Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II
Curso de Verano de 2021
Segundo Parcial (18/03/21)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido: Carreira Nombre: Leandro

No. de documento: 34.020.793 L.U.: 669/18 Carrera: Computación

Grupo: 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒

1. Dada la ecuación

$$(1+xy+y^2)+(1+xy+x^2)y'=0$$

a) Probar que admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(xy)$
b) Hallar la solución de la ecuación.

a) $M = 1+xy+y^2 \Rightarrow M_y = x+2y$

$N = 1+xy+x^2 \Rightarrow N_x = y+2x$

No es exacta,

Veo si

$$M + N \cdot y' = 0$$

queda exacta al usar

$$\mu \cdot M + \mu \cdot N \cdot y' = 0$$

quiero que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot N)$$

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu' \cdot x \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu' \cdot y \cdot N + \mu \cdot N_x$$

Calculo las partes

$$\mu' x \cdot M = \mu'(x + x^2 y + x \cdot y^2)$$

$$\mu' y \cdot N = \mu'(y + x y^2 + x^2 \cdot y)$$

$$\mu\, M_y = \mu_{(x,y)} \cdot (x + 2y)$$

$$\mu\, N_x = \mu_{(x,y)} \cdot (y + 2x)$$

Calculo derivadas parciales de μ

- $\frac{\partial}{\partial y} \mu(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \mu(x \cdot y)$
  $= \mu' \cdot x$
- $\frac{\partial}{\partial x} \mu(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \mu(x \cdot y)$
  $= \mu' \cdot y$

Junto todo

$$\mu'(x + x^2 y + x \cdot y^2) + \mu_{(x,y)}(x + 2y) =$$

$$= \mu'(y + x y^2 + x^2 \cdot y) + \mu_{(x,y)}(y + 2x)$$

$$\mu'(x + \cancel{x^2 y} + \cancel{x \cdot y^2} - y - \cancel{x y^2} - \cancel{x^2 \cdot y}) =$$

$$= \mu \cdot (y + 2x - x - 2y)$$

$$\mu'(x - y) = \mu(x - y)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{x - y}{x - y} = 1$$

Integro

$$\ln(|\mu|) = t$$

Factor integrante:

$$\mu(x,y) = e^{t}$$

$$\mu(x,y) = \mu(x\cdot y) = e^{xy}$$

Verifico que sea exacta

quiero que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu . M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu . N)$$

$$\mu . M = e^{xy} + x.y.e^{xy} + y^2.e^{xy}$$

$$(\mu . M)_y = e^{xy}.x + x.e^{xy} + x^2.y.e^{xy} + 2y.e^{xy} + y^2.x.e^{xy}$$

$$= 2x.e^{xy} + 2y.e^{xy} + x^2.y.e^{xy} + y^2.x.e^{xy}$$

$$\mu . N = e^{xy} + x.y.e^{xy} + x^2.e^{xy}$$

$$(\mu . N)_x = e^{xy}.y + y.e^{xy} + x.y^2.e^{xy} + 2x.e^{xy} + x^2.y.e^{xy}$$

$$= 2x.e^{xy} + 2y.e^{xy} + x.y^2.e^{xy} + x^2.y.e^{xy}$$

Veo que

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

∴ La ecuación ahora es exacta

queda probado que la ecuación admite un factor integrante de la forma: $\mu(x,y) = \mu(x.y)$ //

b) Reescribo datos:

$$M = 1 + xy + y^2$$

$$N = 1 + xy + x^2$$

con $\mu = e^{xy}$

$$\mu . M = e^{xy} + x.y.e^{xy} + y^2.e^{xy}$$

$$\mu . N = e^{xy} + x.y.e^{xy} + x^2.e^{xy}$$

Como es exacta, sé que existe un $F \in C^2$ /

$$\nabla F = (\mu M, \mu N)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu . M = e^{xy} + x.y.e^{xy} + y^2.e^{xy}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mu . N = e^{xy} + x.y.e^{xy} + x^2.e^{xy}$$

Integro $\frac{\partial F}{\partial x}$ wrt x

$$\int e^{xy} + x\cdot y\cdot e^{xy} + y^2\cdot e^{xy}\, dx =$$

$$= \frac{e^{xy}}{y} + y, e^{xy} + \int x\cdot y\cdot e^{xy}\, dx$$

CA

$$y\cdot \int x\cdot e^{xy}\, dx$$

Parter

$u = x \qquad du = 1\, dx$

$v = \frac{e^{xy}}{y} \qquad dv = e^{xy}\, dx$

$$y\cdot\left(x\cdot \frac{e^{xy}}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y}\cdot dx\right) =$$

$$= \cancel{y}\left(x\cdot \frac{e^{xy}}{\cancel{y}} - \frac{1}{\cancel{y}}\cdot \frac{e^{xy}}{y}\right)$$

$$= x\cdot e^{xy} - e^{xy}\cdot \frac{1}{y}$$

$$= e^{xy}\cdot\left(x - \frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{e^{xy}}{y} + y, e^{xy} + e^{xy}\cdot\left(x - \frac{1}{y}\right) + \varphi(y)$$

$$= e^{xy}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{y}} + y + x - \cancel{\frac{1}{y}}\right) + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = e^{xy} \cdot (y+x) + \varphi(y)$$

Integro $\frac{\partial F}{\partial y}$ wrt y

$$\int e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy} \, dy =$$

$$= \frac{e^{xy}}{x} + x^2 \cdot \frac{e^{xy}}{x} + \underbrace{\int x \cdot y \cdot e^{xy} \, dy}_{\text{es igual a la anterior con variables invertidas}}$$

$$= \frac{e^{xy}}{x} + \cancel{x^2} \cdot \frac{e^{xy}}{\cancel{x}} + e^{xy} \cdot \left(y - \frac{1}{x}\right) + \gamma(x)$$

$$= e^{xy} \cdot \left(\cancel{\frac{1}{x}} + x + y - \cancel{\frac{1}{x}}\right) + \gamma(x)$$

$$F(x,y) = e^{xy} \cdot (x+y) + \gamma(x)$$

que es la misma que antes

$\therefore$ las soluciones son de la forma

$$F(x,y) = C$$

Solución:

$$\boxed{e^{xy} \cdot (x+y) = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}}$$

2. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases}$$

que verifica $x(0) = 7, y(0) = 2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculo auto valores de A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & +18 \\ -2 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 9) + 36$$

$$= \lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda - 27 + 36$$

$$= \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

$$= (\lambda + 3)^2$$

Tengo autovalor doble $\lambda = -3$

$\Rightarrow$ estoy en el caso de matriz no diagonalizable.

Calculo autovector v $\underset{\sim}{v}$

$$\begin{bmatrix} -3-3 & 18 \\ -2 & -3+9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 18 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-2 . v_1 + 6 v_2 = 0$$

$$v_1 - 3 v_2 = 0$$

$$v_1 = 3 v_2$$

elijo $v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = 3$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una de las componentes de la base de soluciones será :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} . e^{-3t}$$

Para obtener la otra :

Calculo W :

$$(A - \lambda I) . W = V$$

$$\begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6 w_1 - 18 w_2 = 3 & \text{I} \\ 2 w_1 - 6 w_2 = 1 & \text{II} \end{cases}$$

II

$\hookrightarrow \; 2 w_1 = 1 + 6 w_2$

$$w_1 = \frac{1}{2} + 3 w_2$$

I

$\hookrightarrow \; \frac{6}{2} + 18 w_2 = 3$

$$18 w_2 = 0$$

$$w_2 = 0$$

$\hookrightarrow \; w_1 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puedo escribir el 2° elem. de la base como

$$e^{\lambda t} \cdot \left(W + t \cdot V \right)$$

$$e^{-3t} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} , \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Además pide que

$$x(0) = 7$$
$$y(0) = 2$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\cancel{e^{-3.0}}}_{=1} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\cancel{e^{-3.0}}}_{=1}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 7 \\ C_1 + 0 = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 6 + \frac{1}{2} C_2 = 7$$
$$\frac{1}{2} C_2 = 1$$
$$C_2 = 2$$

Finalmente, la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 + 6t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}}$$

3. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2t} + t$$

Primero resuelvo homogéneo

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Polinomio

$$p(y) = y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$= (y-1)(y-2)$$

raíces: $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

Base de Soluciones del Homogéneo

$$B_{SH} = \{ e^t , e^{2t} \}$$

$$y_H(t) = C_1 . e^t + C_2 . e^{2t} \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sol particular

Primero resuelvo $D_1(y) = t$

$$D_1(y) = y'' - 3y' + 2y = t$$

Propongo

- $y(t) = at + b$

- $y'(t) = a$
- $y''(t) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = a \\ y''(t)=0 \end{array}\right\} D_1(y) = -3a + 2at + 2b$$

$$= -3a + 2b + 2at$$

$$= t$$

$\uparrow$
quiero

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow 2b = 3a$

$$b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{4}$$

Sol part. de $D_1 = t$

$$y_{1p}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

Verifico

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \\ y_1' = \frac{1}{2} \\ y_1'' = 0 \end{array}\right\} -\frac{3}{2} + t + \frac{3}{2} = t \quad \checkmark$$

Resuelvo

$$D_2(y) = y'' - 3y' + 2y = \underbrace{3 \cdot e^{2t}}$$

es múltiplo de un elemento de la base!

Propongo

- $y(t) = (a \cdot t + b) \cdot e^{2t}$

$$= a \cdot t \cdot e^{2t} + b \cdot e^{2t}$$

es múltiplo de un elem de la base,
$\Rightarrow$ no aporta
$\Rightarrow$ lo descarto

$= a.t.e^{2t}$ $\Rightarrow b = 0$

- $y'(t) = a.e^{2t} + 2.a.t.e^{2t}$
- $y''(t) = 2.a.e^{2t} + 2a.e^{2t} + 4a.t.e^{2t}$

Reemplazo en $D_2(y)$

$$D_2(y) = 2.a.e^{2t} + 2a.e^{2t} + 4a.t.e^{2t} -$$
$$-3\left(a.e^{2t} + 2.a.t.e^{2t}\right) +$$
$$+2\left(a.t.e^{2t}\right)$$

$$= a.e^{2t}\left(2 + 2 - 3 + 4t - 6t + 2t\right)$$
$$(1 + 0)$$

$$= a.e^{2t}$$

$$= 3.e^{2t}$$
$\uparrow$
quiero

$$\Rightarrow a = 3$$

Sol part de $D_2(y)$

$$y_{2p}(t) = 3.t.e^{2t}$$

Verifico

$$y_{2p} = 3t \cdot e^{2t}$$

$$y'_{2p} = 3e^{2t} + 6t \cdot e^{2t}$$

$$= 3e^{2t}(1+2t)$$

$$y''_{2p} = 6e^{2t} + 6e^{2t} + 12t \cdot e^{2t}$$

$$= 12e^{2t}(1+t)$$

Reemplazo en

$$D_2(y) = y'' - 3y' + 2y = 3 \cdot e^{2t}$$

$$12e^{2t}(1+t) - 9e^{2t}(1+2t) + 6t \cdot e^{2t} =$$

$$= e^{2t}(12 + 12\cancel{t} - 9 - 18\cancel{t} + 6\cancel{t})$$

$$= e^{2t} \cdot 3 \quad \checkmark$$

Junto ambas soluciones Particulares

$$y_{1p}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$y_{2p}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{2t}$$

y obtengo

$$y_p(t) = y_{1p} + y_{2p}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 3t \cdot e^{2t}$$

Sol general

$$y(t) = y_H + y_P$$

donde

$$y_H(t) = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{2t}$$

Solución

$$\boxed{y(t) = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 3t \cdot e^{2t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

4. Dado el sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 4\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X(t)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determinar TODOS los valores de α y β que garanticen que la solución es acotada tanto cuando $t \to +\infty$ como cuando $t \to -\infty$.

b) Esbozar el diagrama de fases cuando $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

a) Calculo autovalores

$$\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & -4\beta \\ \beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix} = (\lambda+\alpha).(\lambda+\alpha) + 4\beta^2$$

$$= \lambda^2 + 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + 4\beta^2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + 4\beta^2)}}{2}$$

$$= \frac{-2\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{i^2 . 16\beta^2}}{2} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$= -2\alpha \pm i \frac{\sqrt{16\beta^2}}{2} \qquad 16\beta^2 \geq 0 \text{ siempre}$$

$$= -2\alpha \pm i . 2|\beta|$$

Qué pasa si saco módulo ?

$$\lambda = -2\alpha - i . 2|\beta|$$
$$\lambda_2 = -2\alpha + i . 2|\beta|$$

si $\beta > 0 \Rightarrow$ puedo sacar módulo

si $\beta < 0 \Rightarrow$ estaría en el caso de λ_2!

Alcanza con escribir que el autovalor es

$$\lambda = -2\alpha - 2\beta . i \qquad \text{con } \beta > 0$$

Obs!

Si $\beta = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

pues con $\beta < 0$ obtengo λ_2 sin módulo, y sabemos que solo necesito una raíz compleja para obtener toda la información que necesito y despejar parte real e imaginaria.

(esto sucede pues hay dos raíces conjugadas, como sucede en polinomios de grado 2 con raíces complejas)

Tengo 2 raíces complejas,

calculo autovector complejo

$$\begin{pmatrix} -2\alpha - i \cdot 2\beta + \alpha & -4\beta \\ \beta & -2\alpha - i \cdot 2\beta + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha - 2i\beta & -4\beta \\ \beta & -\alpha - 2i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Como las filas deben ser ld, veo si puedo simplificar algo al exigirlo:

$F_2 \cdot (-2i) - \alpha$

$$\begin{pmatrix} -\alpha-2i\,\beta & -4\beta \\ -\alpha-2i\,\beta & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$(-\alpha-2i\,\beta)(-2i)-\alpha$$

$$\underbrace{2\alpha i-4\beta-\alpha}$$

debe ser igual a -4β
(de la fila 1)

$$\Rightarrow \quad 2\alpha i-4\beta-\alpha = -4\beta$$

$$2\alpha i-\alpha = 0$$

$$\alpha(2i-1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda = -2\alpha - 2\beta.i \\ \overset{\alpha=0}{\Rightarrow} \lambda = -2\beta.i \end{array}\right)$$

(solo parte Im.)

Reescribo sistema con $\alpha=0$

$$\begin{pmatrix} -2i\,\beta & -4\beta \\ \beta & -2i\,\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelvo

$$\beta.v_1 - 2i\beta.v_2 = 0$$

$$\beta v_1 = 2i\beta v_2$$

$\hookrightarrow$ si $v_2 = -\frac{1}{2}i$

$\hookrightarrow v_1 = 1$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Tengo la solución compleja

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \cdot e^{-2\beta i t}$$

Separo parte Re e Im

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \cdot e^{-2\beta i t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\cos(-2\beta t) + i \sin(-2\beta t) \right)$$

$\cos -\theta = \cos\theta$

$\sin -\theta = -\sin\theta$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\cos(2\beta t) - i \cdot \sin(2\beta t) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta t & - i \cdot \sin(2\beta t) \\ -\frac{i}{2} \cdot \cos(2\beta t) & - \sin(2\beta t) \end{pmatrix}$$

Imag. Real

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2}\cos 2\beta t \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2}\cos 2\beta t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2}\cos 2\beta t \end{pmatrix}}$$

- Como la raíz no tiene componente real, $X(t)$ siempre está acotada, con $\alpha = 0$ y $\beta \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

(tanto $\sin x$ como $\cos x$ están acotados cuando $t \to +\infty$ ó cuando $t \to -\infty$)

Falta el caso $\beta = 0$ del principio.

Si $\beta = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2\alpha - i \cdot 2|\beta|$

$\lambda = -2\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

(Tengo auto valor doble)

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \cdot I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot A = \frac{1}{\alpha^2} \cdot (-\alpha) \cdot I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha} \cdot I$$

$$X' = A X$$

$$A^{-1} X' = \underbrace{A^{-1} A}_{I} X$$

$$X = -\frac{1}{\alpha} \cdot I \, X'$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Sol para $\beta = 0$

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1'}{\alpha} \\ -\frac{x_2'}{\alpha} \end{pmatrix}}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

(como en $\alpha = 0$ se indetermina, me quedo con 1 de los intervalos $(0, +\infty)$)

- Con $\beta = 0$ y $\alpha > 0$, las soluciones estarán acotadas siempre que x_1' y x_2' lo estén.

b) Diagrama cuando

- $\alpha = 0$
- $\beta = \frac{1}{2}$
- $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Obtuve

$$\boxed{X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2}\cos 2\beta t \end{pmatrix}}$$

Reemplazando

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -2 \end{cases}$$

Entonces

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$ ← elipse! centrada en $(0,0)$ pues se mantiene sobre la curva al no haber un factor que crezca o disminuya con t multiplicando

- derivo para ver sentido

$$t_g(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 + 2 \cdot \cos 0 \\ -\cos 0 - \sin 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ← (también me da la inclinación aprox de la elipse! !! ◡)