Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Primer Recuperatorio - Primer Parcial - 10/08/2020

1. (a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la intersección de

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad y = 3z^2$$

(b) Para la función $r(t)$ hallada, encontrar valores t_1 y t_2 tales que $r(t_1) = (2,0,0)$ y $r(t_2) = (0,12,2)$

(c) Calcular el area del paralelogramo de vértices $\vec{0}$, $A = r(t_1)$, $B = r(t_2)$ y $C = A + B$.

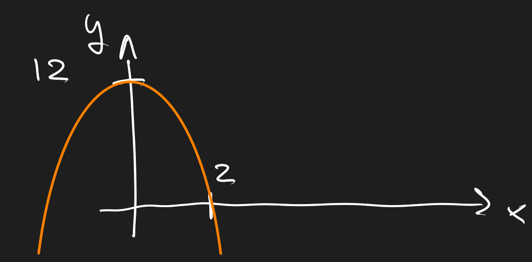
a) Después de pifiarla (abajo)

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 3z^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{y}{3}\right) = 4$$

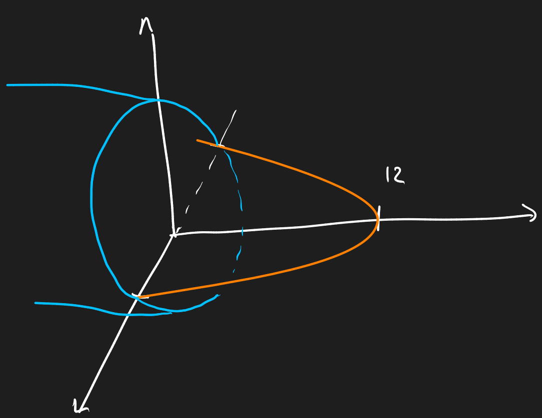
$$y = 12 - 3x^2$$

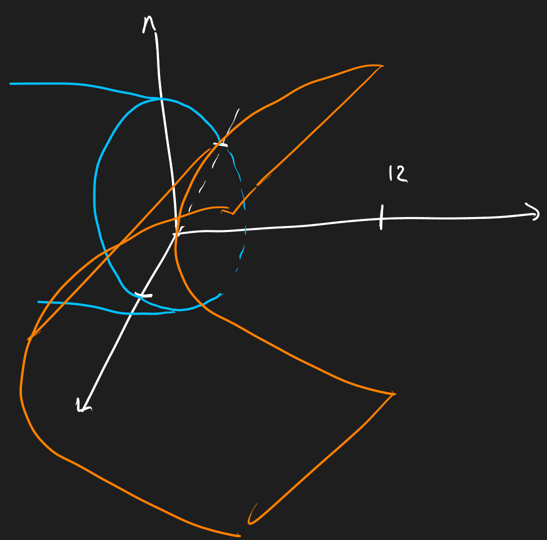
$\mathbb{R}^2$

$(z=0)$



$\mathbb{R}^3$





Parametrizo

$$\sigma(t) = \Big(2\cdot\cos t,\ y\ ,\ \underbrace{2\cdot\sin t}_{z}\Big)$$

$y = 3z^2$

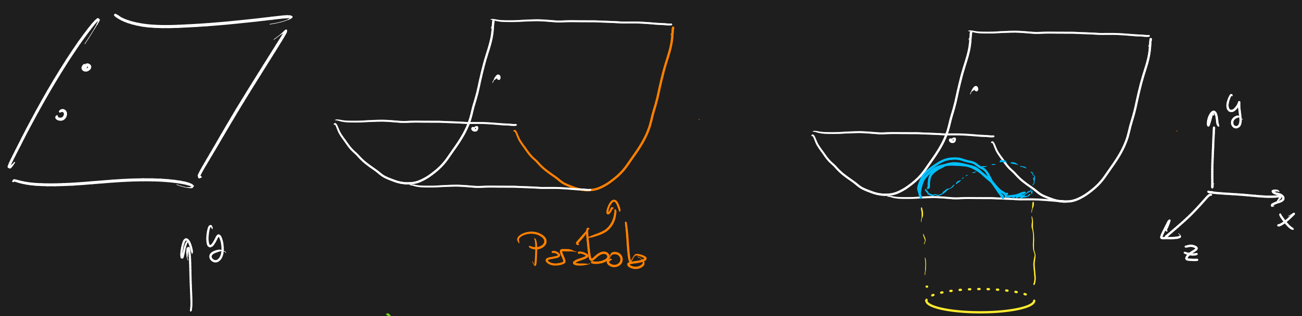
$$\sigma(t) = \left(2\cdot\cos t,\ 12\cdot\sin^2 t\ ,\ 2\cdot\sin t\right)$$

