Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

Segundo Parcial - 09/12/2020

1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea $p(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ su polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $(0,0)$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \operatorname{sen}^2(x-y) + 2g(x,y)$.

(a) Encontrar el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$.

(b) Decidir si f tiene un extremo local en $(0,0)$.

a) Necesito

$$q_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) +$$
$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)(x-0)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)(y-0)^2 +$$
$$+ f_{xy}(0,0)(x-0)\cdot(y-0)$$

- $f(0,0) = \sin^2(0-0) + 2\cdot g(0,0)$

Como $g(0,0) = p(0,0)$ por ser su polin. de Taylor.

- $f(0,0) = 0$

- $f_x(x,y) = 2\cdot\sin(x-y)\cdot\cos(x-y) + 2\cdot g_x(x,y)$

Calculo derivadas de g a partir de p

$p(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

$g_x(x,y) = 2x + 3y \Rightarrow g_x(0,0) = 0$

$g_y(x,y) = 3x + 2y \Rightarrow g_y(0,0) = 0$

- $f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = -2 \cdot \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) + 2 \cdot g_y(x,y)$

- $f_y(0,0) = 0$

- $f_x(x,y) = 2 \cdot \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) + 2 \cdot g_x(x,y)$

- $f_{xx}(x,y) = 2 \cdot \cos^2(x-y) - 2 \cdot \sin^2(x-y) + 2 \cdot g_{xx}(x,y)$

Calculo 2das:

$$\boxed{\begin{array}{l} g_x(x,y) = 2x + 3y \\ g_y(x,y) = 3x + 2y \end{array}}$$

$g_{xx}(x,y) = 2$

$g_{yy}(x,y) = 2$

$g_{xy}(x,y) = 3$

$$f_{xx}(0,0) = 2 + 2 \cdot 2$$

- $f_{xx}(0,0) = 6$

$$f_y(x,y) = -2 \cdot \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) + 2 \cdot g_y(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 \cdot \cos^2(x-y) - 2 \cdot \sin^2(x-y) + 2 \cdot g_{yy}(x,y)$$

$$f_{yy}(0,0) = 2 + 4$$

- $f_{yy}(0,0) = 6$

$$f_x(x,y) = 2 \cdot \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) + 2 \cdot g_x(x,y)$$

$$f_{xy}(x,y) = -2 \cdot \cos^2(x-y) + 2 \cdot \sin^2(x-y) + 2\, g_{xy}(x,y)$$

$$f_{xy}(0,0) = -2 + 2 \cdot 3$$

$$f_{xy}(0,0) = 4$$

Reescribo Polin. de Taylor de f en $(0,0)$

$$q(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 6\, x^2 + \frac{1}{2}\, 6 \cdot y^2 + 4 \cdot xy$$

$$\boxed{q(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 4xy}$$

b) $\nabla f(0,0) = \nabla q(0,0)$

$$\nabla q(x,y) = (6x + 4y \ , \ 6y + 4x)$$

$\nabla q(0,0) = (0,0)$ ✓ es punto crítico.

Calculo el Hessiano de q, que coincide con el Hessiano de f en $(0,0)$ (f es $\mathcal{C}^2$ por ser compo. suma y resta de funciones $\mathcal{C}^2$)

$$Hq(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = Hq(0,0) = Hf(0,0)$$

$\det Hf(0,0) = 36 - 16 = 20 > 0$

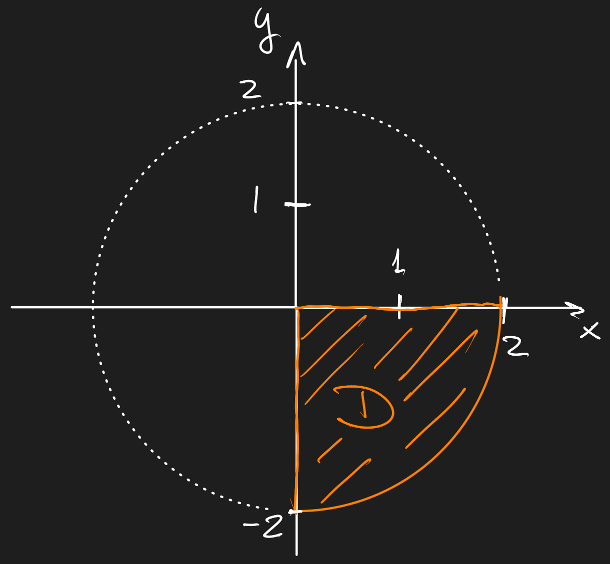
y como $f_{xx}(0,0) > 0$

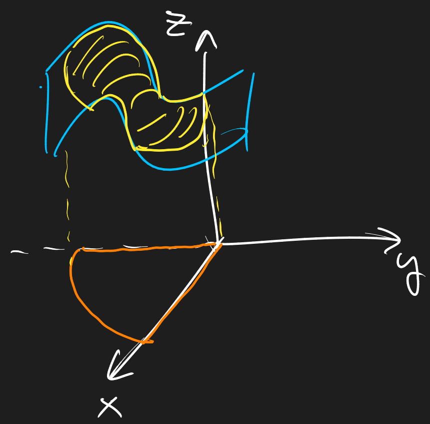
$\Rightarrow$ Por Criterio del Hessiano

en $(0,0)$ hay un mínimo local. //

2. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=xy$. Encontrar extremos absolutos de f en la región $D\subset\mathbb{R}^2$ definida por

$$D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\leq 0,\ x^2+y^2\leq 4\Big\}.$$





