Feb 9

Orientación de Superficies

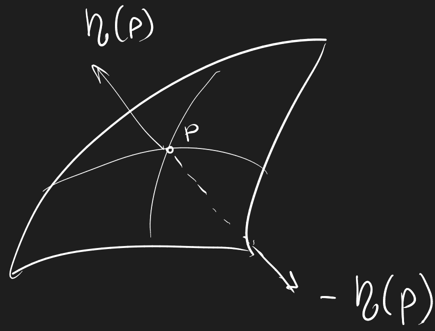
$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie

$\left(\exists\, T : D \to S \right.$ continua sobreyectiva $\left. \right)$

S se dice orientable si:

$\exists\, \eta : S \to \mathbb{R}^3$

normal continua



Orientaciones y parametrizaciones

$T : D \to S$, D Dominio elemental

(cerrado y acotado)

si T es regular ($\Rightarrow$ inyectiva)

$\Rightarrow S$ orientable.

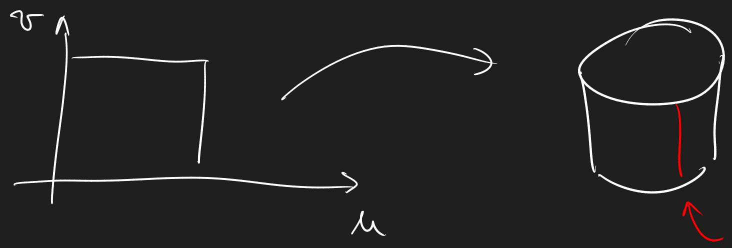
$$D \qquad\qquad S \qquad\qquad \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longmapsto p = T(u,v) \longmapsto \eta(p) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

o bien

$$\eta(p) = -\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

Casos de Interés



$T(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ No es regular (no es inyectiva)

$u \in [0, 2\pi]$

$v \in [a, b]$

$D = [0, 2\pi] \times [a; b]$

No puedo usar el Teorema así como así.

$T_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

$T_v = (0, 0, 1)$

$T_u \times T_v = (\cos u, \sin u, 0)$

Obs:

$p \in S, \quad p = (x, y, z)$

$\Rightarrow \eta(p) = (x, y, z)$

No inyectividad No es problema!

Pues:

$$(u_0, v_0) \xrightarrow{T} p$$

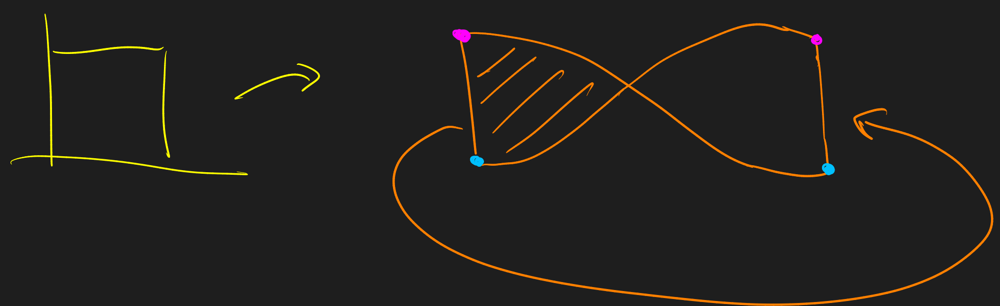
$$\#$$

$$(u_1, v_1) \nearrow T$$

y $T_u \times T_v (u_0, v_0) = T_u \times T_v (u_1, v_1)$ ✓

Se pegan con la misma normal.

- Otro caso donde S no es orientable



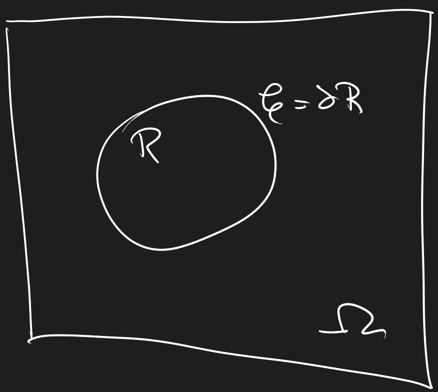
Cinta de Moebius

Teorema de Green

Ingredientes

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto
- $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ campo C^1
  $F = (P, Q)$
- R región tipo III, $R \subset \Omega$
  $\partial R = \mathcal{C}$ cerrada simple, difer. a trozos

estática:

