

Integrals de Sup

↓ Orientación

Flujo

Integrals de Superficie

$$T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longrightarrow T(u, v)$$

Parametrización regular

$$\int_S \overset{\text{escalar}}{f} \cdot dS = \iint_D f \circ T(u, v) \cdot \|N(u, v)\| du dv$$

\uparrow
S grande

$$N(u, v) = T_u(u, v) \times T_v(u, v)$$

Ej: Sea S la superficie dada por

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

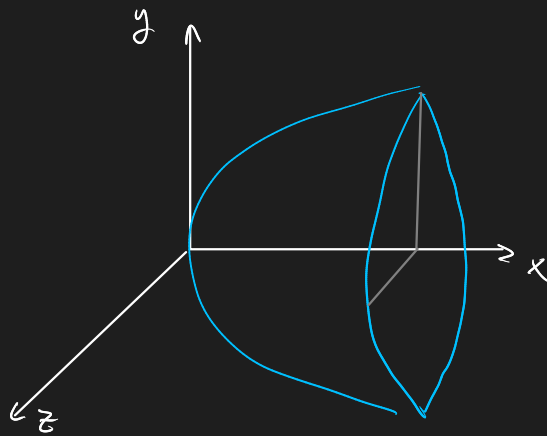
Hallar la masa y la densidad si la densidad es:

$$\mathcal{J}(x, y, z) = y$$

Quiero:

$$\int \mathcal{J} \cdot ds = ?$$

Qué es y cómo parametrizo?:



Como gráficos de una función:

$$T(x, z) = (x, x^2 + y^2, z)$$

Para el Dominio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 \leq 4\}$$

Otra idea: **Polares**

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$z = r \cdot \sin \theta$$

$$y = r^2$$

con

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\swarrow \sqrt{4} = 2$$

$$T(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r^2, r \cdot \sin \theta)$$

con

$$T: [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Calculamos $N(u, v)$

$$T_r(r, \theta) = (\cos \theta, 2r, \sin \theta)$$

$$T_\theta(r, \theta) = (-r \cdot \sin \theta, 0, r \cdot \cos \theta)$$

$$(T_r \times T_\theta)(r, \theta) = (2r^2 \cos \theta, -r, 2r^2 \sin \theta)$$

$$\|N(u, v)\| = \sqrt{4r^4 \cos^2 \theta + r^2 + 4r^4 \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{4r^4 + r^2}$$

$$= r \sqrt{4r^2 + 1}$$

Calculo integ.

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r \cdot \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta \cdot \int_0^2 r^2 \cdot r \cdot \sqrt{4r^2 + 1} \, dr \end{aligned}$$

Orientabilidad

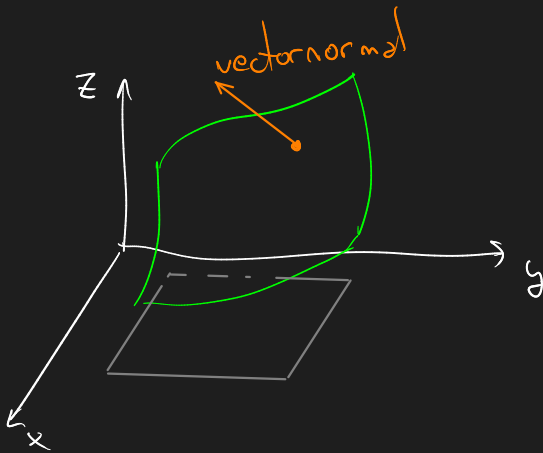
Una superficie S se dice **orientable**

si existe un **campo normal unitario y continuo**

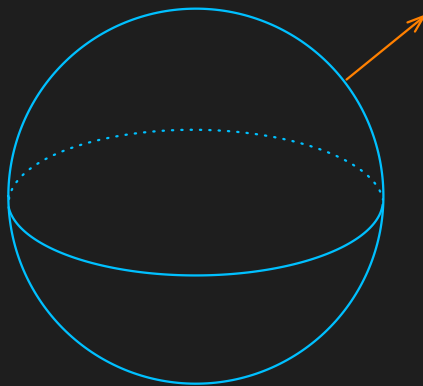
$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ continuo}$$

Ej: Gráfica de una función suave

$$F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



Ej: Esfera :



Una superficie se dice orientada o es orientable y se le fija una orientación.

Una parametrización induce una orientación en una superficie (la orientación dada por $N(u,v)$)

Integrales de Flujo

S una superficie regular orientada.

$$\begin{aligned} T : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow T(u,v) \end{aligned}$$

↖ Param regular de S

$F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo.

campo vectorial
"velocidad en cada punto"
"que atraviesa la malla."

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \begin{matrix} \textcircled{*} \\ + \\ - \end{matrix} \int_D \int \langle F \circ T(u,v), N(u,v) \rangle du dv$$

* Donde el signo es


+ : si la orientación de T respeta la de la superficie
- : si no respeta

$$= \int_S \langle F, \overset{u}{\underset{\parallel N \parallel}{N}} \rangle dS$$

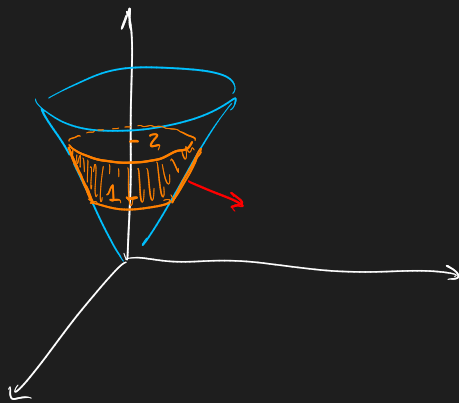
$P_2 E_{20}$) • Sea S la parte del cono

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{con } z \in [1, 2]$$

• $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

Orientado con la normal hacia afuera del cono 

Calcular $\int_S F \cdot d\vec{S}$



Parametrización

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = r \end{cases}$$

$$T: [1, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 /$$

$$T(r, \theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r)$$

$$T_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

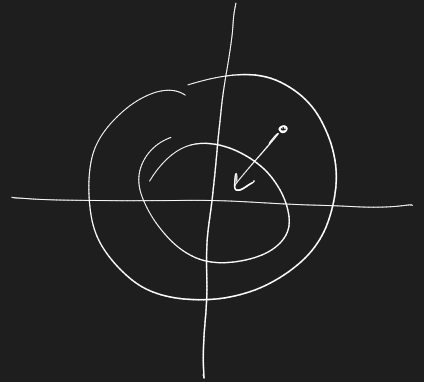
$$T_\theta(r, \theta) = (-r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta, 0)$$

$$T_r \times T_\theta = (-r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r)$$

¿Qué orientación tiene?

$$N(r, \theta) = (-r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r)$$

Nota → $\underbrace{-x \quad -y}_{\text{hacia el centro}} \quad \underbrace{z}_{\text{hacia arriba}}$
 hacia adentro del cono!



✗ No indica la orientación que giro

Calculo integral de Flujo

$$\int_S F d\vec{z} = - \iint_D \langle F \circ T(r, \theta), N(r, \theta) \rangle dr d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_1^2 \langle (r^2 \cdot \cos^2 \theta, r^2 \cdot \sin^2 \theta, r), (-r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, r) \rangle dr d\theta$$

$$= - \left[\int_1^2 r^3 dr \right] \cdot \int_0^{2\pi} -\cos^3 \theta - \sin^3 \theta + 1 d\theta$$

$$= \text{Contar} \dots = -\frac{15}{2} \pi //$$