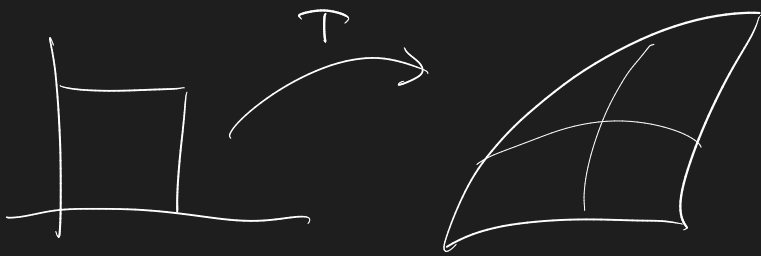


Orientación de Superficies

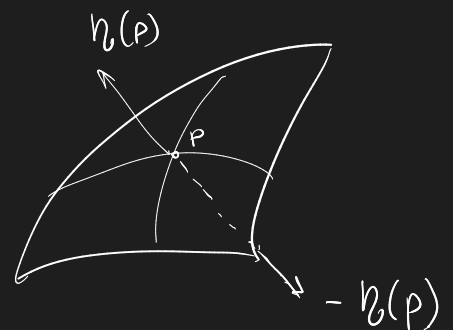
$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie

$(\exists T : D \rightarrow S \text{ continua sobreyectiva})$



S se dice orientable si:

$\exists \eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$
normal continua



Orientaciones y parametrizaciones

$T : D \rightarrow S$, D Dominio elemental
(cerrado y acotado)

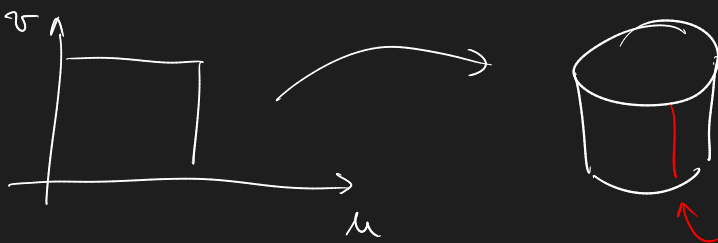
si T es regular (\Rightarrow inyectiva)

$\Rightarrow S$ orientable.

$$\begin{array}{ccc}
 D & S & \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) \longmapsto p = T(u, v) & \longmapsto & \eta(p) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \\
 & & \text{o bien}
 \end{array}$$

$$\eta(p) = -\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

Casos de Interés



$$T(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \quad \text{No es regular}$$

$$u \in [0, 2\pi]$$

$$v \in [a, b]$$

(no es inyectiva)

$$D = [0, 2\pi] \times [a, b]$$

No puedo usar el Teorema así como así.

$$T_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$T_v = (0, 0, 1)$$

$$T_u \times T_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

Obs : $p \in S, p = (x, y, z)$

$$\Rightarrow \eta(p) = (x, y, z)$$

No inyectividad No es problema !

Pues :

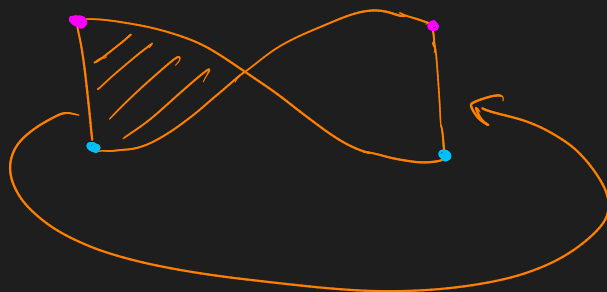
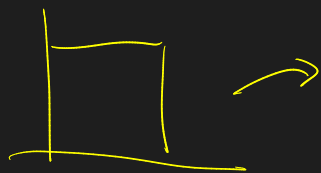
$$(u_0, v_0) \xrightarrow{T} p$$

$$(u_1, v_1) \xrightarrow[T]{\#}$$

$$\& T_u \times T_v(u_0, v_0) = T_u \times T_v(u_1, v_1) \checkmark$$

Se pegan con la misma normal.

