Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II
Curso de Verano de 2021
Primer Parcial (25/02/21)

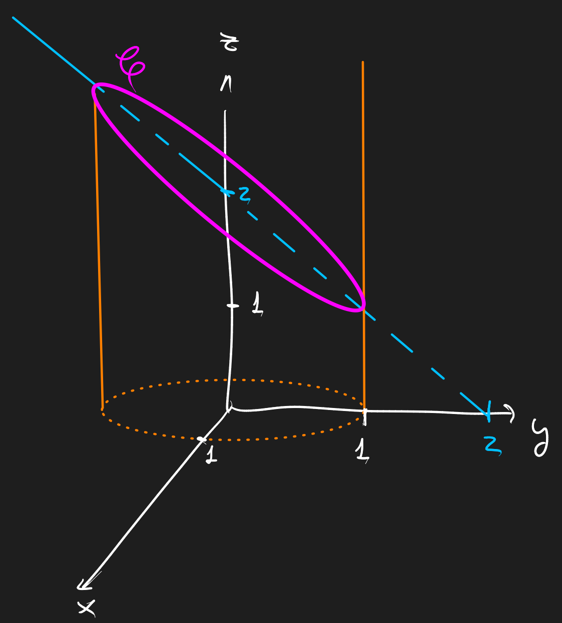
1	2	3	4

CALIF.

Apellido: Carreira Nombre: Leandro
No. de documento: 34 020 793 L.U.: 669/18 Carrera: Computación
Grupo: 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒

1. Consideramos la curva C determinada por la intersección entre la superficie dada por la ecuación $x^2+y^2-1=0$ y la superficie dada por $y+z-2=0$. Calcular $\int_C f\,ds$ donde $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^2}$.

$$\mathcal{C}:\begin{cases} x^2+y^2=1 & \text{cilindro} \\ y+z=2 & \text{plano}\end{cases}$$



Quiero

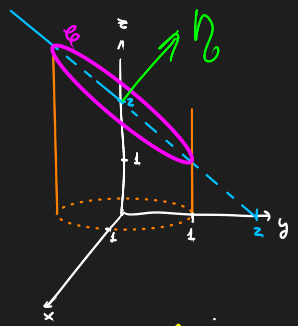
$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = ?$$

Noto que si f fuera $\langle F, \eta\rangle$ para algún F compuesto con alguna param. de la superficie plana encerrada por $\mathcal{C}$ (una elipse rellena) $\Rightarrow$ podría usar Stoke.

$$f(x,y,z) = \langle F \; , \; \eta \rangle = \sqrt{1+x^2}$$

Primero lo inmediato : η

η sobre la elipse rellena es igual a η del plano $y+z=2$



$$\Rightarrow \left\langle (\,?\,,\,?\,,\,?\,)\,,\,\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \sqrt{1+x^2}$$

Busco componentes de $F(T)$ tal que obtenga $\uparrow$ y además su pueda despejar facilmente

$$\left\langle \left(0, \; 0 \; , \sqrt{2}\sqrt{1+x^2}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \sqrt{1+x^2}$$

$$F(T_{()}) = \left(0, \; 0 \; , \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}\right)$$

Calculo el rotor de este campo compuesto con la superficie elíptica:

$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0, -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x^2}\right), \; 0\right)$$

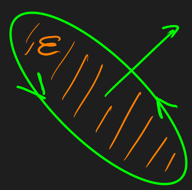
$$\underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du}_{\sqrt{u}}$$

$$\sqrt{1+x^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_{\mathcal{C}} \langle F, \eta \rangle \, ds$$

$$= \int_{\mathcal{C}} F \, ds$$

y como $\mathcal{C}$ es cerrada, con param. que la orienta en el sentido positivo (pues elegí la normal hacia arriba)



y F compuesta con la param. es C^1,

$\Rightarrow$ por Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds \overset{\downarrow}{=} \iint_{E} \nabla \times F \, dS$$

me quedo sin tiempo, tal vez no sea correcto esta forma //

Otra forma

le tengo

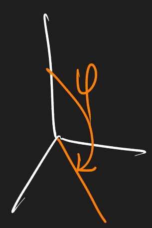
$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

