

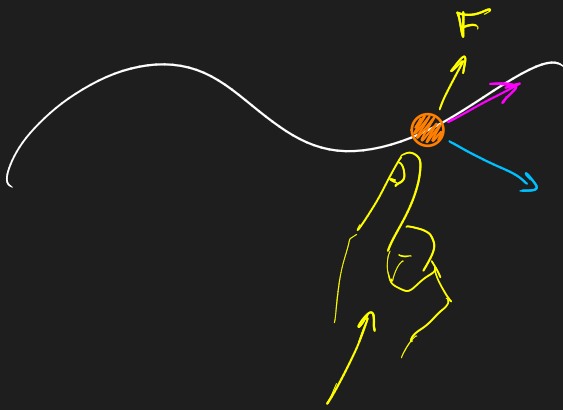
Teoría #3

Mars 02/02/21

• Guillermo Hatero

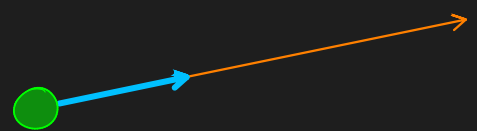
Integral Curvilíneas y Trabajo

Partícula sobre trayectoria



1) Trayectoria Rectilínea

caso: Fuerza F constante



y en la misma dirección de trayectoria,

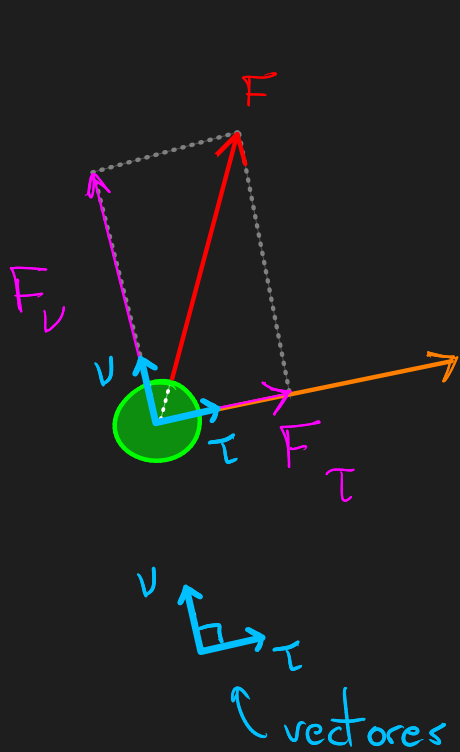
a) en el mismo sentido de desplazamiento:

$$\text{Trabajo Resultante} = + \underbrace{\|F\|}_{\text{Magnitud de la fuerza}} \times \text{distancia}$$

b) en el sentido opuesto al de desplazamiento:

$$\text{Trabajo Resultante} = - \|F\| \times \text{distancia}$$

Caso: Fuerza F constante



$$F = F_T + F_V$$

donde

$$F_{\tau} = (F \cdot \tau) \tau$$

vector unitario

$$F_v \perp T$$

vector
unitario
en
Sentido
de recorrido

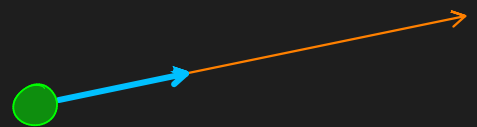
$$\text{Trabajo resultante} = (F \cdot t) \cdot \text{distancia recorrida}$$

Nota: F_v no ejerce trabajo.

2) Trayectoria Curvilínea

caso: Fuerza F constante

y en la misma dirección de trayectoria \mathcal{C}



Si $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es param. regular


5

$$\pi: t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

es una partición de $[a, b]$ "suficientemente fina"

cuando la partícula varía de $\sigma(t_{i-1})$ a $\sigma(t_i)$
el desplazamiento es

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \\ &\approx \sigma'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

Si pensamos que la fuerza f es constante
en el arco de curva 

Trabajo resultante:

$$\sum_{i=1}^n F(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y cuando $n \rightarrow \infty$,

la 2da sumatoria tiende a

Trabajo resultante:

$$\int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \overset{\text{prod. int}}{\sigma'(t)} \cdot dt$$

Orientación

La parametrización orienta a \mathcal{C}

Def:

Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo.

Se define a la

"integral curvilínea del campo F
sobre la curva orientada \mathcal{C} "

como

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b \underbrace{F(\sigma(t))}_{\mathbb{R}^3} \cdot \underbrace{\sigma'(t)}_{\mathbb{R}^3} dt$$

Prod. int.

Ejemplo: Helix \mathcal{H}

$$\sigma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$F: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} F \cdot ds &= \int_0^{4\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \\
&= \int_0^{4\pi} \langle (\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1) \rangle dt \\
&= \int_0^{4\pi} -\cos t \cdot \sin t + \cos t \cdot \sin t + t dt \\
&= \int_0^{4\pi} t dt \\
&= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{4\pi} \\
&= 8\pi^2 //
\end{aligned}$$

↑ Trabajo realizado por el campo F
sobre la partícula recorriendo \mathcal{H} .

Notación

$$\text{Si: } F = (P, Q, R)$$

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_{\sigma} P dx + Q dy + R dz$$

Notar que

la integral curvilínea **DEPENDE** de la parametrización

Si tenemos 2 paráms σ y γ

- Decimos que γ preserva la orientación de σ si

$$\gamma(c) = \sigma(a)$$

$$\text{y } \gamma(d) = \sigma(b)$$

$$\gamma: [c, d] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$$

También sabemos que
 $\gamma(t) = \sigma(h(t))$

- En caso contrario, de cómo que

γ invierte la orientación de σ

Teorema: Sea \mathcal{C} una curva suave, simple, abierta y $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ y $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathcal{C}$ dos parametrizaciones regulares. Si $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo y γ preserva la orientación de σ , entonces

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ , entonces

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Pregunta #4: ?

"Integral curvilínea" es siempre así? (cálculo de trabajo del campo \mathbf{F} y $\nabla \mathbf{F}$)

Campos Gradientes

F es campo gradiente si existe f /

$$\text{si } F : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow f : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{y } F = \nabla f$$

Teorema:

Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1

y $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ una param. regular de \mathcal{C} simple, suave

Entonces:

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Demo:

$$\text{Como } f(\sigma(t))' = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \cdot dt$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t))' \cdot dt$$

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds \stackrel{\text{TFC}}{=} f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) //$$