Resúmen 1° Parte.

Reparametrizaciones

1) Dada $\sigma(t)$ param. regulares de $\mathcal{C}$

y $h(t)$ biyección continua,

$h^{-1}(s)$ continua.

Puedo definir

$$\gamma(s) = \sigma(h^{-1}(s))$$ que parametriza a $\mathcal{C}$

Parametrización por Longitud de Arco.

$$\sigma : [a,b] \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{regular} \left(\begin{array}{l} \sigma \in C^1 \\ \sigma' \neq \vec{0} \end{array} \right)$$

Si

$$s(t) = \int_a^t \| \sigma'(t) \| \, dr$$

entonces

$$\gamma : [0, \mathcal{L}ong(\mathcal{C})] \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\gamma(t) = \sigma(s^{-1}(t))$$

Ver Consultas Teóricas 1

Cuando es regular?

$$\text{Si } \begin{cases} \sigma \in C^1 \\ \sigma'(t) \neq \vec{0} \ \forall t \end{cases} \Rightarrow \sigma \text{ es regular}$$

Recta tangente en to

$$L: \lambda . \sigma'(t_0) + \sigma(t_0) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

La Parametrizo

$\ell: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\ell(t) = (t - t_0) . \sigma'(t_0) + \sigma(t_0)$

Longitud de curva

$$S(t) = \int_a^t \|\sigma'(r)\| \, dr \quad , \quad t \in [a,b]$$

función escalar

Integración sobre $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$

$\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ regular

$f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt$$

función escalar

- Integración de Campos Vectoriales sobre $\mathcal{C}$

función vectorial

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle \, dt$$

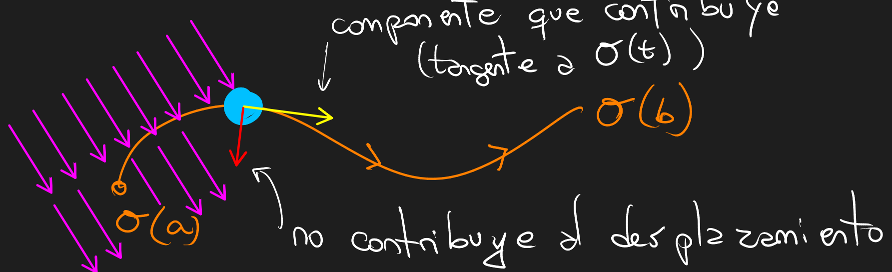
los ceros en alguna coordenada, o simplifican el prod.

notar que

$$= \int_a^b \underbrace{\left\langle F(\sigma(t)), \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right\rangle}_{\text{Componente Tangencial del campo sobre } \mathcal{C}} \|\sigma'(t)\| \, dt$$

(unitario)

Nos interesa lo que aporta el campo en la dirección y sentido de recorrido de la curva.



Obs: Si $F \perp \mathcal{C} \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = 0$

Campos Gradientes

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$F = \nabla f$$

función potencial

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = f(b) - f(a)$$

(no depende de camino recorrido)

Agregamos 1 dimensión:

Superficies

equivalente a la de longitud (con $\|\sigma'(t)\|$)

$$\text{Área}(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, dS$$

S grande sin flecha

superficie

func. escalar.

Integrales sobre estas superficies

$$\int_S f \cdot dS = \iint_D f(T(u,v)) \cdot \underbrace{\|\eta(u,v)\|}_{} \, du\,dv$$

Ahora es Normal! no "tangente" como en curvas con $\|\sigma'(t)\|$

(Pues queremos medir SOBRE la superficie ie: queremos la proyección normal)

Con $\eta(u,v) = (T_u \times T_v)(u,v)$

Orientabilidad

Una Sup. es orientable si

$\exists$ un campo normal unitario continuo

$$\eta : S \to \mathbb{R}^3 \text{ continuo.}$$

Integrales de Flujo

(funciones vectoriales)

