

Diagramas de Fase

Preg. cómo resolver
sistemas

Contexto:

$$X' = A X \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Obj:Entender el comportamiento dinámico de
las soluciones.Las soluciones $X: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Recordo (ver teoría de hoy):

Dos soluciones o no se cortan
o son idénticas.no

Separo en casos:

1) Si A es diagonalizable en \mathbb{R} (en particular)
 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Casos

$$a) \lambda_1 > 0, \\ \lambda_2 < 0$$

$$b) \lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

$$c) \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

2) A no diagonalizable
(λ raíz doble del característico)

3) A es diagonalizable en \mathbb{C} y no en \mathbb{R}
($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

$$a) \operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

$$b) \operatorname{Re}(\lambda) > 0$$

$$c) \operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

$$Ej: \quad x' = A x \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 9 \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 \quad z_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagrama de fase:

Estamos en el caso 1) a)

Voy a trabajar con las coordenadas
en base (z_1, z_2)

Llamo:

$$X(t) = \underbrace{c_1 \cdot e^{at}}_{y_1(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{c_2 \cdot e^{6t}}_{y_2(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

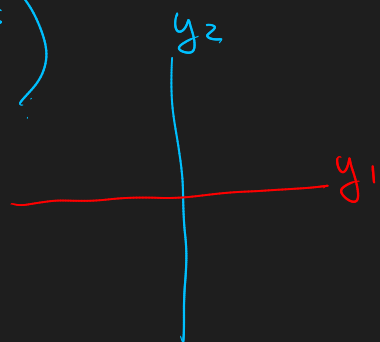
Voy a graficar en base

$$(y_1(t), y_2(t)) = (c_1 \cdot e^{at}, c_2 \cdot e^{6t})$$

Si:

$$c_2 = 0 \Rightarrow (c_1 \cdot e^{at}, 0)$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow (0, c_2 \cdot e^{6t})$$



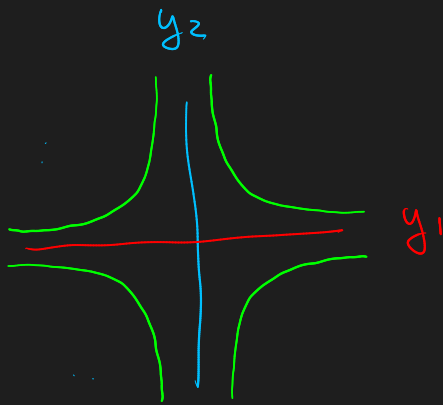
$$y_1(t) = C_1 \cdot e^{9t} \quad \text{--- Copiar de notas}$$

$$\rightarrow (y_1(t))^{-2/3} = C_1^{-2/3}$$

$$y_2(t) =$$

$$\begin{aligned} y_1(t)^{-2/3} &= \frac{C_1^{-2/3}}{C_2} \cdot y_2(t) \\ y_2(t) &= k \cdot y_1(t)^{-2/3} \end{aligned}$$

↑ una es un múltiplo elevada a $\pm \frac{2}{3}$



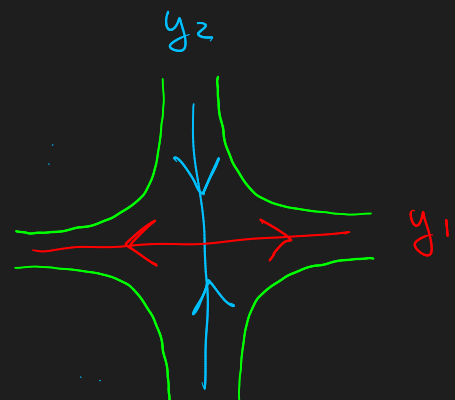
$$y_2(t) = k \cdot y_1(t)^{\frac{2}{3}}$$

