Eze

Práctica

Jupiter. Feb 18

Teorema de Gauss

Ω región tipo N en $\mathbb{R}^3$

$S = \partial\Omega$

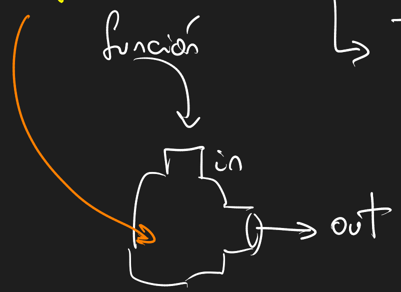
operador diferencial

general

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial\Omega_{ext}} F \, d\vec{S}$$

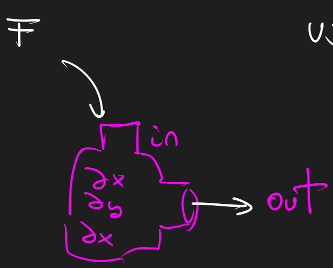
Operador

↳ Toma funciones como input



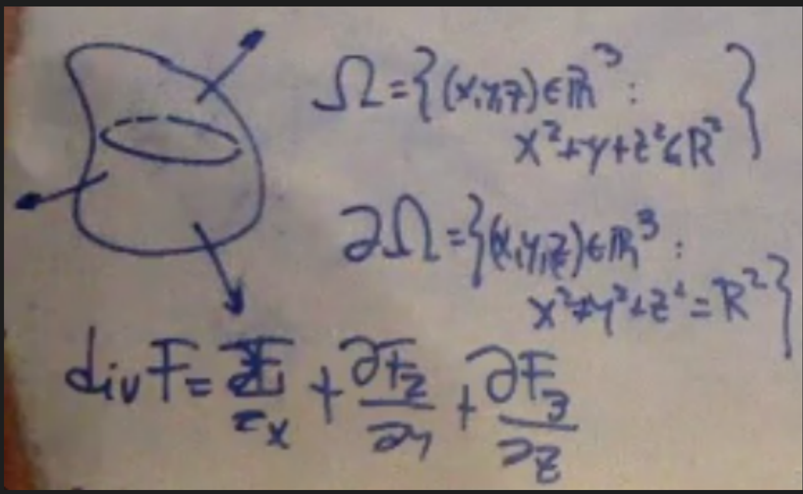
Operador diferencial

usa derivadas parciales



$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_x \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

$\nabla \cdot F = \langle \nabla, F \rangle$



div positiva : Fuente

div negativa : Sumidero

Ej: $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$

$\Omega = B(0,R) = \{ p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| \leq R \}$

Calcular $\displaystyle\int_{\partial\Omega ext} F \cdot d\vec{S} = \,?$

$$\operatorname{div} F\,(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

$$\int_{\partial\Omega ext} F \cdot d\vec{S} = 3 \int_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 \, dV$$

esféricas

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \int_0^{\pi} r^2 \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta$$

$$= 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \left(-\cos \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{12}{5} R^5 \cdot \pi$$

Como pedía con normal INTERIOR:

$$\boxed{\int_{\partial\Omega_{ext}} F \cdot d\vec{S} = -\frac{12}{5} R^5 \cdot \pi}$$

Ej 15)

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,(2 - \cos(2\theta))\,, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},$$

donde θ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

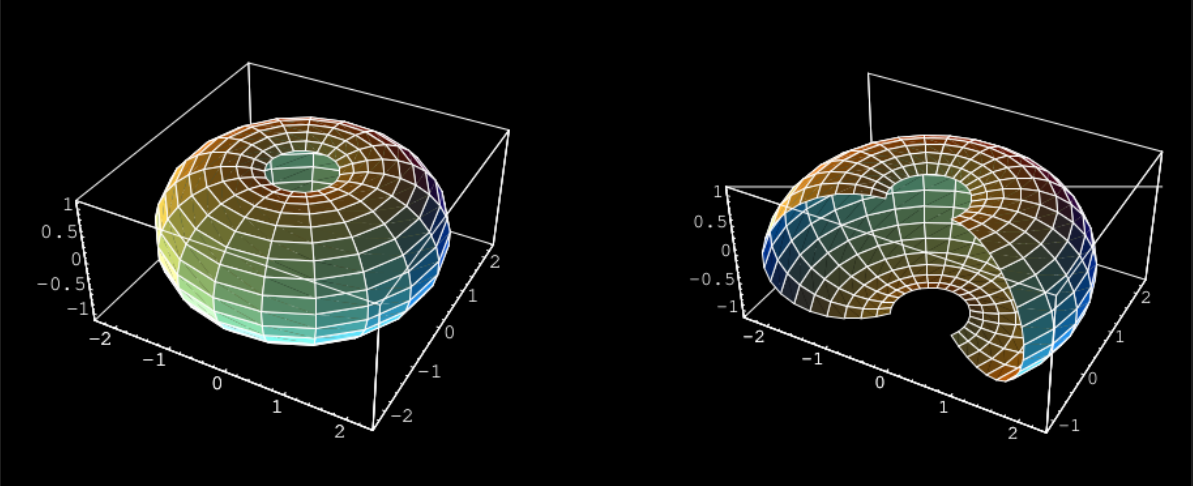
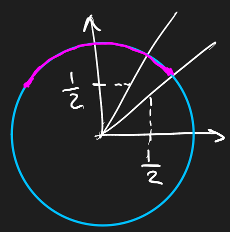


