Luna Mar 8

# Resolución de Sistemas Lineales, de coeficientes constantes, homogéneos:

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

en el caso de 1 autovalor doble $\lambda$

- No el caso

$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ pues es trivial:

Si $A = \lambda I \Rightarrow X' = \overset{A}{\widetilde{\lambda I}}\, X(t)$

$X' = \lambda X(t)$

$X = \frac{1}{\lambda} \cdot X'(t)$

- Sino el caso con 1 autovalor doble y A no diagonalizable

Ej:

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} X(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 \\ 1 & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)^2$$

Auto vector :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{at} \end{pmatrix}$$

Para la otra solución

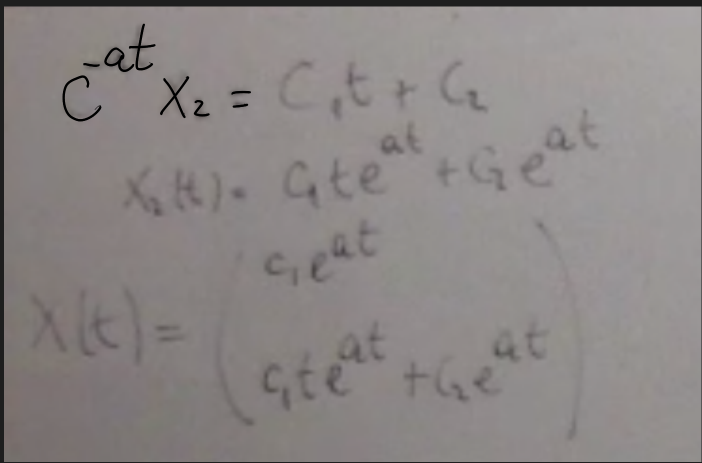
$$X_1'(t) = a \cdot X_1(t) \longrightarrow X_1(t) = C_1 \cdot e^{at}$$

$$X_2'(t) = C_1 \cdot e^{at} + a X_2(t) \iff X_2'(t) -$$

$$\iff \boxed{X_2'(t) - a X_2(t) = C_1 e^{at}}$$

$$e^{-at}\left(x_2' - a\,x_2\right) = C_1$$

$$\left(e^{-at}\,x_2\right)' = C_1$$



$$e^{-at} X_2 = C_1 t + C_2$$

$$X_2(t) = C_1 t e^{at} + C_2 e^{at}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_1 t e^{at} + C_2 e^{at} \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \cdot e^{at}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \overbrace{C_2 \cdot e^{at}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_1}$$

**Base** :

$$\left\{ e^{at}\left(w + t.v\right),\ e^{at}\,V \right\}$$

En general :

$$X'(t) = A\,X(t)$$

con 1 autoval. doble $\lambda$ y sólo 1 autovector $V$

Una solución :

$$X_1(t) = V \cdot e^{\lambda t}$$

La otra será de la forma:

$$X_2(t) = e^{\lambda t}(w + tV)$$

$$X_2'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}(w + tV) + e^{\lambda t} V$$

$$A\,X(t) = e^{\lambda t} A w + t\, e^{\lambda t} \lambda V$$

Necesitamos que:

$$A w = \lambda w + V$$

$$(A - \lambda I)\, w = V$$ ← Siempre tiene solución!

(Prueba en apunte)

Ejemplo:

$$\begin{cases} X_1' = X_1 - X_2 \\ X_2' = X_1 + 3X_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores   luego uso "$(A-\lambda I)w = v$" (notar orden!)

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)+1$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda-2)^2$$

Calculo auto vector :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para la otra solución :

quiero el $w$ que satisfaga : $(A-\lambda I)w = v$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = e^{2t}\left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{t\,v} \right)$$

Fin del caso <u>no</u> diagonalizable.

