Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Verano 2021

Práctica 4: Teoremas de Stokes y de Gauss - Campos conservativos - Aplicaciones

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior de la esfera unitaria, esto es

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0,$$

y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 dadas por

$$\begin{aligned} S_1: &\qquad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ S_2: &\qquad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad z \geq 1, \end{aligned}$$

orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2\big)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 3.

(a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

(b) Deducir que si S es una superficie cerrada[1], entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

(c) Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

(a) S : círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
(b) S : región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, 2)$ a lo largo de:
   i. el segmento que une los dos puntos.
   ii. una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
(b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$
(c) $\mathbf{F}(x, y) = \big(\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy\big)$

[1] Una superficie *cerrada* es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada

Ejercicio 7. Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

(a) $\mathbf{F} = \left(2xyz + \operatorname{sen} x, x^2 z, x^2 y\right)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $\left(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4\right)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $\mathbf{F} = \left(\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2 y \operatorname{sen} xy^2, 0\right)$, y $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\left(e^t, e^{t+1}, 0\right)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Ejercicio 8. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x)\, dx + \left(\frac{3}{2} z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3\, dz,$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

Ejercicio 9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2\right)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 17 de la práctica 2 usando el teorema de Gauss.

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x + y + z)\, dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$ considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = \left(x^3, y^3, z^3\right)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(2 - \cos(2\theta)\right), \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

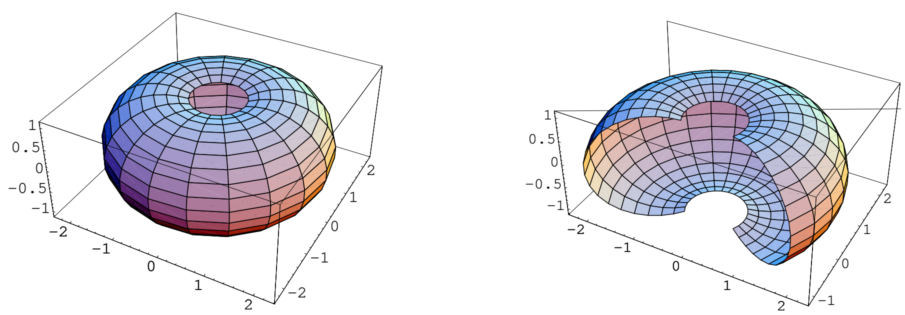

FIGURA 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S; en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el flujo a través de S en el sentido "externo" del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \le a^2$:

(a) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y+z=1$, de modo que la normal en el punto $(0,0,1)$ apunte en la dirección $(0,1,1)$.

(b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z=0$, de modo que la normal en el punto $(0,0,0)$ apunte en la dirección $(0,0,1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.

Ejercicio 17. Dada la función $f(z) = \frac{1}{2} z e^{2-2z}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \le z \le 1$.

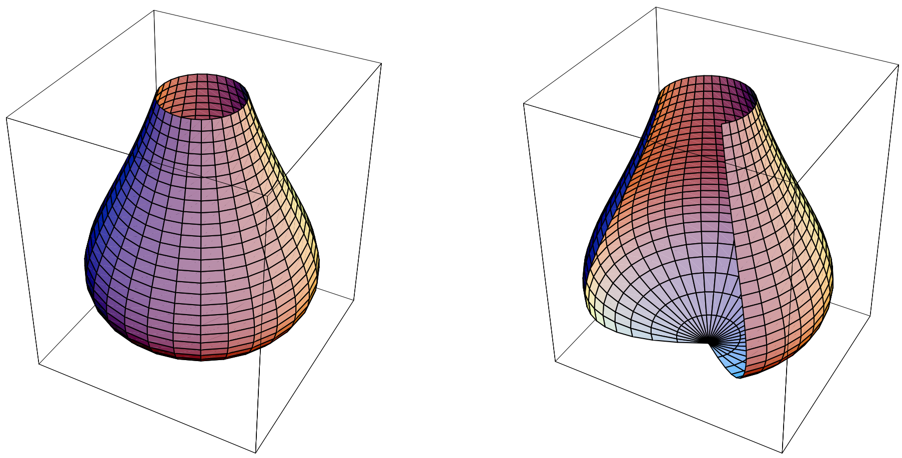

Figura 2

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right).$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Ejercicio 18. Se sabe que $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\, dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\, dt, \\ G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\, dt, \\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$?

Sugerencia: ver el ejercicio 13.

Ejercicio 19. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = (x,y,z)$.
(b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

Ejercicio 20. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\,,\, z \geq 0\big\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2\big).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.

Ejercicio 21. Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluido. Decidir si el fluido se está expandiendo.

Ejercicio 22. Denotemos por $T(x,y,z,t)$ a la temperatura ambiente en el punto (x,y,z) en el instante t. La *Ley de Fourier* afirma que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$, donde K es la constante de conductividad térmica.

Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0,4] \times [0,5] \times [0,3]$ del espacio si la temperatura está dada por $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1.

Ejercicio 23. Usando el teorema de Gauss, probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy\, dz.$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u \in C^2(\Omega)$ el *laplaciano* de u es $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Ejercicio 24. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *autovalor* del laplaciano Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \not\equiv 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω. En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ.

Utilizando las identidades de Green mostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f\, g\, dV = 0.$$

Es decir, f y g son *ortogonales*.

Ejercicio 25. Sea B una bola en $\mathbb{R}^3$. Ver que no puede haber una función $f \not\equiv 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \qquad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

Sugerencia: utilizar las identidades de Green para deducir que $\nabla f = 0$ en B. A continuación utilizar el ejercicio 9 para deducir que f es constante.

Ejercicio 26. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \qquad \textit{(Ley de Faraday)}$$

donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es $\mathcal{C}$ y la circulación se da en el sentido de recorrido de $\mathcal{C}$ inducido por la normal elegida sobre S.

Deducir que se tiene

$$\mathbf{H}_t + c\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

Sugerencia: considerar un disco de radio r como superficie S. Aplicar el teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer r tender a 0 y posteriormente utilizar que el disco era arbitrario.

Ejercicio 27*. Sea ρ la densidad de masa de un fluido que se mueve según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa ρ es $\rho_t = -\mathrm{div}\,\big(\rho\mathbf{V}\big)$.