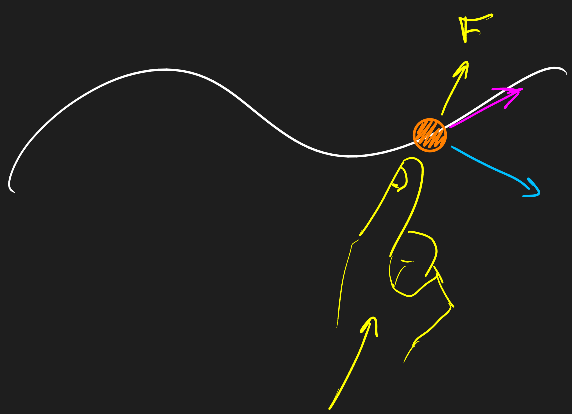
Teórica #3

Mars 02/02/21

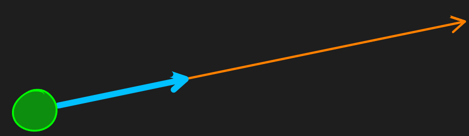
- Guillermo Matera

Integrales Curvilíneas y Trabajo

Partícula sobre trayectoria



1) Trayectoria Rectilínea



caso: Fuerza F constante

y en la misma dirección de trayectoria,

a) en el mismo sentido de desplazamiento:

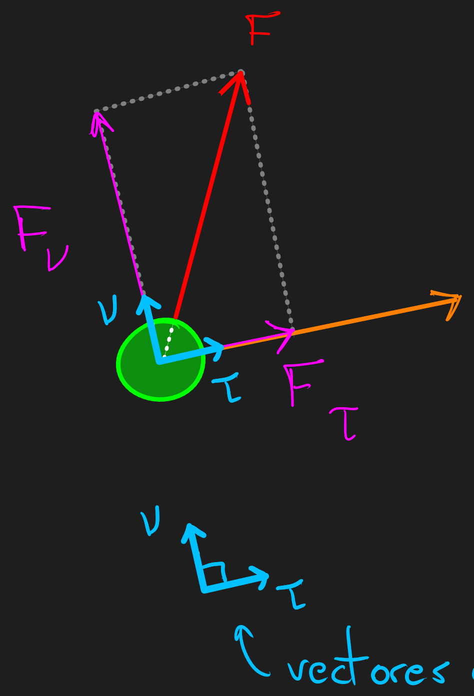
$$\text{Trabajo Resultante} = +\underbrace{\|F\|}_{\text{Magnitud de la fuerza}} \times \text{distancia}$$

b) en el sentido opuesto al de desplazamiento:

$$\text{Trabajo Resultante} = -\|F\| \times \text{distancia}$$

caso: Fuerza F constante

y en otra dirección que la de trayectoria,



$$F = F_\tau + F_\nu$$

Proyecto sobre τ (prod. interno)

donde

$$F_\tau = (F \cdot \tau)\,\tau$$

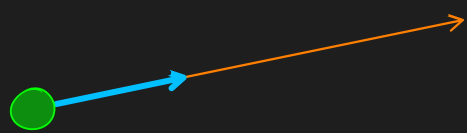
vector unitario en sentido de recorrido

$$F_\nu \perp \tau$$

Trabajo resultante $= (F \cdot \tau) \cdot$ distancia recorrida

Notar: F_ν no ejerce trabajo.

2) Trayectoria Curvilínea



caso: Fuerza F constante

y en la misma dirección de trayectoria $\mathcal{C}$

Si $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ es param. regular

y

$$\Pi : t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

es una partición de $[a,b]$ "suficientemente fina"

cuando la partícula varía de $\sigma(t_{i-1})$ a $\sigma(t_i)$

el desplazamiento es

$$\Delta s_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$$

$$\approx \sigma'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Si pensamos que la fuerza f es constante

en el arco de curva 

Trabajo resultante:

$$\sum_{i=1}^{n} F(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y cuando $n \to \infty$,

la 2^{da} sumatoria tiende a

Trabajo resultante:

prod. int

$$\int_a^b F(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i) \cdot dt$$

Orientación

La parametrización orienta a $\mathcal{C}$

Def:

Sea $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial contínuo.

Se define a la

"integral curvilínea del campo F sobre la curva orientada $\mathcal{C}$"

como

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b \underbrace{F(\sigma(t))}_{\mathbb{R}^3} \overset{\text{Prod int.}}{\cdot} \underbrace{\sigma'(t)}_{\mathbb{R}^3} \, dt$$

Ejemplo: Helix $\mathcal{H}$

$\sigma : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathcal{H}$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

y $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^3$

$F(x, y, z) = (x, y, z)$

entonces

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_0^{4\pi} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} \langle (\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1) \rangle dt$$

$$= \int_0^{4\pi} -\cos t \cdot \sin t + \cos t \cdot \sin t + t$$

$$= \int_0^{4\pi} t\, dt$$

$$= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{4\pi}$$

$$= 8\pi^2$$

Trabajo realizado por el campo F sobre la partícula recorriendo Hb.

Notación

Si $F = (P, Q, R)$

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Notar que

la integral curvilínea DEPENDE de la parametrización

Si tenemos 2 params σ y γ

- Decimos que γ preserva la orientación de σ si

$$\gamma(c) = \sigma(a)$$

y

$$\gamma(d) = \sigma(b)$$

$\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$
$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$

También sabemos que
$\gamma(t) = \sigma(h(t))$

- En caso contrario, decimos que

γ invierte la orientación de σ

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, simple, abierta y $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ y $\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$ dos parametrizaciones regulares. Si $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo y γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Pregunta #4: ¿"Integral curvilínea" es siempre así? (calculo de trabajo del campo F y ∇F)

= "Integrar una función sobre una curva"

Campos Gradientes

F es campo gradiente si existe f /

si $F : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow f : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

y $F = \nabla f$

Teorema:

Sea $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de clase C^1

y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una param. regular de $\mathcal{C}$ simple, suave

Entonces:

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Demo:

Como $f(\sigma(t))' = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \cdot dt$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t))' \cdot dt$$

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds \overset{TFC}{=} f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \quad //$$