Estas curvas tienen sentido

Usando de enter los autovectores

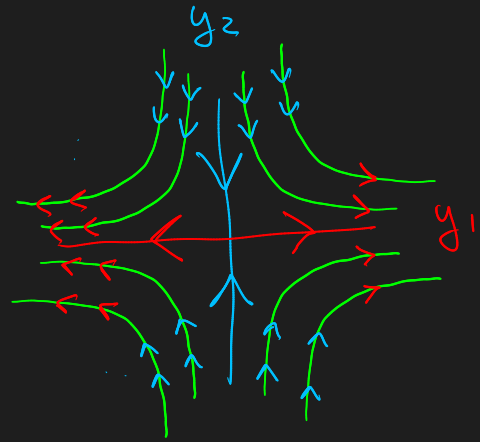
$$(C_1 \cdot e^{9t}, 0)$$

$$(0, C_2 \cdot e^{6t})$$



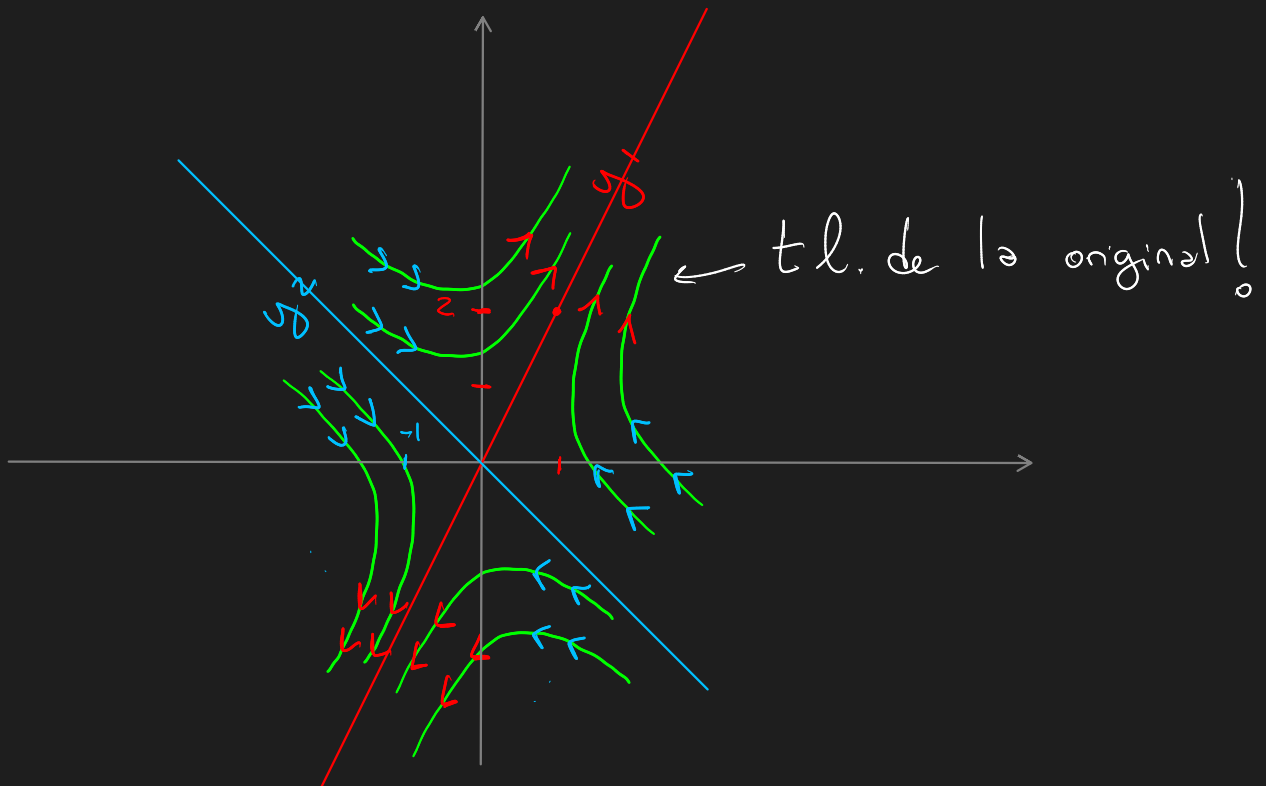
veo qué ocurre cuando $t \rightarrow \infty$

EN LA RECTA $y_2=0$, CORRESPONDIENDO A ξ_1 ,
LA DIRECCIÓN DE MOVIMIENTO ES ALEJÁNDOSE
DEL ORIGEN ($\lambda_1 > 0$)
EN $y_1=0$, SE ACERCA AL ORIGEN ($\lambda_2 < 0$)



Con eso deducimos la dirección de
todas las curvas

- Faltó construir el diagrama de fases
para las soluciones $(x_1(t), x_2(t))$



$$\left. \begin{array}{l} \text{LÍNEA } y_2=0 \longrightarrow \langle \xi_1 \rangle \\ \text{LÍNEA } y_1=0 \longrightarrow \langle \xi_2 \rangle \end{array} \right\} \textcircled{V}$$

LAS CURVAS SE ADAPTAN DE ESTAR ENTRE CUADRANTES
A ESTAR ENTRE LAS SEMIRRECTAS DADAS POR \textcircled{V}
LOS SENTIDOS DE MOVIMIENTO SE RESPETAN.

