**Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II**
**Curso de Verano de 2021**
Primer Parcial (25/02/21)

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | | | |

| CALIF. |
|---|
| |

Apellido: Carreira    Nombre: Leandro

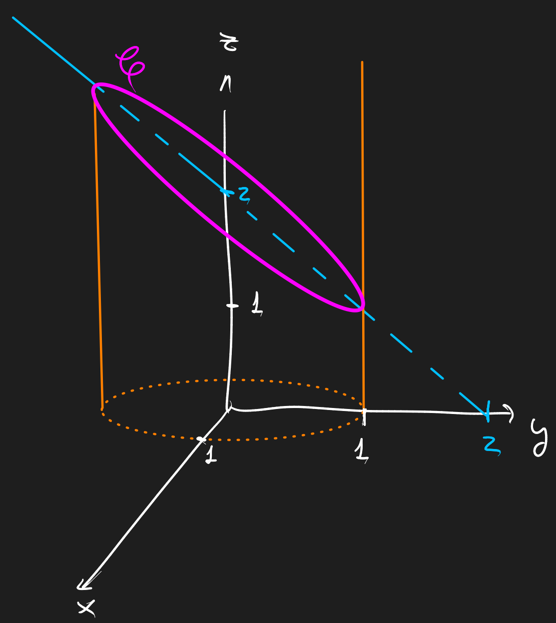
No. de documento: 34 020 793    L.U.: 669 / 18    Carrera: Computación

Grupo: 1 ☐   2 ☐   3 ☒

---

1. Consideramos la curva $C$ determinada por la intersección entre la superficie dada por la ecuación $x^2+y^2-1=0$ y la superficie dada por $y+z-2=0$. Calcular $\int_C f\,ds$ donde $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^2}$.

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2+y^2=1 & \text{cilindro} \\ y+z=2 & \text{plano} \end{cases}$$




Quiero

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \; ?$$

Noto que si $f$ fuera $\langle F, \eta \rangle$ para algún $F$ compuesto con alguna param. de la superficie plana encerrada por $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ podría usar Stoke.

(una elipse rellena)

Otra manera:

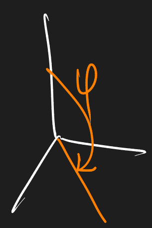
$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} \overbrace{f(\sigma(t))}^{\text{la tengo}} \cdot \|\sigma'(t)\|\, dt$$

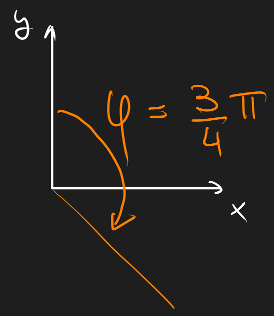
función escalar

en esféricos

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi, \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

si fijo $\varphi = \frac{3}{4}\pi$

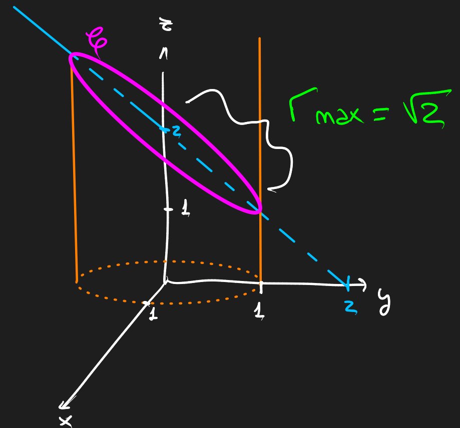



$$\sigma(r,\theta) = \left( r \cdot \cos\theta \cdot \sin\tfrac{3}{4}\pi,\; r \cdot \sin\theta \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right),\; r \cdot \cos\tfrac{3}{4}\pi \right)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$

$0 \leq r \leq r(\theta)$




con $1 \leq r(\theta) \leq \sqrt{2}$

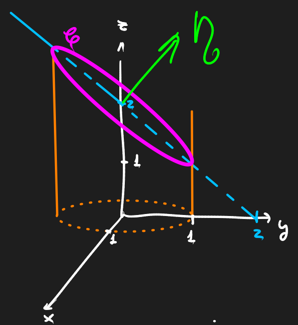
$r(0) = 1$

$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$$f(x,y,z) = \langle F , \eta \rangle = \sqrt{1 + x^2}$$

Primero lo inmediato: $\eta$

$\eta$ sobre la elipse es igual a $\eta$ del plano $y + z = 2$
rellena




$$\Rightarrow \left\langle (\,?\,,\,?\,,\,?\,), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \sqrt{1 + x^2}$$

