Esteban Luna - Marzo 1

Ecuaciones diferenciales

$I \subset \mathbb{R}$, buscamos $y : I \to \mathbb{R}$

tal que $y'(x) = F(x, y(x))$

Ejemplo $y'(x) = k\, y(x)$

Modelo de "Recursos ilimitados"

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = \int k\, dx = kx + c$$

suponemos que podemos dividir por $y(x)$

$$= \ln(|y(x)|)$$

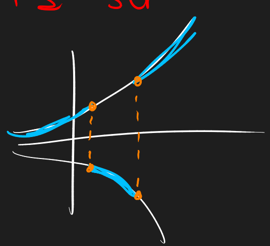
$$\Rightarrow |y(x)| = e^{k \cdot x} \cdot e^{c} \qquad e^{c} > 0$$

llamo

$e^{c} = A$ a la constante

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A \cdot e^{kx}}$$

• No podría ser



Pues debe y ser derivable!

Por eso Vicky habla de funciones definidas "en intervalos".

Problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = K \cdot y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = A \cdot e^{kx}$$

$$y(0) = A$$

$$y(x) = y_0 \cdot e^{kx}$$

Ecuaciones de variables separables / separadas

↳ Podemos separarlas en

$$\left(\text{funciones de } y(x)\right) = \left(\text{funciones de } x\right) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = f(y) \cdot g(x)$$

Ejemplos

$$\begin{cases} y' = x \cdot y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx$$

En "física" se podría pensar como

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 1$$

- Como cambio de variables:

$$u = y(x)$$
$$du = y'(x)\,dx$$

$$\ln(|y(x)|) = \frac{x^2}{2} + C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = A.e^{\frac{x^2}{2}} \qquad A \in \mathbb{R}$$

- Sol particular para condicion inicial $y(0) = 3$

$$\boxed{y(x) = 3.e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Ecuaciones homogéneas (grado 0)

Def:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice

homogénea de grado 0 si

$$F(\lambda x, \lambda y) = \underbrace{\lambda^0}_{\text{grado}}.F(x,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

Ejemplo

$$F(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Uso :

Si $y' = F(x,y)$ es homogénea de grado 0

$\Rightarrow$ $y = x \cdot u$ convierte la ecuación en variables separables.

derivo

$$y' = u + x \cdot u'$$

Por homogeneidad de F, "saco" x^0 de factor común

$$u + x \cdot u' = F(x, x \cdot u) = F(1, u)$$

¿Revisar luego?

$$x \cdot u' = F(1, u) - u$$

$$= \left(F(1,u) - u \right) \frac{1}{x}$$

Quedó de variables separadas

Ejemplo :

$$y' = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = F(x,y)$$

$y = x \cdot u$

$$u + x u' = \frac{x^2 \cdot u + x^2 u^2 + x^2}{x^2}$$

$$u + x u' = u + u^2 + 1$$

$$x \cdot u' = 1 + u^2$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, du = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\arctan(u) = \ln(|x|) + c$$

$$\frac{y(x)}{x} = \tan(\ln(|x|) + c)$$

$$\boxed{y(x) = x \cdot \tan(\ln(|x|) + c)}$$

Ejercicio 6 (de la guía 5)

$$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right) = G(x, y)$$

Veremos que un cambio de variable del tipo

$x = s - h$ $\quad h \in \mathbb{R}$ fijo

$y = u - k$ $\quad k \in \mathbb{R}$ fijo

permite transformarla en ecuaciones homogéneas

Obs:

$$u(s) = y(x(s)) + k$$

$$u(s) = y(s-h) + k$$

derivo

$$u'(s) = y'(s-h)$$

$$= y'(x)$$

$$\Rightarrow u'(s) = F\left(\frac{a(s-h) + b(u-k) + c}{d(s-h) + e(u-k) + f}\right)$$

$$= F\left(\frac{as - ah + bu - bk + c}{ds - dh + eu - ek + f}\right)$$

Queremos que

$$ah + bk = c$$
$$dh + ek = f$$

Resuelvo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Hay sol. solo cuando) es inversible:

Si $a.e \neq bd \Rightarrow$ hay solución.

Ej: $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$

Matriz:

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$ / Puedo usar la sustitución de arriba.

Buscamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h+k \\ h-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$h + k = 4 \Rightarrow h = 4 - k$

$h - k = -6 \Rightarrow h = k - 6$

$4 - k = k - 6$

$10 = 2k$

$5 = k$

$$\begin{cases} k = 5 \\ h = -1 \end{cases}$$

$$u'(s) = \frac{s+1+u-5+4}{s+1-u+5-6} = \frac{s+u}{s-u}$$

$\Rightarrow$ Ya tengo la func. homogénea

$\Rightarrow$ La transformo en variables separadas

$u = s \cdot v$

$$u' = v + s \cdot v'$$

$$v + s \cdot v' = \frac{s + sv}{s - sv} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$s \cdot v' = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$= \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{1+v^2} \cdot v' = \frac{1}{s}$$

Integro

$$\int \frac{1-v}{1+v^2} \cdot v' \, dv = \int \frac{1}{s} \, ds$$

$$\arctan(v) - \frac{\ln}{2}(1+v^2) = \ln(|s|) + C$$

- vuelvo a $v = \frac{u}{s}$

$$\arctan\left(\frac{u}{s}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{u}{s}\right)^2\right) = \ln(|s|) + C$$

- y ahora $x = s - h \Rightarrow s = x + h$

  $y = u - k \Rightarrow u = y + k$

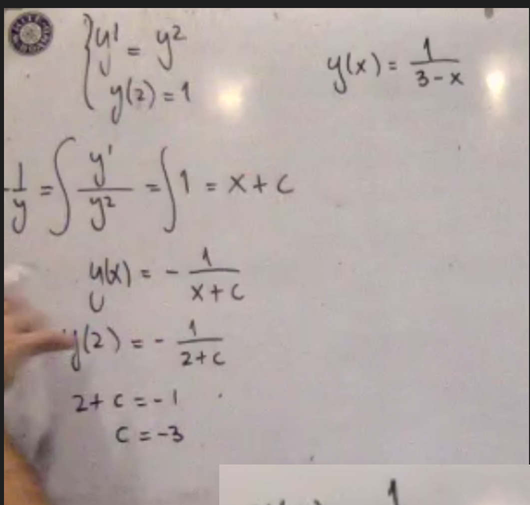
$$\arctan\left(\frac{y+k}{x+h}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+k}{x+h}\right)^2\right)=\ln(|x+h|)+C$$

$$\begin{cases} k=5 \\ h=-1 \end{cases}$$

Solución de Boquita ♡

$$\arctan\left(\frac{y+5}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right)=\ln(|x-1|)+C$$

Pregunta sobre solución maximal



En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decidir si son unicas. Que seria eso? esta al final del ej1