Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (27-07-2021)

Nombre y apellido: Resuelto

Libreta:

Carrera:

1	2	3	4	N

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}$ y $\vec{u}\times\vec{v} = (1, 2, 2)$, calcule en forma exacta la tangente del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2. Determine los puntos de la superficie de ecuación
$$3x^2 - 3y^2 + 6z^2 = 2$$
en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $(3, -1, 0)$ y $(5, 3, 6)$.

3. Sea R la región del plano formada por los puntos (x, y) que satisfacen la inecuación $x^2 + 4y^2 \leq 2$, y sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}xy}.$$
Determine los puntos de R en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

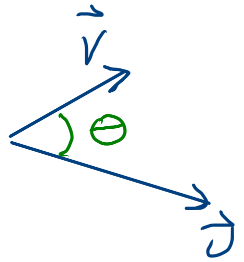
4. Use coordenadas esféricas para calcular de manera exacta
$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx.$$

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}$ y $\vec{u}\times\vec{v} = (1,2,2)$, calcule en forma exacta la tangente del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sabemos que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|u\|.\|v\| \cos\theta$

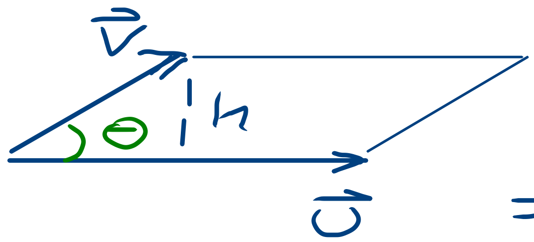
con θ el ángulo entre $\vec{u}, \vec{v}$



Entonces $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta = \sqrt{3}$

Por otro lado, sabemos que

$\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ = área del paralelogramo



área $= b.h =$

$= \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

Entonces $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\operatorname{sen}\theta = \|(1,2,2)\|$

$= \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

con esto, vemos que

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\vec{u}\cdot\vec{v}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Fin problema 1.

2. Determine los puntos de la superficie de ecuación

$$3x^2 - 3y^2 + 6z^2 = 2$$

en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por $(3, -1, 0)$ y $(5, 3, 6)$.

Sea $g(x,y,z) = 3x^2 - 3y^2 + 6z^2$

El teorema de la función implícita nos dice que si g es de clase C^1,

$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ para

$(x_0, y_0, z_0) \in S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 2\}$

$\Rightarrow$ Se puede despejar una variable en función de las demás, el conjunto S en un entorno de (x_0, y_0, z_0) es una superficie suave, y además:

$\nabla g(x,y,z) =$ vector normal a la superficie S en el punto $(x,y,z) \in S$.

Veamos que se cumplen las hipótesis del T.F.I:

1ro $g(x,y,z)=3x^2-3y^3+6z^2$

es de clase C^1 pues

es un polinomio.

2do $\nabla g(x,y,z)=(6x,-6y,12z)$

es $=(0,0,0)$ si y sólo

si $x=y=z=0$. Pero

$P=(0,0,0)\notin S$ así

que la superficie es

buena en todos sus puntos.

Ahora $\nabla g(x,y,z)=(6x,-6y,12z)$

es la normal en cada punto

de S.

Por otro lado la recta que

pasa por $(3,-1,0)$; $(5,3,6)$

tiene vector director

$V=(5,3,6)-(3,-1,0)=(2,4,6)$

Entonces queremos que ∇g sea un múltiplo de V.

Planteamos

$$① \quad (x,y,z) \in S$$

$$② \quad (6x, -6y, 12z) = \lambda\,(2,4,6)$$

Obtenemos
$$6x = 2\lambda$$
$$-6y = 4\lambda$$
$$12z = 6\lambda$$

Luego $\lambda = 3x = -\frac{3}{2}y = 2z$

así que de ② sale

la recta $\left(x, -2x, \frac{3}{2}x\right)$

Si pedimos que además se cumpla ①, tenemos

$$3x^2 - 3(-2x)^2 + 6\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 2$$

$$3x^2 - 12x^2 + 6\cdot\frac{9}{4}x^2 = 2$$

$$-9x^2 + \frac{27}{2}x^2 = 2$$

$$\frac{9}{2}x^2 = 2 \rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{2}{3}$$

$P_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)$ y también

$P_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -1\right)$

Ambos puntos cumplen todas las condiciónes así que esas son todas las soluciónes

FIN PROBLEMA 2

3. Sea R la región del plano formada por los puntos (x, y) que satisfacen la inecuación $x^2 + 4y^2 \leq 2$, y sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}xy}.$$

Determine los puntos de R en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

