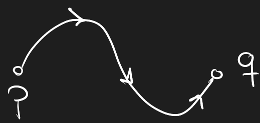
Feb 18

Teorema de Campos Conservativos

Recuerdo:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Si $F = \nabla f$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

y $\mathcal{C}$ curva $p \to q$ que significa 

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = f(q) - f(p)$$

Teorema:

No sabemos qué pasa
ó
No es suave / derivable / etc

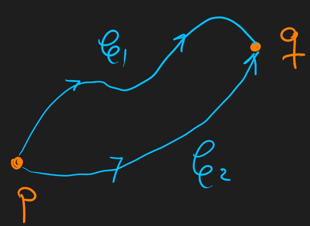
$F \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ con $\# \Omega < \infty$

Son equivalentes:

$\boxed{1}$ $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = 0$ $\quad \forall\, \mathcal{C}$ cerrada simple

$\boxed{2}$ Si $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ son curvas de $p \to q$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} F d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_2} F d\vec{s}$$

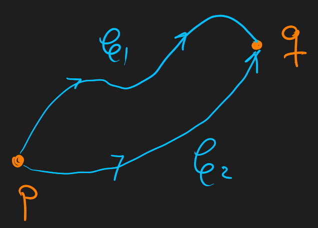


$\boxed{3}$ $\exists f \,/\, F = \nabla f$

$\boxed{4}$ $\nabla \times F = \vec{0}$

Demo:

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$



$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

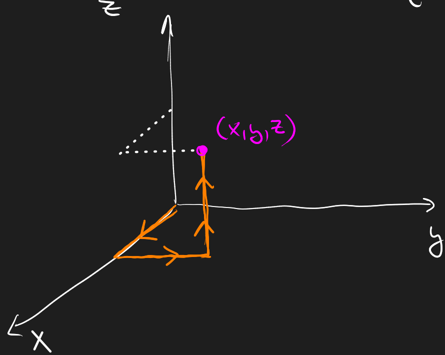
$$0 = \int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_1} F\, d\vec{s} - \int_{\mathcal{C}_2} F\, d\vec{s}$$ ✓ son iguales

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$

Queremos definir $f \,/\, \nabla f = F$

Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, definimos

$f(x,y,z) := \int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s}$ con $\mathcal{C}$ la poligonal que va de $(0,0,0)$ hasta algún (x,y,z)



Explicitamente

punto en eje x

derivadas:

$\sigma_1(t) = (t, 0, 0) \quad , \quad t \in [0, x] \qquad (1, 0, 0)$

$\sigma_2(t) = (x, t, 0) \quad , \quad t \in [0, y] \qquad (0, 1, 0)$

$\sigma_3(t) = (x, y, t) \quad , \quad t \in [0, z] \qquad (0, 0, 1)$

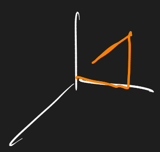
$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\, dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\, dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\, dt$$

derivo wrt z:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$$

Las otras derivadas salen eligiendo otras curvas

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$



$\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{4}$

$$F = \nabla f \Rightarrow \nabla \times f = 0$$

$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$

Hallar $S \,/\, \partial S = \mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \nabla \times F\, d\vec{S} = 0$$

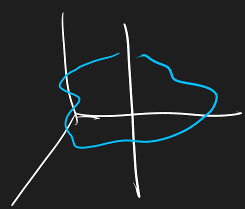
Puedo esquivar todos los puntos (pues son finitos)

(También vale si son infinitos pero esquivables: ie: un segmento)

Posibles conjuntos de excepciones

1) finitos puntos ✓

2) una recta infinita <u>No</u>

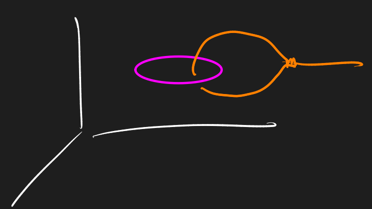


3) Un segmento finito ✓

4) Una bola ✓

5) Un anillo: No

No se puede <u>enlazar</u>



• Si tiene agujeros enlazables <u>No</u> vale!

- En $\mathbb{R}^2$ no puedo "esquivar" puntos,
son como rectas verticales en $\mathbb{R}^3$ miradas desde arriba

$\therefore$ en $\mathbb{R}^2$ NO puede NO ser C^1

En $\mathbb{R}^2$ NO admitimos puntos excepcionales

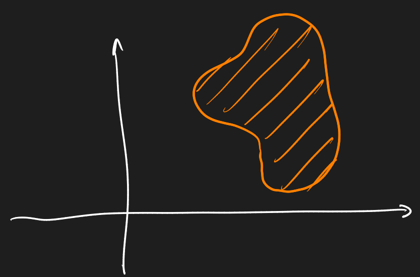
Pero!

Obs:

$F : \Omega\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

y $\nabla \times F = 0$ en Ω

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} = 0 \quad \mathcal{C} \text{ curva cerrada en } \Omega$$



Si Ω es $\underbrace{\text{simplemente}}_{\text{muy importante!}}$ conexo

muy importante!

cuestión topológica.

"No tiene agujeros"

- Conexo: Si se puede separar con dos abiertos

Sí Sí No!

- Simplemente Conexo: Recordar !

$\boxed{\text{Todo LAZO es contráctil}}$

↖ se contrae y se degenera en un punto

Sí No!

∃ un lazo que no se degenera en 1 punto.

Más ejemplos

1) $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$

$$F \in C^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$

$$\nabla \times F(x,y) = Q_x - P_y$$

$$= \frac{-2xy}{x^2+y^2} - \frac{-2xy}{x^2+y^2} = 0$$

$\Rightarrow F = \nabla f$? No! No "implica"!

Pero!

Si $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$\Rightarrow \nabla f = F$

$\therefore$ es campo gradiente, pero no porque $\nabla \times F = 0$

sino porque lo sé de otro lado.

(Van a valer algunas de las propiedades de campo gradiente (capaz todas menos $4 \to 1$))

En contrando el potencial:

$$F(x,y,z) = \left(y,\ z\cdot\cos(y\cdot z) + x,\ y\cdot\cos(y\cdot z)\right)$$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^1

$$\nabla \times F = \left(\cos(yz) - \sin(yz)yz - (\cos(yz) - -zy\sin(yz)),\ 0,\ 1-1\right)$$

$$= (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \exists f : \nabla f = F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f(x,y,z) = xy + h(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial h}{\partial y}(y,z) = x + z \cdot \cos(y \cdot z)$$

$$\Rightarrow h(y,z) = \sin(y \cdot z) + g(z)$$

$$f(x,y,z) = xy + \sin(y \cdot z) + g(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cdot \cos(y \cdot z) + g'(z)$$

$$\Rightarrow g(z) = C$$

$$f(x,y,z) = xy + \sin(y \cdot z) + C$$