Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (21-10-2021)

Nombre y apellido: Jack

Libreta:

Carrera:

- Este examen resuelto (incluida la hoja de enunciados completada y firmada) debe ser escaneado y subido al campus virtual donde te matriculaste antes de venir.

- Declaro que aprobé los trabajos prácticos de esta materia en el cuatrimestre ...del año ... 2019

1	2	3	4	Nota

1. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ los vectores $(3,2,a)$ y $(5,5,0)$, respectivamente ¿Para que valor de a el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es paralelo a $(1,-1,1)$?

2. Determine los puntos de la superficie S de ecuación $x^2+2y^2+3z^2 = 75$, en los que el plano tangente a S es perpendicular a la recta de ecuaciones paramétricas $x = 1+2t$, $y = 3+8t$ y $z = 2-6t$.

3. Hallar el máximo de la función $f(x,y,z) = 2x-3y+z$ sobre la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2 = \frac{7}{2}$, y decir en que punto o puntos se alcanza. Dar el resultado de manera exacta.

4. Calcule
$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV,$$
donde $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 2 \quad \text{y} \quad -2 \leq z \leq 3\}$.

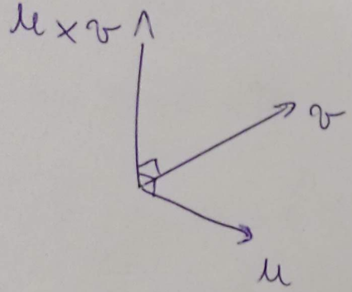
Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

Leandro Carreira 669/18

1) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= i(-5a) - j(-5a) + k(15-10)$

$= (-5a, 5a, 5)$



- Como estamos trabajando con vectores que parten del origen, solo basta encontrar los múltiplos de $\vec{u} \times \vec{v}$ que coinciden con $(1,-1,1)$

Quiero

$\alpha(-5a, 5a, 5) = (1,-1,1) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \begin{cases} -5\alpha . a = 1 \\ 5\alpha . a = -1 \\ 5\alpha = 1 \end{cases}$ misma condición I

$5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$

I $\hookrightarrow a = -1$

Verifico con $a=-1$ en $\vec{u}\times\vec{v}$

$$(-5a, 5a, 5) \overset{\downarrow}{=} (5, -5, 5) = 5\cdot(1, -1, 1) \checkmark$$

Por lo tanto, el a que cumple lo pedido es

$$\boxed{a=-1}$$

//

2) Reescribo la superficie S como sup. de nivel.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 75\}$$

con $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

y su gradiente

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 4y, 6z)$$

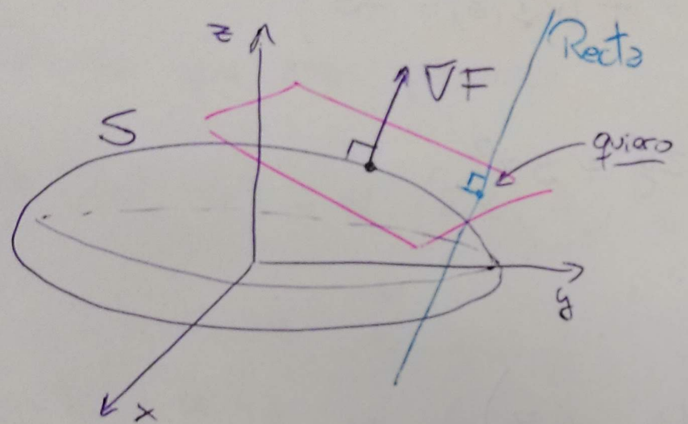
Notar que $\nabla F(x,y,z) = \vec{0} \iff$ CADA componente es cero

Pero S es un elipsoide centrado en el $\vec{0}$, por lo que el $\vec{0}$ no pertenece a S.

$$F(0,0,0) = 0 \neq 75$$

Ahora, como F es un polinomio, es $\mathcal{C}^1$, y como siempre existe una derivada parcial de F distinta a cero (pues $\nabla F \neq \vec{0}\ \forall (x,y,z) \in S$), se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implícita.

Esto me asegura que el gradiente ∇F es siempre perpendicular a S(*), para cada punto de S.



(Gráfico a modo ilustrativo)

(*) Este gradiente es perpendicular al plano tangente a S en cada punto de S.

Voy a buscar que el gradiente sea paralelo a la recta dada.

