Iván   Jupiter   Mar 11

Diagramas de Fase

Preg: cómo resolver sistemitas

Contexto:

$$X' = A X \qquad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Obj:

Entender el comportamiento dinámico de las soluciones.

Las soluciones $X : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Recuerdo (ver teórica de hoy):

Dos soluciones o <u>no</u> se cortan
o son <u>idénticas</u>.

no

Separo en casos:

1) Si A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ (en particular $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Casos

a) $\lambda_1 > 0$,
$\lambda_2 < 0$

b) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

c) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

2) A <u>no</u> diagonalizable
(λ raíz doble del característico)

3) A <u>es</u> diagonalizable en $\mathbb{C}$ y <u>no</u> en $\mathbb{R}$
($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

a) $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$

b) $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

c) $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

Ej:

$$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 9 \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -6 \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = C_1 \cdot e^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagrama de fase:

Estoy en el caso 1) a)

Voy a trabajar con las coordenadas en base (ξ_1, ξ_2)

Llamo:

$$X(t) = \overbrace{C_1 \cdot e^{9t}}^{y_1(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \overbrace{C_2 \cdot e^{6t}}^{y_2(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

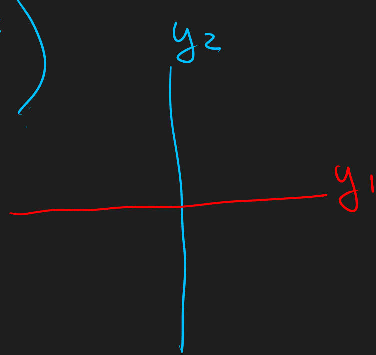
Voy a graficar en base

$$\left(y_1(t) \, , \, y_2(t)\right) = \left(C_1 \cdot e^{9t} \, , \, C_2 \cdot e^{6t}\right)$$

Si:

$$C_2 = 0 \Rightarrow \left(C_1 \cdot e^{9t} \, , \, 0\right)$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow \left(0 \, , \, C_2 \cdot e^{6t}\right)$$



$y_1(t) = C_1 . e^{9t}$ --- Copiar de notas

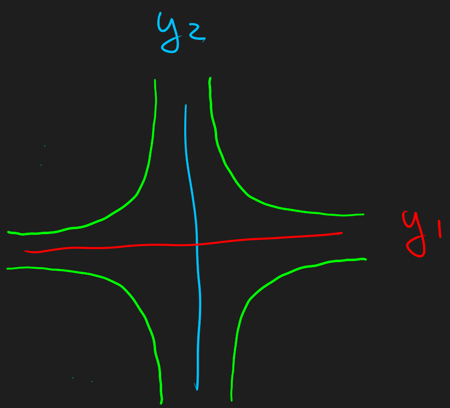
$$\to \left(y_1(t)\right)^{-2/3} = C_1^{-2/3}$$

$y_2(t) =$

$$y(t)^{-2/3} = \frac{C_1^{-2/3}}{C_2} . y_2(t)$$

$$y_2(t) = k . y_1(t)^{-2/3}$$

↑ una es un múltiplo elevada a la $-\frac{2}{3}$



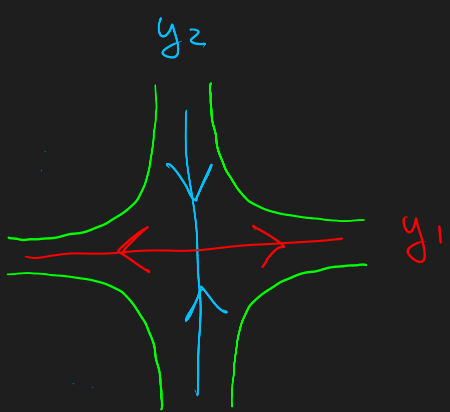
$$y_2(t) = k . y_1(t)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Estas curvas tienen sentido

