Ecuaciones Diferenciales Mar Mar 02

Problema general

Dado $I \subseteq \mathbb{R}$, encontrar una función

$$y : I \to \mathbb{R} \;/\; y \in C^1$$

$$y^{(k)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$$

con cierta F dada.

k : orden de la ecuación

Ejemplo :

$$y' = xy \quad \text{(primer orden)}$$

Si $y(x) \neq 0$, $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = x$

$$\ln(|y(x)|) = \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + C$$

$C \in \mathbb{R}$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot A$$

Las soluciones son

$$y(x) = B \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{con } B \in \mathbb{R}$$

Problema de valores iniciales

1° orden $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ← Bajo ciertas condiciones sobre F, podemos asegurar ∃ y unicidad.

General $\begin{cases} y^{(k)} = F(x, y, \dots, y^{k}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)} \end{cases}$

Sistemas de Ecuaciones de 1° órden

(n variables)

Incógnita (Solución del Problema)

mayúscula — minúsculas

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Ecuaciones diferenciales

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t, x, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, \quad, x_n) \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineales

$$X'(t) = A(t)\, X(t) \quad , \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Caso Particular

de $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i,j$ (constante)

$$X'(t) = A \cdot X(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Equivalencias entre sistemas $n \times n$, orden n

Supongamos que tenemos la ecuación

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$$

- Si definimos

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_1 &= x' \\ X_2 &= x'' \\ &\vdots \\ X_{n-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned}$$

el vector de funciones

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix}$$

es solución de

$$X'(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ f(t, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Existencia y Unicidad

Teorema: (1 variable)

$I \subseteq \mathbb{R}$,

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Localmente Lipshits en x
(t, x)

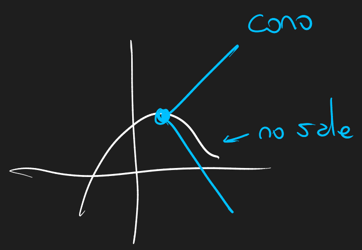
(localmente) Funciones Lipshits

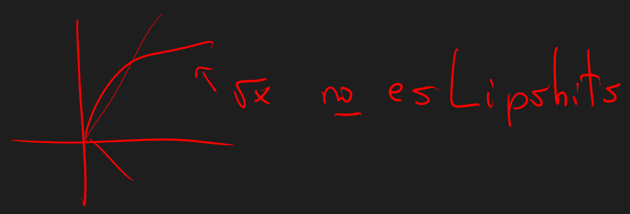
$\forall\, [a,b] \subset I$, $K \subset \mathbb{R}$ compacto (cerrado y acotado)

vale que :

$\exists\, L > 0 /$

$$|f(t, x_0) - f(t, y_0)| \leq L\,|x - y|$$





Puedo verlo como

$\exists\, L > 0 /$

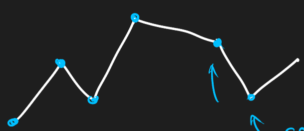
$$\frac{|f(t, x_0) - f(t, y_0)|}{|x - y|} \leq L$$

"pendiente" acotada por L

en cada x hay un "cono"

con amplitud dada por L.

- Una poligonal es Lipshits



constante L distinta en cada vértice (pendiente dada por el segmento)

- "Noción de regularidad"

- "Funciones cuyo crecimiento <u>no</u> es abrupto"

<u>Teorema</u>: (1 variable)

$I \subseteq \mathbb{R}$,

$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Localmente Lipshits en X
(t, x)

Si $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}$ $\quad \tau \in \mathring{I}$ (interior)

$\Rightarrow \exists \lambda > 0$ y

una función

$x : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \to \mathbb{R}$

solución de $\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$

Continuidad Respecto del Dato Inicial

↑ no tengo demasiada variación para $t_1 \approx t_2$

$$\begin{cases} x_1' = f(t, x_1) \\ x_1(\tau) = \xi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = f(t, x_1) \\ x_2(\tau) = \xi_1 \end{cases}$$

$\exists\, C > 0 \;/$

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C \cdot |\xi_1 - \xi_2|$$

(Bajo las condiciones del teorema)

Consecuencia:

$$(P) \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad \text{tiene solución única}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \text{ sol de } P \text{ en } J_1 \\ x_2 \text{ sol de } P \text{ en } J_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Un no ejemplo

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, +\infty)$$

$$\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}\, dt = \int 1\, dt = t + c$$

$$2\sqrt{x} = t + c$$

$$x = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$$

$$x(0) = 0 \implies x(t) = \frac{t^2}{4}$$

$$x'(t) = \frac{t}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{(t-1)^2}{4} & t > 1 \end{cases}$$

$$\tilde{x}'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \\ \frac{t-1}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{\tilde{x}(t)} = \begin{cases} 0 \\ \frac{t-1}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

X y $\tilde{X}$ son soluciones para el sistema,

también hay otras infinitas trasladando en el eje x.

Esto pasa pues $\sqrt{x}$ no es Lipshits en cualquier intervalo que contenga al cero

(pues $X(0)=0$)

Semana que viene

↳ Sistemas Lineales

$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ $\quad$ $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$