Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Segundo Recuperatorio del Primer Parcial - 18/08/2020

1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$x = \sqrt{1+y}, \qquad y^2 = 1 + z.$$

(a) Hallar una función $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$. Calcular $Dom(r)$.

(b) Verificar que el punto $P = (1, 0, -1)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

a) $x = \sqrt{1+y}$

$z = y^2 - 1$

Defino

$$r(t) = \left(\sqrt{1+t},\ t,\ t^2-1\right)$$

Calculo $Dom(r)$

Como $\sqrt{1+t} \Rightarrow 1+t \geq 0$

$t \geq -1$

$$Dom(r) = [-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

b) $(1, 0, -1) = \left(\sqrt{1+t},\ t,\ t^2-1\right) \iff$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{1+t} = 1 \\ t = 0 \\ t^2 - 1 = -1 \end{cases}$$

Si $t=0$

$\sqrt{1+t} = 1$ ✓

$t^2 - 1 = -1$ ✓

$\therefore$ P pertenece a la curva $\mathcal{C}$: $r(0) = P$

Recta tangente

$$r(t) = \left(\sqrt{1+t}\,,\ t\,,\ t^2 - 1\right)$$

$$r'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,,\ 1\,,\ 2t\right)$$

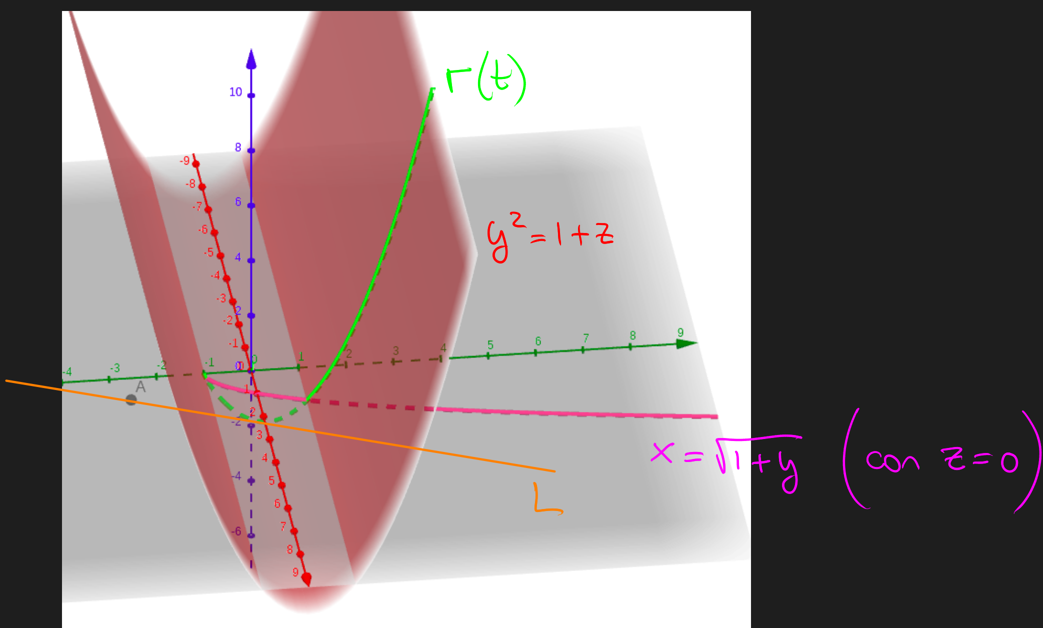
Si $t=0$

$$r'(0) = \left(\frac{1}{2}\,,\ 1\,,\ 0\right)$$

↑ vector dirección

Llamo L a la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P

$$\boxed{L:\ (1,0,-1) + \alpha\left(\tfrac{1}{2}, 1, 0\right)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$



2. Analizar la existencia de los siguientes límites

(a) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)y^2\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{3(x-1)^2+y^2}$,

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2)y}{x^2-y+x^4}$.

a) $$\left|\frac{(x-1)\,y^2\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}^{\leq 1}}{3(x-1)^2+y^2}\right| \underset{3(x-1)^2 \geq (x-1)^2}{\leq} \left|\frac{(x-1)\,y^2\cdot 1}{(x-1)^2+y^2}\right|$$

$$\leq \frac{\|(x-1,y)\|^3}{\|(x-1,y)\|^2} = \|(x-1,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0$$

$\therefore$ el límite existe, y es cero.

b) Si $x=0 \Rightarrow$ el límite es cero $\forall y \neq 0$

$$\left|\frac{\sin(x^2)\cdot y}{x^2\cdot(1+x^2)-y}\right| \leq \frac{\cancel{x^2}\cdot y}{\cancel{x^2}(1+x^2)-y}$$

tiene pinta de que no existe, pues es una basura ese denominador

Busco acercarme al $(0,0)$ por curvas.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2)y}{x^2-y+x^4}$.

