

Práctica 6: Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo orden

Ejercicio 1. Hallar la solución general de los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x'_1 = -x_2 \\ x'_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x'_1 = -8x_1 - 5x_2 \\ x'_2 = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x'_1 = -4x_1 + 3x_2 \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 \\ x'_3 = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución correspondiente tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$. Ídem con t tendiendo a $-\infty$.

$$a) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} X \\ \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} = \begin{matrix} A \\ \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} X \\ \in \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

Polin. característica

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & \overset{+1}{-(-1)} \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

donde $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$= \lambda(\lambda - 3) - (-2)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

autovalores : $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
de A

Autovectores :

$$\lambda_1 : (\lambda_1 \mathbb{I} - A) \cdot V_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = V_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t$$

$$\lambda_2 = 2 :$$

$$(\lambda_2 \mathbb{I} - A) V_2 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -1 \\ 2 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot v_{21} + (-1) \cdot v_{22} = 0$$

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = V_2 \cdot e^{x_2 t}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Bere sol.

$$B_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \right\}$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot 1 \cdot e^t + c_2 \cdot 1 \cdot e^{2t} \\ c_1 \cdot (-1) \cdot e^t + c_2 \cdot 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Solución

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ademas

- Si quiero que $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} = 0$$

$$\text{como } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

• Si quiero que $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$(b) \begin{cases} x_1' = -8x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 10x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

$$X' = A X$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Autovalores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 8 & 5 \\ -10 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 8)(\lambda - 7) + 50$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 8\lambda - 56 + 50$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 6$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

$$\text{Autovalores de } A \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 2: (\lambda I - A) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+8 & 5 \\ -10 & \lambda-7 \end{pmatrix} \bigg|_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 :$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+8 & 5 \\ -10 & \lambda-7 \end{pmatrix} \bigg|_{\lambda=-3} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \right\}$$

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

• Si: qui ero que $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow C_1 = 0 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}$$

• Si: qui ero que $X(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow C_1 \in \mathbb{R} \text{ y } C_2 = 0$$

$$(c) \begin{cases} x'_1 = -4x_1 + 3x_2 \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

Calc. online (<https://matrixcalc.org/en/vectors.html>)

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \text{ y distintos} \Rightarrow B_S = \{v_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x'_2 = -2x_1 + x_2 \\ x'_3 = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

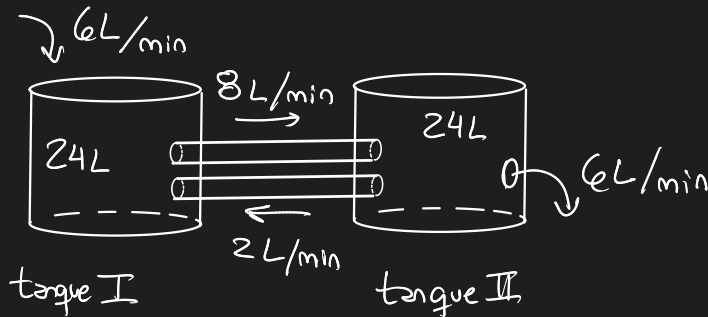
$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1 \end{array} \right\} \text{ Todos distintos} \Rightarrow B_S = \{v_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, v_3 \cdot e^{\lambda_3 t}\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea.

Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$.

¿Cuál es el límite, cuando $t \rightarrow +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque?



Notar similitud entre "posición y velocidad" con "volumen y velocidad"
(en un problema de MRU) (en este problema)

Ejercicio 3. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 2x_2 \end{cases} \\ \text{(c)} \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = 2x_2 \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} x'_1 = -5x_1 + 9x_2 \\ x'_2 = -4x_1 + 7x_2 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Auto valores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & +1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\text{Auto valores} \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i = \overline{\lambda_1} \end{cases}$$

Digo

$$\lambda = 1 + i$$

Calcúlalo auto vector

$$(\lambda I - A) V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \bigg|_{\lambda = 1+i} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$$

$$i \cdot v_1 = -v_2$$

$$\bullet \text{ So } v_1 = i :$$

$$(i)^2 = -1 = -v_2 \Rightarrow v_2 = 1$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sol x_1

$$x_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+i)t} \quad e \in \mathbb{C} !$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t \cdot e^{it}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t \cdot (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} i \cdot e^t \cdot \cos t + i \cdot e^t \cdot i \sin t \\ 1 \cdot e^t \cdot \cos t + 1 \cdot e^t \cdot i \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^t \begin{pmatrix} i \cdot \cos t - \sin t \\ \cos t + i \cdot \sin t \end{pmatrix} \\
 &= e^t \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\text{Re}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\text{Im}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_S = \left\{ e^t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 X(t) &= C_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
 &\qquad\qquad\qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2 \\ x'_2 = 4x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