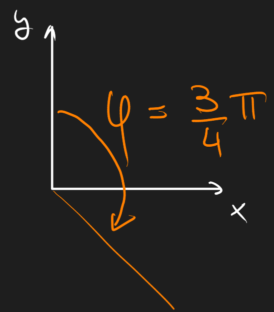
función escalar

en esféricos

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi, \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

si fijo $\varphi = \frac{3}{4}\pi$



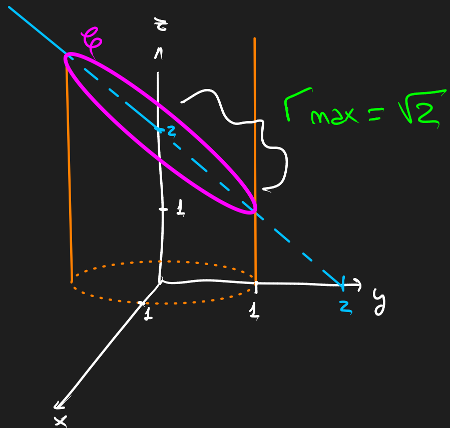


$$\sigma(r,\theta) = \left(r \cdot \cos\theta \cdot \sin\tfrac{3}{4}\pi \,,\, r \cdot \sin\theta \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right), \; r \cdot \cos\tfrac{3}{4}\pi \right)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$

$0 \leq r \leq r(\theta)$

con $1 \leq r(\theta) \leq \sqrt{2}$



$r(0) = 1$

$r(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

no llego ¡!

2. Considerar el campo $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{x^2y}(2xy\,\mathrm{sen}(y^2x) + \cos(y^2x)y^2) - y,\, e^{x^2y}\left(\mathrm{sen}(y^2x)x^2 + \cos(y^2x)2xy\right) + x\right)$$

Evaluar

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\, d\mathbf{s}$$

donde $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ orientada en sentido horario.

- F es C^1 (es C^∞) ✓

Podría usar Green $\Rightarrow$ Calculo Rotor (en $\mathbb{R}^2$) ✓

$$Q(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + x$$

Sé que

$$\partial x(f \cdot g \cdot h) = f_x \cdot g \cdot h + f \cdot g_x \cdot h + f \cdot g \cdot h_x$$

$$\begin{aligned} Q_x(x,y) = {} & e^{x^2 y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot x^2 + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot 2x + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2xy + \\ & \left(-e^{x^2 \cdot y} \cdot \sin(y^2 \cdot x) \cdot y^2 \cdot 2xy\right) + \\ & e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot 2y + 1 \end{aligned}$$

Hago lo mismo con P_y:

$$P(x,y) = e^{x^2 \cdot y} \cdot 2xy \cdot \sin(y^2 \cdot x) + e^{x^2 \cdot y} \cdot \cos(y^2 \cdot x) \cdot y^2 - y$$

$$P_y(x,y) = \left(e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\right)\cdot 2xy\,\sin(y^2\cdot x) +$$
$$e^{x^2\cdot y}\cdot 2x\cdot\sin(y^2\cdot x) +$$
$$e^{x^2\cdot y}\cdot 2xy\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2xy +$$
$$e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot y^2 +$$
$$\left(-e^{x^2\cdot y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot 2xy\cdot y^2\right) +$$
$$e^{x^2\cdot y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2y + (-1)$$

Junto todo en $Q_x - P_y$:

$$\overset{Q_x}{\overset{\shortparallel}{\left(\begin{array}{l} e^{x^2 y}\cdot 2xy\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot x^2 + \\ e^{x^2 y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot y^2\cdot x^2 + \\ e^{x^2 y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot 2x + \\ e^{x^2 y}\cdot 2xy\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2xy + \\ \left(-e^{x^2 y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot y^2\cdot 2xy\right) + \\ e^{x^2 y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2y + 1 \end{array}\right)}} - \overset{P_y}{\overset{\shortparallel}{\left(\begin{array}{l} \left(e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\right)\cdot 2xy\,\sin(y^2\cdot x) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot 2x\cdot\sin(y^2\cdot x) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot 2xy\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2xy + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot y^2 + \\ \left(-e^{x^2\cdot y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot 2xy\,y^2\right) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2y + (-1) \end{array}\right)}}$$

