Recordar :

Param. de Elipse

$$r(\theta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta}}$$

cruzados! sale de reemplazar en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{r^2 \cdot \cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2 \cdot \sin^2\theta}{b} = 1$$

$$\Rightarrow r^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)}_{\left(\frac{b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta}{a^2 \cdot b^2}\right)} = 1$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta}$$

Deriv direcc. en la dirección de $u = (a, b)$ con $\|u\| = 1$

- $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot a,\ y_0 + h \cdot b) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Además :

Teorema

Si f es diferenciable en (x_0, y_0)

y $u = (a, b)$ con $\|u\| = 1$

$$\Rightarrow f_u(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot a + f_y(x_0, y_0) \cdot b$$

$$= \langle \nabla f(x_0, y_0),\ u \rangle$$

Propiedad de Polinomio de Taylor de Orden n

- Similar al chequeo de diferenciabilidad

P. de Taylor de orden n en (a,b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_n(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^n} = 0$$

<u>Además</u>: $f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$

Resto de P_n

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R_n(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^n} = 0$$

Orden sup. y resto

Hb: $f \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de (a,b)

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) +$$
$$+ \frac{1}{2!} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$
$$+ 1\cdot f_{xy}(a,b)(x-a)\cdot(y-b)$$

Hb: $f \in \mathcal{C}^3$ en un entorno de (a,b)

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\cdot f_{xxx}(c,d)(x-a)^3 + \ldots \text{(para yyy y zzz)}$$

incógnita

$$+ \frac{3}{3!}\cdot f_{xxy}(c,d)(x-a)^2\cdot(y-b) + \frac{1}{2}\cdot f_{yyx}(c,d)(x-a)(y-b)^2$$

con (c,d) en $(a,b)\times(x,y)$ (o más específicamente, en $B((a,b), |(a-x, b-y)|)$)

Derivada direccional

Sea $v = (a, b)$, f diferenciable, $\|v\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \left\langle \nabla f(x,y) \, , \, v \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right), (a, b) \right\rangle$$

Continuidad :

- Acoto

candidato a límite

$$|f(x,y) - c| \leq \ldots \leq \|(x,y)-(a,b)\| \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$$

- Contraejemplo con curva :

quiero

$$\text{Compongo } f(\sigma(t)) \neq c \Rightarrow \text{Usuales} \begin{cases} y = mx \\ y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Diferenciabilidad

P. de Taylor de grado 1 en (a,b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_1(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|} \overset{\text{quiero}}{=} 0$$

- Contraejemplo con curva :

quiero

① Compongo $f(\sigma(t)) \neq c$ → Usuales

$y = mx$

$y = x^2$

$x = y^2$

Asumiendo diferenciabilidad

Por def

② $\langle \nabla f, v \rangle \neq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + a.h, y_0 + b.h) - f(x_0, y_0)}{h}$

$\forall v$ si fuera diferenciable.

(no vale probar dif si la igualdad vale $\forall v$)

Además

Derivadas parciales continuas ⇒ f diferenciable.

Teorema de la Función Implícita.

¿ Reg. "Dirección de mayor crecimiento" es en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$?

Plano xy

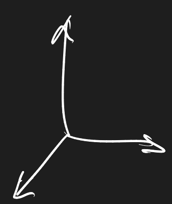
$\mathcal{H}$: • $f \in \mathcal{C}^1$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0)

• $f_{z(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$

$\phi(x,y) = z$ en un entorno de (x_0, y_0, z_0)

$$\phi_x(x_0,y_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0, \phi_x(x_0,y_0))}{f_z(x_0, y_0, \phi_x(x_0,y_0))}$$

Esféricas !



$$(1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

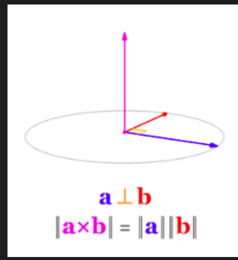
$$= i(0) - j\,0 + k \cdot 1$$

$$= (0,0,1)$$

Para recordar

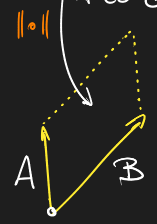
a A y B

vector normal unitario



- $A \times B = \|A\| . \|B\| . \sin\theta . n$

Área del paralelogramo.



