

# Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

Curso de Verano de 2021

Primer Parcial (25/02/21)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido: Carreira

Nombre: Leandro

No. de documento: 34 020 793

L.U.: 669 / 18

Carrera: Computación

Grupo: 1 ☐

2 ☐

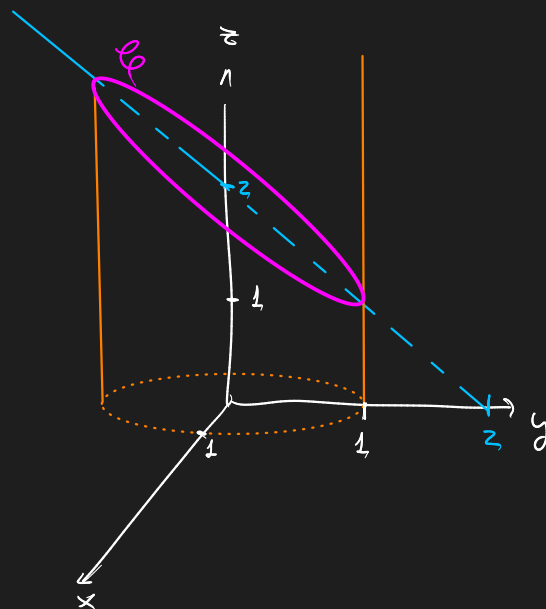
3 ☒

1. Consideramos la curva  $C$  determinada por la intersección entre la superficie dada por la ecuación  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  y la superficie dada por  $y + z - 2 = 0$ . Calcular  $\int_C f \, ds$  donde  $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2}$ .

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{cilindro} \\ y + z = 2 & \text{plano} \end{cases}$$

Quiero

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = ?$$

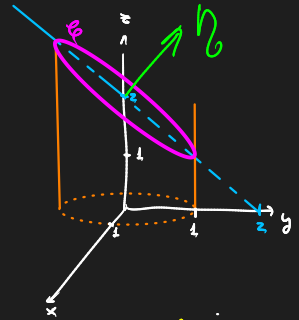


Noto que si  $f$  fuera  $\langle F, \eta \rangle$  para  
algún  $F$  compuesto con alguna param. de la superficie  
plana encerrada por  $\mathcal{C} \Rightarrow$  podría usar Stokes.  
(una disco relleno)

$$f(x, y, z) = \langle F, \eta \rangle = \sqrt{1+x^2}$$

Primero lo inmediato:  $\eta$

$\eta$  sobre la elipse <sup>relena</sup> es igual a  $\eta$  del plano  $y+z=2$



$$\Rightarrow \langle (?, ?, ?), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \sqrt{1+x^2}$$

Busco componentes de  $F(T)$  tal que obtenga  $\eta$  y además su  
quede despejar fácilmente

$$\langle (0, 0, \sqrt{2} \sqrt{1+x^2}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \sqrt{1+x^2}$$

$$F(T) = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1+x^2})$$

Calculo el rotor de este campo compuesto con la superficie elíptica:

$$\nabla_x F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left( 0, -\frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^2} \right), 0 \right)$$

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_{\mathcal{C}} \langle F, \eta \rangle \, ds$$

$$= \int_{\mathcal{C}} F \, ds$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du$$

$$\sqrt{u}$$

$$\sqrt{1+x^2}$$

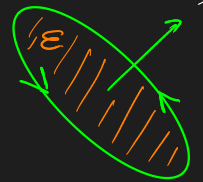
y como  $\mathcal{C}$  es cerrada, con param. que la orienta en el sentido positivo (pues elegí la normal hacia arriba)

y  $F$  compatible con la param. es  $C^1$ ,

$\Rightarrow$  por Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds \stackrel{!}{=} \iint_{\mathcal{E}} \nabla \times F \, dS$$

me quedo sin tiempo, tal vez no sea correcto esta forma //



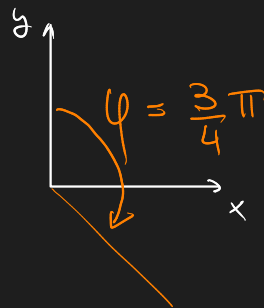
Otra forma

$$\int_C f \cdot ds = \int_C \overset{\text{tengo}}{f(\sigma(t))} \cdot \underset{\text{función escalar}}{\|\sigma'(t)\|} dt$$

en esféricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi, \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

si fijo  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$



$$\sigma(r, \theta) = \left( r \cdot \cos \theta \cdot \sin \frac{3}{4}\pi, r \cdot \sin \theta \sin \left( \frac{3}{4}\pi \right), r \cdot \cos \frac{3}{4}\pi \right)$$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$

