

Resumen 1ª Parte.

Reparametrizaciones

- 1) Dada $\sigma(t)$ param. regulares de \mathcal{C}
y $h(t)$ biyección continua,
 $h^{-1}(s)$ continua,

Puedo definir

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s)) \quad \text{que parametriza a } \mathcal{C}$$

Parametrización por Longitud de Arco.

$$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{regular} \left(\begin{array}{l} \sigma \in C^1 \\ \sigma' \neq \vec{0} \end{array} \right)$$

Si

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| dr$$

entonces

$$\gamma : [0, \text{Long}(\mathcal{C})] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\gamma(t) = \sigma(s^{-1}(t))$$

Ver Consultar Teóricas 1

Cuando es regular?

$$\text{Si } \begin{cases} \sigma \in C^1 \\ \sigma'(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \end{cases} \Rightarrow \sigma \text{ es regular}$$

Recta tangente en t_0

$$L: \lambda \cdot \sigma'(t_0) + \sigma(t_0) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

L es Parametrizo

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$l(t) = (t - t_0) \cdot \sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$$

Longitud de curvas

$$S(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr, \quad t \in [a, b]$$

función
escalar

Integración sobre C

$$C \in \mathbb{R}^2$$

$$\sigma: [a, b] \rightarrow C \text{ regular}$$

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_C f \cdot ds = \int_C f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

↖ función escalar

• Integración de **Campos Vectoriales** sobre C

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

↖ función vectorial

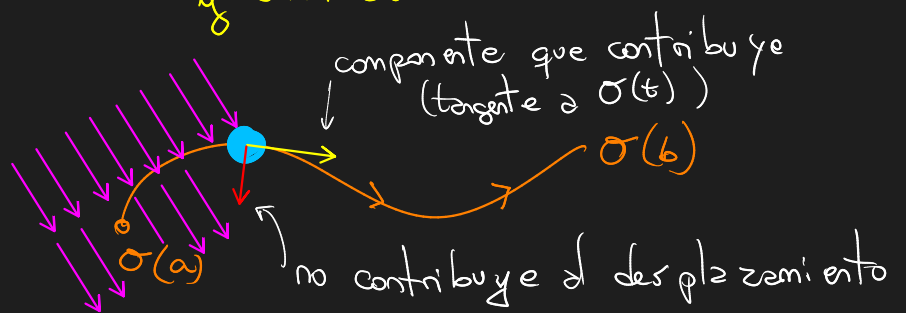
notar que

↗ los ceros en alguna coordenada, o simplifiquen el prod.

$$= \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right\rangle \|\sigma'(t)\| dt$$

Componente Tangencial del campo sobre C ,
 (unitario)

💡 Nos interesa lo que aporte el campo en la dirección de recorrido de la curva, y sentido



Obs: Si $F \perp C \Rightarrow \int_C F \cdot d\vec{s} = 0$

Campos Gradientes

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F = \nabla f$$

función potencial

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = f(b) - f(a)$$

(no depende de camino recorrido)

Agregamos 1 dimensión:

Superficies

equivalente a la de longitud (con $\|\sigma'(t)\|$)

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| dS$$

\uparrow S grande sin flecha
superficie
func. escalar.

Integraler sobre estas superficies

$$\int_S f \cdot dS = \iint_D f(T(u,v)) \cdot \underbrace{\| \eta(u,v) \|}_{\text{Ahora es Normal! no 'tangente' como en curvas con } \|\sigma'(t)\|} du dv$$

$$\text{con } \eta(u,v) = (T_u \times T_v)(u,v)$$

Orientabilidad

Una Sup. es orientable si

\exists un campo normal unitario continuo

$$\eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ continuo.}$$

Integral de Flujo

(funciones vectoriales)

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

\uparrow parámetro regular de S

F campo continuo

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \pm \iint_D \langle F(T(u,v)), \eta(u,v) \rangle du dv$$

campo vectorial
en cada punto
de S

que atraviesa
la malla.

