

# Orientación de Superficies

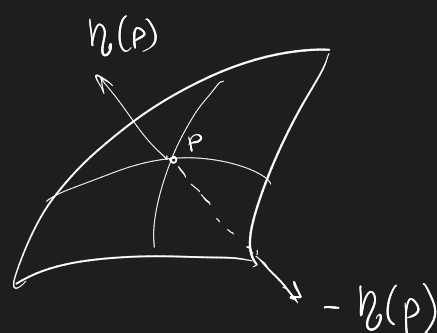
$S \subset \mathbb{R}^3$  superficie

$(\exists T : D \rightarrow S \text{ continua sobreyectiva})$



$S$  se dice orientable si:

$\exists \eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$   
normal continua



## Orientaciones y parametrizaciones

$T : D \rightarrow S$ ,  $D$  Dominio elemental

(cerrado y acotado)

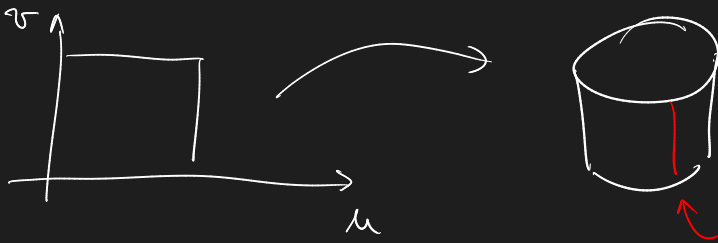
si  $T$  es regular ( $\Rightarrow$  inyectiva)

$\Rightarrow S$  orientable.

$$\begin{array}{ccc}
 D & S & \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) \longmapsto p = T(u, v) & \longmapsto & \eta(p) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \\
 & & \text{o bien}
 \end{array}$$

$$\eta(p) = -\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

## Casos de Interés



$$T(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \quad \text{No es regular}$$

(no es inyectiva)

$$u \in [0, 2\pi]$$

$$v \in [a, b]$$

$$D = [0, 2\pi] \times [a, b]$$

No puedo usar el Teorema así como así.

$$T_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$T_v = (0, 0, 1)$$

$$T_u \times T_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

Obs :  $p \in S, p = (x, y, z)$

$$\Rightarrow \eta(p) = (x, y, z)$$

No inyectividad No es problema !

Pues :

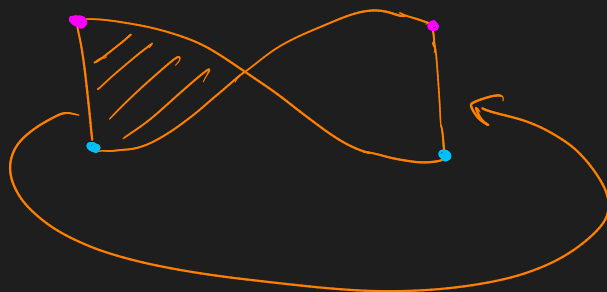
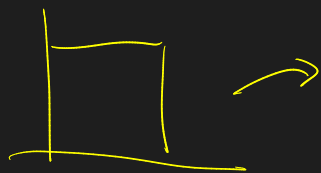
$$(u_0, v_0) \xrightarrow{T} p$$

$$(u_1, v_1) \xrightarrow[\#]{T} p$$

$$\text{y } T_u \times T_v(u_0, v_0) = T_u \times T_v(u_1, v_1) \checkmark$$

Se pegan con la misma normal.

• Otro caso donde  $S$  no es orientable



Cinta de Möbius

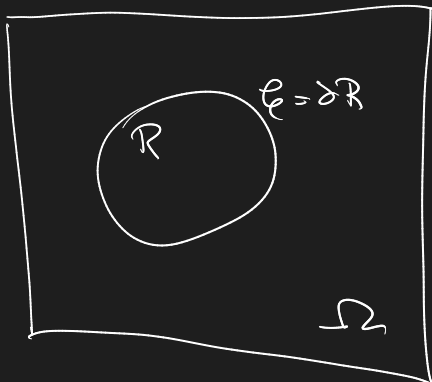
# Teorema de Green

## Ingredientes

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto
- $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  campo  $C^1$   
 $F = (P, Q)$
- $R$  región tipo III,  $R \subset \Omega$

$\partial R = \mathcal{C}$  cerrada simple,  
difer. a trozos

estática:

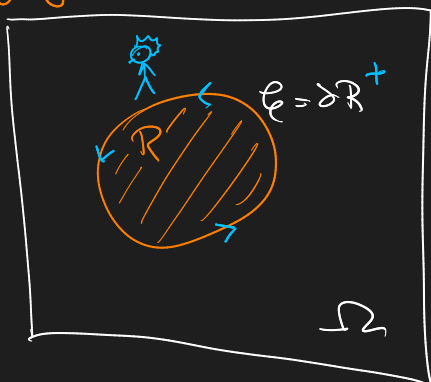


Teo:

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\mathcal{C}} F d\vec{s}$$

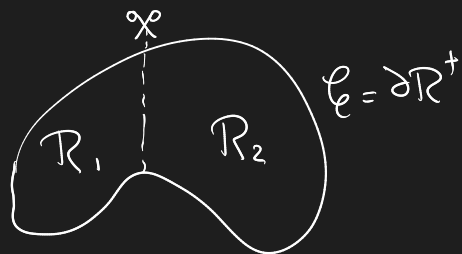
donde  $\mathcal{C}$  está orientada  
positivamente.

Agrego orientación



# Extensiones del Teorema

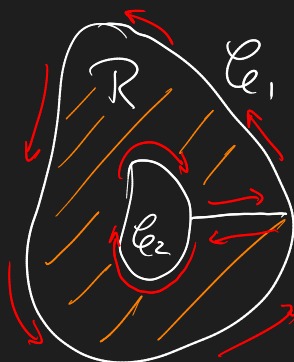
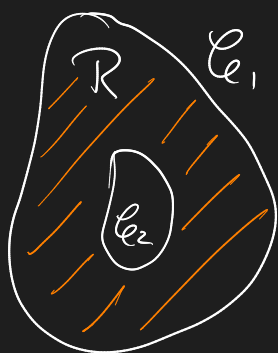
1) a) Regiones que se descomponen



$$C_1 = \partial R_1^+$$

$$C_2 = \partial R_2^+$$

b) Agujeros  $R, C = \partial R, C = C_1 \cup C_2$



$$\iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy = \int_{C_1} P \, dx + Q \, dy + \int_{C_2} P \, dx + Q \, dy$$

(antihorario)                      (horario)

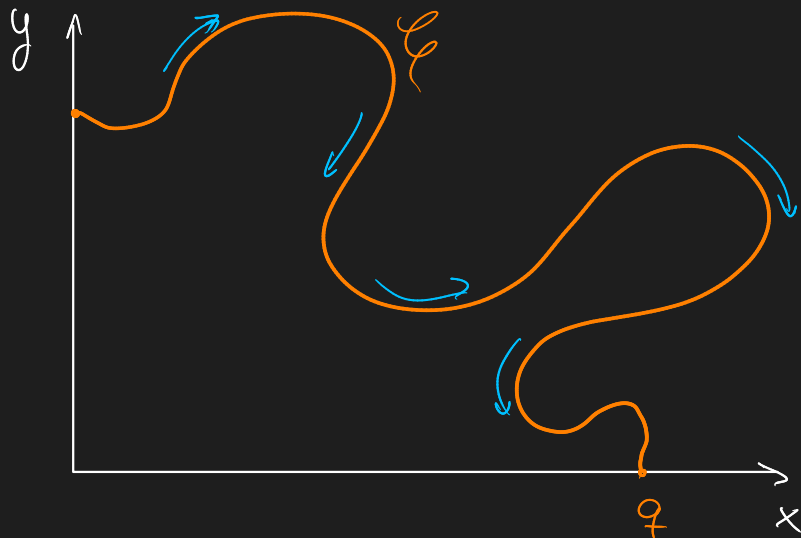
↙ + 2 trocitos que se anulan

Aplicación

(Cerrando Curvas)