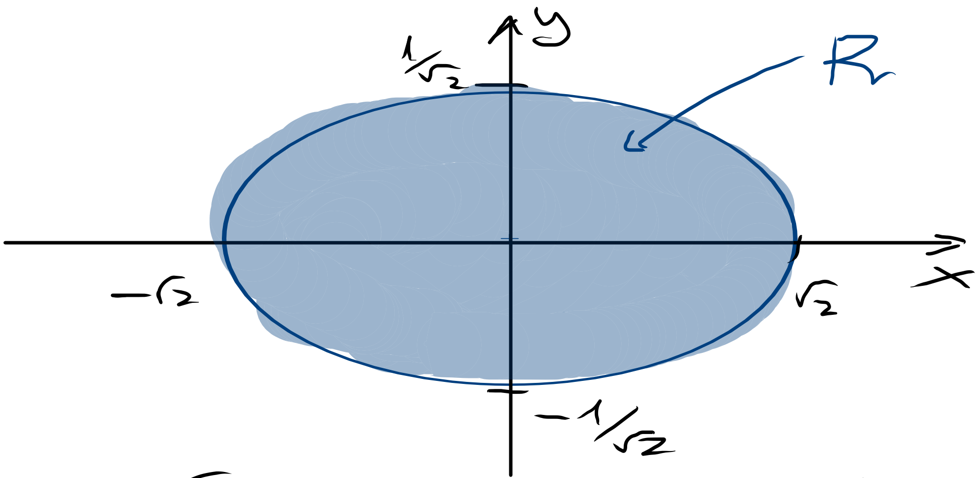
$x^2 + 4y^2 = 2$ es lo mismo que

$\frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$; q' es lo mismo que

$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, que es una

elipse de radios $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Luego R es el interior de la elipse y su borde.



La región R es cerrada y es acotada (es compacta), como f es continua, alcanza máximo y mínimo absoluto en R

Primero buscamos P.C. en el interior de R; $f(x,y)=e^{-\frac{1}{2}xy}$ es C^1 así que son puntos $P \in int(R)$ tq $\nabla f(P)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}y\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

Igualamos a cero las derivadas parciales; busco simultáneamente

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}y\right)=0 \\ e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0 \end{cases}$$

SIMULTÁNEAMENTE

Como $e^{-\frac{1}{2}xy}>0$, debe ser

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y=0 \\ -\frac{1}{2}x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

$P=(0,0)$

Verifico ¿$P \in int(R)$?

$0^2+4 \cdot 0^2=0 \leq 2$ ✓ sí

$\Rightarrow$ $P_1=(0,0)$ es el único P.C. de f en el interior de R

Ahora estudio el borde de R,
tengo dos métodos para
hacerlo (¡elegir uno!)
Método ① multiplicadores de
Lagrange: P es P.C. de en el
borde $\mathcal{C} = \{(x,y) : \underbrace{x^2+4y^2}_{g(x,y)} = 2\}$
si y sólo si

① $P \in \mathcal{C}$

② $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$

② $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{cases}$

es decir $\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}y\right) = \lambda \cdot 2x \\ e^{-\frac{1}{2}xy}\left(-\frac{1}{2}x\right) = \lambda \cdot 8y \end{cases}$

- Si $\lambda = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow x = 0$
  pero $(0,0) \notin$ borde de R.
- Si $y = 0 \longrightarrow x = 0$ Idem
- Si $x = 0 \longrightarrow y = 0$ Idem

$\Rightarrow$ puedo suponer $x, y, \lambda \neq 0$

puedo dividir la primer ecuación por la segunda, me queda

$$\frac{\cancel{e^{-\frac{1}{2}xy}}\cdot\left(-\frac{1}{2}y\right)=\cancel{\lambda}\cdot 2x}{\cancel{e^{-\frac{1}{2}xy}}\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)=\cancel{\lambda}\cdot 8y}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}y}{-\frac{1}{2}x}=\frac{2x}{8y} \Longrightarrow -4y^2=-x^2$$

$$x^2=4y^2$$

Ahora pedimos que se cumpla 1

$$\overbrace{4y^2}^{x^2}+4y^2=2$$

$$8y^2=2 \Longrightarrow y^2=\frac{1}{4}$$

$$y=\pm\frac{1}{2} \longrightarrow x=\pm 1$$

Tengo 4 P.C. $(1,\frac{1}{2})$; $(1,-\frac{1}{2})$ $(-1,\frac{1}{2})$, $(-1,-\frac{1}{2})$ en el borde

Ahora calculo f(P.C)

