Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

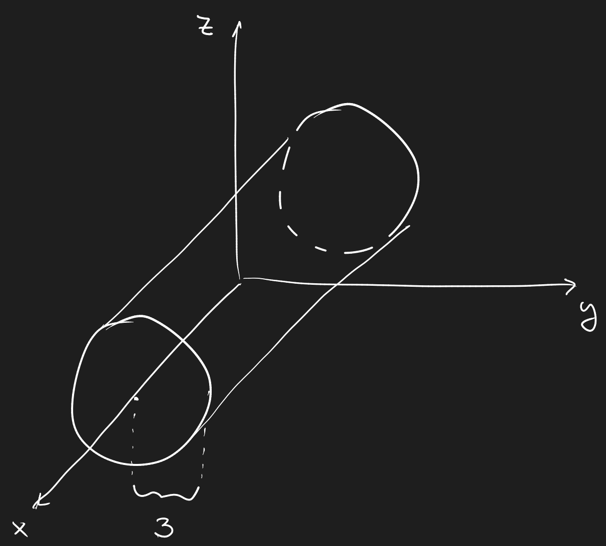
Primer Parcial - 08/06/2020

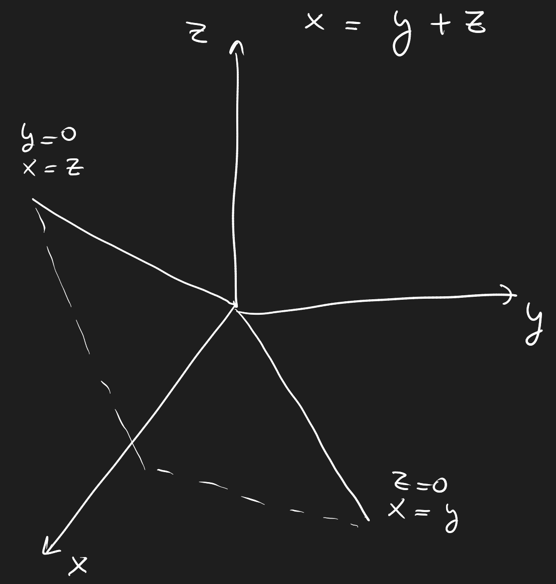
1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las superficies

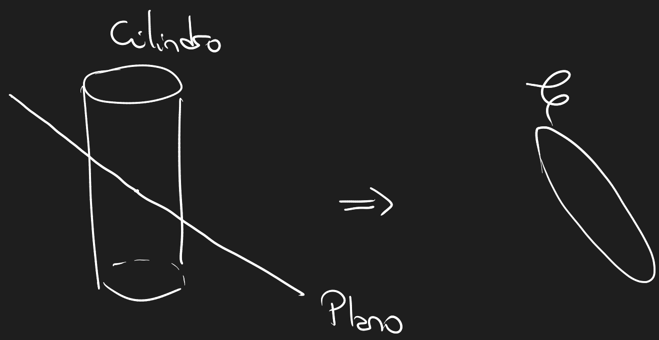
$$y^2 + z^2 = 9, \qquad -x + y + z = 0.$$

(a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$.

(b) Verificar que el punto $P = (3, 3, 0)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.







$$\text{Tengo} \begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow (\underbrace{3.\cos t}_{y}, \underbrace{3.\sin t}_{z}) \\ x = y + z \end{cases}$$

Solo falta parametrizar x :

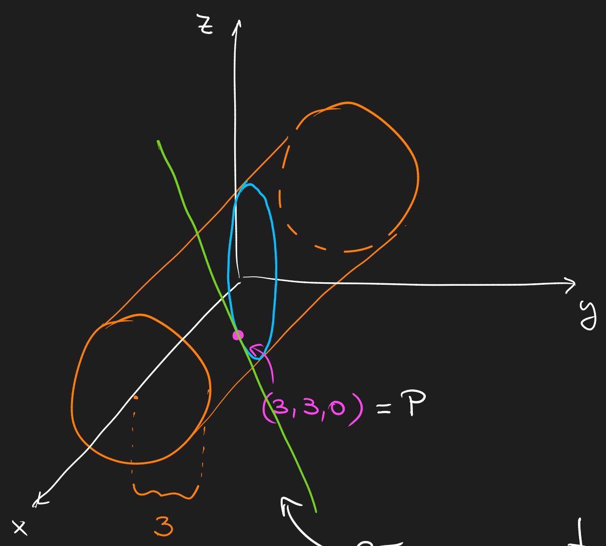
↳ $x = 3\cos\theta + 3\sin\theta$

$$r(t) = \left(3\cos t + 3\sin t,\ 3\cos t,\ 3\sin t\right)$$

$$\boxed{r(t) = 3\left(\cos t + \sin t,\ \cos t,\ \sin t\right)}$$

b) listo!

