

Ecuaciones Exactas

Vamos a estudiar expresiones del tipo

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

con $M, N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de tipo C^1

← así como está,
no es un objeto
conocido

Nos permitimos manipular (divido por dx)

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0 \quad \leftarrow \text{Eq dif bien definida!}$$

Suponiendo que una relación funcional

$$\boxed{y = y(x)} \quad \leftarrow \text{Queremos}$$

Vemos que

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

será una forma de escribir la Eq. dif de arriba

Supongamos además que

$\exists F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} /$ de Clase C^2

$$\nabla F = (M, N), \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (F(x, y(x))) = 0$$

qué
hace eso?

F es constante sobre la curva

$$y = y(x)$$

Regla de
la Cadena

$$F(x, y(x)) = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Las soluciones de (1) y (2) están

dadas en forma Implícita por

la ecuación:

$$F(x, y) = C$$

Obs:

$$\text{Si } \nabla F = (M, N)$$

$$M_y = F_{xy} = F_{yx} = N_x$$

Esto funcionará como test siempre que se cumple que

Def

Una ecuación del tipo

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

se dice EXACTA si

$$\exists F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^2 /$$

$$\nabla F = (M, N)$$

Teorema

Sean $M, N, M_y, N_x : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
continuas,

Ω simplemente conexo

vale que:

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \iff M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

Ej:

$$1) e^y \cdot dx + (x \cdot e^y + 2y) dy = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Recordar que esto pide soluciones de} \\ e^y + (x \cdot e^y + 2y) \cdot y' = 0 \end{array} \right)$$

Es exacta?

$$M(x,y) = e^y \Rightarrow M_y = e^y$$

$$N(x,y) = x \cdot e^y + 2y \Rightarrow N_x = e^y$$

$$M_y = N_x \checkmark$$

¡! es exacta.

Buscamos $\exists F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} /$

$$\nabla F = (M, N)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^y \Rightarrow F(x,y) = x \cdot e^y + h(y)$$

Ahora

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x \cdot e^y + h'(y) = x \cdot e^y + 2y$$

$$\Rightarrow F(x,y) = x \cdot e^y + y^2 \quad \left[+ C \right. \\ \left. \text{(pero abajo se va)} \right]$$

Las soluciones son las curvas de nivel

Sol:

$$x \cdot e^y + y^2 = C \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejercicio de la práctica

Todas las  $(0,0)$

$$x + y \cdot y' = 0$$

se puede ver que es exacta

$$F(x,y) = \boxed{x + y \cdot y'} \quad \text{Se quita.}$$

no se, borró

2)

$$\cos(x)\sin(x) - xy^2 + y(1-x^2)y' = 0$$

$$M(x,y) = \cos(x)\sin(x) - xy^2 \Rightarrow M_y = -2xy$$

$$N(x,y) = y(1-x^2) \Rightarrow N_x = -2xy$$

} ✓

⇒ es exacta!

Buscar $F / \nabla F(M, N)$

↓
comprobar

Soluciones

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

3) ejemplo de no exacta!

$$y dx + (x^2 y - x) dy = 0$$

$$M(x,y) = y \Rightarrow M_y = 1$$

$$N(x,y) = x^2 y - x \Rightarrow N_x = 2xy - 1$$

} ✗

no es exacta!

Truque 

Multiplicar por algo

uso

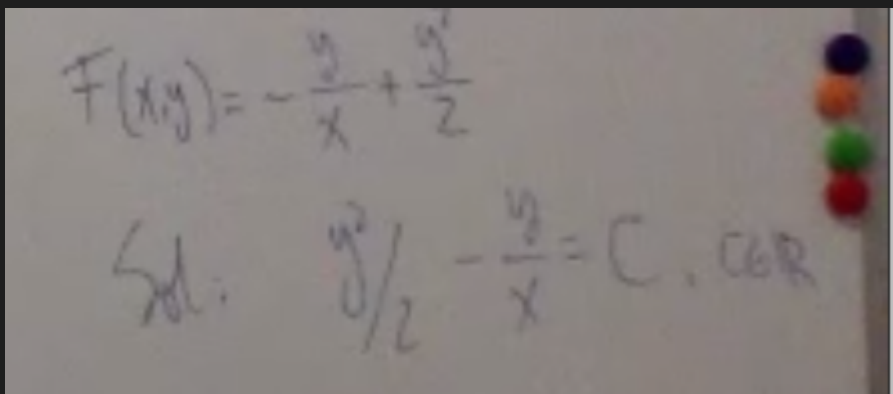
$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ ← Factor integrante

$$\mu \cdot M dx + \mu \cdot N dy = 0$$

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M}(x,y) = \frac{y}{x^2} &\Rightarrow \tilde{M}_y = \frac{1}{x^2} \\ N(x,y) = y - \frac{1}{x} &\Rightarrow \tilde{N}_x = \frac{1}{x^2} \end{aligned} \right\} \checkmark$$

es exacto!



Handwritten solution on a whiteboard:

$$F(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$$
$$\text{Sol: } \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = C, C \in \mathbb{R}$$

Ideas para encontrar Factor Integrante

Ecuación

$$M dx + N dy = 0$$

Queremos hallar $\mu(x,y)$ /

$$\mu M dx + \mu \cdot N \cdot dy = 0 \quad \text{sea exacta}$$

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

Como esto es muy complicado y general:

Hago una suposición Grande!

$$\text{supongo } \mu = \mu(x) \quad (\text{no depende de } y)$$

\Rightarrow desaparece μ_y

$$\Rightarrow \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\mu (M_y - N_x) = \mu_x N$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

↑
solo depende
de x

↑
solo debe depender de x!

Sirve para dos cosas:

Test y Método

- Test: Si $\frac{M_y - N_x}{N}$ depende sólo de x,

entonces:



- Método



MÉTODO: integrarnos para hallar μ .

Análogamente: Si $\mu = \mu(y)$

$$\mu_y M = \mu (N_x - M_y)$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$$

Ejemplo

$$(2x^2 + y) dx + (x^2 y - x) dy = 0$$

$$M_y = 1$$

} no es exacto!

$$N_x = 2xy - 1$$

Probamos si $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x(xy - 1)} = \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)}$$

$$= -\frac{2}{x} \quad \checkmark$$

// solo depende de x!

$$\frac{\mu_x}{\mu} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{factor integrante}$$

Ecuación queda: ↓

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$$

$$F(x, y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$$

Sol

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Otra alternativa

o Supongo estructura del factor integrante
(lo den de dato)

$$\text{Supongo } \mu(x, y) = g(x \cdot y) \quad \begin{matrix} \swarrow \text{prod.} \\ \end{matrix} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ej $g(t) = t^2 + 1$

$$\mu(x, y) = (xy)^2 + 1$$

Fin //