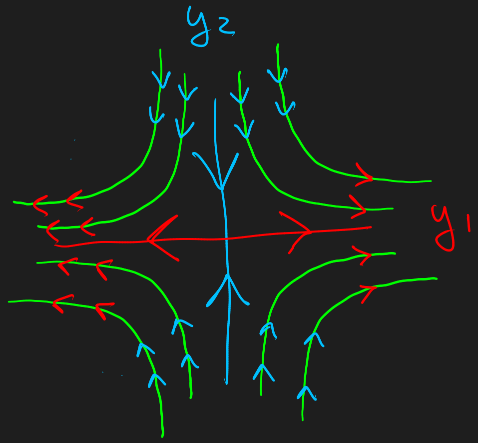
Usando de antes los autovectores

$(C_1 . e^{9t}, 0)$

$(0, C_2 . e^{6t})$



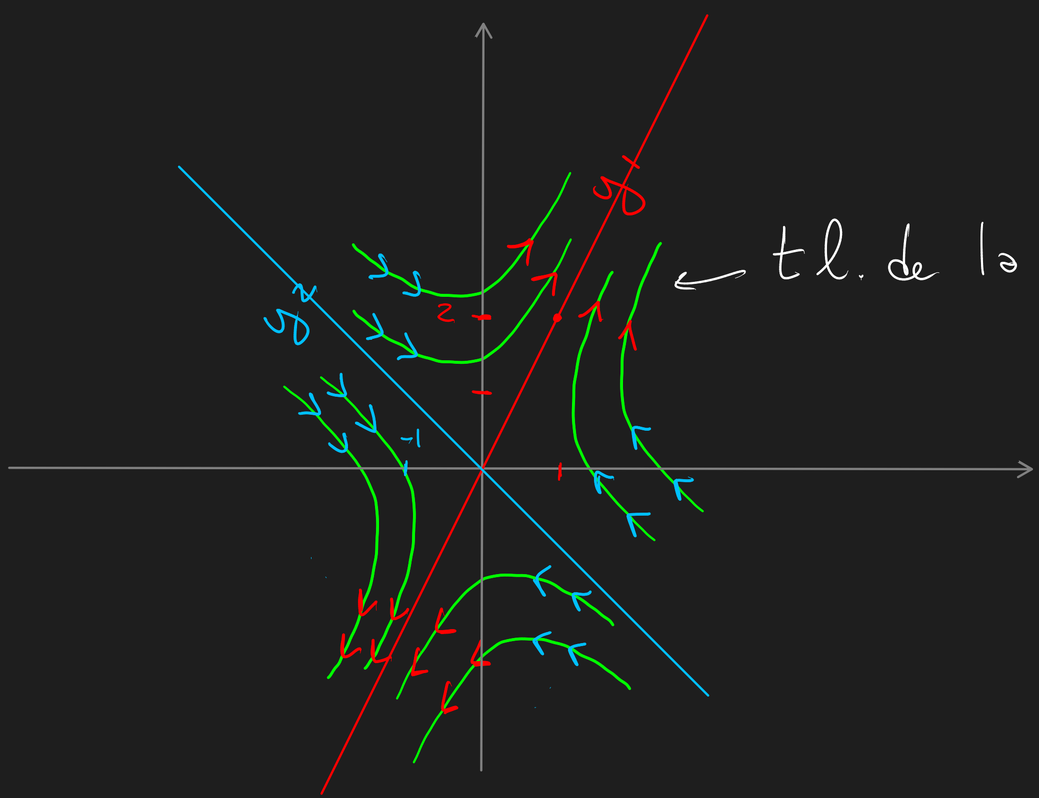
veo qué ocurre cuando $t \to \infty$



EN LA RECTA $y_2=0$, CORRESPONDIENTE A ξ_1, LA DIRECCIÓN DE MOVIMIENTO ES ALEJÁNDOSE DEL ORIGEN ($\lambda_1>0$)
EN $y_1=0$, SE ACERCA AL ORIGEN ($\lambda_2<0$)

Con eso deducimos la dirección de todas las curvas

- Falta construir el diagrama de fases para las soluciones $(X_1(t), X_2(t))$



← t.l. de la original!