• Otro caso donde S no es orientable



Cinta de Möbius

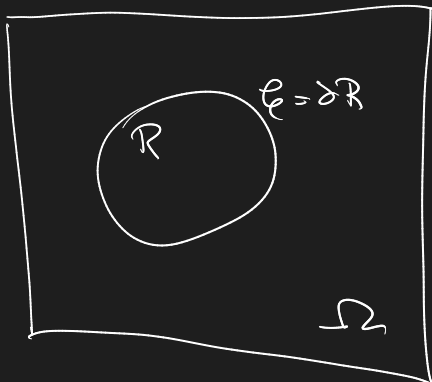
Teorema de Green

Ingredientes

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto
- $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo C^1
 $F = (P, Q)$
- R región tipo III, $R \subset \Omega$

$\partial R = \mathcal{C}$ cerrada simple,
difer. a trozos

estática:

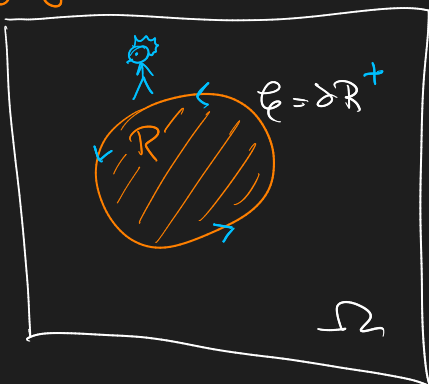


Teo:

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\mathcal{C}} F d\vec{s}$$

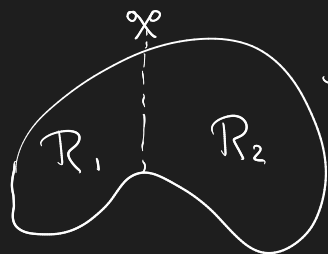
donde \mathcal{C} está orientada
positivamente.

Agrego orientación



Extensiones del Teorema

1) a) Regiones que se descomponen

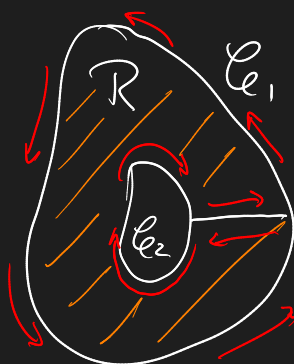
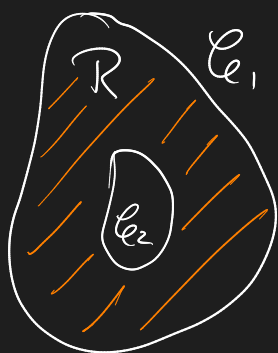


$$\mathcal{C} = \partial R^+$$

$$\mathcal{C}_1 = \partial R_1^+$$

$$\mathcal{C}_2 = \partial R_2^+$$

b) Agujeros $R, \mathcal{C} = \partial R, \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$



$$\iint_R Q_x - P_y \, dx \, dy = \int_{\mathcal{C}_1} P \, dx + Q \, dy + \int_{\mathcal{C}_2} P \, dx + Q \, dy$$

(antihorario) (horario)

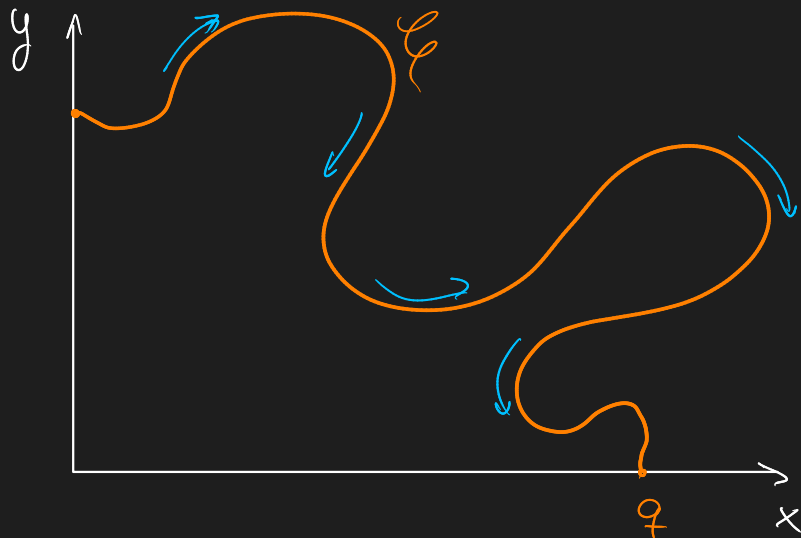
+ 2 trocitos que se anulan

Aplicación

(Cerrando Curvas)

