Resumen Ecuaciones Diferenciales

Quiero resolver

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

Variables separadas

Si llego a algo de la forma

$$\frac{G(y'(x))}{H(y(x))} = f(x)$$

Solo basta integrar

[Meter valor inicial en algún lado.]

Ec. dif

↓

la puedo separar? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Integro, resuelvo y obtengo alguna/s y solución

↓ no

es Homogénea? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Sustituyo $y = \frac{x}{t}$ $\left(\lambda = \frac{1}{t}\right)$

↓ no

la puedo volver homogénea? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Sustituyo con lo necesario (seguramente dato, pero no trivial) y vuelvo arriba.

↓ No

es Exacta $\xrightarrow{\text{sí}}$ Busco $F = C$ /

si $M \,.\, dx + N\, dy = 0$

$\Rightarrow \nabla F = (M, N)$

↓ No

Hay algún factor Integrante? $\xrightarrow{\text{sí}}$ resuelvo

$\mu . M \,.\, dx + \mu . N\, dy = 0$

↓ no

Es Lineal?

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

$\xrightarrow{\text{sí}}$ Resuelvo con método

$\boxed{1}$ Calculo Solución del Homogéneo : H (descarto $q(x)$)

$\boxed{2}$ Planteo $y = k(x) \cdot H$ obteniendo $k(x)$

e $y' = k'H + kH'$

$\boxed{3}$ Reemplazo estas y e y' en la ecuación original :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

$\downarrow$ no

Casi ? $\xrightarrow{\text{sí}}$ Uso reemplazo

$$z = y^{1-n}$$

Bernoulli :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot \left(y(x)\right)^n$$

Ecuaciones Homogéneas

$f(t,x)$ es homogénea de grado n si:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n \cdot f(t,x) \quad \forall \lambda \neq 0, \forall (t,x)$$

- Grado 0 : $n=0$

Sustitución

Si $x' = f(t,x)$ es homogénea de grado 0

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{t}$ convierte la ecuación en variables separables.

reescribo

$$x = y \cdot t$$

derivo (regla del producto, pues $y(t) \cdot t$ es prod. de dos func. con t)

$$x' = y' \cdot t + y$$

y uso que también

$$x' = f(t,x) \overset{f \text{ homogénea}}{=} f(\lambda t, \lambda x)$$

Si $\lambda = \frac{1}{t}$

$$= f\left(1, \overset{y}{\frac{x}{t}}\right)$$

Con lo que puedo reemplazar en la x' original:

Reemplazo

- t por 1
- x por $\frac{x}{t} = y$

obteniendo ...

$$y' \cdot t + y = F(1, y)$$

$$y' t = F(1, y) - y$$

$$y' = \frac{F(1, y) - y}{t}$$

... una nueva ecuación diferencial de variables separadas

$$\frac{y'}{F(1, y) - y} = t$$

⇒ Resuelvo como antes, obtengo y

⇒ Teniendo y, vuelvo a sustituir para obtener la x original.

Fin.

Ecuaciones Exactas

- Cuando tengo algo del Tipo:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad \text{con } M, N \in C^1$$

ó ("divido" por dx) con $y = y(x)$

$$M + N \cdot y' = 0$$

relación funcional

Puedo suponer que

$$\exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F \in C^2 \;/$$

$$\nabla F = (M, N) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

- Teniendo M, N, puedo obtener F (integrando)

y como F es constante sobre la curva $y = y(x)$

pues

$$M + N \cdot y' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x, y(x))\right) = 0$$

$$F(x, y(x)) + \tilde{C} = 0$$

$$F(x, y(x)) = C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Entonces las soluciones estarán dadas de forma implícita por

$$\boxed{\text{Sol} \quad F(x, y(x)) = C} \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Para verificar que $\exists F$:

El rotor debe ser cero

$$M_y = N_x$$

Pues $\qquad F \in C^2$

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \overset{\downarrow}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = N_x$$

$\therefore$ Si $M_y = N_x \Rightarrow$ es Exacta ✓

$\Rightarrow$ Busco $F = C$

Si <u>no</u> es exacta :

