Teórica 01 - Curvas

Dom 31/01/2021

Video: Prof. Guillermo Matera

Queremos integrar en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

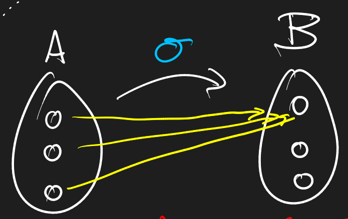
específicamente sobre
Objetos geométricos.

Def:

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función:

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$$

contínua y sobreyectiva.



No es sobre!

Todos los elementos de B deben tener preimagen en A

Ejemplo:

Si $\mathcal{C} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \}$, ← Circ. radio 1

entonces

$\mathcal{C}$ es una curva pues:

existe una parametrización:

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}$$

$$\sigma(t) = (\cos t \ , \ \sin t)$$

que es continua y sobreyectiva.
(componentes continuas)

Observación:
Toda curva es un conjunto acotado. ← entra en una bola ($\mathcal{C}$)
(componentes acotadas por ser func. continuas sobre un intervalo acotado $[a, b]$)

Observación:
Una curva admite muchas parametrizaciones distintas.

Ejemplo de curva plana en $\mathbb{R}^2$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua

gráfica

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = f(x) \ , \ a \leq x \leq b\}$$

↑ Curva!

$$\sigma : [a, b] \to G_f$$

$$\sigma(x) = (x, f(x))$$

Curva Simple y Abierta

No se corta a sí misma, o sea:

$\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$ es Inyectiva

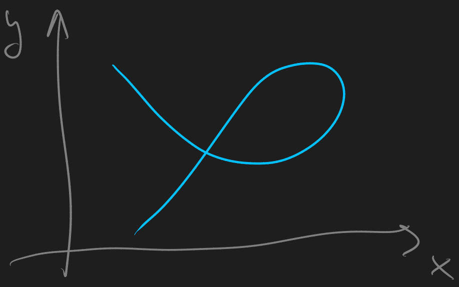
Curva Simple y Cerrada

Se cierra, o sea,

$\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$ es Inyectiva en $[a,b)$

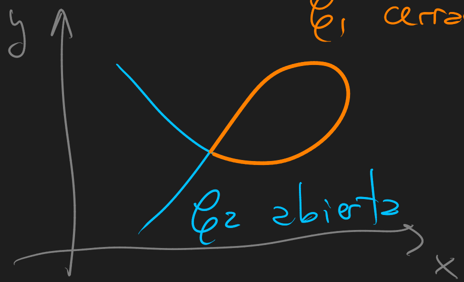
con $\sigma(a) = \sigma(b)$

Curva ni Abierta ni Cerrada (aka Curva "NiNi")



Suponemos (y admitimos, pues es cierto)

- TODA curva puede escribirse como una unión finita de curvas abiertas y cerradas que se intersecan.



$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$

(deben coincidir en algún punto)

Reparametrización

Cambio de Parametrización

Sea $\mathscr{C}$ una curva con param:

$$\sigma : [a,b] \to \mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$$

y sea h una biyección continua *

$$h : [a,b] \to [c,d]$$

* Ejemplo

$h(t) = 4t$

$h : [a,b] \to [4a, 4b]$

Si definimos otra parametrización $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{\sigma}(\tau) = \sigma(h^{-1}(\tau))$$

Reparametrización de σ

Notar

esto implica la $\exists$ y continuidad de h^{-1}

Recta tangente y Suavidad.

Curva suave: Admite recta tangente en cada punto

Def:

Sea $\mathscr{C}$ una curva

y $P_0 \in \mathscr{C}$

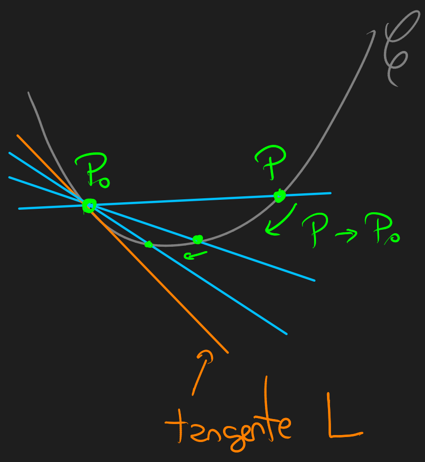
Una recta L que pasa por P_0 se llama

"tangente a $\mathcal{C}$ en P_0"

si es el "límite" de rectas secantes que pasan

por P y P_0, con $P \in \mathcal{C}$

Ángulo entre L y la secante por P_0 y P $\xrightarrow[\text{cuando } P \to P_0]{\text{tiende a}}$ Cero



¿Cómo obtengo la recta tangente a una curva en t_0?

