Marte Marzo 02

# Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Verano 2021

## Práctica 5: Ecuaciones diferenciales de primer orden

**Ejercicio 1.** Para cada una de las ecuaciones diferenciales que siguen, encontrar la solución general y la solución particular que satisfaga la condición dada:

a) $x' - 2tx = t, \quad x(1) = 0,$ b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

c) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = 1,$ d) $x' = \dfrac{1+x}{1-t^2}, \quad x(0) = 1,$

e) $x' - x^{1/3} = 0, \quad x(0) = 0,$ f) $x' = \dfrac{1+x}{1+t}, \quad x(0) = -1.$

En todos los casos dar el intervalo maximal de existencia de las soluciones y decidir si son únicas. En los casos en que el intervalo maximal de existencia no es la recta real, analizar cuál es la posible causa.

a) $x' - 2tx = t \quad ; \quad x(1) = 0$

$$x' = t + 2tx$$

$$x' = t(1 + 2x)$$

$$\frac{x'}{1+2x} = t$$

$$\int \frac{x'}{1+2x}\, dx = \int t\, dt$$

CA:

$\frac{1}{2} \cdot \ln(|1+2x|) \Rightarrow$ derivo $\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x'}{1+2x} = \frac{x'}{1+2x}$

$$\int \frac{x'}{1+2x}\,dx = \int t\,dt$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|1+2x|\right) = \frac{t^2}{2} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left(|1+2x|\right) = t^2 + 2C$$

$$e^{\square} = e^{\square}$$

$$|1+2x| = e^{t^2}\cdot \underbrace{e^{2C}}_{0 < e^{2C} < +\infty}$$

$$|1+2x| = e^{t^2}\cdot K \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

$$1+2x = \begin{cases} e^{t^2}\cdot K \\ -e^{t^2}\cdot K \end{cases}$$

$$2x = \begin{cases} e^{t^2}\cdot K - 1 \\ -e^{t^2}\cdot K - 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \left(e^{t^2}\cdot K - 1\right)\cdot \frac{1}{2} & \text{I} \\ \left(-e^{t^2}\cdot K - 1\right)\cdot \frac{1}{2} & \text{II} \end{cases}$$

Uso dato

$$x(1) = 0$$

evalúo en (I)

$$\left(e^{t^2} \cdot k - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \Big|_{t=1} = 0$$

$$\frac{e \cdot k}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$e^k = 1$$

$$k = 0$$

evalúo en (II)

$$\left(-e^{t^2} \cdot k - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \Big|_{t=1} = 0$$

$$-e \cdot k - 1 = 0$$

$$e \cdot k = -1$$

$$k = -e^{-1}$$

Preguntar si vale un $k < 0$ cuando antes no los incluía.

Presento eq:

(I) $x = -\frac{1}{2}$ ✗ con $t = 1$, $x \neq 0$

(II) $x = \frac{-e^{t^2}}{2} \cdot k - \frac{1}{2}$ $\quad k = -e^{-1}$

$x = \frac{e^{t^2-1}}{2} - \frac{1}{2}$ ✓ con $t = 1 \Rightarrow x = 0$

Sol:

$$\boxed{x = \frac{e^{t^2-1}}{2} - \frac{1}{2}}$$

derivo:

$x' = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2-1} \cdot (2t) + 0$

$x' = t \cdot e^{t^2-1}$

Datos

a) $x' - 2tx = t \quad ; \quad x(1) = 0$

$t \cdot e^{t^2-1} - 2tx = t$ $\quad t \neq 0 \quad$ Pregunta!

$e^{t^2-1} - 2x = 1$

$2x = e^{t^2-1} - 1$

$$x = \frac{1}{2} e^{t^2-1} - \frac{1}{2} \quad //$$

con $t \in$ ?

otra) Qué es sol particular acá?