Factor Integrante

Multiplico todo por $\mu(x)$

$$\underbrace{\mu . M + \mu . N . y' = 0}_{\text{ésta sí será exacta (con algún } \mu(x))}$$

Quiero que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu . M\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu N\right) \qquad \text{(pues será exacta)}$$

Expando

$$\mu_y . M + \mu . M_y = \mu_x . N + \mu . N_x$$

Reduzco espacio de soluciones :

Supongo

$$\mu = \mu(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{solo depende de alguna variable}}}{x})$$

con lo que $\mu_y = 0$

Obteniendo

$$\underbrace{\frac{\mu_x}{\mu}}_{\text{solo depende de } x} = \underbrace{\frac{M_y - N_x}{N}}_{\text{solo DEBE depender de } x}$$

Equivalentemente, si $\mu = \mu(y)$

$$\underbrace{\frac{\mu_y}{\mu}}_{\text{solo depende de } y} = \underbrace{\frac{N_x - M_y}{M}}_{\text{solo DEBE depender de } y}$$

⇒ Resuelvo y obtengo μ

⇒ Teniendo el factor integrante

Multiplico en

$$M + N y' = 0 \quad \leftarrow \text{No exacta}$$

$\times \mu$

$$\mu . M + \mu . N y' = 0 \quad \leftarrow \text{Exacta!}$$

⇒ Resuelvo nueva ecuación buscando las soluciones del tipo

$$F = C$$

Otros tipos de factores integrantes

$$\mu(x,y) = g(x\cdot y) \qquad \text{con } g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

ej

$$g(t) = t^2+1$$

$$\mu(x,y) = g(x\cdot y) = (x\cdot y)^2+1$$

Éstos suelen ser dados como datos

Fin Exactas.

Ecuaciones Diferenciales Lineales

de la forma:

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Método:

$\boxed{1}$ Descarto $q(x)$, obteniendo homogéneo

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$$

integro y obtengo

$$y(x) = e^{-P(x)} \qquad \text{con} \quad P(x) = \int p(x)$$

$\boxed{2}$ Planteo

$$y(x) = k(x) \cdot e^{-P(x)}$$

derivo

$$y'(x) = k'(x) \cdot e^{-P} + k(x) \cdot e^{-P} \cdot \underbrace{(-P(x))'}_{= -p(x)}$$

reemplazo $y(x) = k(x) \cdot e^{-P(x)}$ y su derivada $y'(x)$

en la ecu. original :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

$$\underbrace{k'(x) \cdot e^{-P} + k(x) \cdot e^{-P} \cdot (-p(x)) + p(x)\, k(x) \cdot e^{-P(x)}}_{} = q(x)$$

Opuestos: se anulan

obteniendo :

$$k'(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x)$$

$$k'(x) = q(x) \cdot e^{P(x)}$$

que es de Variables separadas !

Integro y obtengo $k(x)$:

$$\int k'(x)\, dx = \int q(x) \cdot e^{P(x)}\, dx$$

$$k(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)}\, dx$$

Reemplazo en el planteo de $\boxed{2}$

$$y(x) = \underbrace{k(x)} \cdot e^{-P(x)}$$

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \int q(x) \cdot e^{P(x)}\, dx$$

Así obteniendo la solución $y(x)$

$\boxed{1}$ Calculo Solución del Homogéneo : H (descarte $q(x)$)

$\boxed{2}$ Planteo $y = k(x) \cdot H$ obteniendo $k(x)$

e $y' = k' H + k H'$

$\boxed{3}$ Reemplazo estas y e y' en la ecuación original :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Bernoulli

$$y(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot \left(y(x)\right)^n$$

Uso reemplazo

$$z = y^{1-n}$$

derivo

$$z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

Divido ecu. orig. por y^n

$$\frac{y'(x) + p(x) \cdot y(x)}{y^n} = \frac{q(x) \cdot \cancel{(y(x))^n}}{\cancel{y^n}}$$

$$\underbrace{y' \cdot y^{-n}}_{\frac{z'}{1-n}} + p(x) \cdot \underbrace{y^{1-n}}_{z} = q(x)$$

obteniendo

$$\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x)$$

$$z' + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n)\, q(x)$$

Que es una Ecuación lineal como quería.