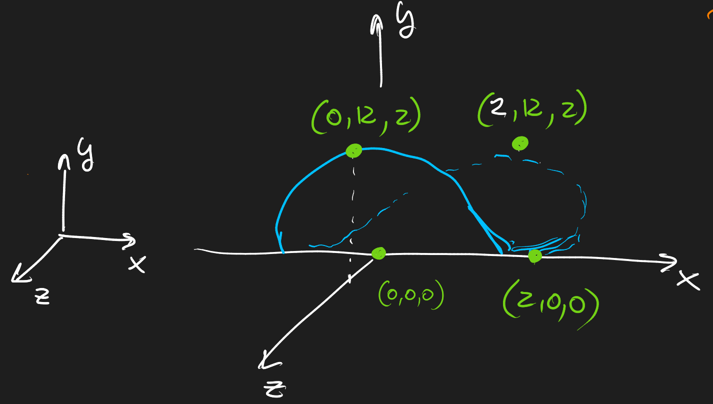
con $t \in [0, 2\pi)$

b) $\sigma(t_1) = (2,0,0) \iff t_1 = 0$

$\sigma(t_2) = (0,12,2) \iff t_2 = \pi$

c) La curva es como recortar un círculo en un papel curvado como parábola





Cómo uso a) y b) para resolver c)?

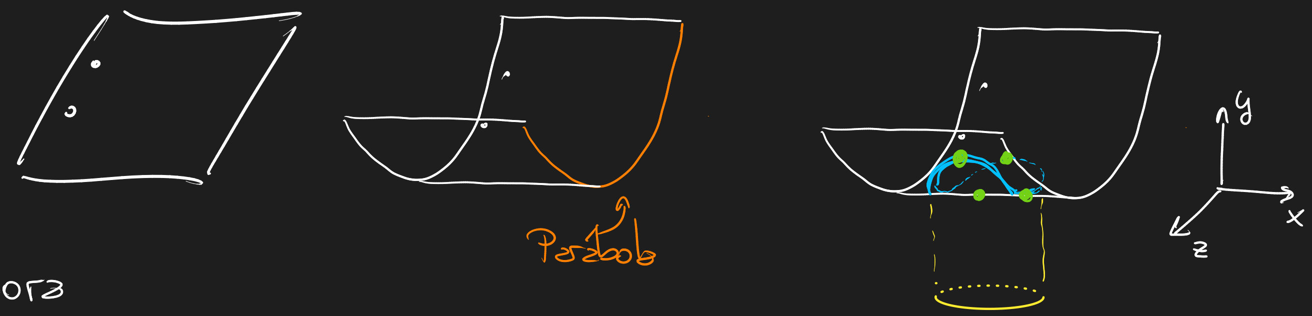
Con b) ya se dónde están los puntos, ni siquiera necesito a) ni el resto del enunciado para tener la información del paralelogramo e el espacio.

Primero, cómo podría calcular el area solo con esto, y

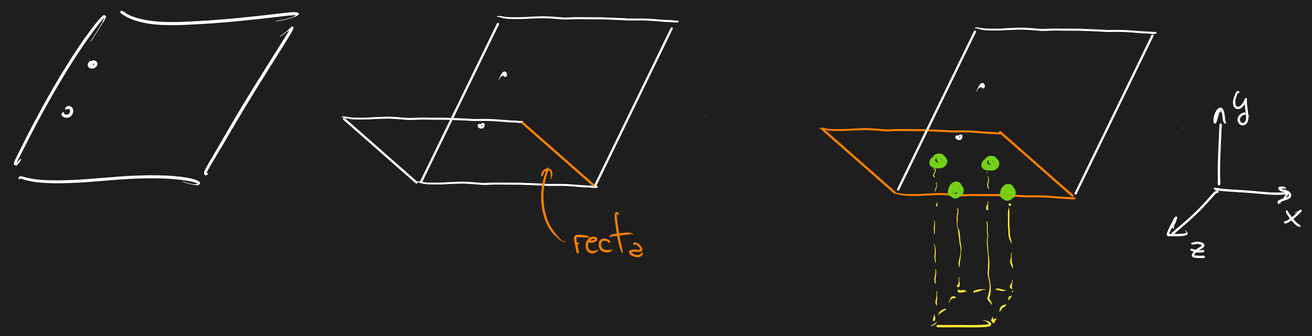
segundo, cómo puedo usar los datos anteriores para hacer más sencilla esta tarea?

