Iván

Marte Marzo 16

Resolución de ejercicios de Parcial

1)

16/3/2021 - CLASE 22 - PARCIAL RESUELTO

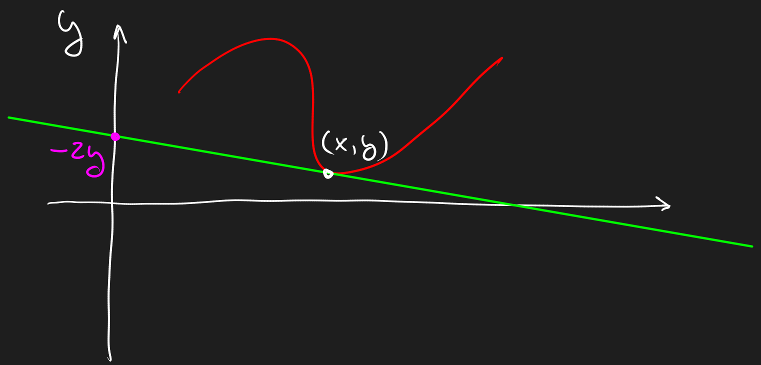
2° PARCIAL 30/11/2013

1) DE STOKES/GAUSS

2) ENCONTRAR TODAS LAS FUNCIONES $y = y(x)$, $x \geq 0$, DERIVABLES TALES QUE TODAS LAS RECTAS TANGENTES AL GRÁFICO CORTEN AL EJE y EN EL DOBLE DEL OPUESTO A LA ORDENADA DEL PUNTO DE TANGENCIA.

↳ $-2y$

Arranco a graficar



Ec. de la recta tangente

(x,y) → puntos del gráfico de $y(x)$

(u,v) → de la recta tangente

$$v - y = y' \cdot (u - x)$$

punto: $(0,-2y)$

$$-2y - y = y'(0 - x)$$

$$-3y = -y'x$$ ← Separadas

$$\frac{3}{x} = \frac{y'}{y}$$

$$\int \frac{3}{x}\,dx = \int \frac{y'}{y}\,dy$$

$$\underset{x \geq 0}{3\ln|x|} + C = \ln|y| \qquad (x \geq 0)$$

$$e^{3\ln x + C} = |y|$$

$$\underbrace{e^{3\ln x}} \cdot \underbrace{e^{C}} = |y|$$

$$x^3 \cdot K = |y| \qquad K > 0$$

Solución

$$\boxed{(K \in \mathbb{R}) \quad K \cdot X^3 = y}$$

3) Resolver

$$X \cdot y'' - (X+1)\,y' + y = 3X^2 \qquad \text{con } X > 0$$

Sabiendo que

$$y = e^{x}$$

es solución de la ec. homogénea asociada

• Con coef. no constantes, nos tienen que dar una solución.

ec. homogénea asociada

$$x \cdot y'' - (x+1)\, y' + y = 0$$

Chequeo sol. dada $y = e^x$

$$y = y' = y'' = e^x$$

$$x \cdot e^x - (x+1) \cdot e^x + e^x = e^x(x - x - 1 + 1) = 0 \quad \checkmark$$

$$B_{SH} = \{ e^x, \phi(x) \}$$

la que falta

$$y'' - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{b(x)} \cdot y = 0 \qquad \tilde{\circledast}$$

$$W(x) = e^{-A(x)} \qquad A'(x) = a(x)$$

$$A(x) = \int -\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -x - \ln x$$

$$W(x) = e^{x + \ln x} = e^x \cdot x$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & \phi(x) \\ e^x & \phi'(x) \end{pmatrix}$$

$$= e^x \cdot \phi'(x) - e^x \cdot \phi(x)$$

Ecuación para obtener ϕ

$$e^x \cdot \phi'(x) - e^x \cdot \phi(x) = e^x \cdot x \qquad (\star)$$

$$\phi'(x) \underbrace{-}_{-1 = p(x)} \phi(x) = \underbrace{x}_{q(x)}$$

i) Busco un factor integrante $\mu(x)$ / el lado izquierdo queda $\left(\mu(x) \cdot \phi(x)\right)'$

ii) RESOLVER EC. HOMOG. ASOC., HALLAR SOLUC. $\Psi(x)$ Y PROPONER FORMATO PARA ϕ : $\phi(x) = k(x) \cdot \Psi(x)$

iii) PROPONER $\phi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ Y CONTAR CON QUE VOY A ENCONTRAR a Y b QUE CUMPLAN

i) Busquemos factor integrante

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

$$\mu(x) = e^{R(x)} \qquad R'(x) = p(x)$$

$$R(x) = -x$$

$$e^{-x}\cdot\phi'(x) - e^{-x}\cdot\phi(x) = e^{-x}\cdot x$$

$$\left(e^{-x}\cdot\phi(x)\right)' = e^{-x}\cdot x$$

$$e^{-x}\cdot\phi(x) = e^{-x}(-x-1)$$

$$\boxed{\phi(x) = -x-1}$$

$$B_{SH} = \left\{ e^{x}, -x-1 \right\}$$

Busquemos sol. particular de ☆

i) VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS

ii) COEFICIENTES INDETERMINADOS ("A OJO")

$$xy'' - (x+1)y' + y = 3x^2 \quad ☆$$

Propongo:

- $y = ax^2 + bx + c$
- $y' = 2ax + b$
- $y'' = 2a$

$$x.2a - (x+1).(2ax+b) + ax^2 + bx + c \overset{\text{quiero}}{=} 3x^2$$

$$-2ax^2 - b + ax^2 + c = 3x^2$$

$$-a \cdot x^2 + (c - b) = 3x^2$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ elijo $b = c = 0$

$$y_p = -3x^2$$

Solución del ejercicio

$$\boxed{y = -3x^2 + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot (-x-1) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

4) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + a \cdot x_2(t) \\ x_2'(t) = a\, x_1(t) - 4 \cdot x_2(t) \end{cases}$$

Permanezcan acotadas (no se van a infinito) cuando $t \to +\infty$

Para $a = 2$ esbozar un diagrama de fase.

Armo matriz asoc. al sist.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a \\ a & -4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$(\lambda+4)^2 - a^2 = 0$$

$$|\lambda+4| = |a|$$

$$\lambda_2 = -4 - |a|$$

$$\lambda_1 = -4 + |a|$$

Autovectores

ξ_1 y ξ_2 de λ_1 y λ_2

$$X(t) = c_1 \cdot \xi_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \xi_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

no quiero que se vaya a ∞ cuando $t \to \infty$

Si $\lambda_i > 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty$ ✗

Si $\lambda_i < 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ ✓

Si $\lambda_i = 0 \Rightarrow e^{0t} \equiv 1$ ✓

Para asegurar lo que pide la consigna debo pedir

$\lambda_i \leq 0$ para $i \in \{1,2\}$

Tenía autovalores

$-4+|a| \leq 0$ $\qquad\qquad$ $-4-|a| \leq 0$

$|a| \leq 4$ $\qquad\qquad$ $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |a| \leq 4$

¡OJO! todo esto lo hicimos suponiendo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Caso aparte:

Si $-4-|a| = -4+|a|$

$|a| = 0$

$a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

caso diagonalizable ¡¡

La solución es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . e^{-4t}$$

Anda todo igual!

Solución:

$a \in [-4, 4]$

Di. De Fase

$a = 2$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -6$

$\lambda_2 = -2$

$\xi_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $\xi_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$X(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\underbrace{c_1 \cdot e^{-6t}}_{y_1(t)} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \underbrace{c_2 \cdot e^{-2t}}_{y_2(t)}$$