

Recordar:

Param. de Elipse

$$r(\theta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$



cruzados! solo de reemplazar en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} &= 1 \\ \Rightarrow r^2 \cdot \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \cdot b^2} \right)$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

Deriv. direc. en la dirección de  $\mu = (a, b)$  con  $\|\mu\| = 1$

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cdot a, y_0 + h \cdot b) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Además:

Teorema

Si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$

y  $\mu = (a, b)$  con  $\|\mu\| = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{\mu}(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0) \cdot b \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), \mu \rangle \end{aligned}$$

# Propiedad de Polinomio de Taylor de Orden $n$

- Similar al chequeo de diferenciabilidad

↖ P. de Taylor de orden  $n$  en  $(a,b)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - P_n(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|^n} = 0$$

Además :  $f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$

↖ Resto de  $P_n$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{R_n(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|^n} = 0$$

Orden sup. y resto

Hb:  $f \in \mathcal{C}^2$  en un entorno de  $(a,b)$

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = & f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ & + \frac{1}{2!} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \\ & + \frac{1}{1} \cdot f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \end{aligned}$$

Hb:  $f \in \mathcal{C}^3$  en un entorno de  $(a,b)$

$$\begin{aligned} R_2(x,y) = & \frac{1}{3!} \cdot f_{xxx}(c,d)(x-a)^3 + \dots \text{(para } yyy \text{ y } zzz) \\ & + \frac{3}{3!} \cdot f_{xxy}(c,d)(x-a)^2(y-b) + \frac{1}{2} \cdot f_{yyx}(c,d)(x-a)(y-b)^2 \end{aligned}$$

↖ incógnita ↖

con  $(c,d)$  en  $(a,b) \times (x,y)$  (o más específicamente, en  $\mathbb{B}((a,b), |(a-x, b-y)|)$ )

## Derivada direccional

Sea  $v = (a, b)$ ,  $f$  diferenciable,  $\|v\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \left\langle \nabla f(x, y), v \right\rangle$$

$$= \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), (a, b) \right\rangle$$

## Continuidad:

- Acoto  $\swarrow$  candidato  $\geq$  límite

$$|f(x, y) - c| \leq \dots \leq \|(x, y) - (a, b)\| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (a, b)} 0$$

- Contraejemplo con curva:

$$\text{Compongo } f(\sigma(t)) \neq c \quad \swarrow \text{quiero}$$

$\Rightarrow$  Usuales

$$y = mx$$

$$y = x^2$$

$$x = y^2$$

# Diferenciabilidad

↙ P. de Taylor de grado 1 en (a,b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - P_1(x,y)}{\|(x,y) - (a,b)\|} \stackrel{\text{quiero}}{=} 0$$

• Contrarejemplo con curva:

① Compongo  $f(\sigma(t)) \neq c$  ↙ quiero ⇒ Usuales ↗  $y = mx$   
↘  $y = x^2$   
↘  $x = y^2$

Asumiendo diferenciabilidad

Por def

②  $\langle \nabla f, \sigma \rangle \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a \cdot h, y_0 + b \cdot h) - f(x_0, y_0)}{h}$

↖ Ver si f es diferenciable.

(no vale probar  
dif si la  
igualdad vale/vr)

Además

Derivadas parciales continuas  $\Rightarrow f$  diferenciable.

# Teorema de la Función Implícita.

? Reg. "Dirección de mayor crecimiento" es en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  ?  
Plano xy

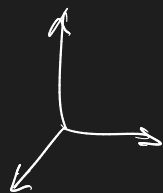
ℋ: •  $f \in \mathcal{C}^1$  en un entorno de  $(x_0, y_0, z_0)$

•  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

$\phi(x, y) = z$  en un entorno de  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\phi_x(x, y) = - \frac{f_x(x_0, y_0, \phi_x(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, \phi_x(x_0, y_0))}$$

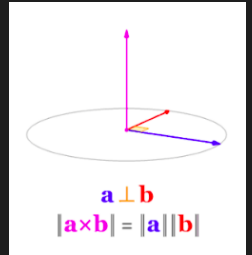
Es fácil!