Situación:

\mathcal{C} curva (no cerrada) fea



F es un campo $F = (P, Q)$ fco

Ejemplo (mismo que la práctica):

C dada y orientada por

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t)$$

$$t \in [0, \frac{3}{2}\pi]$$

$$F(x,y) = (2 \cos(x^2 y) - xy - 2y, x^2 \cos(x^2 y) + 3x)$$

Plan A: Resolver e mano $\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$

• Plan B: Completar la curva y usar Green

Definiendo curvas que la cierran, de forma (Γ_1, Γ_2)

que se simplifique el cálculo junto al campo,

Green:

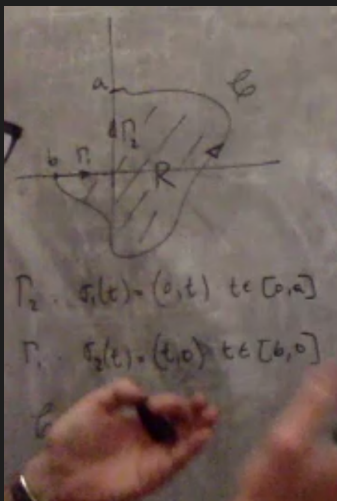
$$-\iint_R \overbrace{Q_x - P_y}^{\text{Rotor}} dx dy = \int_C F d\vec{s} + \int_{\Gamma_1} F d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} F d\vec{s}$$

sentido opuesto

• Si fuerz campo gradiente:

$$\hookrightarrow Q_x - P_y = 0$$

Ejemplo



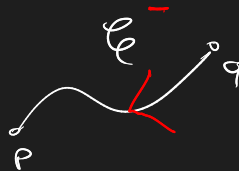
Obs:

C, Γ_1, Γ_2 ya están orientadas

(Dada una curva C orientada,
 C^- indica su orientación inversa)

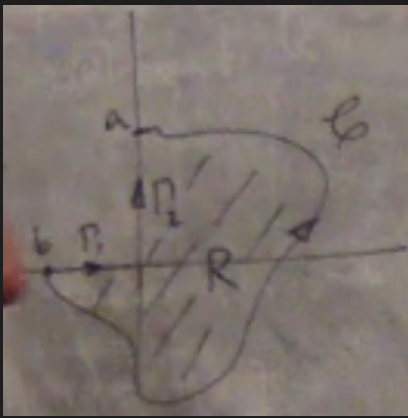
Notaciones

Si

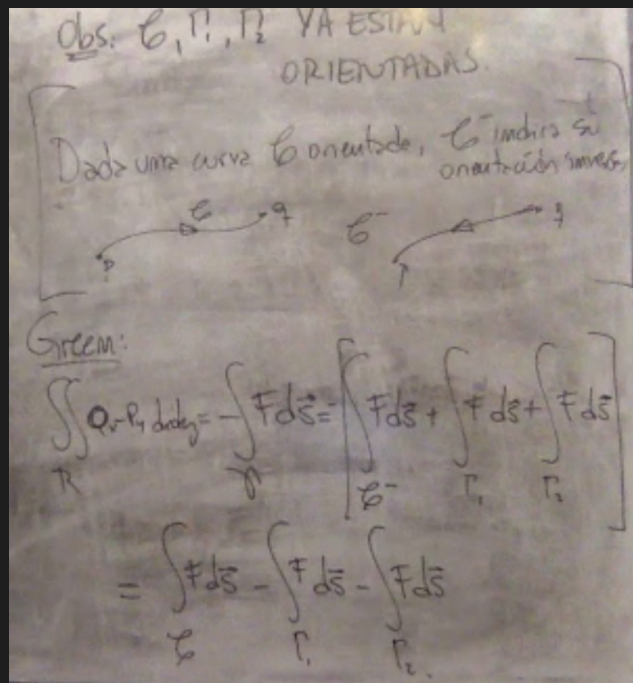


Para Curvas Cerradas





$$C \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \gamma \text{ orientada}$$



En vez de decir
"Orientación positiva/negativa"

Podemos decir

"Curva orientada de manera compatible con la región"