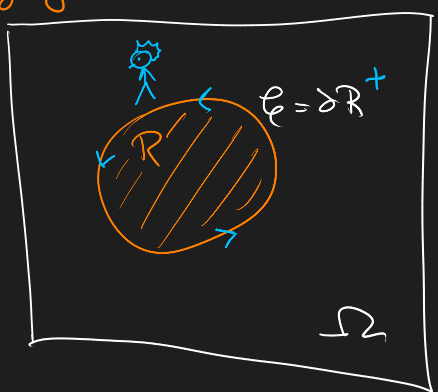


Teo:

$$\iint_R (Q_x - P_y)\, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s}$$

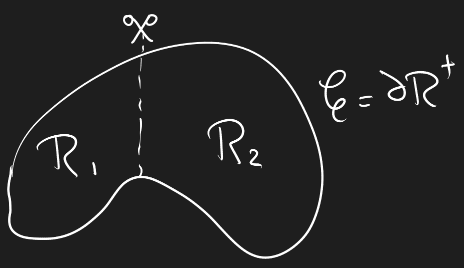
donde $\mathcal{C}$ está orientada positivamente.

Agrego orientación



Extensiones del Teorema

1) a) Regiones que se descomponen



$\mathcal{C}_1 = \partial R_1^+$

$\mathcal{C}_2 = \partial R_2^+$

b) Agujeros $\quad R, \quad \mathcal{C} = \partial R, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

+ 2 trocitos que se anulen

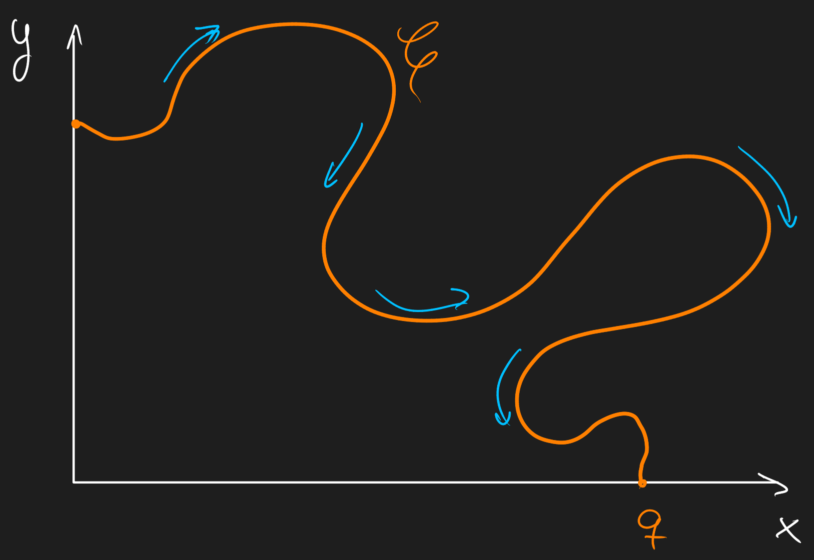
$$\iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\mathcal{C}_2} P\,dx + Q\,dy$$

(antihorario) (horario)

Aplicación
(Cerrando Curvas)

Situación:

$\mathcal{C}$ curva (no cerrada) fea



F un campo $F = (P, Q)$ feo

Ejemplo (mismo que la práctica):

$\mathcal{C}$ dada y orientada por

$$\sigma(t) = (\sin t, \cos t)$$

$$t \in [0, \tfrac{3}{2}\pi]$$

$$F(x,y) = \left(2\cos(x^2 y)\cdot xy - 2y \;,\; x^2 \cdot \cos(x^2 y) + 3x\right)$$

Plan A: Resuelvo a mano $\displaystyle\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t)\rangle \, dt$

- Plan B: Completar la curva y usar Green

Definiendo curvas que la cierren, de forma
(Γ_1, Γ_2)

que se simplifique el cálculo junto al campo.