Porque ya despejó C

b) $x' = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(1) = 0,$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{x'}{1+x^2}$$

$$\int \frac{x'}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

CA

$$\frac{1}{2}\ln\left(|1+x^2|\right) \overset{\text{deriv}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot 2x'$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(|1+x^2|\right) = \arctan(t) + C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left(|1+x^2|\right) = 2.\arctan(t) + 2.C$$

elevo $e^{\cdots}$ $= e^{\cdots}$

$$|1+x^2| = e^{2\arctan(t)} \cdot \underbrace{e^{2C}}_{>0}$$

como $(1+x^2) \geq 0$

$$1+x^2 = e^{2.\arctan t} . K \qquad K \in (0, +\infty)$$

$$x^2 = e^{2.\arctan t} . K - 1$$

$$|x| = \sqrt{e^{2.\arctan t} . K - 1}$$

Uso dato

$$x(1) = 0$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{e^{2.\arctan t} . K - 1} & \text{I} \\ -\sqrt{e^{2.\arctan t} . K - 1} & \text{II} \end{cases}$$

evalúo $t = 1$

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{I} \quad \sqrt{e^{2.\arctan t} . K - 1}\,\Big|_{t=1} = \sqrt{e^{\pi/2} . K - 1} = 0$$

$$e^{\pi/2} . K - 1 = 0$$

$$e^{\pi/2} . K = 1$$

$$K = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$K = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

II es igual con $K = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Vuelvo

$$X = \sqrt{e^{2.\arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}$$

$$e^{2.\arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \geq 1$$

$$e^{2.\arctan t - \frac{\pi}{2}} \geq 1$$

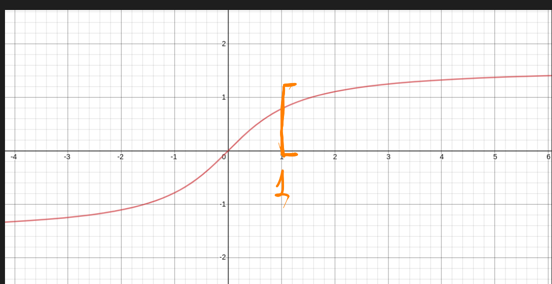
log

$$2.\arctan t - \frac{\pi}{2} \geq 0$$

$$2\arctan t \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan t \geq \frac{\pi}{4}$$

$$t \geq 1$$




Sol:

$$X = \sqrt{e^{2.\arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}$$

con $t \in [1, +\infty)$

Pregunta: Vale también:

$$x = -\sqrt{e^{2 \cdot \arctan t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} - 1} \quad ?$$

**Ejercicio 4.** Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas de grado cero y resuelva:

(a) $tx' = x + 2t\exp(-x/t)$ (b) $txx' = 2x^2 - t^2$ (c) $x' = \frac{x+t}{t}$, $x(1) = 0$

# Ecuaciones Homogéneas

$f(t, x)$ es homogénea de grado $n$ si:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n \cdot f(t, x) \quad \forall \lambda \neq 0, \forall (t, x)$$

a) $tx' = x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}$

$$x' = f(t, x) = \frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\cancel{\lambda}\left(x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}\right)}{\cancel{\lambda} \cdot t}$$

$$= \lambda^0 \left(\frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t}\right)$$ ✓ es de grado 0

Si $x'$ es homogénea de grado 0

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

$$x = y \cdot t$$

$$x' = y' \cdot t + y$$

$$x' = f(t, x) = \frac{x + 2t \cdot e^{-\frac{x}{t}}}{t}$$

si $\lambda = \frac{1}{t}$

$$f\left(\frac{t}{t}, \frac{x}{t}\right) = f(1, y) = \frac{y + 2 \cdot e^{-y}}{1}$$

$$= y + 2 \cdot e^{-y}$$

$$x' = y' \cdot t + y = y + 2e^{-y}$$

$$y' t = y + 2e^{-y} - y$$

$$y' = \frac{\cancel{y} + 2e^{-y} - \cancel{y}}{t}$$

$$\frac{y'}{2e^{-y}} = \frac{1}{t}$$

Integro

$$\int \frac{y'}{2e^{-y}}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{y' \cdot e^{y}}{2}\,dy = \ln t + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot e^{y} = \ln t + \tilde{c} \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$e^{y} = 2 \ln t + 2\tilde{c}$$

