

# Teórica 2 - Vickery

## Clase anterior

- Def de Curvas
- Parametrizaciones
- Recta tangente
- Suavidad

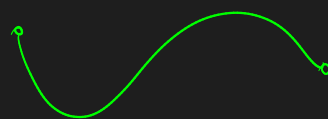
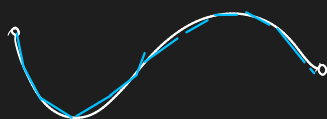
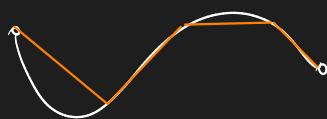
## Objetivos de esta clase

- Calcular longitudes de curvas
- Integrar funciones escalares sobre curvas

## Longitud de Curva


Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  (ó  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^4$ ) una curva abierta y simple

Aproximo por poligonales



Consideremos

$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  param. regular de  $\mathcal{C}$

Tomo partición de  $[a, b]$  

$$\pi := a = t_0 < t_2 < t_3 < \dots < b = t_n$$

Entonces  $\pi$  induce una partición  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{C}$

$$P_i = \sigma(t_i)$$

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) &= \text{Long. de la poligonal con puntos en } \mathcal{P} \\ &= \|p_1 - p_0\| + \|p_2 - p_1\| + \dots + \|p_n - p_{n-1}\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|p_i - p_{i-1}\| \end{aligned}$$

Observación:

Si  $\mathcal{P}'$  es una part. más fina que  $\mathcal{P}$   
(los pto de  $\mathcal{P}$  son puntos de  $\mathcal{P}'$ )

entonces

↑  
pued tener  
más!

$$L_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}) \leq L_{\mathcal{C}}(\mathcal{P}')$$

Lo pruebo con desigualdad triangular sobre las normas.

Definición: Decimos que una curva  $C$  es rectificable

si  $\exists M > 0 / L(P) \leq M \quad \forall P$  partición de  $C$ .

En ese caso, existe el supremo del conjunto

$\{L(P) : P \text{ partición de } C\}$

y definimos  $L(C) = \sup \{L(P) : P \text{ partición de } C\}$

↑ Cómo lo calculamos?

Sea

$\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  param. regular de  $C$

Si  $\pi$  es una partición del  $[a, b]$ :

$$\pi = \left\{ \overset{a}{\underset{||}{t_0}}, t_1, \dots, t_n, \overset{b}{\underset{||}{t_n}} \right\}$$

y  $P$  es la part. inducida por  $\pi$  en  $C$

entonces

$$\begin{aligned} L(P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \|p_{i+1} - p_i\| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| \end{aligned}$$

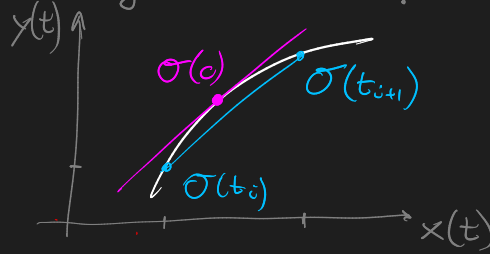
y como

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

# Por Teo. de Valor Medio

#2

solo ilustrativo,  
hay más dimensiones!

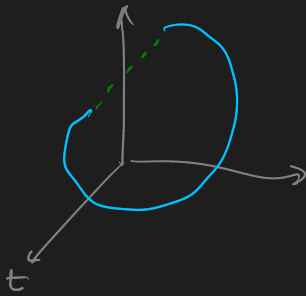


$$\exists c \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$\sigma'(c) = \frac{\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

1 dim para ti

si  $\sigma \in \mathbb{R}^2$ : t queda afuera del analisis  
2 dims más a el analisis  
plotar en  $\mathbb{R}^3$ ?



$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) = \sigma'(c)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\text{con } c \in [t_i, t_{i+1}]$$

y si digo  $c = t_i$ :

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \approx \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| \approx \underbrace{\|\sigma'(t_i)\|}_{\in \mathbb{R}^3} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow L(\mathcal{P}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i)$$

Suma de Riemman de la función  $\|\sigma'(t)\|$   
asociada al part.  $\Pi$ .



# Proposición

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$$

Demo en apunte : Cap 1 - Sección 5

## Parámetro de Longitud de Arco

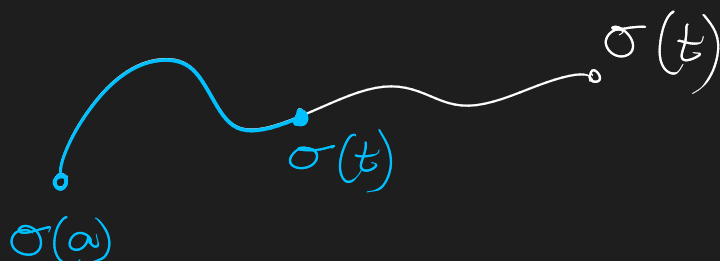
Sea  $\mathcal{C}$  una curva simple, abierta y suave,  
y sea  $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  una param. regular de  $\mathcal{C}$

Para cada  $t \in [a, b]$  :

$$S(t) := \int_a^t \|\sigma'(r)\| dr$$

mide la longitud entre  $p_0 = \sigma(a)$

y  $p = \sigma(t)$



$\Rightarrow$  la función

$$S: [a, b] \rightarrow [0, L(\ell)]$$

se llama **función de longitud de arco**

## Propiedades

1) Por Teo. Fundam. del Cálculo

$$S'(t) = \|\sigma'(t)\|$$

que como  $S'$  es continua

$\Rightarrow S$  es de clase  $C^1$

2) Como  $\sigma'(t) \neq (0, 0, 0)$  en  $[a, b]$ , pues es regular

$$\Rightarrow S'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

3)  $S$  es estrictamente creciente

$\therefore S$  es una función biyectiva

• Consecuencia:

$S(t)$  admite inversa  $t(S)$

$$t: [0, L(\ell)] \rightarrow [a, b]$$

de clase  $C^1$  en  $[0, L(\ell)]$

• Además:

$$t'(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

Con todo esto, podemos considerar la reparametrización de  $\ell$  dada por

$$\tilde{\sigma}(s) := \sigma(t(s))$$

$$\tilde{\sigma} : [0, L(\ell)] \rightarrow \ell$$

Decimos que  $\tilde{\sigma}$  es la:

“Parametrización por Longitud de Arco”

que si derivamos usando chain rule

$$\tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$= \sigma'(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1 \quad \forall s \in [0, L(\ell)]$$

"La norma de la velocidad es 1"

$$\int_0^r \|\tilde{\sigma}'(s)\| ds = r$$

Integral de Longitud de Arco

Ej: "Alambre inhomogéneo"

Representado por curva  $\mathcal{C}$

$$\text{Densidad} = \rho(x, y, z)$$

• Si  $\rho$  fuera constante:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{masa} &= \rho \cdot \text{long}(\mathcal{C}) \\ &= \rho \cdot L(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

• Si no:

↙ long. del alambre

$$\text{Sea } l = L(\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}$$

Parto  $\mathcal{C}$  en  $n$  pedacitos iguales (long.  $\frac{l}{n}$  c/u)

Para eso

$$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{param. regular}$$

$g(t)$  función de longitud de Arco:

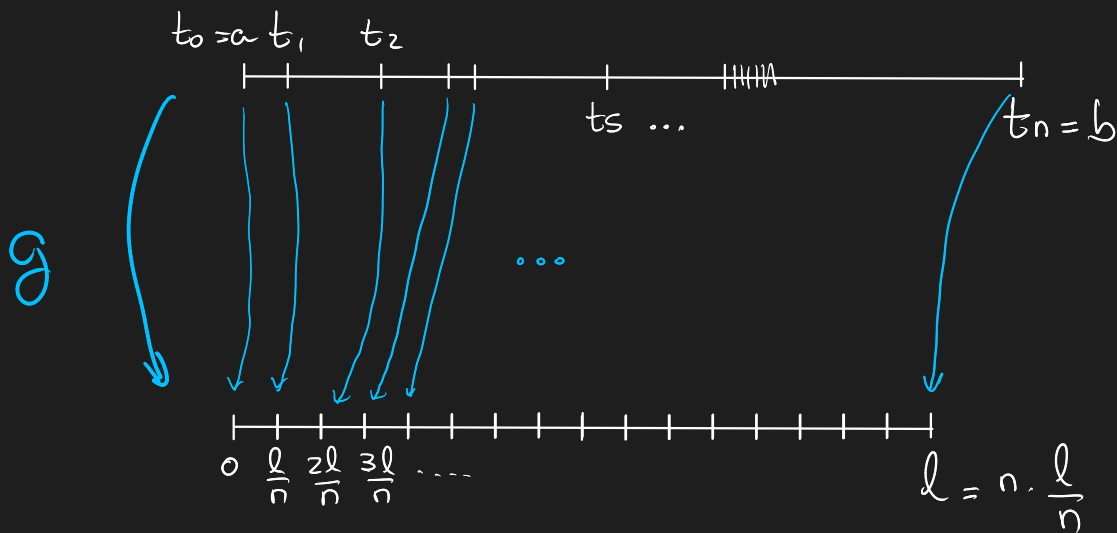
$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(s)\| ds$$