De calcul. online

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 - 2i \\ \lambda_2 = 2 + 2i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Llamo} \\ \lambda = \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \\ V = V_1 = \bar{V}_2 \end{array}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtengo UNA solución compleja

$$V \cdot e^{\lambda t} \text{ donde } \lambda = (a + bi)$$

• Separo

$$V \cdot e^{at} \cdot e^{ibt}$$

• Reescribo

$$V \cdot e^{at} \cdot (\cos bt + i \sin bt)$$

• Distribuyo y tomo

parte Re e Im como

Dos elementos li de

la base solución B_s

$$B_s = \left\{ \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Real} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Imag.} \end{pmatrix} \right\}$$

• Sol

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Real} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \text{Parte} \\ \text{Imag.} \end{pmatrix}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$(c) \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Autovectores:

$$(\lambda I - A) V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Una componente de la Base de soluciones

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}, \quad ? \right\}$$

- la segunda componente

$$e^{\lambda t} \cdot (W + t V)$$

necesito W

$$(A - \lambda I) \cdot W = V$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 = 1$$

$$w_2 = 1$$

$$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow 1^o 2^o compo. de 1^o B₅ é

$$e^{\lambda t} \cdot (w + t v) =$$

$$= e^{2t} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base de soluciones

$$\mathcal{B}_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \right\}$$

Como el

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$\text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$(d) \quad \begin{cases} x_1' = -5x_1 + 9x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Hallar la solución general de los siguientes sistemas

$$(a) \begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

$$X' = A X + B(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Resolvemos Homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculo auto valores

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & +1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 3) + 2$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Autovectores

$$(\lambda I - A) \cdot V = \vec{0}$$

de ej¹:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\text{st}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \right\}$$

$$X_{\text{st}}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

↑
Sol. del Homogéneo.

Quiero sol particular

Uso Método de Var. de constantes

$$X_p(t) = c_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

tal que

$$X_p'(t) = A \cdot X_p(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Resuelvo

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$F_2 + 2F_1$$

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

despejo C_1'

$$e^t \cdot C_1' + 0 = t + 4$$

$$C_1'(t) = (t + 4) \cdot e^{-t}$$

despejo C_2'

$$e^t \cdot \overbrace{(t+4)}^{C_1'} \cdot e^{-t} - e^{2t} \cdot C_2' = 2$$

$$t + 4 - e^{2t} \cdot C_2' = 2$$

$$-e^{2t} \cdot C_2' = 2 - t - 4$$

$$C_2' = (t + 2) \cdot e^{-2t}$$

Integro C_1'

$$C_1(t) = \int C_1'(t) dt = \int (t + 4) \cdot e^{-t} dt$$

$$= \int t \cdot e^{-t} dt + 4 \int e^{-t} dt$$

⋮

$$C_1(t) = -(t + 5) \cdot e^{-t}$$

Integro C_2'

$$C_2(t) = \int C_2' dt = \int (t+2) \cdot e^{-2t} dt$$

...

$$C_2(t) = -\frac{1}{4}(2t+5) \cdot e^{-2t}$$

Volviendo

$$X_p(t) = C_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$$= \cancel{-(t+5) \cdot e^{-t}} \cdot \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t} - \frac{1}{4}(2t+5) \cdot \cancel{e^{-2t}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \cancel{e^{2t}}$$

$$= \begin{pmatrix} -t-5 \\ t+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + \frac{5}{4} \\ -t - \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Verificamos que anda

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -t - \frac{15}{2} + \frac{15}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Solution general X

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$X(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$(b) \begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = 4x_1 + 2x_2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$X' = A \cdot X + B(t)$$

Resuelvo homogéneas

Calculo autovalores

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -(-1) \\ -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 - (-4) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 - 2i \\ \lambda_2 = 2 + 2i \end{cases}$$