Busco componentes de $F(T)$ tal que obtenga $\uparrow$ y además su pueda despejar facilmente

$$\left\langle \left(0, \quad 0 \quad, \sqrt{2}\sqrt{1 + x^2}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \sqrt{1 + x^2}$$

$$F(T_{()}) = \left(0, \quad 0 \quad, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Calculo el rotor de este campo compuesto con la superficie elíptica:

$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0, -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + x^2}\right), 0\right)$$

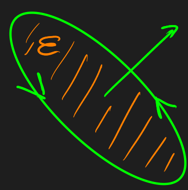
$$\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du}_{\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{1+x^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_{\mathcal{C}} \langle F, \eta \rangle\, ds$$

$$= \int_{\mathcal{C}} F\,ds$$

y como $\mathcal{C}$ es cerrada, con param. que la orienta en el sentido positivo (pues elegí la normal hacia arriba)




y $F$ compuesta con la param. es $C^1$,

$\Rightarrow$ por Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds \overset{\downarrow}{=} \iint_{\mathcal{E}} \nabla \times F\, dS$$

me quedo sin tiempo, (

2. Considerar el campo **F**:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{x^2y}(2xy\,\mathrm{sen}(y^2x) + \cos(y^2x)y^2) - y,\, e^{x^2y}\left(\mathrm{sen}(y^2x)x^2 + \cos(y^2x)2xy\right) + x\right)$$

Evaluar

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\, d\mathbf{s}$$

donde $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ orientada en sentido horario.

- $F$ es $C^1$ (es $C^\infty$)

Podría usar Green $\Rightarrow$ Calculo Rotor (en $\mathbb{R}^2$)

$$Q(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + x$$

Sé que

$$\partial x(f \cdot g \cdot h) = f_x \cdot g \cdot h + f \cdot g_x \cdot h + f \cdot g \cdot h_x$$

$$\begin{aligned} Q_x(x,y) = \; & e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ & \left(-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy\right) + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1 \end{aligned}$$

Hago lo mismo con $P_y$:

$$P(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) + e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 - y$$

$$
\begin{aligned}
P_y(x,y) = {} & \left(e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2\right) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \; + \\
& \left(-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2\right) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1)
\end{aligned}
$$

Junto todo en $Q_x - P_y$:

$$
\underbrace{\left(
\begin{aligned}
& e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \; + \\
& \left(-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy\right) \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1
\end{aligned}
\right)}_{Q_x}
-
\underbrace{\left(
\begin{aligned}
& \left(e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2\right) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \; + \\
& \left(-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2\right) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1)
\end{aligned}
\right)}_{P_y}
$$

Mismos términos $\equiv$ mismo color:

$$
= \left(
\begin{aligned}
& e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \; + \\
& \left(-e^{x^2 y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy\right) \; + \\
& e^{x^2 y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1
\end{aligned}
\right)
-
\left(
\begin{aligned}
& \left(e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2\right) \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2x \cdot \sin(y^2 \cdot x) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \; + \\
& \left(-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2xy \cdot y^2\right) \; + \\
& e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + (-1)
\end{aligned}
\right)
$$

Se anula casi todo y queda (afortunadamente)

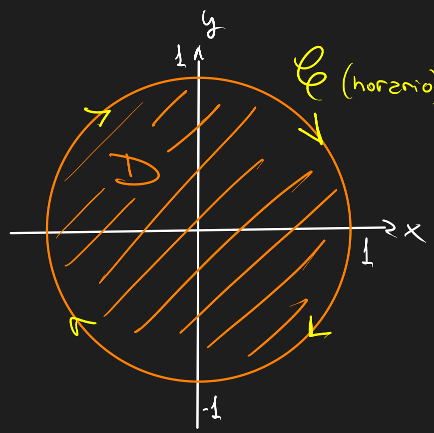
$$Q_x - P_y = 2 \;//$$

Uso Green:

Pues la curva $\mathcal{C}$ está orientada en sentido horario

$$-\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$= 2 \iint_D 1 \, . dx\,dy$$




$$= 2 \,.\, \text{Área}(D)$$

$$= 2 \,.\, \pi \,.\, 1^2$$

$$= 2\pi \;//$$

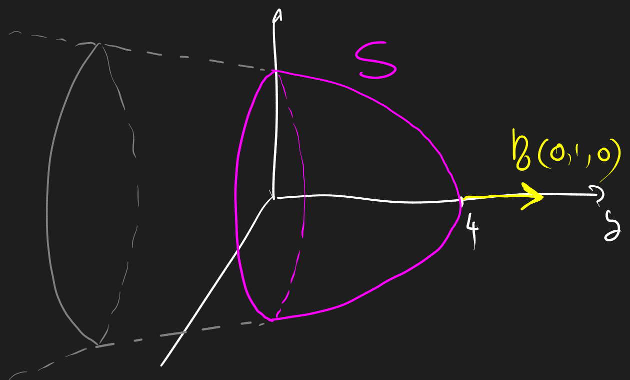
$\therefore$

Solución

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = -2\pi$$

3. Sea la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 4 - x^2 - z^2, y \geq 0\}$ orientada de manera que la normal en el punto $(0,4,0)$ es $(0,1,0)$. Considerar el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (z^3, \ln(x^2+y^2+z^2+1), xe^y - x^3)$. Calcular

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

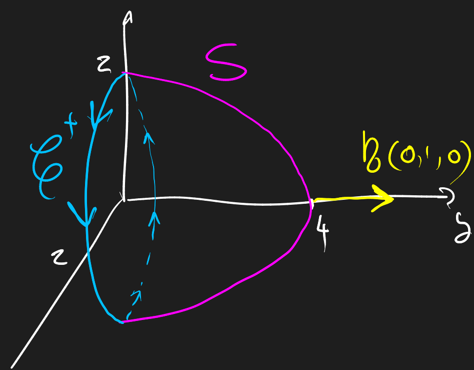



Quiero

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = ?$$

Sospecho que puedo usar Stokes, pues $\nabla \times F$ parece complicado de integrar, y como $F \in C^1$ y $\partial S = \mathcal{C}$ (orientada por S)

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \, d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \, dS$$




Donde $\mathcal{C}^+$ es la circunferencia

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

que surge de reemplazar $y = 0$ en S

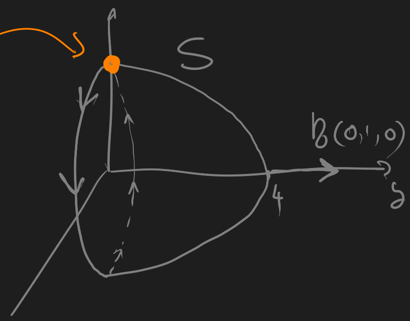
Parametrizo $\mathcal{C}^+$

$$\sigma(\theta) = (2\sin\theta, 0, 2\cdot\cos\theta) \qquad \text{con } \theta\in[0,2\pi)$$

que tiene la orientación correcta dada por $S$, pues

en $\theta = 0$:

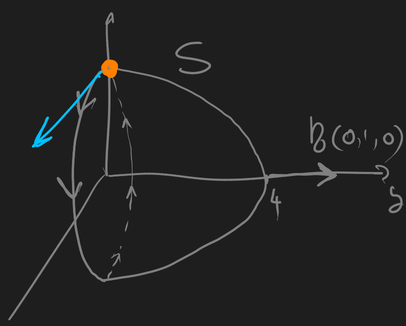
$$\sigma(0) = (0,0,2)$$




con tangente

$$\sigma'(\theta) = (2\cdot\cos\theta, 0, -2\sin\theta)$$

$$\sigma'(0) = (2, 0, 0)$$




Ya puedo calcular

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\,d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\langle F(\sigma(\theta)), (2\cdot\cos\theta, 0, -2\cdot\sin\theta)\right\rangle d\theta$$

no me importa pues

calculo campo:

$$F(2\sin\theta, 0, 2\cdot\cos\theta) = \left(2^3\cdot\cos^3\theta, \dots, 2\cdot\sin\theta\cdot e^0 - 2^3\cdot\sin^3\theta\right)$$

Calculo producto interno:

$$\langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta)\rangle = 2^4 \cdot \cos^4\theta + 0 - 4\cdot\sin^2\theta + 2^4\cdot\sin^4\theta$$

$$= 16\underbrace{\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right)}_{=1} - 4\cdot\sin^2\theta$$

$$= 16 - 4\cdot\sin^2\theta$$

Resuelvo integral

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\,d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{2\pi} 16 - 4\sin^2\theta \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\,d\theta - 4\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta$$

identidad

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$= 32\pi - 4\cdot\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= 32\pi - 4\left(\pi - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\right)$$

$$= 32\pi - 4\left(\pi - \underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right)$$