Notar que una vez obtenga z,

necesito volver a y

$$z = y^{1-n}$$

$$\Rightarrow y = z^{n-1}$$

Obteniendo la solución final y.

Obs: No olvidar (si lo dan) despejar valor inicial

Sistemas Lineales con coef. constantes
(de ecuac. dif.)

Mar 9

Quiero resolver sistemas del tipo

$$X' = A X \qquad \text{(en el futuro } + b(t))$$

$$X'(t) = \overset{\text{const.}}{A(t)}\, X(t)$$

$$\underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}} = \underset{n \times n}{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}} \underbrace{\underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}}_{\text{Quiero } X}$$

- Las soluciones forman un e.v.
- Necesito autovalores y autovectores de A

"auto" ≡ "propio" ≡ "característico"

3 casos:

a) A es diagonalizable

b) A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$, pero sí en $\mathbb{C}$

c) A no es diagonalizable.

Auto valores y Auto vectores

λ es autovalor de A si $\exists$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovector}}}{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ / \ A v = \lambda v$$

Auto espacio (es e.v)

$$E_\lambda = \{\text{autovectores de autovalor } \lambda\} \cup \{0\}$$

Autovalores:

Raíces del polinomio característico de A (χ_A)

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Así obtengo λ_1, λ_2.

Auto espaso será

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{para cada } \lambda}}{E_\lambda} = \{\text{soluciones de } (\lambda I - A) \cdot v = \vec{0}\}$$

Caso a) A es diagonalizable

$\Rightarrow \exists$ base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de autovectores

asociados de autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ respectivamente

Base de soluciones será

$$\mathcal{B}_S = \{ v_1 \cdot e^{\lambda_1 . t}, \dots, v_n \cdot e^{\lambda_n . t} \}$$

Solución general:

$$X(t) = c_1 . v_1 . e^{\lambda_1 . t} + \dots + c_n v_n \cdot e^{\lambda_n . t} \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 . v_{11} . e^{\lambda_1 . t} + \dots + c_n v_{n1} \cdot e^{\lambda_n . t} \\ \\ c_n . v_{1n} . e^{\lambda_1 . t} + \dots + c_n v_{nn} \cdot e^{\lambda_n . t} \end{pmatrix}$$

Caso b) A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ pero sí en $\mathbb{C}$ (esto es siempre $\forall$ sistema lineal)

Veo que

Autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

y que

Autovectores $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$

Quiero la base solución

$$\mathcal{B}_S = \left\{ v_1 \cdot e^{\lambda_1 t}, \; v_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \right\}$$

pero no en $\mathbb{C}$!

Uso: Raíces complejas vienen de a pares.

$\Rightarrow$ Solo busco 1 autovalor y su autovector

y separo en dos:

- Parte Real $= \mathrm{Re}\left(v \cdot e^{\lambda t}\right) = \dfrac{v \cdot e^{\lambda t} + \bar{v} \cdot e^{\bar{\lambda} t}}{2}$

- Parte Imag. $= \mathrm{Im}\left(v \cdot e^{\lambda t}\right) = \dfrac{v \cdot e^{\lambda t} - \bar{v} \cdot e^{\bar{\lambda} t}}{2i}$

Para eso uso que

$$v \cdot e^{\lambda t} \underset{\lambda \in \mathbb{C}}{=} v \cdot e^{(a+bi)t} = v \cdot \overbrace{e^{a}}^{\in \mathbb{R}} \cdot \overbrace{e^{bi \cdot t}}^{\in \mathbb{C}}$$

$$= v \cdot e^{a} \cdot \left(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt) \right)$$

