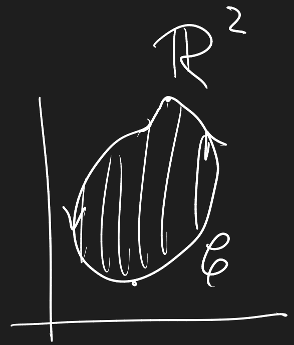
Teoremas de Stokes y Gauss

Feb 16

Green

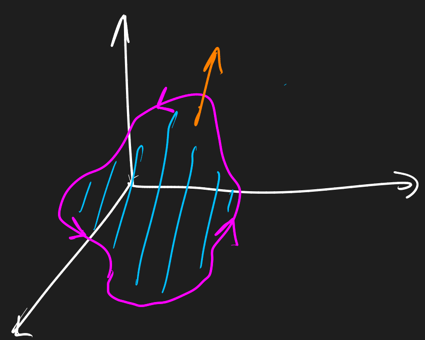


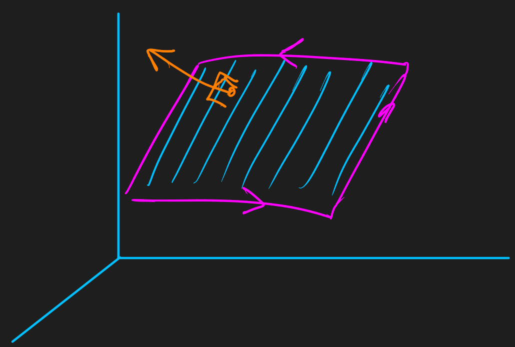
$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} \overset{\text{Green}}{=} \iint_{D} Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$F \in \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = \left(P(x,y),\ Q(x,y)\right)$

Stokes $\mathbb{R}^3$





$$\boxed{\int_{\substack{\partial S \\ \shortparallel \\ \mathcal{C}}} F \cdot d\vec{s} = \iint_{S} \nabla \times F \cdot d\vec{S}}$$

$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$F = (F_1,\ F_2,\ F_3)$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Gauss : Divergencia