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\,d\vec{s} = 28\pi$$

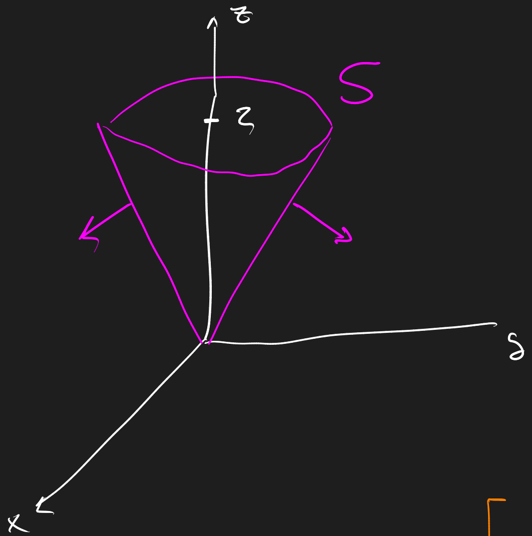
$\therefore$

Solución

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = 28\pi$$

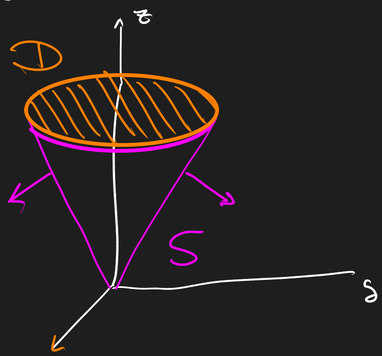
4. Sea $S$ la superficie dada por la sección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 2$ orientada con normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 y e^{z^2}, -xy^2 e^{z^2}, z)$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$




$$\iint_S F \cdot dS = ?$$

Como $F$ es $C^1(\Omega)$




[ siendo $\Omega$ el volumen encerrado entre la sección del cono $S$ y una tapa (disco $D$) en $z = 2$ con normal hacia arriba ]

puedo usar Teorema de Gauss.

Gauss:

$$\iint_{\underbrace{S \cup D}_{\partial\Omega}} F \cdot \eta \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV$$

Calculo divergencia:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{z^2} \\ \bullet \ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = -2xy \cdot e^{z^2} \\ \bullet \ \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = 1 \end{array}\right\} \operatorname{div} F = 1$$

## Calculo integral triple

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \iiint_{\Omega} 1 \, dV$$

$$= \operatorname{Vol}(\text{cono})$$

Cavalieri

$$= \int_{z=0}^{z=2} \text{Área}(\text{Circunferencia de radio } z) \cdot dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=2} \pi \cdot z^2 \cdot dz$$

$$= \pi \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^2$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \frac{8}{3}\pi \,//$$

## Calculo la integral restante

$$\underbrace{\iint_{\underset{\partial\Omega}{S \cup D}} F \cdot \eta \, ds}_{=\frac{8}{3}\pi} = \underbrace{\iint_{S} F \cdot \eta \, ds}_{\text{Incógnita}} + \iint_{D} F \cdot \eta \, ds$$

$$\iint_D F \cdot \eta \, ds = \int_\theta \int_r \langle F(T(r,\theta)), \eta \rangle \, dr \, d\theta$$

Parametrizo el Disco $D$ como

ubicado en $z=2$

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, \; r \cdot \sin\theta, \; 2)$$

con $r \in [0,2]$

con $\theta \in [0,2\pi)$

Muestro orientación de su normal:

$$T_r = (\cos\theta, \; \sin\theta, \; 0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, \; r \cdot \cos\theta, \; 0)$$

$$T_r \times T_\theta = (0, \; 0, \; r \cdot \cos^2\theta + r \cdot \sin^2\theta)$$

$$= (0, \; 0, \; r)$$

como $r \geq 0 \Rightarrow \eta_D$ apunta hacia arriba

(que es lo que quería)

Compongo $F(T(r,\theta))$

$$\iint_D F \cdot \eta \, ds = \int_\theta \int_r \langle (\ldots, \ldots, 2), (0,0,1) \rangle \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} 2 \, dr \, d\theta$$

$$\iint_D F\cdot\eta\,ds = 8\pi \,//$$

$$\underbrace{\iint_{\underset{\partial\Omega}{\underbrace{S\cup D}}} F\cdot\eta\,ds}_{=\frac{8}{3}\pi} = \underbrace{\iint_S F\cdot\eta\,ds}_{\text{Incógnita}} + \underbrace{\iint_D F\cdot\eta\,ds}_{8\pi}$$

$\therefore$

$$\iint_S F\cdot\eta\,ds = \frac{8}{3}\pi - \overset{\frac{24}{3}}{8\pi}$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$

Solución

$$\boxed{\iint_S F\cdot\eta\,ds = \frac{16}{3}\pi}$$