LA RECTA $y_2 = 0 \longrightarrow \langle \xi_1 \rangle$

LA RECTA $y_1 = 0 \longrightarrow \langle \xi_2 \rangle$

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \psi$

LAS CURVAS SE ADAPTAN DE ESTAR ENTRE CUADRANTES A ESTAR ENTRE LAS 4 SEMIRRECTAS DADAS POR ψ

LOS SENTIDOS DE MOVIMIENTO SE RESPETAN.

Ej:

$$X' = AX \qquad A = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 11 \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

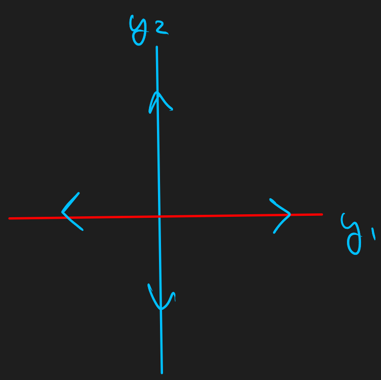
$$X(t) = \underbrace{c_1 \cdot e^{11t}}_{y_1} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{c_2 \cdot e^{t}}_{y_2} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Caso 1) b)

Base → autovalores

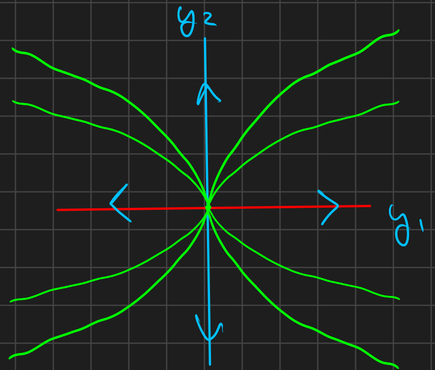
$c_2 = 0 \rightarrow \left(c_1 \cdot e^{11t}, 0 \right)$

$c_1 = 0 \rightarrow \left(0, c_2 e^{t} \right)$



$$\left(y_1(t), y_2(t)\right) \xrightarrow{\text{cuentas}} y_2(t) = k \cdot |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

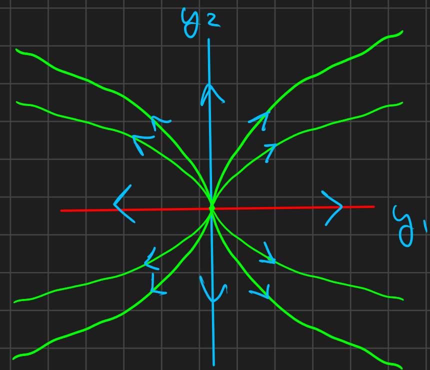
$$\xrightarrow{\text{cuentas}} y_2(t) = k \cdot |y_1|^{\frac{1}{11}}$$



LAS CURVAS SE VEN COMO COSAS CON FORMA PARECIDA A UNA PARÁBOLA (PERO CON OTRA CURVATURA) CONVEXAS HACIA EL LADO QUE CONTIENE AL EJE y_1 (POR SER EL EJE ASOCIADO AL AUTOVALOR DE MAYOR MÓDULO)