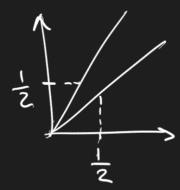
Figura 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S; en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el flujo a través de S en el sentido "externo" del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

$$r(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(2 - \cos(2\theta)\right) \qquad \theta \in \left[\pi/6, \tfrac{5}{6}\pi\right]$$





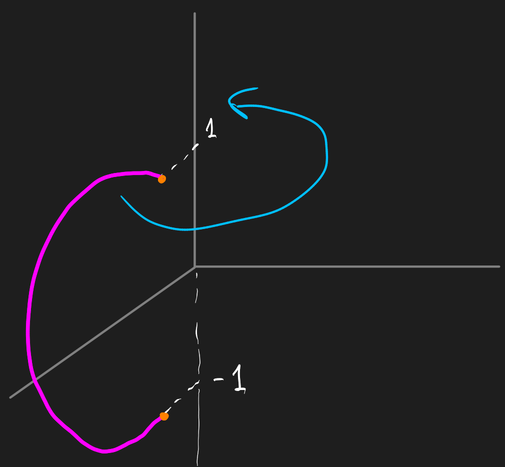
La curva será

$$\sigma(\theta) = \left(r(\theta)\cdot \sin\theta,\ 0,\ r(\theta)\cdot\cos\theta\right)$$

- $$\sigma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 1\right)$$

- $$\sigma\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ -1\right)$$



Una parametrización de S (revolución de σ) es

$$T(\theta,\varphi) = \left(x(\theta) \cdot \cos\varphi \,,\; x(\theta) \cdot \sin\varphi \,,\; z(\theta) \right)$$

El campo F es :

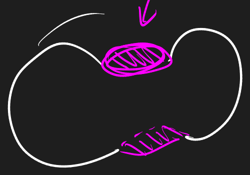
$$F(x,y,z) = (x, y, -2z)$$

$$\operatorname{div} F = 0$$

Cerramos la sup S :

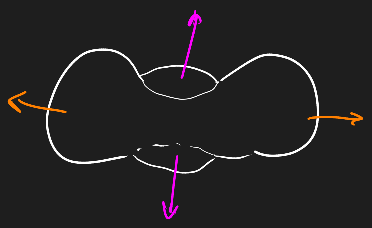
Opción A)

tapas D_1, D_2



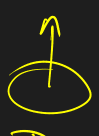
D_1, D_2 discos

- D_1 radio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ altura 1
- D_2 radio $\frac{\sqrt{2}}{3}$ altura -1



$$\Omega \,/\, \partial\Omega = S \cup D_1 \cup D_2$$

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dv = \int_S F\, d\vec{S} + \int_S F\, d\vec{S} + \int_S F\, d\vec{S}$$



D_1

no compongo nada, hablo de x, y, z general

$$\int_{D_1} F\, d\vec{S} = \int_{D_1} \left\langle F(x,y,z), (0,0,1) \right\rangle dS$$

$$= \int_{D_1} -2 \cdot \underbrace{z}_{=1 \text{ siempre sobre el disco.}} \, dS =$$

$$= -2\pi \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\pi \;//$$

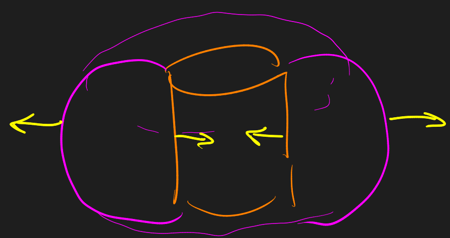
D_2

$$\int_{D_2} F d\vec{S} = \int_{D_2} \langle F(x,y,z), (0,0,-1) \rangle \, dS$$

$$= -\frac{2}{3}\pi \;//$$

$$\boxed{\int_S F d\vec{S} = \frac{4}{3}\pi}$$

Opción 3)



$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 / \partial\Omega = S \cup C$$

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \; z \in [-1,1] \right\}$$

η interior a C:

$$\eta(x,y,z) = \frac{(-x,-y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\int_S F\, d\vec{S} = \int_S \langle F(x,y,z), \eta(x,y,z)\rangle \underbrace{dS}$$

$$\langle F(T(u,v)), \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}\rangle \overbrace{\|T_u\times T_v\|\, du\, dv}$$

$\Rightarrow$ Gauss dice que

$$\int_{C_{int}} F\, d\vec{S} = \int_{C_{int}} \left\langle (x,y,-2z), \frac{(-x,-y,0)}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right\rangle dS$$

$$= \int_{C_{int}} -\frac{(x^2+y^2)}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\, dS$$

$$= -\int_{C_{int}} \frac{1}{\sqrt{3}}\, dS$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Área (cilindro)}$$

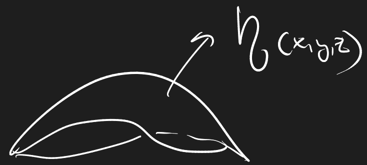
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi$$

Junto todo y fin

En general

S sup



$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$T : D \to S \quad \text{param}$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v),$$

sí lo conozco

sin →

$$\int_S F \cdot d\vec{S} \to \int_S \langle F(x,y,z), \eta(x,y,z) \rangle \, dS$$

$$\int_S F \cdot d\vec{S} \to \int_D \left\langle F(T(u,v)), \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \right\rangle \|T_u \times T_v\| \, du\,dv$$

es espacio de parámetros

elem de área del espacio de parámetros