

3. Considerar la ecuación $y'' + \alpha y' + y = 0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.


- Encontrar todos los valores de α que hacen que todas las soluciones de la ecuación tengan infinitas raíces. ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que haga que todas las soluciones de la ecuación sean funciones acotadas?
- Elegir uno de los valores de α del punto anterior y resolver el problema

$$\begin{cases} y'' + \alpha y' + y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

a) $P(t) = t^2 + \alpha \cdot t + 1 = 0$

Raíces
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-\alpha \pm \sqrt{(\alpha+2)(\alpha-2)}}{2}$$

• Quiero infinitos ceros (sin, cos) 

• Si $\alpha^2 \geq 4$, tengo soluciones reales

$$\Rightarrow \text{Sols: } e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$$

• Si $\alpha \in (-2, 2) \Rightarrow$ raíces complejas

↑
Tiene sin y cos!

Sol: $\lambda = a + bi$

$$\mathcal{B}_s = \{ e^{at} \cdot \cos(bt), e^{at} \cdot \sin(bt) \}$$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{at} \cdot \cos(bt) + C_2 \cdot e^{at} \cdot \sin(bt)$$

Verifico:

$$0 = X(t) = C_1 \cdot \cancel{e^{at}} \cdot \cos(bt) + C_2 \cdot \cancel{e^{at}} \cdot \sin(bt)$$

$$= C_1 \cdot \cos bt + C_2 \cdot \sin bt$$

$$\frac{\sin bt}{\cos bt} = \frac{-C_1}{C_2}$$

$$\underbrace{\quad}_{\tan bt} = \frac{-C_1}{C_2} \quad \checkmark$$

b) Quiero acotar

Pido que $e^{at} \not\rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lambda = bi \quad (\operatorname{Re}(\lambda) = 0)$$

elijo $\alpha = 0$

$$y'' + y' = 0 \quad \text{Sol: } \{\cos t, \sin t\}$$

$$y'' + y = x^2$$

Propongo:

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^2 - 2 \\ y''(x) = 2 \end{array} \right\} y'' + y = x^2$$

4. Considerar el sistema

$$\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} X(t) \\ X(0) = P \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Determinar todos los valores de $P \in \mathbb{R}^2$ tales la solución está contenida completamente en el primer cuadrante.

Sugerencia: Encontrar todas las soluciones del sistema y esbozar el diagrama de fases.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 13 & +8 \\ -8 & \lambda + 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 13)(\lambda + 7) + 8^2 \\ &= \lambda^2 + 7\lambda - 13\lambda - 91 + 64 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda - 27 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 9 \end{array} \right\} C_{2x0} \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

• $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} -3 - 13 & 8 \\ -8 & -3 + 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-16v_1 + 8v_2 = 0$$

$$-2v_1 + v_2 = 0$$

$$v_2 = 2v_1$$

$$\text{elijo } v_1 = 1$$

$$\Rightarrow v_2 = 2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} 9-13 & 8 \\ -8 & 9+7 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

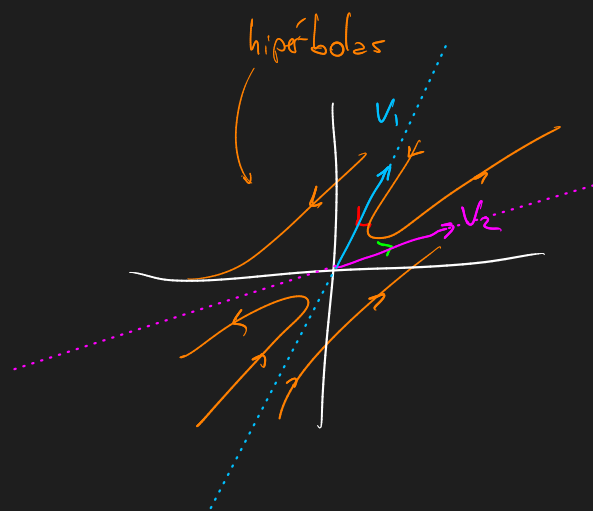
$$-4 v_1 + 8 v_2 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4} \right) v_1 = -2 v_2$$

$$\text{elijo } v_2 = 1$$

$$\Rightarrow v_1 = 2$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{B}_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t} \right\}$$

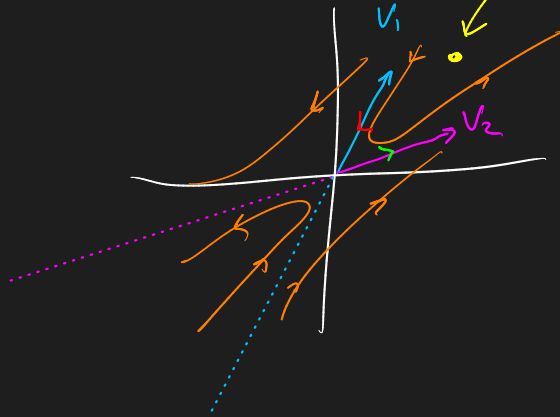
$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{9t}$$

$$X(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \underset{t \xrightarrow{=1} \infty}{e^{-3t}} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underset{t \xrightarrow{=1} \infty}{e^{9t}}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P$$

Para cualquier P que elija, habrá una curva

elijo P entre V_1 y V_2



Solución

$$P = C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2$$

con $C_1, C_2 \geq 0$