Mismos términos ≡ mismo color:

$$= \left(\begin{array}{l} e^{x^2 y}\cdot 2xy\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot x^2 + \\ e^{x^2 y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot y^2\cdot x^2 + \\ e^{x^2 y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot 2x + \\ e^{x^2 y}\cdot 2xy\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2xy + \\ \left(-e^{x^2 y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot y^2\cdot 2xy\right) + \\ e^{x^2 y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2y + 1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{l} \left(e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\right)\cdot 2xy\,\sin(y^2\cdot x) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot 2x\cdot\sin(y^2\cdot x) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot 2xy\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2xy + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot x^2\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot y^2 + \\ \left(-e^{x^2\cdot y}\cdot\sin(y^2\cdot x)\cdot 2xy\cdot y^2\right) + \\ e^{x^2\cdot y}\cdot\cos(y^2\cdot x)\cdot 2y + (-1) \end{array}\right)$$

Se anula casi todo y queda (afortunadamente) ✓

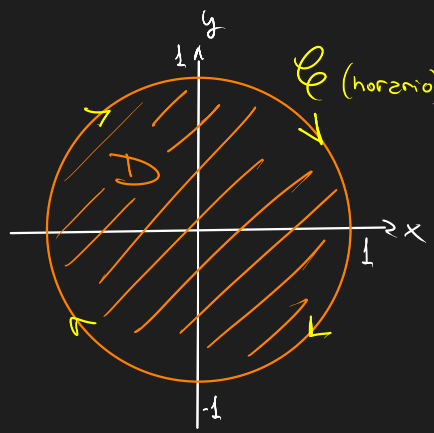
$$Q_x - P_y = 2 \quad // \quad ✓$$

Uso Green:

Pues la curva $\mathcal{C}$ está orientada en sentido horario

$$-\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \iint_D Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$= 2 \iint_D 1 \, . \, dx\,dy$$



$$= 2 \, . \, \text{Área}(D)$$

$$= 2 \, . \, \pi \, . \, 1^2$$

$$= 2\pi \, //$$

$\therefore$

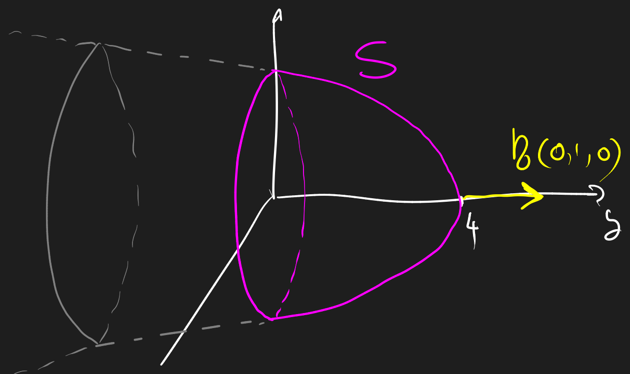
Solución

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = -2\pi$$

✓

3. Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 4 - x^2 - z^2, y \geq 0\}$ orientada de manera que la normal en el punto $(0, 4, 0)$ es $(0, 1, 0)$. Considerar el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^3, \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1), xe^y - x^3)$. Calcular

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



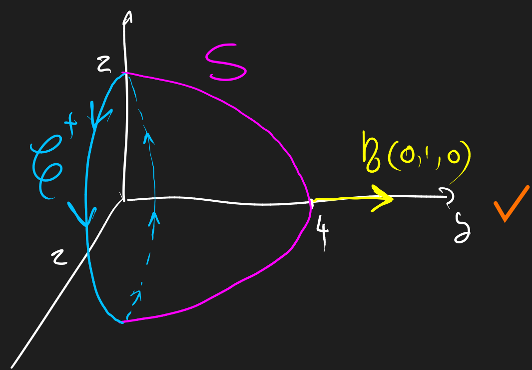
Quiero

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = ?$$

Sospecho que puedo usar Stokes, pues $\nabla \times F$ parece complicado de integrar, y como