Situación:

$C$  curva (no cerrada)  $f$  es



$F$  es un campo  $F = (P, Q)$  fco

Ejemplo (mismo que la práctica):

$C$  dada y orientada por

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t)$$

$$t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$$

$$F(x,y) = (2 \cos(x^2 y) - xy - 2y, x^2 \cos(x^2 y) + 3x)$$

Plan A: Resolver e mano  $\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$

• Plan B: Completar la curva y usar Green

Definiendo curvas que la cierren, de forma  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$

que se simplifique el cálculo junto al campo,

Green:

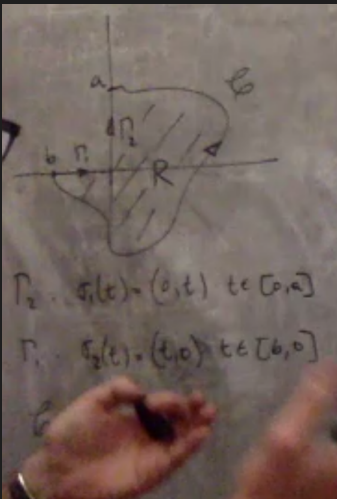
$$-\iint_R \overbrace{Q_x - P_y}^{\text{Rotor}} dx dy = \int_C F d\vec{s} + \int_{\Gamma_1} F d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} F d\vec{s}$$

sentido opuesto

• Si fuerz campo gradiente:

$$\hookrightarrow Q_x - P_y = 0$$

Ejemplo



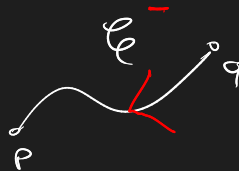
Obs:

$C, \Gamma_1, \Gamma_2$  ya están orientadas

(Dada una curva  $C$  orientada,  
 $C^-$  indica su orientación inversa)

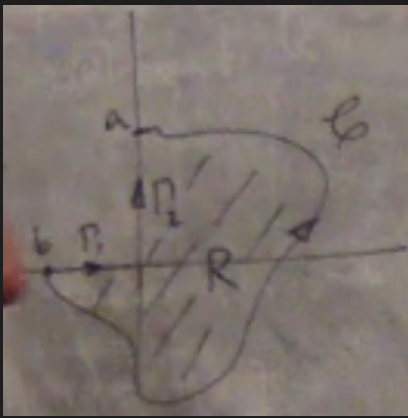
Notaciones

Si

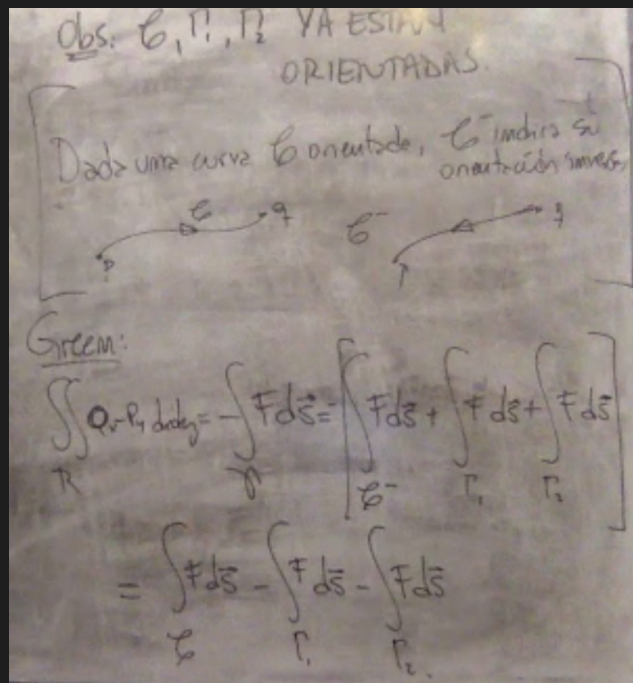


Para Curvas Cerradas





$$C \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \gamma \text{ orientada}$$



En vez de decir  
"Orientación positiva/negativa"

Podemos decir

"Curva orientada de manera compatible con la región"