Autovector

$$\left((2-2i)I - A \right) \cdot V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -(-1) \\ -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \cdot V = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2i V_1 + V_2 = 0 & \xrightarrow{\times 2i} 4V_1 + 2i V_2 = 0 \\ -4V_1 - 2i V_2 = 0 \end{cases}$$

$$4V_1 = -2i V_2$$

$$V_1 = -\frac{2i}{4} V_2$$

$$V_1 = -\frac{1}{2} i V_2$$

$$\text{elijo } V_2 = 1$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{1}{2} i$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tengo una solución en } \mathbb{C}: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2-2i)t}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(2-2i)t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \cdot e^{-2it}$$

$$\begin{aligned}
&= V \cdot e^{zt} \cdot (\cos(-2t) + i \sin(-2t)) \\
&= V e^{zt} \cos(-2t) + V \cdot e^{zt} \cdot i \cdot \sin(-2t) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{zt} \cos(-2t) - \frac{1}{2} i \cdot i e^{zt} \sin(-2t) \\ 1 \cdot e^{zt} \cos(-2t) + 1 i e^{zt} \sin(-2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{zt} \cos(-2t) + e^{zt} \frac{1}{2} \sin(-2t) \\ e^{zt} \cos(-2t) + e^{zt} i \sin(-2t) \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} i \cdot e^{zt} \cos(-2t) \\ e^{zt} i \sin(-2t) \end{pmatrix}}_{\text{Im}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{zt} \frac{1}{2} \sin(-2t) \\ e^{zt} \cos(-2t) \end{pmatrix}}_{\text{Re}}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_{\text{st}} = \left\{ e^{zt} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix}, e^{zt} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix} \right\}$$

Necesito sol part.

Uso método de var. de constantes

$$X_p(t) =$$

$$= C_1(t) e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix} + C_2(t) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix}$$

tal que

$$X'_p(t) = A X_p + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para eso, calculo

$$Q(t) \cdot C'(t) = B(t)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X_{H1} & X_{H2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(-2t) & -\frac{1}{2} e^{2t} \cdot \cos(-2t) \\ e^{2t} \cdot \cos(-2t) & e^{2t} \cdot \sin(-2t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C'_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(-2t) - C'_2 \cdot \frac{1}{2} e^{2t} \cdot \cos(-2t) = e^{2t} \\ C'_1 \cdot e^{2t} \cdot \cos(-2t) + C'_2 \cdot e^{2t} \cdot \sin(-2t) = 4 \end{cases}$$

divido por e^{2t}

$$\begin{cases} C'_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(-2t) - C'_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(-2t) = 1 \\ C'_1 \cdot \cos(-2t) + C'_2 \cdot \sin(-2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$F_1 \times 2$

$$\begin{cases} C_1' \sin(-2t) - C_2' \cos(-2t) = 2 \\ C_1' \cos(-2t) + C_2' \sin(-2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

Notar que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ y $\cos \theta = \cos(-\theta)$

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t) - C_2' \cos(2t) = 2 \\ C_1' \cos(2t) - C_2' \sin(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$F_1 \times \cos 2t$

$F_2 \times \sin 2t$

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t) \cos(2t) - C_2' \cos^2(2t) = 2 \cdot \cos 2t \\ C_1' \cos(2t) \sin(2t) - C_2' \sin^2(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 2t \end{cases}$$

Sumo

$$0 - C_2' \underbrace{(\cos^2 2t + \sin^2 2t)}_{=1} =$$

$$- C_2' =$$

$$C_2' =$$

Para C_1 hago lo mismo

$$\begin{cases} -C_1' \sin(2t) - C_2' \cos(2t) = 2 \\ C_1' \cos(2t) - C_2' \sin(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \end{cases}$$

$$F_1 \times \sin 2t$$

$$F_2 \times \cos 2t$$

$$\begin{cases} -C_1' \sin^2(2t) - C_2' \cos(2t) \cdot \sin(2t) = 2 \sin 2t \\ C_1' \cos^2(2t) - C_2' \sin(2t) \cos(2t) = 4 \cdot e^{-2t} \cos 2t \end{cases}$$

Sumo

$$-C_1' - 2C_2' \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

$$-C_1' - 2 \cdot (-2 - 4 \cdot e^{-2t}) \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

$$-C_1' + 2(2 + 4e^{-2t}) \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t =$$

Integro C_1 y C_2

Obtengo C_1 y C_2

Calculo

$$X_p(t) = C_1(t) e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin -2t \\ \cos -2t \end{pmatrix} + C_2(t) \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -2t \\ \sin -2t \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{General}} = X_p + X_H$$

Ejercicio 5. Encontrar un sistema fundamental de soluciones reales de las siguientes ecuaciones:

i) $y'' - 8y' + 16y = 0$

ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$

iii) $y'' - y' - 2y = 0$

En cada uno de los casos anteriores encontrar una solución de la ecuación no homogénea correspondiente con término independiente $x, e^x, 1$ y e^{-x} .