$F \in C^1$ y $\partial S = \mathcal{C}$ (orientada por S)

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \, d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \, dS \ ✓$$



Donde $\mathcal{C}^+$ es la circunferencia

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

que surge de reemplazar $y = 0$ en S ✓

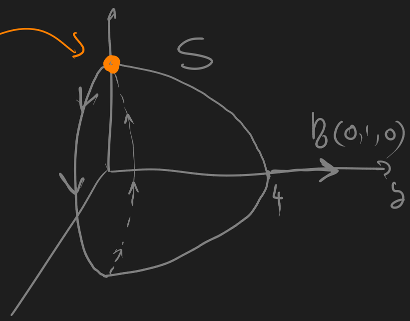
Parametrizo $\mathcal{C}^+$

$$\sigma(\theta) = (2\sin\theta,\ 0,\ 2\cdot\cos\theta) \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

que tiene la orientación correcta dada por S, pues

en $\theta = 0$:

$\sigma(0) = (0,0,2)$

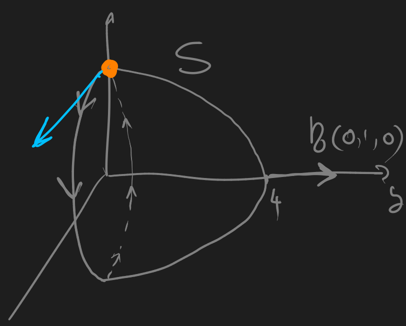


con tangente

$$\sigma'(\theta) = (2\cdot\cos\theta,\ 0,\ -2\sin\theta)$$

$$\sigma'(0) = (2,\ 0,\ 0)$$

✓



Ya puedo calcular

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\,d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\langle F(\sigma(\theta)),\ (2\cdot\cos\theta,\ 0,\ -2\cdot\sin\theta) \right\rangle d\theta$$

no me importa pues

calculo campo:

$$F(2\sin\theta,\ 0,\ 2\cdot\cos\theta) = \left(2^3\cdot\cos^3\theta,\ \ldots\ldots,\ 2\cdot\sin\theta\cdot e^0 - 2^3\cdot\sin^3\theta\right)$$

Calculo producto interno:

$$\langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta)\rangle = 2^4 \cdot \cos^4\theta + 0 - 4\cdot\sin^2\theta + 2^4\cdot\sin^4\theta$$

$$= 16\underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{=1} - 4\cdot\sin^2\theta$$

$$= 16 - 4\cdot\sin^2\theta$$

Resuelvo integral

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\, d\vec{s} = \int_{\theta=0}^{2\pi} 16 - 4\sin^2\theta \,.\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 16\, d\theta - 4\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

identidad

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$= 32\pi - 4\cdot\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta$$

$$= 32\pi - 4\left(\pi - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta\right)$$

$$= 32\pi - 4\left(\pi - \underbrace{\frac{\sin(2\theta)}{4}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right)$$

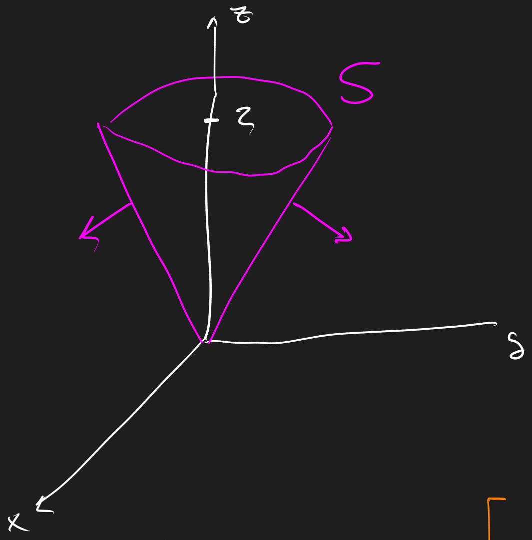
$$\int_{\mathcal{C}^+} F\, d\vec{s} = 28\pi$$

