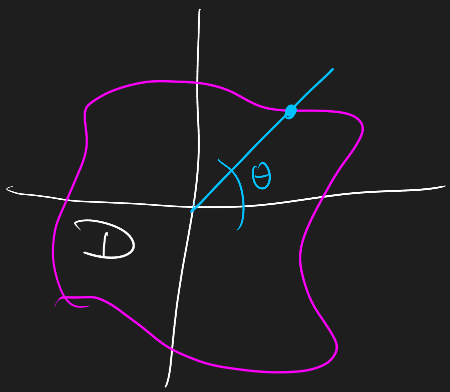
Feb 11

Primero

Curvas en Polares, Green, Áreas

$\mathcal{C}$ cerrada simple dada por

$r = r(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$



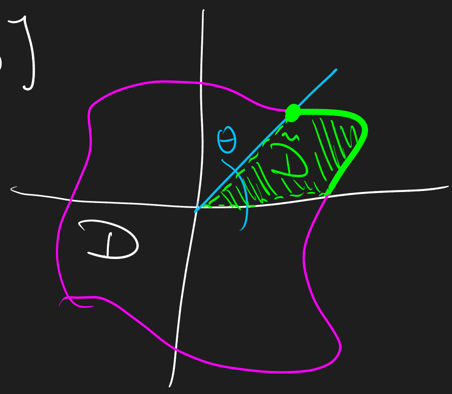
Jacobiano

$$\text{Área}(D) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\theta)^2 \, d\theta$$

$\tilde{D}$ región dada por $\theta \in [a, b]$

$$A(\tilde{D}) = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2 \, d\theta$$



Lo mismo queda si usamos Green:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$$

$= (P, Q)$

$$A(D) = \iint_D Q_x - P_y = \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}$$

$\mathcal{C}$ se parametriza con

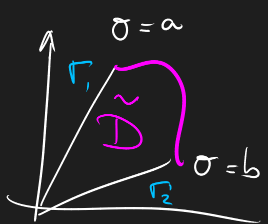
$$\sigma(\theta) = \left(r(\theta) \cdot \cos\theta \,,\, r(\theta) \cdot \sin\theta \right)$$

$$\boxed{A(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\theta)^2 \, d\theta}$$

Recordar !

WTF

Porción :



Considero segmentos rectos

- $\Gamma_1 : \gamma(t) = t\,(\cos b, \sin b)$

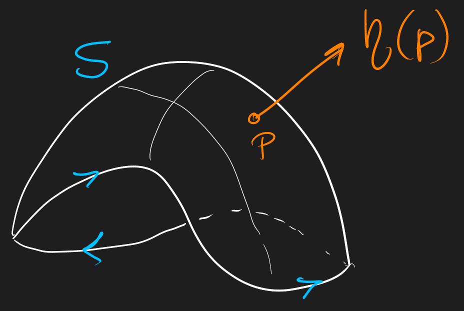
  $t \in [0, \sigma(b)]$

no aportan nada a la integral

- Γ_2 : same.

Teorema de Stokes

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientada



- $\mathcal{C} = \partial S$ curva cerrada simple orientada por S

- F campo vectorial $\in C^1$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$$

donde $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

El operador $\nabla \times (\ )$ actúa sobre

El operador $\nabla \times (\ )$ actúa sobre un campo vectorial y nos devuelve otro campo vectorial.

Usos:

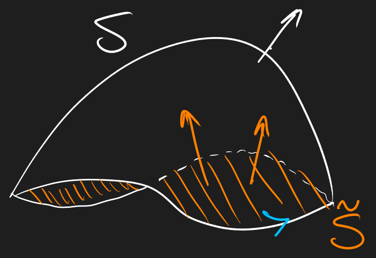
1) Calcular una cantidad o la otra.

2) Dada $\mathscr{C}$ una curva y un campo F, encontrar S tal que ∂S sea "casi"* igual a $\mathscr{C}$ y tal que

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} \quad \text{sea mejor que} \quad \int_{\mathscr{C}} F \, d\vec{s}$$

* ie. Cerrando la superficie

3) Cambiar una superficie por otra.



S orientada

$\partial S = \mathcal{C}$ orientada compatible con S

Obs: $\partial S = \mathcal{C}$

Stokes:

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s} = \iint_{\tilde{S}} \nabla \times F \, ds$$

Ejemplo:

Sea $F(x,y,z) = (-y, x, 0)$

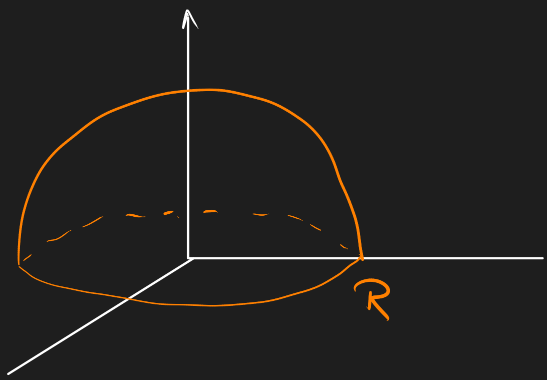
$$S = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \,,\; z \geq 0 \right\}$$

orientada de forma que

$\eta(0,0,R) = (0,0,1)$

Calcular

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{s}$$



$$\nabla\times F = (0,0,1)$$

Considerar

- $\mathcal{C} = \partial S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z=0\}$

  orientada según S

- $\tilde{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ z=0\}$

  orientada por $\eta(0,0,z) = (0,0,1)$

Stokes:

$$\boxed{\iint_S \nabla\times F\, d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} F\, ds = \iint_{\tilde{S}} \nabla\times F\, ds}$$

vector normal unitario

$$= \iint_{\tilde{S}} \underbrace{\langle \nabla\times F, \eta\rangle}_{\text{función escalar}}\, dS$$

Pero! puedo obtener η SIN parametrizar pues: $P \in \tilde{S} \rightarrow \eta(P) = (0,0,1)$ sobre todo el disco.

