

## Coeficientes Indeterminados

Ecuación de orden 2,  
coeficientes constantes,  
no homogénea.

$$X'' - 3X' + 2X = f(t)$$

Primero resolvemos homogénea

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

$$\text{Base de Sol}_H : \{e^t, e^{2t}\}$$

Distintos ejemplos para  $f(t)$

$$1) X'' - 3X' + 2X = e^{5t}$$

(No quiero usar Método de Var. de Const. :-)

Propongo:

$$\bullet X(t) = a \cdot e^{5t}$$

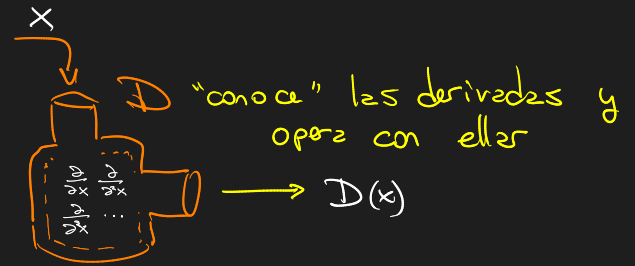
Calculo

- $x'(t) = 5a \cdot e^{st}$

- $x''(t) = 25a \cdot e^{st}$

Defino  $D(x) = x'' - 3x' + 2x$

↑ Operador  
Diferencial  
"Maguinite"



- $x(t) = a \cdot e^{st}$

- $x'(t) = 5a \cdot e^{st}$

- $x''(t) = 25a \cdot e^{st}$

$\Rightarrow D(x) = e^{st} \cdot a(25 - 15 + 2)$   
 $= a \cdot e^{st} \cdot 12$

Como quiero que ese 12  
se vaya, elijo

$$a = \frac{1}{12}$$

Sol particular

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{12} \cdot e^{st}$$

Caso 2: es uno de los elems de la base!  $B_+ = \{e^t, e^{2t}\}$

$$D(x) = e^{2t}$$

con  $D(x) = x'' - 3x' + 2x$   
(mismo de antes)

Propongo

Polinomio de mayor grado que enter

$$X(t) = (at + b) e^{2t}$$
$$= at \cdot e^{2t} + b \cdot e^{2t}$$

$$D(x) = D(at \cdot e^{2t}) + D(b e^{2t})$$

me que do con esta parte.

$$= 2b e^{2t} - 6b e^{2t} + 12b e^{2t}$$
$$= 8b e^{2t} \leftarrow \text{no me sirve!}$$

por no aporte nada.

$$\bullet X(t) = at \cdot e^{2t}$$

$$\bullet X'(t) = at \cdot e^{2t} + at \cdot 2e^{2t}$$
$$= a \cdot e^{2t} (1 + 2t)$$

$$\bullet X''(t) = 2a e^{2t} + a(1 + 2t) \cdot 2 \cdot e^{2t}$$
$$= 2a e^{2t} (1 + 1 + 2t)$$
$$= 2a e^{2t} (2 + 2t)$$
$$= 4a e^{2t} (1 + t)$$

$$D(x) = x'' - 3x' + 2x \downarrow$$

$$D(x) = a \cdot e^{2t} (4t + 4 - 3 - 6t + 2t)$$

$$= a \cdot e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \text{elijo } a = 1$$

Quiero!

Sol. Particular

$$X_p(t) = 1 \cdot t \cdot e^{2t}$$

$$X_p(t) = t \cdot e^{2t}$$

Caso

$$3) \quad x'' - 3x' + 2x = e^t \quad \leftarrow \text{elem. de la base de sds. del H,}$$

Propongo

averiguar ...

$$x(t) = a t \cdot e^t \Rightarrow a = -1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Tarea} \\ \text{Resolver} \end{array} \right)$$

Sol:

$$x(t) = -t \cdot e^t$$

Cambio de Ecuación

$$x'' - 2x' + x = e^t$$

Pero!

Tiene homogéneo

$$\{ e^t, t \cdot e^t \}$$

De la pista de un  
Autovalor doble!

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

- Si: propongo  $a \cdot e^t$   $\times$  no anda!  $\in \text{Base}_H$  Pues
- Si: propongo  $a t \cdot e^t$   $\times$  no anda!  $\in \text{Base}_H$

$\Rightarrow$  Propongo

$$x(t) = at^2 \cdot e^t$$

$$x'(t) = 2at \cdot e^t + at^2 \cdot e^t$$

$$= a \cdot e^t (2t + t^2)$$

$$x''(t) = a \cdot e^t (t^2 + 4t + 2)$$

$$x'' - 2x' + x = a e^t (t^2 + 4t + 2 - 4t - 2t^2 + t^2)$$

$$= a \cdot e^t \cdot 2 \quad \begin{matrix} = e^t \\ \uparrow \\ \text{quiero} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Ahora si me dan  $\swarrow$  otra base!

$$x'' - 2x' + x = t \cdot e^t$$

$$x(t) = at^3 \cdot e^t$$

$$\begin{matrix} \text{averlar} \\ \Rightarrow \end{matrix} a = \frac{1}{6}$$

Otra ecuación :

dos "partes"

$$x'' - 2x' + 5x = t + \cos t$$

Homogéneo

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Raíces

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1+2i \\ \searrow 1-2i \end{matrix}$$

$$B_{\text{sh}} = \{e^t \cdot \cos 2t, e^t \cdot \sin 2t\}$$

Si logramos

$$D(x_1) = t$$

$$D(x_2) = \cos t$$

$$\Rightarrow D(x_1 + x_2) = t + \cos t$$

Cero  $D(x) = t$  :

