Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Verano 2021

**Práctica 2: Integrales de superficie**

**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar.

(a) $r = r_0, \quad r_0 > 0$ constante.

(b) $\varphi = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

**Ejercicio 2.** Sean $a, b > 0$.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \Big(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\Big),$$
$$\Phi_2(u, v) = \big(au \cos(v), bu \sin(v), u^2\big),$$

son dos parametrizaciones del *paraboloide elíptico* dado cartesianamente por

$$z = \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2.$$

(b) Supongamos $b < a$. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u)) \sin(v), (a + b\cos(u)) \cos(v), b\sin(u)\big),$$

con $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del *toro* dado cartesianamente por

$$z^2 = b^2 - \Big(a - \sqrt{x^2 + y^2}\Big)^2.$$

**Ejercicio 3.** Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\mathrm{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

**Ejercicio 4.** Sea $C$ la curva en el plano $xy$ dada en coordenadas polares por:

$$r = 2 - \cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea $S$ la superficie que se obtiene por revolución de esta curva alrededor del eje $y$.

(a) Dar una parametrización de $S$.

(b) ¿Es suave esta superficie?

**Ejercicio 5.** Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio $a$ y centro en el origen en un punto $(x_0, y_0, z_0)$ genérico de la esfera.

**Ejercicio 6.** Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto (0,1,1) a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \qquad y = u^2 + v, \qquad z = v^2.$$

**Ejercicio 7.** Sea $S$ la superficie parametrizada por la función $\Phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad z = \theta,$$

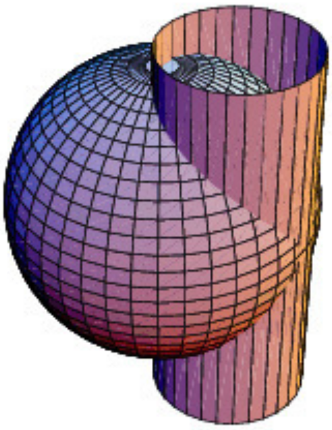
Graficar $S$, hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

**Ejercicio 8.** Sea $D$ el disco unitario centrado en el origen. Sea $S$ la superficie parametrizada por la función $\Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv).$$

Calcular el área de $S$.

**Ejercicio 9.** Sea $R > 0$. Calcular el área de la superficie que se obtiene de intersecar la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con el cilindro (relleno) $(x-R/2)^2+y^2 \leq (R/2)^2$.



Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.

**Ejercicio 10.** Sea $\alpha > 0$ y sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función positiva. Consideremos la curva $z = f(x)$ girada alrededor del eje $z$. Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) item a) para calcular el área del paraboloide elíptico con $1 \leq z \leq 2$, y $a = b = 1$.

**Ejercicio 11.** Sea $C$ la curva en el plano $xy$ dada por

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sea $S$ la superficie que se obtiene al girar la curva $C$ alrededor del eje $x$.

(a) Hallar una parametrización de $S$.
(b) Hallar el área de $S$.

**Ejercicio 12.** Calcular $\int_S xy\, dS$ donde $S$ es el borde del tetraedro con lados

$$z = 0, \quad y = 0, \quad x+z = 1, \quad x = y.$$

**Ejercicio 13.** Calcular $\int_S (x+y+z) dS$ donde $S$ es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

**Ejercicio 14.** Hallar la masa de una superficie esférica de radio $r$ tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia entre $(x,y,z)$ y el punto $(0,0,r)$.

**Definición.** Decimos que una superficie $S$ es *orientable* si hay una forma de elegir en cada punto $P$ de $S$ un único versor normal $\nu(P)$ de modo que la función vectorial que esta elección define sobre $S$ resulte continua.

Por ejemplo, si $S$ es el gráfico de una función, se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente $z$ positiva). Esta elección es continua en $S$.

Si $S$ es el borde de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipo I, II o III, se puede elegir como $\nu(P)$ la normal que apunta hacia afuera de $\Omega$.

**Proposición.** *Sea $S$ una superficie suave y $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $S$. Para cada $P \in S$, sea*

$$\nu(P) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|}, \quad \text{donde } (u,v) \text{ es tal que } P = T(u,v).$$

*Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie $S$. En este caso, decimos que $S$ está orientada por la parametrización $T$.*

**Definición.** Sea $S$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $S$. Llamamos flujo de $\mathbf{F}$ a través de $S$ a la integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \ := \int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

**Proposición.** *Sea $S$ una superficie suave orientada por la parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $T$ que preserva la orientación. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre $S$. Entonces, el cálculo de $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización $T$ o la parametrización $T_1$. Si $T_1$ invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.*

**Ejercicio 15.** Probar esta proposición.

**Ejercicio 16.** Considerar la superficie dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = \cos\theta + t \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cos\theta \\ y = \sin\theta + t \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\theta \\ z = t\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

con $t \in [-1,1], \theta \in [0, 2\pi]$. Probar que es suave. Esta superficie es la *cinta de Moebius*, y es un ejemplo de una superficie no orientable.

**Ejercicio 17.** Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del borde del cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

**Ejercicio 18.** Si la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ está dada por la función $T(x,y,z) = 3x^2 + 3z^2$, calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo $-\nabla T$) a traves de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, orientada de forma que la normal en el punto $(0,0,\sqrt{2})$ sea (0,0,1).

**Ejercicio 19.** Sea $S$ la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y $F_r$ su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}(\phi)\, d\phi\, d\theta.$$

**Ejercicio 20.** Sea $S$ la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con $z$ entre 1 y 2, orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{S}$ con $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

**Ejercicio 21.** Sean $S$ una superficie orientada y $C$ una curva cerrada simple que es el borde de $S$ con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ($\mathbf{F} = \nabla f$) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\,\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{s}$$

**Ejercicio 22.** Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano $xy$ a través del cuadrado $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.