Mars Mar 09

Ecuación de orden n

$$(1) \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, x' = 0$$

Plan:

↳ Traducir a un sistema de $n \times n$

y usar la teoría que tenemos allí.

Considerar el sistema

$$(2) \quad \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-2} x_{n-2} \end{cases}$$

Si x es solución de (1) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ es sol de (2)

Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ es sol de (2) $\Rightarrow$ x_0 es sol de (1)

$x_1 = x_0'$

$x_1' = x_0'' = x_2$

$$x_2' = x_0''' = x_3$$

$$\vdots$$

$$x_0^{(n)} = -a_0 x_0 - a_1 x_1' - \dots - a_{n-1} x_{n-2}$$

Si tenemos

$\{x_1, \dots, x_n\}$ soluciones de 1

ver si son li es mirar:

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & & x_n \\ x_1' & & x_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

El caso de orden 2

$$x'' + a x' + b x = 0$$

llamo

$$\begin{cases} x_0' = x \\ x_1' = -b x_0 - a x_1 \end{cases}$$

Sistema

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda + a) + b$$

Hay que buscar raíces de

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

debería s

↑ notar que el grado se corre pero ~ con exp.

Casos

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$X_1(t) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$X_2(t) = v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Base de sol de ① $= \left\{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \right\}$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ($\lambda, \bar{\lambda}$ raíces conjugadas)

Sol:

$$X(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i \cdot \beta t}$$

$$= e^{\alpha t} \cdot \left(\cos \beta t + i \cdot \operatorname{sen} \beta t \right)$$

$$\text{Base} = \left\{ e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t, \; e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t \right\}$$

El caso de autovalor doble

$X_1(t) = v \cdot e^{\lambda t}$, v autovector

$$X_2(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} V + C_2 e^{\lambda t} (W + tV)$$

Resolviendo

$$(A - \lambda I) W = V$$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{\lambda t} V_1 + C_2 e^{\lambda t} (W_1 + t V_1)$$ es solución de (1)

Explica el caso:

$$x'' - 2x' + x = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Soluciones

$$x_1(t) = e^t$$

$$x_2(t) = t \cdot e^t$$

$$x_2'(t) = e^t + t e^t = (t+1) e^t$$

$$x_2''(t) = e^t + (t+1) e^t = (t+2) e^t$$

$$x_2'' - 2x' + x = e^t (t + 2 - 2t - 2 + t) = 0$$

Metodo de variación de constantes:

$$x'' + a x' + b x = f(x)$$

Buscar $C_1(t)$, $C_2(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

con $\{x_1, x_2\}$ Solución del homogéneo.

Idea para resolver

- Problema

$$x'' + a x' + b x = f(x) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

- Proponemos

$x(t)$ en base a la "pinta" de f

ej: Ver intuitivamente

operador diferencial

$$D(x) = x'' + 3x' + x = t^2$$

Propongo una familia de soluciones

$$X(t) = a + bt + ct^2$$

grado de x

derivo

$$x'(t) = b + 2tc$$

$$x''(t) = 2c$$

$$2c + 3b + 6tc + a + bt + ct^2 = t^2$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ 6 + b = 0 \\ 2 + 3b + a = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$x'' - 3x' + 2x = f(t)$$

Base $\{e^t, e^{2t}\}$ del homogéneo

$$x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$$

Propongo

$$x(t) = A e^{3t}$$

→ Pero en el caso

$$x'' - 3x' + 2x = e^{2t}$$

← es la misma sol.! !

Propondría

$$x(t) = (at + b) \cdot e^{2t}$$

→ y en el caso

$$x'' - 2x' + x = e^t \text{ ó } t \cdot e^t$$

con base

$$\{e^t, t \cdot e^t\}$$

← no puedo usar la de antes

Propongo

$$x(t) = (c\,t^2 + at + b) \cdot e^{2t}$$

2° Parcial

- 1 de 1° orden
  Bernoulli, $z = \frac{y}{x}$
- Problema geométrico
- exacta
- Orden 2
- sistema
- diagrama de fase

→ Caso

$$x'' + x = \sin(2t)$$

$$\lambda^2 + 1 \rightarrow \{\cos t, \sin t\}$$

hom

Prop

$$x(t) = \alpha \cdot \cos(2t) + \beta \sin(2t)$$