Derivo! (c/ comp) Si $\neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ existe recta tangente

Prop:

Si $\mathcal{C}$ es una curva que admite param

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

Inyectiva y Diferenciable en $t_0 \in [a,b]$

tal que

$$\sigma'(t_0) := \left(x'(t_0)\, ,\, y'(t_0)\, ,\, z'(t_0) \right) \neq (0,0,0)$$

entonces

$\mathscr{C}$ tiene recta tangente en $P_0 = \sigma(t_0)$

con dirección $\sigma'(t_0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Eq. de recta tangente } L \text{ en } P_0 : \\ \qquad L_{P_0} \equiv \lambda \,.\, \sigma'(t_0) + \sigma(t_0) \end{array}}$$

"Buenas Parametrizaciones":

Param. Regulares

Def:

Se denomina Parametrización Regular a

una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathscr{C}$ de clase C^1

de una curva $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$

con

$$\sigma'(t) \neq (0,0,0) \quad \forall\, t \in [a,b]$$

tal que

(1) σ es inyectiva en $[a,b]$

ó

(2) σ es inyectiva en $[a,b)$,

$$\sigma(a) = \sigma(b) \quad y$$
$$\sigma'(a) = \sigma'(b)$$

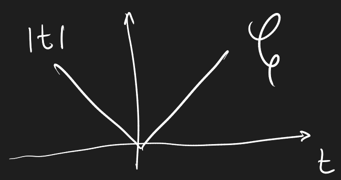
Obs:

Una curva $\mathcal{C}$ abierta o cerrada se dice **SUAVE** si admite una (alguna) parametrización regular.

Ejemplo:

Si σ parametriza a $\mathcal{C}$ con

$$\sigma : [-1, 1] \to \mathcal{C}$$
$$\sigma(t) = (t, |t|)$$



Puedo decir que

σ <u>no</u> es regular (pues $\sigma'(0)$ no existe)

PERO! <u>no</u> puedo decir lo mismo de $\mathcal{C}$

(Podría existir otra $\tilde{\sigma}$ que sea regular)

Reparametrizaciones y Orientación

Si $\tilde{\sigma}$ es reparametrización de $\mathcal{C}$, existen 2 casos

$$(1)\begin{cases} h(c) = a \\ h(d) = b \end{cases} \quad ó \quad (2)\begin{cases} h(c) = b \\ h(d) = a \end{cases}$$

Así

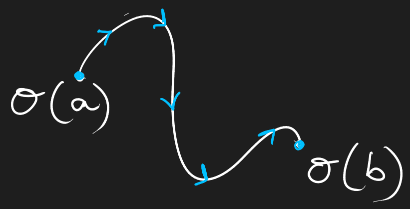
$$(1)\begin{cases} \tilde{\sigma}(c) = \sigma(a) \\ \tilde{\sigma}(d) = \sigma(b) \end{cases} \quad ó \quad (2)\begin{cases} \tilde{\sigma}(c) = \sigma(b) \\ \tilde{\sigma}(d) = \sigma(a) \end{cases}$$

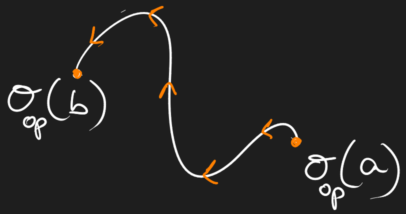
(1) "$\tilde{\sigma}$ preserva la orientación de σ"

(2) "$\tilde{\sigma}$ invierte la orientación de σ"

Parametrizaciones estándar:

- Trayectoria opuesta de σ : σ_{op}





$$\sigma_{op} : [a,b] \to \mathscr{C}$$

$$\sigma_{op}(t) = \sigma(a+b-t)$$

(t se mueve en $[a,b]$)

- "De Unidad"

$$\tilde{\sigma} : [0,1] \to \mathscr{C}$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a+(b-a)\cdot t)$$

Preserva la orientación, cambia la velocidad:

? $\tilde{\sigma}$ recorre $\mathscr{C}$ con velocidad canónica (velocidad 1)

- Si $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathcal{C}$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Una reparam resulta de:

doble velocidad

$$\tilde{\sigma} : [0, \pi] \to \mathcal{C}$$

$$\hat{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

//