Resumen Ecuaciones Diferenciales

Quiero resolver

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

Variables separadas

Si llego a algo de la forma

$$\frac{G(y'(x))}{H(y(x))} = f(x)$$

Solo basta integrar

Ec. dif

[Meter valor inicial en algún lado.]

↓

la puedo separar? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Integro, resuelvo y obtengo alguna/s y solución

↓ no

es Homogénea? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Sustituyo $y = \frac{x}{t}$ $\left(\lambda = \frac{1}{t}\right)$

↓ no

la puedo volver homogénea? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Sustituyo con lo necesario (seguramente dato, pues no trivial) y vuelvo arriba.

↓ No

es Exacta $\xrightarrow{\text{sí}}$ Busco $F = C$ /

si $M \cdot dx + N\,dy = 0$

$\Rightarrow \nabla F = (M, N)$

↓ No

Hay algún factor Integrante? $\xrightarrow{\text{sí}}$ resuelvo

$\mu \cdot M \cdot dx + \mu \cdot N\,dy = 0$

↓ no

Es Lineal?

$$y'(x) + p(x) . y(x) = q(x) \xrightarrow{\text{sí}}$$ Resuelvo con método

$\boxed{1}$ Calculo Solución del Homogéneo : H (descarto $q(x)$)

$\boxed{2}$ Planteo $y = k(x) . H$ obteniendo $k(x)$

e $y' = k'H + kH'$

$\boxed{3}$ Reemplazo estas y e y' en la ecuación original :

$$y'(x) + p(x) . y(x) = q(x)$$

$\downarrow$ no

Casi ? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Uso reemplazo

$$z = y^{1-n}$$

Bernoulli :

$$y'(x) + p(x) . y(x) = q(x) . \left(y(x)\right)^n$$

Ecuaciones Homogéneas

$f(t,x)$ es homogénea de grado n si:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n \cdot f(t,x) \quad \forall \lambda \neq 0, \ \forall (t,x)$$

- Grado 0 : $n=0$

Sustitución

Si $x' = f(t,x)$ es homogénea de grado 0

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{t}$ convierte la ecuación en variables separables.

reescribo

$$x = y \cdot t$$

derivo (regla del producto, pues $y(t) \cdot t$ es prod. de dos func. con t)

$$x' = y' \cdot t + y$$

y uso que también

$$x' = f(t,x) \overset{f \text{ homogénea}}{=} f(\lambda t, \lambda x)$$

Si $\lambda = \frac{1}{t}$

$$= f\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

y

Con lo que puedo reemplazar en la x' original:

Reemplazo

- t por 1
- x por $\frac{x}{t} = y$

obteniendo ...

$$y' \cdot t + y = F(1, y)$$

$$y' t = F(1, y) - y$$

$$y' = \frac{F(1, y) - y}{t}$$

... una nueva ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{y'}{F(1, y) - y} = t$$

⇒ Resuelvo como antes, obtengo y

⇒ Teniendo y, vuelvo a sustituir para obtener la x original.

Fin.

Ecuaciones Exactas

- Cuando tengo algo del Tipo:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad \text{con } M, N \in C^1$$

ó ("divido" por dx)

$$M + N.y' = 0 \qquad \text{con } y = y(x)$$

relación funcional

Puedo suponer que

$$\exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F \in C^2 \;/$$

$$\nabla F = (M, N) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

- Teniendo M, N, puedo obtener F (integrando)

y como F es constante sobre la curva $y = y(x)$

pues

$$M + N.y' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}.y' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x, y(x))\right) = 0$$

$$F(x, y(x)) + \tilde{C} = 0$$

$$F(x, y(x)) = C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Entonces las soluciones estarán dadas de <u>forma</u> <u>implícita</u> por

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sol} \\ \qquad F(x, y(x)) = C\end{array}}$$

Para verificar que $\exists F$:

El rotor debe ser cero

$$M_y = N_x$$

Pues $\qquad F \in C^2$

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = N_x$$

$\therefore$ Si $M_y = N_x \Rightarrow$ es Exacta ✓

$\Rightarrow$ Busco $F = C$

Si <u>no</u> es exacta :

Factor Integrante

Multiplico todo por $\mu(x)$

$$\underbrace{\mu . M + \mu . N . y' = 0}_{\text{ésta sí será exacta (con algún } \mu(x))}$$

Quiero que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu . M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$ (pues será exacta)