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

param regular de S

F campo continuo

campo vectorial en cada punto de S

que atraviesa la malla.

$$\int_S F \cdot d\vec{S} = \pm \iint_D \langle F(T(u,v)), \eta(u,v) \rangle \, du\,dv$$

donde $\begin{cases} + & \text{si } T \text{ orienta ok a } S \\ - & \text{si en sentido opuesto} \end{cases}$

sin param uso dS

sin " $\to$ "

Teorema de Green

Hipótesis:

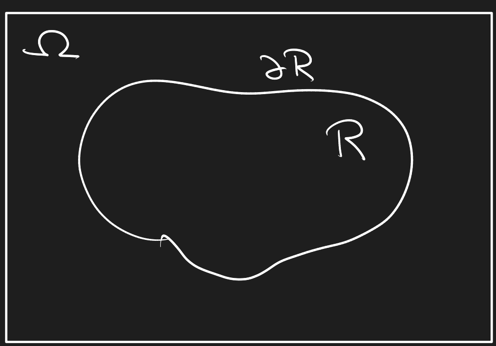
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de clase $C^1(\Omega)$

$R \subset \Omega$ región de tipo III

de borde ∂R suave,

diferenciable a trozos.

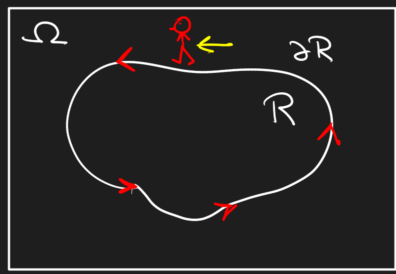


Teorema:

- Si $\mathcal{C} = \partial R^+$ curva cerrada, simple

y

$$F(x,y) = \big(P(x,y)\,,\ Q(x,y)\big)$$



entonces :

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot d\vec{s} = \iint_{R} Q_x - P_y \; dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$$

$$\mathcal{C} = \partial R$$

relaciona una integral de campo sobre una curva $\mathcal{C} = \partial R$

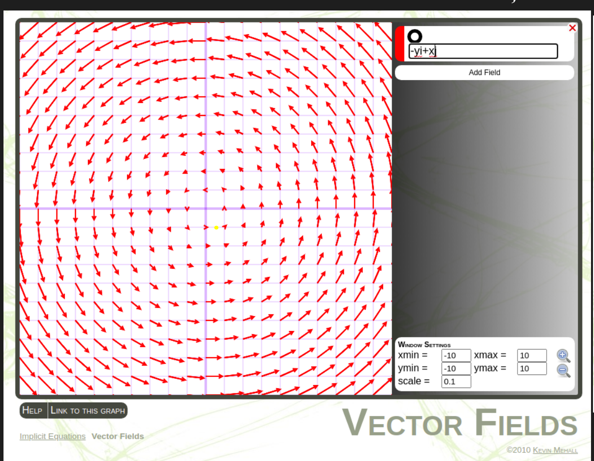
con el rotor en toda la región R

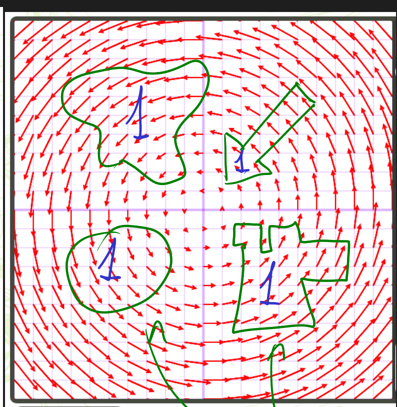
Atenti con la orientación!

Puedo usar campo $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ $\left(\text{o también } \frac{1}{2}(y, -x)\right)$ ¿con signo opuesto?

