Eze

Mars Marzo 17

# Diagramas de Fase

$$X'(t) = A\,X(t) \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = x_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En otra base, tendríamos

$$= y_1(t) \cdot V_1 + y_2(t) \cdot V_2$$

Tenemos varios casos
(dependiendo de los autovalores de A)

## Caso I:

hacia afuera $\lambda_1 > 0$ hacia adentro $\lambda_2 < 0$

$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ , $\xi_1$, $\xi_2$ autovectores

$$X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \xi_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \xi_2$$

Obs:

• Si $X(0) = c_1 \cdot \xi_1$

$$\Rightarrow \quad X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \, \xi_1 \qquad \forall t$$

$$c_1 \cdot \xi_1 = c_1 \, \xi_1 + c_2 \cdot \xi_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

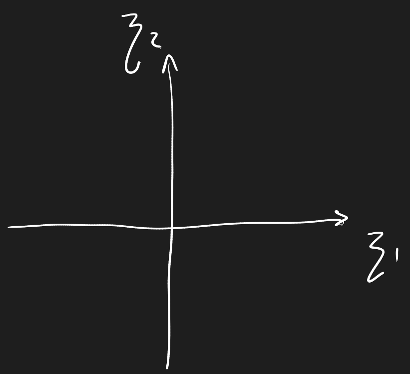
(si "me paro" sobre la recta de un autovector, no me escapo nunca de ella)

Escribamos

$$X(t) = y_1(t) \cdot \xi_1 + y_2(t) \cdot \xi_2$$

$$y_1(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$




• sé que $\left[\dfrac{y_1(t)}{c_1}\right]^{\frac{1}{\lambda_1}} = e^{t}$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{y_1(t)}{c_1}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = e^{\lambda_2 t}$$

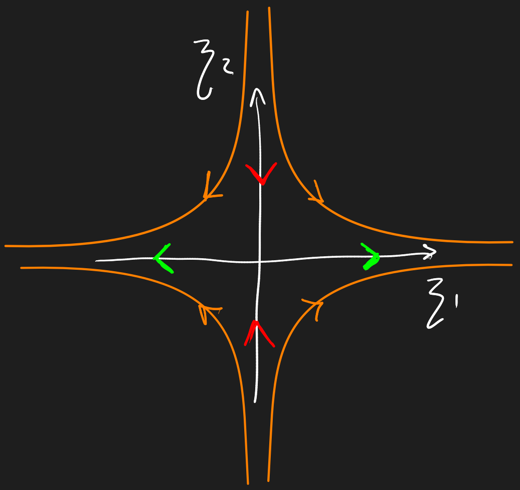
$$y_2(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_2 \cdot \left(\frac{y_1(t)}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \Big\} < 0$$

Analizo los posibles casos, y todos dan:

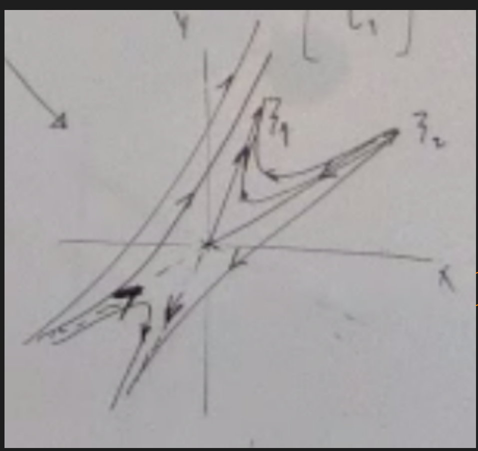
$$y(t) = K \, |y_1(t)|^{\alpha} \qquad \text{con } \alpha < 0$$

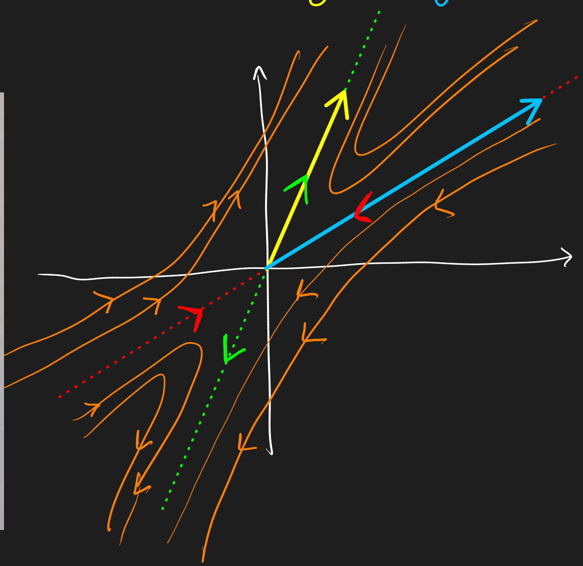
Idea:

Hipérbolas: "$y_2 = \frac{1}{y_1}$"




Sobre $\xi_1$ y $\xi_2$



Por unicidad de soluciones, las curvas no se cruzan!

