Iván Mars Mar 09

CLASE 18 – 9/3 – EC. DIF DE ORDEN SUPERIOR A COEFICIENTES CONSTANTES

CASO HOMOGÉNEO

Objetivo:

- Resolver

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} = 0 \quad , \quad y^{(0)} = y, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Notar:

→ El conj. de soluciones tiene estructura de e.v. de dim n

Clave:

- Estudiar el polinomio:

$$p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i . t^i$$

LAS SOLUC. VAN A ESTAR RELACIONADAS CON $y(x) = e^{\lambda x}$ CON λ RAÍZ DE p.

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ ES RAÍZ Simple de p:

Puedo elegir

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Como elem. de B_S (Base de Sols)

b) $\lambda \in \mathbb{R}$ es una raíz de p de multiplicidad K:

puedo elegir:

$$\{e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \ldots, x^{K-1} \cdot e^{\lambda x}\}$$

como elementos de la base B_S

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ es una raíz simple de p:

puedo elegir

$$\{Re(e^{\lambda x}), Im(e^{\lambda x})\}$$

como elemento de B_S

Ej:

Resolver:

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

Me fabrico

$$p(t) = t^2 + 6t + 10 = 0$$

$\downarrow$ Resolvente

$$\begin{cases} t_1 = -3+i \\ t_2 = -3-i \end{cases}$$

Mi solución "sería" (si no fuera complejo)

$$y(x) = e^{(-3+i)x}$$

$$= e^{-3x} \cdot e^{ix}$$

$$= e^{-3x}\left(\cos x + i \cdot \sin x\right)$$

$$= \underbrace{e^{-3x}\cos x}_{\mathrm{Re}} + i \cdot \underbrace{e^{-3x}\sin x}_{\mathrm{Im}}$$

Re Im

$B_S = \{e^{-3x}\cos x, e^{-3x}\operatorname{sen} x\}$

$y(x) = C_1 e^{-3x}\cos x + C_2 e^{-3x}\operatorname{sen} x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ej: Resolver

$$y''' - 2y'' - 7y' - 4y = 0$$

Polin.

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 7t - 4 = 0$$

Raíces: $t_1 = t_2 = -1$ (doble!) $\rightarrow e^{-x}$, $x \cdot e^{-x}$

$t_3 = 4 \rightarrow e^{4x}$

$$B_S = \{ e^{-x}, \; x \cdot e^{-x}, \; e^{4x} \}$$

Caso no homogéneo

Obj:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot y^{(i)} = g(x)$$

Con soluciones de la forma

$$y = y_H + y_P$$

1° Buscamos una base de sol. de la homogénea

$$B_S = \{ \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x) \}$$

2° Para hallar y_P aplicamos un método llamado variación de parámetros

Proponemos que la sol. particular es de la forma:

$$y_P = \sum_{j=1}^{n} c_j(x) \cdot \phi_j(x)$$

y las funciones $\{C_j\}_{1\leq j\leq n}$ verifican:

$$W(x)\cdot\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Todos ceros

Término indep. al final

matriz del sistema

$W(x)$ es la matriz Wronskiana de las $\{\phi_j\}_{1\leq j\leq n}$

$$W(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Con $n=2$:

$$W(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{bmatrix}$$

Ej: Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = x^2$$

1°) Hallar sol. de la homog.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Planteo

$$p(t) = t^2 + 4t + 4$$

$$= (t+2)^2$$

$$B_S = \{ e^{-2x}, x.e^{-2x} \}$$

2°) Vamos a aplicar variación de parámetros para hallar una sol. particular

$$y_p(x) = C_1(x) . e^{-2x} + C_2(x) . x . e^{-2x}$$

$$W(x) \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

armo

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{-2x} & x.e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x).e^{-2x} \end{bmatrix}$$

Debo resolver:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & x \cdot e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Podría hacerlo a mano, pero lo resuelvo con:

Regla de Cramer

$$\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Armo cociente

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

donde A_i resulta de reemp. col i de A por col de soluciones $\vec{b}$

A debe ser inversible!

Vuelvo:

- Busco C_1'

$$C_1'(x) = \frac{\det\left(W(x)_1\right)}{\det(W)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \cdot e^{-2x} \\ x^2 & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x \cdot e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

$$e^{-2x}\begin{vmatrix} 0 & x \\ x^2 & (1-2x) \end{vmatrix}$$

$$= \quad e^{-2x} \cdot e^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-x^3}{e^{-2x} \cdot 1}$$

$$= -e^{-2x} \cdot x^3$$

$$= C_1'(x)$$

cuentas ...

$$C_1(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right)$$

Ahora:

- $C_2(x)$:

$$C_2'(x) = \det \quad = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & \\ -2e^{-2x} & \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{e^{-2x} \cdot e^{-2x}}$$

$$= x^2 . e^{2x}$$

$$= C_2'(x)$$

$$C_2(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right)$$

Ya puedo escribir la sol particular

$$y_P(x) = C_1(x) . e^{-2x} + C_2(x) . x . e^{-2x}$$

$$= e^{2x}\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}\right) . e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1\right)e^{-2x} . x$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$$

Solución :

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}}_{\text{Sol Part.}} + \underbrace{C_1 . e^{-2x} + C_2 . x . e^{-2x}}_{\text{Sol. Homog.}}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$