Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Verano 2021

Práctica 2: Integrales de superficie

Ejercicio 1. Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar.

(a) $r = r_0, \quad r_0 > 0$ constante.

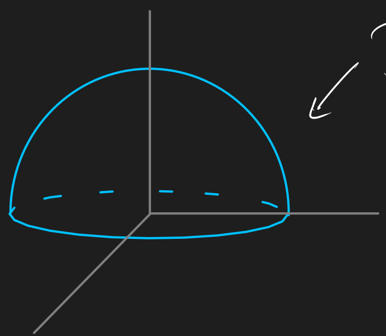
(b) $\varphi = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2]$ constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un versor normal en cada punto.

a) Son todas las esferas de radio positivo r_0.

⋮

b) Son todas las semiesferas (si elijo algún $r = r_0 > 0$



Puedo escribirlo como gráfico f de (x, y)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Ejercicio 2. Sean $a, b > 0$.

(a) Mostrar que $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\Phi_1(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right),$$
$$\Phi_2(u, v) = \left(au\,\cos(v), bu\,\sin(v), u^2\right),$$

son dos parametrizaciones del *paraboloide elíptico* dado cartesianamente por

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

(b) Supongamos $b < a$. Mostrar que

$$\Phi(u, v) = \big((a + b\cos(u))\sin(v), (a + b\cos(u))\cos(v), b\sin(u)\big),$$

con $u, v \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del *toro* dado cartesianamente por

$$z^2 = b^2 - \left(a - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2.$$

a) Mostrar que son params. del paraboloide elíptico:

Puedo:

1) Mostrar doble inclusión de los puntos

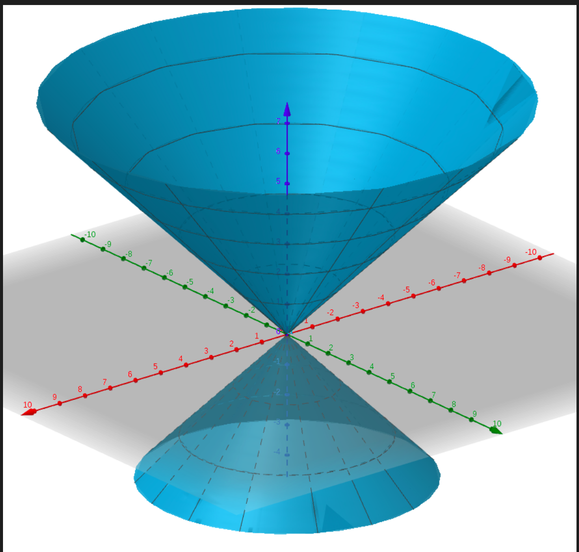
2) Mostrar que una es reparam de otra que ya sepa que es lo que pide.

Ejercicio 3. Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u\cos(v), \qquad y = u\,\mathrm{sen}(v), \qquad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

Parametrización del "Doble Cono"



$T(u,v) = \left(u.\cos v,\ u.\sin v,\ u\right)$

Es diferenciable ?

1) Cada campo. es diferenciable ?

2) La sup. que parametriza es diferenciable ?

Conectar con pregunta del foro.

Vicky probó de 2 maneras que NO es Suave:

1) rectas tangentes varían con continuidad

2) supongo que tiene plano en $(0,0,0)$,

calculo vector normal,

tiene norma cero $\Rightarrow$ Abs.

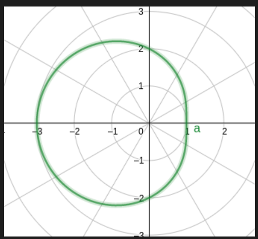
Ejercicio 4. Sea C la curva en el plano xy dada en coordenadas polares por:

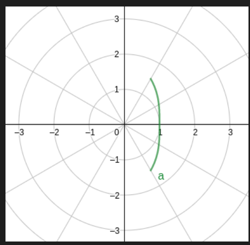
$$r = 2 - \cos\theta, \qquad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

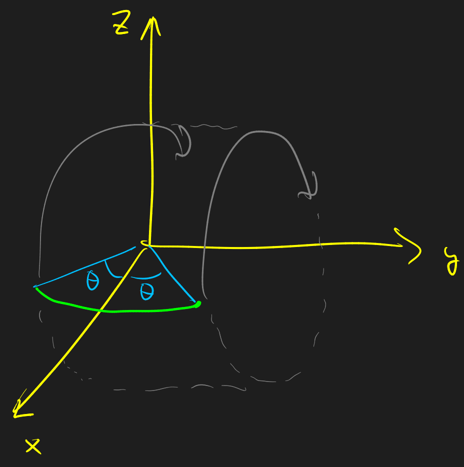
Sea S la superficie que se obtiene por revolución de esta curva alrededor del eje y.

(a) Dar una parametrización de S.

(b) ¿Es suave esta superficie?







a)

$r = 2 - \cos\theta$

$$T(x,\theta) = \left(x \cdot \sin\theta \,,\ \ldots \,,\ x \cdot \cos\theta \right)$$

distancia del eje y a la curva

$$T(x,\theta) = \left((2 - \cos\theta) \cdot \sin\theta \,,\ \,,\ (2 - \cos\theta) \cdot \cos\theta \right)$$