$y=x$

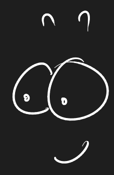
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cdot x}{x^2-x+x^4} \qquad x-1+x^3$$

Nope

$y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cdot x^2}{x^2 - x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)\cdot x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$$



Como al acercarme por la curva y=x^2 obtuve un límite distinto de 0, entonces el límite del enunciado NO existe.

Si no lo recuerdo, usar L'H

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin(x^2)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \overset{L'H}{=} \lim \frac{\overbrace{\cos x^2 \cdot 2x}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}}$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{2}{2} = 1$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} y\operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

(a) Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en el $(0,0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

a) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0 \checkmark$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0 \checkmark$$

Ambas derivadas existen, y son cero.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\overbrace{f(0,0)}^{=0} + \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}\cdot x + \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}\cdot y\right)}{\|(x,y)\|} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\left| \underbrace{\frac{1}{\|(x,y)\|}}_{1/\sqrt{x^2+y^2}} \cdot y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) - 0 \right|$$

↑ Tiene pinta de no existir, porque con cualquier cota queda ≤ 1

Si $y = x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} \cdot x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot|x|} \cdot x \cdot \sin(2)$$

Veo que

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\cdot|x|} \cdot \sin(2) \overset{x>0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\cdot x} \cdot \sin(2)$$

$$= \frac{\sin 2}{\sqrt{2}}$$

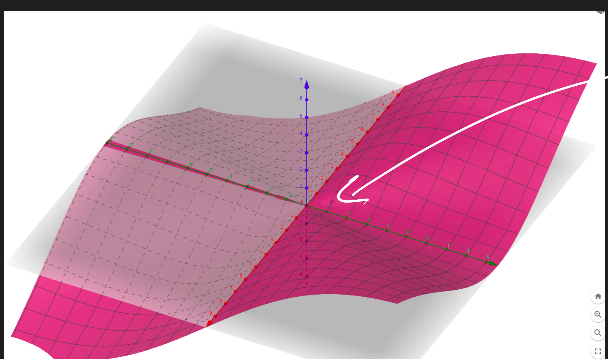
- $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{2}\cdot|x|} \cdot \sin(2) \overset{x<0}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sqrt{2}\cdot x} \cdot \sin(2)$$

$$= -\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}$$

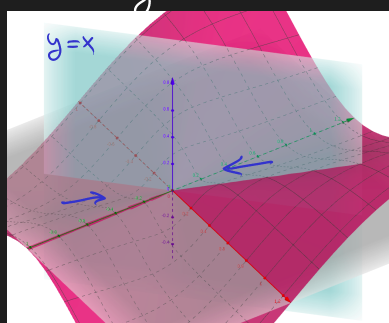
Como obtuve valores distintos para un mismo límite según me acerque por derecha o izquierda, entonces el límite NO existe.

Por lo tanto, la función NO es diferenciable.

Nota que



no hay chance de que tenga un plano tangente en $\vec{0}$.



4. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y, x)$. Sabiendo que el $\nabla f(2, 0, 1) = (1, 2, 3)$ y que $f(2, 0, 1) = 5$, hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

Quiero P. de Taylor de órden 1 en $(1,1)$

$$P_1(x,y) = h(1,1) + h_x(1,1)\,(x-1) + h_y(1,1)\,(y-1)$$

Calcub:

- $h(1,1) = f(1+1,\ 1-1,\ 1)$

$$= f(2,0,1) \overset{\text{dato}}{=} 5$$

Llamo u, v, w a:

$$h(x,y) = f(\underbrace{x^2+y^2}, \underbrace{x^2-y}, \underbrace{x}) = f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$$

f es función de u y v

u es función de x e y

- $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial x}$$

* $$\nabla f(2,0,1) = (f_u(2,0,1),\ f_v(2,0,1),\ f_w(2,0,1)) \overset{\text{dato}}{=} (1,\ 2,\ 3)$$

$* \ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \Rightarrow u_x(1,1) = 2$

$* \ v_x(x,y) = 2x \quad \Rightarrow v_x(1,1) = 2$

$* \ w_x(x,y) = 1 \quad \Rightarrow w_x(1,1) = 1$

$\therefore$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

$$h_x(1,1) = 9$$

Falta $h_y(1,1)$

$$h_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) \cdot \frac{\partial w}{\partial y}(x,y)$$

mismas que antes

$* \ u_y(1,1) = 2y\big|_{y=1} = 2$

$* \ v_y(1,1) = -1$

$* \ w_y(1,1) = 0$

$\therefore$

$$h_y(1,1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\nabla h(1,1) = (9,0)$$

Finalmente

$$P_1(x,y) = 5 + 9 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1)$$

Si llamo π al plano

$$\boxed{\pi : \quad z = 5 + 9 \cdot (x-1) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2}$$