i) $p(t) = t^2 - 8t + 16$ $y^{(0)} \Rightarrow y^0 = 1$

$$= (t - 4)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$B_{\text{st}} = \left\{ \underbrace{e^{4t}}_{y_{H1}}, \underbrace{t \cdot e^{4t}}_{y_{H2}} \right\}$$

Solución

$$y(t) = C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot t \cdot e^{4t}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_{H1} & y_{H2} \\ y'_{H1} & y'_{H2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & t \cdot e^{4t} \\ 4 \cdot e^{4t} & e^{4t} + 4t \cdot e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$y_p(t) = C_1(t) \cdot \underbrace{e^{4t}}_{y_{H1}} + C_2(t) \cdot \underbrace{t \cdot e^{4t}}_{y_{H2}}$$

Sol general

$$y(t) = y_H + y_P$$

Otra forma:

$$y'' - 8y' + 16y = t$$

Propongo

$$y = at + b$$

$$y' = a$$

$$y'' = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = at + b \\ y' = a \\ y'' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{D}(y) = y'' - 8y' + 16y \\ = -8a + 16at + 16b \end{array}$$

quiero
 \downarrow
 $= t$

$$-8a + 16at + 16b = t$$

$\underbrace{\quad}_{\text{const}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{const}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{const}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{sin } t}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16at = t \Rightarrow 16a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{16} \\ 16b - 8a = 0 \Rightarrow a = 2b \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{32}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = \frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}$$

Verifica

$$y_p' = \frac{1}{16}$$

$$y_p'' = 0$$

$$y'' - 8y' + 16y = \underbrace{-8 \cdot \frac{1}{16}}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{16 \cdot \frac{1}{16} \cdot t}_t + \underbrace{16 \cdot \frac{1}{32}}_{+\frac{1}{2}} = t \quad \checkmark$$

Para e^x

$$y'' - 8y' + 16y = e^x$$

Propongo:

$$\bullet \quad y(x) = a \cdot e^x$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad y' = a \cdot e^x$$

$$\bullet \quad y'' = a \cdot e^x$$

$$\Rightarrow y'' - 8y' + 16y = a \cdot e^x \cdot (1 - 8 + 16)$$

$$= a \cdot e^x \cdot 9$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{9} e^x$$

$$\Rightarrow y'' - 8y' + 16y =$$

$$= \frac{1}{9} e^x - 8 \cdot \frac{1}{9} e^x + 16 \cdot \frac{1}{9} e^x$$

$$= \frac{1}{9} e^x \cdot \underbrace{(1 - 8 + 16)}_{=9}$$

$$= e^x \quad \checkmark$$

ii) $y'' - 2y' + 10y = 0$

Armo Polinomio

$$P(x) = x^2 - 2x + 10 \begin{cases} \nearrow \lambda_1 = 1 + 3i \\ \searrow \lambda_2 = 1 - 3i \end{cases}$$

Calculo

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(1+3i) \cdot x} = e^{1x} \cdot e^{3i \cdot x}$$

$$= e^x \cdot \left(\cos(3x) + i \cdot \sin(3x) \right)$$

$$= e^x \cdot \cos 3x + i \cdot e^x \cdot \sin 3x$$

Escribo B

$$B = \left\{ e^x \cdot \cos 3x, e^x \cdot \sin 3x \right\}$$

Sol

$$y(x) = C_1 \cdot e^x \cdot \cos 3x + C_2 \cdot e^x \cdot \sin 3x$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para $\underbrace{y'' - 2y' + 10y}_{D(y)} = x$

Propongo

$$\left. \begin{aligned} \bullet y &= ax + b \\ \bullet y' &= a \\ \bullet y'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} D(y) &= 0 - 2a + 10ax + 10b = \\ &= \underbrace{-2a + 10b}_{\sin x} + 10ax = x \end{aligned}$$

↑
quiero

Armo sistema

$$\begin{cases} -2a + 10b = 0 \\ 10a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{10} + 10b = 0$$

$$10b = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{1}{50}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{10}x + \frac{1}{50}$$

Sol genl: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Para $\underbrace{y'' - 2y' + 10y}_{D(y)} = e^x$

Propongo

$$\left. \begin{array}{l} y = a \cdot e^x \\ y' = a \cdot e^x \\ y'' = a \cdot e^x \end{array} \right\} D(y) = a \cdot e^x \cdot \underbrace{(1 - 2 + 10)}_9$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