Reescribo:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+8t \\ z = 2-6t \end{cases} \Rightarrow (1,3,2) + t\cdot\overbrace{(2,8,-6)}^{\text{Vector director}}$$

Leandro Correira 669/18

sigo 2) Vector director de la recta : $(2,8,-6)$

$$\nabla F_{(x,y,z)} = (2x, 4y, 6z)$$

Quiero que sean paralelos

$$\Rightarrow (2,8,-6) = \alpha . (2x, 4y, 6z) \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\star \begin{cases} 2 = \alpha . 2x & \overset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \quad x = \frac{1}{\alpha} \\ 8 = \alpha . 4y & \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\alpha} \\ -6 = \alpha . 6z & = \quad z = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Quiero que sean puntos en S

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 2 . \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 + 3 . \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2 = 75$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{8}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^2} = \frac{12}{\alpha^2} = 75$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{12}{75} = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \frac{2}{5}$$

Volviendo a ⊛

- Si $\alpha = \frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} = 5 \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

- Si $\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -2 \cdot \frac{5}{2} = -5 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Finalmente, los dos puntos sobre S que cumplen lo pedido son:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \left(\frac{5}{2}, 5, -\frac{5}{2}\right) \\ \vec{P}_2 &= \left(-\frac{5}{2}, -5, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}}$$

Verifico:

$F(\vec{P_1}) = 75$

$F(\vec{P_2}) = 75$

//

Leandro Carreira 669/18 Hoja 4/6

3) Como los puntos de la esfera forman un conjunto cerrado y acotado, entonces es compacto.

$\Rightarrow f$ Alcanza máx absoluto en esa región

Llamo $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

Sé $f(x,y,z) = 2x-3y+z$

Como f, g son polinomios $\Rightarrow$ son diferenciables

Además

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = 0 \iff (x,y,z) = \vec{0}$$

Como $\vec{0}$ no pertenece a la esfera (pues es su centro)

$g(\vec{0}) = 0 \neq \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \nabla g(x,y,z) \neq 0$

$\therefore$ Puedo usar Multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) \cdot \lambda \\ \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g(x,y,z)} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Calcul ∇f

$$\nabla f_{(x,y,z)} = (2, -3, 1)$$

$$\begin{cases} 2 = \lambda . 2x & \Rightarrow 1 = \lambda x \\ -3 = \lambda . 2y & \Rightarrow -\frac{3}{2} = \lambda y \\ 1 = \lambda . 2z & \Rightarrow \frac{1}{2} = \lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 0$:

$$\frac{1}{\lambda^2} + \left(-\frac{3}{2.\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = \frac{4}{4\lambda^2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{4+9+1}{4\lambda^2} = \frac{14}{4\lambda^2} = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2} \overset{g(x,y,z) = \frac{7}{2}}{=} \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = +\frac{3}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Sigo 3) • Si $\lambda = 0 \Rightarrow 1 \overset{1=\lambda x}{\overset{\downarrow}{=}} 0$ Abs!

$\therefore \lambda \neq 0$.

Obtuve dos candidatos

$$\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Evalúo:

• $f\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2.1 - 3.\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$= 2 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \boxed{= 7} \leftarrow$ máx

• $f\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2.1 - 3.\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -2 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2}$

$= -7 \leftarrow$ mín

Puedo asegurar que el máximo absoluto de f sobre la esfera se dá en el punto $\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y alcanza el valor 7.

//

4) Uso coordenadas cilíndricas, ya que z aparece en R de manera lineal, sin relacionarse con x e y. (no conviene usar esféricas):

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta & r \in [0, \sqrt{2}] \\ y = r \cdot \sin\theta & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = z & z \in [-2, 3] \end{cases}$$

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-2}^{3} (r^2+z^2) \cdot r \cdot dz\,d\theta\,dr$$

Por Álgebra de integrales puedo separarlas en una suma (para evitar errores de cuenta)

$$= \underbrace{\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-2}^{3} r^3\,dz\,d\theta\,dr}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-2}^{3} r \cdot z^2\,dz\,d\theta\,dr}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = 5 \cdot 2\pi \cdot \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^3\,dr = 5 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{2}\pi \cdot (\sqrt{2})^4 = 10\pi$$

$$\text{II} = 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{z=-2}^{3} r \cdot z^2 \, dz \, dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left[z^3 \right]_{-2}^{3}}_{3^3 - (-2)^3 = 35} dr$$

$$= \frac{70}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\left[r^2 \right]_0^{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{70}{3} \pi$$

Finalmente

$$\text{I} + \text{II} = 10\pi + \frac{70}{3}\pi = \frac{100}{3}\pi$$

Sol

$$\boxed{\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dV = \frac{100}{3}\pi}$$