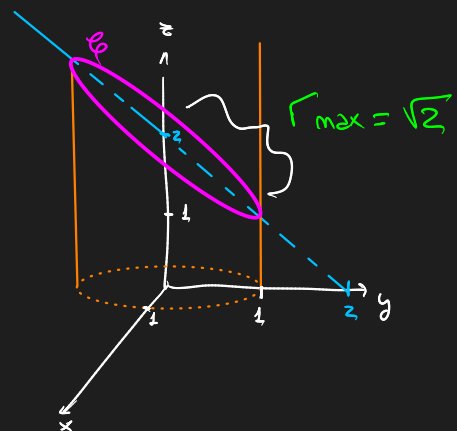
$0 \leq r \leq r(\theta)$

con  $1 \leq r(\theta) \leq \sqrt{2}$

$r(0) = 1$

$r(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

no llega a



2. Considerar el campo  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( e^{x^2 y} (2xy \sin(y^2 x) + \cos(y^2 x) y^2) - y, e^{x^2 y} (\sin(y^2 x) x^2 + \cos(y^2 x) 2xy) + x \right)$$

Evaluar

$$\int_C \mathbf{F} \, ds$$

donde  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  orientada en sentido horario.

•  $\mathbf{F}$  es  $C^1$  (es  $C^\infty$ )

Podría usar Green  $\Rightarrow$  Cálculo Rotor (en  $\mathbb{R}^2$ )

$$Q(x, y) = e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 x) \cdot x^2 + e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 x) \cdot 2xy + x$$

Sé que

$$\partial_x(f \cdot g \cdot h) = f_x \cdot g \cdot h + f \cdot g_x \cdot h + f \cdot g \cdot h_x$$

$$\begin{aligned} Q_x(x, y) = & e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 x) \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 x) \cdot y^2 \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 x) \cdot 2x + \\ & e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 x) \cdot 2xy + \\ & (-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 x) \cdot y^2 \cdot 2xy) + \\ & e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 x) \cdot 2y + 1 \end{aligned}$$

Hago lo mismo con  $P_y$ :

$$P(x, y) = e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 x) + e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 x) \cdot y^2 - y$$

$$\begin{aligned}
 P_y(x,y) = & (e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\
 & e^{x^2 \cdot y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\
 & e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\
 & e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 + \\
 & (-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2) + \\
 & e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1)
 \end{aligned}$$

Junto todo en  $Q_x - P_y$ :

$$\begin{array}{cc}
 Q_x & P_y \\
 \parallel & \parallel \\
 \left( \begin{array}{l} e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 + \\ e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x + \\ e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ (-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy) + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1 \end{array} \right) & - \left( \begin{array}{l} (e^{x^2 y} \cdot x^2) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\ e^{x^2 y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\ e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ e^{x^2 y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 + \\ (-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2) + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1) \end{array} \right)
 \end{array}$$

Mismos términos  $\equiv$  mismo color:

$$= \left( \begin{array}{l} e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 + \\ e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x + \\ e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ (-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy) + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} (e^{x^2 y} \cdot x^2) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\ e^{x^2 y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) + \\ e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ e^{x^2 y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 + \\ (-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2) + \\ e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1) \end{array} \right)$$

Se anuló casi todo y queda (afortunadamente)

$$Q_x - P_y = 2 //$$

Uso Green :

↙ Pues la curva  $\mathcal{C}$  está orientada en sentido horario

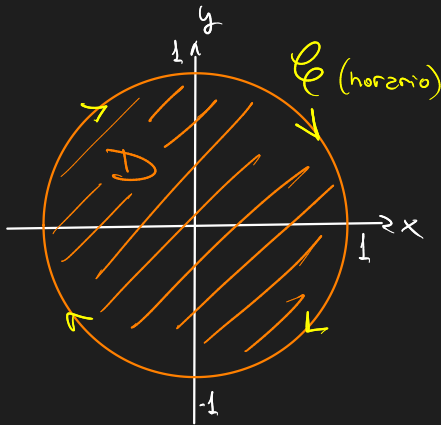
$$-\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx \, dy$$

$$= 2 \cdot \iint_D 1 \cdot dx \, dy$$

$$= 2 \cdot \text{Área}(D)$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 1^2$$

$$= 2\pi //$$



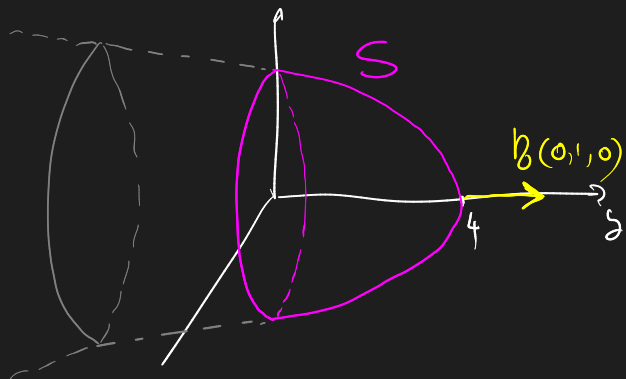
o  
o o

Solución

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = -2\pi$$

3. Sea la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 4 - x^2 - z^2, y \geq 0\}$  orientada de manera que la normal en el punto  $(0, 4, 0)$  es  $(0, 1, 0)$ . Considerar el campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^3, \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1), xe^y - x^3)$ . Calcular

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Quiero

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \, dS = ?$$

Sospecho que puedo usar Stokes, pues

$\nabla \times \mathbf{F}$  parece complicado de integrar, y como

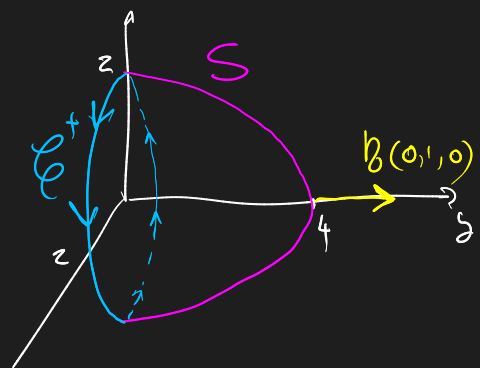
$$\mathbf{F} \in C^1 \quad \text{y} \quad \partial S = \mathcal{C} \quad (\text{orientado por } S)$$

$$\int_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F} \, d\vec{s} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \, dS$$

Donde  $\mathcal{C}^+$  es la circunferencia

$$x^2 + z^2 = z^2$$

que surge de reemplazar  $y = 0$  en  $S$



Parametrizo  $\mathcal{C}^+$



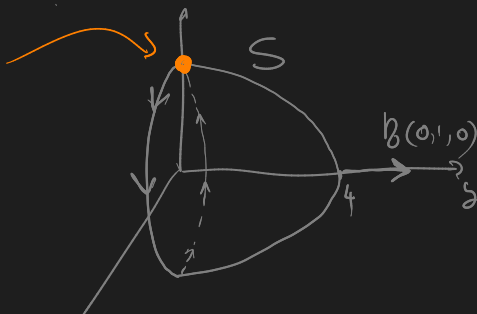
$$\sigma(\theta) = (2 \sin \theta, 0, 2 \cdot \cos \theta) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

que tiene la orientación correcta dada por  $S$ , pues

en  $\theta = 0$ :

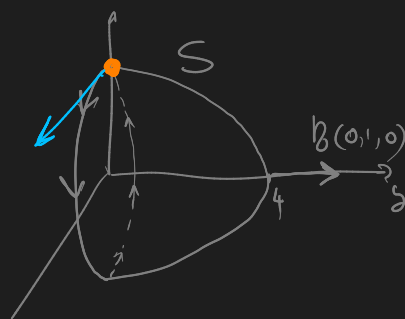
$$\sigma(0) = (0, 0, 2)$$

con tangente



$$\sigma'(\theta) = (2 \cdot \cos \theta, 0, -2 \sin \theta)$$

$$\sigma'(0) = (2, 0, 0)$$



Y ya puedo calcular

$$\int_{\mathcal{C}^+} F d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \langle F(\sigma(\theta)), (2 \cdot \cos \theta, 0, -2 \cdot \sin \theta) \rangle d\theta$$

calculo campo:

$$F(2 \sin \theta, 0, 2 \cdot \cos \theta) = \begin{pmatrix} 2^3 \cos^3 \theta, \dots, \\ 2 \cdot \sin \theta \cdot e^0 - 2^3 \cdot \sin^3 \theta \end{pmatrix}$$

no me importa poner

Calculo producto interno:

$$\begin{aligned}
 \langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle &= 2^4 \cdot \cos^4 \theta + 0 - 4 \cdot \sin^2 \theta + 2^4 \cdot \sin^4 \theta \\
 &= 16 \underbrace{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}_{=1} - 4 \cdot \sin^2 \theta \\
 &= 16 - 4 \cdot \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Reveluo integral

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{C}^+} F d\vec{s} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} 16 - 4 \sin^2 \theta \cdot d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} 16 d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

identidad

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 &= 32\pi - 4 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= 32\pi - 4 \left( \pi - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta \right) \\
 &= 32\pi - 4 \left( \pi - \underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}}_{=0} \Big|_0^{2\pi} \right)
 \end{aligned}$$