Si en vez de $y = 3z^2$ tuviera un plano, éste pasaría por los 4 puntos

Antes

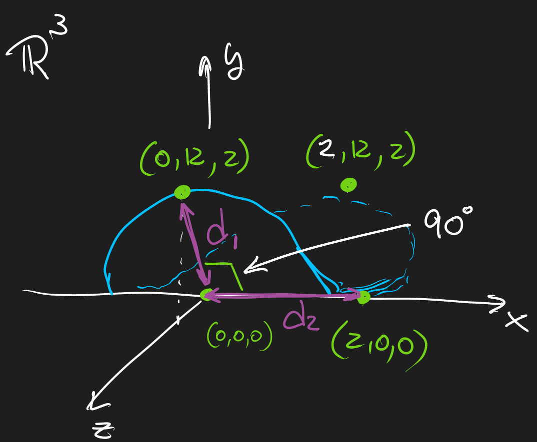


Ahora



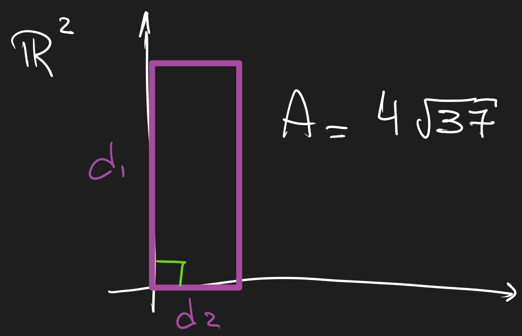
Falta completar. Revisa clases y videos.

Calculo directamente (es clave que sea un paralelogramo)



$$d_1 = \|(0,12,2)\| = 2\sqrt{37} \approx 12{,}17$$

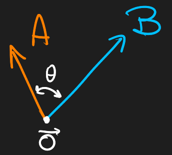
$$d_2 = \|(2,0,0)\| = 2$$



$$A = 4\sqrt{37}$$

Usando producto cruz!

Esto lo vi en el libro Stewart



$\|A \times B\| =$ Área del Paralelogramo que forman

$= \|A\| . \|B\| . \sin\theta$

$\overset{\text{nuestro caso}}{=} 2 \cdot 2\sqrt{37} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$

$= 4\sqrt{37}$

Otra forma:

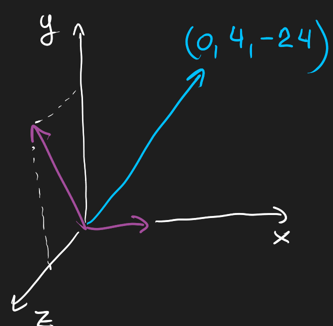
$(0,12,2) \times (2,0,0) =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= i \cdot 0 - j \cdot (-4) + k \cdot (-24)$

$= (0, 4, -24)$

↑ vector perpendicular a los otros dos



$\|(0, 4, -24)\| = 4\sqrt{37} \approx 24{,}33$

Para recordar

$A \times B = \|A\| . \|B\| . \sin\theta$

↳ es sin y no cos pues debe valer para rectángulos, y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$!!

Mal! intento fallido al copiar mal ¡!

1. (a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la intersección de

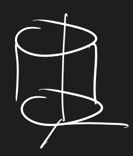
$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad y = 3z^2$$

(b) Para la función $r(t)$ hallada, encontrar valores t_1 y t_2 tales que $r(t_1) = (2,0,0)$ y $r(t_2) = (0,12,2)$

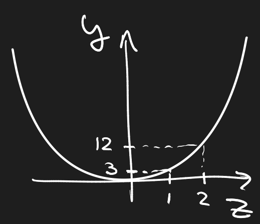
(c) Calcular el area del paralelogramo de vértices $\vec{0}$, $A = r(t_1)$, $B = r(t_2)$ y $C = A + B$.