Expando

$$\mu_y . M + \mu . M_y = \mu_x . N + \mu . N_x$$

Reduzco espacio de soluciones :

Suponga

solo depende de alguna variable

$$\mu = \mu(x)$$

con lo que $\mu_y = 0$

Obteniendo

$$\underbrace{\frac{\mu_x}{\mu}}_{\text{solo depende de } x} = \underbrace{\frac{M_y - N_x}{N}}_{\text{solo DEBE depender de } x}$$

Equivalentemente, si $\mu = \mu(y)$

$$\underbrace{\frac{\mu_y}{\mu}}_{\text{solo depende de } y} = \underbrace{\frac{N_x - M_y}{M}}_{\text{solo DEBE depender de } y}$$

⇒ Resuelvo y obtengo μ

⇒ Teniendo el factor integrante

Multiplico en

$$M + N y' = 0 \quad \leftarrow \text{No exacta}$$

$\times \mu$

$$\mu . M + \mu . N y' = 0 \quad \leftarrow \text{Exacta!}$$

⇒ Resuelvo nueva ecuación buscando las soluciones del tipo

$$F = C$$

Otros tipos de factores integrantes

$$\mu(x,y) = g(x\cdot y) \qquad \text{con } g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

ej $\quad g(t) = t^2+1$

$$\mu(x,y) = g(x\cdot y) = (x\cdot y)^2 + 1$$

Éstos suelen ser dados como datos

Fin Exactas.

Ecuaciones Diferenciales Lineales

de la forma:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Método:

$\boxed{1}$ Descarto $q(x)$, obteniendo homogéneo

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$$

integro y obtengo

$$y(x) = e^{-P(x)} \qquad \text{con } P(x) = \int p(x)$$

$\boxed{2}$ Planteo

$$y(x) = k(x) \cdot e^{-P(x)}$$

derivo

$$y'(x) = k'(x) \cdot e^{-P} + k(x) \cdot e^{-P} \cdot \underbrace{(-P(x))'}_{= -p(x)}$$

reemplazo $y(x) = k(x) \cdot e^{-P(x)}$ y su derivada $y'(x)$

en la ecu. original :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

$$\underbrace{k'(x) \cdot e^{-P} + k(x) \cdot e^{-P} \cdot (-p(x))}_{} + \underbrace{p(x)\, k(x) \cdot e^{-P(x)}}_{} = q(x)$$

Opuestos: se anulan

obteniendo :

$$k'(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x)$$

$$k'(x) = q(x) \cdot e^{P(x)}$$

que es de Variables separadas !

Integro y obtengo $k(x)$:

$$\int k'(x)\, dx = \int q(x) \cdot e^{P(x)}\, dx$$

$$k(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)}\, dx$$

Reemplazo en el planteo de $\boxed{2}$

$$y(x) = k(x) \cdot e^{-P(x)}$$

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \int q(x) \cdot e^{P(x)} \, dx$$

Así obteniendo la solución $y(x)$

$\boxed{1}$ Calculo Solución del Homogéneo : H (descarte $q(x)$)

$\boxed{2}$ Planteo $y = k(x) \cdot H$ obteniendo $k(x)$

e $y' = k' H + k H'$

$\boxed{3}$ Reemplazo estas y e y' en la ecuación original :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Bernoulli

$$y(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot \left(y(x)\right)^n$$

uso reemplazo

$$z = y^{1-n}$$

derivo

$$z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

Divido ecu. orig. por y^n

$$\frac{y'(x) + p(x) \cdot y(x)}{y^n} = \frac{q(x) \cdot \cancel{(y(x))^n}}{\cancel{y^n}}$$

$$\underbrace{y' \cdot y^{-n}}_{\frac{z'}{1-n}} + p(x) \cdot \underbrace{y^{1-n}}_{z} = q(x)$$

obteniendo

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x)$$

$$z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n)\, q(x)$$

Que es una Ecuación lineal como quería.

Notar que una vez obtenga z,

necesito volver a y

$$z = y^{1-n}$$

$$\Rightarrow y = z^{n-1}$$

Obteniendo la solución final y.

Obs: No olvidar (si lo dan) despejar valor inicial

Quiero resolver eq. diferenciales

Tengo métodos para encontrar soluciones

Separación

Sustitución (homogéneas grado 0)

"Campo gradiente"? (Exactas)

Factor Integrante