↖ Propiedad muy "poderosa"

• Caso II:

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ← flechas hacia afuera

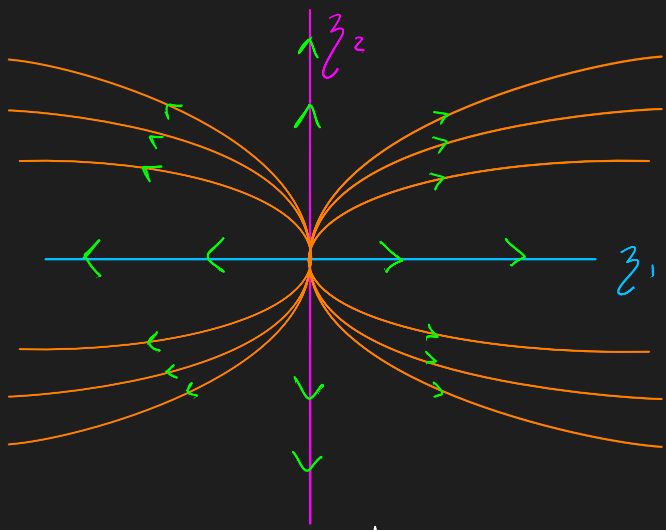
Todo es igual que antes:

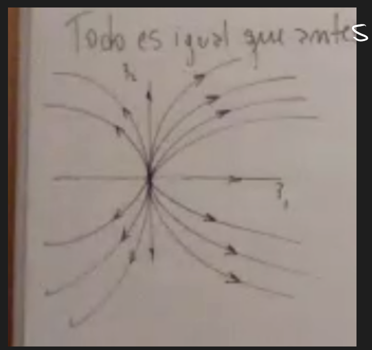
$$y_2(t) = K\,|y_1(t)|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Idea:

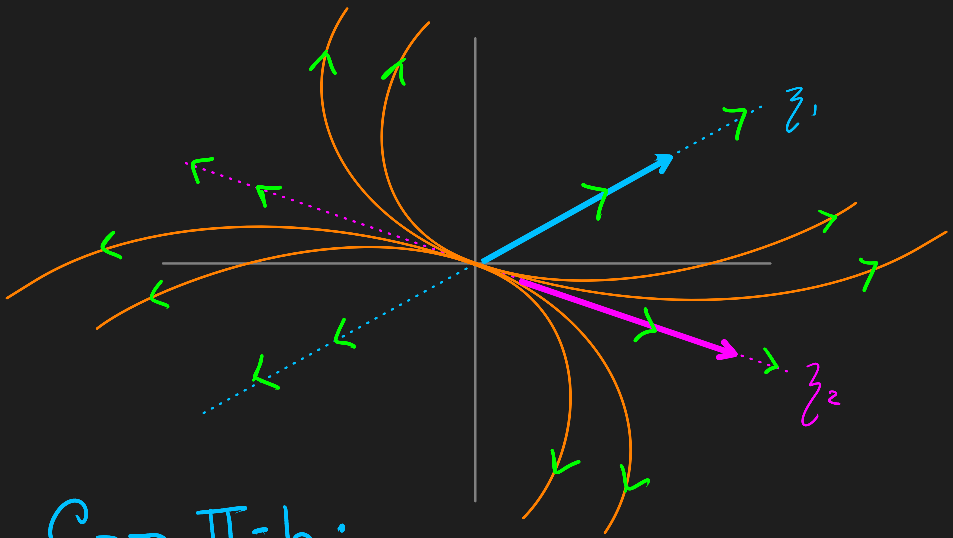
como $0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ pienso en "$y_2 = \sqrt{y_1}$"

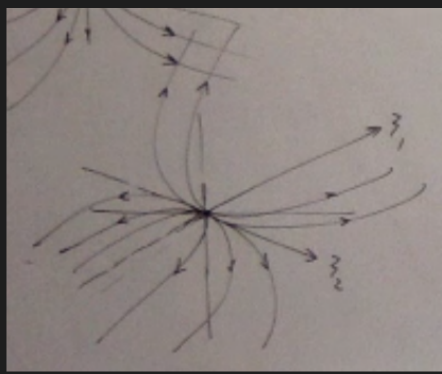
la concavidad "atrapa/abraza" al autovector con mayor módulo




Con base en autovectores



## Caso II-b :

$0 > \lambda_2 > \lambda_1$ sale similar, PERO! con las flechas invertidas. (hacia adentro)

## Caso III :

Auto valor doble $\lambda > 0$

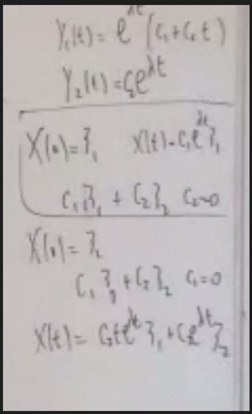
autovector pues es recta invariante

$$X(t) = y_1(t) \cdot \xi_1 + y_2(t) \cdot \xi_2$$

Justificación

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda t}$$


$$Y_1(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$$
$$Y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$$
$$X(0) = \xi_1 \quad X(t) = C_1 e^{\lambda t}\xi_1$$
$$C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \quad C_2 = 0$$
$$X(0) = \xi_2$$
$$C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \quad C_1 = 0$$
$$X(t) = C_2 t e^{\lambda t}\xi_1 + C_2 e^{\lambda t}\xi_2$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$$
$$y_2(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t}$$

- Si arranco en $\xi_1$ $(C_2 = 0)$ $\longrightarrow$ $X(0) = \xi_1$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} \cdot \xi_1$$

me quedo en $\xi_1$ $\longrightarrow$ $C_1\xi_1 + C_2\xi_2$ Veo $C_2 = 0$

- Si arranco en $\xi_2$ $(C_1 = 0)$ $\longrightarrow$ $X(0) = \xi_2$

$$C_1 \cdot \xi_1 + C_2 \cdot \xi_2 \quad \text{Veo } C_1 = 0$$

me escapo de ella $\longrightarrow$ $X(t) = C_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t}\xi_1 + C_2 \cdot e^{\lambda t}\xi_2$

$\Rightarrow$ el autovector es $\xi_1$ (pues es invariante)

$$y_2(t) = C_2 \cdot e^{\lambda t}$$
$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \log\left(\frac{y_2(t)}{C_2}\right)$$

Con todo esto

siempre bien definido

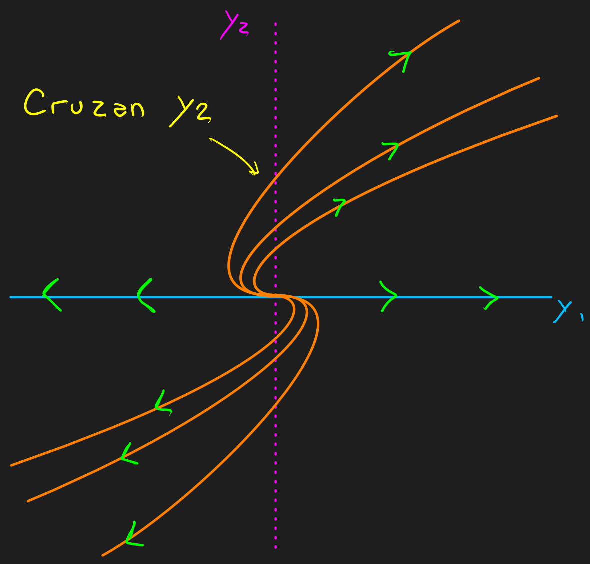
$$y_1(t) = \frac{y_2(t)}{C_2}\left(C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \log\left(\frac{y_2(t)}{C_2}\right)\right)$$

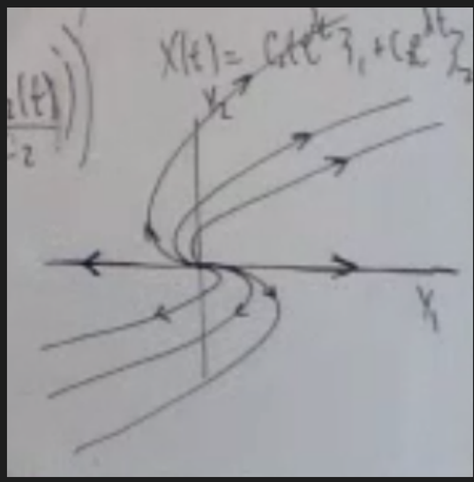
Junto constantes en

$$= y_2(t)\left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda} \cdot \log\left(\frac{y_2(t)}{C_2}\right)\right)$$

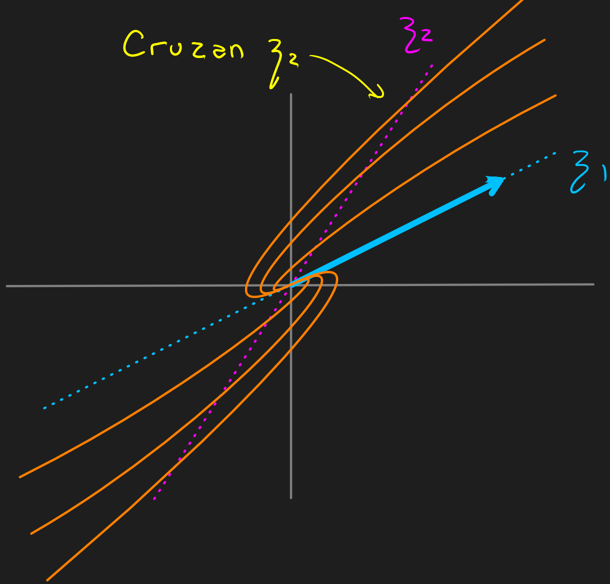
$y_2(t)$ no cambia de signo
(de un solo lado del eje horizontal)

Veo cuando $y_2$ está cerca de 0

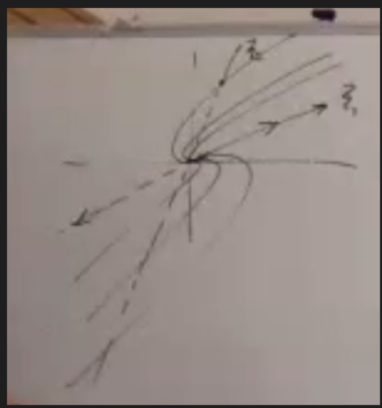


Sobre autovectores




$\xi_2$ no es invariante: "suelto el corcho y no flota sobre la recta de $\xi_2$"



## Caso IV: Autovalores complejos

$$\lambda = \alpha + \beta i \quad \text{con } \beta < 0$$

ej

$$\lambda = 3 + 2i$$
$$\bar{\lambda} = 3 - 2i \leftarrow$$ usamos el que tiene el signo menos!

Tenemos

$$\lambda = \alpha + \beta i \quad \text{con } \beta < 0$$

$z = V_1 + i\,V_2$ autovector de autovalor $\lambda$

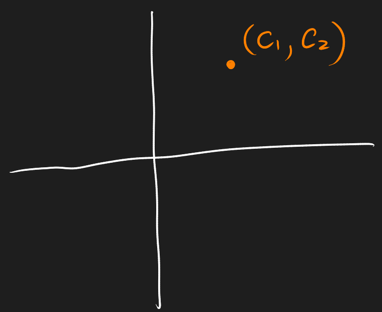
$$X(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \left( \cos(\beta t) \cdot V_1 - \sin(\beta t) \cdot V_2 \right) + ⊛$$

$$⊛ + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \left( \sin(\beta t) \cdot V_1 + \cos(\beta t) \cdot V_2 \right)$$

$$X(0) = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2$$

$$X(t) = y_1(t) \cdot V_1 + y_2(t) \cdot V_2$$

$$y_1(0) = C_1$$
$$y_2(0) = C_2$$



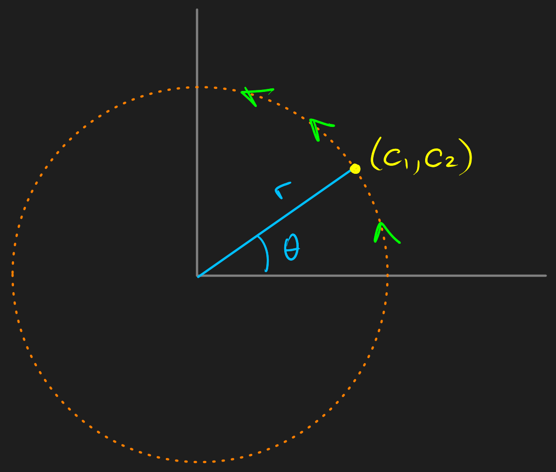

Lo escribo en polares :