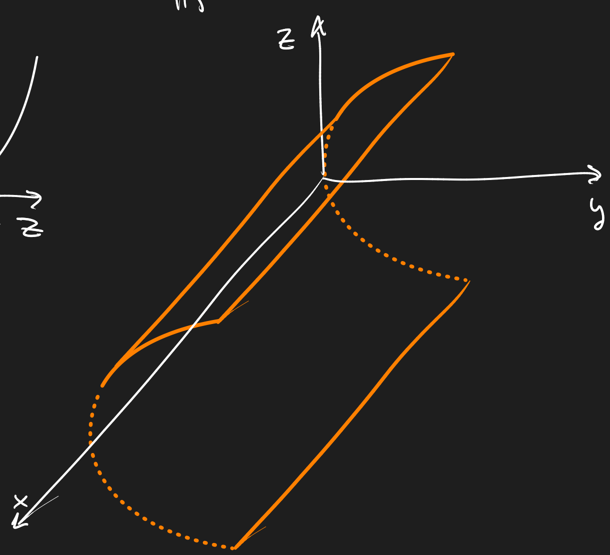
acá me equivoco y arrastro

a) $x^2 + y^2 = 4$ Cilindro



$y = 3z^2$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

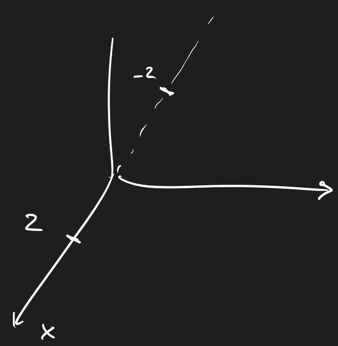




Intersección de superficies

$$x^2 + (3z^2)^2 = 4$$

$$x^2 + 9z^4 = 4$$



• Si $x = 0$

$\Rightarrow z^4 = \frac{4}{9}$

$\underset{z>0}{z} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

• Si $z = 0$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Puedo escribirla como

en xy, se mueve siempre como

$$\sigma(\theta) = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta,\ z)$$

donde $r = 2$ $(x^2+y^2 = 2^2)$

$\theta \in [0, \pi)$ pues $y \geq 0$

$$\sigma(\theta) = (2 \cdot \cos\theta,\ 2 \cdot \sin\theta,\ z)$$

Si reescribo

$$y = 3z^2$$

como

$$z = \pm\sqrt{\frac{y}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin\theta}$$

!

con $\theta \in [0, \pi)$ $\sin\theta$ no puede ser negativo

Defino

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \left(2 \cdot \cos\theta,\ 2 \cdot \sin\theta,\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin\theta}\right) & \theta \in [0, \pi) \\ \left(2 \cdot \cos\theta,\ 2 \cdot \sin\theta,\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin\theta}\right) & \theta \in [0, \pi) \end{cases}$$

Puedo parametrizarlo en una sola pieza?

$$x^2 + 9z^4 = 4$$

$x = r \cdot \cos\theta$ $\quad\theta \in [0, 2\pi)$

$z = r \cdot \sin\theta$ $\quad r = \phi(\theta)$?

$$y = 3 \cdot z^2$$

Sigo con

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \left(2\cdot\cos\theta,\ 2\cdot\sin\theta,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\sin\theta}\right) & \theta\in[0,\pi) \\ \left(2\cdot\cos\theta,\ 2\cdot\sin\theta,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\sin\theta}\right) & \theta\in[0,\pi) \end{cases}$$

quiero

$$\sigma(t_1) = (2,0,0) \iff t_1 = 0$$

$$\sigma(t_2) = (0,12,2) \iff t_2 =$$ No existe sobre la curva, solo sobre $y = 3z^2$

Demo

Todos los puntos de la intersección viven sobre el cilindro.

Pero $(0,12,2)$ no vive sobre el cilindro pues

$$x^2+y^2 = 4$$

$$0^2+12^2 = 4 \quad \text{Abs!}$$

$\therefore$ $(0,12,2) \notin$ a la curva.

Acá me di cuenta que el cilindro es $x^2+z^2=4$ y no $x^2+y^2=4$

2. Calcular el siguiente límite para $a = 0$ y $a = 1$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2x^2y^2 + a\sin(y^2)x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\boxed{a = 0}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

← "norma 6°"

← "norma cubo"

- Si $x = 0 \Rightarrow \lim \to 0 \therefore$ si el lím $\exists \Rightarrow$ debe ser cero

$$\left| \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2}{\|(x,y)\|^3} - 0 \right| \leq \frac{(x-1)^2 \cdot \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3}$$

$$= \underbrace{(x-1)^2}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \cdot \underbrace{\|(x,y)\|}_{\longrightarrow 0} < \delta < \varepsilon$$

