

Teórica 01 - Curvas

Dom 31/01/2021

Video: Prof. Guillermo Matera

Queremos integrar en subconjuntos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3
específicamente sobre
Objetos geométricos.

Def:

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una
función:

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$$

continua y sobreyectiva.



Ejemplo:

Si $\mathcal{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \}$, \leftarrow Circ. radio 1

entonces

\mathcal{C} es una curva pues:

existe una parametrización:

$$\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

que es continua y sobreyectiva.
(componentes continuas)

Observación:

Toda curva es un conjunto acotado.

(componentes acotadas por ser func. continuas sobre un intervalo acotado $[a, b]$)

entra en una bola

(\mathbb{C})

Observación:

Una curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Ejemplo de curva plana en \mathbb{R}^2

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua

\nwarrow gráfico

$$G_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), a \leq x \leq b \}$$

\uparrow Curva!

$$\sigma : [a, b] \rightarrow G_f$$

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$

Curva Simple y Abierta

No se corta a sí misma, o sea:

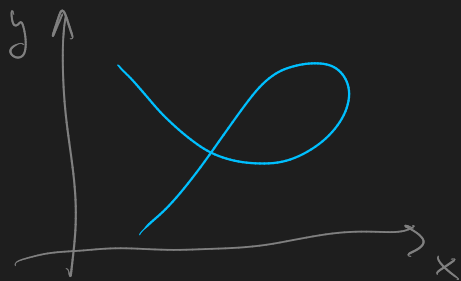
$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es Injective

Curva Simple y Cerrada

Se cierra, o sea,

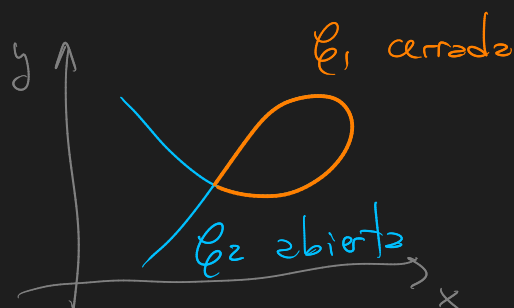
$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es Injectiva en $[a, b)$
con $\sigma(a) = \sigma(b)$

Curva ni Abierta ni Cerrada (aka Curva "NiNi")



Suponemos (y admitimos, pues es cierto)

- Toda curva puede escribirse como una unión finita de curvas abiertas y cerradas que se intersecan.



$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2$$

(deben coincidir en algún punto)

Reparametrización

Cambio de Parametrización

Sea \mathcal{C} una curva con param:

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$$

y sea h una biyección continua^{*}

$$h : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

^{*} Ejemplo

$$h(t) = 4t$$

$$h : [a, b] \rightarrow [4a, 4b]$$

Si definimos otra parametrización $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} : [c, d] \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(h^{-1}(\tau))$$

↑ Reparametrización de σ

Notar

esto implica la \exists y continuidad de h^{-1}

Recta tangente y Suavidad.

Curva suave: Admite recta tangente en cada punto

Def,

Sea \mathcal{C} una curva

y $P_0 \in \mathcal{C}$

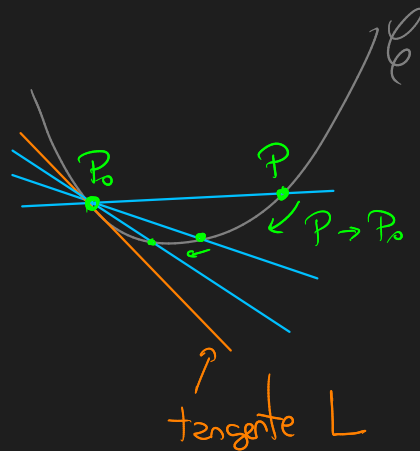
Una recta L que pasa por P_0 se llama

"tangente a \mathcal{C} en P_0 "

si es el "límite" de rectas secantes que pasan por P y P_0 , con $P \in \mathcal{C}$

Ángulo entre L
y la secante por
 P_0 y P

tíende a
cero
cuando
 $P \rightarrow P_0$



¿Cómo obtengo la recta tangente a una curva en t_0 ?