$$y = \ln\left(2 \cdot \ln t + 2 \cdot \tilde{c}\right)$$

$$y = \ln\left(2 \cdot \ln t + k\right)$$

con $k \in \mathbb{R}$ / $2\ln t + k > 0$

$k > -2\ln t$

$y = \frac{x}{t}$

$$\boxed{\text{Sol} \quad x = t \cdot \ln\left(2 \cdot \ln t + k\right)}$$

(b) $txx' = 2x^2 - t^2$

$$x' = f(t,x) = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

$$f(\lambda t, \lambda x) = \frac{\lambda^2 (x^2 - t^2)}{\lambda^2 \, t . x} \quad \checkmark \quad \text{es homog. de grado } 0$$

Puedo usar $y = \frac{x}{t}$

$$\Rightarrow \quad x = y . t$$

$$x' = y' . t + y$$

Como:

$$x' = f(t,x) = \frac{2x^2 - t^2}{tx}$$

$$\Rightarrow \quad y' . t + y \overset{\lambda = \frac{1}{t}}{=} f(1, y) = \frac{2 . y^2 - 1^2}{1 . y}$$

$$= \frac{2y^2 - 1}{y}$$

$$y' . t + y = \frac{2y^2 - 1}{y}$$

$$y' \cdot t = \frac{2y^2 - 1}{y} - y$$

$$y' \cdot t = \frac{2y^2 - 1 - y^2}{y}$$

$$= \frac{y^2 - 1}{y}$$

$$t = \frac{y^2 - 1}{y} \cdot \frac{1}{y'}$$

$$\frac{y' \cdot y}{y^2 - 1} = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{y' \cdot y}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{t} dt$$

CA

$$\frac{1}{2} \ln(|y^2 - 1|) \xrightarrow{\text{derivo}} \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 - 1} \cdot 2y \cdot y'$$

$$\frac{1}{2} \ln(|y^2 - 1|) = \ln t + c \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

$$|y^2 - 1| = e^{2\ln t} \cdot e^{c}$$

$$|y^2 - 1| = t^2 \cdot K \qquad K \geq 0,\ K \in \mathbb{R}$$

$$y^2 - 1 = \begin{cases} t^2 \cdot K & \text{I} \\ -t^2 \cdot K & \text{II} \end{cases}$$

I $\quad y^2 = t^2 . K + 1$

$$|y| = \sqrt{t^2 k + 1} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{maximal}$$

II $\quad y^2 = -t^2 . k + 1$

$$|y| = \sqrt{-t^2 k + 1} \qquad \forall t \,/\, t^2 k \leq 1$$

$$t^2 \leq \frac{1}{k}$$

Por int. maximal elijo I

Sigo con I

$$|y| = \sqrt{t^2 k + 1} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{t^2 k + 1} \\ -\sqrt{t^2 . k + 1} \end{cases} \quad ?$$

Reemp

$$y = \frac{x}{t}$$

$$\frac{x}{t} = \sqrt{t^2 k + 1}$$

$$x = \sqrt{t^2 \cdot k + 1} \cdot t \quad // \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

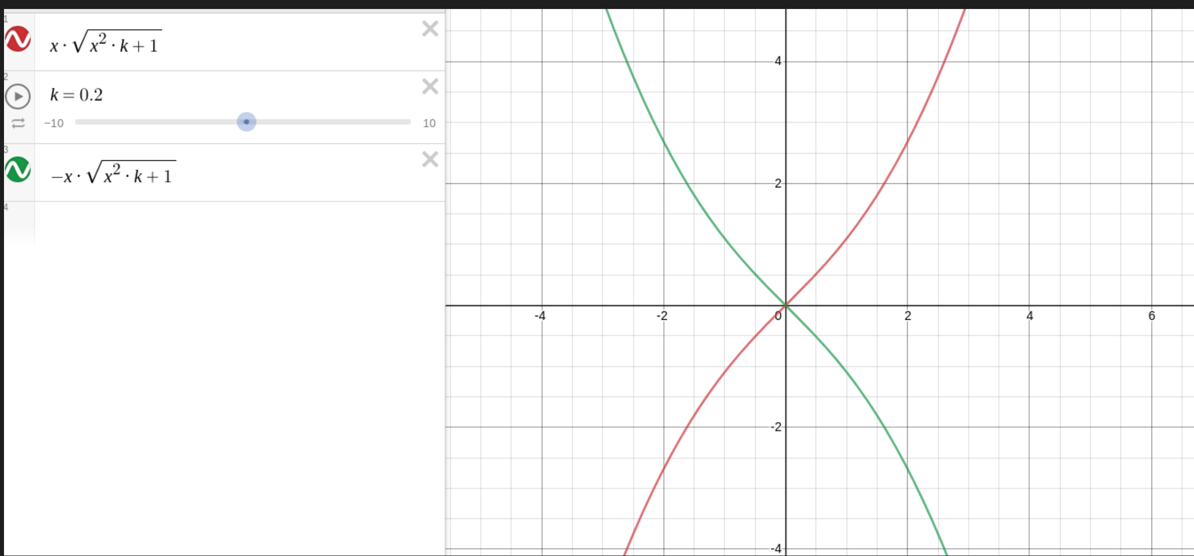
Podría haber usado $-\sqrt{t^2 \cdot k + 1}$ ?