Por Green

$$\text{Área}(R) = \iint_{R} \overbrace{Q_x - P_y}^{=1} \, dx\,dy = \int_{\partial R} F\cdot ds = \int_{\partial R} P\,dx + Q\,dy$$





$$\int_{\partial R} -\frac{1}{2} y\,dx + \frac{1}{2} x\,dy$$

$$Q_x - P_y = 1 \quad \forall \partial R$$

Uso de Green:

Me dan F fea y piden

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \,?$$

Composición $F(\sigma(t))$ muy fea!

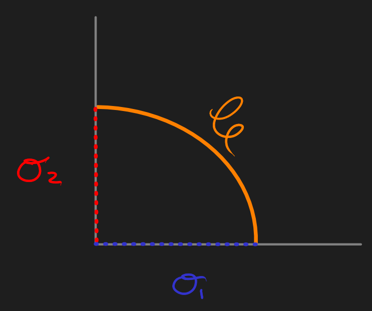
- Veo si el campo F puede quedar simple al calcular su rotor $(Q_x - P_y)$

- Green pedía que $\mathcal{C}$ sea el borde de R cerrada

↳ Cerramos Curvas

Cómo? • Veo cómo mejor queda el campo al integrar los pedacitos de curva que usé para cerrarla

Ej:



$$\iint_R \underbrace{Q_x - P_y \, dx\,dy}_{\text{Fácil de calcular}} = \overbrace{\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}}^{\text{incógnita}} + \int_{\sigma_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\sigma_2} F \cdot d\vec{s}$$

Posiblemente un área en polares!

Agujeros :

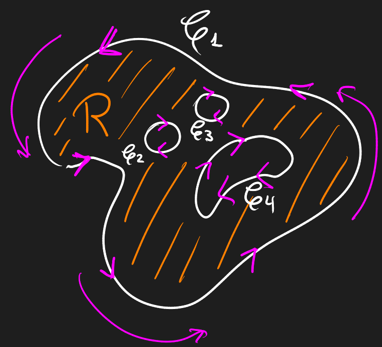
Si R tiene agujero/s

$$\Rightarrow \partial R = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$$

Con orientaciones: $\circlearrowleft \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright \quad \circlearrowright$

$$\int_{\partial R} F \cdot d\vec{s} =$$

Por Green



$$= \underset{\circlearrowleft}{\int_{\mathcal{C}_1}} F \cdot d\vec{s} + \underset{\circlearrowright}{\int_{\mathcal{C}_2}} F \cdot d\vec{s} + \underset{\circlearrowright}{\int_{\mathcal{C}_3}} F \cdot d\vec{s} + \underset{\circlearrowright}{\int_{\mathcal{C}_4}} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy$$

Rotor de un Campo Gradiente es cero.

Por Green: $F = (P, Q) \overset{F=\nabla f}{\Rightarrow} F = (f_x, f_y)$

$$\begin{cases} Q = f_y \\ P = f_x \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_x = f_{yx} \\ P_y = f_{xy} \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = \iint_R Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$$= \iint_R f_{yx} - f_{xy} \, dx\,dy$$

Como f es C^2 : $f_{yx} = f_{xy}$

$= 0$ //

Campos :

Recordar que :

↳ Puedo separarlo en la suma de

2 campos :

$$F = (P + A, Q + B)$$

$$= (P, Q) + (A, B)$$

$$= \underbrace{F_1 + F_2}$$

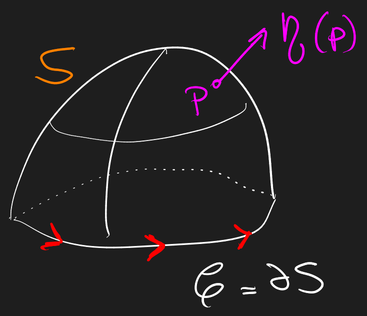
y ahora separar la integral

$$\int_{\mathcal{C}} F ds \text{ en } \int_{\mathcal{C}} F_1 ds + \int_{\mathcal{C}} F_2 ds$$

Stokes :

Como Green pero + 1 dimensión :