Ej: $X' = A X \quad A = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 11 \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

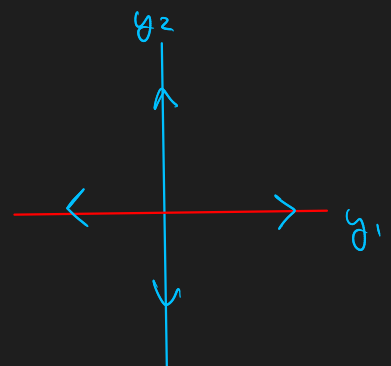
$$X(t) = \underbrace{C_1 \cdot e^{11t}}_{\xi_1} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{C_2 \cdot e^t}_{\xi_2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Caso 1) b)

Base \rightarrow auto valores

$$C_2 = 0 \rightarrow (C_1 \cdot e^{11t}, 0)$$

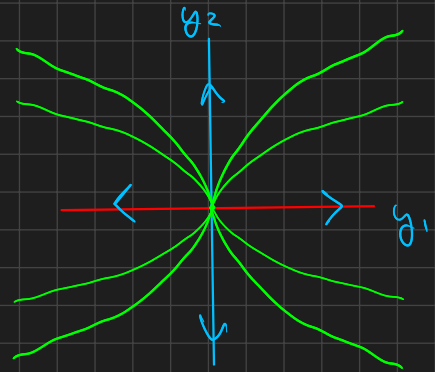
$$C_1 = 0 \rightarrow (0, C_2 e^t)$$



$$(y_1(t), y_2(t)) \xrightarrow{\text{enter}} y_2(t) = k \cdot |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

$$\xrightarrow{\text{enter}} y_2(t) = k \cdot |y_1|^{\frac{1}{11}}$$

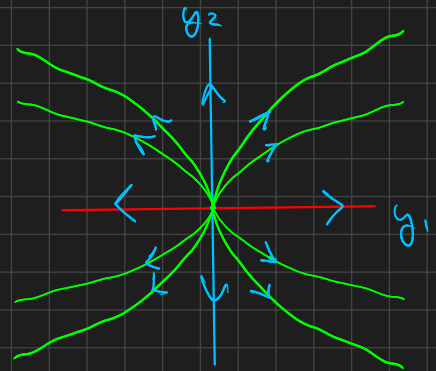
LAS CURVAS SE VEN COMO COSAS QUE FUERTE PARECEN A UNA PARÁBOLA (PERO CON OTRA CURVATURA) CONVEXAS HACIA EL LADO QUE CONTIENE AL EJE y_1 (POR SER EL EJE ASOCIADO AL AUTOVALOR DE MAYOR MODULO)



Notar que

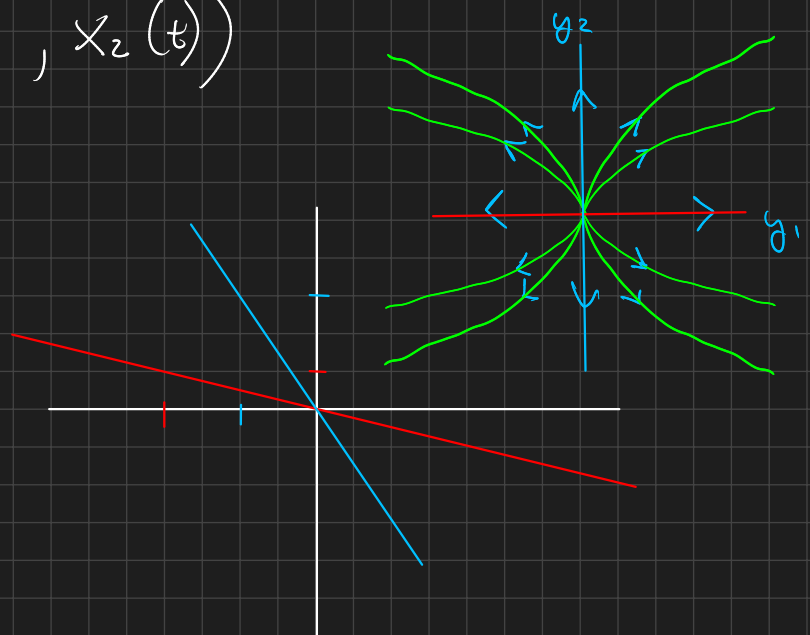
$$(y_1, y_2) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t})$$

