

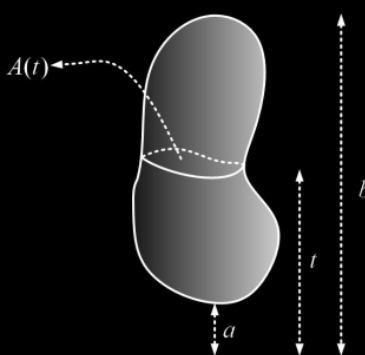
Práctica 0: Repaso de integración y cambio de variables

1. PRINCIPIO DE CAVALIERI

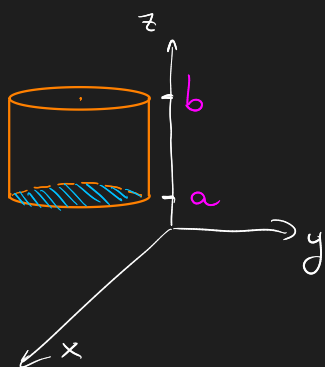
Considere un cuerpo que ocupa una región en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$. Entonces el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^b A(t) dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenida al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 1. Calcular el volumen de una región cilíndrica, utilizando el Principio de Cavalieri. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula *superficie de la base por altura*.



$$A = \int_{z=a}^{z=b} \pi \cdot r^2 \cdot dz = \pi \cdot r^2 \cdot \int_a^b 1 \cdot dz$$

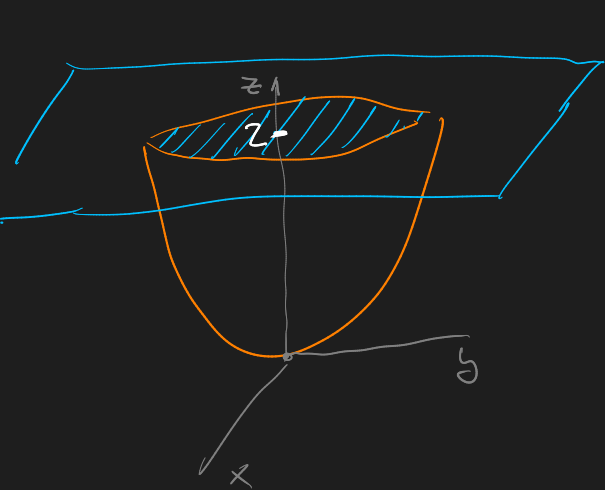
$$= \pi \cdot r^2 \cdot (b-a)$$

$$\text{Si } h = b - a$$

$$\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

↙ $\times \int_a^b$

Ejercicio 2. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, utilizando el Principio de Cavalieri.



$$V = \int_0^2 \pi \cdot r^2 \cdot dz$$

$$S: z = 2$$

$$\Rightarrow z = x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$r = \sqrt{z} \quad \begin{cases} 0 \leq r(z) \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$V = \int_0^2 \pi \cdot (\sqrt{z})^2 dz$$

$$= \int_0^2 \pi \cdot |z| dz$$

$z \geq 0$
pues
 $z = x^2 + y^2 \geq 0$

$$= \pi \int_0^2 z dz =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \pi \cdot \frac{2^2}{2} = 2\pi$$

$$V = 2\pi$$

2. TEOREMA DE FUBINI

Ejercicio 3. Sea R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y \, dA$

(b) $\iint_R x \cos(xy) \, dA$

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \int_{y=0}^1 \int_{x=-1}^1 x^2 \cdot y \, dx \, dy = \\
 & = \int_{y=0}^1 y \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 dy = \\
 & = \int_{y=0}^1 y \cdot \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) dy = \\
 & = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=-1}^1 x \cdot \cos(xy) \, dx \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
 v &= x \cdot y \\
 dv &= y \cdot dx \quad \left. \frac{d}{dx} \right.
 \end{aligned}$$

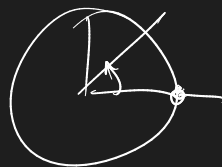
$$\int_{x=-1}^1 \left(\int_{y=0}^1 x \cdot \cos(xy) \, dy \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 v &= x \cdot y \\
 dv &= x \cdot dy \quad \left. \frac{d}{dy} \right.
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\int_{v=0}^{v=x} \cos(v) \cdot dv \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^1 \left(\sin(v) \Big|_0^x \right) dx$$

$$= \int_{x=-1}^1 \left(\sin x - \overset{=0}{\sin 0} \right) dx$$

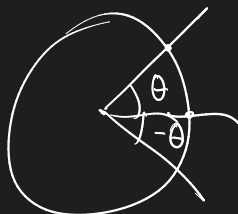


$$= \int_{-1}^1 \sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_{-1}^1 = -\cos 1 + \cos(-1)$$

$$B = \cos(-1) - \cos 1$$

Pero!