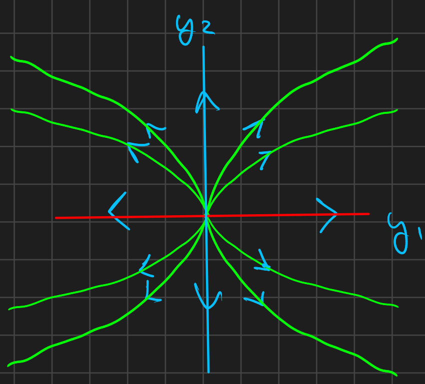
Notar que

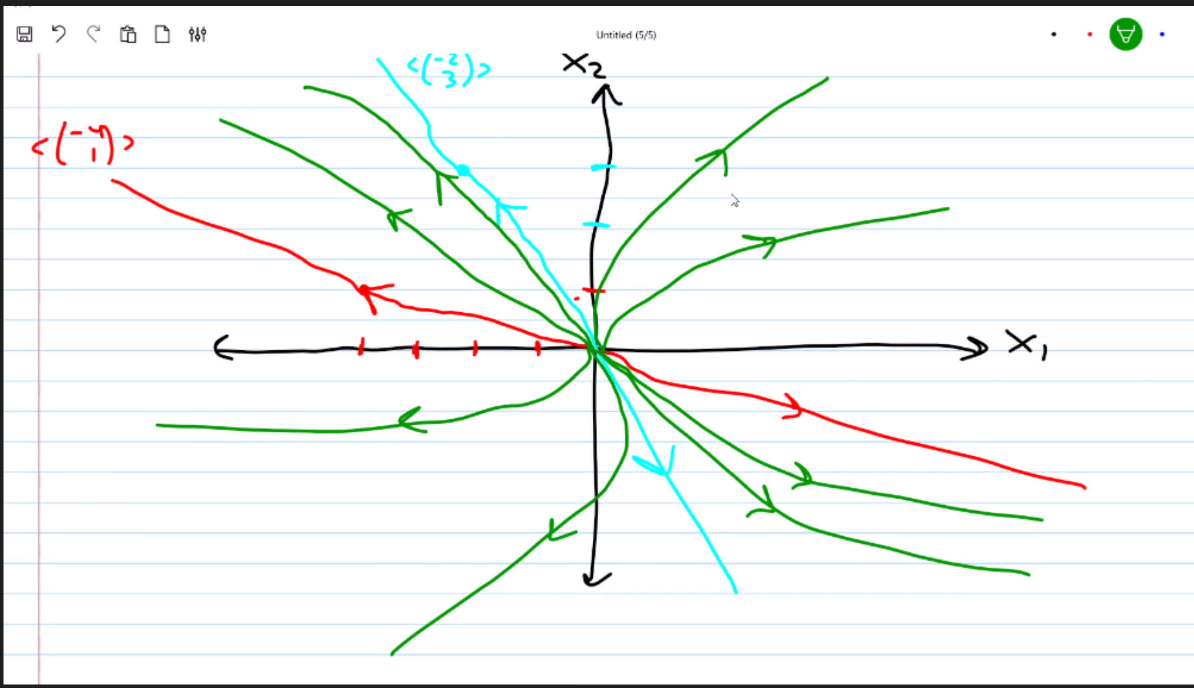
$$(y_1, y_2) = \Big(\underbrace{c_1 e^{11t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}\infty}, \underbrace{c_2 e^{t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}}\Big)$$



Pero el diagrama de fase para las soluciones $(x_1(t), x_2(t))$

Igual que antes

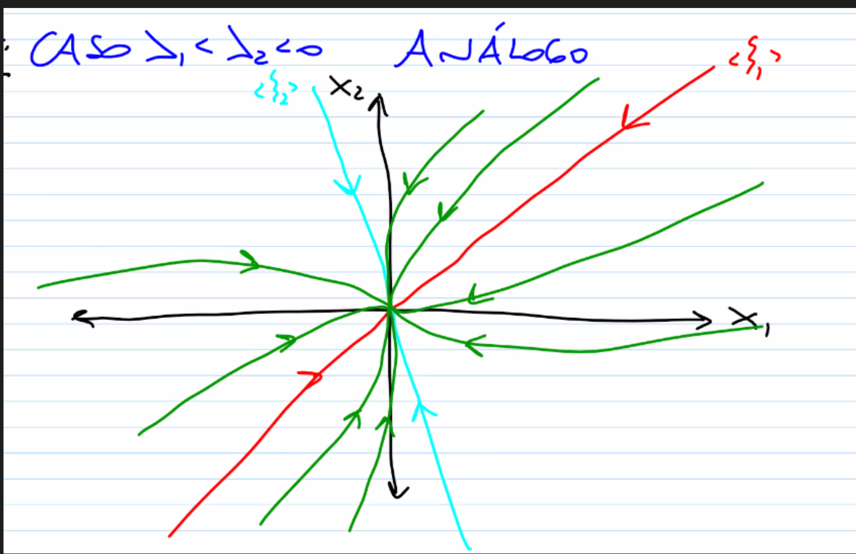




Ej: Caso $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ es análogo

(los signos se cancelan)

Pero todos los sentidos se invierten



Ej: $X' = AX$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$

$\xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ <u>no</u> es diagonalizable