(b) Verificar que el punto $P = (3, 3, 0)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.



es una recta vertical (3, 3, z)

Veámoslo

$$r(t) = 3\left(\cos t + \sin t,\ \cos t,\ \sin t\right)$$

$$r'(t) = 3\left(\cos t - \sin t,\ -\sin t,\ \cos t\right)$$

$t = 0$:

$$r'(0) = 3(1, 0, 1)$$

↑ vector tangente a $\mathcal{C}$ en (3,3,0)

$$\boxed{\text{Recta Tg} : (3,3,0) + t(3,0,3)} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Analizar la existencia de los siguientes límites

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^2(y+1)}{x^3+(y+1)^3},$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2}.$$

a) Fuera del $(0,-1)$ todo OK!

- Si $x = 0$

$\Rightarrow f(0,y) = 0$ ← debe ser cero $\quad y \neq 0$

- Si $y = -1$

$\Rightarrow f(x,-1) = 0 \quad x \neq 0$

Veo $x = y+1$

$$\frac{(y+1)^2(y+1)}{(y+1)^3+(y+1)^3} = \frac{1}{2} \quad \therefore \ \underline{\text{no}} \text{ tiene límite.}$$

b) $$\left| \frac{x.y.\sin x}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|.|y|.\overbrace{|\sin x|}^{\leq x}}{\|(x,y)\|^2}$$

$$\leq \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| < \delta \overset{\text{quiero}}{<} \varepsilon$$

Tomando $\delta < \varepsilon$

probé que el límite es cero siempre

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + 27y^3}$.

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

$$27y^3 = (3y)^3$$

$$f(x,y) = \left(x^3 + 27y^3\right)^{1/3}$$

a)

- $$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) \quad \lim_{h \to 0} \frac{\left(\cancel{0^3} + \cancel{27.0^3}\right)^{1/3} + \left((h+0)^3 + 27.0^3\right)^{1/3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 1\right]$$

- $$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \quad \lim_{h \to 0} \frac{\left(27.\,h^3\right)^{1/3}}{h} = \lim \frac{3h}{h} = 3$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 3\right]$$

b) f es diferenciable en (0,0) si

- tiene deriv. parciales en (0,0)
- vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=3}(y-0)\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|} \overset{\text{quiero}}{=} 0$$

$$= \lim \frac{(x^3+27y^3)^{1/3} - x - 3y}{\|(x,y)\|} \overset{?}{=} 0$$

Si $y = x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(x^3+27x^3)^{1/3} - 4x}{(2x^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[3]{28}\,.\,x - 4x}{\sqrt{2}\,.\,|x|} = \frac{\sqrt[3]{28}-4}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$\therefore$ no es dif.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente en el punto $(1, 4, f(1, 4))$ es

$$z = 3x - 2y + 7.$$

Sean $x = g(s,t) = s^2\cos(t)$ e $y = h(s,t) = (2s+t)^2$ y sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(s,t) = f(g(s,t), h(s,t))$.

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(-1,0)$ y $\frac{\partial F}{\partial t}(-1,0)$.

(b) Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de F en $(-1, 0, F(-1,0))$.

a) $$\frac{\partial F}{\partial s}\overset{(s,t)}{(-1,0)} = \frac{\partial f}{\partial g}\Big(\overbrace{g(-1,0)}^{=1}, \overbrace{h(-1,0)}^{=4}\Big) \cdot \overbrace{\frac{\partial g}{\partial s}(-1,0)}^{-2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1, 4) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(-1,0)$$

Plano tangente

$$z = f(1,4) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,4)(x-1)}_{3x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,4)(y-4)}_{-2y}$$

Si

- $\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 3$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = -2$

$$\Rightarrow \quad z = f(1,4) + 3x - 3 - 2y + 8$$

$$z = 3x - 2y + f(1,4) + 5$$

Como sé que

$$z = 3x - 2y + 7$$

$$\Rightarrow f(1,4) + 5 = 7$$

$\Rightarrow \quad f(1,4) = 2$

Volviendo

$$\frac{\partial f}{\partial g}(1,4) = 3 \quad \left(\text{pues } x = g(s,t)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1,4) = -2 \quad \left(\text{pues } y = h(s,t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial s}(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial g}\Big(\overbrace{g(-1,0)}^{=1}, \overbrace{h(-1,0)}^{=4}\Big) \cdot \overbrace{\frac{\partial g}{\partial s}(-1,0)}^{-2} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1, 4) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(-1,0)$$

$$= 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot \left(2(-2+0) \cdot 2\right)$$

$$= -6 + 16$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}(-1,0) = 10 \;]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(-1,0) = 3 \cdot (-1) \cdot (-\sin 0) + (-2) \cdot 2(-2+0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(-1,0) = 8 \;]$$

b)

$$\mu = F(-1,0) + F_s(-1,0)(s+1) + F_t(-1,0).t$$

$$= 2 + 10s + 10 + 8t$$

$$\boxed{\mu = 10s + 8t + 12}$$