

Consultar Teóricas

Sep 04 / 02 / 21

Superficies Parametrizadas

$$S \subset \mathbb{R}^3 \text{ (subconjunto) /}$$

$$\exists D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ (región elemental)}$$

$$\text{y } T: D \rightarrow S \text{ continua y sobreyectiva}$$

$$(u, v) \mapsto p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}$$

Caso particular de gráficos de func.

Ej:

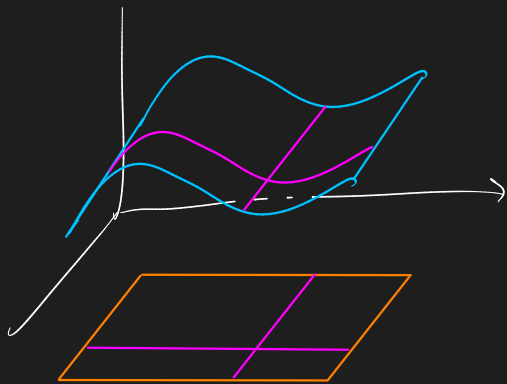
$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

$$S = \text{Gr}f(f)$$

$$T: D \rightarrow S$$

$$T(x, y) = (x, y, f(x, y))$$



"Hilos de una sábana"

Superficies de Revolución

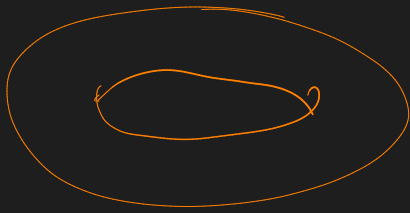
Ver notas de Consultas Prácticas #4 de hoy,

• Dos Parámetros:

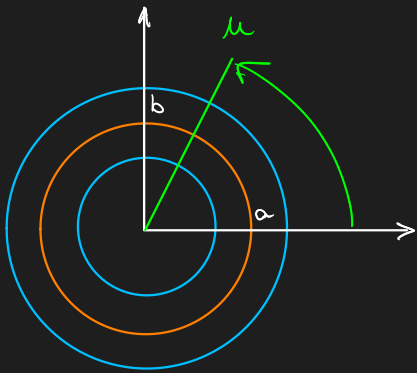
1. para ubicar el punto sobre el cual está la circunferencia que se forma al revolucionar

2. otro para indicar el ángulo de giro de esa circunferencia.

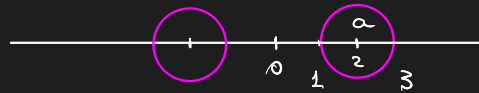
Rosquilla



Arriba :



Sección



Para cada $u \in [0, 2\pi)$ tenemos un círculo

Sus coordenadas son:

$$x = r(r) \cdot \cos(u)$$

$$y = r(r) \cdot \sin(u)$$

$$z = b \cdot \sin(r)$$

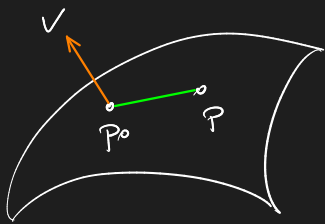
$$r(x) = a + b \cdot \cos(r)$$

$$T(u, r) = \left((a + b \cdot \cos r) \cdot \cos u, (a + b \cdot \cos r) \cdot \sin u, b \cdot \sin r \right)$$

Suavidad, tangentes, normales

Normal geométrica

$$S \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ sup}$$



$$p_0 \in S$$

v un candidato a vector normal unitario

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \left\langle \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, v \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow v$ se dice normal y el plano tangente a S en p_0 tiene ecuación:

$$\Pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle (x, y, z) - p_0, v \right\rangle = 0 \right\}$$

Teo:

Si $T: D \rightarrow S$ es regular \rightarrow $\begin{pmatrix} T_u \neq 0 \\ T_v \neq 0 \\ T_u \nparallel T_v \end{pmatrix}$
y diferenciable

$$\begin{aligned} T_u(u, v) &= \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \\ T_v(u, v) &= \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow S$ tiene vector normal dado por

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

donde

$$T_u \times T_v = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Área:

$$T: D \rightarrow S \text{ regular}$$

$$A(S) = \int_D \|T_u \times T_v\| du dv$$

↑ Área de los paralelogramitos

Superficies de Nivel

$$S: S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = a \}$$

con $F \in C^1$,

$$\nabla F(p) \neq \vec{0} \quad \forall p \in S$$

$\Rightarrow S$ tiene normal dada por:

T.F.I

$$S: S = F^{-1}(a)$$

$$y \quad p \in S \quad (F(p) = a)$$

$$y \quad \nabla F(p) \neq \vec{0}$$

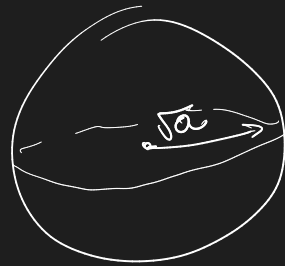
$$p = (x_0, y_0, z_0)$$

$\Rightarrow \exists U \subset \mathbb{R}^2$ entorno de (x_0, y_0)

$V \subset \mathbb{R}$ entorno de z

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = a\}$$

$$a > 0$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$\exists \varphi: U \rightarrow V$ diferenciable

tal que

$$S \cap (U \times V) = \text{Gráf}(\varphi)$$