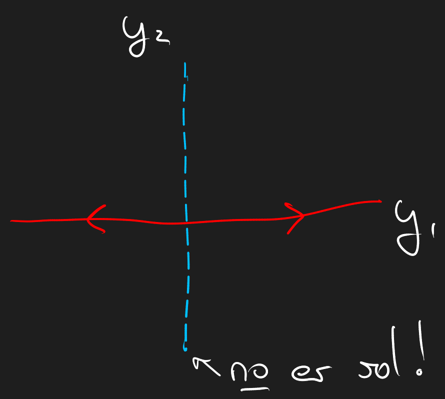
$W = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ es solución de $(A - 3I)W = \xi$

estamos en el caso 2)

Base $= \{ \xi , W \}$

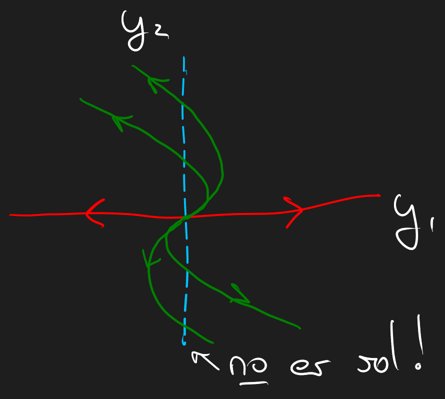
Solo hay una sola recta

$C_2 = 0 \rightarrow$ Recta asociada a $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

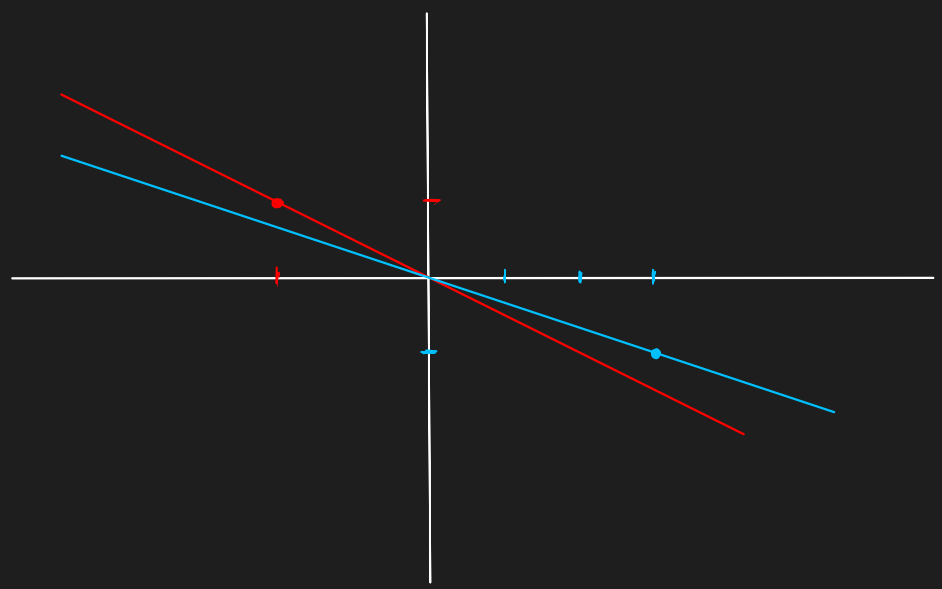


$$y_1 = y_2 \left(K + \frac{1}{\lambda} \ln |y_1| \right)$$

$$y_1 = y_2 \left(k + \frac{1}{3} \ln |y_1| \right)$$



LAS CURVAS CORTAN EL EJE $y_1=0$, PERO NO EL $y_2=0$. SI $\lambda>0$ EL SENTIDO DE MOVIMIENTO ES HACIA AFUERA, SI $\lambda<0$ ES HACIA ADENTRO.



Se crasheó

PARA PASAR AL DIAGRAMA DE FASE CUANDO $\{y_2=0\}$ A $\langle \xi \rangle$ y $\{y_1=0\}$ A $\langle w \rangle$ LOS SENTIDOS DE MOVIMIENTO SE PRESERVAN.