Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)
Primer cuatrimestre 2020

# Práctica 1: Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Aplicaciones

1. Representar graficamente en $\mathbb{R}^3$ las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra.

   *a*) $y = -4$,   *b*) $x > 3$,   *c*) $0 \leq z \leq 6$,

   *d*) $x = z$,   *e*) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$,   *f*) $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$,

   *g*) $x^2 + y^2 \leq 9$.

2. Mostrar que las siguientes ecuaciones representan una esfera. Dar su centro y su radio.

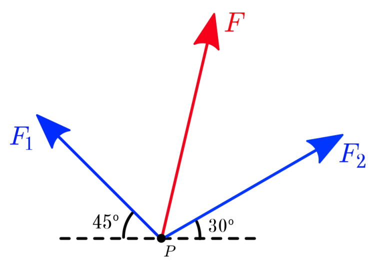
   *a*) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$,   *b*) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$.

3. En física e ingeniería los vectores son útiles en muchos aspectos. Por ejemplo, dado que una fuerza ejercida sobre un objeto está determinada por una magnitud y una dirección, se puede utilizar un vector para representarla. La unidad de medida clásica para la magnitud de una fuerza es newtons $(N)$.

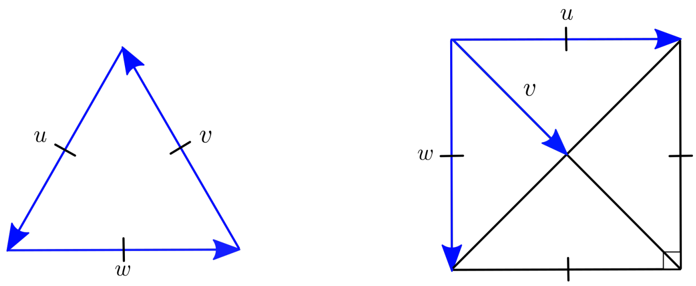
   Si una niña empuja un trineo por la ladera de una montaña con una fuerza de 50 $N$ y la ladera de la montaña tiene una inclinación de $38°$ sobre la horizontal, calcular la componente horizontal y la vertical de dicha fuerza.

4. Si hay varias fuerzas actuando sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por dicho objeto es la suma de todas fuerzas.

   Dos fuerzas $F_1$ y $F_2$ con magnitudes de 10 $N$ y 12 $N$ respectivamente actuan sobre un objeto en un punto $P$ como muestra la figura. Calcular la fuerza resultante $F$ actuando sobre dicho objeto y su magnitud.



5. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma 1. Hallar $u \cdot v$ y $u \cdot w$ en los siguientes casos.




6. Para cada uno de los siguientes vectores $u, v$, hallar $p_u(v)$, la proyección de $v$ sobre $u$.

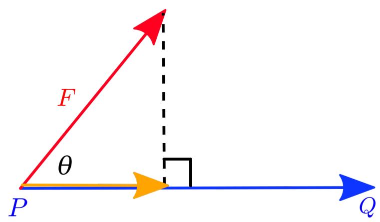
   *a)* $u = (3, -4),\ v = (5, 0)$,   *b)* $u = (1, 2),\ v = (-4, 1)$,

   *c)* $u = (3, 6, 2),\ v = (1, 2, 3)$.

7. Sean $u, v$ vectores. Mostrar que el vector $o_u(v) = v - p_u(v)$ es ortogonal a $u$.

8. Sean $u, v$ vectores no nulos. Dar condiciones necesarias y suficientes para que $p_u(v) = p_v(u)$.

9. Supongamos que para mover un objeto del punto $P$ al punto $Q$ aplicamos una fuerza constante $F$ en una determinada dirección formando un ángulo $\theta$ con la horizontal, como muestra la imagen.



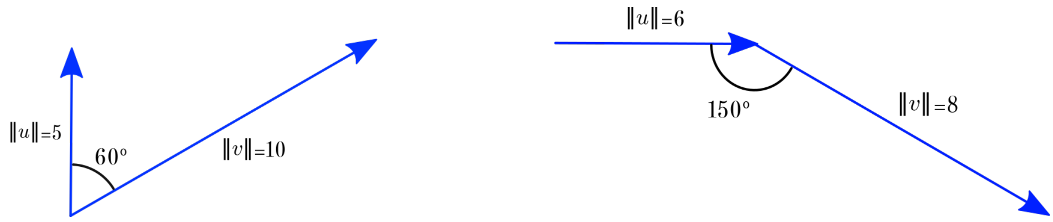

   El **trabajo** $W$ realizado por $F$ sobre dicho objeto se define como el producto entre la distancia recorrida ($\|Q - P\|$) y la componente de la fuerza a lo largo de $\overrightarrow{PQ}$ ($\|F\| \cos\theta$), es decir,

$$W = \|Q - P\|\|F\| \cos\theta = (Q - P) \cdot F.$$

   Hallar el trabajo realizado por una fuerza $F$ con una magnitud de 20 $N$ aplicada en la dirección de 50° sobre la horizontal para desplazar un objeto 4 $mts$.

10. Hallar el trabajo realizado por una fuerza $F = (8, -6, 9)$ que mueve un objeto del punto $P = (0, 10, 8)$ al punto $Q = (6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

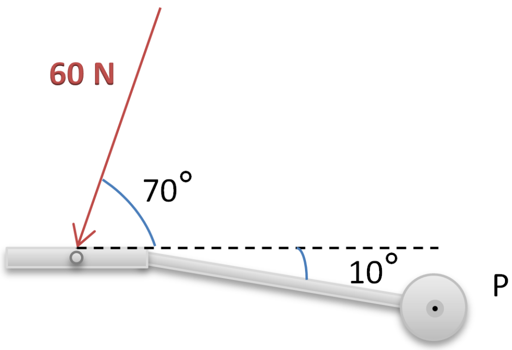
11. Decidir en que sentido apunta $u \times v$ y hallar $\|u \times v\|$ en cada uno de los siguientes casos.




12. Hallar el área del paralelogramo de vértices $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 3, 6)$, $C = (3, 8, 6)$ y $D = (3, 7, 3)$.

13. Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, dicho cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. El **torque** o **momento** de una fuerza es la capacidad que tiene para producir dicho movimiento de rotación. El torque se calcula como el producto vectorial de los vectores de posición y fuerza.

    Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza $F$ de 60 $N$ como muestra la imagen. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Encontrar la norma del torque de $F$ respecto al punto $P$.




14. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vectores. Probar que $u \cdot (v \times w) = \det(A)$ donde $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ es la matriz que tiene a $u, v$ y $w$ como filas.

15. Sean $A = (2, 0, -1)$, $B = (4, 1, 0)$, $C = (3, -1, 1)$ y $D = (2, -2, 2)$. Calcular el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes $AB$, $AC$ y $AD$.

16. Usar propiedades del producto escalar y del vectorial para decidir si los puntos $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, -1, 6)$, $C = (5, 2, 0)$ y $D = (3, 6, -4)$ están en el mismo plano.

17. i) Encontrar una ecuación paramétrica del plano $\Pi$ que pasa por los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (3, 4, 1)$.

    ii) Hallar $N$ la normal y dar una ecuación implícita de $\Pi$.

18. i) Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(1, -1, 2) + (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(-1, 1, 0) + (2, 0, 2).$$

ii) Encontrar una ecuación del plano que contiene a $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$.

19. Para $a \in \mathbb{R}$, dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones. Se sugiere complementar la resolución de este ejercicio con GeoGebra (utilizar deslizadores puede ser útil).

*a*) $x + y + z = a$, *b*) $x + y + az = 1$, *c*) $\cos(a)y + \operatorname{sen}(a)z = 1$.