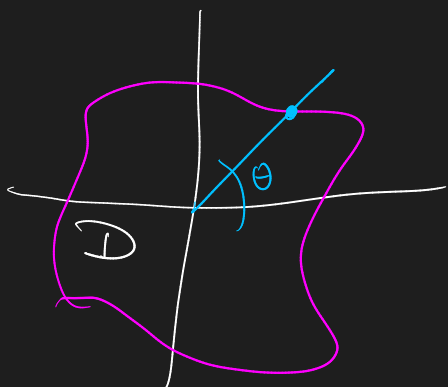


Primero

Curvas en Polares, Green, Áreas

C cerrada simple dada por

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} r \, dr \, d\theta \quad \text{Jacobian} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\theta)^2 \, d\theta \end{aligned}$$

\tilde{D} región dada por $\theta \in [a, b]$

$$A(\tilde{D}) = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 \, d\theta$$



Lo mismo que da si usamos Green:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$$

$$= (P, Q)$$

$$A(D) = \iint_D Q_x - P_y = \int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}$$

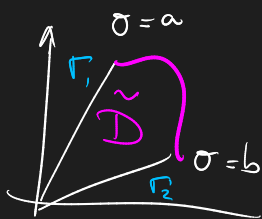
\mathcal{C} se parametriza con

$$\sigma(\theta) = (r(\theta) \cdot \cos \theta, r(\theta) \cdot \sin \theta)$$

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\theta)^2 d\theta$$

Remember!
WTF

Porción:



Considero segmentos rectos

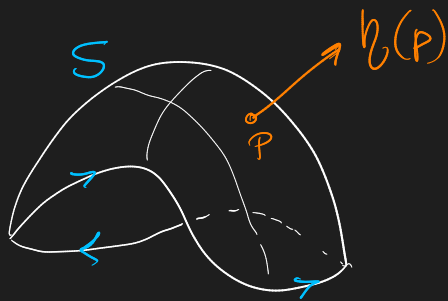
$$\Gamma_1: \gamma(t) = t(\cos b, \sin b) \\ t \in [0, \sigma(b)]$$

no aportan
nada a la integral

$$\Gamma_2: \text{same,}$$

Teorema de Stokes

$S \subset \mathbb{R}^3$ superfície orientada



• $C = \partial S$ curva cerrada simple orientada por S

• F campo vetorial $\in C^1$

$$\Rightarrow \iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_{\partial S^+} F \cdot d\vec{s}$$

$$\text{donde } F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

El operador $\nabla \times ()$ actúa sobre

El operador $\nabla \times ()$ actúa sobre un campo vectorial y nos devuelve otro campo vectorial.

Usos :

1) Calcular una cantidad o la otra.

2) Dada \mathcal{C} una curva y un campo F ,

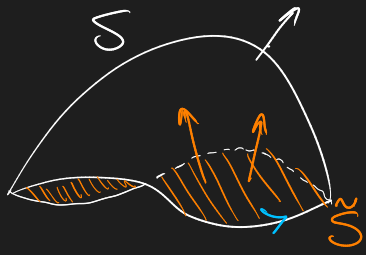
encontrar S tal que ∂S sea

"casi" igual a \mathcal{C} y tal que

$$\iint_S \nabla \times F \, d\vec{s} \quad \text{sea mejor que} \quad \int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s}$$

* i.e. Cerrando la superficie

3) Cambiar una superficie por otra.



S orientada

$\partial S = C$ orientada compatible
con S

Obs : $\partial S = C$

Stokes :

$$\iiint_S \nabla \times F \, d\vec{s} = \int_C F \, d\vec{s} = \iiint_{\tilde{S}} \nabla \times F \, d\vec{s}$$

Ejemplo :

$$\text{Sea } F(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

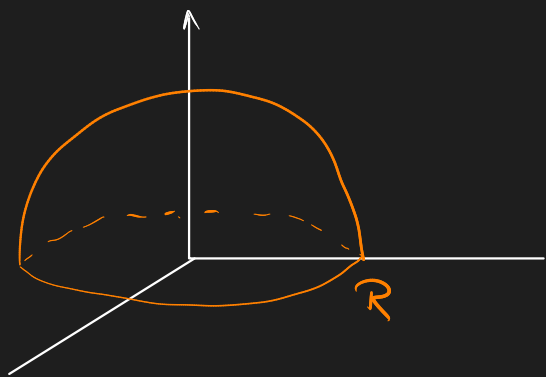
$$S = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2, z \geq 0 \right\}$$

orientada de forma que

$$\eta(0, 0, R) = (0, 0, 1)$$

Calcular

$$\iiint_S \nabla \times F \, d\vec{s}$$



$$\nabla_x F = (0, 0, 1)$$

Considerar

$$\bullet \mathcal{C} = \partial S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0 \}$$

orientada según S

$$\bullet \tilde{S} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z = 0 \}$$

orientada por $\eta(0, 0, z) = (0, 0, 1)$

Stokes:

$$\boxed{\int_S \nabla_x F d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} F ds = \int_{\tilde{S}} \nabla_x F ds}$$

$$= \int_{\tilde{S}} \underbrace{\langle \nabla_x F, \underbrace{\eta}_{\text{vector normal unitario}} \rangle}_{\text{función escalar}} ds$$

Pero! puedo obtener η sin parametrizar

pues: $\varphi \in \tilde{\Sigma} \rightarrow \eta(\varphi) = (0, 0, 1)$ sobre todo el disco.