↳ es sin y no cos pues debe valer para rectángulos, y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$!!

- $A \cdot B = \|A\| . \|B\| . \cos\theta$

↳ $A \cdot B = 0 \iff A \perp B$

A partir de 2 rectas L_1 y L_2,

$$L_1 : (1,1,1) + t_1 \underbrace{(2,3,4)}_{V_1}$$

$$L_2 : (1,1,1) + t_2 \underbrace{(0,1,0)}_{V_2}$$

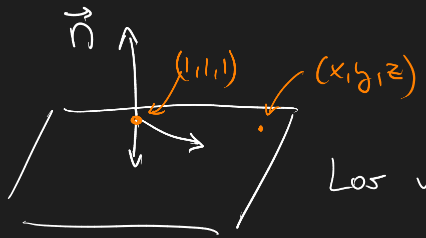
V_2 ← vector director

$\vec{n} = V_1 \times V_2$ ← normal a L_1 y L_2

Eq. del plano

Punto donde intersecan L_1 y L_2.

$$\vec{n} \cdot (x,y,z) = \vec{n} \cdot \overbrace{(1,1,1)}$$



Los vectores del plano son de la pinta

$$(x_0, y_0, z_0) - (x, y, z) = \vec{v}$$

Todos los $\vec{v}$ son $\perp$ a $\vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) = 0$$

en particular, si $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (1 - x, 1 - y, 1 - z) = 0$$

que por distributividad de prod. int

$$\boxed{\vec{n} \cdot (1,1,1) = \vec{n} \cdot (x, y, z)}$$

A partir de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\underset{\text{Plano}}{\Pi} : \alpha \cdot (u_1, u_2, u_3) + \beta (v_1, v_2, v_3) + \underset{(x_0, y_0, z_0)}{\overset{\text{Punto}}{(1, 1, 1)}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot v_1 + x_0 \\ y = \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot v_2 + y_0 \\ z = \alpha \cdot u_3 + \beta \cdot v_3 + z_0 \end{cases} \leftarrow \text{Despejo } \alpha \text{ y } \beta$$

$$\Rightarrow z - \overset{f(x_0, y_0)}{z_0} = \ldots$$

Sea una sup. dada por

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

La reescribo como sup de nivel

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$

Calculo grad

$$\nabla F(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z)$$

Perpendicular al plano tangente en cada punto.

Plano Tangente

vectores del plano

$$\Pi : \langle \nabla F(x_0,y_0,z_0), (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

Perpendiculares

Relación entre sup. implícita y gráfico

gráfico : $f(x,y) = z$

sup de nivel : $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

$\hookrightarrow \nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$

El gradiente de F sup. de nivel es perpendicular al plano tangente a la sup. en el punto, si cumple las condiciones del Teo. de la Func. Imp. que aseguran existe algún despeje en un entorno del punto:

- F debe ser $\mathcal{C}^1$
- $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$

Extremos:

Recordar mencionar!

- Si D es compacto
  - $\Rightarrow$ Cualquier f sobre D alcanza máx y mín absolutos.

Máximo volumen

↳ $\nabla V(x,y,z) = 0$

↳ Evalúo en todos los candidatos

Lagrange

Hs: · f, g diferenciables · $\nabla g \neq \vec{0}$ $\Bigg\}$ $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g \end{cases}$

Si tengo 2 restricciones g y h

- f, g, h diferenciables
- $\nabla g \neq \vec{0}$
- $\nabla h \neq \vec{0}$
- $\nabla g \neq \alpha . \nabla h \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (no múltiplos)

Recordar!

$\Rightarrow \quad \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$

Campo gradiente

$$F = (P, Q, R)$$

si F es Conservativo $\Rightarrow \exists f /$

$$f_x = P$$
$$f_y = Q$$
$$f_z = R$$

Recordar!

Teorema : F es conservativo $\Longleftrightarrow \text{rot } F = 0$

Divergencia

$$\text{div } F = P_x + Q_y + R_z$$

Rotor

$$\text{rot } F = \nabla \times F$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Líneas de Flujo de F

Trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es F.