Derivo! Si $\neq \vec{0} \Rightarrow$ existe recta tangente
(c/comp)

Prop:

Si \mathcal{C} es una curva que admite param

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Injectiva y Diferenciable en $t_0 \in [a, b]$

tal que

$$\sigma'(t_0) := (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$$

entonces

ℓ tiene recta tangente en $P_0 = \sigma(t_0)$

con dirección $\sigma'(t_0)$.

Eq. de recta tangente L en P_0 :

$$L_{P_0} \equiv \lambda \cdot \sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$$

"Buenas Parametrizaciones":

Param. Regulares

Def:

Se denomina Parametrización Regular a

una parametrización $\sigma : [a, b] \rightarrow \ell$ de clase C^1

de una curva $\ell \subset \mathbb{R}^n$

con

$$\sigma'(t) \neq (0, 0, 0) \quad \forall t \in [a, b]$$

tal que

(1) σ es inyectiva en $[a, b]$

ó

(2) σ es inyectiva en $[a, b)$,

$$\sigma(a) = \sigma(b) \quad y$$

$$\sigma'(a) = \sigma'(b)$$

Obs:

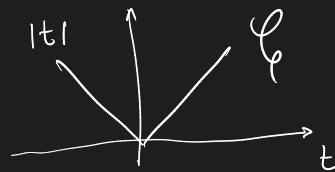
Una curva \mathcal{C} abierta o cerrada se dice **SUAVE** si admite una (~~alguna~~) parametrización regular.

Ejemplo:

Si σ parametriza a \mathcal{C} con

$$\sigma: [-1, 1] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\sigma(t) = (t, |t|)$$



Puedo decir que

σ no es regular (por $\sigma'(0)$ no existe)

PERO! no puedo decir lo mismo de \mathcal{C}

(Podría existir otra $\tilde{\sigma}$ que sea regular)

Reparametrizaciones y Orientación

Si $\tilde{\sigma}$ es reparametrización de \mathcal{C} , existen 2 casos

$$(1) \begin{cases} h(c) = a \\ h(d) = b \end{cases}$$

σ

$$(2) \begin{cases} h(c) = b \\ h(d) = a \end{cases}$$

Así

$$(1) \begin{cases} \tilde{\sigma}(c) = \sigma(a) \\ \tilde{\sigma}(d) = \sigma(b) \end{cases}$$

σ

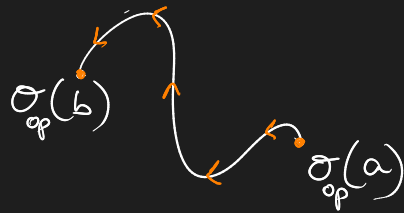
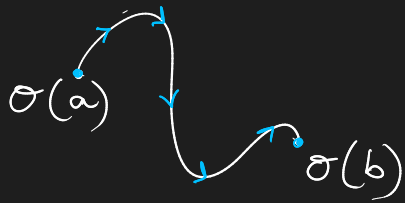
$$(2) \begin{cases} \tilde{\sigma}(c) = \sigma(b) \\ \tilde{\sigma}(d) = \sigma(a) \end{cases}$$

(1) " $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación de σ "

(2) " $\tilde{\sigma}$ invierte la orientación de σ "

Parametrizaciones estándar:

• Trayectoria opuesta de σ : σ_{op}



$$\sigma_{op}: [a, b] \rightarrow \ell$$

$$\sigma_{op}(t) = \sigma(a + b - t)$$

(t se mueve en $[a, b]$)

• "De Unidad"

$$\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \ell$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a + (b - a) \cdot t)$$

Preserva la orientación, cambia la velocidad:

? $\tilde{\sigma}$ recorre ℓ con velocidad canónica (velocidad 1)

- $S: \sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$
 $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$

Una repzren resulta de:

$\tilde{\sigma}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ↖ doble velocidad

$$\tilde{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$