$$C_1 = r \cdot \cos\theta$$
$$C_2 = r \cdot \sin\theta$$

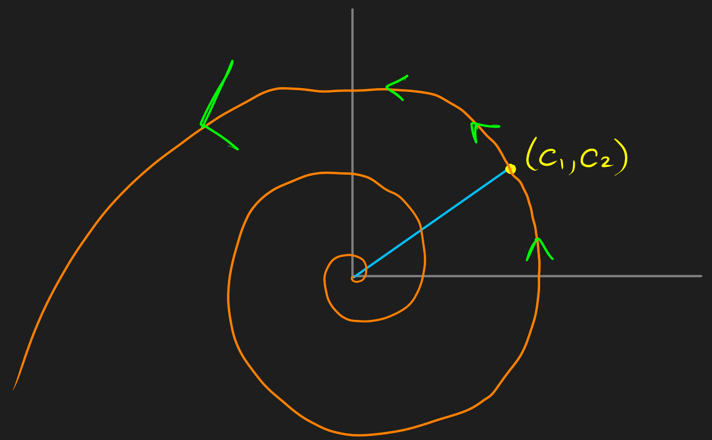
(para algún $r$ y $\theta$ fijos!)

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cdot r \cdot \cos(\theta - \beta t)$$
$$y_2(t) = e^{\alpha t} \cdot r \cdot \sin(\theta - \beta t)$$

- Si $\alpha = 0$, tengo una circunferencia :

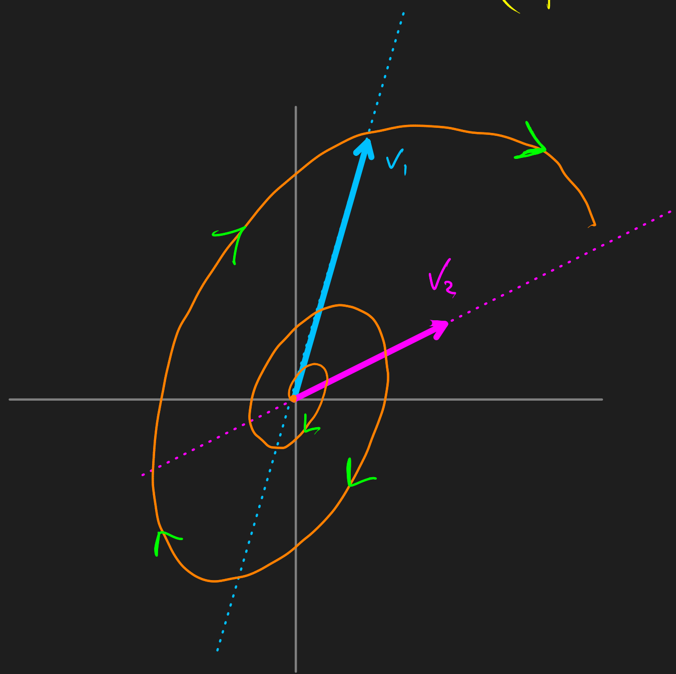


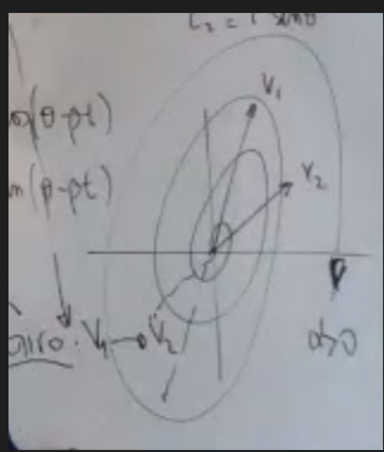

Cuando $\alpha > 0$, se va a infinito




Cuando $\alpha < 0$ : estable (se va al $(0,0)$)

Giro $V_1 \xrightarrow{\text{hacia}} V_2$ (por eso elegimos caso $\lambda = \alpha - \beta t$)



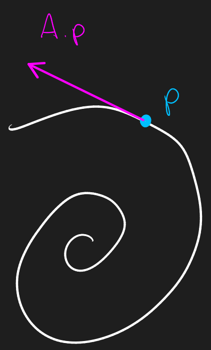



# Truco

- Si: $X(0) = \overset{\text{elijo}}{p}$

$$x'(0) = A\,X(0) = \underbrace{A.p}_{}$$

vector tangente: apunta hacia donde gira.




