

Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II
Curso de Verano de 2021
 Segundo Parcial (18/03/21)

1	2	3	4

CALIF.

Apellido: Carreira

Nombre: Leandro

No. de documento: 34.020.793

L.U.: 669/18

Carrera: Computación

Grupo:

☐
☐
☒

1. Dada la ecuación

$$(1 + xy + y^2) + (1 + xy + x^2)y' = 0$$

a) Probar que admite un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \mu(xy)$

b) Hallar la solución de la ecuación.

a)

$$M = 1 + xy + y^2 \Rightarrow M_y = x + 2y$$

$$N = 1 + xy + x^2 \Rightarrow N_x = y + 2x$$

No es exacta,

Veamos si

$$M + N \cdot y' = 0$$

queda exacta al usar

$$\mu \cdot M + \mu \cdot N \cdot y' = 0$$

quiero que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu \cdot N)$$

$$\mu_y \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu_x \cdot N + \mu \cdot N_x$$

$$\mu' \cdot x \cdot M + \mu \cdot M_y = \mu' \cdot y \cdot N + \mu \cdot N_x$$

Calculo las partes

$$\mu' x \cdot M = \mu'(x + x^2 y + x \cdot y^2)$$

$$\mu' y \cdot N = \mu'(y + x y^2 + x^2 \cdot y)$$

$$\mu M_y = \mu_{(x,y)}(x + 2y)$$

$$\mu N_x = \mu_{(x,y)}(y + 2x)$$

Junto todo

$$\begin{aligned} & \mu'(x + x^2 y + x \cdot y^2) + \mu_{(x,y)}(x + 2y) = \\ & = \mu'(y + x y^2 + x^2 \cdot y) + \mu_{(x,y)}(y + 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu'(x + \cancel{x^2 y} + \cancel{x \cdot y^2} - y - \cancel{x y^2} - \cancel{x^2 \cdot y}) = \\ & = \mu \cdot (y + 2x - x - 2y) \end{aligned}$$

$$\mu'(x - y) = \mu(x - y)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{x - y}{x - y} = 1$$

Integro

Calculo derivadas parciales de μ

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial}{\partial y} \mu(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \mu(x \cdot y) \\ &= \mu' \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial}{\partial x} \mu(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \mu(x \cdot y) \\ &= \mu' \cdot y \end{aligned}$$

$$\ln(|\mu|) = t$$

Fator integrante:

$$\mu(x, y) = e^t$$

$$\mu(x, y) = \mu(x \cdot y) = e^{xy}$$

Verifico que seja exata

quero que

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu \cdot N)$$

$$\mu \cdot M = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy}$$

$$\begin{aligned} (\mu \cdot M)_y &= e^{xy} \cdot x + x \cdot e^{xy} + x^2 \cdot y \cdot e^{xy} + 2y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot x \cdot e^{xy} \\ &= 2x \cdot e^{xy} + 2y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot x \cdot e^{xy} \end{aligned}$$

$$\mu \cdot N = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy}$$

$$\begin{aligned} (\mu \cdot N)_x &= e^{xy} \cdot y + y \cdot e^{xy} + x \cdot y^2 \cdot e^{xy} + 2x \cdot e^{xy} + x^2 \cdot y \cdot e^{xy} \\ &= 2x \cdot e^{xy} + 2y \cdot e^{xy} + x \cdot y^2 \cdot e^{xy} + x^2 \cdot y \cdot e^{xy} \end{aligned}$$

Vejo que

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

°. La ecuación ahora es exacta

queda probado que la ecuación admite un factor integrante de la forma: $\mu(x,y) = \mu(x,y)$

b) Reescribo datos:

$$M = 1 + xy + y^2$$

$$N = 1 + xy + x^2$$

$$\text{con } \mu = e^{xy}$$

$$\mu \cdot M = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy}$$

$$\mu \cdot N = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy}$$

Como es exacta, sé que existe un $F \in C^2 /$

$$\nabla F = (\mu M, \mu N)$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu \cdot M = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \mu \cdot N = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy}$$