# Resolución de Sistemas Lineales, de coeficientes constantes, <u>no</u> homogéneos:

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n}$$

## Recordar

Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ base de soluciones de $X' = A\,X$ (homogéneo)

## Matriz fundamental:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$X_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) X_i(t)$ es solución del No homogéneo si $Q(t)C'(t) = B(t)$

Lugar

$$Q(t)\, C'(t) = B(t)$$

Ejemplo:

$$x_1' = -x_2 + 2$$

$$x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Soluciones del homogéneo:

$$X' = AX$$

Autovalor:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Auto vectores :

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Variación de las constantes:

Buscamos $X_p(t) = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t)$ /

$$X_p' = A X_p + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Hay que resolver :

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$F_2 + 2F_1$

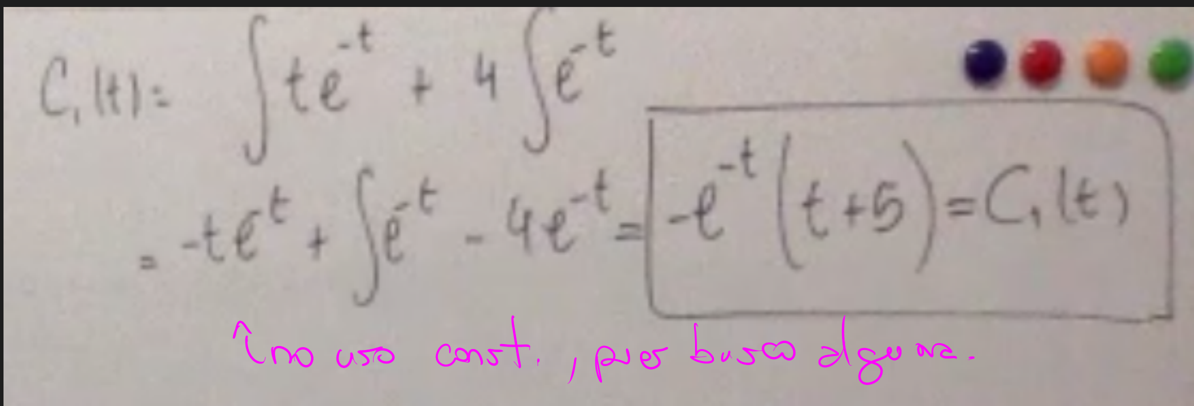
$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

$$C_1'(t) \cdot e^t + 0 = t + 4$$

$$C_1'(t) = e^{-t} \cdot t + 4e^{-t}$$

$$C_1(t) = \int e^{-t} \cdot t + 4e^{-t} \, dt$$

$$= \int e^{-t} \cdot t \, dt + \int 4e^{-t} \, dt$$



$$C_1(t) = \int te^{-t} + 4\int e^{-t}$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} - 4e^{-t} = \boxed{-e^{-t}(t+5) = C_1(t)}$$

↑ no uso const., pues busco alguna.

Volviendo

Reemplazando $C_1'$ en

$$\begin{pmatrix} e^t & -e^{2t} \\ e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$$

Obtengo

$$e^t C_1'(t) - e^{2t} C_2'(t) = 2$$

$$t + 4 - e^{2t} \cdot C_2'(t) = 2$$

$$C_2'(t) = (t+2) \cdot e^{-2t}$$

Integro

$$C_2(t) = \int (t+2) \cdot e^{-2t} \, dt$$

partes

$$= -(t+2) \cdot \frac{e^{-2t}}{2} + \int \frac{e^{-2t}}{2} \, dt$$

$$= -e^{-2t} \cdot \frac{(t+2)}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

$$\boxed{C_2(t) = -e^{-2t} \; \frac{2t+5}{4}}$$

Variación de las constantes

- Buscamos solución particular $X_p(t)$

$$X_p(t) = C_1(t) \, X_1(t) + C_2(t) \, X_2(t)$$

$$X_p(t) = -e^{\cancel{-t}} (t+5) \cdot e^{\cancel{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + -\frac{e^{\cancel{-2t}}}{4} (2t+5) \cdot e^{\cancel{2t}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = (t+5) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2t+5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

notar que es un polinomio.

acomodándola :

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\, X_p(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{constante}}{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - \frac{15}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{X_p(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sol final será :

$$X = A\, X_1(t) + B\, X_2(t) + X_p(t)$$

Observación :

Ecuaciones de orden 2 :

$$x''(t) + a\, x'(t) + b\, x(t) = 0$$

Podemos traducirlo a un sistema de 2x2

$\Rightarrow$ el polinomio característico de la matriz

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b}$$ ← Recordar

siempre así !

## Soluciones :

$$X(t) = e^{\lambda t} \quad \text{con } \lambda \text{ raíz de } P$$

$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Cuando tenga raíz doble :

$$e^{\lambda t}, \quad t \cdot e^{\lambda t}$$