Iván

CLASE 16 – 4/3 – SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES LINEALES (COEF CONSTANTES)

OBJ: $X' = A.X$ (en el futuro $AX+b$)

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

↑ coef. constantes

- Las soluciones forman un Espacio Vectorial.
- Las soluciones del sistema dependerán de cómo sean los autovectores y autovalores de A.

a) A ES DIAGONALIZABLE EN $\mathbb{R}$

b) A NO ES DIAGONALIZABLE EN $\mathbb{R}$ PERO SÍ EN $\mathbb{C}$

c) A NO ES DIAGONALIZABLE

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. λ ES UN AUTOVALOR DE A SI $\exists$ $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ / $A.v = \lambda.v$

y el vector v es un autovector de autovalor λ

Autoespacio

$$E_\lambda = \{\text{Todos los autovectores de autovalor } \lambda\} \cup \{0\}$$

↳ EV.

Una matriz A es diagonalizable si $\mathbb{R}^n$ admite una base de autovectores de A.

Si B es la base de autovectores

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

¿Cómo encontrar autovalores y autovectores?

Autovalores

Raíces del polinomio característico de A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda . I - A)$$

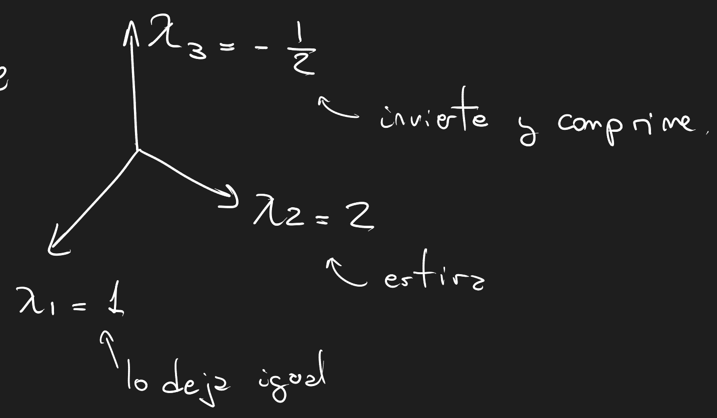
Autoespacio

E_λ : Soluciones $(\lambda . I - A) . V = 0$

Para cada λ correspondiente

Auto valores

Base



a) A es diagonalizable

$\Rightarrow$ $\exists$ base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de autovectores asoc. de autovalores $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ respectivamente.

Una base de soluciones es

dimensión del espacio

$$\mathcal{B}_s = \{v_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}, \ldots, v_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t}\}$$

Ej: Resolver

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X' = A \cdot X$$

Necesito autovec. y autoval. de A

Calculo Polinomio Característico

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det \left| \quad \right|$$

$$= (\lambda+4)(\lambda-1) + 6$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Quiero raíces de

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow \lambda = -1 \\ \hookrightarrow \lambda = -2 \end{array}\right\} \text{Autovalores de } A$$

Autoespacio

E_{-1} : sol. $(-1I - A)\,v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a - 3b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{array}\right\} \text{Siempre Linealmente Dependiente!}$$

$\Rightarrow \quad a = b$

Elijo alguno

$b = 1 \Rightarrow a = 1$

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{-2} : \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2a + 3b = 0$$
$$-2a - 3b = 0$$

$$E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Base

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t} \right\}$$

SOLUC. GENER

$$\vec{X}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 \cdot 3 e^{-2t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 \cdot (-2) \cdot e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Revisar Teórica de Vicky.

b) A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$,

Pero sí en $\mathbb{C}$

(Caso $\mathbb{C}^{2\times 2}$)

Autovalores $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Autovectores $\rightarrow V_1, V_2 \in \mathbb{C}^2$

Quiero

$$B_S = \{ V_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, V_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \}$$

No sirve! tengo objetos complejos!

Puedo buscar alguna forma de operar en $\mathbb{R}$

Prop:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$$

$$V_2 = \bar{V}_1$$

Quiero (llamo $V = V_1$, $\lambda = \lambda_1$)

$\rightarrow V \cdot e^{\lambda t}$

$\rightarrow \bar{V} \cdot e^{\bar{\lambda} t}$

Recuerdo

$$e^{(a+bi)} = e^{a} \cdot e^{bi}$$
$$= e^{a} \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$

Reescribo

$$\lambda = a+bi$$

$$v \cdot e^{\lambda t} = V \cdot e^{at+bti}$$
$$= V \cdot e^{at} \cdot \left(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)\right)$$

$$\bar{v} \cdot e^{\bar{\lambda} t} = \bar{V} \cdot e^{at-bti}$$
$$= \bar{V} \cdot e^{at} \cdot \left(\cos(-bt) + i \cdot \sin(-bt)\right)$$
$$= \bar{V} \cdot e^{at} \left(\cos(bt) - i \cdot \sin(-bt)\right)$$

$$= V \cdot e^{at} \left(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)\right)$$

Notar que

- $$\frac{V \cdot e^{\lambda t} + \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}}{2} = \mathrm{Re}\left(V \cdot e^{\lambda t}\right)$$
- $$\frac{V \cdot e^{\lambda t} - \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}}{2i} = \mathrm{Im}\left(V \cdot e^{\lambda t}\right)$$

Son soluciones Reales!

Conclusión

En el caso complejo debo encontrar una solución compleja con el método anterior y tomar la parte real e imaginaria.

Eso me da la base de soluciones.

Ej:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X' = AX$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$$

$$|\lambda - 1| = i$$

obtengo $\lambda = 1 + i$

$\lambda = 1 - i$

$$E_{1+i} : [(1+i)I - A] \cdot V = 0$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ia + b = 0 \\ -a + ib = 0 \end{cases} \Rightarrow ib = a$$

elijo $b = 1$

$\Rightarrow a = i$

$$E_{1+i} = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una solución compleja es

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+i)t} = \qquad \rightarrow \begin{matrix} Re \\ Im \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} \cdot (\cos t + i \cdot \sin t)$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{i \cdot e^t \cdot \cos t} - \underbrace{e^t \cdot \sin t} \\ \underbrace{e^t \cdot \cos t}_{Re} + \underbrace{i \cdot e^t \cdot \sin t}_{Im} \end{pmatrix}$$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$$\begin{pmatrix} -e^t \cdot \sin t \\ e^t \cdot \cos t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos t \\ e^t \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

Elementos que constituyen la base de soluciones reales

$$\mathcal{B}_S = \left\{ e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$X = C_1 \cdot e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\, e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \cdot e^t \cdot \sin t + C_2 \cdot e^t \cdot \cos t \\ C_1 \cdot e^t \cdot \cos t + C_2 \cdot e^t \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

$\boxed{C}$ Caso no diagonalizable con Ezequiel

EJ: $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$

HALLAR LAS SOLUC DEL SIST. TALES QUE

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$$

Hacer

Solución

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{3t}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} \infty} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$

necesito $C_1 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Solución Final} \\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \end{array}}$$