P	f(P)
$(0,0)$	$e^0=1$
$(1,\frac{1}{2})$	$e^{-\frac{1}{4}}\simeq 0{,}78$
$(1,-\frac{1}{2})$	$e^{\frac{1}{4}}\simeq 1{,}28$
$(-1,\frac{1}{2})$	$e^{\frac{1}{4}}\simeq 1{,}28$
$(-1,-\frac{1}{2})$	$e^{-\frac{1}{4}}\simeq 0{,}78$

mín absoluto de f en R

máx absoluto de f en R

Fin problema 3 (con método 1) de multiplicadores

El otro método para hallar los P.C. de f en el borde de R es parametrizar el borde con $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{2} \cdot \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t\right)$$

calcular

$$g(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cos t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t},$$

es decir $g(t) = e^{-\frac{1}{2} \cos t \cdot \operatorname{sen} t}$

y estudiar los P.C. de g en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4. Use coordenadas esféricas para calcular de manera exacta

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx.$$

$x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi$

$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi$

$z = \rho \cdot \cos\varphi$ con

$\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi;\ 0 \leq \varphi \leq \pi$

Son las coordenadas esféricas, cuyo Jacobiano es $JT = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

La función a integrar es

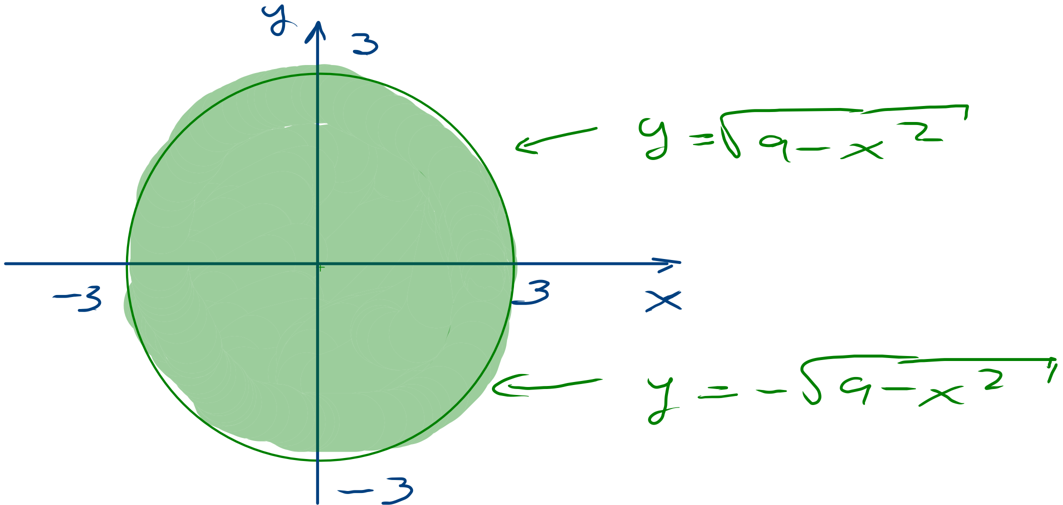
$z \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \rho$

$= \rho^2 \cos\varphi$

El dominio de integración en coord. cartesianas es

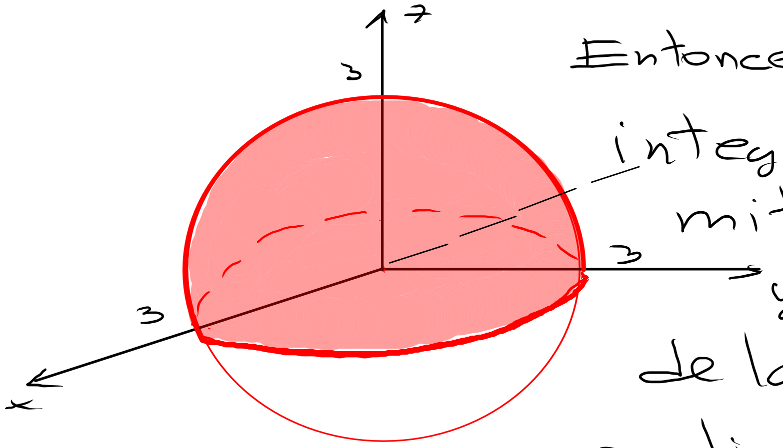
$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \\ \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \\ -3 \leq x \leq 3 \end{array}\right. \end{array}\right\}$$

en el piso (plano (x,y)) estas condiciones son $x^2+y^2 \leq 9$



Por otro lado

$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ es la parte superior de la cáscara esférica $x^2+y^2+z^2=9$



Entonces la región de integración es la mitad superior de la esfera de radio $R=3$

Así que $\iiint_D z\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV(x,y,z)=$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{3}\rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\underbrace{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}_{JT}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

por el teorema de cambio de variables para integrales

$$=\int_0^3\rho^4\,d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{2\pi}1\cdot d\theta$$

$$=\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{3^5}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{3^5}{5}\cdot\pi.$$

Fin Problema 4.