Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Verano 2021

Práctica 6: Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo orden

Ejercicio 1. Hallar la solución general de los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

a) $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\in \mathbb{R}^2}{X} = \underset{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}{A} \cdot \underset{\in \mathbb{R}^2}{X}$$

Polin. característico

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & \overbrace{-(-1)}^{+1} \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

donde $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$= \lambda(\lambda - 3) - (-2)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

autovalores de A : $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Autovectores :

λ_1 : $(\lambda_1 I - A) . V_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = V_1 \, e^{\lambda_1 t}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . e^{t}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$(\lambda_2 I - A) V_2 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -1 \\ 2 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 . V_{21} + (-1) . V_{22} = 0$$

$$2 . 1 - 1 . 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = V_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Base sol.

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \right\}$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot 1 \cdot e^{t} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{2t} \\ c_1 (-1) \cdot e^{t} + c_2 \cdot 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{t} + 2 c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Solución

$$\boxed{X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Además

- Si quiero que $X(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} = 0$$

como $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

- Si quiero que $X(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$X' = A X$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+8 & 5 \\ -10 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+8)(\lambda-7) + 50$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 8\lambda - 56 + 50$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+3)$$

Autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

$\lambda_1 = 2$: $\quad (\lambda I - A) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \lambda+8 & 5 \\ -10 & \lambda-7 \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} \lambda+8 & 5 \\ -10 & \lambda-7 \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=-3} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \right\}$$

$$\boxed{X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

- Si quiero que $X(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$

$\Rightarrow C_1 = 0$ y $C_2 \in \mathbb{R}$

- Si quiero que $X(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$

$\Rightarrow C_1 \in \mathbb{R}$ y $C_2 = 0$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Calc. online (https://matrixcalc.org/en/vectors.html)

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array}\right\} \in \mathbb{R} \text{ y distintos } \Rightarrow B_S = \left\{ V_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, V_2 e^{\lambda_2 t} \right\}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}\right\} \text{Todos distintos}$$

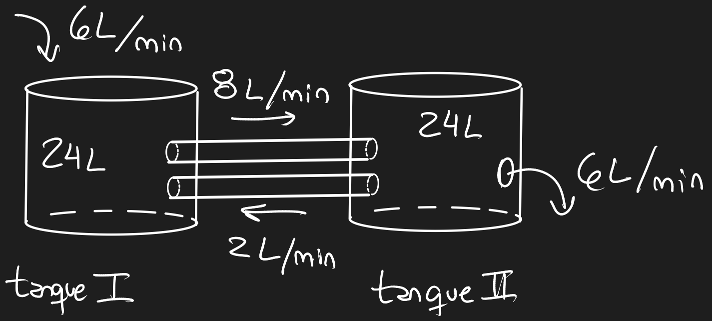
$$\Rightarrow B_S = \left\{ V_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, V_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, V_3 \cdot e^{\lambda_3 t} \right\}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea.

Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$.

¿Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque?



Notar similitud entre "posición y velocidad" (en un problema de MRU) con "volumen y velocidad" (en este problema)

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

(a) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Auto valores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & +1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Auto valores $\begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i = \bar{\lambda}_1 \end{cases}$

Digo

$\lambda = 1 + i$

Calculo auto vector

$$(\lambda I - A) V = \vec{0}$$

$$\left.\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|_{\lambda=1+i} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$$

$$i \cdot v_1 = -v_2$$

- Si $v_1 = i$:

$$(i)^2 = -1 = -v_2 \Rightarrow v_2 = 1$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sol X_1

$$X_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+i) \cdot t} \quad \in \mathbb{C} \,!$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} \cdot e^{it}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} \cdot \left(\cos t + i \sin t \right)$$

$$= \begin{pmatrix} i \cdot e^{t} \cdot \cos t + i \cdot e^{t} \cdot i \cdot \sin t \\ 1 \cdot e^{t} \cdot \cos t + 1 \cdot e^{t} \cdot i \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} i\cdot\cos t - \sin t \\ \cos t + i\cdot\sin t \end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{Re} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{Im} \right)$$

$$B_S = \left\{ e^{t}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{X(t) = C_1\cdot e^{t}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2\cdot e^{t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$

De calcu. online

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2-2i \\ \lambda_2 = 2+2i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Llamo