Ej: obtuve

$$\overset{v \in \mathbb{C}^2}{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot e^{\overset{\lambda \in \mathbb{C}}{(1+i)t}} \in \mathbb{C}^2 \quad \Big\}\ \text{Calculo Re y Im}$$

$$= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{1 \cdot t} \cdot \left(\cos t + i \cdot \sin t \right)$$

$$= \begin{pmatrix} i \cdot e^{t} \cdot \cos t + i \cdot e^{t} \cdot i \sin t \\ 1 \cdot e^{t} \cdot \cos t + 1 \cdot e^{t} \cdot i \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{i \cdot e^{t} \cdot \cos t}^{\in \mathbb{C}} - \overbrace{e^{t} \sin t}^{\in \mathbb{R}} \\ \underbrace{e^{t} \cdot \cos t}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{e^{t} \cdot i \sin t}_{\in \mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{t} \cdot \sin t \\ e^{t} \cdot \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \cdot e^{t} \cdot \cos t \\ i \cdot e^{t} \cdot \sin t \end{pmatrix}$$

$$= e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Puedo escribir la base como:

$$\mathcal{B}_S = \left\{ e^{t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} ,\ e^{t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

y la solución general como el de $\uparrow$

$$\underbrace{X(t)}_{= \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}} = C_1 \cdot e^{t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Fin.

Caso c) Matriz no diagonalizable. (en Prác. 17-Mar 08)

$\Rightarrow$ Autovalor doble

de la forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ m & \lambda \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} \lambda & m \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{con } m \in \mathbb{R}$$

- Para el primer elemento de la base:

$$v \cdot e^{\lambda t} \qquad (\text{como antes})$$

- Para el segundo elemento:

$$e^{\lambda t} \cdot (w + t \cdot v)$$

Donde obtengo w de resolver

$$(A - \lambda I) \cdot w = v$$

Atenti al orden!

Homogéneas

$$X(t) = \underbrace{X_H(t)}_{\text{Sol. Homog.}} + X_p(t)$$

↳ Variación de constantes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ X_{H1} & X_{H2} \\ | & | \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- Obtengo C_1 y C_2 integrando C_1' y C_2'
- Calculo $X_p = C_1(t) \cdot X_{H1}(t) + C_2(t) \cdot X_{H2}(t)$
- $X(t) = X_H(t) + X_p(t)$

Cramer

$$C_i' = \frac{\det Q_i}{\det Q}$$

donde Q_i es Q con $b(t)$ en columna i de Q

$$Q_1 = \begin{pmatrix} b_1 & | \\ & X_{H2} \\ b_2 & | \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} | & b_1 \\ X_{H1} & \\ | & b_2 \end{pmatrix}$$

en gral

$$X_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \text{con} \quad A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

A debe ser inversible!

Ecuaciones de Orden Superior

Objetivo: Resolver

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot y^{(i)} = 0 \qquad y^{(0)} = y, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

(de nuevo, el conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dim n)

Clave: Estudiar el POLINOMIO de la forma

$$p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot y^i$$

Similarmente a como hacíamos antes, las soluciones serán de la forma

$$\left\{ e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ t \cdot e^{\lambda_2 t} \right\}$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces del polinomio (no son autovalores pues no hay matriz ni autovectores)

- en el ejemplo de arriba

↳ λ_2 es raíz doble, y el polinomio es de grado 3

Los 3 casos de raíces se mantienen

1 - Raíces en $\mathbb{R}$ distintas

2 - Raíces en $\mathbb{C}$ $\{\mathrm{Re}(e^{\lambda t}), \mathrm{Im}(e^{\lambda t})$

3 - Raíz doble $\{e^{\lambda x}, x.e^{\lambda x}, x^2.e^{\lambda x}, \ldots, x^{n-1}.e^{\lambda x}\}$

Caso no homogéneo

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot y^{(i)} = g(x)$$

Solución

$$y = y_H + y_P$$

Variación de Parámetros (no tengo matriz Q! sols. $\in \mathbb{R}$, no $\mathbb{R}^2$)

$$y_P = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot \phi_j(x)$$

con $\underset{\text{Sol. Homo.}}{B_{SH}} = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n\}$

Resuelvo

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-1 \text{ ceros} \\ \leftarrow \text{término indep al final} \end{matrix}$$

con $W(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix}$