Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Primer Recuperatorio - Segundo Parcial - 10/08/2020

1. Sea $f(x,y) = xe^{2y}$ definida en $\mathbb{R}^2$. Hallar un valor aproximado de $1{,}01e^{0{,}01}$ usando el polinomio de Taylor de orden dos de f.

f es fácil de calcular en $(1,0)$

$$f(1,0) = 1 \cdot e^{2\cdot 0}$$
$$= 1$$

Por lo que puedo calcular su Polin. de Taylor en $(1,0)$ y usarlo para aproximar el valor de f en $(1{,}01,\ 0{,}005)$

Armo Polinomio

- $f(1,0) = 1$
- $f_x(1,0) = e^{2y}\Big|_{(1,0)} = 1$
- $f_y(1,0) = 2x \cdot e^{2y}\Big|_{(1,0)} = 2$
- $f_{xx}(1,0) = 0$
- $f_{yy}(1,0) = 4x \cdot e^{2y}\Big|_{(1,0)} = 4$

pues f es $\mathcal{C}^\infty$

- $f_{xy}(1,0) = 2e^{2y}\Big|_{(1,0)} = 2 = f_{yx}(1,0)$

$$P_2(x,y) = \underbrace{f(1,0)}_{=1} + \underbrace{f_x(1,0)}_{=1} \cdot (x-1) + \underbrace{f_y(1,0)}_{=2} (y-0) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \underbrace{f_{xx}}_{=0} (x-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{f_{yy}}_{=4} \cdot (y-0)^2 +$$

$$+ \underbrace{f_{xy}}_{=2} (x-1)(y-0)$$

$$P_2(x,y) = 1 + (x-1) + 2y + 2y^2 + 2(x-1) \cdot y$$

Evalúo :

$$P_2(1{,}01;\ 0{,}005) = 1{,}02015$$

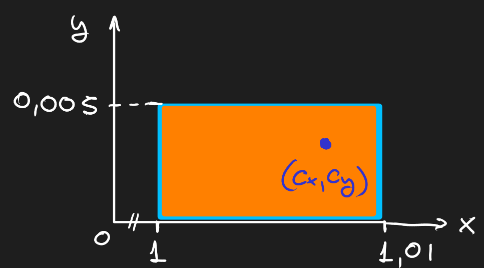
$$\therefore\ f(1{,}01;\ 0{,}005) = 1{,}01 \cdot e^{2 \cdot 0{,}005}$$

$$\boxed{1{,}01 \cdot e^{0{,}01} \approx 1{,}02015}$$

Si el ejercicio pidiera calcular el error, solo basta calcular las derivadas de tercer orden (como si quisieramos armar el polinomio de orden 3, pero sin la primera parte) pero en vez de evaluarlo en un valor particular, vamos a acotarlo, ya que no podemos saber exactamente el error (de saberlo exactamente, lo sumaríamos a nuestro resultado con error, y obtendríamos un resultado sin ningún error!).

Como x se mueve entre 1 y 1.01, e y se mueve entre 0 y 0.005, existe un (c_x, c_y) en ese rectángulo que representa el error exacto que estamos cometiendo.

Como no lo conocemos, lo acotamos lo mejor posible, y con eso podemos decir que estamos cometiendo un error de A LO SUMO (como máximo) el error calculado (acotado).

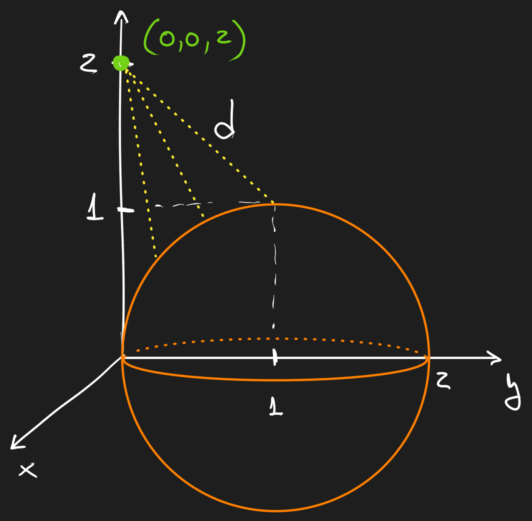


2. Encontrar los puntos más lejanos y más cercanos de la superficie de ecuación

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

al punto $(0, 0, 2)$.