Integro $\frac{\partial F}{\partial x}$ wrt x

$$\int e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + y^2 \cdot e^{xy} dx =$$

$$= \frac{e^{xy}}{y} + y \cdot e^{xy} + \int x \cdot y \cdot e^{xy} dx$$

CA

$$y \cdot \int x \cdot e^{xy} dx$$

Parti

$$u = x \quad du = 1 dx$$

$$v = \frac{e^{xy}}{y} \quad dv = e^{xy} dx$$

$$y \cdot \left(x \cdot \frac{e^{xy}}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y} \cdot dx \right) =$$

$$= \cancel{y} \left(x \cdot \frac{e^{xy}}{\cancel{y}} - \frac{1}{\cancel{y}} \cdot \frac{e^{xy}}{\cancel{y}} \right)$$

$$= x \cdot e^{xy} - e^{xy} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= e^{xy} \cdot \left(x - \frac{1}{y} \right)$$

$$= \frac{e^{xy}}{y} + y \cdot e^{xy} + e^{xy} \cdot \left(x - \frac{1}{y} \right) + \varphi(y)$$

$$= e^{xy} \cdot \left(\cancel{\frac{1}{y}} + y + x - \cancel{\frac{1}{y}} \right) + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = e^{xy} \cdot (y+x) + \varphi(y)$$

Integro $\frac{\partial F}{\partial y}$ wrt y

$$\int e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy} dy =$$

$$= \frac{e^{xy}}{x} + x^2 \cdot \frac{e^{xy}}{x} + \underbrace{\int x \cdot y \cdot e^{xy} dy}$$

es igual a la anterior con
variables invertidas

$$= \frac{e^{xy}}{x} + x^2 \cdot \frac{e^{xy}}{x} + e^{xy} \cdot \left(y - \frac{1}{x}\right) + \gamma(x)$$

$$= e^{xy} \cdot \left(\frac{1}{x} + x + y - \frac{1}{x}\right) + \gamma(x)$$

$$F(x,y) = e^{xy} \cdot (x+y) + \gamma(x)$$

que es la misma que antes

∴ las soluciones son de la forma

$$F(x,y) = C$$

Solución:

$$e^{xy} \cdot (x+y) = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

2. Hallar la solución del sistema

$$\begin{cases} x' = 3x - 18y \\ y' = 2x - 9y \end{cases}$$

que verifica $x(0) = 7, y(0) = 2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculo auto valores de A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & +18 \\ -2 & \lambda + 9 \end{vmatrix} &= (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 9) + 36 \\ &= \lambda^2 + 9\lambda - 3\lambda - 27 + 36 \\ &= \lambda^2 + 6\lambda + 9 \\ &= (\lambda + 3)^2 \end{aligned}$$

Tengo autovalor doble $\lambda = -3$
 \Rightarrow estoy en el caso de matriz no
diagonalizable.

Calculo autovector $\underline{\underline{v}}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 18 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 18 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-2 \cdot v_1 + 6v_2 = 0$$

$$v_1 - 3v_2 = 0$$

$$v_1 = 3v_2$$

$$\text{elijo } v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = 3$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una de las componentes de la base de soluciones será :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Para obtener la otra :

Calculo W :

$$(A - \lambda I) \cdot W = V$$

$$\begin{pmatrix} 3+3 & -18 \\ 2 & -9+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6w_1 - 18w_2 = 3 & \textcircled{I} \\ 2w_1 - 6w_2 = 1 & \textcircled{II} \end{cases}$$

\textcircled{II}

$$\hookrightarrow 2w_1 = 1 + 6w_2$$

$$w_1 = \frac{1}{2} + 3w_2$$

\textcircled{I}

$$\hookrightarrow \frac{6}{2} + 18w_2 = 3$$

$$18w_2 = 0$$

$$w_2 = 0$$

$$\hookrightarrow w_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puedo escribir el 2º elem. de la base como

$$e^{2t} \cdot (W + t \cdot V)$$

$$e^{-3t} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_s = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

Ademas pide que

$$x(0) = 7$$

$$y(0) = 2$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{-3 \cdot 0}}_{=1} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{-3 \cdot 0}}_{=1}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 7 \\ C_1 + 0 = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 6 + \frac{1}{2}C_2 = 7$$

$$\frac{1}{2}C_2 = 1$$

$$C_2 = 2$$

Finalmente, la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 3t \\ t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 + 6t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot e^{-3t}$$

3. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2t} + t$$

Primero resolvamos homogéneo

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Polinomio

$$P(y) = y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$= (y - 1)(y - 2)$$

$$\text{raíces: } \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

Base de Soluciones del Homogéneo

$$B_{SH} = \{ e^t, e^{2t} \}$$

$$y_H(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t} \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Sol particular

Primero resolvamos $D_4(y) = t$

$$D_4(y) = y'' - 3y' + 2y = t$$

Propongo

$$\cdot y(t) = at + b \quad \left. \vphantom{\cdot y(t) = at + b} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet y'(t) = a \\ \bullet y''(t) = 0 \end{array} \right\} D_1(y) = -3a + 2at + 2b \\ = -3a + 2b + 2at$$

$\begin{array}{c} = t \\ \uparrow \\ \text{quiero} \end{array}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow 2b = 3a$$

$$b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{4}$$

Sol part. de $D_1 = t$

$$y_{1p}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

Verifico

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \\ y_1' = \frac{1}{2} \\ y_1'' = 0 \end{array} \right\} -\frac{3}{2} + t + \frac{3}{2} = t \quad \checkmark$$

Resuelvo

$$D_2(y) = y'' - 3y' + 2y = 3 \cdot e^{2t}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ es múltiplo de un elemento de la base!

