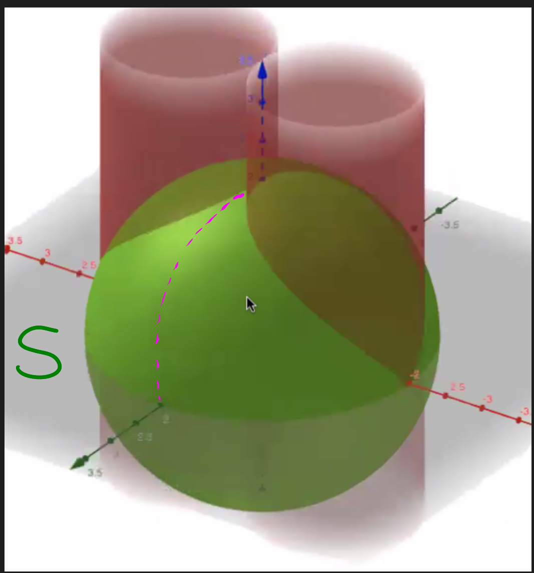
Eze Marte Feb 23/21

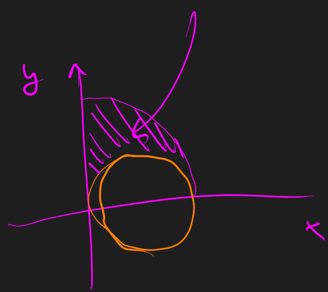
Ejercicios de Parcial

1) Cálculo de área

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \; , \; (x+1)^2 + y^2 \geqslant 1 \; , \; (x-1)^2+y^2 \geqslant 1 \}$$



- $\frac{1}{8} S$: trozo donde $x, y, z \geqslant 0$ ¡ !
- Se puede ver como gráfico sobre D



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 4 \; , \; (x-1)^2+y^2 \geqslant 1 \}$$

despejo z como

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Parametrización:

$$T : D \to \mathbb{R}^3$$

$$T(x,y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)$$

$$T_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)$$

$$T_y(x,y) = \left(1, 0, \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right)$$

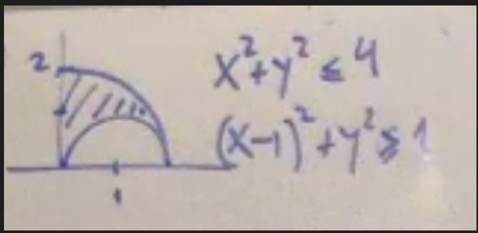
$$T_x \times T_y = \left(\frac{x}{\sqrt{\quad}}, \frac{y}{\sqrt{\quad}}, 1 \right)$$

$$\| T_x \times T_y \| \overset{\text{cuenta}}{=} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Resuelvo:

$$A(S) = \iint_D \| T_x \times T_y \| \, dx \, dy$$

$$= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dx\,dy$$



$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ restrinjo a un solo cuadrante

Polares

$x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$

sé que $r \leq 2$ por primera eq.

despejo la otra $r(\theta)$

$(x-1)^2 + y^2 \geq 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 \geq 1$ Polares

$r^2 - 2r \cdot \cos\theta \geq 0$

$r \geq 2 \cdot \cos\theta$

por abajo!

Resuelvo

$$\int_0^{\pi/2} \int_{2\cos\theta}^{2} \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta =$$

sale con sustitución y listo.

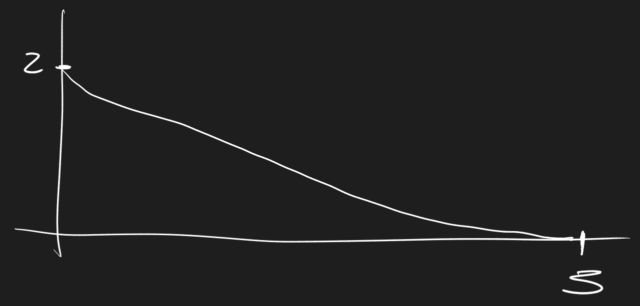
Otro: 2) ($\mathbb{R}^2$) $F(x,y) = (2y^2x^3 + 2y, x^4y + 2x)$
$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (5t, 2(t-1)^2 e^t)$
$\mathcal{C}$ = Curva dada y orientada por γ
Calcular $\int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s}$

inyectiva en x y en y $\therefore$ es simple

Calculo

$\gamma(0) = (0,2)$

$\gamma(1) = (5,0)$



Calculo el rotor

$$Q_x - P_y = 4x^3y + 2 - (4x^3y + 2) = 0$$

Como $F \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow F$ es conservativo

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} = f(5,0) - f(0,2)$$

donde $\nabla f = F$

$\therefore$ cuentas

$\downarrow$ obtengo

$$f(x,y) = \frac{x^4 \cdot y^2}{2} + 2xy$$

$$f(5,0) = 0$$

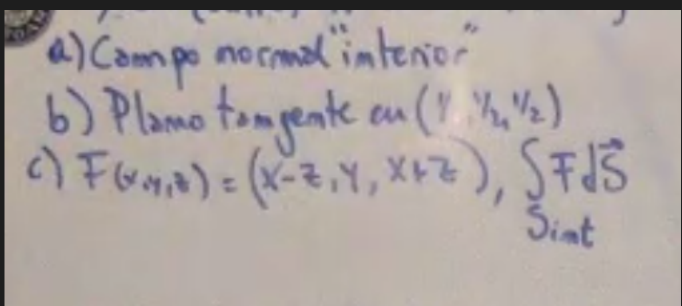
$$f(0,2) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s} = 0$$

También se podría haber usado Green y salía fácilmente (no siempre es el caso que anden "bien" los dos)

3) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y \ , \ y \leq 9\}$

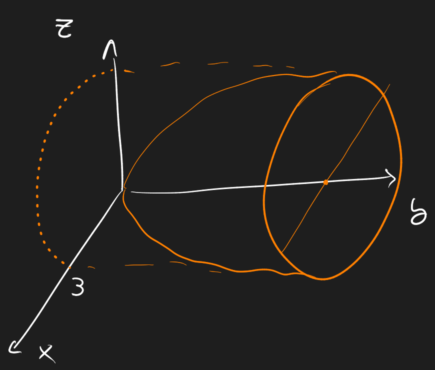
a)



a) Campo normal "interior"

b) Plano tangente en $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $F(x,y,z) = (x-z, y, x+z)$, $\iint_{S_{int}} F \, d\vec{S}$



a) Parametrizaciones

circunferencia en y

$$T(x,z) = (x,\ x^2 + z^2,\ z)$$

$$T : D \to \mathbb{R}^3$$

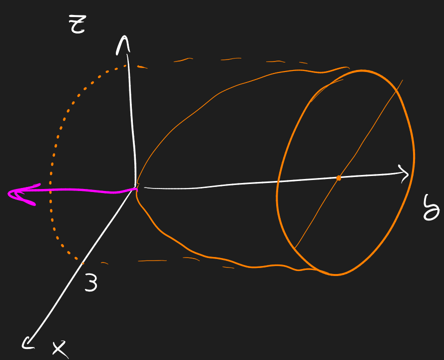
$$D = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \ ,\ x^2 + z^2 \leq 9 \}$$

$$T_x = (1,\ 2x,\ 0)$$

$$T_z = (0,\ 2z,\ 1)$$

$$T_x \times T_y = (2x,\ -1,\ 2z)$$

$T_x \times T_y (0,0) = (0,-1,0)$



$$\eta(x,y,z) = \frac{(-2x,\ 1,\ -2z)}{\sqrt{4x^2 + 4z^2 + 1}}$$

Otra opción

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta,\ r^2,\ r \cdot \sin\theta)$$

$r \in [0, 3]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$T_r = (\cos\theta, 2r, \sin\theta)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, 0, r \cdot \cos\theta)$$

$$T_r \times T_\theta = (2r^2 \cos\theta, -r, 2r^2 \cdot \sin\theta)$$

Notar que para $r = 0$

$$T_r \times T_\theta (0,\theta) = (0,0,0) \quad !$$

Pero eso es porque no es inyectiva en $r = 0$

Si tomo otro r, veo que y es negativa.

Otra opción

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$G(x,y,z) = y - x^2 - z^2$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = 0, \ y \leq 9\}$$

$$\nabla G(x,y,z) = (-2x, 1, -2z)$$

que es lo que buscaba

hacia adentro, pero no importa para el plano

b) $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\eta(P)=(-1,1,-1)$ Op

Π: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)-(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (-1,1,-1)\rangle = 0\}$

$$-(x-\tfrac{1}{2})+(y-\tfrac{1}{2})+(-1)(z-\tfrac{1}{2})=0$$

$$\boxed{y = x+z-\tfrac{1}{2}}$$

$$\Pi : \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z)-(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), (-1,1,-1)\rangle = 0\}$$

Opción 2: Taylor

$$y(x,z) = x^2+z^2$$

$$y(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

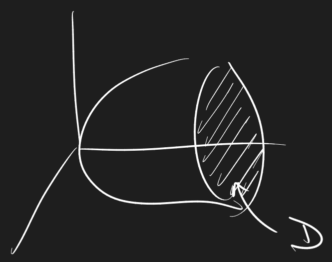
$$y_x(x,z) = 2x$$

$$y_z(x,z) = 2z$$

$$T(x,z) = y(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + y_x(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + y_z(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})(z-\tfrac{1}{2})$$

$$= x+z-\tfrac{1}{2} \quad //$$

c) $F(x,y,z) = (x-z,\ y,\ x+z)$



$\operatorname{div} F = 3$

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ,\ x^2 + z^2 \leq 3 ,\ y = 9 \}$

$$\int_{S_{int}} F\, d\vec{S} + \int_{D} F \cdot d\vec{S} = - \iiint_{\Omega} 3\, dV$$

$\partial\Omega = S \cup D$

cilindricas

$$\iiint_{\Omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^{3} (9 - r^2) \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{81}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 81 \;//$$

$$\iint_{D} F \cdot d\vec{S} = \iint_{D} \langle (x-z, y, x+z), (0,-1,0) \rangle \, dS$$

$$= \iint_{D} -y \, dS$$

Pero y está fijo

$$= -9 \iint_{D} dS$$

$$\underbrace{\iint_{D} dS}_{\text{Área } D \,=\, \pi \cdot 9}$$

$$= -81\pi$$

$$\int_{S_{int}} F \, d\vec{S} + (-81\pi) = -\frac{3}{2}\pi \cdot 81$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{S_{int}} F \, d\vec{S} = -\frac{81}{2}\pi}$$

Opción 2: Cálculo directo.

$T : (x, z) = (x, x^2 + z^2, z)$ param.

$$\int_{S_{int}} F\, d\vec{s} = \iint_D \left\langle \left(x-z,\ x^2+z^2,\ x+z\right), \left(-2x,\ 1,\ -2z\right) \right\rangle dx\,dz$$

$$= \iint_D -2x^2 + 2\cancel{xz} + x^2 + z^2 - 2z^2 - 2\cancel{xz}$$

$$= \iint_D -x^2 - z^2\ dx\,dz$$

Polares

Jacobiano

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 \cdot r \cdot dr\,d\theta$$

$$= -2\pi \cdot \frac{81}{4}$$

$$\boxed{\int_{S_{int}} F\, d\vec{s} = -\frac{81\pi}{2}}$$