Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Segundo cuatrimestre de 2020

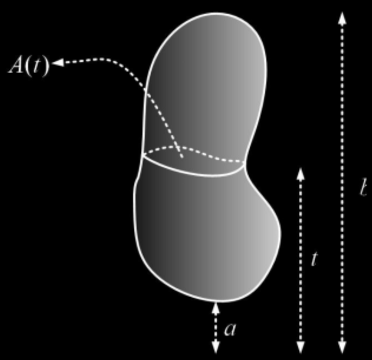
Práctica 0: Repaso de integración y cambio de variables

1. Principio de Cavalieri

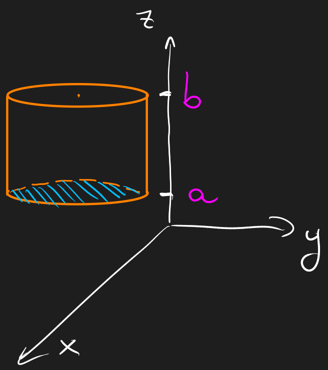
Considere un cuerpo que ocupa una región en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = b$. Entonces el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^b A(t)\, dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenida al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 1. Calcular el volumen de una región cilindrica, utilizando el Principio de Cavalieri. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula *superficie de la base por altura.*



$x\Big|_a^b$

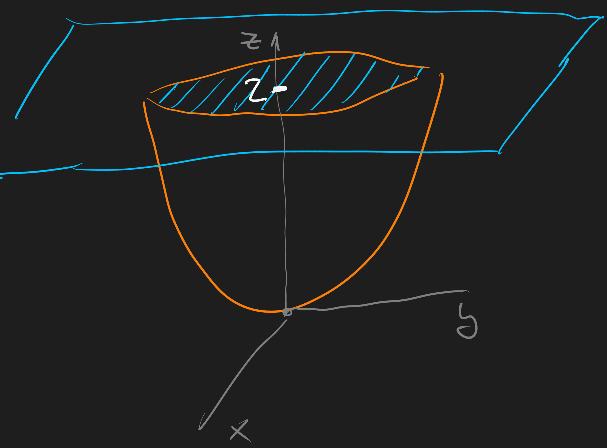
$$A = \int_{z=a}^{z=b} \pi \cdot r^2 \cdot dz = \pi \cdot r^2 \cdot \int_a^b 1 \cdot dz$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot (b - a)$$

Si $h = b - a$

$$\Rightarrow \boxed{A = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

Ejercicio 2. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$, utilizando el Principio de Cavalieri.



$$V = \int_0^2 \pi \cdot r^2 \cdot dz$$

$S: z = 2$

$$\Rightarrow z = x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$r = \sqrt{z} \quad \begin{cases} 0 \leq r(z) \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

$$V = \int_0^2 \pi \cdot (\sqrt{z})^2 \, dz$$

$$= \int_0^2 \pi \cdot |z| \, dz$$

$z \geq 0$
pues
$z = x^2 + y^2 \geq 0$

$$= \pi \int_0^2 z \, dz =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \pi \cdot \frac{2^2}{2} = 2\pi$$

$$\boxed{V = 2\pi}$$

2. Teorema de Fubini

Ejercicio 3. Sea R el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y \, dA$

(b) $\iint_R x \cos(xy) \, dA$

a) $\displaystyle\int_{y=0}^{1} \int_{x=-1}^{1} x^2 \cdot y \, dx \, dy =$

$\displaystyle = \int_{y=0}^{1} y \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} dy =$

$\displaystyle = \int_{y=0}^{1} y \cdot \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) dy$

$\displaystyle = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$\boxed{A = \frac{1}{3}}$

b) $\displaystyle\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=-1}^{1} x \cdot \cos(x \cdot y) \, dx\right) dy =$

$v = x \cdot y$

$dv = y \cdot dx \quad \frac{d}{dx}$

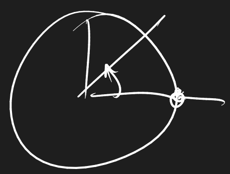
$\displaystyle\int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} x \cdot \cos(x \cdot y) \, dy\right) dx =$

$v = x \cdot y$

$dv = x \cdot dy \quad \frac{d}{dy}$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{v=0}^{v=x} \cos(v)\cdot dv\right)dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1}\left(\sin(v)\Big|_{0}^{x}\right)dx$$

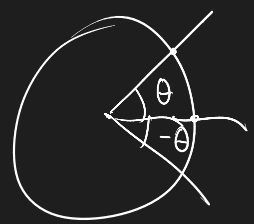


$$= \int_{x=-1}^{1}\left(\sin x - \overbrace{\sin 0}^{=0}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sin x\, dx$$

$$= -\cos x\Big|_{-1}^{1} = -\cos 1 + \cos(-1)$$

$$B = \cos(-1) - \cos 1$$



Pero!

$$\boxed{B = 0}$$

Pues

$\cos -x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4. Sea R el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x,y)\,dA$ cuando $F(x,y)$ está dada por

(a) $F(x,y) = f(x)g(y)$

(b) $F(x,y) = f(x) + g(y)$

a) $\int_y \int_x F(x,y) = \int_c^d \int_a^b f(x).\, g(y)\, dy\, dx$

$$= \int_c^d f(x)\cdot\left(\int_a^b g(y)\cdot dy\right) dx$$

b) $\iint F\, dA = \cancel{\int_y g(y)\, dy + \int_x f(x).\, dx}$ Mal!