Propongo

$$\bullet y(t) = (a \cdot t + b) \cdot e^{2t}$$

$$= a \cdot t \cdot e^{2t} + \underbrace{b \cdot e^{2t}}_{\text{es múltiplo de un elem de la base,}} \Rightarrow \text{no aporta} \Rightarrow \text{lo descarto}$$

$$= a \cdot t \cdot e^{2t} \quad \Rightarrow b = 0$$

$$\bullet \quad y'(t) = a \cdot e^{2t} + 2a \cdot t \cdot e^{2t}$$

$$\bullet \quad y''(t) = 2a \cdot e^{2t} + 2a \cdot e^{2t} + 4a \cdot t \cdot e^{2t}$$

Reemplazo en $D_2(y)$

$$D_2(y) = 2a \cdot e^{2t} + 2a \cdot e^{2t} + 4a \cdot t \cdot e^{2t} -$$

$$- 3(a \cdot e^{2t} + 2a \cdot t \cdot e^{2t}) +$$

$$+ 2(a \cdot t \cdot e^{2t})$$

$$= a \cdot e^{2t} \left(\begin{matrix} 2 + 2 - 3 + 4t - 6t + 2t \\ 1 + 0 \end{matrix} \right)$$

$$= a \cdot e^{2t}$$

$$= 3 \cdot e^{2t}$$

↑
quiero

$$\Rightarrow a = 3$$

Sol part de $D_2(y)$

$$y_{zp}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{2t}$$

Verifico

$$y_{2p} = 3t \cdot e^{2t}$$

$$\begin{aligned} y'_{2p} &= 3e^{2t} + 6t \cdot e^{2t} \\ &= 3e^{2t}(1 + 2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_{2p} &= 6e^{2t} + 6e^{2t} + 12t \cdot e^{2t} \\ &= 12e^{2t}(1 + t) \end{aligned}$$

Reemplazo en

$$D_2(y) = y'' - 3y' + 2y = 3 \cdot e^{2t}$$

$$\begin{aligned} &12e^{2t}(1+t) - 9e^{2t}(1+2t) + 6t \cdot e^{2t} = \\ &= e^{2t}(12 + 12t - 9 - 18t + 6t) \\ &= e^{2t} \cdot 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Junto ambas soluciones o Particulares

$$y_{1p}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}$$

$$y_{2p}(t) = 3 \cdot t \cdot e^{2t}$$

y obtengo

$$y_p(t) = y_{1p} + y_{2p}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 3t \cdot e^{2t}$$

Sol general

$$y(t) = y_{\#} + y_p$$

donde

$$y_{\#}(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t}$$

Solución

$$y(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + 3t \cdot e^{2t}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

4. Dado el sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -\alpha & 4\beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} X(t)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar TODOS los valores de α y β que garanticen que la solución es acotada tanto cuando $t \rightarrow +\infty$ como cuando $t \rightarrow -\infty$.
- b) Esbozar el diagrama de fases cuando $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

JUSTIFIQUE TODAS LAS RESPUESTAS

a) Calculo auto valores

$$\begin{vmatrix} \lambda + \alpha & -4\beta \\ \beta & \lambda + \alpha \end{vmatrix} = (\lambda + \alpha) \cdot (\lambda + \alpha) + 4\beta^2$$
$$= \lambda^2 + 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + 4\beta^2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + 4\beta^2)}}{2}$$

$$= \frac{-2\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{i^2 \cdot 16\beta^2}}{2} \quad i = \sqrt{-1}$$

$$= -2\alpha \pm i \frac{\sqrt{16\beta^2}}{2} \quad 16\beta^2 \geq 0 \text{ siempre}$$

$$= -2\alpha \pm i \cdot 2|\beta|$$

Qué pasa si saca módulo?

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\alpha - i \cdot 2|\beta| \\ \lambda_2 &= -2\alpha + i \cdot 2|\beta| \end{aligned}$$

si $\beta > 0 \Rightarrow$ puedo sacar módulo
si $\beta < 0 \Rightarrow$ estaré en el caso de λ_2 !