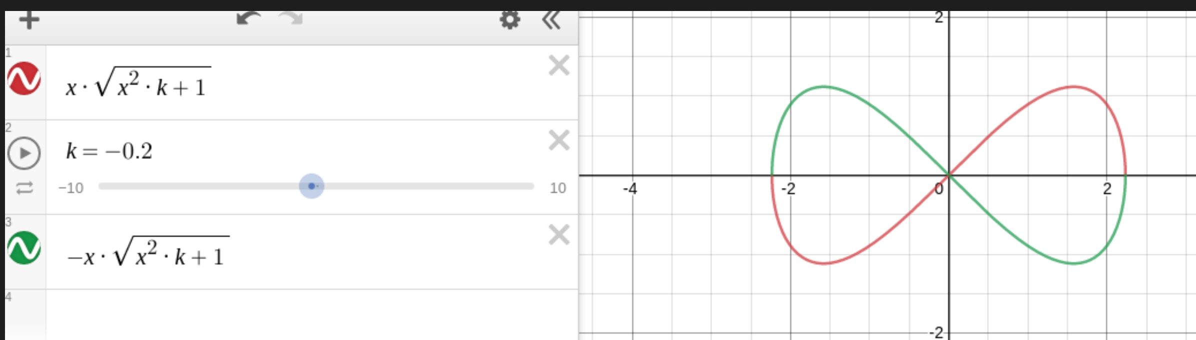
Claro! (Preguntó a Esteban)

Sol

una familia de soluciones $\rightarrow \quad x = t\sqrt{t^2 \cdot k + 1}\,, \quad t \in \mathbb{R}$

otra familia de soluciones $\rightarrow \quad x = -t\sqrt{t^2 \cdot k + 1}\,, \quad t \in \mathbb{R}$



**Ejercicio 5.** Demuestre que la sustitución $y = at + bx + c$ cambia $x' = f(at + bx + c)$ en una ecuación con variables separables y aplique este método para resolver las ecuaciones siguientes:

(a) $x' = (x + t)^2$ (b) $x' = \operatorname{sen}^2(t - x + 1)$

1

a) $x' = x^2 + 2tx + t^2 = \tilde{f}(x,t)$ ?

$y = at + bx + c$

derivo $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$

$y' = a + bx'$

despejo $x'$

$$x' = \frac{y' - a}{b}$$

Junto todo

$$\rightarrow x' = \overbrace{x^2 + 2tx + t^2}^{(x+t)^2} = \frac{y' - a}{b}$$

$$y' = a + b\underbrace{(x + t)^2}$$

$$f(at + bx + c) = f(y)$$

veo que

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

o sea que $y = x + t$

$$\Rightarrow \quad y' = \underbrace{1}_{a} + \underbrace{1}_{b} \cdot y$$

$$y' = 1 + y$$

**Obs!**

$$\frac{y'}{(1+y)} = 1 \qquad \text{con } (1+y) \neq 0$$

$$\Big[\ln\left(|1+y|\right)\Big]' = \frac{1}{1+y} \cdot y'$$

**Ejercicio 6.**

($a$) Si $ae \neq bd$ demuestre que pueden elegirse constantes $h, k$ de modo que las sustituciones $t = s-h$, $x = y - k$ reducen la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at+bx+c}{dt+ex+f}\right)$$

a una ecuación homogénea.