Probé que dado ε, si elijo $\delta < \varepsilon$

$\Rightarrow$ el límite existe y es cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2 + \sin(y^2) \cdot x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\left| \frac{\overbrace{(x-1)^2}^{\longrightarrow 1} \cdot x^2 \cdot y^2 + \overbrace{\sin(y^2)}^{\leq y^2} \cdot x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|^4 + \|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^3}$$

Sospecho que no existe

Si $y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot x^2 + \sin(x^2)\cdot x}{\underbrace{(2x^2)}_{2^{3/2}\cdot|x|^3}{}^{3/2}} =$$

$2^{3/2}\cdot|x|^3 \Leftarrow$ Clave este módulo! no ponerlo está MAL!

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(x-1)^2\cdot x^4}{2^{3/2}\cdot|x|^3}}_{\to 0} + \frac{\sin(x^2)\cdot x}{2^{3/2}\cdot|x|^3}$$

$$\underbrace{(x^2)^{3/2}}_{|x|^3} \neq \underbrace{x^{\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}} = x^3}_{x^3}$$

- Las operaciones sobre x son en orden, primero elevo al cuadrado, luego a la 3/2.
- Esto muestra cómo elevar al cuadrado puede hacer perder información, y sucede porque $f(x)=x^2$ NO es inyectiva $f(2) = f(-2) = 4$
- En otras palabras, dado el número 4 como cuadrado de un número, no sabemos si antes fue un 2 o un -2. Es esa la pérdida de información en la operación.

Por eso, asumir la rama positiva está MAL.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^{3/2}} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|}$$

Si veo el límite por izq. y derecha

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2^{3/2}}$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{x} = -\frac{1}{2^{3/2}}$

Como obtuve 2 límites diferentes

$\Rightarrow$ No existe el límite.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3x^3+2x^2y^2-3y^2x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Si existe dar la ecuación del plano tangente a f en $(0,0,f(0,0))$

Puedo ver :

- Continuidad de derivadas parciales $\Rightarrow$ f diferenciable

(no vale la vuelta !)

Sirve si pidiera mostrar que f es diferenciable (en todo (x,y)). Como las derivadas parciales son contínuas fuera del (0,0)* => f es diferenciable en todo (x,y) que no sea el (0,0).

* Son contínuas porque es cociente de polinomios sin problemas fuera del (0,0), aunque hacer esa cuenta es un poco trabajozo.

ó

- por Def :

f es diferenciable en (0,0) sii

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \right)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$

Calculo cada una de las partes del plano

- $f(0,0) \overset{\text{def } f}{=} 0$

Para f_x y f_y, uso definición sobre el punto en cuestión

(no regla de la cadena !)

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-3h^3}{h^2} - 0}{h} = -3$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

- $f_x(0,0) = -3$
- $f_y(0,0) = 0$

Calculo límite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\overbrace{f(0,0)}^{=0} + \overbrace{f_x(0,0)}^{-3} \cdot x + \overbrace{f_y(0,0)}^{0} \cdot y \right)}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) + 3x}{\|(x,y)\|}$$

CA:

$$f(x,y) + 3x = \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x}{x^2+y^2} + 3x$$

$$= \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x + 3x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x + 3x^3 + 3xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Vuelvo a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) + 3x}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}$$

no olvidar!!!

Acoto

$$\left| \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{2\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3} = 2\|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\therefore$ $f(x,y)$ es diferenciable.

Usando epsilon/delta

$$2\|(x,y)\| < 2\delta < \varepsilon$$

$\therefore$ Si $\delta < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f$ es diferenciable

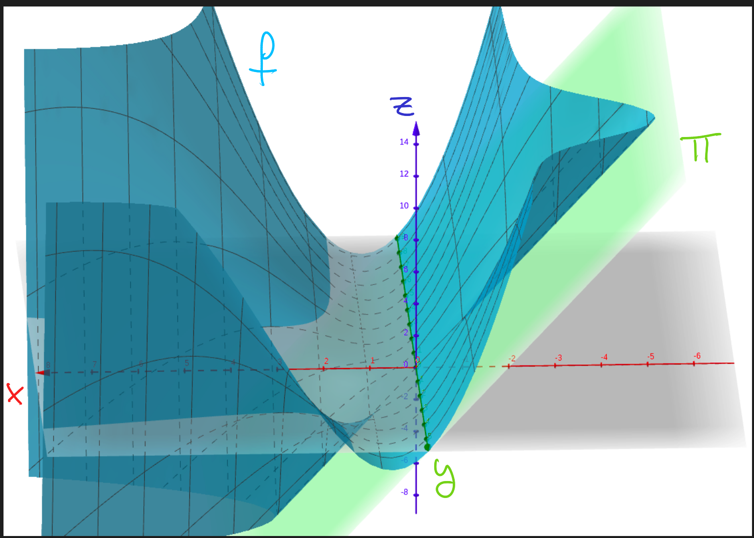
Falta eq. de Plano tangente en $(0,0)$ $=: \Pi_{(0,0)}$