Diver. negat. Divergencia positiva

$$\operatorname{div}(F) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)$$

$$\cap$$

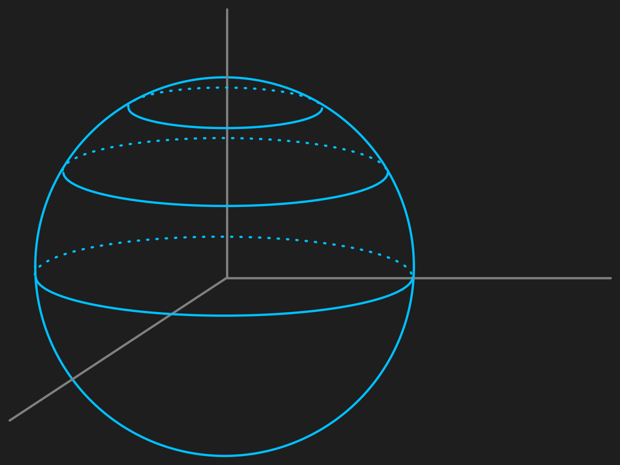
$$\mathbb{R}$$

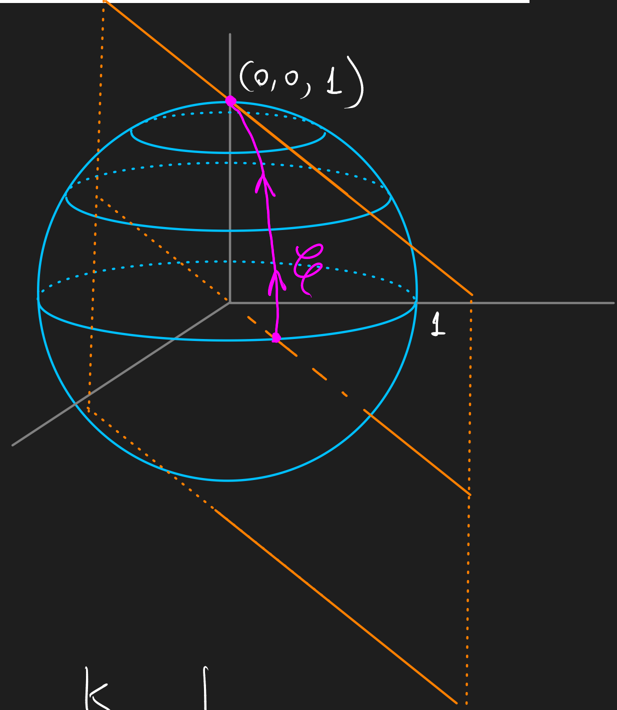
$$\iint_S F \cdot \eta \, ds = \iiint_\Omega \overbrace{\operatorname{div}(F)}^{\in \mathbb{R}} \, dV$$

Ejercicio 10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2\right)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano de ecuación $y=x$ recorrida desde el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ al polo norte.





$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \; -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$= \left(-2y - (-2y), \; -(2z - 2z), \; 2x - 2x \right)$$

$$= (0,0,0)$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(q) - f(p)$$

$$= f(0,0,1) - f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\underbrace{2xy+z^2}_{\frac{\partial f}{\partial x}}, \underbrace{x^2-2yz}_{\frac{\partial f}{\partial y}}, \underbrace{2xz-y^2}_{\frac{\partial f}{\partial z}})$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2xy+z^2 \\ f_y &= x^2-2yz \\ f_z &= 2xz-y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f = yx^2 + xz^2 + C(y,z) \\ f = yx^2 - zy^2 + C(x,z) \\ f = xz^2 - zy^2 + C(x,y) \end{cases}$$

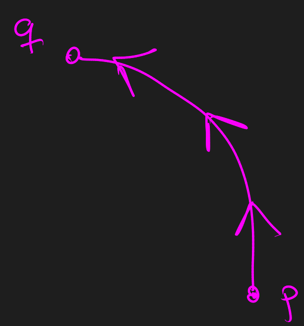
$$\boxed{f(x,y,z) = yx^2 + xz^2 - zy^2}$$

$$f(0,0,1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \;//$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = -\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$\approx -0,3..$

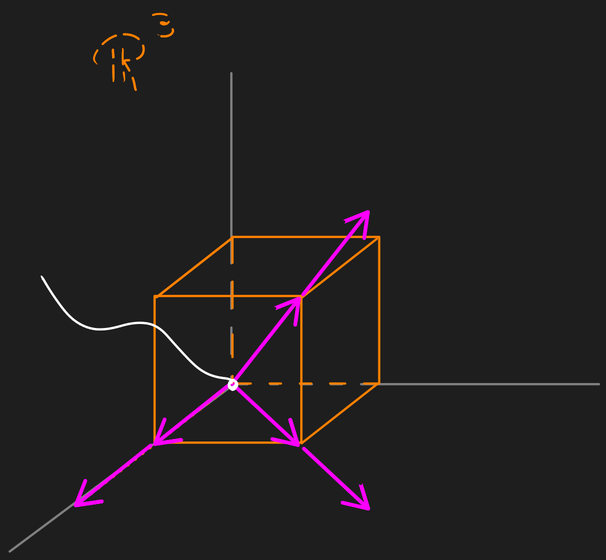


Feb 17
Miércoles.

Ejercicio 11. Rehacer el ejercicio 17 de la práctica 2 usando el teorema de Gauss.

- Guía Práctica 2:

↳ **Ejercicio 17.** Evaluar el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del borde del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.