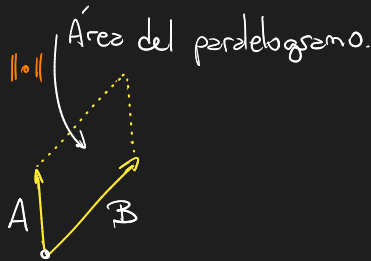
$$\begin{aligned} (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(1) \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Para recordar

$\overbrace{a \text{ y } b}^{\text{a y b}}$   
vector normal unitario



- $A \times B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \theta \cdot n$



$\hookrightarrow$  es sin y no cos pues debe valer para rectángulos, y  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  "

- $A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos \theta$

$\hookrightarrow A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A \perp B$

A partir de 2 rectas  $L_1$  y  $L_2$ ,

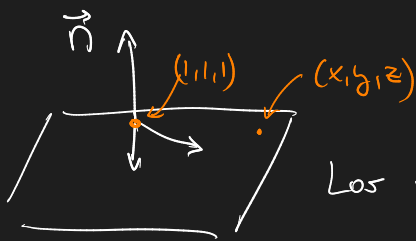
$$L_1 : (1, 1, 1) + t_1 \underbrace{(2, 3, 4)}_{v_1}$$

$$L_2 : (1, 1, 1) + t_2 \underbrace{(0, 1, 0)}_{v_2 \leftarrow \text{vector director}}$$

$$\vec{n} = v_1 \times v_2 \leftarrow \text{normal a } L_1 \text{ y } L_2$$

$E_q$  . del plano

$$\vec{n} \cdot (x, y, z) = \vec{n} \cdot \underbrace{(1, 1, 1)}_{\text{Punto donde intersecan } L_1 \text{ y } L_2}$$



Los vectores del plano son de la pinta

$$(x_0, y_0, z_0) - (x, y, z) = \vec{v}$$

Todos los  $\vec{v}$  son  $\perp$  a  $\vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) = 0$$

en particular, si  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

$$\rightarrow \vec{n} \cdot (1 - x, 1 - y, 1 - z) = 0$$

que por distributividad de prod. int

$$\boxed{\vec{n} \cdot (1, 1, 1) = \vec{n} \cdot (x, y, z)}$$

A partir de dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

↙ Plano

↘ Punto

$$\Pi : \alpha \cdot (\mu_1, \mu_2, \mu_3) + \beta (v_1, v_2, v_3) + \underbrace{(1, 1, 1)}_{(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \cdot \mu_1 + \beta \cdot v_1 + x_0 \\ y = \alpha \cdot \mu_2 + \beta \cdot v_2 + y_0 \\ z = \alpha \cdot \mu_3 + \beta \cdot v_3 + z_0 \end{cases} \leftarrow \text{Despejo } \alpha \text{ y } \beta$$

$$\Rightarrow z - \underbrace{z_0}_{f(x_0, y_0)} = \dots$$

Sea una sup. dada por

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

La reescribo como sup de nivel

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Cálculo grad

$$\nabla F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$$

↑ Perpendicular al plano tangente en cada punto.

Plano Tangente

↙ vector del plano

$$\Pi : \left\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$$

↖ ↗  
Perpendiculares

Relación entre sup. implícita y gráfico

gráfico :  $f(x, y) = z$

sup de nivel :  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$

$$\hookrightarrow \nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$$



El gradiente de  $F$  sup. de nivel es perpendicular al plano tangente a la sup. en el punto, si cumple

las condiciones del **Teo. de la Func. Imp.** que aseguren existe algún despeje en un entorno del punto:

- $F$  debe ser  $\mathcal{C}^1$

- $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$

Extremos:

• Si  $D$  es compacto

Recor dar mencionar!

$\Rightarrow$  Cualquier  $f$  sobre  $D$  alcanza máx y mín absolutos.

Máximo volumen

$$\hookrightarrow \nabla V(x, y, z) = 0$$

$\hookrightarrow$  Evalúo todos los candidatos

$\hookrightarrow$  Lagra

$$\text{Itb: } \left. \begin{array}{l} \cdot f, g \text{ diferenciables} \\ \cdot \nabla g \neq \vec{0} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g \end{array} \right.$$

Si tengo 2 restricciones  $g$  y  $h$

•  $f, g, h$  diferenciables

•  $\nabla g \neq \vec{0}$

•  $\nabla h \neq \vec{0}$

Recor dar!

