

# CLASE 18 - 9/3 - EC. DIF DE ORDEN SUPERIOR A COEFICIENTES CONSTANTES

## CASO HOMOGÉNEO

### Objetivo:

- Resolver

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0, \quad y^{(0)} = y$$

$a_i \in \mathbb{R}$

### Notar:

→ El conj. de soluciones tiene estructura de **ev.**  
de **dim  $n$**

### Clave:

- Estudiar el polinomio:

$$p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$$

LAS SOLUC. VAN A ESTAR RELACIONADAS CON  
 $y(x) = e^{\lambda x}$  CON  $\lambda$  RÍZ DE  $p$ .

a)  $\lambda \in \mathbb{R}$  ES RÍZ SIMPLE DE  $p$ :

Puedo elegir

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Como elem. de  $B_S$  (Base de Solos).

b)  $\lambda \in \mathbb{R}$  es una raíz de  $p$  de multiplicidad  $k$ :  
puedo elegir:

$$\{e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}\}$$

como elementos de la base  $B_S$

c)  $\lambda \in \mathbb{C}$  es una raíz simple de  $p$ :  
puedo elegir

$$\{\operatorname{Re}(e^{\lambda x}), \operatorname{Im}(e^{\lambda x})\}$$

como elemento de  $B_S$

Ej: Resolver:

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

Me fabrico

$$p(t) = t^2 + 6t + 10 = 0$$

↓ Resolvente

$$\begin{cases} t_1 = -3 + i \\ t_2 = -3 - i \end{cases}$$

La solución "sería" (si no fuera complejo)

$$y(x) = e^{(-3+i)x}$$

$$= e^{-3x} \cdot e^{ix}$$

$$= e^{-3x} (\cos x + i \sin x)$$

$$= \underbrace{e^{-3x} \cos x}_{\text{Re}} + i \underbrace{e^{-3x} \sin x}_{\text{Im}}$$

$$B_S = \{ \overset{\text{Re}}{e^{-3x} \cos x}, \overset{\text{Im}}{e^{-3x} \sin x} \}$$

$$y(x) = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Ej: Resolver

$$y''' - 2y'' - 7y' - 4y = 0$$

Polin.

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 7t - 4 = 0$$

Raíces:  $t_1 = t_2 = -1$  (doble!)  $\begin{cases} \nearrow e^{-x} \\ \searrow x \cdot e^{-x} \end{cases}$   
 $t_3 = 4 \searrow e^{4x}$

$$B_s = \{e^{-x}, x \cdot e^{-x}, e^{4x}\}$$

Caso no homogéneo

Obj:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot y^{(i)} = g(x)$$

Con soluciones de la forma

$$y = y_H + y_P$$

1° Buscamos una base de sol. de la homogénea

$$B_s = \{\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$$

2° Para hallar  $y_P$  aplicamos un método llamado variación de parámetros

Proponemos que la sol. particular es

de la forma:

$$y_P = \sum_{j=1}^n C_j(x) \cdot \phi_j(x)$$

y las funciones  $\{c_j\}_{1 \leq j \leq n}$  verifican:

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

matriz del sistema

Todos ceros

Término indep. d. lind

$W(x)$  es la matriz Wronskiana de las

$$\{\phi_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Con  $n=2$ :

$$W(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{bmatrix}$$

Ej: Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = x^2$$

1°) Hallar sol. de la homog.

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Planteo

$$p(t) = t^2 + 4t + 4$$

$$= (t+2)^2$$

$$B_s = \{ e^{-2x}, x \cdot e^{-2x} \}$$

2°) Vamos a aplicar variación de parámetros para hallar una sol. particular

$$y_p(x) = C_1(x) \cdot e^{-2x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$W(x) \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

armamos  $\rightarrow$

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{-2x} & x \cdot e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{bmatrix}$$

Debo resolver:

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & x \cdot e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Podría hacerlo a mano, pero lo resuelvo con:

## Regla de Cramer

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Armo cociente

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

donde  $A_i$  resulta de reemplazar la columna  $i$  de  $A$  por la columna de soluciones  $\vec{b}$

$A$  debe ser invertible!

Vuelvo:

• Busco  $C_1'$

$$C_1'(x) = \frac{\det(W(x)_1)}{\det(W)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \cdot e^{-2x} \\ x^2 & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x \cdot e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x) \cdot e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

$$= e^{-2x} \begin{vmatrix} 0 & x \\ x^2 & (1-2x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2x} \cdot e^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-x^3}{e^{-2x} \cdot 1}$$

$$= -e^{-2x} \cdot x^3$$

$$= C_1'(x)$$

cuéntar ...

$$C_1(x) = e^{2x} \left( -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \right)$$

Ahora:

•  $C_2(x)$ :

$$C_2'(x) = \det$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & \\ -2e^{-2x} & \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{-2x}}{e^{-2x} \cdot e^{-2x}}$$



$$= x^2 \cdot e^{2x}$$

$$= C_2'(x)$$

$$C_2(x) = e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + 1 \right)$$

ya puedo escribir la sol particular

$$y_p(x) = C_1(x) \cdot e^{-2x} + C_2(x) \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$= e^{2x} \left( -\frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{4} x + \frac{3}{8} \right) \cdot e^{-2x} + e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x + 1 \right) e^{-2x} \cdot x$$

$$= \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{3}{8}$$

Solución :

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{3}{8}}_{\text{Sol Part.}} + \underbrace{C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}}_{\text{Sol. Homog.}} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$