Para cada  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$\exists t_k \in [a, b]$  /

$$g(t_k) = k \cdot \frac{l}{n}$$



Como  $g$  es estrictamente creciente,  
se forma una partición (elementos ordenados) del  $[a, b]$

$$\Pi: t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

$\Rightarrow$   $\Sigma$ : llamamos

$$p_k = \sigma(t_k)$$

tenemos

$p_0, p_1, \dots, p_n$  puntos en  $\mathcal{C}$

tales que

la longitud entre estos puntos  $p_k$  (sobre  $\mathcal{C}$ )

es:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt =$$

? #3  $\rightarrow$   $t = g^{-1}(s)$   $-\sigma^{-2}(s) \cdot g' \cdot s'$

$$dt = \frac{1}{g'}$$

$$t = g^{-1}(s) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|}$$

$$= \int_{k \cdot \frac{l}{n}}^{(k+1) \cdot \frac{l}{n}} \|\sigma'(g^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|} ds$$

$$= \int_{k \cdot \frac{l}{n}}^{(k+1) \cdot \frac{l}{n}} 1 \cdot ds$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt = \frac{l}{n}$$

Como la densidad  $\rho$  es continua, puedo aproximar con algún punto  $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}]$ ,

$$\text{con } p_k^* = \sigma(t_k^*)$$

$\Rightarrow$  la masa del alambre entre  $p_k$  y  $p_{k+1}$  es aprox:   
 (suma que es constante acá)

$$\rho(p_k^*) \cdot \frac{l}{n}$$

$$\Rightarrow \text{mass total } M \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(p_k^*) \cdot \frac{\ell}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(p_k^*) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para ciertos  $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$

Demo:

$$M_k = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\sigma(t))$$

$$y \quad m_k = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\sigma(t))$$

entonces

$$m_k \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \leq M_k \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

luego, dividido por:  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$

$$\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt} \in [m_k, M_k] = \text{Im}(\rho(\sigma(t))) \text{ en } [t_k, t_{k+1}]$$

y como  $\rho$  y  $\sigma$  son continuas,

$$\exists \tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

tal que

$$\rho(\sigma(\tilde{t}_k)) = \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt}$$

Probé lo que quería, pues

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

↑ sumo todos los intervalitos

Volviendo al cálculo de la masa  $M$ :

$$M \approx \sum_{k=0}^{n-1} \ell(\sigma(t_k^*)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

y

$$\int_a^b \ell(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \ell(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

Notar que si el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  es muy chiquito

$$\Rightarrow t_k^* \cong \tilde{t}_k$$

$$\Rightarrow \sigma(t_k^*) \cong \sigma(\tilde{t}_k)$$

Con esto, tenemos que la masa de  $\ell$  es

$$\int_a^b \ell(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

Def:

Sea  $\ell$  una curva simple, abierta y suave,

y  $\sigma: [a, b] \rightarrow \ell$  una parametrización regular

Si  $f$  es una función continua en  $\ell$ ,

llamémos:

"Integral de  $f$  en  $\ell$  respecto a  
la Longitud de Arco"

a

$$\int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \cdot dt$$

Observación importante

Si  $\tilde{\sigma}: [c, d] \rightarrow \mathcal{C}$  es otra param. regular de  $\mathcal{C}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| = \int_c^d f(\tilde{\sigma}(t)) \cdot \|\tilde{\sigma}'(t)\|$$

(integrar sobre  $\mathcal{C}$  no depende de la param. que use)

• Esto da lugar a la notación

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds} = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt$$

para cualquier  $\sigma(t)$  param. regul. de  $\mathcal{C}$ .

"Integral de  $f$  es lo largo de  $\mathcal{C}$ "

• También podemos probar que si tenemos 2 parametrizaciones, una es una reparametrización de la otra.

Dem:

Dem:  $\exists h: [a,b] \rightarrow [c,d]$  biyectiva,  $h' \neq 0$

y  $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h^{-1}$ . (Ver video complementario 1).

$$\Rightarrow \int_c^d f(\tilde{\sigma}(s)) \|\tilde{\sigma}'(s)\| ds = \int_c^d f(\sigma(h^{-1}(s)) \|\sigma'(h^{-1}(s))\| |h^{-1}'(s)| ds$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| dt. \quad \square$$

$$t = h^{-1}(s)$$

$$dt = (h^{-1})'(s) ds$$

$$\text{sep } h^{-1}(c) = a \Rightarrow h^{-1}' > 0$$

$$h^{-1}(d) = b$$

$\hookrightarrow h$  resulta estrictamente creciente  
y:  $h'$  también.