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una línea de Flujo de F si

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

$\therefore$ vectores en un Campo Vectorial son Tangentes a las líneas de flujo.

Si:

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\Rightarrow \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

quiero F /

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

dijo

$$F(x,y) = (-y, x)$$

//

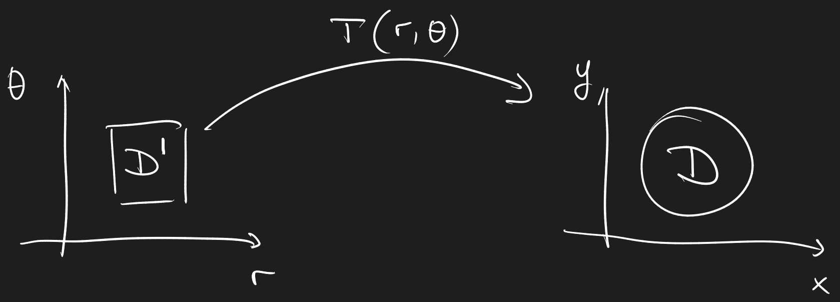
Esféricas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

Recordar!

$$\text{Jac}\, T = r^2 \cdot \sin\varphi$$

Cambio de variables



$$\iint_D f_{(x,y)} \cdot dx\,dy = \iint_{D'} f_{(r,\theta)} \cdot |\text{Jac}\,T| \cdot dr\,d\theta$$

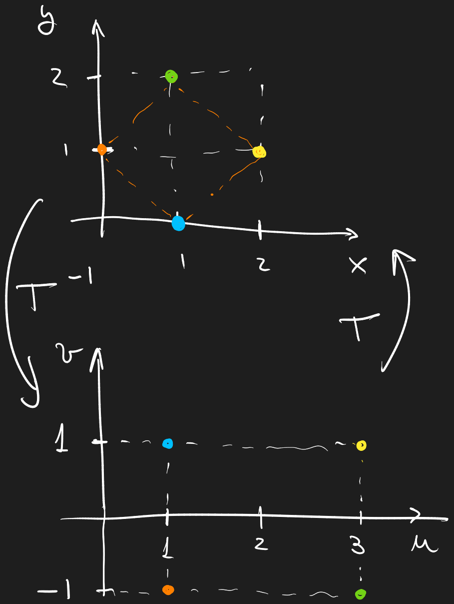
Donde

$$T(r,\theta) = \big(x(r,\theta),\ y(r,\theta)\big)$$

$$\text{Jac}\,T(r,\theta) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Si:

$$\begin{cases} u = x+y & \Rightarrow \quad u+v = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{u+v}{2} \\ v = x-y & \Rightarrow \quad u-v = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$



$$T(u,v) = \left(\frac{u+v}{2} , \frac{u-v}{2} \right)$$

$$T^{-1}(0,1) = (1, -1)$$

$$(1,2) = (3, -1)$$

$$(2,1) = (3, 1)$$

$$(1,0) = (1, 1)$$

$$|\text{Jac}\, T| = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint_R (x+y)^2 \cdot \sin^2(x-y)\, dx\, dy = \iint_D u^2 \cdot \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} \cdot du\, dv$$

Como D es un cuadrado de la forma $\underbrace{[1, 3]}_{u} \times \underbrace{[-1, 1]}_{v}$

$$= \frac{1}{2} \int_{u=1}^{3} \int_{v=-1}^{1} u^2 \cdot \underbrace{\sin^2 v}_{\frac{1}{2}\cdot(1 - \cos 2v)}\, du\, dv$$

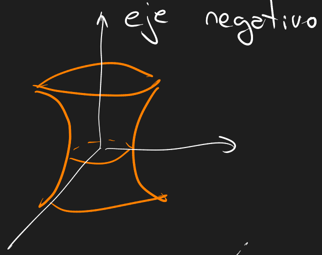
Recordar!