•  $\nabla g \neq \alpha \cdot \nabla h \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (no múltiplos)

$$\Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

# Campo gradiente

$$F = (P, Q, R)$$

si  $F$  es Conservativo  $\Rightarrow \exists f /$

$$f_x = P$$

$$f_y = Q$$

$$f_z = R$$

Recordar!

Teorema:  $F$  es conservativo  $\Leftrightarrow \text{rot } F = 0$

## Divergencia

$$\text{div } F = P_x + Q_y + R_z$$

## Rotor

$$\text{rot } F = \nabla \times F$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

# Líneas de Flujo de $F$

Trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es  $F$ .

$\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una línea de Flujo de  $F$  si

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

$\therefore$  vectores en un Campo Vectorial son Tangentes a las líneas de flujo.

Si:

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\Rightarrow \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

quero  $F /$

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

elijo

$$F(x, y) = (-y, x) //$$

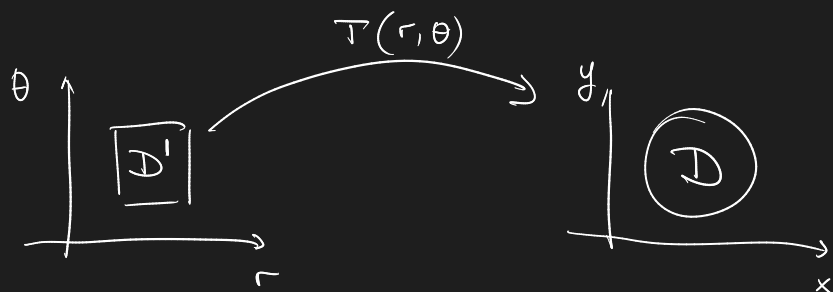
$E = \text{f\'ericas}$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Remember!

$$\text{Jac } T = r^2 \cdot \sin \varphi$$

Change of variables



$$\iint_D f(x, y) \cdot dx dy = \iint_{D'} f(r, \theta) \cdot |\text{Jac } T| \cdot dr d\theta$$

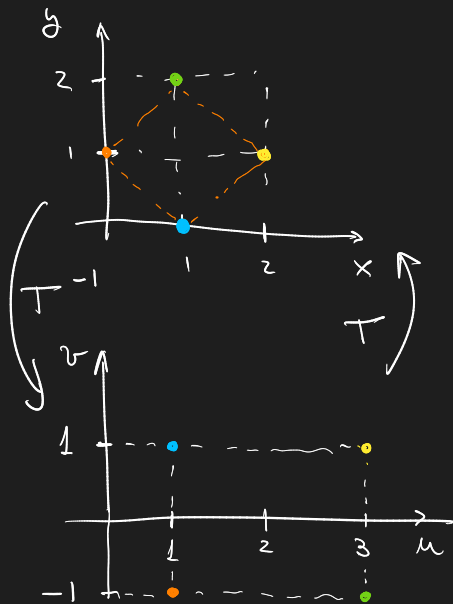
Donde

$$T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$$

$$\text{Jac } T(r, \theta) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Σ:

$$\begin{cases} \mu = x+y \Rightarrow \mu+v = 2x \Rightarrow x = \frac{\mu+v}{2} \\ v = x-y \Rightarrow \mu-v = 2y \Rightarrow y = \frac{\mu-v}{2} \end{cases}$$



$$T(\mu, v) = \left( \frac{\mu+v}{2}, \frac{\mu-v}{2} \right)$$

$$T^{-1}(0, 1) = (1, -1)$$

$$(1, 2) = (3, -1)$$

$$(2, 1) = (3, 1)$$

$$(1, 0) = (1, 1)$$

$$|\det T| = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_R (x+y)^2 \cdot \sin^2(x-y) dx dy = \iint_D \mu^2 \cdot \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} d\mu dv$$

Como  $D$  es un cuadrado de la forma  $\underbrace{[1, 3]}_{\mu} \times \underbrace{[-1, 1]}_v$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mu=1}^3 \int_{v=-1}^1 \underbrace{\mu^2 \cdot \sin^2 v}_{\text{}} d\mu dv$$

Remember!