- $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie orientada



- $\mathcal{C} = \partial S$ cerrada, simple, orientada por S

- F campo Vectorial C^1

$$\Rightarrow \iint_S \underbrace{\nabla \times F}_{\text{rotor}} \, d\vec{S} = \int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$$

$\overbrace{\text{S grande}}^{\text{sobre superficie}}$, vectorial ($d\vec{S}$)

$\underbrace{\text{s chico}}_{\text{sobre curva}}$, vectorial ($d\vec{s}$)

$$\text{rotor} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Usos

- Calcular $\iint_S \nabla \times F \, d\vec{S}$ en vez de $\int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$

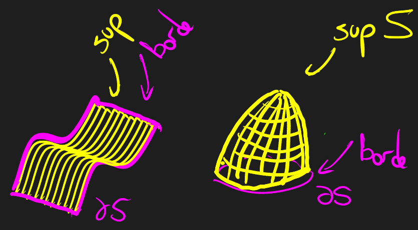
o viceversa.

- Dada una curva $\mathcal{C}$,

  y un campo F

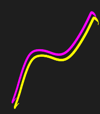
  encontrar alguna superficie S

  con borde $\partial S = \mathcal{C}$ u Alguna otra curva



- Dada S, quiero

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{S} =$$



Por Stokes

$$= \int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$$

Por Stokes de nuevo, elijo OTRA Sup $\tilde{S}$

$$= \underbrace{\iint_{\tilde{S}} \nabla \times F \cdot d\vec{S}}$$

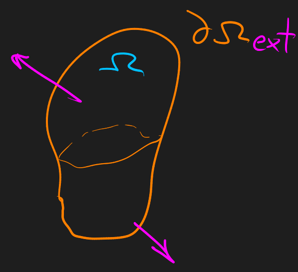
con el mismo borde $\partial \tilde{S}^+ = \partial S^+ = \mathcal{C}$

buscando que con esta otra superficie $\tilde{S}$, las cuentas salgan más fácilmente

$$\iint_{\tilde{S}} \left\langle (rot_P, rot_Q, rot_R), \vec{Normal} \right\rangle dxdydz$$

Gauss

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tipo IV ("Burbujoide")



$S = \partial\Omega$ ("cáscara")

con S cerrada y orientada con normal exterior

y $F \in C^1(\Omega)$

en todo el interior Ω!

$$\iint_{S} F \cdot \eta_{ext} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV$$

$S = \partial\Omega_{ext}$

Recordar

$$\operatorname{div}(\nabla \times G) = 0$$

(para saber si F es rotor de alguna G, o sea $F = \nabla \times G$)

Caso rebuscado de ejercicio:

encontrar $\langle F \cdot \eta \rangle$ a partir de $f(x,y,z)$

$$\int_S f \, dS = ? \Rightarrow \text{si } f \text{ es } \langle F \cdot \eta \rangle$$

$$= \int_S \langle F, \eta \rangle \, dS \quad \text{y puedo usar Gauss.}$$

Feb 25/2021

Teorema de Campos Conservativos

$$F \in C^1 \left(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad \text{con} \quad \underbrace{\# \Omega < \infty}_{\text{finitos puntos problemáticos.}} \right)$$

Obs: en $\mathbb{R}^2$: $F \in C^1$ (en todo $\mathbb{R}^2$) sin Ω

Si vale eso y se cumple alguna de las siguientes condiciones $\Rightarrow$ valen todas

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\, d\vec{s} = 0 \quad \forall\, \mathcal{C}$ cerrada, simple (no se "auto-corta")

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} F\, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_2} F\, d\vec{s} \quad \forall\, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ con $\underset{\text{inicio}}{p} \longrightarrow \underset{\text{final}}{q}$

$\boxed{3}$ $\exists f \,/$

$$F = \nabla f \qquad \text{con} \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hookrightarrow F_1 = f_x$

$F_2 = f_y$

$F_3 = f_z$

$\boxed{4}$ $\nabla \times F = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

(en $\mathbb{R}^2$ sin excepciones!)

