Mercurio Mar 17

3. Considerar la ecuación $y'' + \alpha y' + y = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Encontrar todos los valores de α que hacen que todas las soluciones de la ecuación tengan infinitas raíces. ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que haga que todas las soluciones de la ecuación sean funciones acotadas?

   b) Elegir uno de los valores de α del punto anterior y resolver el problema

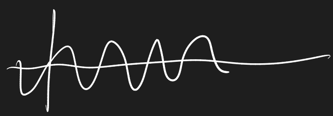
$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

a) $p(t) = t^2 + \alpha . t + 1 = 0$

Raíces $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$

$= \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-2)}}{2}$

- Quiero infinitos ceros (sin, cos)



- Si $\alpha^2 \geq 4$, tengo soluciones reales

$\Rightarrow$ Sols : $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$

- Si $\alpha \in (-2, 2) \Rightarrow$ raíces complejas

Tiene sin y cos!

Sol :

$\lambda = a + bi$

$B_S = \{ e^{at} . \cos(bt), e^{at} . \sin(bt) \}$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{at} \cdot \cos(bt) + C_2 \cdot e^{at} \cdot \sin(bt)$$

Verifico:

$$0 = X(t) = C_1 \cdot \cancel{e^{at}} \cdot \cos(bt) + C_2 \cdot \cancel{e^{at}} \cdot \sin(bt)$$

$$= C_1 \cdot \cos bt + C_2 \cdot \sin bt$$

$$\underbrace{\frac{\sin bt}{\cos bt}}_{\tan bt} = \frac{-C_1}{C_2}$$

$$\tan bt = \frac{-C_1}{C_2} \checkmark$$

b) Quiero acotarlar

Pido que $e^{at} \not\to \infty$ cuando $t \to \infty$

$$\Rightarrow \lambda = bi \quad \left(\mathrm{Re}(\lambda) = 0\right)$$

dijo $\alpha = 0$

$$y'' + y' = 0 \qquad \text{Sol: } \{\cos t, \sin t\}$$

$$y'' + y = x^2$$

Propongo:

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = x^2 - 2 \\ y''(x) = 2 \end{array}\right\} \quad y'' + y = x^2$$

gral:

$$y(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + x^2 - 2$$ //

4. Considerar el sistema

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} X(t) \\ \\ X(0) = P \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Determinar todos los valores de $P \in \mathbb{R}^2$ tales la solución está contenida completamente en el primer cuadrante.

Sugerencia: Encontrar todas las soluciones del sistema y esbozar el diagrama de fases.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & +8 \\ -8 & \lambda + 7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 13)(\lambda + 7) + 8^2$$

$$= \lambda^2 + 7\lambda - 13\lambda - 91 + 64$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda - 27$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 9 \end{matrix}\right\} \text{Caso } \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

- $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} -3-13 & 8 \\ -8 & -3+7 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-16 v_1 + 8 v_2 = 0$$

$$-2 v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = 2 v_1$$

elijo $v_1 = 1$

$\Rightarrow v_2 = 2$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} 9-13 & 8 \\ -8 & 9+7 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

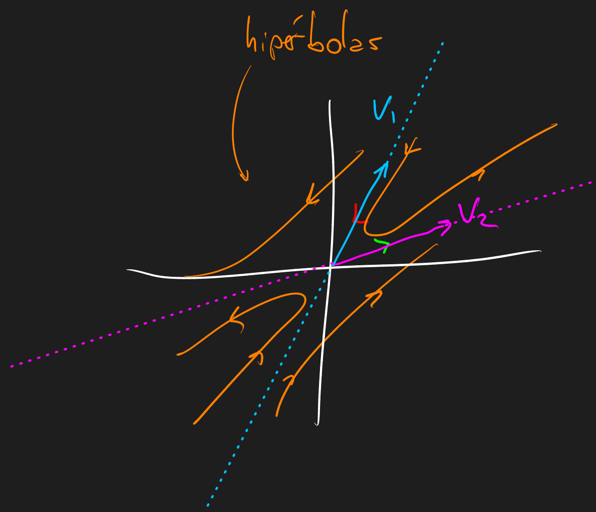
$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-4v_1 + 8v_2 = 0 \quad \left(\cdot -\tfrac{1}{4}\right)$$

$$v_1 = 2v_2$$

elijo $v_2 = 1$

$\Rightarrow v_1 = 2$



$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t} \right\}$$

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t}$$

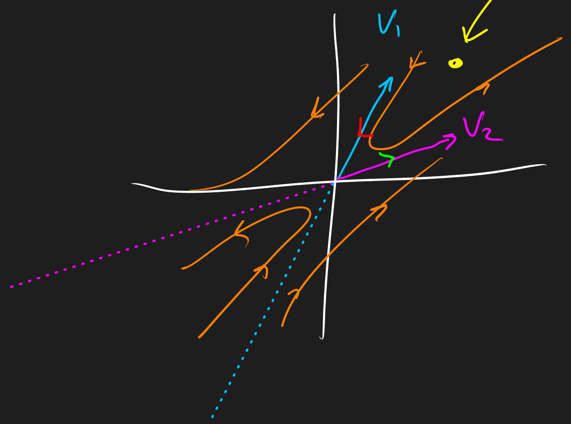
$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \cancel{e^{-3t}} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \cancel{e^{9t}}$$

$$t \xrightarrow{=1} \infty \qquad t \xrightarrow{=1} \infty$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P$$

Para cualquier P que elija, habrá una curva

elijo P entre V_1 y V_2



Solución

$$\boxed{\begin{array}{c} P = C_1 . V_1 + C_2 . V_2 \\ \text{con } C_1, C_2 > 0 \end{array}}$$