donde $\begin{cases} + & \text{si } T \text{ orienta ok a } S \\ - & \text{si en sentido opuesto} \end{cases}$

Teorema de Green

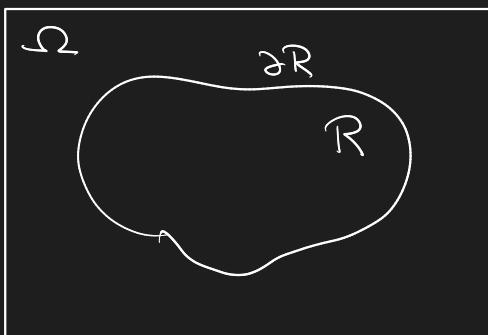
Hipótesis:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{de clase } C^1(\Omega)$$

$$R \subset \Omega \quad \text{región de tipo III}$$

de borde ∂R suave,
diferenciable a trozos.

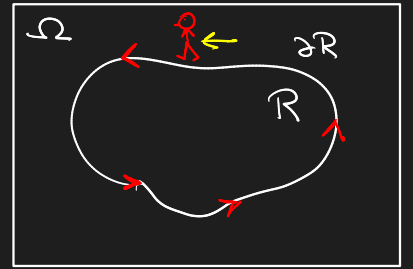


Teorema:

- Si $\mathcal{C} = \partial R^+$ curva cerrada,
simple

y

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$



entonces :

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy = \int_C P \, dx + Q \, dy$$

relaciona una integral
de campo sobre una
curva

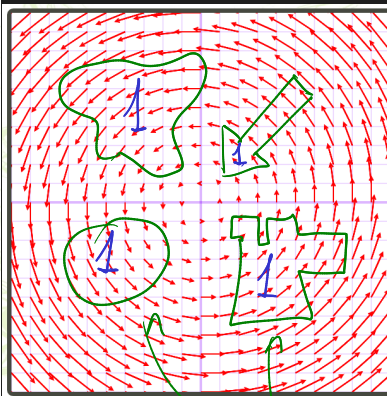
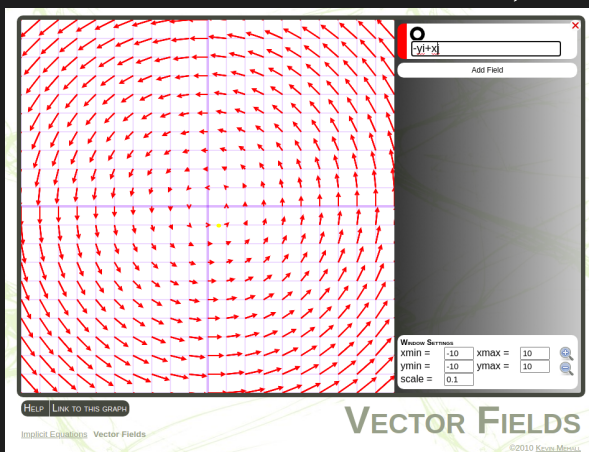
con el rotor en toda la región R

Atenci con la orientación!

Puedo usar campo $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ (o también $\frac{1}{2}(y, -x)$)
con signo opuesto

Por Green

$$\text{Área}(R) = \iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy = \int_{\partial R} F \cdot d\vec{s} = \int_{\partial R} P \, dx + Q \, dy$$



$$\int_{\partial R} -\frac{1}{2} y \, dx + \frac{1}{2} x \, dy$$

$$Q_x - P_y = 1 \quad \forall \partial R$$

Uso de Green:

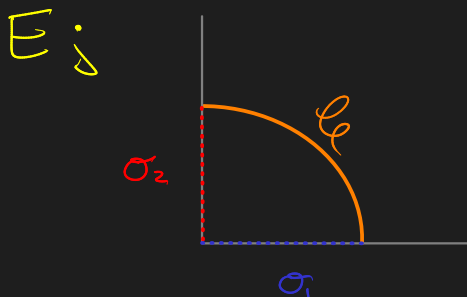
Me dan F fea y piden

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = ? \quad \text{Composición } F(\sigma(t)) \text{ muy fea!}$$