$$B = 0$$

Pues

$$\cos(-x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y) dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y)$

(b) $F(x, y) = f(x) + g(y)$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_y \int_x F(x, y) &= \int_c^d \int_a^b f(x) \cdot g(y) dy dx \\ &= \int_c^d f(x) \cdot \left(\int_a^b g(y) \cdot dy \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{b) } \iint_R F dA = \cancel{\int_b^a g(y) dy} + \cancel{\int_x^a f(x) dx} \quad \text{¡No!}$$

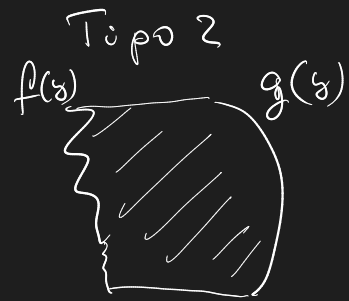
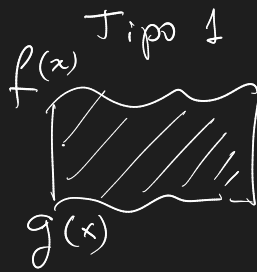
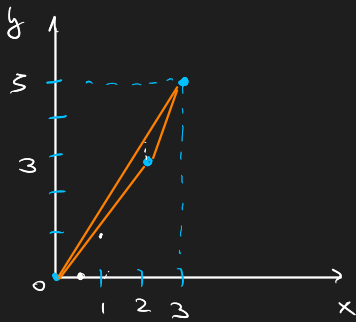
$$= \int_c^d \int_a^b (f(x) + g(y)) dx \cdot dy$$

$$= \int_{y=c}^d \left(g(y) \cdot (b-a) + \int_a^b f(x) dx \right) dy$$

$$= (d-c) \cdot \int_a^b f(x) dx + (b-a) \int_c^d g(y) dy$$

3. DESCRIPCIÓN DE REGIONES

Ejercicio 5. Sea T el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$ y $(3,5)$. Describirlo como una región de tipo 1, y como una de tipo 2. Hallar su área.



• Segmento Sup:

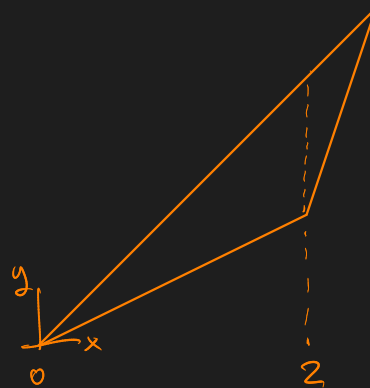
$$\left. \begin{aligned} y &= a \cdot x \\ a &= \frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3} \end{aligned} \right\} y = \frac{5}{3} \cdot x$$

• Seg. inferior izq:

$$y = \frac{3}{2} x$$

• Seg inf der:

$$y = \left(\frac{5-3}{3-2} \right) \cdot x - 1$$



$$A_{\text{rea}_{\text{Tipo I}}} = \int_{x=0}^2 \int_{y=\frac{3}{2}x}^{\frac{5}{3}x} 1 dy dx + \int_{x=2}^3 \int_{y=2x-1}^{\frac{5}{3}x} 1 dy dx$$

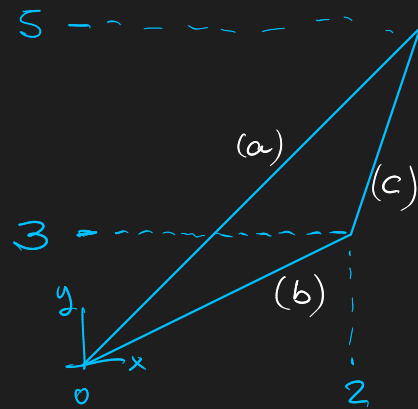
$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left(\frac{5}{3}x - \frac{3}{2}x \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{5}{3}x - (2x-1) \right) dx \\
&= \left. \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x^2 \right|_0^2 + \left. \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{2}x^2 + x \right|_2^3 \\
&= \frac{5}{6} \cdot 4 - \frac{3}{4} \cdot 4 + \left(\frac{5}{6} \cdot 3^2 - 3^2 + 3 - \left(\frac{5}{6} \cdot 4 + 4 - 2 \right) \right) \\
&= \frac{10}{3} - 3 + \frac{15}{2} - 9 - \frac{10}{3} + 4 + 1 \\
&= -7 + \frac{15}{2} \\
&= -\frac{14}{2} + \frac{15}{2} \\
&= \frac{1}{2} //
\end{aligned}$$

Per tipo 2 :