$\lambda = \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

$V = V_1 = \bar{V}_2$

$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Obtengo UNA solución compleja

$V.e^{\lambda t}$ donde $\lambda = (a+bi)$

- Separo

$V.e^{at}.e^{ibt}$

- Reescribo

$V.e^{at}.(\cos bt + i.\sin bt)$

- Distribuyo y tomo parte Re e Im como DOS elementos li de la base solución Bs

$Bs = \left\{ \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Real} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Imag.} \end{pmatrix} \right\}$

- Sol

$X(t) = C_1 . \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Real} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Imag.} \end{pmatrix}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Autovec:

$$(\lambda I - A) V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

$$X' = AX + B(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Resuelvo Homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & +1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 3) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Autovectores

$$(\lambda I - A) \cdot V = \vec{0}$$

de ej 1:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B_{SH} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} \;,\; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \right\}$$

$$X_H(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Sol. del Homogéneo.

Quiero sol particular

Uso Método de Var. de constantes

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + C_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

tal que

$$X_p'(t) = A \cdot X_p(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Resuelvo

$$\begin{pmatrix} e^{t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$F_2 + 2F_1$

$$\begin{pmatrix} e^{t} & -e^{2t} \\ e^{t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

despejo C_1'

$$e^t \cdot C_1' + 0 = t+4$$

$$C_1'(t) = (t+4) \cdot e^{-t}$$

despejo C_2'

$$e^t \cdot \overbrace{(t+4) \cdot e^{-t}}^{C_1'} - e^{2t} \cdot C_2' = 2$$

$$t+4 - e^{2t} \cdot C_2' = 2$$

$$-e^{2t} \cdot C_2' = 2-t-4$$

$$C_2' = (t+2) \cdot e^{-2t}$$

Integro C_1'

$$C_1(t) = \int C_1'(t)\,dt = \int (t+4) \cdot e^{-t}\,dt$$

$$= \int t \cdot e^{-t}\,dt + 4\int e^{-t}\,dt$$

$\vdots$

$$C_1(t) = -(t+5) \cdot e^{-t}$$

Integro C_2'

$$C_2(t) = \int C_2' \, dt = \int (t+2) \cdot e^{-2t} \, dt$$

$$\vdots$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{4}(2t+5) \cdot e^{-2t}$$

Volviendo

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + C_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$= -(t+5) \cdot \cancel{e^{-t}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \cancel{e^{t}} - \frac{1}{4}(2t+5) \cdot \cancel{e^{-2t}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \cancel{e^{2t}}$$

$$= \begin{pmatrix} -t-5 \\ t+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + \frac{5}{4} \\ -t - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Verifico que ande

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -t - \cancel{\frac{15}{2}} + \cancel{\frac{15}{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Solucion general X

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t)$$

$$\boxed{X(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X' = A \cdot X + B(t)$$

Resuelvo homogéneo

Calculo autovalores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(-1) \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)^2 - (-4)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 - 2i \\ \lambda_2 = 2 + 2i \end{cases}$$

Autovector

$$\left((2-2i).I - A\right).V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -(-1) \\ -4 & \lambda-2 \end{pmatrix} . V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2i\,V_1 + V_2 = 0 \xrightarrow{\times 2i} 4V_1 + 2i.V_2 = 0 \\ -4V_1 - 2i\,V_2 = 0 \end{cases}$$

$$4V_1 = -2i.V_2$$

$$V_1 = \frac{-2i}{4}.V_2$$

$$V_1 = -\frac{1}{2}i.V_2$$

elijo $V_2 = 1$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tengo una solución en $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} . e^{(2-2i)t}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} . e^{(2-2i)t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} . e^{2t} . e^{-2it}$$

$$= v \cdot e^{2t} \cdot \left(\cos(-2t) + i \sin(-2t) \right)$$

$$= v\, e^{2t} \cdot \cos(-2t) + v \cdot e^{2t} \cdot i \cdot \sin(-2t)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) - \frac{1}{2} i \cdot i\, e^{2t} \sin(-2t) \\ 1 \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) + 1 i\, e^{2t} \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) + e^{2t} \frac{1}{2} \cdot \sin(-2t) \\ e^{2t} \cdot \cos(-2t) + e^{2t} i \cdot \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) \\ e^{2t} i \cdot \sin(-2t) \end{pmatrix}}_{Im} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} \frac{1}{2} \cdot \sin(-2t) \\ e^{2t} \cdot \cos(-2t) \end{pmatrix}}_{Re}$$

$$B_{SH} = \left\{ e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix},\ e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix} \right\}$$

Necesito sol part.