- Veo si el campo F puede quedar simple al calcular su **rotor** ($Q_x - P_y$)
- Green pide que \mathcal{C} sea el borde de R cerrada

↳ Cerramos Curvas

Cómo? • Veo cómo mejor queda el campo al integrar los pedacitos de curva que usé para cerrar la



$$\underbrace{\iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy}_{\substack{\text{Fácil de calcular} \\ \text{Posiblemente en área en polares!}}} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}}_{\text{incógnita}} + \int_{\sigma_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\sigma_2} F \cdot d\vec{s}$$

Agujeros :

Si R tiene agujeros



$$\Rightarrow \partial R = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

Con orientaciones:



$$\int_{\partial R} F \cdot d\vec{s} =$$

Por Green

$$= \int_{C_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy$$

Rotor de un Campo Gradiente es cero.

Por Green: $F = (P, Q) \xRightarrow{F = \nabla f} F = (f_x, f_y)$

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy$$

$$= \iint_R f_{yx} - f_{xy} \, dx \, dy$$

$$\begin{cases} Q = f_y \\ P = f_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_x = f_{yx} \\ P_y = f_{xy} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{como } f \text{ es } C^2 : f_{yx} = f_{xy} \\ \rightarrow \\ = 0 \end{array} \right. //$$

Campos :

Recordar que:

↳ Puedo separarlo en la suma de

2 campos :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (P+A, Q+B) \\ &= (P, Q) + (A, B) \\ &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \end{aligned}$$

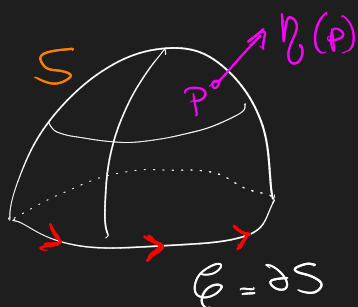
y ahora separar la integral

$$\int_C \vec{F} ds = \int_C \vec{F}_1 ds + \int_C \vec{F}_2 ds$$

Stokes:

Como Green pero + 1 dimensión:

- $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientada



- $C = \partial S$ cerrada, simple, orientada por S

- \vec{F} campo Vectorial C^1

$$\Rightarrow \iint_S \underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\text{rotor}} d\vec{S} = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$\xrightarrow{\text{S grande, vectorial}}$
 $\xleftarrow{\text{S chica, vectorial sobre curva}}$

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Uso:

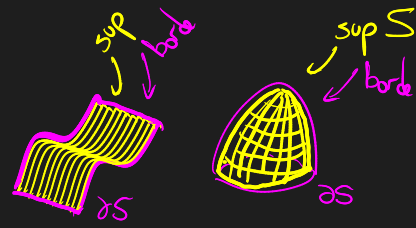
- Calcular $\iint_S \nabla \times \vec{F} d\vec{S}$ en vez de $\int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

o viceversa,

- Dada una curva \mathcal{C} ,
y un campo \vec{F}

encontrar alguna superficie S

con borde $\partial S = \mathcal{C} \cup$ alguna otra curva



- Dada S , quiero

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} d\vec{S} =$$



Por Stokes

$$= \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Por Stokes de nuevo, elijo OTRA \tilde{S}

$$= \iint_{\tilde{S}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

con el mismo borde $\partial \tilde{S}^+ = \partial S^+ = \mathcal{C}$

buscando que con esta otra superficie \tilde{S} ,
las cuentas salgan más fácilmente

$$\iiint_{\tilde{S}} \langle (\text{rot}_P, \text{rot}_Q, \text{rot}_R), \vec{\eta}_{\text{norm}} \rangle dx dy dz$$

Gauss

Use

encontrar $\langle F \cdot \eta \rangle$ a partir de $f(x, y, z)$