Tiene que valer $F \in C^1$!

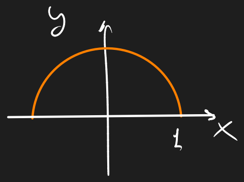
Recordar que

si F es campo conservativo

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = f(q) - f(p)$$

Superficies de Revolución

tengo



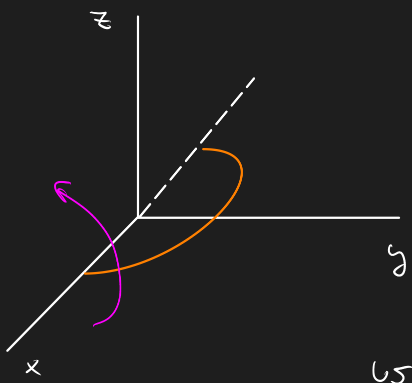
$\sigma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

también dada por

$\gamma(x) = (x, f(x))$

con $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$

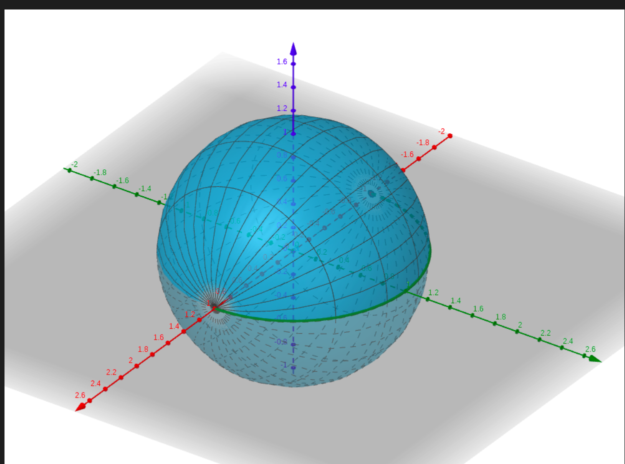
lo quiero girar alrededor de x en $\mathbb{R}^3$



uso param $\gamma(x)$

$$T(x, \varphi) = (x, f(x) \cdot \cos\varphi, f(x) \cdot \sin\varphi)$$

$$= \left(x, \sqrt{1-x^2} \cos\varphi, \sqrt{1-x^2} \cdot \sin\varphi\right)$$



$x \in [-1, 1]$

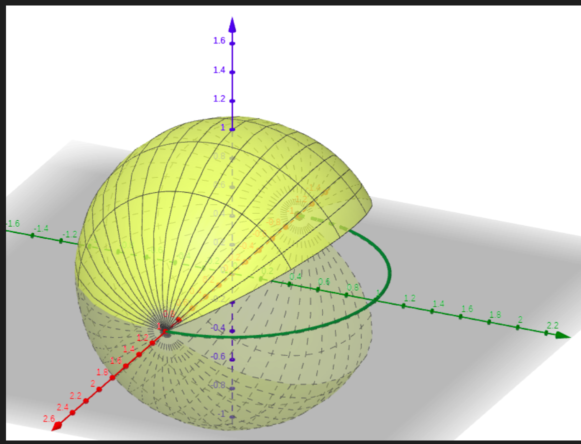
$\varphi \in [0, 2\pi)$

Bonus: Pacman con los frenos de Lisa:

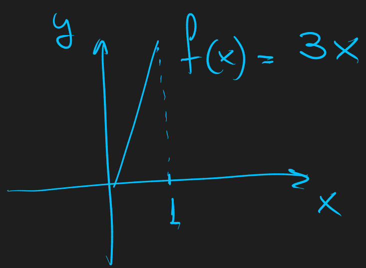
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$a = \text{Surface}\left(u, f(u)\ \cos(t), f(u)\ \sin(t), u, -1, 1, t, \frac{1}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} u \\ f(u)\ \cos(t) \\ f(u)\ \sin(t) \end{pmatrix}$



