Esteban

Mar 02

Ecuaciones Exactas

Vamos a estudiar expresiones del tipo

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

con $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo C^1

así como está, no es un objeto conocido

Nos permitimos manipular (divido por dx)

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

Eq dif bien definida!

Suponiendo que una relación funcional

$$\boxed{y = y(x)}$$

Queremos

Vemos que

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

será una forma de escribir la Eq. dif de arriba

Supongamos además que

$\exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / de Clase C^2

$$\nabla F = (M, N), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\ \ ) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x, y(x))\right) = 0 \leftarrow \text{?}$$

qué hace acá ?

Regla de la Cadena

F es constante sobre la curva

$$y = y(x)$$

$$F(x, y(x)) = C \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R}$$

Las soluciones de (1) y (2) están dadas en forma Implícita por la ecuación:

$$F(x,y) = C$$

Obs:

Si $\nabla F = (M, N)$

$$M_y = F_{xy} = F_{yx} = N_x$$

Ésto funcionará como test siempre que se cumple que

Def

Una ecuación del tipo

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

se dice EXACTA si

$$\exists\, F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^2 /$$

$$\nabla F = (M, N)$$

Teorema

Sean $M, N, M_y, N_x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

continuas,

Ω simplemente conexo

Vale que:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \iff M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

Ej:

1) $e^y . dx + (x.e^y + 2y)\,dy = 0$

$\left(\begin{array}{c}\text{Recordar que esto pide soluciones de} \\ e^y + (x.e^y + 2y).y' = 0\end{array}\right)$

Es exacta?

$M(x,y) = e^y \Rightarrow M_y = e^y$

$N(x,y) = x.e^y + 2y \Rightarrow N_x = e^y$

$M_y = N_x$ ✓

Si! es exacta.

Buscamos la $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ /

$$\nabla F = (M, N)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^y \Rightarrow F(x,y) = x \cdot e^y + h(y)$$

Ahora

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x \cdot e^y + h'(y) = x \cdot e^y + 2y$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x \cdot e^y + y^2 \quad + C$$

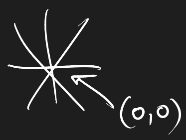
(pero abajo se va)

Las soluciones son las curvas de nivel

Sol:

$$x \cdot e^y + y^2 = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Ejercicio de la práctica

"Todas las  "

$$x + y \cdot y' = 0$$

se puede ver que es exacta

$$F(x,y) = \boxed{x + y \cdot y'} \quad \text{Seguir.}$$

no sé, borró

2) $\cos(x)\sin(x) - xy^2 + y(1-x^2)y' = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = \cos(x)\sin(x) - xy^2 \Rightarrow M_y = -2xy \\ N(x,y) = y(1-x^2) \Rightarrow N_x = -2xy \end{array}\right\} \checkmark$$

$\Rightarrow$ es exacta!

Buscar $F \,/\, \nabla F (M, N)$

$\downarrow$ cuentas

Soluciones

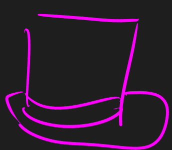
$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

3) ejemplo de <u>no</u> exacta!

$$y\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = y \Rightarrow M_y = 1 \\ N(x,y) = x^2y - x \Rightarrow N_x = 2xy - 1 \end{array}\right\} \times$$

<u>no</u> es exacta!

Truquito 

Multiplicar por algo

uso

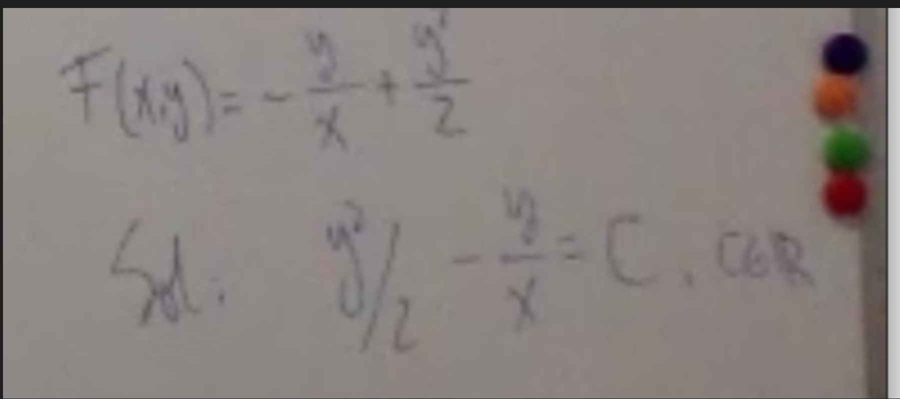
$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$ ← Factor integrante