($b$) Resuelva las ecuaciones:

i) $x' = \dfrac{2x-t+4}{x+t-1}$ ii) $x' = \dfrac{x+t+4}{t-x-6}$

iii) $x' = \dfrac{x+t+4}{x+t-6}$, $x(0) = 2$. ¿Se satisface $ae \neq bd$ en este caso?

$$\underbrace{A}\, X = b$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd \overset{\text{si}}{=} 0 \Rightarrow \underline{\text{no}} \text{ inv.}$$

Mercurio Mar 3/21

**Ejercicio 7.** Resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

(b) $\cos x \cos^2 y\, dx - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y\, dy = 0$

(c) $(3x^2 - y^2)\, dy - 2xy\, dx = 0$

(d) $x\, dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\, dx$

(e) $2(x+y) \operatorname{sen} y\, dx + \big(2(x+y)\operatorname{sen} y + \cos y\big)\, dy = 0$

(f) $3y\, dx + x\, dy = 0$

(g) $\big(1 - y(x+y)\tan(xy)\big)\, dx + \big(1 - x(x+y)\tan(xy)\big)\, dy = 0.$

a) $(y - x^3)\, dx + (x + y^3)\, dy = 0$

divido por dx

$$(y - x^3)\frac{dx}{dx} + (x + y^3)\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$(y - x^3) + (x + y^3)\, y' = 0$$

$$\exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^2 \;/$$

$$\nabla F = (M, N)$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

donde

$$\underbrace{(y - x^3)}_{M = \frac{\partial F}{\partial x}} dx + \underbrace{(x + y^3)}_{N = \frac{\partial F}{\partial y}} dy = 0$$

$$M(x,y) = y - x^3 \xRightarrow{\text{derivo}} M_y(x,y) = 1$$

$$N(x,y) = x + y^3 \qquad N_x(\,) = 1$$

✓ es exacta!

Busco F

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = y - x^3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x + y^3 \end{cases}$$

- Integro $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ wrt x

$$\int y - x^3 \, dx = xy - \frac{x^4}{4} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\int x + y^3 \, dy = xy + \frac{y^4}{4} + \gamma(x)$$

Junto ambas

$$F(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + C \quad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

Solución

$$F_{(x,y)} = C$$

$$xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} = C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$

(b) $\cos x \cos^2 y \, dx - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y \, dy = 0$

$$M = \cos x \cos^2 y \qquad\qquad M_y = 2\cos x \cdot \cos y \cdot (-\sin y)$$

$$N = -2 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y \quad \Rightarrow \quad N_x = -2 \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y$$

✓ es exacta!

$$\Rightarrow \exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F \in C^2 \,/$$

$$\nabla F = (\underbrace{M}_{\frac{\partial F}{\partial x}}, \underbrace{N}_{\frac{\partial F}{\partial y}})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = \cos x \cos^2 y \qquad \text{I}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = -2 \sin x \cdot \sin y \cdot \cos y \qquad \text{II}$$

Integro (I) wrt $x$

$$F_{(x,y)} = \sin x \cdot \cos^2 y + \varphi(y)$$

(II) wrt $y$

$$F(x,y) = -2 \cdot \sin x \int \sin y \cdot \cos y \, dy + \gamma(x)$$

$$\underbrace{\begin{aligned} u &= \sin y \\ du &= \cos y \cdot dy \end{aligned}}_{\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C}$$

$$(\cos^2 y)' = 2 \cdot \cos y \cdot (-\sin y)$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 y + \gamma(x)$$

$$F(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y + \gamma(x)$$

Juntando ambas

$$F(x,y) = \sin x \cdot \cos^2 y$$

$\therefore$ como (b) es exacta y $F$ es $C^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Sol (b)} \\ \sin x \cdot \cos^2 y = C \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \end{array}}$

(c) $(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$