# Linealización

$$x' = F(X)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(x,y) \qquad F \text{ no lineal}$$

Cuando la derivada es cero ⇒ no me muevo
⇒ me quedo en el lugar

- Si: $F \in C^1$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$ / $F(X_0) = \vec{0}$

Pto. de equilibrio

- Si: $DF(X_0)$ tiene todos los autovalores con $\mathbb{R}e \neq 0$

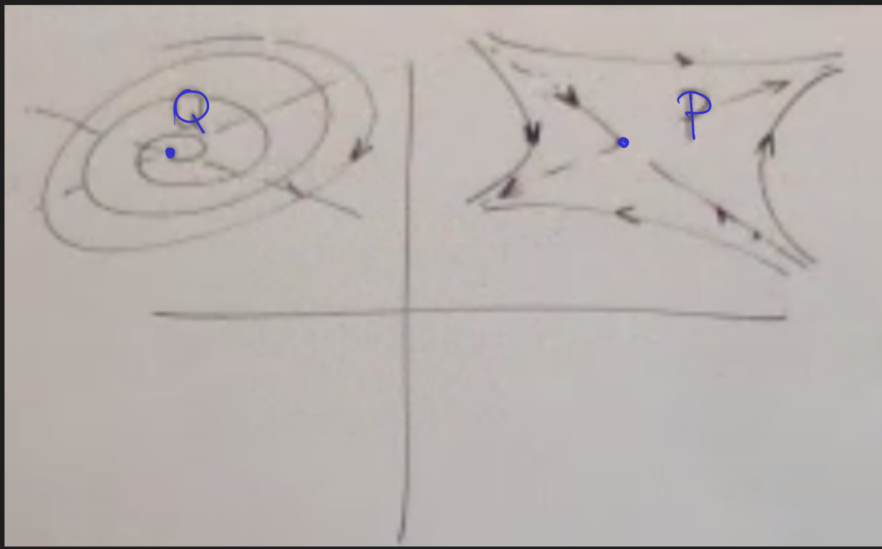
Parte Real

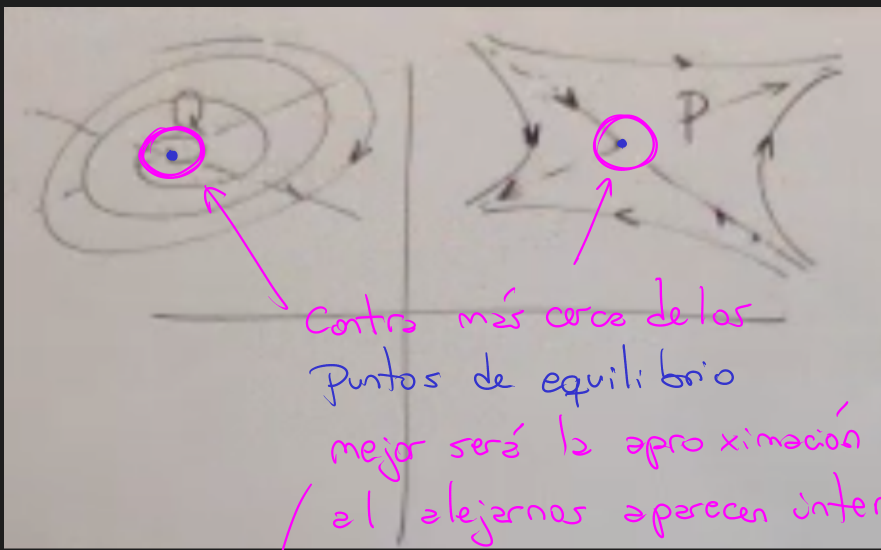
$$y = X - X_0$$

Taylor con $F(X_0) = 0$

$$y' = x' = F(X) \simeq DF(X_0)(X - X_0) = A.y$$

$$\boxed{\text{Es razonable mirar} \quad y' = Ay}$$




Contra más cerca de los puntos de equilibrio mejor será la aproximación

(al alejarnos aparecen interacciones entre ambos puntos)

---

## Pregunta "Finales"

- Alguna versión del Teo de Green
- Ejercicios no cuentosos, más bien conceptuales

Fin