

Teorema de Green:

$F = (P, Q)$ campo \mathcal{C}^1 definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y \mathcal{C} una curva en \mathbb{R}^2 acuada, simple, orientada positivamente y diferenciable a todos que encierra una región $D \subseteq \Omega$ de tipo III. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}^+} P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Int. de Campo sobre
Curva

Integral sobre región "plana" D

$$= \int_{\mathcal{C}^+} F ds = \int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

Cálculo de áreas

Teorema:

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale el Teorema de Green y \mathcal{C}^+ su frontera orientada positivamente. Entonces,

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}^+} -y dx + x dy.$$

Observación:

Para calcular áreas, podemos usar Green con cualquier campo $F = (P, Q)$ / $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sea constante.

debe ser constante

Rotor

Formas vectoriales del Teorema de Green.

Definición: Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en \mathbb{R}^3 . El **rotor de F** es el campo vectorial definido como:

$$\text{rot}(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Fórmula

$$\text{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

Notación

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \text{rot}(F) = \nabla \times F$$

↑ producto vectorial.

Rotor es calar

Si:

$$\nabla \times F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

puedo escribirlo como

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Proposición:

Sea F un campo \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^3 que es un campo gradiente, ie: $\exists f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^2 / F = \nabla f$. Entonces, $\nabla \times F = (0,0,0)$

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Obs:

Contrareciproco:

Si $\nabla \times F \neq \vec{0} \Rightarrow F$ no es Campo Gradiente

Definición: Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en \mathbb{R}^3 .

La divergencia de F se define como:

$$\text{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Notación

$$\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle$$

Producto interno

$$= \nabla \cdot F$$

$E_n \mathbb{R}^2$

• Si $F = (P, Q)$ campo en \mathbb{R}^2

$$\Rightarrow \operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Proposición:

Sea F un campo vectorial de clase \mathcal{C}^2 definido en \mathbb{R}^3 . Entonces,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

las derivadas cruzadas se anulan

Teorema: (forma vectorial del Teorema de Green)

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y sea $F = (P, Q)$ un campo \mathcal{C}^1 . Entonces,

$$\iint_R \operatorname{rot}(F) = \iint_R \nabla \times F \cdot (0, 0, 1) \, dS = \int_{\partial R^+} (P, Q) \, ds.$$

$$\text{rot}(F) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Por qué?
puedo pasar de
 $F \in \mathbb{R}^2$ a $\nabla \times F \in \mathbb{R}^3$

Teorema: (de la divergencia en el plano)

Sea $R \subseteq \mathbb{R}^2$ una región donde vale Green y
Sea η la normal exterior a ∂R . Si $F = (P, Q)$
es un campo vectorial \mathcal{C}^1 , entonces

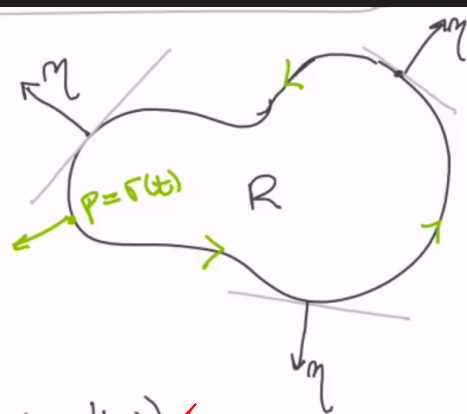
$$\int_{\partial R} F \cdot \eta \, ds = \iint_R \text{div}(F) \, dx \, dy$$

Otro campo: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
Campo normal al borde de la curva: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
} $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Dem: Sea $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
una parametrización de
 ∂R , $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ que
orienta ∂R positivamente

$$\Rightarrow \text{si } p = \sigma(t), \quad \eta(p) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\sigma'(t)\|}$$

es la normal exterior.



Sale de que

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

