Consultas Teóricas

Jupiter 04/02/21

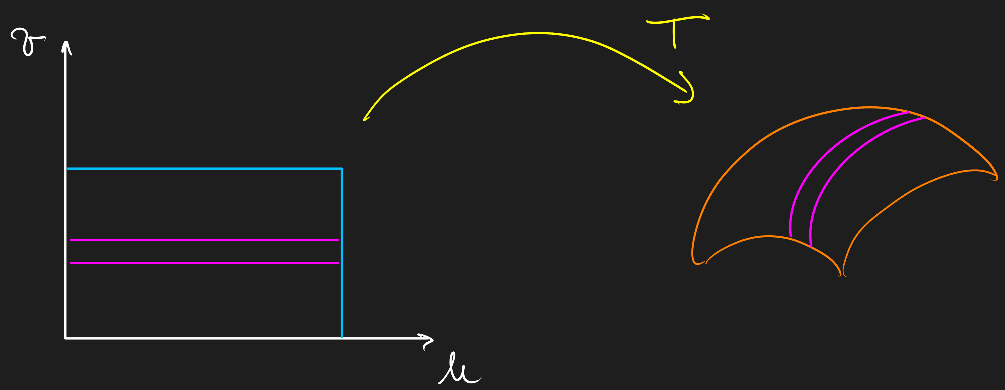
Superficies Parametrizadas

$S \subset \mathbb{R}^3$ (subconjunto) /

$\exists\, D \subseteq \mathbb{R}^2$ (región elemental)

y $T : D \to S$ continua y sobreyectiva

$$(u,v) \longmapsto p = \left(x(u,v) \,,\, y(u,v) \,,\, z(u,z) \right)$$



$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 + y^2 \right\}$$

Caso particular de gráfico de func.

Ej:

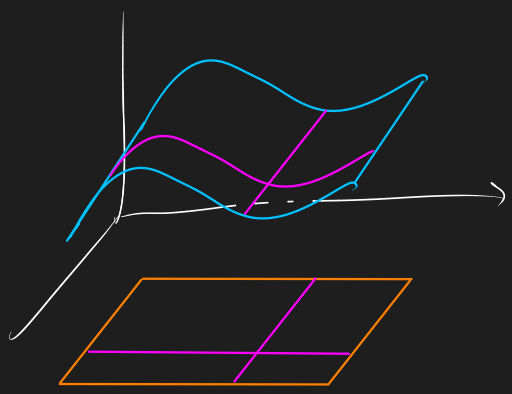
$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$

$S = Graf(f)$

$T : D \to S$

$T(x,y) = (x, y, f(x,y))$



" Hilos de una sábana"

Superficies de Revolución

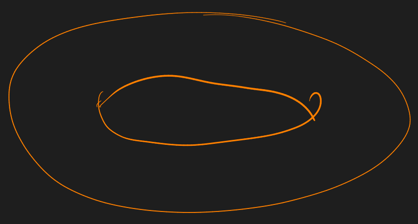
Ver notas de Consultas Prácticas #4 de hoy.

- Dos Parámetros:

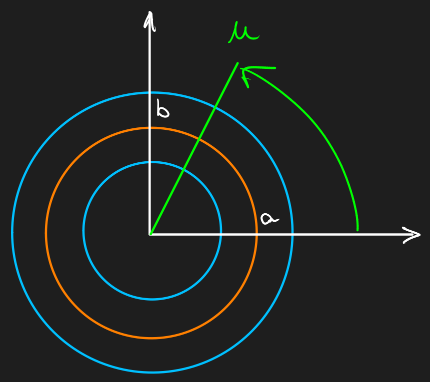
  1 para ubicar el punto sobre el cual está la circunferencia que se forma al revolucionar

  2. otro para indicar el ángulo de giro de esa circunferencia.

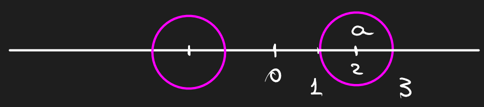
Rosquilla



Arriba :



Sección



Para cada $u \in [0, 2\pi)$ tenemos un círculo

Sus coordenadas son:

$$x = r(v) \cdot \cos(u)$$
$$y = r(v) \cdot \sin(u)$$
$$z = b \cdot \sin(v)$$

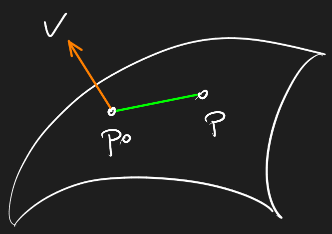
$$r(x) = a + b \cdot \cos(v)$$

$$T(u,v) = \big((a + b \cdot \cos v) \cdot \cos u \, , \, (a + b \cdot \cos v) \cdot \sin u \, , \, b \cdot \sin v \big)$$

Suavidad, tangentes, normales

Normal geométrica

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ sup



$p_0 \in S$

v un candidato a vector normal unitario

$$\lim_{p \to p_0} \left\langle \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, v \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ v se dice normal y el plano tangente a S en p_0 tiene ecuación:

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle (x,y,z) - p_0 , v \right\rangle = 0 \right\}$$

Teo:

Si $T : D \to S$ es regular $\to \begin{pmatrix} T_u \neq 0 \\ T_v \neq 0 \\ T_u \times T_v \end{pmatrix}$
y diferenciable

$T_u(u,v) = ($

$T_v(u,v) = ($

$\Rightarrow S$ tiene vector normal dado por

$$\frac{T_u \times T_v}{\| T_u \times T_v \|}$$

donde

$$T_u \times T_v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Área:

$T : D \to S$ regular

$$A(S) = \int_D \| T_u \times T_v \| \, du \, dv$$

Área de los paralelogramitos

Superficie de Nivel

$S : S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = a \}$

con $F \in C^1$,

$\nabla F(p) \neq \hat{0} \quad \forall p \in S$

$\Rightarrow S$ tiene normal dada por:

T.F.I

Si $S = F^{-1}(a)$

y $p \in S$ $\quad (F(p) = a)$

y $\nabla F(p) \neq \vec{0}$

$p = (x_0, y_0, z_0)$

$\Rightarrow \exists \; U \subset \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0, y_0)

$V \subset \mathbb{R}$ entorno de z

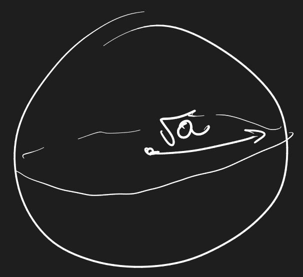
Ejemplo: esferas

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$S_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = a\}$

$a > 0$



$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\exists \; \varphi : U \to V$ diferenciable

tal que

$$S \cap (U \times V) = \text{Graf}(\varphi)$$