← esfera con centro en $(0,1,0)$



Esféricas : centrada en $(0,1,0)$!

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + 1 \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases} \qquad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Quiero distancia d mínima, puedo usar norma cuadrado:

$$d = \| (1 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi, \ \sin\theta \cdot \sin\varphi + 1, \ \cos\varphi) - (0,0,2) \|^2$$

$$= \cos^2\theta \cdot \sin^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + 2\sin\theta \cdot \sin\varphi + 1 + (\cos\varphi - 2)^2$$

$$= \sin^2\varphi \cdot 1 + 2\sin\theta \cdot \sin\varphi + 1 + \cos^2\varphi - 4\cos\varphi + 4$$

$$d(\theta, \varphi) = 2\sin\theta \cdot \sin\varphi - 4\cos\varphi + 6$$

Busco mínimo de esta función $d(\theta, \varphi)$

Calculo gradiente

$$\nabla d = (2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi, \ 2\sin\theta \cdot \cos\varphi + 4\sin\varphi)$$

$$\nabla d = \vec{0} \iff \begin{cases} 2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi = 0 \\ 2 \sin\theta \cdot \cos\varphi + 4 \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta \cdot \sin\varphi = 0 & \text{I} \\ \sin\theta \cdot \cos\varphi + 2\sin\varphi = 0 & \text{II} \end{cases}$$

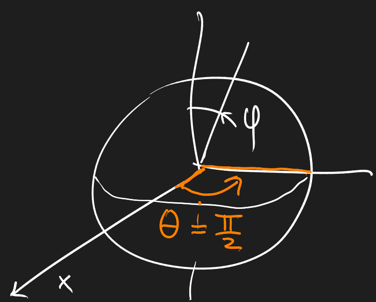
de I

$$\cos\theta \cdot \sin\varphi = 0 \iff \cos\theta = 0 \text{ ó } \sin\varphi = 0$$

- Si $\cos\theta = 0$

$$\Rightarrow \sin\theta = 1 \text{ ó } \sin\theta = -1$$

$*$ Si $\sin\theta = 1$



Sobre plano yz

en II

$$\Rightarrow \underbrace{\sin\theta}_{=1} \cdot \cos\varphi + 2\sin\varphi = 0$$

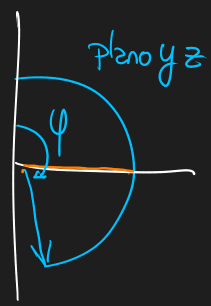
$$\cos\varphi = -2\sin\varphi$$

$$\cos\varphi \neq 0$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} = -2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$1 = -2\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{1}{2}$$



$$\varphi = \underbrace{\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\approx 0{,}46 < 0} + \pi \qquad \varphi \in [0, \pi]$$

(en calculadora)

Está re lejos! tal vez sea máx.

$*$ Si $\sin\theta = -1$

en (II) $\Rightarrow \underbrace{\sin\theta}_{=-1} \cdot \cos\varphi + 2\sin\varphi = 0$

$$\cos\varphi = 2\sin\varphi$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}46 \in [0,\pi] \checkmark$$

Primer candidato a mín.

$$\begin{cases} \theta = \frac{3}{2}\pi \\ \varphi = \arctan\frac{1}{2} \end{cases}$$

Candidato a máx

$$\begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi \end{cases}$$

- Si $\sin\varphi = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\cos\varphi = -1}_{\varphi = \pi \in [0,\pi]}$ ó $\underbrace{\cos\varphi = +1}_{\varphi = 0 \in [0,\pi]}$

$$\Rightarrow \sin\theta \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{\pm 1} + \underbrace{2\sin\varphi}_{=0} = 0$$