$$\mu \cdot M\,dx + \mu \cdot N\,dy = 0$$

$$\frac{y}{x^2}\,dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{M}(x,y) = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \tilde{M}_y = \frac{1}{x^2} \\ N(x,y) = y - \frac{1}{x} \Rightarrow \tilde{N}_x = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \checkmark$$

es exacta!



Idea para encontrar Factor Integrante

Ecuación

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Queremos hallar $\mu(x,y)$ /

$$\mu M dx + \mu . N . dy = 0$$ sea exacta

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

Como esto es muy complicado y general:

Hago una suposición Grande!

supongo $\mu = \mu(x)$ (no depende de y)

$\Rightarrow$ desaparece μ_y

$$\Rightarrow \quad \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\mu\left(M_y - N_x\right) = \mu_x N$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \underbrace{\frac{\left(M_y - N_x\right)}{N}}$$

solo depende de x

solo debe depender de x!

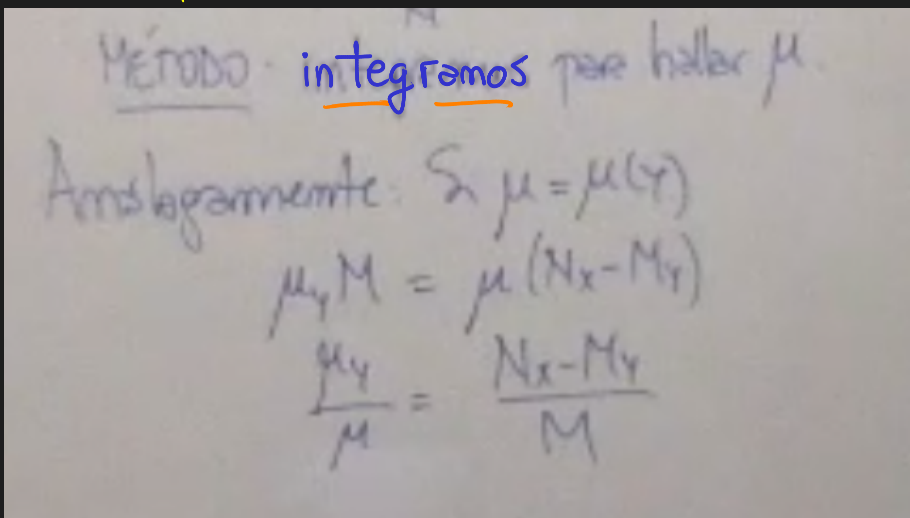
Sirve para dos cosas:

Test y Método

- Test: Si $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ depende sólo de x,

entonces:

- Método



Ejemplo

$$\left(2x^2 + y\right) dx + \left(x^2 y - x\right) dy = 0$$

$M_y = 1$ no es exacta!

$$N_x = 2xy - 1$$

Probamos si $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy-1)}{x(xy-1)} = \frac{2(1-xy)}{x(xy-1)}$$

$$= -\frac{2}{x} \quad \checkmark$$

solo depende de x !

$$\frac{\mu_x}{\mu} = -\frac{2}{x}$$

$$\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x^2}}$$

factor integrante

Ecuación queda:

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

$$F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$$

Sol

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Otra alternativa

- Supongo estructura del factor integrante
  (lo dan de dato)

prod.

Supongo $\mu(x,y) = g(x \cdot y)$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ej $\quad g(t) = t^2+1$

$\mu(x,y) = (xy)^2 + 1$

Fin //