Solución

$$\iint_S \nabla \times F \, dS = 28\pi$$

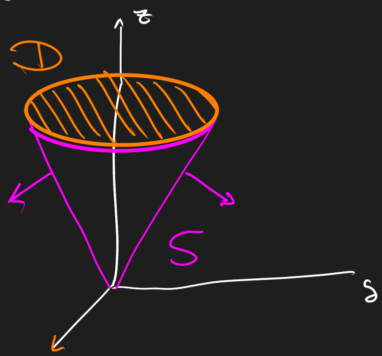
4. Sea S la superficie dada por la sección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 2$ orientada con normal exterior. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 y e^{z^2}, -xy^2 e^{z^2}, z)$. Calcular

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\iint_S F \cdot dS = ?$$

Como F es $C^1(\Omega)$



[siendo Ω el volumen encerrado entre la sección del cono S y una tapa (disco D) en $z = 2$ con normal hacia arriba]

puedo usar Teorema de Gauss. ✓

Gauss :

$$\underbrace{\iint_{S \cup D}}_{\partial\Omega} F \cdot \eta \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV \quad ✓$$

Calculo divergencia:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{z^2} \\ \bullet \ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} = -2xy \cdot e^{z^2} \\ \bullet \ \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = 1 \end{array}\right\} \operatorname{div} F = 1 \quad ✓$$

Calculo integral triple

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \iiint_{\Omega} 1 \, dV$$

$$= \operatorname{Vol}(\text{cono})$$

Cavalieri

$$= \int_{z=0}^{z=2} \text{Área}(\text{Circunferencia de radio } z) \cdot dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=2} \pi \cdot z^2 \cdot dz$$

$$= \pi \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^2$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = \frac{8}{3}\pi \quad // \quad \checkmark$$

Calculo la integral restante

$$\underbrace{\iint_{\underbrace{S \cup D}_{\partial\Omega}} F \cdot \eta \, ds}_{=\frac{8}{3}\pi} = \underbrace{\iint_{S} F \cdot \eta \, ds}_{\text{Incógnita}} + \iint_{D} F \cdot \eta \, ds$$

$$\iint_D F \cdot \eta \, dS = \int_\theta \int_r \langle F(T(r,\theta)), \eta \rangle \, dr \, d\theta \checkmark$$

Parametrizo el Disco D como

ubicado en $z=2$

$$T(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, \; r \cdot \sin\theta, \; 2)$$

con $r \in [0,2]$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ ✓

Muestro orientación de su normal:

$$T_r = (\cos\theta, \; \sin\theta, \; 0)$$

$$T_\theta = (-r \cdot \sin\theta, \; r \cdot \cos\theta, \; 0)$$

$$T_r \times T_\theta = (0, \; 0, \; r \cdot \cos^2\theta + r \cdot \sin^2\theta)$$

$$= (0, 0, r)$$

como $r \geq 0 \Rightarrow \eta_D$ apunta hacia arriba

(que es lo que quería) ✓

Compongo $F(T(r,\theta))$

$$\iint_D F \cdot \eta \, dS = \int_\theta \int_r \langle (\dots, \dots, 2), (0,0,1) \rangle \, dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} 2 \, dr \, d\theta$$

$$\iint_D F \cdot \eta \, ds = 8\pi$$

$$\underbrace{\iint_{S \cup D} F \cdot \eta \, ds}_{= \frac{8}{3}\pi} = \underbrace{\iint_S F \cdot \eta \, ds}_{\text{Incógnita}} + \underbrace{\iint_D F \cdot \eta \, ds}_{8\pi \checkmark}$$

$$\underbrace{S \cup D}_{\partial\Omega}$$

$\therefore$

$$\iint_S F \cdot \eta \, ds = \frac{8}{3}\pi - \overset{\frac{24}{3}}{8}\pi$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$

Solución

$$\boxed{\iint_S F \cdot \eta \, ds = \frac{16}{3}\pi}$$