Alcanza con escribir que el autovalor es

Obs!

$$\lambda = -2\alpha - 2\beta \cdot i \quad \text{con } \beta \geq 0$$

$$\left(\begin{aligned} \text{Si } \beta = 0 &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \right)$$

pues con $\beta < 0$ obtengo λ_2 sin módulo, y sabemos que solo necesito una raíz compleja para obtener toda la información que necesito y despejar parte real e imaginaria.

(esto sucede pues hay dos raíces conjugadas, como sucede en polinomios de grado 2 con raíces complejas)

Tengo 2 raíces complejas,

calculo autovector complejo

$$\begin{pmatrix} -2\alpha - i \cdot 2\beta + \alpha & -4\beta \\ \beta & -2\alpha - i \cdot 2\beta + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha - 2i\beta & -4\beta \\ \beta & -\alpha - 2i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Como las filas deben ser ld, veo si puedo simplificar algo al exigirlo:

$$F_2 \cdot (-2i) = \alpha$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha - 2i & \beta & -4\beta \\ -\alpha - 2i & \beta & \uparrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$(-\alpha - 2i \quad \beta) \cdot (-2i) - \alpha$$

$$\underbrace{2\alpha i - 4\beta - \alpha}$$

debe ser igual a -4β
(de la fila 1)

$$\Rightarrow 2\alpha i - 4\beta - \alpha = -4\beta$$

$$2\alpha i - \alpha = 0$$

$$\alpha(2i - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda = -2\alpha - 2\beta i \\ \alpha=0 \Rightarrow \lambda = -2\beta i \end{pmatrix}$$

↑ solo parte
Im.

Reescribo sistema con $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} -2i & \beta & -4\beta \\ \beta & -2i & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelvo

$$\beta \cdot x_1 - 2i\beta \cdot x_2 = 0$$

$$\beta r_1 = 2i \beta r_2$$

$$\hookrightarrow r_2 = -\frac{1}{2}i$$

$$\hookrightarrow r_1 = 1$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Tengo la solución compleja

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \cdot e^{-2\beta i t}$$

Separo parte Re e Im

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \cdot e^{-2\beta i t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\cos(-2\beta t) + i \sin(-2\beta t) \right)$$

$$\cos -\theta = \cos \theta$$

$$\sin -\theta = -\sin \theta$$

$$\downarrow = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\cos(2\beta t) - i \sin(2\beta t) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta t & -i \sin(2\beta t) \\ -\frac{i}{2} \cos(2\beta t) & -\sin(2\beta t) \end{pmatrix}$$

Imag. Real

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2} \cos 2\beta t \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_s = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2} \cos 2\beta t \end{pmatrix} \right\}$$

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2} \cos 2\beta t \end{pmatrix}$$

- Como la raíz no tiene componente real,
 $X(t)$ siempre está acotada, con $\alpha = 0$ y $\beta \in \mathbb{R}^+_{-\{0\}}$
 (tanto $\sin x$ como $\cos x$ están acotados cuando $t \rightarrow +\infty$
 ó cuando $t \rightarrow -\infty$)

Falta el caso $\beta = 0$ del principio.

Si $\beta = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -2\alpha - i \cdot 2|\beta|$$

$$\lambda = -2\alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

(tenso auto valor doble)

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = -\alpha \cdot I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot A = \frac{1}{\alpha^2} \cdot (-\alpha) \cdot I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha} \cdot I$$

$$X' = A X$$

$$A^{-1} X' = \underbrace{A^{-1} A}_I X$$

$$X = -\frac{1}{\alpha} \cdot I X'$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Sol para $\beta = 0$

$$X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{x_1'}{\alpha} \\ -\frac{x_2'}{\alpha} \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

(como en $\alpha = 0$ se indetermina,
me quedo con 1 de los
intervalos $(0, +\infty)$)

- Con $\beta = 0$ y $\alpha > 0$, las soluciones estarán acotadas siempre que x_1' y x_2' lo estén.

b) Diagrama cuando

- $\alpha = 0$

- $\beta = \frac{1}{2}$

- $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Obtine

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta t \\ -\sin 2\beta t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin 2\beta t \\ -\frac{1}{2} \cos 2\beta t \end{pmatrix}$$

Reemplazando

$$X(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = -2 \end{cases}$$

Entonces

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix} \leftarrow \text{elipse!} \checkmark \text{ centrada en } (0,0)$$

pues se mantiene sobre la curva al no haber un factor que crezca o disminuya con t multiplicando

• derivar para ver sentido

$$t_g(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 + 2 \cdot \cos 0 \\ -\cos 0 - \sin 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{(también me da la inclinación aprox de la elipse! :))}$$

