ ($\acute{o}$ $\mathbb{R}^2$ $\acute{o}$ $\mathbb{R}^4$) una curva abierta y simple

Aproximo por poligonales



Consideremos

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ param. regular de $\mathcal{C}$

Tomo partición de $[a,b]$

$$\pi := a = t_0 < t_2 < t_3 < \dots < b = t_n$$

Entonces π induce una partición P de $\mathcal{C}$

$$P_i = \sigma(t_i)$$

$\mathcal{L}_o(P)$ = Long. de la poligonal con puntos en P

$$= \|p_1 - p_0\| + \|p_2 - p_1\| + \dots + \|p_n - p_{n-1}\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|p_i - p_{i-1}\|$$

Observación :

Si P' es una part. más fina que P
(los ptos de P son puntos de P')
↑ puede tener más!

entonces

$$\mathcal{L}_o(P) \leq \mathcal{L}_o(P')$$

Lo pruebo con desigualdad triangular sobre las normas.

Definición: Decimos que una curva $\mathcal{C}$ es rectificable si $\exists M>0 \,/\, \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq M \quad \forall \mathcal{P}$ partición de $\mathcal{C}$.
En tal caso, existe el supremo del conjunto

$$\{\mathcal{L}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C}\}$$

y definimos $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathcal{L}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C}\}$

¿Cómo lo calculamos?

Sea

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ param. regular de $\mathcal{C}$

Si Π es una partición del $[a,b]$:

$$\Pi = \{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{t_0}}, t_1, \dots, \overset{b}{\overset{\shortparallel}{t_n}}\}$$

y $\mathcal{P}$ es la part. inducida por Π en $\mathcal{C}$

entonces

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \| P_{i+1} - P_i \|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \| \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \|$$

y como

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Por Teo. de Valor Medio

cuando $n \to \infty$

$\Delta t_i \to 0$

¿Preg #2

es TVM ó Def de derivada?

$$\sigma'(c) = \frac{\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) = \sigma'(c)(t_{i+1} - t_i)$$

con $c \in [t_i, t_{i+1}]$

y si dijo $c = t_i$:

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

norma

$$\Rightarrow \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| \approx \|\underbrace{\sigma'(t_i)}_{\in \mathbb{R}^3}\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\in \mathbb{R}}\|$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(P) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i)$$

Suma de Riemman de la función $\|\sigma'(t)\|$

asociada a la part. Π.

$\downarrow$

Proposición

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Demo en apunte: Cap 1 - Sección 5

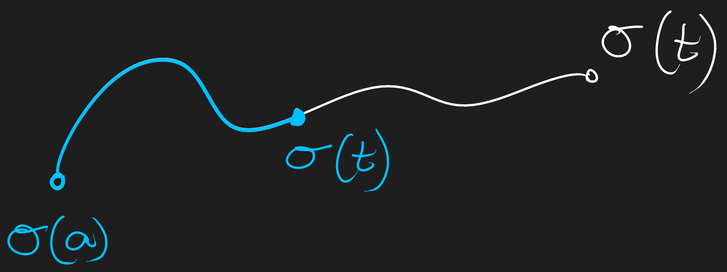
Parámetro de Longitud de Arco

Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave,
y sea $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ una param. regular de $\mathcal{C}$

Para cada $t \in [a,b]$:

$$s(t) := \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr$$

mide la longitud entre $p_0 = \sigma(a)$
y $p = \sigma(t)$



$\Rightarrow$ la función

$$S : [a,b] \to [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$$

se llama función de longitud de arco

Propiedades

1) Por Teo. Fundam. del Cálculo

$$S'(t) = \| \sigma'(t) \|$$

que como S' es contínua

$\Rightarrow$ S es de clase C^1

2) Como $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ en $[a,b]$, pues es regular

$\Rightarrow$ $S'(t) \neq 0$ $\quad \forall t \in [a,b]$

3) S es estrictamente creciente

$\therefore$ S es una función biyectiva

• Consecuencia:

$S(t)$ admite inversa $t(s)$

$$t : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to [a,b]$$

de clase C^1 en $[0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$

- Además:

$$t'(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

Con todo esto, podemos considerar la reparametrización de $\mathcal{C}$ dada por

$$\boxed{\begin{gathered}\tilde{\sigma}(s) := \sigma(t(s)) \\ \tilde{\sigma} : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \longrightarrow \mathcal{C}\end{gathered}}$$

Decimos que $\tilde{\sigma}$ es la:

"Parametrización por Longitud de Arco"

que si derivamos usando chain rule

$$\tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$= \sigma'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\sigma(t(s))\|}$$

$$\Longrightarrow \|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1 \quad \forall s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$$

"La norma de la velocidad es 1"

$$\int_0^r \|\tilde{\sigma}'(s)\| ds = r$$

Integral de Longitud de Arco

Ej: "Alambre inhomogéneo"

Representado por curva $\mathcal{C}$

Densidad $= \rho(x, y, z)$

- Si ρ fuera constante:

$$\Rightarrow \text{masa} = \rho \cdot \text{long}(\mathcal{C})$$
$$= \rho \cdot \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

- Si no:

Sea $\underbrace{\ell}_{\text{long. del alambre}} = \mathcal{L}(\mathcal{C})$ y $n \in \mathbb{N}$

Parto $\mathcal{C}$ en n pedacitos iguales (long. $\frac{\ell}{n}$ c/u)

Para eso

$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ param. regular

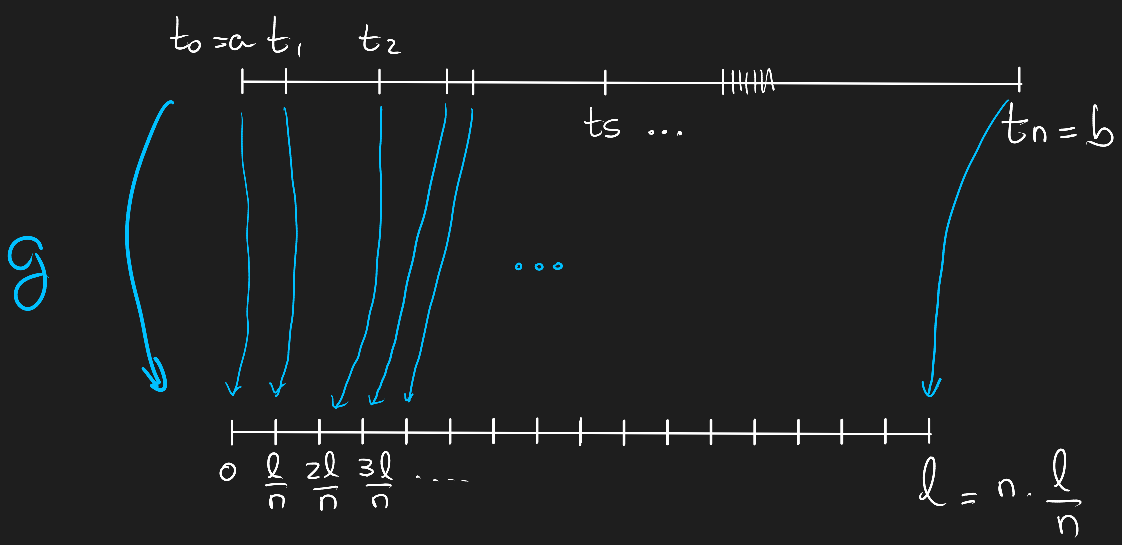
$g(t)$ función de longitud de Arco:

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(s)\| ds$$

Para cada $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

$\exists\, t_k \in [a,b]$ /

$$g(t_k) = k\cdot\frac{\ell}{n}$$



Como g es estrictamente creciente, se forma una partición (elementos ordenados) del $[a,b]$

$$\pi: t_0=a<t_1<t_2<\dots<t_n=b$$

$\Rightarrow$ Si llamamos

$$P_k = \sigma(t_k)$$

tenemos

$P_0, P_1, \dots, P_n$ puntos en $\mathcal{C}$

tales que

la longitud entre estos puntos P_k (sobre $\mathcal{C}$)

es :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt =$$

$$t = g^{-1}(s) \qquad -g^{-2}(s) \, g' \cdot s'$$

? #3 $\rightarrow \; dt = \dfrac{1}{g'}$

$t = g^{-1}(s) \quad \frac{k\ell}{m}$

$dt = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(s))} ds = \dfrac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|}$

$$= \int_{k \cdot \frac{\ell}{n}}^{(k+1) \cdot \frac{\ell}{n}} \|\sigma'(g^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|} \, ds$$

$$= \int_{k \cdot \frac{\ell}{n}}^{(k+1) \cdot \frac{\ell}{n}} 1 \cdot ds$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt = \frac{\ell}{n}$$