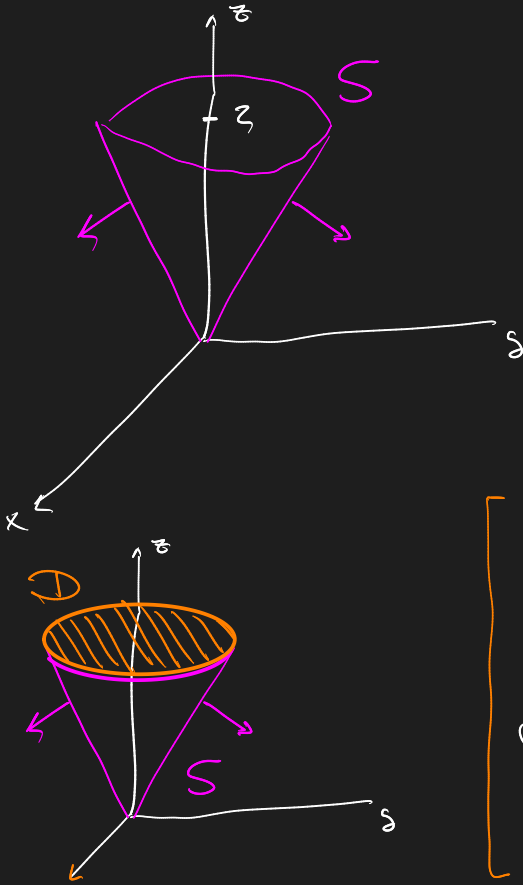
$$\int_{\mathbb{C}^+} F d\vec{s} = 28\pi //$$

Solución

$$\iiint_S \nabla \times F \, dS = 28\pi$$

4. Sea  $S$  la superficie dada por la sección del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  entre los planos  $z = 0$  y  $z = 2$  orientada con normal exterior. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y e^{z^2}, -x y^2 e^{z^2}, z)$ . Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = ?$$

Como  $\mathbf{F}$  es  $C^1(\Omega)$

siendo  $\Omega$  el volumen encerrado entre la sección del cono  $S$  y una tapa (disco  $D$ ) en  $z = 2$  con normal hacia arriba

Gauss :

puedo usar Teorema de Gauss.

$$\underbrace{\iint_{S \cup D}}_{\partial \Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Calculo divergencia:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \frac{\partial F_1}{\partial x} &= 2x \cdot y \cdot e^{z^2} \\ \bullet \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -2xy \cdot e^{z^2} \\ \bullet \frac{\partial F_3}{\partial z} &= 1 \end{aligned} \right\} \operatorname{div} \mathbf{F} = 1$$

## Cálculo integral triple

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \iiint_{\Omega} 1 \, dV$$

$$= \operatorname{Vol}(\text{cono})$$

Cavalieri

$$= \int_{z=0}^{z=2} \text{Área}(\text{Circunferencia de radio } z) \cdot dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=2} \pi \cdot z^2 \cdot dz$$

$$= \pi \cdot \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^2$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \frac{8}{3} \pi //$$

Cálculo la integral restante

$$\underbrace{\iint_{S \cup D} F \cdot \eta \, dS}_{= \frac{8}{3} \pi} = \underbrace{\iint_S F \cdot \eta \, dS}_{\text{Inógnita}} + \iint_D F \cdot \eta \, dS$$

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds = \iint_{\theta, r} \langle \mathbf{F}(T(r, \theta)), \boldsymbol{\eta} \rangle \, dr \, d\theta$$

Parametrizo el Disco  $D$  como

$$T(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, z)$$

ubicado en  $z=z$

con  $r \in [0, 2]$

con  $\theta \in [0, 2\pi)$

Muestro orientación de su normal:

$$T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} T_r \times T_\theta &= (0, 0, r \cdot \cos^2 \theta + r \cdot \sin^2 \theta) \\ &= (0, 0, r) \end{aligned}$$

Como  $r \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\eta}_D$  apunta hacia arriba  
(que es lo que queremos)

Compongo  $\mathbf{F}(T(r, \theta)) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \iint_D \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds &= \iint_{\theta, r} \langle (\dots, \dots, z), (0, 0, 1) \rangle \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^z z \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 8\pi //$$

$$\underbrace{\iint_{S \cup D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{= \frac{8}{3}\pi} = \underbrace{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{\text{Insgesamt}} + \underbrace{\iint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}_{8\pi}$$

6  
0 2

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \frac{8}{3}\pi - 8\pi \\ &= \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Solución

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{16}{3}\pi$$