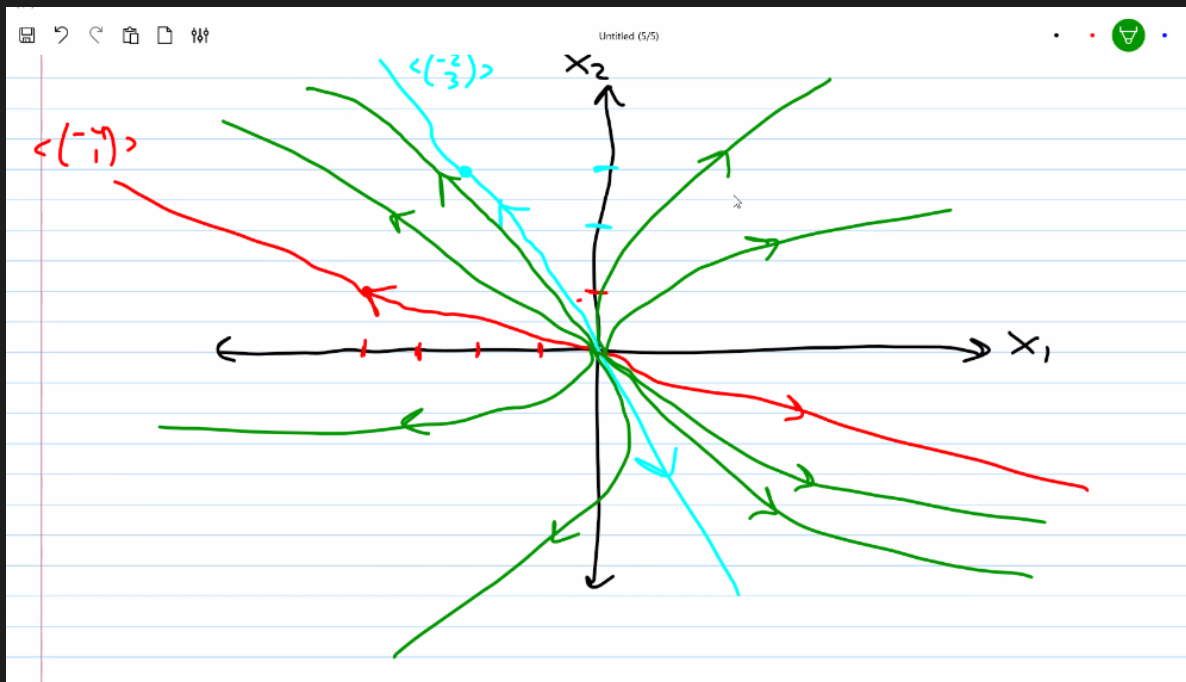
$\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\lambda_1 > \lambda_2}$
 $\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\lambda_2 < \lambda_1}$



Para el diagrama de fase para las soluciones $(x_1(t), x_2(t))$

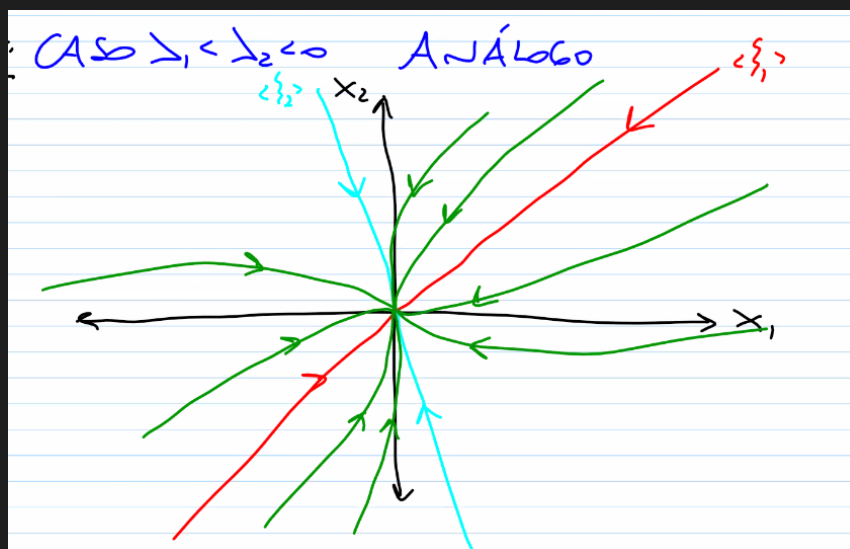
Igual que antes





Ej: Caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ es análogo
(los signos se cancelan)