Uso método de var. de constantes

$X_p(t) =$

$$= C_1(t)\, e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix} + C_2(t) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix}$$

tal que

$$X'_p(t) = A\, X_p + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para eso, calculo

$$Q(t) \cdot C'(t) = B(t)$$

$$\begin{pmatrix} | & | \\ X_{H1} & X_{H2} \\ | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(-2t) & -\frac{1}{2} e^{2t} \cdot \cos(-2t) \\ e^{2t} \cdot \cos(-2t) & e^{2t} \cdot \sin(-2t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C'_1\, \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(-2t) - C'_2\, \frac{1}{2} e^{2t} \cdot \cos(-2t) = e^{2t} \\ C'_1 \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) + C'_2\, e^{2t} \cdot \sin(-2t) = 4 \end{cases}$$

divido por e^{2t}

$$\begin{cases} C'_1\, \frac{1}{2} \cdot \sin(-2t) - C'_2\, \frac{1}{2} \cdot \cos(-2t) = 1 \\ C'_1 \cdot \cos(-2t) + C'_2 \cdot \sin(-2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$F_1 \times 2$

$$\begin{cases} C_1' \sin(-2t) - C_2' \cos(-2t) = 2 \\ C_1' \cdot \cos(-2t) + C_2' \cdot \sin(-2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

Notar que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ y $\cos\theta = \cos(-\theta)$

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t) - C_2' \cos(2t) = 2 \\ C_1' \cdot \cos(2t) - C_2' \cdot \sin(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$F_1 \times \cos 2t$

$F_2 \times \sin 2t$

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t)\cos(2t) - C_2' \cos^2(2t) = 2 \cdot \cos 2t \\ C_1' \cdot \cos(2t) \cdot \sin(2t) - C_2' \cdot \sin^2(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 2t \end{cases}$$

Sumo

$$0 \quad - C_2' \underbrace{\left(\cos^2 2t + \sin^2 2t\right)}_{=1} =$$

$$-C_2' =$$

$$C_2' =$$

Para C_1' hago lo mismo

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t) - C_2' \cos(2t) = 2 \\ C_1' \cdot \cos(2t) - C_2' \cdot \sin(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$F_1 \times \sin 2t$
$F_2 \times \cos 2t$

$$\begin{cases} -C_1' \sin^2(2t) - C_2' \cos(2t) \cdot \sin(2t) = 2 \sin 2t \\ C_1' \cdot \cos^2(2t) - C_2' \cdot \sin(2t) \cos(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \cos 2t \end{cases}$$

Sumo

$$-C_1' - 2C_2' \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

$$-C_1' - 2 \cdot \left(-2 - 4 \cdot e^{-2t}\right) \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

$$-C_1' + 2\left(2 + 4 e^{-2t}\right) \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

Integro C_1' y C_2'

Obtengo C_1 y C_2

Calculo

$$X_p(t) = C_1(t) e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix} + C_2(t) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix}$$

$$X_{General} = X_p + X_H$$

Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$
ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$
iii) $y'' - y' - 2y = 0$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x}.

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

(a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

Ejercicio 7. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

(i) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (ii) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(iii) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ (iv) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$

(v) $y(0) = 1$ (vi) $y'(0) = 1$

Ejercicio 8. En el interior de la Tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?

Ejercicio 9. La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina *ecuación de Euler*.

(a) Demuestre que el cambio de variables $x = e^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.

(b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x^2y'' + 2xy' - 6y = 0 \\ \text{ii)} & x^2y'' - xy' + y = 2x \end{array}$$

Ejercicio 11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

i)	$xy'' + 2y' + xy = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$
ii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{>0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iii)	$xy'' - y' - 4x^3y = 0,$	$I = \mathbb{R}_{<0},$	$y_1(x) = \exp(x^2).$
iv)	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$	$I = (-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty),$	$y_1(x) = x.$

El último ítem es un caso especial de la llamada *ecuación de Legendre*, esto es:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0,$$

correspondiente al caso $p = 1$, en los intervalos en que la ecuación es normal.

Ejercicio 12. Hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$, sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada.