

Modelo de
 "Recursos limitados"
 ←

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int k dx = kx + c$$

↑ suponemos que podemos dividir por $y(x)$

$$= \ln(|y(x)|)$$

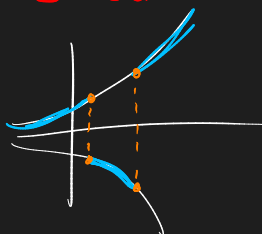
$$\Rightarrow |y(x)| = e^{k \cdot x} \cdot e^c \quad e^c > 0$$

llemos

$$e^c = A \text{ es la constante}$$

$$\Rightarrow y(x) = A \cdot e^{kx}$$

• No podría ser



Pues debe y ser derivable!

Por eso Víctor hablo de funciones definidas
"en intervalos".

Problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = k \cdot y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = A \cdot e^{kx}$$

$$y(0) = A$$

$$y(x) = y_0 \cdot e^{kx}$$

Ecuaciones de variables separables / separables

↳ Podemos separarlas en

$$\left(\text{funciones de } y(x) \right) = \left(\text{funciones de } x \right) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = f(y) \cdot g(x)$$

Ejemplos

$$\begin{cases} y' = x \cdot y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x dx$$

• Como cambio de variables:

$$u = y(x)$$

$$du = y'(x) dx$$

En "física" se podría pensar como

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\ln(|y(x)|) = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = A \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \quad A \in \mathbb{R}$$

• Sol particular para condición inicial $y(0) = 3$

$$y(x) = 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ecuaciones homogéneas (grado 0)

Def:

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice

homogénea de grado 0 si

$$F(\lambda x, \lambda y) = \underbrace{\lambda^0}_{\text{grado}} \cdot F(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

Ejemplo

$$F(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Uso:

Si $y' = F(x, y)$ es homogénea de grado 0

$\Rightarrow y = x \cdot u$ convierte la ecuación en
variables separables.

derivando

$$y' = u + x \cdot u'$$

$$u + x \cdot u' = F(x, x \cdot u) \stackrel{\substack{\text{Por homogeneidad de } F, \text{ "saco" } x^0 \text{ de} \\ \text{factor común}}}{=} F(1, u)$$

Revisar luego

$$x \cdot u' = F(1, u) - u$$

$$= \left(F(1, u) - u \right) \frac{1}{x}$$

Quedó de variables separadas

Ejemplo:

$$y' = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = F(x, y)$$

$$y = x \cdot u$$

$$u + x u' = \frac{x^2 \cdot u + x^2 u^2 + x^2}{x^2}$$

$$u + x u' = u + u^2 + 1$$

$$x \cdot u' = 1 + u^2$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan(u) = \ln(|x|) + c$$

$$\frac{y(x)}{x} = \tan(\ln(|x|) + c)$$

$$y(x) = x \cdot \tan(\ln(|x|) + c)$$

Ejercicio 6 (de la guía 5)

$$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\right) = G(x, y)$$

Veremos que un cambio de variable del tipo

$$x = s - h \quad h \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

$$y = u - k \quad k \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

permite transformar en ecuaciones homogéneas

Obs :

$$u(s) = y(x(s)) + k$$

$$u(s) = y(s-h) + k$$

derivado

$$\begin{aligned} u'(s) &= y'(s-h) \\ &= y'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u'(s) &= F \left(\frac{a(s-h) + b(u-k) + c}{d(s-h) + e(u-k) + f} \right) \\ &= F \left(\frac{as - ah + bu - bk + c}{ds - dh + eu - ek + f} \right) \end{aligned}$$

Queremos que

$$ah + bk = c$$

$$dh + ek = f$$

Resolvamos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Hay sol. solo cuando $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ es invertible :

si $a \cdot e \neq b \cdot d \Rightarrow$ hay solución.

$$E_j: y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$$

Matriz:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \checkmark \text{ Puedo usar la sustitución de arries.}$$

Buscamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h + k \\ h - k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$h + k = 4 \Rightarrow h = 4 - k$$

$$h - k = -6 \Rightarrow h = k - 6$$

$$4 - k = k - 6$$

$$10 = 2k$$

$$5 = k$$

$$\begin{cases} k = 5 \\ h = -1 \end{cases}$$

$$u'(5) = \frac{5+1+u-5+4}{5+1-u+5-6} = \frac{5+u}{5-u}$$

\Rightarrow No tengo la func. homogénea

\Rightarrow Lo transformo en variables separadas

$$u = 5 \cdot v$$

$$\mu' = V + S \cdot V'$$

$$V + S \cdot V' = \frac{S + SV}{S - SV} = \frac{1 + V}{1 - V}$$

$$S \cdot V' = \frac{1 + V}{1 - V} - V$$

$$= \frac{1 + V^2}{1 - V}$$

$$\frac{1 - V}{1 + V^2} \cdot V' = \frac{1}{S}$$

Integro

$$\int \frac{1 - V}{1 + V^2} \cdot V' \, dV = \int \frac{1}{S} \, dS$$

$$\arctan(V) - \frac{\ln(1 + V^2)}{2} = \ln(|S|) + C$$

• wado $\Rightarrow V = \frac{\mu}{S}$

$$\arctan\left(\frac{\mu}{S}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{\mu}{S}\right)^2\right) = \ln(|S|) + C$$

• y shos $x = S - h \Rightarrow S = x + h$
 $y = \mu - k \Rightarrow \mu = y + k$

$$\arctan\left(\frac{y+k}{x+h}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y+k}{x+h}\right)^2\right) = \ln(|x+h|) + C$$

$$\begin{cases} k = 5 \\ h = -1 \end{cases}$$

Solución de Boquita ♥

$$\arctan\left(\frac{y+5}{x-1}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right) = \ln(|x-1|) + C$$

Preguntas sobre solución maximal

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y' = y^2 \\ y(2) = 1 \end{cases} & y(x) = \frac{1}{3-x} \\ &\frac{1}{y} = \int \frac{y'}{y^2} = \int 1 = x + C \\ &y(x) = -\frac{1}{x+C} \\ &y(2) = -\frac{1}{2+C} \\ &2+C = -1 \\ &C = -3 \end{aligned}$$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decidir si son unicas. Que seria eso? esta al final del ej1