$*$ Si $\cos\varphi = -1$

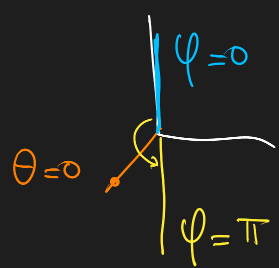
$\Rightarrow -\sin\theta = 0$

$$\theta = 0$$

$*$ Si $\cos\varphi = 1$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$

$$\theta = 0$$



Descarto $\varphi = \pi$ con $\theta = 0$ como mín

pues queda en el polo sur de la esfera

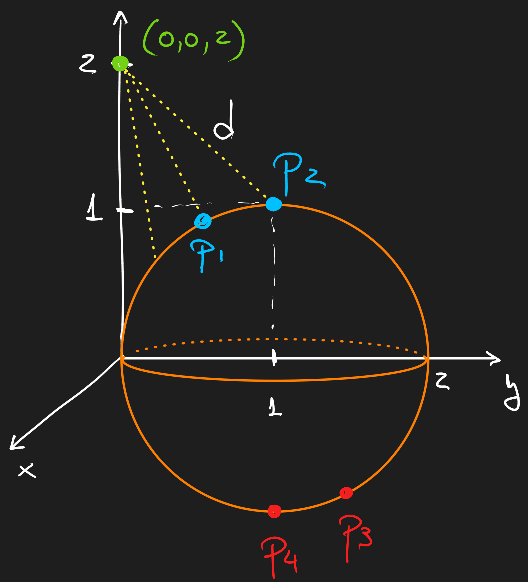
Candidato (a min)
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Candidato (a max)
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

Los posibles candidatos a mín (descartando los lejanos) son:

$$P_1 = (\theta, \varphi) = \left(\tfrac{3}{2}\pi,\ \arctan \tfrac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = (\theta, \varphi) = (0, 0)$$

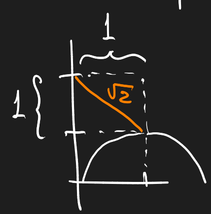


Solo basta ver distancia mínima

$$d(\theta, \varphi) = 2 \sin\theta \cdot \sin\varphi - 4\cos\varphi + 6$$

$$d(0,0) = -4 + 6 = 2$$

(No es la norma! por eso no es $\sqrt{2}$)



$$d\left(\tfrac{3}{2}\pi,\ \arctan\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot (-1) \cdot \sin\left(\arctan\tfrac{1}{2}\right) - 4 \cdot \cos\left(\arctan\tfrac{1}{2}\right) + 6$$

$$\approx 3{,}317$$

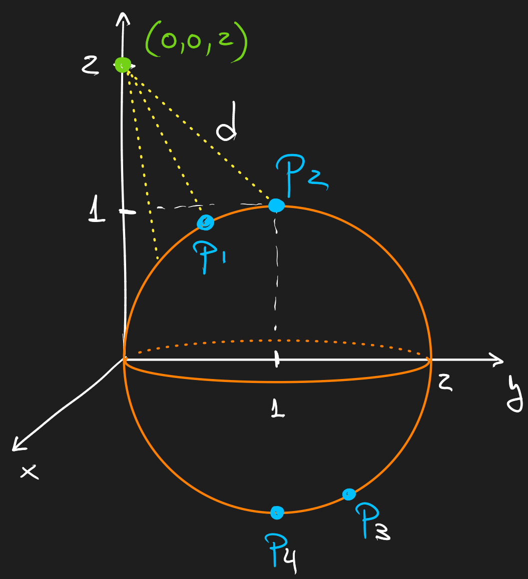
$\therefore$ la distancia mínima se da entre el punto y el polo norte de la esfera.

Veo máx. distancias

$$d(\theta,\varphi) = 2\sin\theta \cdot \sin\varphi - 4\cos\varphi + 6$$

$$P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right)$$

$$P_4 = (0, \pi)$$



$$d(0,\pi) = 6$$

$$d(P_3) = 2 \cdot 1 \cdot \sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right) - 4 \cdot \cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right) + 6$$

$$\approx 10{,}472$$

Finalmente,

Mín: $(\theta,\varphi) = (0,0)$

Máx: $(\theta,\varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right)$

Falta escribirlo en coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + 1 \\ z = r \cdot \cos\varphi \end{cases}$$

- Si $(\theta, \varphi) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

- Si $(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right) \\ z = \cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right) \end{cases}$

En Cartesianas

Mín : $(x, y, z) = (0, 1, 1)$

Máx : $(x, y, z) = \left(0,\ 1 + \sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right),\ \cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\right)\right)$

$\approx (0\ ;\ 1{,}45\ ;\ -0{,}89)$

Fin ◡◡ https://www.geogebra.org/3d/ycjc5xce

Obs : notar que existe fórmula cerrada para

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Dato extra que surgió de ver en wolfram si podía escribir lo de arriba de una forma más linda.

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

3. Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx dy$

(b) $\displaystyle\iiint_E (y+z)\, dV$ donde E es el sólido delimitado por el plano $z = 1 - y$ y la superficie $x = y^2$ en el primer octante.

a) Quiero cambiar el orden de dependencia de las variables

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

^{2}

$$0 \leq |y| \leq x^2 \leq 1$$

$y \geq 0$

$$0 \leq y \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{y=x^2} \frac{\sin x}{x}\, dy dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{\sin x}{x} \cdot x^2\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \sin x \cdot x\, dx$$

$u = x \qquad du = 1$

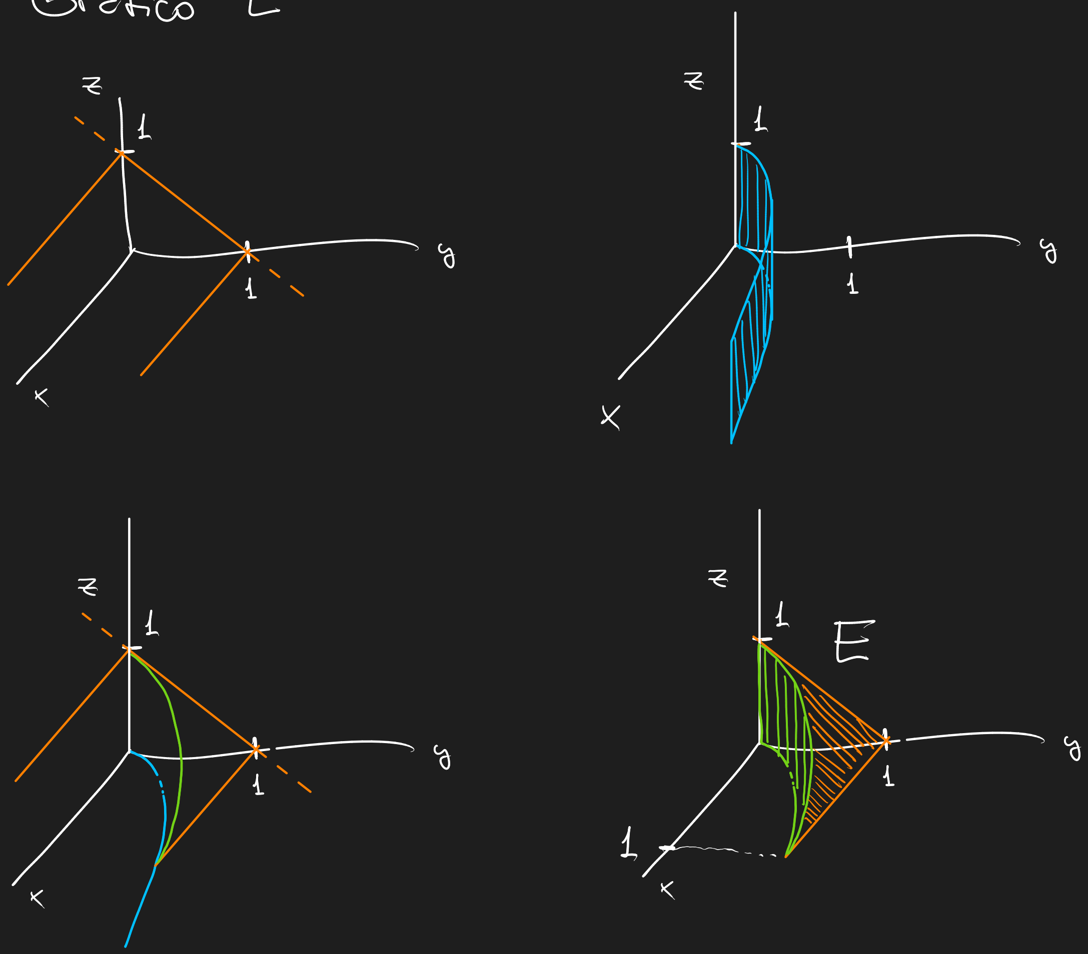
$v = -\cos x \qquad dv = \sin x$

$$= -x \cdot \cos x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\cos x \cdot dx$$

$$= \sin x - x \cdot \cos x \Big|_0^1$$

$$= \boxed{\sin 1 - \cos 1}$$

b) Grafico E



$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 , \\ 0 \leq x \leq y^2 , \\ 0 \leq z \leq 1-y \end{array} \right\}$$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{1-y} y+z \, dv =$$

$$= \underbrace{\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{1-y} y \, dv}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{1-y} z \, dv}_{\mathrm{II}}$$

I

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{1-y} y \, dv = \int_{0}^{1} y\cdot(1-y)\cdot y^2 \, dy$$

$$= \int_{0}^{1} y^3 - y^4 \, dy$$

$$= \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

II

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2}\int_{z=0}^{1-y} z \, dv = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-y} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} (1-y)^2 \, dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} y^2(y^2-2y+1) \, dy$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{y^5}{5} - \cancel{2}\cdot\frac{y^4}{\cancel{4}\,2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{60}$$

Finalmente $\mathrm{I} + \mathrm{II}$

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} \int_{z=0}^{1-y} y + z \; dV = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{60}$$

$$\boxed{\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y^2} \int_{z=0}^{1-y} y + z \; dV = \frac{1}{15}}$$

4. La densidad de un sólido esférico de radio R está dada por $(1+\rho^3)^{-1}$ donde ρ es la distancia al centro de la esfera. Calcular la masa total de la esfera.

¡¿ Cómo van a usar ρ para una distancia dentro de una densidad ?!

Cómo escribo ahora la densidad ?

$\rho(\rho) = (1+\rho^3)^{-1}$?

[modo quejón off]

Llamo d a la distancia

$$\underset{\text{densidad}}{\rho}(d) = (1+d^3)^{-1}$$

A su vez, d es función

(Sin pérdida de generalidad, asumo (0,0,0) el centro de la esfera)

$$d(x,y,z) = \|(x,y,z)\|$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Me piden resolver

$$\iiint_{\text{Esfera}} \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dv$$

Si uso esféricas:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi & r \in [0,R] \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & \theta \in [0,2\pi) \\ z = r \cdot \cos\varphi & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \cdot \left((\cos^2\theta + \sin^2\theta) \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \right)$$
$$= r^2$$

$$\iiint_{\text{Esfera}} \frac{1}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\, dv =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{1+\underbrace{\left(r^2\right)^{3/2}}_{\substack{= r^3 \\ \uparrow \\ r>0}}} \cdot \overset{\substack{\text{Jacobiano} \\ \downarrow}}{r^2} \cdot dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{r^2}{1+r^3} \cdot dr\, d\varphi\, d\theta$$

Recuerdo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log x^3 = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan x^3 = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^3} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{r^2}{1+r^3} \cdot dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{3} \log\left(1+r^3\right)\Big|_0^R \cdot d\varphi\, d\theta$$

$\log(1) = 0$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{3} \log\left(1+R^3\right) \cdot d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \log\left(1+R^3\right) \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} 1 \cdot d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \log\left(1+R^3\right) \cdot \pi \cdot 2\pi$$

$$\boxed{= \frac{2}{3} \cdot \pi^2 \cdot \log\left(1+R^3\right)}$$