Ezequiel Merario Mar 10

Coeficientes Indeterminados

- Ecuación de órden 2,
  coeficientes constantes,
  no homogénea.

$$x'' - 3x' + 2x = f(t)$$

- Primero resuelvo homogéneo

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Base de Sol_H: $\{e^t, e^{2t}\}$

- Quiero solución particular: (Distintos ejemplos para $f(t)$)

1) $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}$

(No quiero usar Método de Var. de Const. ¨)

Propongo:

- $x(t) = a \cdot e^{5t}$

Calculo

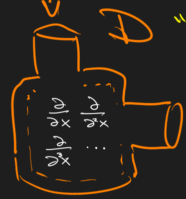
- $x'(t) = 5a \cdot e^{5t}$
- $x''(t) = 25a \cdot e^{5t}$

Defino $D(x) = x'' - 3x' + 2x$

Operador Diferencial "Maquinita"

x

D "conoce" las derivadas y opera con ellas



$\longrightarrow D(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x(t) = a \cdot e^{5t} \\ \bullet\ x'(t) = 5a \cdot e^{5t} \\ \bullet\ x''(t) = 25a \cdot e^{5t} \end{array}\right\} \Rightarrow D(x) = e^{5t} \cdot a(25 - 15 + 2)$$

$$= a \cdot e^{5t} \cdot 12$$

Como quiero que ese 12 se vaya, elijo

$$a = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sol particular} \\ \Rightarrow\ x_p(t) = \frac{1}{12} \cdot e^{5t} \end{array}}$$

Caso 2: es uno de los elems de la base! $B_H = \{e^t, e^{2t}\}$

$D(x) = e^{2t}$ con $D(x) = x'' - 3x' + 2x$ (mismo de antes)

Propongo

Polinomio de mayor grado que antes

$$X(t) = (at + b)\, e^{2t}$$

$$= at \cdot e^{2t} + b \cdot e^{2t}$$

$$D(x) = \underbrace{D(at \cdot e^{2t})}_{\text{me quedo con esta parte.}} + \underbrace{D(be^{2t})}$$

$$= 2be^{2t} - 6be^{2t} + 12be^{2t}$$

$$= 8be^{2t} \leftarrow$$ no me sirve! pues no aporta nada.

- $X(t) = at \cdot e^{2t}$
- $x'(t) = at \cdot e^{2t} + at \cdot 2e^{2t}$

$$= a \cdot e^{2t}(1 + 2t)$$

- $x''(t) = 2ae^{2t} + a(1+2t) \cdot 2 \cdot e^{2t}$

$$= 2ae^{2t}(1 + 1 + 2t)$$

$$= 2ae^{2t}(2 + 2t)$$

$$= 4ae^{2t}(1 + t)$$

$$D(x) = x'' - 3x' + 2x$$

$$D(x) = a \cdot e^{2t}(4t + 4 - 3 - 6t + 2t)$$

$$= a \cdot e^{2t} = e^{2t} \Rightarrow \text{elijo}$$

Quiero!

$$a = 1$$

Sol. Particular

$$X_p(t) = 1 . t . e^{2t}$$

$$\boxed{X_p(t) = t . e^{2t}}$$

Caso

3) $x'' - 3x' + 2x = e^{t}$ ← elem. de la base de sols. del H.

Propongo

cuentas ...

$$x(t) = a\,t . e^{t} \Rightarrow a = -1$$ (Tarea Resolver)

Sol: $\boxed{x(t) = -t . e^{t}}$

Cambio de Ecuación

$$x'' - 2x' + x = e^{t}$$

Pero!

Tiene homogéneo

$$\{ e^{t} , t . e^{t} \}$$

← De la pinta de un Autovalor doble!

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$
$$= (\lambda - 1)^2$$

- Si propongo $a . e^{t}$ ✗ no anda! Pues $\in Base_H$
- Si propongo $a\,t . e^{t}$ ✗ no anda! $\in Base_H$

$\Rightarrow$ Propongo

$$X(t) = at^2 \cdot e^t$$

$$x'(t) = 2a\,t \cdot e^t + at^2 \cdot e^t$$

$$= a \cdot e^t \left(2t + t^2\right)$$

$$x''(t) = a \cdot e^t \left(t^2 + 4t + 2\right)$$

$$x'' - 2x' + x = ae^t\left(t^2 + 4t + 2 - 4t - 2t^2 + t^2\right)$$

$$= a \cdot e^t \cdot 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quiero}}}{=} e^t$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Ahora si me dan

otra base!

$$x'' - 2x' + x = t \cdot e^t$$

$$X(t) = at^3 \cdot e^t$$

$$\overset{\text{cuentas}}{\Rightarrow} a = \frac{1}{6}$$

Otra ecuación :

dos "partes"

$$x'' - 2x' + 5x = t + \cos t$$

Homogéneo

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Raíces

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$$

$$B_{SH} = \{ e^t \cdot \cos 2t \, , \, e^t \cdot \sin 2t \}$$

Si logramos

$$D(x_1) = t$$

$$D(x_2) = \cos t$$

$$\Rightarrow D(x_1 + x_2) = t + \cos t$$

Caso $D(x) = t$:

Proponemos (viendo grados de derivacion y t)

- $x(t) = at + b$
- $x'(t) = a$
- $x''(t) = 0$

$$D(x) = x'' - 2x' + 5x = t$$

$$\Rightarrow D(x) = -2a + 5at + 5b$$

$$= \underbrace{5at}_{\text{con } t} + \underbrace{5b - 2a}_{\sin t} = t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5b - 2a = 0 \\ 5a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$b = \frac{2}{25}$$