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2v) \leftarrow$$

# Superficies en $\mathbb{R}^3$

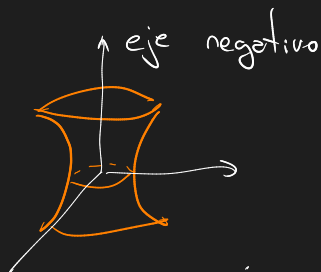
Paraboloides

$$x^2 + y^2 = z$$

"Circunferencias de radio  $\sqrt{z}$ "

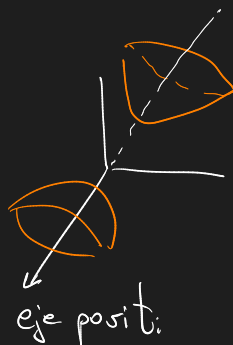


$$x^2 + y^2 - z^2 = 2$$



hiperboloide de 1 hoja

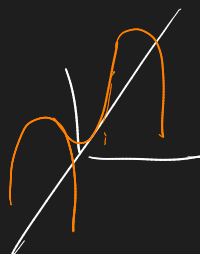
$$x^2 - y^2 - z^2 = 2$$



hiperboloide de 2 hojas

Si  $z$  no al cuadrado

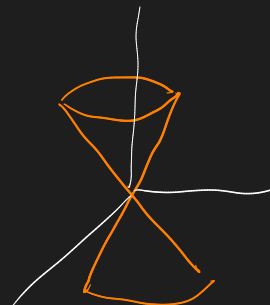
$$x^2 - y^2 - z = 2$$



Paraboloides  
Hiperbólicos.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Cono



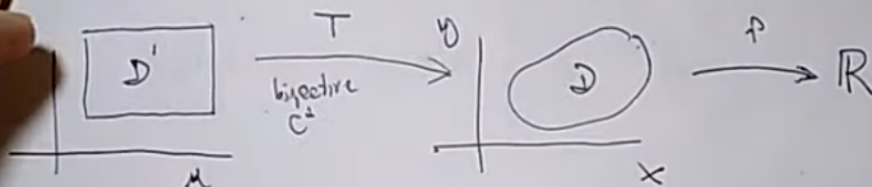
• [6, d] cambia por el m

Ejemplos:

$$\int_0^1 e^{1-x^2} (-2x) dx = \int_1^0 e^u du = - \int_0^1 e^u du$$

$u = 1 - x^2$  ;  $x=0 \rightarrow u=1$   
 $du = -2x dx$  ;  $x=1 \rightarrow u=0$

• Fórmula de cambio de variable en integrales dobles



$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Teorema:

$$\iint_D f(x, y) dA(x, y) = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \underbrace{|JT(u, v)|}_{\neq 0!} dA(u, v)$$

(eval en  $(u, v)$ )       $\star$  Jacobiano de  $T$

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = JT(u, v)$$

centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ :

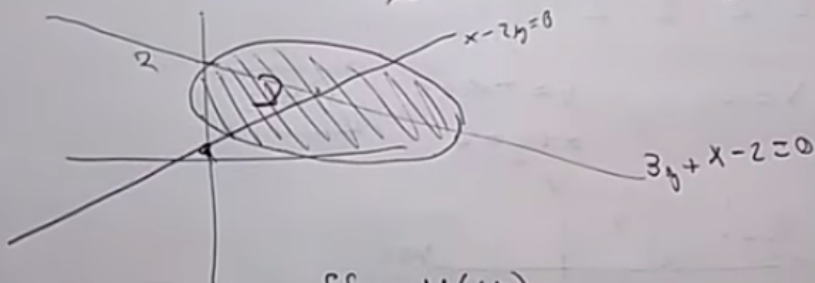
$$\bar{x} = \frac{\iiint_S x \delta(x, y, z) dV(x, y, z)}{\text{masa}(S)}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_S y \delta(x, y, z) dV(x, y, z)}{\text{masa}(S)} ; \quad \bar{z} = \frac{\iiint_S z \delta(x, y, z) dV(x, y, z)}{\text{masa}(S)}$$



Ejemplo: Calcular el área del dominio encerrado por la curva.:

$$\underbrace{(x-2y)^2}_u + \underbrace{(3y+x-2)^2}_v = 1$$



$$\text{area}(D) = \iint_D 1 \, dA(x,y)$$

cambio de variables:  
(LINEAL)

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3y + x - 2 \end{cases} ; \quad v - u = 5y - 2$$

$$y = \frac{v - u + 2}{5}$$

$$x = u + 2y = u + 2 \cdot \left( \frac{v - u + 2}{5} \right)$$