Pero todos los sentidos se invierten



$$E_j: x' = Ax \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3$$

$$z = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{no}} \text{ es diagonalizable}$$

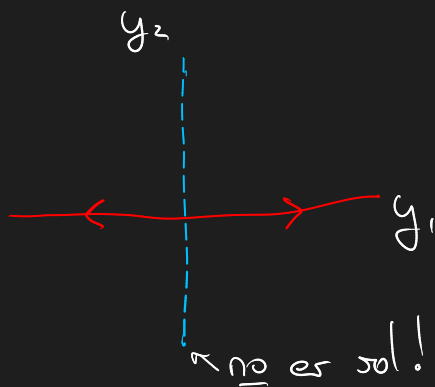
$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ es solución de } (A - 3I)w = z$$

estamos en el caso 2)

$$B_{\text{ore}} = \{ z, w \}$$

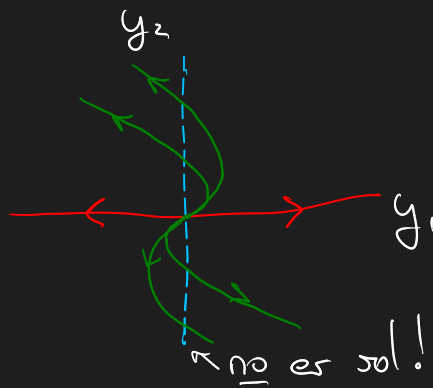
Solo hay una sola recta

$$C_2 = 0 \rightarrow \text{Recta asociada a } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

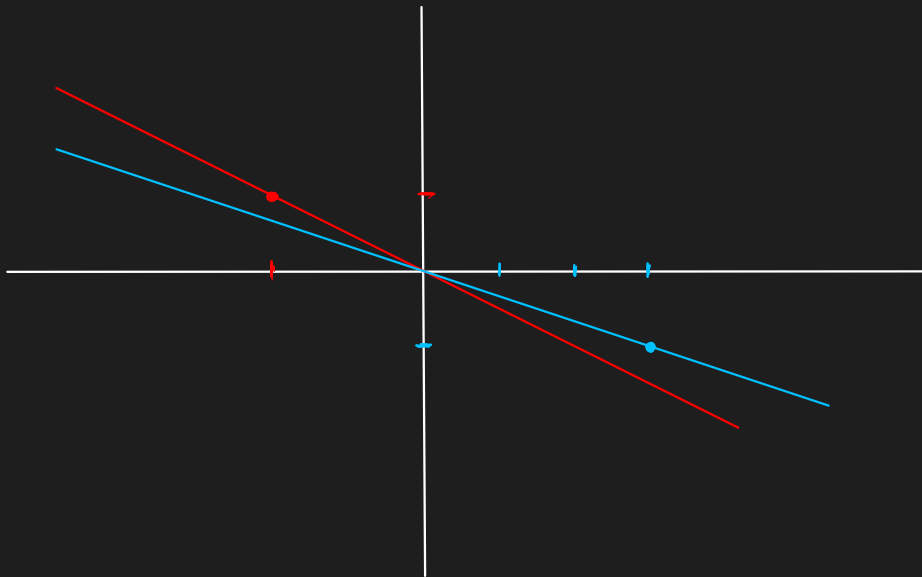


$$y_1 = y_2 \left(k + \frac{1}{2} \ln |y_1| \right)$$

$$y_1 = y_2 \left(k + \frac{1}{3} \ln |y_1| \right)$$



LAS CURVAS CORTAN EL EJE $y_1=0$, PERO NO EL $y_2=0$. SI $\lambda > 0$ EL SENTIDO DE MOVIMIENTO ES HACIA AFUERA, SI $\lambda < 0$ ES HACIA ADENTRO.



Se deshace

PARA PASAR AL DIAGRAMA DE FASE TANDO $\{y_2=0\}$
 $A < \xi >$ y $\{y_1=0\}$ A $< \omega >$ LOS SENTIDOS DE
MOVIMIENTO SE
PRESERVAN.