Busco extremos en

- Interior de D : $\mathring{D}$
- Borde de D : ∂D
- Vértices

Interior

Calculo Hessiano de $f(x,y) = x\cdot y$

$$\nabla f(x,y) = (y\ ,\ x)$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det Hf(x,y) = -1 \Rightarrow$ solo hay puntos silla en los $(x,y) \in \mathring{D}$

Borde

Mult. de Lagrange sobre $\hat{g}(x,y) = x^2 + y^2$

Notar que ĝ(x,y) es TODA la circunferencia y no el borde de D

$$\nabla f(x,y) = (y, x)$$

$$\nabla \hat{g}(x,y) = (2x, 2y)$$

Armo sistema

$$\begin{cases} y = \lambda 2x & \text{(I)} \\ x = \lambda 2y & \text{(II)} \\ x^2 + y^2 = 4 & \text{(III)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y = \lambda \cdot 2 \cdot \lambda \cdot 2 \cdot y$ (II en I)

$y = 4 \cdot \lambda^2 \cdot y$

$0 = y(4\lambda^2 - 1)$

$\hookrightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\hookrightarrow 4\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 = \frac{1}{4}$

$\hookrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

- Si $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ pero! no cumple (III)

• Si $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x & \text{(IV)} \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2 \qquad \text{(IV)}$$

$$x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = -\sqrt{2}$$

$$x_3 = \sqrt{2} \Rightarrow y_3 = \sqrt{2}$$

$$PCs = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

• Si $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = -y & \text{(V)} \\ y = -x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 = 4$$

$$\text{(V)}$$

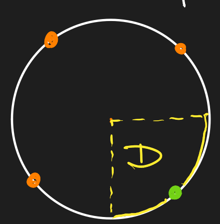
$$x_4 = \sqrt{2} \Rightarrow y_4 = -\sqrt{2}$$

$$x_5 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_5 = \sqrt{2}$$

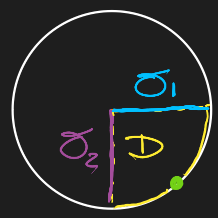
no están en ∂D

$$PC = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$$

Verifico que están sobre ∂D



Parametrizo segmentos



$\sigma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in (0,2)$

$\sigma_2(t) = (0, t)$ con $t \in (0,2)$

Compongo $\nabla f(\sigma_1(t))$ y $\nabla f(\sigma_2(t))$ donde $\nabla f(x,y) = (y, x)$

$\nabla f(\sigma_1(t)) = (0, t) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0 \notin (0,2)$

$\nabla f(\sigma_2(t)) = (t, 0) = (0,0) \Leftrightarrow t = 0 \notin (0,2)$

en estos segmentos (sin las esquinas) no hay PCs.

Esquinas:

$$\{(0,0), (0,-2), (2,0)\}$$

Finalmente, evalúo:

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2$ } mínimo absoluto $\{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

$f(0,0) = 0$

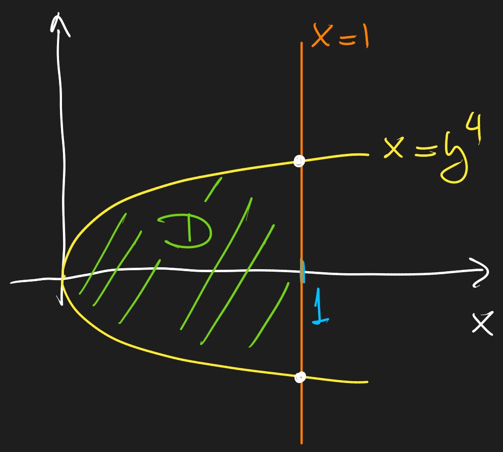
$f(0,-2) = 0$

$f(2,0) = 0$

} máximos Absolutos $\{(0,0), (0,-2), (2,0)\}$

3. (a) Calcular $\iint_D e^x y^3\, dA$, donde D es la región delimitada por $x = y^4$ y $x = 1$.

(b) Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante que está delimitado por las superficies $x + 2y = 2$ y $z = x^2 + y^2$.