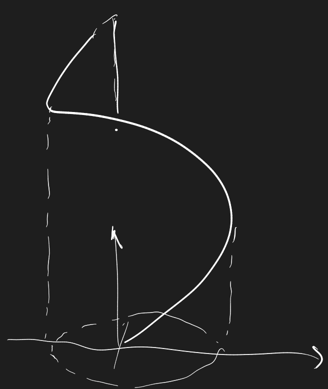
$$= \iint_{\tilde{S}} \langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle \, dS$$

$$= \iint_{\tilde{S}} 1 \, dS = A(\tilde{S}) = \pi . R^2 \;//$$

Ejercicio

Sea $\mathcal{C}$ dada y orientada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$



$$F(x,y,z) = \left(x.e^t, \; x + y \ln(z+1), \; \frac{y^2}{2(z+1)} + \frac{x^2 e^z}{2} \right)$$

Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s}$$

Pensando en Stokes, calculo el rotor:

$$\nabla \times F = \left(\frac{y}{z+1} - \frac{y}{z+1}, \; x.e^z - x.e^z, \; 1 \right)$$

$$= (0, 0, 1)$$

Buscamos S super. que tenga a $\mathcal{C}$ como borde

Queremos

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s}}_{\text{Feo}} + \underbrace{\int_{\Gamma} F\, d\vec{s}}_{?} = \iint_{S} \nabla \times F\ d$$

elijo superficie que "se lleve bien" con el rotor

Elegimos las paredes verticales del cilindro (instead escalera)

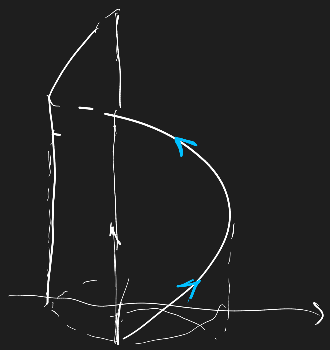
pues Normal en $(x,y,z) = (x,y,0)\cdot\lambda \qquad \lambda > 0$

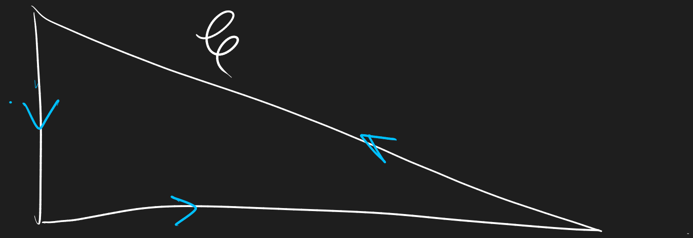
(imaginar cilindro)

Entonces

$$\iint_{S} \nabla \times F\, d\vec{s} = \iint_{S} \langle (0,0,1),(x,y,0) \rangle\, dx = 0$$

Falta completar el borde de S

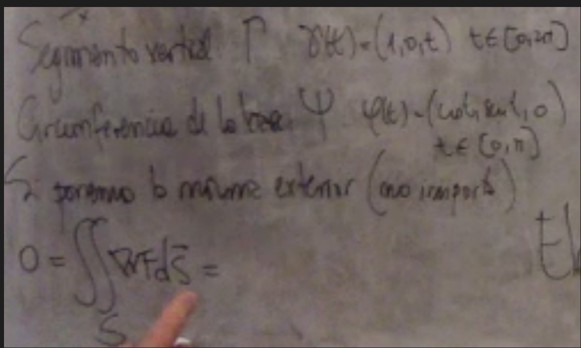




Segmento vertical $\quad$ sentido inverso!

$\hookrightarrow \Gamma : \gamma(t) = (1, 0, t)$

Circ. $\rightarrow$



orientadas

Si ponemos la normal exterior:

$$0 = \iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_\Psi F \, d\vec{s} + \int_\Gamma F \, d\vec{s} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}^-} F \, d\vec{s}}_{\text{incógnita con signo opuesto.}}$$

Calculo integrales

$$\gamma'(t) = (0,0,1)$$

$$\int_\Gamma F \, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle F(1,0,t), (0,0,1) \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(*, *, \frac{e^t}{2} \right), (0,0,1) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{2\pi} - 1 \right) \,//$$

$$\int_{\Psi} F \, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left\langle F(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle (\cos t, \cos t, \dots), (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin t \cdot \cos t + \cos^2 t \; dt$$

$$= \pi \,//$$

Falta último paso, vuelvo a la igualdad de Stokes.

$$0 = \iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_{\Psi} F \, d\vec{s} + \int_{\Gamma} F \, d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}^-} F \, d\vec{s}$$

$$0 = \pi + \frac{1}{2} \left(e^{2\pi} - 1 \right) - \int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s} = \pi + \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$