Proponemos (viendo grados de derivación y  $t$ )

$$\downarrow$$
$$\bullet \quad x(t) = at + b$$

$$\bullet \quad x'(t) = a$$

$$\bullet \quad x''(t) = 0$$

$$D(x) = x'' - 2x' + 5x = t$$

$$\Rightarrow D(x) = -2a + 5at + 5b$$

$$= \underbrace{5at}_{\text{con } t} + \underbrace{5b - 2a}_{\sin t} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5b - 2a = 0 \\ 5a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\Downarrow \\ b = \frac{2}{25}$$

Sol. de la primera parte

$$X(t) = \frac{t}{5} + \frac{2}{25}$$

verifico

$$X'' - 2X' + 5X = 0 - \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{t}{5} + 5 \cdot \frac{2}{25} \\ = t \quad \checkmark$$

Caso

$$D(x) = \cos t :$$

Propongo

$$\bullet X(t) = a \cdot \cos t + b \cdot \sin t$$

$$\bullet X'(t) = -a \sin t + b \cos t$$

$$\bullet X''(t) = -a \cos t - b \sin t$$

✓ Pienso incluir derivadas y der. 2°  
por lo que me conviene usar  
tanto  $\cos t$  como  $\sin t$

$$\begin{aligned} X(t) &= a \cos t + b \sin t \\ X'(t) &= -a \sin t + b \cos t \\ X''(t) &= -a \cos t - b \sin t \end{aligned}$$

$$D(x) = X'' - 2X' + 5X = \cos t$$

$$= -a \cos t - b \sin t - 2(-a \sin t + b \cos t) + 5(a \cos t + b \sin t)$$

$$= \cos t (-a - 2b + 5a) + \sin t (-b + 2a + 5b)$$

$$= \cos t (4a - 2b) + \sin t (2a + 4b)$$

$$= \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 4a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2b \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$-8b - 2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{10}$$

Finalmente

$$D(x) = t + \cos t$$

tiene sol. particular

$$\text{Cero } D(x) = \cos t$$

$$X_p(t) = \underbrace{\frac{2}{25} + \frac{t}{5}}_{\text{Cero } D(x) = t} + \frac{1}{5} \cos t - \frac{1}{10} \sin t$$

Cambio de escenario:

Ecuación de orden 2, coeficientes no constantes

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

- No podemos resolver lo to do! (no hay método)

Problema accesible

- Si  $\{y_1, y_2\}$  sol. del problema,

dada  $y_1 \Rightarrow$  hallar  $y_2$



Método general

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$= (y_1 y_2' - y_2 y_1')(x)$$

6. Qué pasa si lo derivamos? (porque sí)

$$W'(x) = \cancel{y_1'} y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}$$
$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$= y_1 (-a y_2' - b y_2) - y_2 (-a y_1' - b y_1)$$

$$= -a y_1 y_2' - b y_1 y_2 + a y_1' y_2 + b y_2 y_1$$

$$= -a (y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$= -a W$$

Entonces:

$$W' = -a W$$

$$W(x) = e^{-A(x)}$$

$$\text{con } A'(x) = a(x)$$

Finalmente

$$e^{-A(x)} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

de 1<sup>er</sup> orden,

con  $y_1$  conocida,

$y_2$  = se encuentra

Nota

• A esto se le llama "reducción del orden"

(pues pasamos de orden 2 a ecuaciones de orden 1)

Ejemplo :

$$y'' - \frac{1}{x} y' - 4x^2 y = 0 \quad \text{en } (0, +\infty)$$

Nos dan :  $y_1(x) = e^{x^2}$

• 1<sup>o</sup> verifico :  $y_1'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

que sea  
sol.

$$y_1''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$$= 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}$$

$$y_1'' - \frac{1}{x} y_1' - 4x^2 y_1 = e^{x^2} (2 + 4x^2 - 2 - 4x^2) = 0 \quad \checkmark$$

Calcula  $W$

$$W = e^{\overbrace{-A(x)}^{-\int -\frac{1}{x} dx}}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$= e^{\ln x}$$

$$W = x$$

Tenemos

$$e^{-A(x)} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$x = e^{x^2} \cdot y_2' - 2x \cdot e^{x^2} \cdot y_2$$

divido por  $e^{x^2}$

$$y_2' - 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-x^2}$$

mult por  $e^{-x^2}$

$$e^{-x^2} y_2' - e^{-x^2} \cdot 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-x^2} \cdot e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} y_2' - e^{-x^2} \cdot 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-2x^2}$$

regla de la cadena (al revés)

$$(e^{-x^2} \cdot y_2)' = x \cdot e^{-2x^2}$$

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ \text{busco } g(x) / \\ g y' + g p y &= g q \\ (gy)' &= g q \\ g' &= g p \\ g &= e^{\int p(x) dx} \end{aligned}$$

$$e^{-x^2} \cdot y_2 = \int x \cdot e^{-2x^2} dx$$

$$= \frac{e^{-2x^2}}{-4} + C$$

$$y_2 = \frac{e^{-x^2}}{-4} + C \cdot e^{x^2}$$

↑  
Solución  
de

Suma de sol. de un sist.  
lineal, es solución!

me quedo solo con

$$y_2(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{x^2}$$

Pero como es un sistema lineal, la constante mult. no es  
necesaria.

Sol

$$y_2(x) = e^{x^2}$$

Remember

$$W' = -a \cdot W$$

$$W = e^{-\int a(x) dx}$$