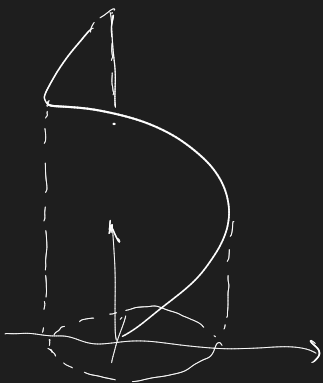
$$= \iint_{\tilde{\Sigma}} \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle dS$$

$$= \iint_{\tilde{\Sigma}} 1 dS = A(\tilde{\Sigma}) = \pi \cdot R^2 //$$

Ejercicio

Sea C dada y orientada por

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$F(x, y, z) = \left(x \cdot e^t, x + y \ln(z+1), \frac{y^2}{z(z+1)} + \frac{x^2 \cdot e^z}{2} \right)$$

Calcular

$$\int_C F dz$$

Pensando en Stokes, calculo el rotor:

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \left(\frac{y}{z+1} - \frac{y}{z+1}, x \cdot e^z - x \cdot e^z, 1 \right) \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Buscamos S super, que tenga ∂ como borde

Queremos

$$\underbrace{\int_{\partial} F d\vec{z}}_{F_{\partial}} + \underbrace{\int_V F d\vec{z}}_{?} = \iint_S \nabla \times F d\vec{z}$$

elijo superficie que
"se lleve bien" con el rotor

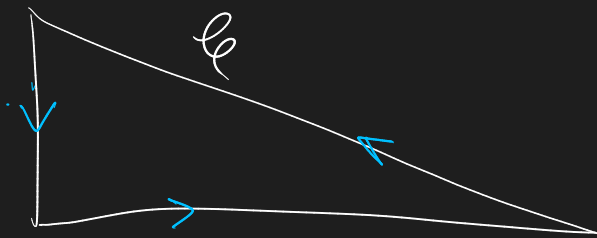
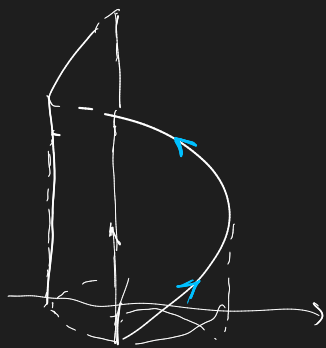
Elegimos las paredes verticales del cilindro (instead of esfera)

pues
Normal en $(x, y, z) = (x, y, 0) \cdot \lambda \quad \lambda > 0$
(imaginar cilindro)

Entonces

$$\iint_S \nabla \times F d\vec{z} = \iint_S \langle (0, 0, 1), (x, y, 0) \rangle dx = 0$$

Falta completar el borde de S



Segmento vertical \uparrow sentido universo!

$\hookrightarrow \Gamma : \gamma(t) = (1, 0, t)$

Circ. \rightarrow

Segmento vertical $\Gamma : \gamma(t) = (1, 0, t) \quad t \in [0, 2\pi]$
 Circunferencia de la base $\Psi : \psi(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$
 \rightarrow ponemos la normal exterior (no importa)
 $0 = \iint_S \nabla \times F d\vec{s} =$

orientadas

S : ponemos la normal exterior!

$$0 = \iint_S \nabla \times F d\vec{s} = \int_{\Psi} F d\vec{s} + \int_{\Gamma} F d\vec{s} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}^-} F d\vec{s}}_{\text{incógnita con signo opuesto.}}$$

Calculo integral

$$\gamma'(t) = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle F(1, 0, t), (0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{e^t}{2}, \frac{e^t}{2}, \frac{e^t}{2} \right), (0,0,1) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^t dt \\
&= \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1) //
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi} F d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \left\langle F(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle (\cos t, \cos t, \dots), (-\sin t, \cos t, 0) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin t \cdot \cos t + \cos^2 t dt \\
&= \pi //
\end{aligned}$$

Falta último paso, vuelvo a la igualdad de Stokes.

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_S \nabla \times F d\vec{s} = \int_{\psi} F d\vec{s} + \int_{\Gamma} F d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}^-} F d\vec{s} \\
0 &= \pi + \frac{1}{2} (e^{2\pi} - 1) - \int_{\mathcal{C}} F d\vec{s}
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \, d\vec{s} = \pi + \frac{1}{2}(e^{2\pi} - 1)$$

