Eze

Luna Mar 8

Resolución de Sistemas Lineales, de coeficientes constantes, homogéneos:

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

en el caso de 1 autovalor doble λ

- No el caso

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ pues es trivial:

Si $A = \lambda I \Rightarrow X' = \overset{A}{\widetilde{\lambda I}}\, X(t)$

$X' = \lambda X(t)$

$X = \frac{1}{\lambda} \cdot X'(t)$

- Sino el caso con 1 autovalor doble y A no diagonalizable

Ej:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} X(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 \\ 1 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)^2$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = a$

Auto vector:

$v \neq \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda - a|_{\lambda = a}$

Tengo 1 autovector

$$X_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v} e^{\overbrace{a}^{\lambda} t}$$

Primera solución

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

siempre queda $\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$?

Para la otra solución

$$X_1'(t) = a \cdot X_1(t) \Rightarrow X_1(t) = C_1 \cdot e^{at}$$

$$X_2'(t) = C_1 \cdot e^{at} + a X_2(t) \iff$$

$$\iff \boxed{X_2'(t) - a X_2(t) = C_1 e^{at}}$$

$$e^{-at}\left(x_2' - a x_2\right) = C_1$$

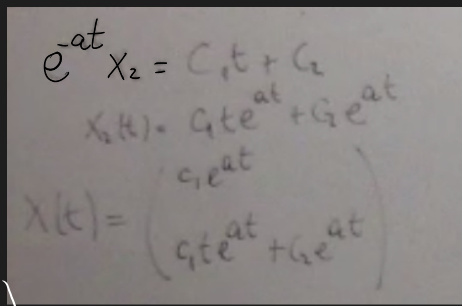
integro wrt. t

$$\left(e^{-at} x_2\right)' = C_1$$

(con regla de la cadena vuelvo arriba)

integro wrt. t

$$e^{-at} X_2 = C_1 t + C_2$$


$e^{-at} X_2 = C_1 t + C_2$

$X_2(t) = C_1 t e^{at} + C_2 e^{at}$

$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_1 t e^{at} + C_2 e^{at} \end{pmatrix}$

$$X_2(t) = C_1\, t . e^{at} + C_2 . e^{at}$$

Junto todo

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{at} \\ C_1 . t . e^{at} + C_2\, e^{at} \end{pmatrix}$$

$$= C_1 . e^{at}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + C_2 . e^{at}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base :

$$\mathcal{B}_S = \left\{ e^{at}\left(w + t . v\right),\ e^{at}\, V \right\}$$

En general :

$$X'(t) = A\, X(t)$$

con 1 autoval. doble λ y sólo 1 auto vector V

Una solución :

$$X_1(t) = V \cdot e^{\lambda t}$$

La otra será de la forma:

$$X_2(t) = e^{\lambda t}(w + tV)$$

$$X_2'(t) = \lambda . e^{\lambda t}(w + tV) + e^{\lambda t} V$$

$$A X(t) = e^{\lambda t} A w + t e^{\lambda t} \lambda V$$

Necesitamos que:

$$A w = \lambda w + V$$

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{atenti al orden!}} w = V \quad \leftarrow \text{Siempre tiene solución!}$$

(Prueba en apunte)

Ejemplo:

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - X_2 \\ X_2' = X_1 + 3X_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores

luego uso "$(A - \lambda I) w = v$" (notar orden!)

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 2)^2$$

$\lambda = 2$ doble

Calculo auto vector :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Primera solución

λ encontrado

$$\hookrightarrow \quad X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para la otra solución :

quiero el w que satisfaga : $(A - \lambda I) w = v$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

λ encontrado

$$X_2(t) = e^{2t} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v} \right)$$

Fin del caso no diagonalizable.

Resolución de Sistemas Lineales, de coeficientes constantes, no homogéneos:

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n}$$

Recordar

Si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base de soluciones de $X' = A\,X$ (homogéneo)

Matriz fundamental:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, X_i(t)$$

es solución del $\underline{\text{no}}$ homogéneo si

$$\boxed{Q(t)\, C'(t) = B(t)}$$

Ejemplo:

$$x_1' = -x_2 + 2$$

$$x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Soluciones del homogéneo:

$$X' = AX$$

Autovalor:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2) \leftarrow \lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = 2$$

Auto vectores:

autovector autoespacio

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Método de Variación de las constantes

Buscamos

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot X_1(t) + C_2(t) \cdot X_2(t)$$

tal que

$$X'_p = A X_p + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Hay que resolver:

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$F_2 + 2F_1$

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

$$C_1'(t) \cdot e^t + 0 = t + 4$$

$$C_1'(t) = e^{-t} \cdot t + 4e^{-t}$$

integro

$$C_1(t) = \int e^{-t} \cdot t + 4e^{-t} \, dt$$

$$= \int e^{-t} \cdot t \, dt + \int 4e^{-t} \, dt$$

$$C_1(t) = \int te^{-t} + 4\int e^{-t}$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} - 4e^{-t} = \boxed{-e^{-t}(t+5) = C_1(t)}$$

no uso const., pues busco "alguna".

Volviendo

Reemplazando C_1' en

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

Obtengo

$$e^t C_1'(t) - e^{2t} C_2'(t) = 2$$

$$t + 4 - e^{2t} \cdot C_2'(t) = 2$$

$$C_2'(t) = (t+2)\cdot e^{-2t}$$

Integro

$$C_2(t) = \int (t+2)\cdot e^{-2t}\, dt$$

partes

$$= -(t+2)\cdot \frac{e^{-2t}}{2} + \int \frac{e^{-2t}}{2}\, dt$$

$$= -e^{-2t}\cdot \frac{(t+2)}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$\boxed{C_2(t) = -e^{-2t}\ \frac{2t+5}{4}}$$

Variación de las constantes

- Buscamos solución particular $X_p(t)$

$$X_p(t) = C_1(t)\, X_1(t) + C_2(t)\, X_2(t)$$

$$X_p(t) = -e^{\cancel{-t}}(t+5)\cdot e^{\cancel{t}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + -\frac{e^{\cancel{-2t}}}{4}(2t+5)\cdot e^{\cancel{2t}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = (t+5)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{2t+5}{4}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

notar que es un polinomio.

acomodándola :

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,X_p(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A \text{ (constante)}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{X_p(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol final será :

$$\boxed{X = A\,X_1(t) + B\,X_2(t) + X_p(t)}$$

Observación :

Ecuaciones de orden 2 :

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$$

Podemos traducirlo a un sistema de 2x2

$\Rightarrow$ el polinomio característico de la matriz

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b}$$

Recordar!

siempre así!

Soluciones :

$$X(t) = e^{\lambda t} \quad \text{con } \lambda \text{ raíz de } P$$

$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \,,\; \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Cuando tenga raíz doble :

$$e^{\lambda t}, \; t \cdot e^{\lambda t}$$