Como la densidad ρ es continua, puedo aproximar con algún punto $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$,

con $p_k^* = \sigma(t_k^*)$

$\Rightarrow$ la masa del alambre entre p_k y p_{k+1} es aprox:

(asumo que es constante acá)

$$\rho(p_k^*) \cdot \frac{\ell}{n}$$

$\Rightarrow$ masa total $M \cong \sum_{k=0}^{n-1} \rho(p_k^*) \cdot \frac{\ell}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(p_k^*) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho\left(\sigma(\tilde{t}_k)\right) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

para ciertos $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$

Demo:

$M_k = \text{máx } \rho(\sigma(t)) \qquad t \in [t_k, t_{k+1}]$

y

$m_k = \text{mín } \rho(\sigma(t)) \qquad t \in [t_k, t_{k+1}]$

entonces

$$m_k \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| . dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t)\| . dt \leq M_k \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| . dt$$

luego, divido por: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| . dt$

$$\frac{\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|.dt}{\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|.dt} \in [m_k, M_k] = \operatorname{Im}\left(\rho(\sigma(t))\right) \text{ en } [t_k, t_{k+1}]$$

y como ρ y σ son continuas,

$$\exists\ \tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

tal que

$$\rho(\sigma(\tilde{t}_k)) = \frac{\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|.dt}{\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|.dt}$$

Probé lo que quería, pues

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)).\|\sigma'(t)\|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)).\|\sigma'(t)\|\,dt$$

sumo todos los intervalitos

Volviendo al cálculo de la masa M:

$$M \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(t_k^*)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

y

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

Nota que si el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ es muy chiquito

$$\Rightarrow t_k^* \cong \tilde{t}_k$$

$$\Rightarrow \sigma(t_k^*) \cong \sigma(\tilde{t}_k)$$

Con esto, tenemos que la masa de $\mathscr{C}$ es

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

Def:

Sea $\mathscr{C}$ una curva simple, abierta y suave,

y $\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$ una parametrización regular

Si f es una función continua en $\mathscr{C}$,

llamamos:

"Integral de f en $\mathscr{C}$ respecto a

la Longitud de Arco"

a

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

Observación importante

Si $\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathcal{C}$ es otra param. regular de $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| = \int_c^d f(\tilde{\sigma}(t)) \cdot \|\tilde{\sigma}'(t)\|$$

(integrar sobre $\mathcal{C}$ no depende de la param. que use)

- Esto da lugar a la notación

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds} = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

para cualquier $\sigma(t)$ param. regul. de $\mathcal{C}$.

"Integral de f a lo largo de $\mathcal{C}$"

- También podemos probar que si tenemos 2 parametrizaciones, una es una reparametrización de la otra

Dem:

Dem: $\exists\, h : [a,b] \to [c,d]$ biyectiva, C^1 / $h' \neq 0$ y $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h^{-1}$. (Ver video complementario 1).

$$\Rightarrow \int_c^d f(\tilde{\sigma}(s))\, \|\tilde{\sigma}'(s)\|\, ds = \int_c^d f(\sigma(h^{-1}(s)))\, \|\sigma'(h^{-1}(s))\| \cdot |(h^{-1})'(s)|\, ds$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\|\, dt. \quad \boxtimes$$

$t = h^{-1}(s)$

$dt = (h^{-1})'(s)\, ds$

sup $h^{-1}(c) = a$, $h^{-1}(d) = b$ $\Rightarrow (h^{-1})' > 0$

$\hookrightarrow$ h resulta estrictamente creciente y $\therefore$ h^{-1} también.

//