(a) $x = \frac{3}{5}y$

(b) $x = \frac{2}{3}y$

(c) $x = \frac{y+1}{2}$



Muevo y de 0 a 3 y de 3 a 5 //

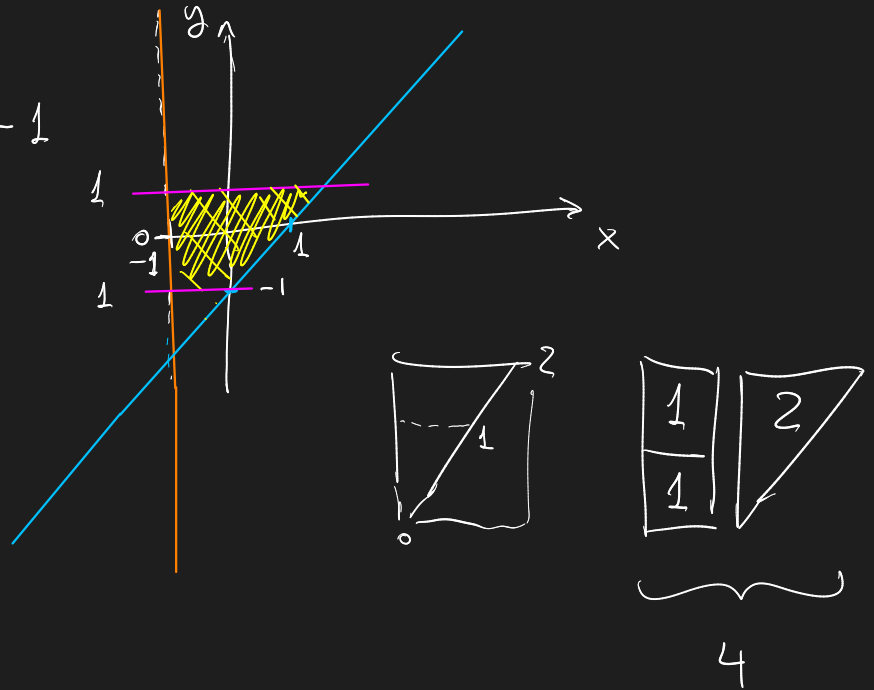
Sáb 30/01/21

Ejercicio 6. Graficar cada una de las siguientes regiones dadas analíticamente, y calcular el área respectiva.

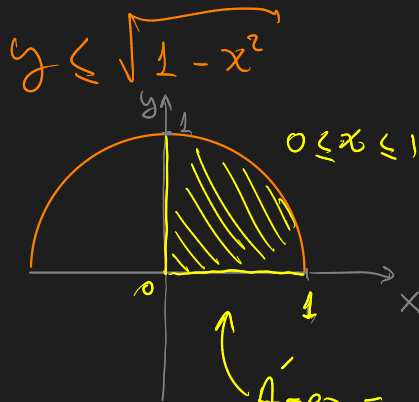
(a) $-1 \leq x \leq 1+y$; $-1 \leq y \leq 1$

(b) $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$; $0 \leq x \leq 1$

a) $x \geq -1$
 $x \leq 1+y \Rightarrow y \geq x-1$



b) $y \geq 0$



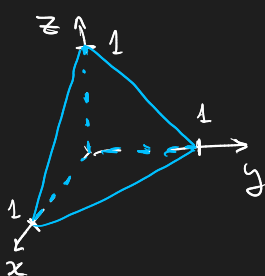
$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$y^2 \leq 1 - x^2$$

$$|y| \leq \sqrt{1-x^2} \rightarrow \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Área} = \frac{\pi}{4} \left(\text{pues } \frac{\pi \cdot r^2}{4} \right)$$

Ejercicio 7. Sea P la pirámide cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Describirla analíticamente. Hallar su volumen.

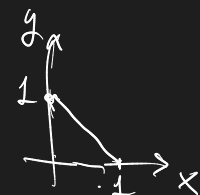


$$0 \leq z \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 - z$$

$$0 \leq x \leq 1 - y - z$$

$$y \leq 1 - x$$



$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-z \\ 0 \leq x \leq 1-y-z \end{cases}$$

$$\int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{1-z} \int_{x=0}^{1-y-z} 1 \cdot dx dy dz =$$

$$= \int \int (1-y-z) dy dz$$

$$= \int_{z=0}^1 \left((1-z)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-z} - z(1-z) dz$$

$$= \int_{z=0}^1 1-z - \frac{(1-z)(1-z)}{2} - z + z^2 dz$$

$$= \int_{z=0}^1 1 - 2z + z^2 - \frac{(1-2z+z^2)}{2} dz$$

$$= \int_{z=0}^1 \frac{1}{2} dz - \int_0^1 z dz + \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

