

Ezequiel

Continuidad $\xleftrightarrow{\text{opuesto}} \text{Taza de Arroz}$

Repaso

Curvas y Parametrizaciones

$C \subset \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3) conjunto tal que

existe

$\sigma : [a, b] \rightarrow C$ continua
sobreyectiva

Ejemplos :

$$\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

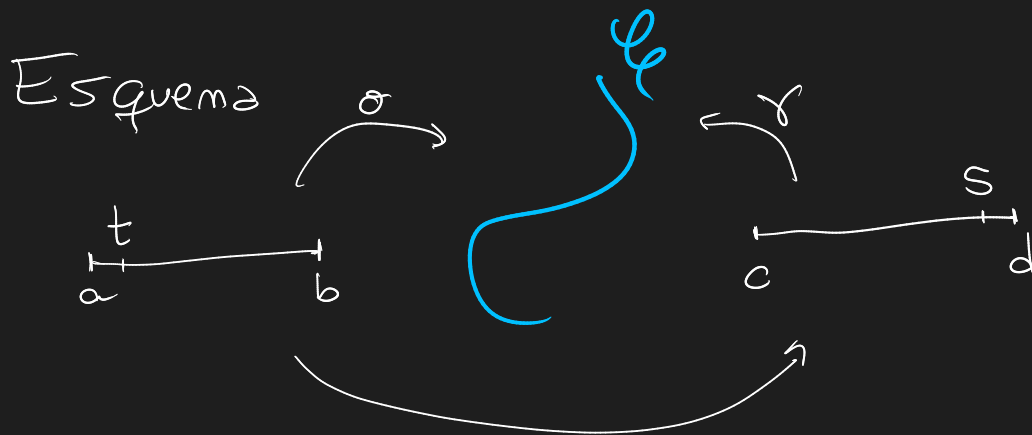
$$\gamma : [\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$$

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Reparametrizaciones



h biyección continua
 h^{-1} cont.
($h \in C^1$ y $h^{-1} \in C^1$)

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\gamma : [c, d] \rightarrow \mathcal{C}$$

Dos Problemas

- 1) Dada σ y h , conseguir γ
- 2) Dada σ y h , encontrar h

1) Si σ parametriza \mathcal{C}

y h es una biyección continua,
puedo definir

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s)) \quad \text{que parametriza } \mathcal{C}.$$

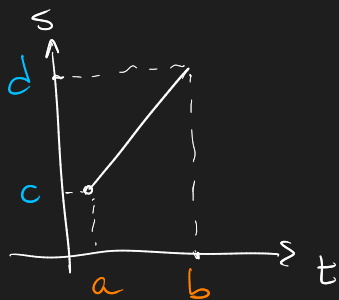
Cambio de Intervalo.

Tengo $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$

Quiero $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathcal{C}$

Necesito

$h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ biyectiva,
continua



$$h(t) = (d-c) \frac{(t-a)}{b-a} + c$$

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$$

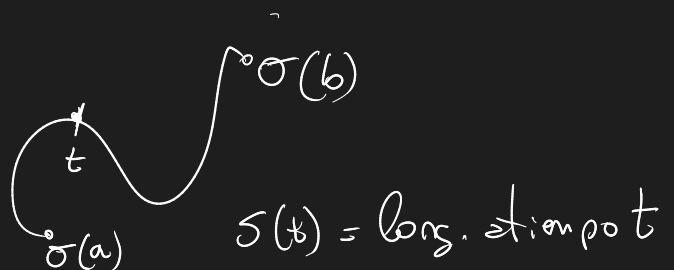
Parametrización por Longitud de Arco

$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ regular $\left(\begin{array}{l} \sigma \in C^1 \\ \sigma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [a, b] \end{array} \right)$

Buscamos

$\gamma : [0, \text{long}(\mathcal{C})] \rightarrow \mathcal{C}$

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| dr$$



Podemos definir

$$\gamma : [0, \text{Long}(\mathcal{C})] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\gamma(s) = \sigma(s'(t))$$

Teo :

Si: σ, γ son param regulares de \mathcal{C}

$$\Rightarrow \exists h : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$h \in C^1, h^{-1} \in C^1,$$

$$h'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$$

Aplicación

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{C} \text{ curva, } \sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}, \\ \gamma : [c, d] \rightarrow \mathcal{C}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dos params.} \\ \text{regulares} \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

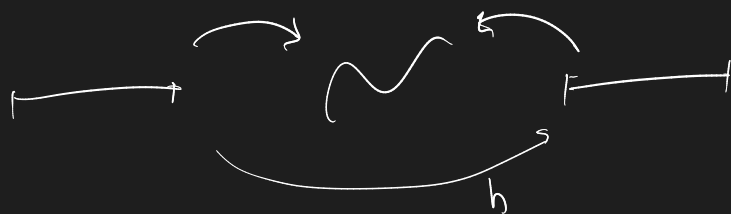
Obs:

$$\exists h: [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$h \in C^1 / h'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\left((h^{-1})'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [c, d] \right)$$

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$$



$$\int_c^d f(\gamma(s)) \cdot \|\gamma'(s)\| ds =$$

$$= \int_c^d f(\sigma(h^{-1}(s))) \cdot \|\underbrace{\sigma'(h^{-1}(s)) (h^{-1})'(s)}_{\in \mathbb{R}}\| ds$$

$$= \dots \cdot \underbrace{|(h^{-1})'(s)|}_{\in \mathbb{R}} ds$$

$$\begin{aligned} t &= h^{-1}(s) \\ dt &= (h^{-1})'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt \end{aligned}$$

en el otro caso también queda igual.

∴ b param no influye ✓