Sol. de la primera parte

$$X(t) = \frac{t}{5} + \frac{2}{25}$$

verifico

$$x'' - 2x' + 5x = 0 - \frac{2}{5} + 5\frac{t}{5} + 5 \cdot \frac{2}{25}$$

$$= t \checkmark$$

Caso

$$D(x) = \cos t :$$

Propongo

✓ Pues incluye derivadas y der. 2° por lo que me conviene usar tanto cos t como sin t

- $X(t) = a \cdot \cos t + b \cdot \sin t$
- $x'(t) = -a \sin t + b \cos t$
- $x''(t) = -a \cdot \cos t - b \cdot \sin t$

$X(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t$
$X'(t) = -a\operatorname{sen} t + b\cos t$
$X''(t) = -a\cos t - b\operatorname{sen} t$

$$D(x) = x'' - 2x' + 5x = \cos t$$

$$= -a \cdot \cos t - b \cdot \sin t - 2(-a \sin t + b \sin t) + 5(a \cdot \cos t + b \sin t)$$

$$= \cos t(-a - 2b + 5a) + \sin t(-b + 2a + 5b)$$

$$= \cos t\,(4a - 2b) + \sin t\,(2a + 4b)$$

$$= \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 4a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2b \\ -8b - 2b = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{10} \end{matrix}$$

Finalmente

$$D(x) = t + \cos t$$

tiene sol. particular

$$X_p(t) = \underbrace{\frac{2}{25} + \frac{t}{5}}_{\text{Caso } D(x) = t} + \overbrace{\frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t}^{\text{Caso } D(x) = \cos t}$$

Cambio de escenario:

Ecuación de orden 2, coeficientes <u>NO</u> constantes

$$y'' + a(x)\, y' + b(x) \cdot y = 0$$

- No podemos resolverlo todo! (<u>no</u> hay método)

Problema accesible

- Si $\{y_1, y_2\}$ sol. del problema,

dada $y_1 \Rightarrow$ hallar y_2

Método general

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 y_2' - y_2 y_1')(x)$$

¿Qué para si lo derivo? (porque sí)

$$W'(x) = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - \cancel{y_1' y_2'}$$

$$= y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$= y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1)$$

$$= -a y_1 y_2' - b y_1 y_2 + a y_1' y_2 + b y_2 y_1$$

$$= -a(y_1 y_2' - y_1' y_2)$$

$$= -a W$$

Entonces:

$$W' = -a W$$

$$W(x) = e^{-A(x)}$$

con $A'(x) = a(x)$

Finalmente

$$e^{-A(x)} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

de 1^{er} orden,

con y_1 conocida,

y_2 = se encuentra

Nota

• A esto se le llama "reducción del orden"

(pues pasamos de orden 2 a ecuaciones de orden 1)

Ejemplo :

$$y'' - \frac{1}{x} y' - 4x^2 y = 0 \quad \text{en } (0, +\infty)$$

Nos dan : $y_1(x) = e^{x^2}$

• 1° verifico : que sea sol.

$$y_1'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$$

$$y_1''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$$= 2e^{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot e^{x^2}$$

$$y_1'' - \frac{1}{x} y_1' - 4x^2 y_1 = e^{x^2}\left(2 + 4x^2 - 2 - 4x^2\right) = 0 \checkmark$$

Calculo W

$$W = e^{\overbrace{-\int -\frac{1}{x}\,dx}^{-A(x)}}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$= e^{\ln x}$$

$$W = x$$

Teníamos

$$\boxed{e^{-A(x)} = y_1 y_2' - y_1' y_2}$$

$$x = e^{x^2} \cdot y_2' - 2x \cdot e^{x^2} \cdot y_2$$

divido por e^{x^2}

$$y_2' - 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-x^2}$$

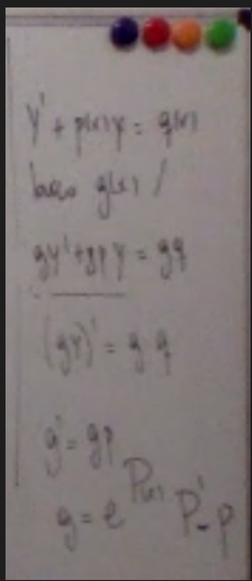
mult por e^{-x^2}

$$e^{-x^2} y_2' - e^{-x^2} \cdot 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-x^2} \cdot e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} y_2' - e^{-x^2} \cdot 2x \cdot y_2 = x \cdot e^{-2x^2}$$

regla de la cadena (al revés)

$$\left(e^{-x^2} \cdot y_2\right)' = x \cdot e^{-2x^2}$$



$$e^{-x^2} \cdot y_2 = \int x \cdot e^{-2x^2}\, dx$$

$$= \frac{e^{-2x^2}}{-4} + C$$

$$y_2 = \frac{e^{-x^2}}{-4} + C \cdot e^{x^2}$$

Solución dada

Suma de sol. de un sist. lineal, es solución!

me quedo solo con

$$y_2(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{x^2}$$

Pero como es un sistema lineal, la constante mult. no es necesaria.

Sol

$$\boxed{y_2(x) = e^{x^2}}$$

Recordar

$$\boxed{\begin{aligned} W' &= -a \cdot W \\ W &= e^{-\int a(x)\,dx} \end{aligned}}$$