Superficies en $\mathbb{R}^3$

$x^2 + y^2 = z$ "Circunferencias de radio $\sqrt{z}$"

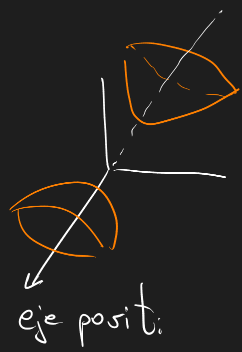
Paraboloide

$x^2 + y^2 - z^2 = 2$



hiperboloide de 1 hoja

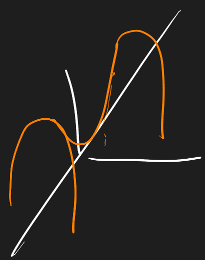
$x^2 - y^2 - z^2 = 2$



hiperboloide de 2 hojas

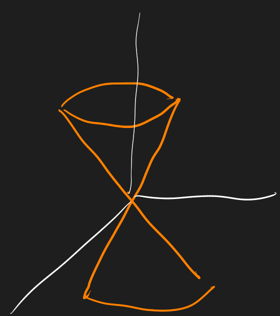
Si z <u>no</u> al cuadrado

$x^2 - y^2 - z = 2$



Paraboloide Hiperbólico.

$x^2 + y^2 = z^2$ Cono



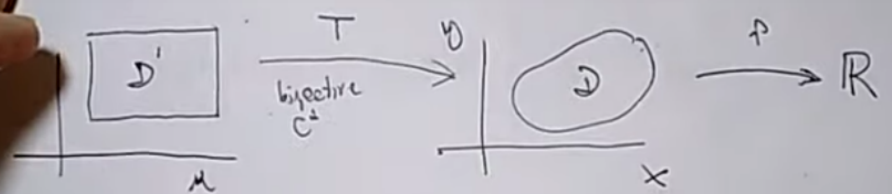
• $[c,d]$ cambia por el ...

Ejemplos: $\displaystyle\int_0^1 e^{\overbrace{1-x^2}}(-2x)\,dx = \int_1^0 e^{u}\,du = -\int_0^1 e^{u}\,du$

$u = 1-x^2$; $x=0 \rightarrow u=1$

$du = -2x\,dx$; $x=1 \rightarrow u=0$

• Fórmula de cambio de variable en integrales dobles



$T(u,v) = \big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Teorema:

$$\iint_D f(x,y)\, dA(x,y) = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot \overbrace{\underbrace{\big|JT(u,v)\big|}_{(*)}}^{¡\neq 0!}\, dA(u,v)$$

(en el plano (u,v)) "Jacobiano de T"

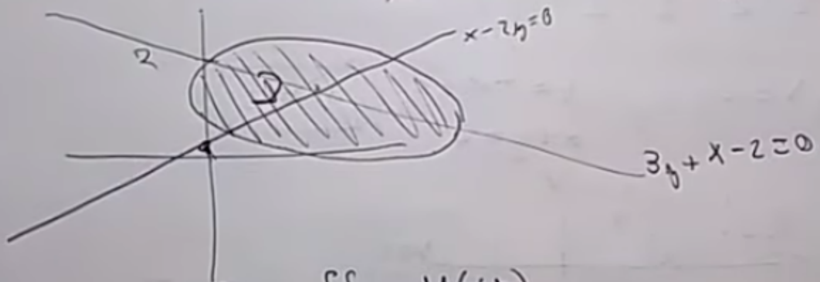
$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = JT(u,v)$$

centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$: $\bar{x} = \dfrac{\iiint_S x\,\delta(x,y,z)\, dV(x,y,z)}{\text{masa}(S)}$

$\bar{y} = \dfrac{\iiint_S y\,\delta(x,y,z)\, dV(x,y,z)}{\text{masa}(S)}$; $\bar{z} = \dfrac{\iiint_S z\,\delta(x,y,z)\, dV(x,y,z)}{\text{masa}(S)}$

Ejemplo: Calcular el área del dominio encerrado por la curva:

$$\left(\underbrace{x-2y}_{u}\right)^2 + \left(\underbrace{3y+x-2}_{v}\right)^2 = 1$$



$$\text{area}(D) = \iint_D 1 \, dA(x,y)$$

cambio de variables: (LINEAL)

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = 3y + x - 2 \end{cases} \quad ; \quad v - u = 5y - 2$$

$$\boxed{y = \frac{v-u+2}{5}} \qquad \boxed{x = u + 2y = u + 2\cdot\left(\frac{v-u+2}{5}\right)}$$