Veo D como de tipo 2 región

Veo intersección

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = y^4 \end{cases} \Rightarrow \text{intersecan en } (1,1) \text{ y } (1,-1)$$

$$\int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=y^4}^{x=1} e^x \cdot y^3 \, dx\, dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^3 \cdot \left[e^x \right]_{y^4}^{1} dy$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} y^3 \left(e^1 - e^{y^4} \right) dy$$

$$= \int_{y=-1}^{y=1} e\, y^3 \, dy + \int_{y=-1}^{y=1} y^3 \cdot e^{y^4} \, dy$$

$$\quad \mathrm{I} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{II}$$

I

$$\int_{y=-1}^{y=1} e\, y^3\, dy = e \cdot \frac{1}{4}\left[y^4\right]_{-1}^{1} = 0$$

II

$$\int_{y=-1}^{y=1} y^3 \cdot e^{y^4}\, dy$$

CA

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{y^4} = e^{y^4} \cdot 4y^3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{4} e^{y^4} = e^{y^4} \cdot y^3$$

$$\int_{y=-1}^{y=1} y^3 \cdot e^{y^4}\, dy = \frac{1}{4} \cdot \left[e^{y^4}\right]_{-1}^{1}$$

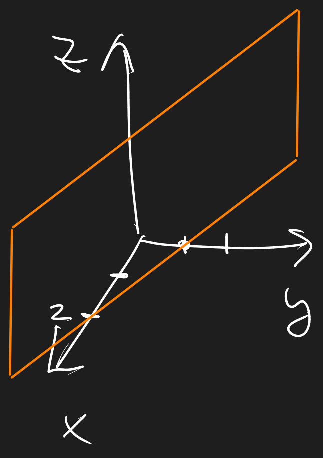
$$= \frac{1}{4}\left(e^1 - e^1\right) = 0$$

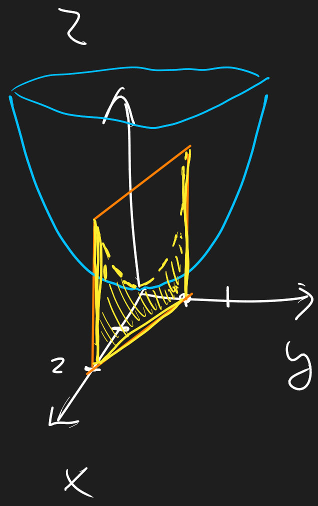
Finalmente

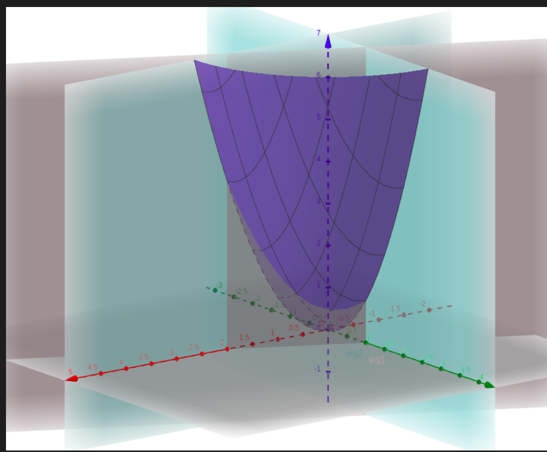
$$\boxed{\iint_D e^x \cdot y^3\, dA = 0}$$

b)

(b) Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante que está delimitado por las superficies $\underbrace{x + 2y = 2}_{\text{Plano}}$ y $\underbrace{z = x^2 + y^2}_{\text{Paraboloide}}$.







Describo el sólido como

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} \int_{z=0}^{x^2+y^2} 1 \, dV =$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} x^2 + y^2 \, dy \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left[y \cdot x^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot x^2 + \frac{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^3}{3} \, dx$$

CA:

$$= \int_0^2 x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{8}\right) dx$$

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - x + \frac{x^3}{4}\right)$$

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right.$$

$$= \int_0^2 \frac{5}{4}x^2 - \frac{13}{24}x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x \quad dx$$

$$= \left[\frac{5}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{13}{24}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{5}{6}$$

4. Determine el valor de la integral

$$\iiint_E (x^2+z^2)y\, dV,$$

donde $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2 \leq 1\right\}$.

Uso Polares :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ z = r \cdot \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array}$$

$$0 \leq y \leq \overset{r \geq 0}{\downarrow} r$$

$$\iiint_E (x^2+z^2) \cdot y \, dV =$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{y=0}^{r} r^2 \cdot y \cdot \underset{\uparrow}{r} \; dy\, d\theta\, dr$$

Jacobiano.

$$= \int_{r=0}^{1} r^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{y^2}{2}\Big|_0^r \, d\theta\, dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} r^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2} \, d\theta\, dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} \frac{r^5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \, dr$$

$$= \pi \cdot \frac{r^6}{6} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Fin :)