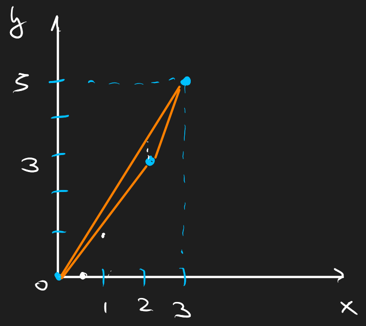
$$= \int_{y} \int_{x=a}^{b} \left(f(x) + g(y) \right) dx \cdot dy$$

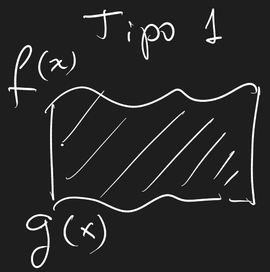
$$= \int_{y=c}^{d} \left(g(y) \cdot (b-a) + \int_{a}^{b} f(x)\, dx \right) dy$$

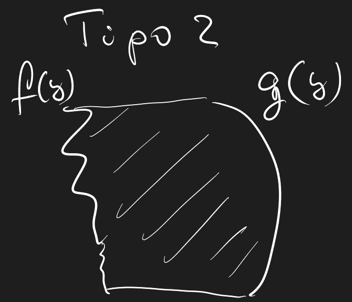
$$\boxed{= (d-c) \cdot \int_{a}^{b} f(x)\, dx + (b-a) \int_{c}^{d} g(y)}$$

3. Descripción de regiones

Ejercicio 5. Sea T el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$ y $(3,5)$. Describirlo como una región de tipo 1, y como una de tipo 2. Hallar su área.







- Segmento sup:

$$y_s = a \cdot x$$

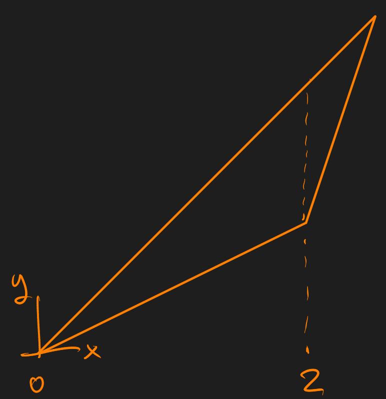
$$a = \frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3}$$

$$y_s = \frac{5}{3} \cdot x$$

- Seg. inferior izq:

$$y = \frac{3}{2} x$$

- Seg inf der:



$$y = \left(\frac{5-3}{3-2} \right) \cdot x - 1$$

$$\text{Área}_{\text{Tipo I}} = \int_{x=0}^{2} \int_{y=\frac{3}{2}x}^{\frac{5}{3}x} 1\, dy\, dx + \int_{x=2}^{3} \int_{y=2x-1}^{\frac{5}{3}x} 1\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{5}{3}x - \frac{3}{2}x \; dx + \int_2^3 \frac{5}{3}x - (2x-1)\, dx$$

$$= \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x^2 \Big|_0^2 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{2}x^2 + x \Big|_2^3$$

$$= \frac{5}{6}\cdot 4 - \frac{3}{4}\cdot 4 + \left(\frac{5}{6}\cdot 3^2 - 3^2 + 3 - \frac{5}{6}\cdot 4 + 4 - 2\right)$$

$$= \frac{10}{3} - 3 + \frac{15}{2} - 9 - \frac{10}{3} + 4 + 1$$

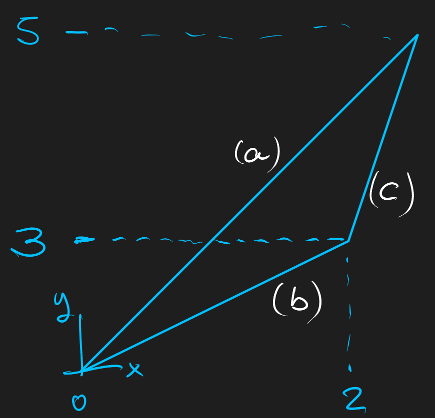
$$= -7 + \frac{15}{2}$$

$$= -\frac{14}{2} + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \;//$$

Para tipo 2 :