Pero esto es casi inmediato dado que ya lo usamos en la definición de diferenciablidad

$$\Pi_{(0,0)}: \quad z = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{f_x(0,0)}_{-3}(x-0) + \underbrace{f_y(0,0)}_{=0}(y-0)$$

$$\boxed{\Pi_{(0,0)}: \quad z = -3x}$$

Verifico con geogebra
(ésto no vale en el parcial / final !!)



4. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = 3z^2 + e^{xz} - y^2 z$.

(a) Probar que la ecuación $F(x,y,z) = 11$ define de manera implícita una función diferenciable $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$ tal que $f(0,1) = 2$.

(b) Hallar la dirección de más rápido crecimiento de f en $(0,1)$

a) Solo basta verificar las hipótesis (condiciones) del Teo. de la Función Implícita.

$\boxed{0}$ f es de la forma $F(x,y)=0$

$\boxed{1}$ f debe ser $\mathcal{C}^1$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0)

$\boxed{2}$ $f_z \neq 0$ en ese punto. Recordar que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_z(x_0,y_0)}$$

$\Rightarrow \exists\ \phi(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ /

$\boxed{i}$ $\phi(x_0,y_0) = z_0$

$\boxed{ii}$ $f(x,y,\phi(x,y)) = f(x,y,z)$

$\forall (x,y) \in$ un entorno de (x_0,y_0)

$\boxed{iii}$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{f_x(x,y)}{f_z(x,y)}$ $\quad \forall (x,y) \in$ un entorno de (x_0,y_0)

$\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{f_y(x,y)}{f_z(x,y)}$

- F es $\mathcal{C}^1$ en todo (x,y) por ser compo de func. $\mathcal{C}^1$

- $F_z(x,y,z) = 6z + x \cdot e^{xz} - y^2$

$F_z(0,1,z) = 6z - 1 \neq 0 \quad \forall z \neq \frac{1}{6}$

- Además

$F(0,1,z) = 11 = 3z^2 + 1 - z$

$3z^2 - z - 10 = 0 \iff \underbrace{z = 2}_{\text{solo me interesa éste}}$ ó $z = -\frac{5}{3}$

Por Teo. de Func. Imp.

$\exists$ un despeje $\phi(x,y)$ con $\phi(x,y) \in \mathcal{C}^1$ /

$\phi(0,1) = 2$.

b) Dirección de más rápido crecimiento $\equiv \nabla\phi(0,1)$ normalizado

Calculo derivadas parciales, dadas por Teo. F. I.

$$\phi_x(x,y) = \frac{F_x}{F_z} = \frac{\phi \cdot e^{x \cdot \phi(x,y)}}{6 \cdot \underbrace{\phi(x,y)}_{=z} - 1}$$ $\forall (x,y)$ en un entorno del $(0,1)$

$$\phi_x(0,1) = \frac{2 \cdot e^{0 \cdot 2}}{6 \cdot 2 - 1} = \frac{2}{11}$$

$$\phi_y(x,y) = \frac{-2y \cdot \underbrace{\phi(x,y)}_{=2}}{6 \cdot \phi - 1}$$

$$\phi_y(0,1) = \frac{-2 \cdot 2}{12 - 1} = -\frac{4}{11}$$

$$\nabla \phi(0,1) = \left(\frac{2}{11} , -\frac{4}{11} \right)$$

Normalizo

$$\|\nabla \phi(0,1)\| = \frac{2\sqrt{5}}{11}$$

$$\frac{\nabla \phi(0,1)}{\|\nabla \phi(0,1)\|} = \underbrace{\frac{11\sqrt{5}}{10}}_{\|\circ\|^{-1}} \cdot \left(\frac{2}{11} , \frac{-4}{11} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(1 , -2 \right)$$

Dirección de mayor crecimiento

$$\boxed{\frac{\nabla \phi(0,1)}{\|\nabla \phi(0,1)\|} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} , -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}$$