Sol Part,

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{9} \cdot e^x$$

Para $\underbrace{y'' - 2y' + 10y}_{D(y)} = 1$

Propongo

$$\left. \begin{array}{l} \cdot y = a \\ \cdot y' = 0 \\ \cdot y'' = 0 \end{array} \right\} D(y) = 10a \stackrel{\text{quiero}}{=} 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{10}$$

Sol P.

$$y_p = \frac{1}{10}$$

Para $\underbrace{y'' - 2y' + 10y}_{D(y)} = e^{-x}$

Propongo

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = a \cdot e^{-x} \\ y'(x) = -a \cdot e^{-x} \\ y''(x) = a \cdot e^{-x} \end{array} \right\} D(y) = a \cdot e^{-x} \cdot \underbrace{(1 + 2 + 10)}_{13} \Rightarrow a = \frac{1}{13}$$

Solución Particular

$$y^p(x) = \frac{1}{13} \cdot e^{-x}$$

Para

$$D(y) = y'' - 8y' + 16y = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet y = a \\ \bullet y' = 0 \\ \bullet y'' = 0 \end{array} \right\} D(y) = 16y = 16a \stackrel{\text{quiero}}{\downarrow} = 1$$
$$\Rightarrow a = \frac{1}{16}$$

Sol. Part

$$y_p(x) = \frac{1}{16}$$

Para

$$y'' - 8y' + 16y = e^{-x}$$

Propongo

$$\begin{array}{l} \bullet y(x) = a \cdot e^{-x} \\ \bullet y'(x) = -a \cdot e^{-x} \\ \bullet y''(x) = a \cdot e^{-x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} D(y) &= e^{-x} \cdot (a + 8a + 16a) \\ &= e^{-x} \cdot (25a) \end{aligned}$$

$$\text{Como quero } 25a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{25} \cdot e^{-x}$$

Verifico

$$\frac{1}{25} \cdot e^{-x} + 8 \cdot \left(\frac{1}{25} \cdot e^{-x} \right) + 16 \frac{1}{25} \cdot e^{-x} =$$

$$= e^{-x} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{25} + \frac{8}{25} + \frac{16}{25} \right)}_{=1}$$

$$= e^{-x} \quad \checkmark$$

Sol general

$$y(t) = y_H + y_P$$

Otra

$$y'' - 8y' + 16y = t$$

$$\left. \begin{array}{l} y = at + b \\ y' = a \\ y'' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -8.a + \underbrace{16at}_{\text{cont } t} + \underbrace{16b}_{\text{sin } t} \stackrel{\text{quiero}}{=} t \end{array}$$

\Rightarrow quiero

$$\left\{ \begin{array}{l} -8.a + 16b = 0 \Rightarrow a = 2b \\ 16a = 1 \end{array} \right.$$

$$a = \frac{1}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{16} \cdot t + \frac{1}{8}$$

$$y' = \frac{1}{16}$$

$$\underbrace{-8 \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + 16 \frac{1}{16} t + \underbrace{16 \cdot \frac{1}{8}}_2$$

Ejercicio 6. Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1 - a_2}{\pi}$ no es un número entero.

- (a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.
- (b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π ?
- (c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

Ejercicio 7. Hallar todas las soluciones de $y'' - y' - 2y = 0$ y de $y'' - y' - 2y = e^{-x}$ que verifiquen:

(i) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(ii) $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(iii) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$

(v) $y(0) = 1$

(vi) $y'(0) = 1$

Ejercicio 8. En el interior de la Tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviese la Tierra pasando por el centro, y se deja caer una piedra en el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?

Ejercicio 9. La ecuación $x^2y'' + pxy' + qy = 0$ (p, q constantes) se denomina *ecuación de Euler*.

- (a) Demuestre que el cambio de variables $x = e^t$ transforma la ecuación en una con coeficientes constantes.
- (b) Aplique (a) para resolver en $\mathbb{R}_{>0}$ las ecuaciones:

i) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

ii) $x^2y'' - xy' + y = 2x$

Ejercicio 11. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones, empleando la solución dada:

- i) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $I = \mathbb{R}_{>0}$, $y_1(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$.
- ii) $xy'' - y' - 4x^3y = 0$, $I = \mathbb{R}_{>0}$, $y_1(x) = \exp(x^2)$.
- iii) $xy'' - y' - 4x^3y = 0$, $I = \mathbb{R}_{<0}$, $y_1(x) = \exp(x^2)$.
- iv) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $I = (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$, $y_1(x) = x$.

El último ítem es un caso especial de la llamada *ecuación de Legendre*, esto es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0,$$

correspondiente al caso $p = 1$, en los intervalos en que la ecuación es normal.

Ejercicio 12. Hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$, sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada.