Integrales de Sup

$\big\downarrow$ Orientación

Flujo

Integrales de Superficie

$$T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longrightarrow T(u,v)$$

Parametrización regular

escalar

$$\int_S f \cdot dS = \iint_D f \circ T(u,v) \cdot \| N(u,v) \| \, du \, dv$$

S grande

$$N(u,v) = T_u(u,v) \times T_v(u,v)$$

Ej: Sea S la superficie dada por

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

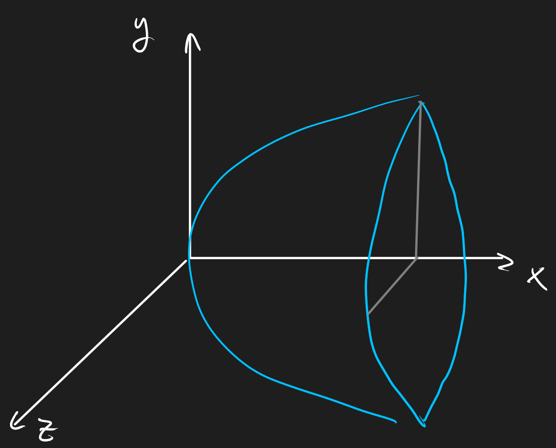
Hallar la masa y la densidad si la densidad es:

$\delta(x,y,z) = y$

quiero :

$$\int \delta \cdot ds = ?$$

Qué es y cómo parametrizo?:



Como gráfico de una función:

$$T(x,z) = (x,\ x^2+y^2\ ,\ z)$$

Pero el Dominio:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + z^2 \leq 4\}$$

Otra idea : Polares

$\sqrt{4} = 2$

$$x = r \cdot \cos\theta$$
$$z = r \cdot \sin\theta \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$
$$y = r^2$$

$$T(r,\theta) = \left(r\cdot\cos\theta,\ r^2,\ r\cdot\sin\theta \right)$$

con

$$T : [0,2] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Calculemos $N(u,v)$

$$T_r\ (r,\theta) = \left(\cos\theta,\quad 2r,\ \sin\theta \right)$$

$$T_\theta\ (r,\theta) = \left(-r\cdot\sin\theta,\ 0,\ r\cdot\cos\theta \right)$$

$$\left(T_r \times T_\theta \right)_{(r,\theta)} = \left(2r^2\cos\theta,\ -r,\ 2r^2\cdot\sin\theta \right)$$

$$\| N(u,v) \| = \sqrt{4r^4\cdot\cos^2\theta + r^2 + 4r^4\cdot\sin\theta}$$

$$= \sqrt{4r^4 + r^2}$$

$$= r\sqrt{4r^2 + 1}$$

Calculo integ.

$$\int_S \sigma\cdot ds = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\cdot\sqrt{4r^2+1}\ dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\cdot d\theta\cdot\int_0^2 r^2\cdot r\cdot\sqrt{4r^2+1}\ dr$$

Orientabilidad

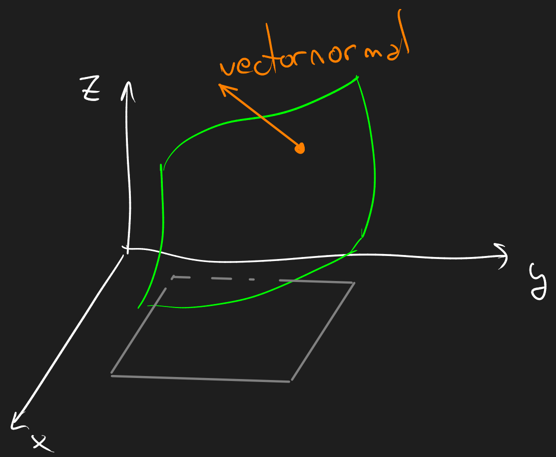
Una superficie S se dice orientable

si existe un campo normal unitario y continuo

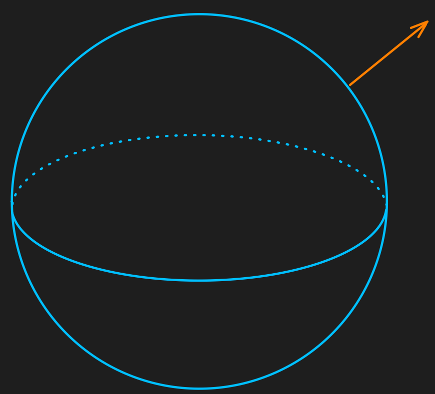
$N : S \to \mathbb{R}^3$ continuo

Ej: Gráfico de una función suave

$F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



Ej: Esfera :



Una superficie se dice orientada si es orientable y se le fija una orientación.