Green :

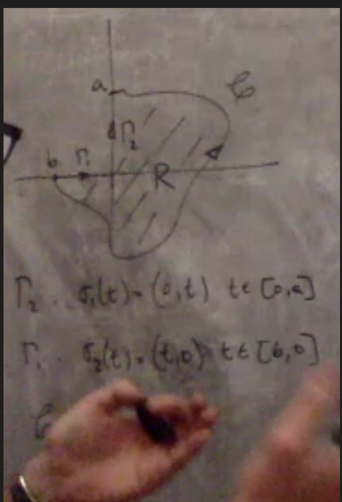
$$-\iint_R \overbrace{Q_x - P_y}^{\text{Rotor}} \, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} + \int_{\Gamma_1} F\, d\vec{s} + \int_{\Gamma_2} F\, d\vec{s}$$

sentido opuesto

- Si fuera campo gradiente :

  ↳ $Q_x - P_y = 0$

Ejemplo



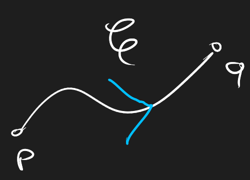
Obs :

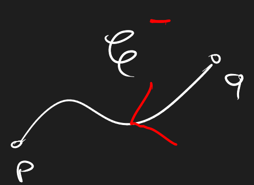
$\mathcal{C}, \Gamma_1, \Gamma_2$ <u>ya</u> <u>están</u> orientadas

(Dada una curva $\mathcal{C}$ orientada, $\mathcal{C}^-$ indica su orientación inversa)

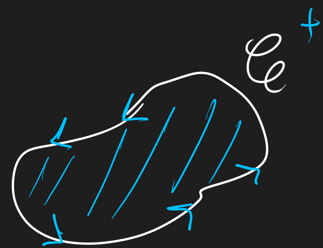
Notaciones

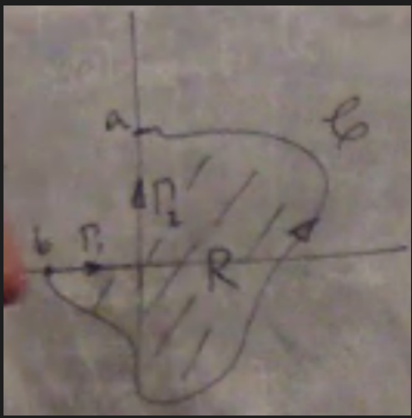
Si



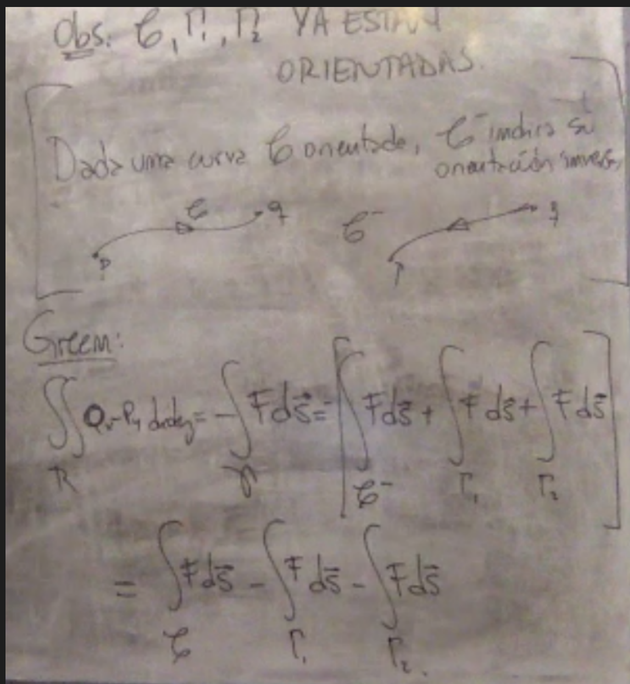


Para Curvas Cerradas





$\mathscr{C}^- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \gamma$ orientada



Obs: $\mathscr{C}, \Gamma_1, \Gamma_2$ YA ESTÁN ORIENTADAS.

Dada una curva $\mathscr{C}$ orientada, $\mathscr{C}^-$ indica su orientación inversa.

Green:

$$\iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy = -\int_\gamma \bar{F}\,d\bar{s} = -\left[\int_{\mathscr{C}^-} \bar{F}\,d\bar{s} + \int_{\Gamma_1} \bar{F}\,d\bar{s} + \int_{\Gamma_2} \bar{F}\,d\bar{s}\right]$$

$$= \int_{\mathscr{C}} \bar{F}\,d\bar{s} - \int_{\Gamma_1} \bar{F}\,d\bar{s} - \int_{\Gamma_2} \bar{F}\,d\bar{s}.$$

En vez de decir

"Orientación positiva / negativa"

Podemos decir

"Curva orientada de manera compatible con la región"