$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, d\vec{S} =$$

$$= \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dV$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} 3 \, dV$$

$$= 3 \quad //$$

Ejercicio 12. Calcular $\int_S (x+y+z)\,dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir
$$S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}.$$

$$f(x,y,z) = (x+y+z) \in \mathbb{R}$$

$$\int_S f\,dS = \iint_{u\ v} f(T(u,v))\cdot \|T_u \times T_v\|\,du\,dv$$

Esféricas

$$x = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi$$

$$y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$$

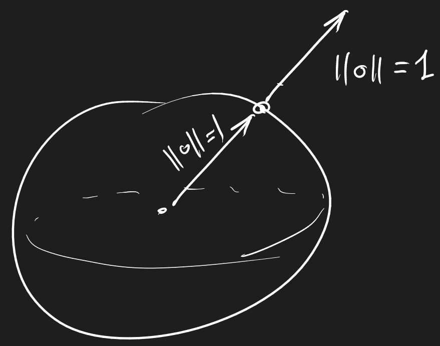
$$z = r\cdot\cos\varphi$$

$$\iint_S \langle F \cdot \eta \rangle\,dt = \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)$$

$$\langle F, \eta \rangle = f(x,y,z)$$

$$\langle (F_1, F_2, F_3), (\quad) \rangle = x+y+z$$

$$\left\langle \left(\ , \ , \ \right), (x, y, z) \right\rangle =$$



$$\left\langle \underbrace{(1, 1, 1)}_{F}, \underbrace{(x, y, z)}_{\eta} \right\rangle =$$

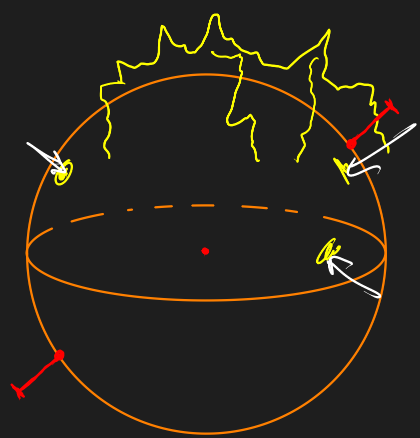
$$\iint_S F \cdot \eta \, dS \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dV$$

$$\operatorname{div} F = 0$$

$$= \iint_S x + y + z \, dS = 0 \quad //$$

Otra forma de verlo:

$$f(x,y,z) = (x + y + z) \in \mathbb{R}$$



13)

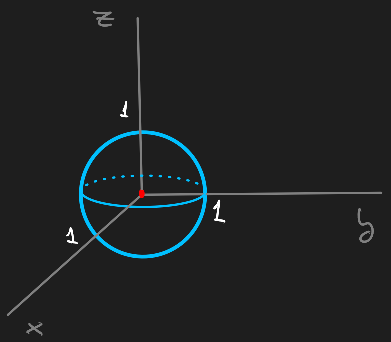
Jupiter Feb 18

Ejercicio 13. Analizar la aplicabilidad del teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^3}$ considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

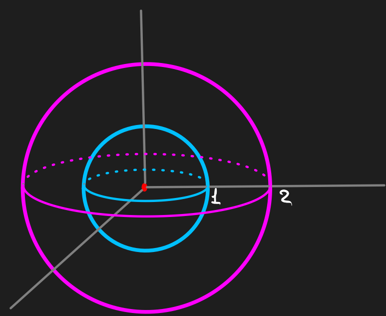
$\mathbf{X} = (x, y, z)$

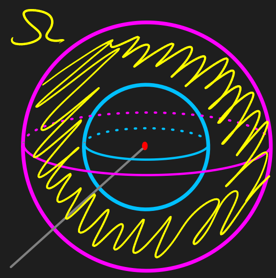
$\|X\|^3 (0,0,0) = 0 \in \mathbb{R}$

Preguntar!

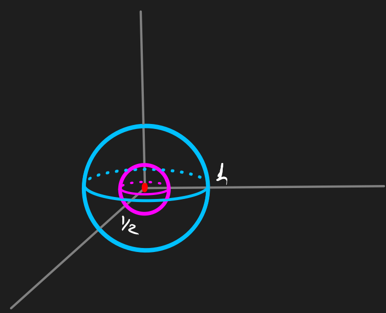


afuera





adentro



14)

Ejercicio 14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S \langle F, \eta \rangle \, du \, dv$$

$$= \int_u \int_v \langle F(T(u,v)), \underbrace{(T_u \times T_v)}_{\eta} \rangle \, dv \, du$$

- F es $C_1(\mathbb{R}^3)$ ✓

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

$$= 3\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=R^2}$$

$$\iint_S F \cdot \eta \, d\vec{S} \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_\Omega 3 \cdot \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\cancel{=}R^2} \, dV$$

la esfera tiene normal INTERIOR!

Puedo? NO o sólo cuando integro sobre la cáscara?

Preguntar 2

Mal!

$$\boxed{\begin{aligned} &= -3R^2 \cdot \underbrace{\iiint_\Omega 1 \cdot dV}_{\text{Volúmen (esfera)}} \\ &= -3R^2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \\ &= -4\pi \cdot R^5 \;/\!/ \end{aligned}}$$

$=$

$$\iint_S F \cdot \eta \, d\vec{S} \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_\Omega 3 \cdot (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

Esféricas

$x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$

$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$

$z = r \cdot \cos\varphi$

$r \in [0, R]$

Jacobiano $= r^2 \cdot \sin\varphi$

$$= -\iiint_\Omega 3 \cdot \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}\, dV$$

$$\overset{\text{esféricas}}{=} -\int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} 3 \cdot (r^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi) \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= -3 \iiint r^2 (\cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \, d\ldots$$

$$= -3 \iiint r^2 \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \cdot r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= -3 \iiint r^4 \cdot \sin\varphi \; d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= -3 \int_{r=0}^{R} r^4 \int_{\theta=0}^{2\pi} -\cos\varphi \Big|_0^{\pi} \; d\theta\, dr$$

$$= +3 \int_0^R r^4 \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_{1} \Big) \, d\theta\, dr$$

$$= +3 \int_0^R r^4 \cdot (-2) \cdot 2\pi \; dr$$

$$= -12\pi \cdot \int_0^R r^4 \, dr$$

$$= -12\pi \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R$$

$$= -12\pi \cdot \frac{R^5}{5}$$

$$= -\frac{12}{5} \cdot \pi \cdot R^5$$

15 [en Consultar Clase Práctica 10 Feb 18 - Gauss.pdf]

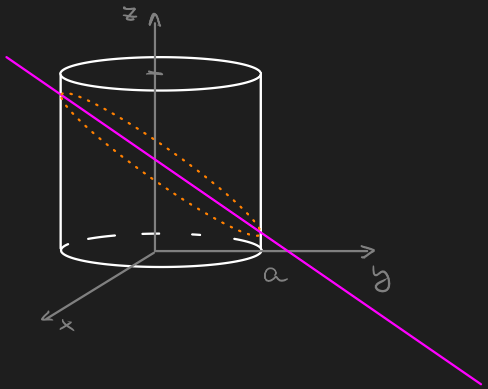
Saturno Feb 20

Ejercicio 16. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

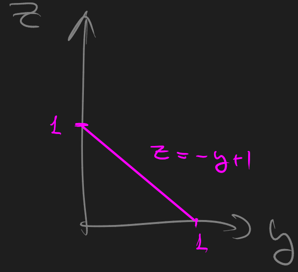
(a) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0,0,1)$ apunte en la dirección $(0,1,1)$.

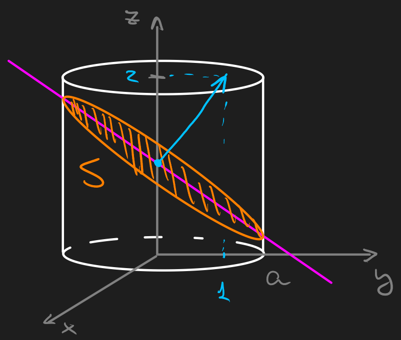
(b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0,0,0)$ apunte en la dirección $(0,0,1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.

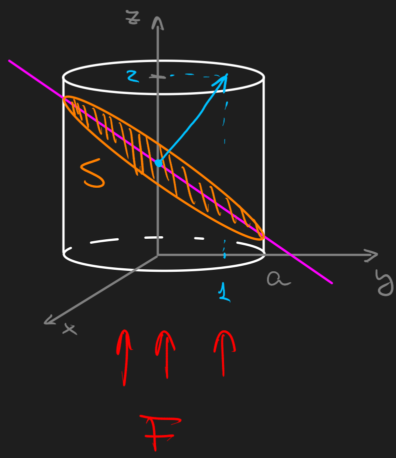


$z = -y + 1$

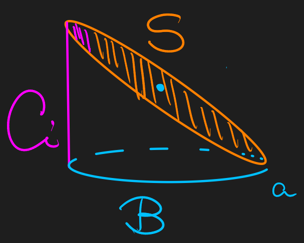




$$\iint_S F \cdot \eta \, d\vec{S} = ?$$



Cierro



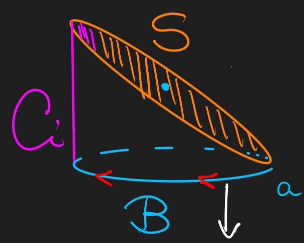
$$\iint_{S\cup C_i\cup B} F\cdot \eta\, d\vec{S} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F\, dV}_{=0 \text{ pues } \operatorname{div} F = 0}$$

Separo

$$\iint_{S\cup C_i\cup B} F\cdot \eta\, d\vec{S} = 0$$

$$= \underbrace{\iint_{S} F\cdot \eta\, d\vec{S}}_{\text{incógnita}} + \underbrace{\iint_{C_i} F\cdot \eta\, d\vec{S}}_{\substack{=\text{cero pues} \\ F \perp C_i\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3}} + \underbrace{\iint_{B} F\cdot \eta\, d\vec{S}}_{?}$$

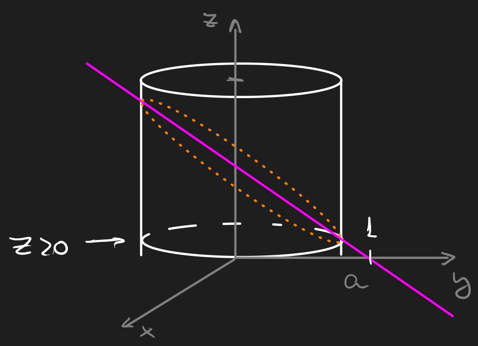
$$\iint_{B} F\cdot \eta\, d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \left\langle F(T(\theta,r)), (0,0,-1) \right\rangle dr\, d\theta$$



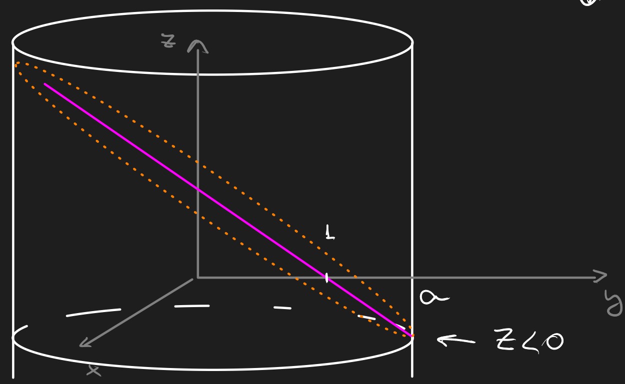
$$T(\theta,r) = (r\cdot \sin\theta,\ r\cdot\cos\theta,\ ?\ )$$

$$\begin{cases} y+z=1 & \Rightarrow z = 1-y \\ x^2+y^2 = a^2 & \Rightarrow |y| = \sqrt{a^2-x^2} \overset{\text{si } x=0}{\Longrightarrow} |y| = \sqrt{a^2} \end{cases}$$

sigo abajo



$a<1$



$a>1$

• si: $a=1 \Rightarrow z=0$

Asumo $a \geq 0$:

$$|y| = \sqrt{a^2} \Rightarrow |y| = a$$

$$y = a$$

Reemplazo en el plano

$$z = 1-y \Rightarrow \boxed{z = 1-a}$$

$$T(\theta,r) = \left(r \cdot \sin\theta,\ r \cdot \cos\theta,\ 1-a\right)$$

Compongo con $F(x,y) = (0,\ 0,\ a^2-x^2-y^2)$

$$F(T(\theta,r)) = \left(0,\ 0,\ a^2 - r^2 \cdot \sin^2\theta - r^2 \cdot \cos^2\theta\right)$$

$$= (0, 0, a^2 - r^2)$$

Tenía

$$\iint_B F \cdot \eta \, d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \left\langle F(T(\theta, r)), (0, 0, -1) \right\rangle \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int \int \left\langle (0, 0, a^2 - r^2), (0, 0, -1) \right\rangle \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} (r^2 - a^2) \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^a - a^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^a \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2} \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} a^4 \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4} \pi a^4$$

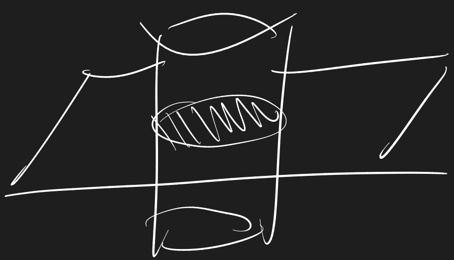
Como

$$0 = \underbrace{\iint_S F \cdot \eta \, d\vec{S}}_{\text{incógnita}} + \underbrace{\iint_{C_i} F \cdot \eta \, d\vec{S}}_{\substack{=\text{Cero pues} \\ F \perp C_i \ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3}} + \underbrace{\iint_B F \cdot \eta \, d\vec{S}}_{= -\frac{1}{4}\pi a^4}$$

$$\Longrightarrow \iint_S F \cdot \eta \, d\vec{S} = \frac{1}{4}\pi \cdot a^4$$

(b) Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección? Justifique.



Sí, pues el flujo es:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot a^3$$

↑ y a es el radio del cilindro.

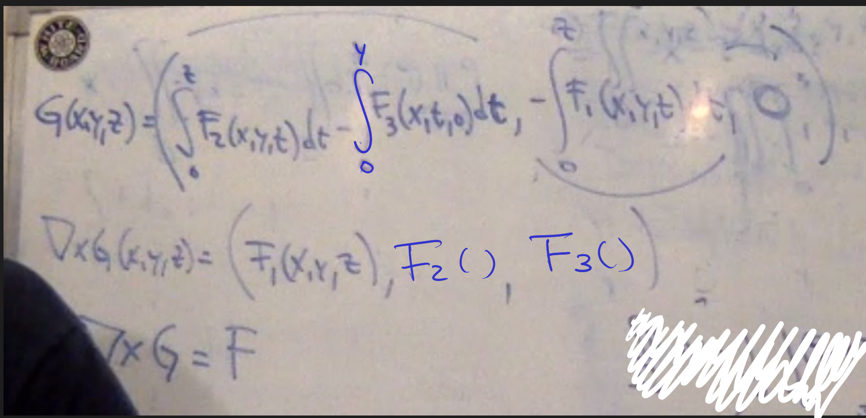
Ejercicio 18. Se sabe que $\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$\begin{aligned} G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt, \\ G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt, \\ G_3(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\right)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{G}$?

Sugerencia: ver el ejercicio 13.