(a) $x = \frac{3}{5}y$



(b) $x = \frac{2}{3}y$

(c) $x = \frac{y+1}{2}$

Muevo y de 0 a 3 y de 3 a 5. //

Sáb 30/01/21

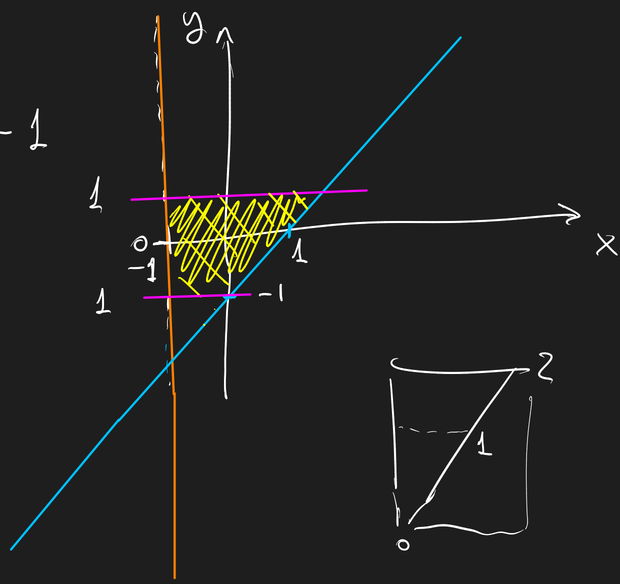
Ejercicio 6. Graficar cada una de las siguientes regiones dadas analíticamente, y calcular el área respectiva.

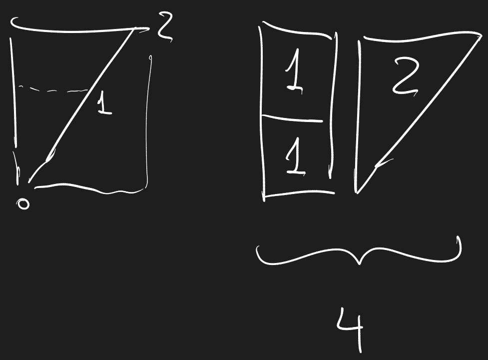
(a) $-1 \leq x \leq 1+y\,;\ -1 \leq y \leq 1$

(b) $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\,;\ 0 \leq x \leq 1$

a) $x \geq -1$

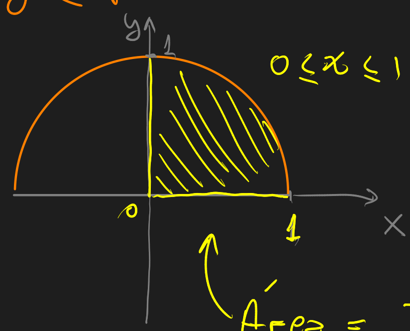
$x \leq 1+y \Rightarrow y \geq x-1$





b) $y \geq 0$

$y \leq \sqrt{1-x^2}$



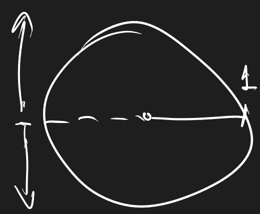
$0 \leq x \leq 1$

$x^2+y^2 \leq 1$

$y^2 \leq 1-x^2$

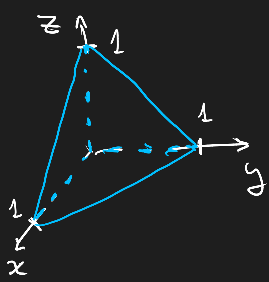
$|y| \leq \sqrt{1-x^2} \to +$

$\to -\sqrt{1-x^2}$



Área $= \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{pues } \frac{\pi \cdot r^2}{4}\right)$

Ejercicio 7. Sea P la pirámide cuyos vértices son $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Describirla analíticamente. Hallar su volumen.

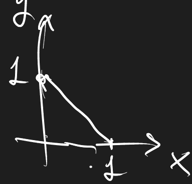


$0 \leq z \leq 1$

$0 \leq y \leq 1-z$

$0 \leq x \leq 1-y-z$ si $= 0$

$y \leq 1-x$



$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - z \\ 0 \leq x \leq 1 - y - z \end{cases}$$

//

$$\int_{z=0}^{1} \int_{y=0}^{1-z} \int_{x=0}^{1-y-z} 1 . dx\, dy\, dz =$$

$$= \int \int (1 - y - z)\, dy\, dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} (1-z) - \frac{y^2}{2}\Big|_{0}^{1-z} - z(1-z) \quad dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} 1 - z - \frac{(1-z)(1-z)}{2} - z + z^2 \quad dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} 1 - 2z + z^2 \quad - \left(\frac{1 - 2z + z^2}{2} \right) \, dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} \frac{1}{2}\, dz - \int_{0}^{1} z\, dz + \int_{0}^{1} \frac{z^2}{2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

//