Una parametrización induce una orientación en una superficie (la orientación dada por $N(u,v)$)

Integrales de Flujo

S una superficie regular orientada.

$$\begin{aligned} T : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longrightarrow T(u,v) \end{aligned}$$

Param regular de S

$F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo.

campo vectorial "velocidad en cada punto"

"que atraviesa la malla"

$$\int_S F \cdot d\vec{s} \overset{⊛}{=} \pm \iint_D \langle F \circ T(u,v) , N(u,v) \rangle \, du \, dv$$

⊛ Donde el signo es

+ : si la orientación de T respeta la de la superficie
− : si no respeta

$$= \int_S \langle F, \check{N} \rangle \, ds$$

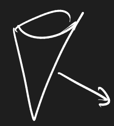
$$\check{N} = \frac{N}{\|N\|}$$

P2 E20) • Sea S la parte del cono

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad z \in [1,2]$$

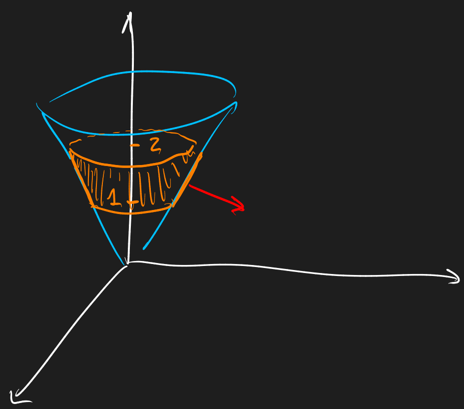
• $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$

Orientada con la normal hacia afuera del cono



Calcular $\int_S F \cdot d\vec{s}$

Parametrizo



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = r \end{cases}$$

$T : [1,2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} /$

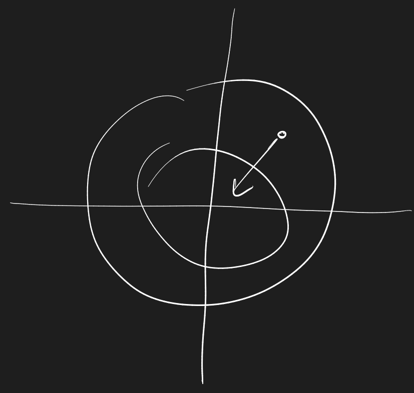
$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta, r)$$

$$T_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

$$T_\theta(r,\theta) = (-r \cdot \sin\theta, r \cdot \cos\theta, 0)$$

$$T_r \times T_\theta = (-r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ r)$$

¿Qué orientación tiene?



$$N(r,\theta) = \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{-r\cdot\cos\theta}_{-x},\ \underbrace{r\cdot\sin\theta}_{-y}}_{\text{hacia el centro}},\ \underbrace{\underbrace{r}_{z}}_{\text{hacia arriba}}\right)}_{\text{hacia adentro del cono!}}$$

Nota →

✗ No indica la orientación que quiero

Cálculo integral de Flujo

$$\int_S F\, d\vec{S} = -\iint_D \langle F\circ T(r,\theta),\ N(r,\theta)\rangle\, dr\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_1^{2} \left\langle (r^2\cdot\cos^2\theta,\ r^2\cdot\sin^2\theta,\ r),\ (-r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta,\ r)\right\rangle\, dr\, d\theta$$

$$= -\left[\int_1^2 r^3\cdot dr\right]\cdot\int_0^{2\pi} -\cos^3\theta - \sin^3\theta + 1\ d\theta$$

$= \text{cuentas} \ldots = -\frac{15}{2}\pi$ //