Otro ejemplo: Cono a partir de recta



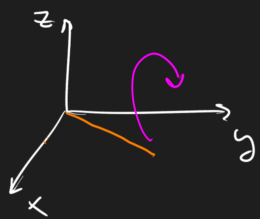
$$\sigma(x) = (x, f(x)) \qquad x \in (0,1)$$

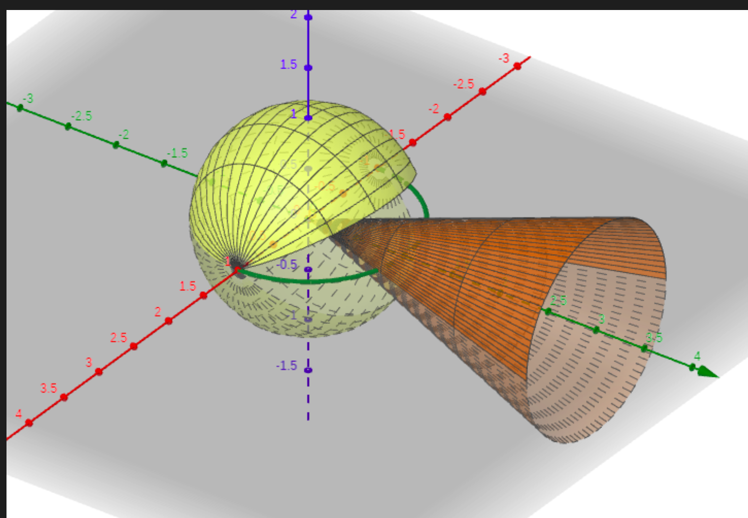
La roto

$$T(x, \varphi) = (x \cdot \cos\varphi,\ \underbrace{f(x)}_{3x},\ x \cdot \sin\varphi)$$

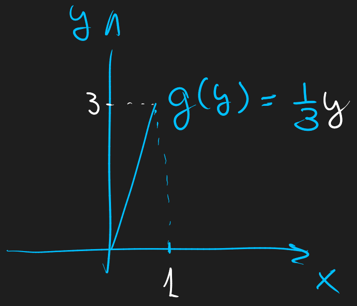
$x \in [0,1]$

$\varphi \in [0, 2\pi)$





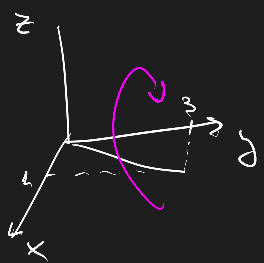
Si ahora $g(y) = \frac{1}{3}y$

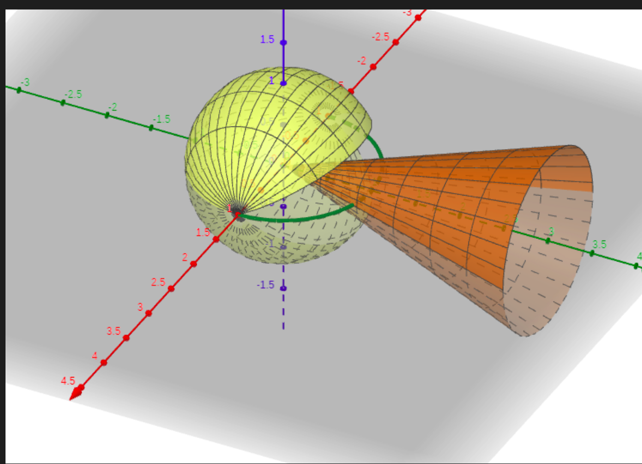


$$\sigma(y) = \left(\tfrac{1}{3}y \,,\; y\right) \qquad y \in [0,3]$$

lo roto alrededor de y

$$T(y,\varphi) = \left(\tfrac{1}{3}\,y\cdot\cos\varphi \,,\; y \,,\; \tfrac{1}{3}\,y\,\sin\varphi\right)$$





Cambiaron las curvas de nivel. Por qué?