Sale como :



Ejercicio 19. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

(a) $\mathbf{F} = (x, y, z)$.
(b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

$$\nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} =$$

a) $F = (x, y, z)$ es $F = \nabla \times G$?

$$\operatorname{div}(\underbrace{\nabla \times G}_{}) = 0 \quad \forall G$$

$$\operatorname{div} \quad F \overset{\text{debe ser}}{=} 0$$

Calculo $\operatorname{div} F = 3$

$\therefore$ No es rotor de ninguna G.

b) $F = (x^2+1,\ x-2xy,\ y)$

si $F = \nabla \times G \Rightarrow \operatorname{div} F = 0$

$\operatorname{div} F = 2x - 2x + 0 = 0$ ✓

∴ <u>es</u> el rotor de alguna G

La busco (llamo F a G por ahora)

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= x^2+1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= x - 2xy \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= y \end{aligned}\right\}$$

$(xz,\ -z+xy,\ yx^2)$

$\parallel$

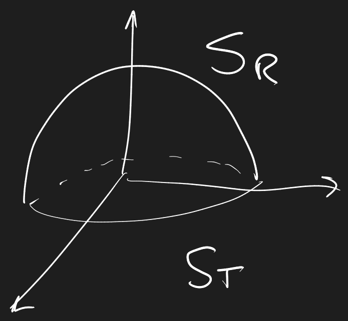
G que se corresponde con $F = \nabla \times G$ //

$$G = (xz,\ -z+xy,\ yx^2)$$

Ejercicio 20. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2\big).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.



$$\text{máx} \iint_{S_R} F \cdot \eta \, dS = ?$$

Quiero usar Gauss

$$\underbrace{\iint_{S_R \cup S_T} F \cdot \eta \, dS}_{= \iint_{S_R} F \cdot \eta \, dS + \iint_{S_T} F \cdot \eta \, dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV$$

$$= \underbrace{\iint_{S_R} F \cdot \eta \, dS}_{\text{Incógnita}} + \underbrace{\iint_{S_T} F \cdot \eta \, dS}_{?}$$

$$\operatorname{div} F = z - \cos z + (-z) + \cos z + 0$$

$$= 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV = 0$$

$$\therefore \quad \underbrace{\iint_{S_R^+} F \cdot \eta \, ds}_{\text{Incógnita}} = - \underbrace{\iint_{S_T^+} F \cdot \eta \, ds}$$

$$= \iint_{S_T} \left\langle F\left(T(\theta, r)\right), (0,0,-1) \right\rangle$$

Param: $\odot$

$$T(\theta, r) = \left(r \cdot \sin\theta, \; r \cdot \cos\theta, \; 0\right)$$

$$F(T_{(\theta,r)}) = \left(\ldots, \ldots, 4 - r^2 \cdot \sin^2\theta - r^2 \cdot \cos^2\theta \right)$$

$$\iint_{S_T} \left(r^2 \cdot \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} - 4 \right) \cdot r \quad dr\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^3 - 4r \quad dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R - 4\frac{R^2}{2} \, d\theta$$

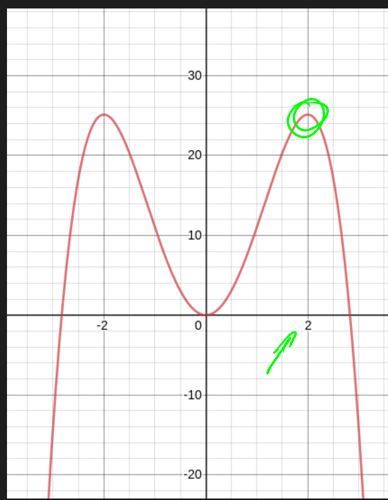
$$= 2\pi \left(\frac{R^4}{4} - 2R^2 \right)$$

$=$

$\therefore$

$$\iint_{S_R^+} F \cdot \eta \, ds = -\left(\frac{\pi}{2} \cdot R^4 - 4\pi R^2\right)$$

$$= 4\pi R^2 - \frac{\pi}{2} R^4$$



$$f(R) = 4\pi R^2 - \frac{\pi}{2} R^4$$

$$f'(R) = 8\pi R - 2\pi R^3 = 0$$

$$8\cancel{\pi} R = 2\cancel{\pi} R^3$$

$$4R = R^3$$

$$\overset{R\neq 0}{}$$

$$4 = R^2$$

$$2 \overset{R>0}{=} R \quad \checkmark$$

$\therefore$ el R que maximiza el flujo a través de S_R es $R = 2$, con S_2 la superficie.