Teorema de Green:

$F=(P,Q)$ campo $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable a trozos que encierra una región $D \subseteq \Omega$ de tipo III. Entonces,

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy}_{\text{Int. de Campo sobre Curva}} = \underbrace{\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dx\,dy.}_{\text{Integral sobre región ``plana'' } D}$$

$$= \int_{\mathcal{C}^+} F\,ds = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle\, dt$$

Cálculo de áreas

Teorema:

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale el Teorema de Green y $\mathcal{C}^+$ su frontera orientada positivamente. Entonces,

$$\boxed{\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}^+} -y\,dx + x\,dy.}$$

Observación:
Para calcular áreas, podemos usar Green con cualquier campo $F=(P,Q)$ / $\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}_{\text{debe ser constante}}$ sea constante.

Rotor

Formas vectoriales del Teorema de Green.

Definición: Sea $F=(P,Q,R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. El rotor de F es el campo vectorial definido como:

$$\operatorname{rot}(F)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right),\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Fórmula

$$\operatorname{rot}(F)=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Notación

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(F)=\nabla\times F$$

producto vectorial.

Rotor escalar

Si

$$\nabla \times F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

puedo escribirlo como

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Proposición:

Sea F un campo $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$ que es un campo gradiente, ie: $\exists\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ / $F = \nabla f$. Entonces, $\nabla \times F = (0,0,0)$

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Obs:

Contra recíproco:

Si $\nabla \times F \neq \vec{0} \Rightarrow F$ No es Campo Gradiente

Definición: Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. La divergencia de F se define como:

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Notación

$$\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle$$

Producto interno

$$= \nabla \cdot F$$

En $\mathbb{R}^2$

- Si $F = (P, Q)$ campo en $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Proposición:
Sea F un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ definido en $\mathbb{R}^3$. Entonces,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

las derivadas cruzadas se anulan

Teorema: (forma vectorial del Teorema de Green)
Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea $F = (P, Q)$ un campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

$$\iint_R \operatorname{rot}(F) = \iint_R \nabla \times F \cdot (0,0,1)\, dS = \int_{\partial R^+} (P, Q)\, ds.$$

$$\mathrm{rot}(F) = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

¿Por qué puedo pasar de $F \in \mathbb{R}^2$ a $\nabla \times F \in \mathbb{R}^3$?

Teorema: (de la divergencia en el plano)

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea η la normal exterior a ∂R. Si $F=(P,Q)$ es un campo vectorial C^1, entonces

$$\underbrace{\int_{\partial R} F\cdot\eta\, ds}_{:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}} = \underbrace{\iint_R \mathrm{div}(F)\,dx\,dy}_{:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}$$

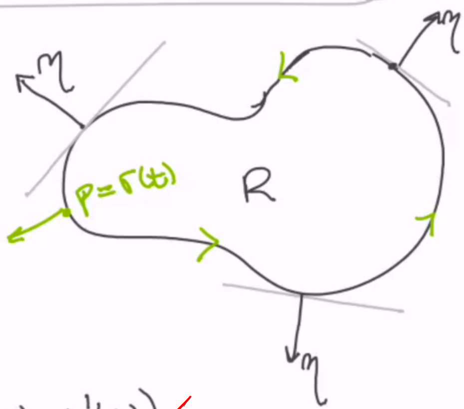
Campo normal al borde de la curva

Otro Campo: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua

Dem: Sea $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ una parametrización de ∂R, $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ que orienta ∂R positivamente



$\Rightarrow$ si $p=\sigma(t)$, $\eta(p) = \dfrac{(y'(t), -x'(t))}{\|\sigma'(t)\|}$ es la normal exterior.

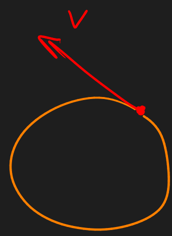
?

Sale de que $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$

es el vector tangente en cada p,

entonces

$$v = (x'(t), y'(t))$$



$*(-1)$

$$n = (x'(t), y'(t))$$