

Campos Vectoriales

en \mathbb{R}^2

$$F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \quad \text{con } P, Q: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$= i \cdot P(x,y) + j \cdot Q(x,y)$$

en \mathbb{R}^3

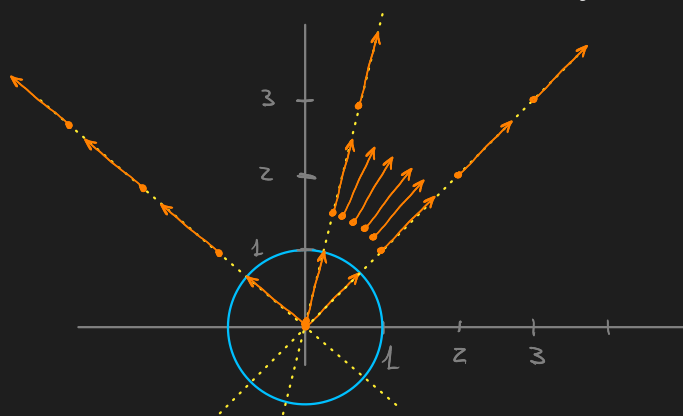
$$\text{Same con } F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{y } P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$1) F(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$\text{con } D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \quad \text{no está definido}$$



Campos Gradientes

- Un modo de obtener campos

Si $f = f(x, y)$ con derivadas parciales en D

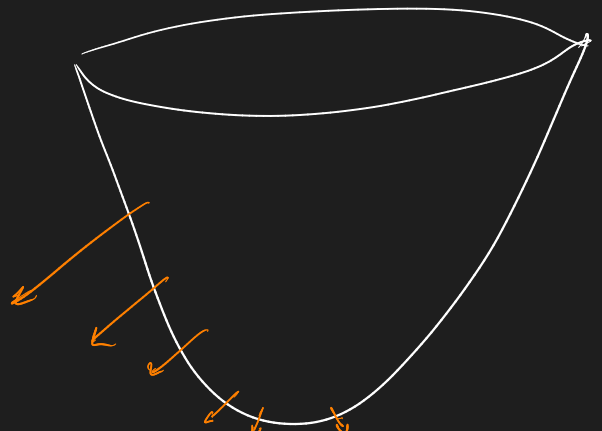
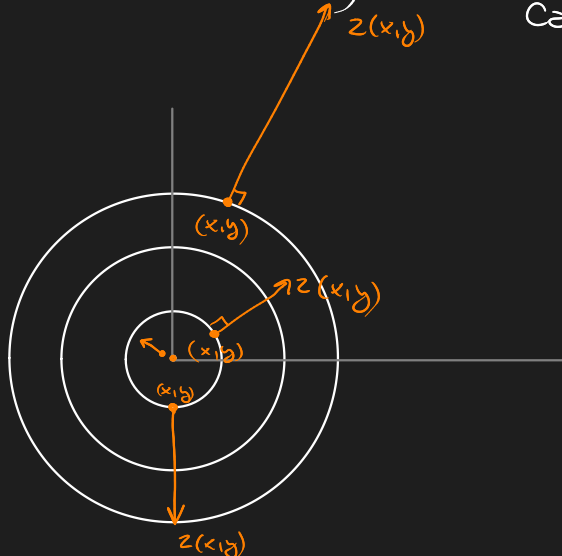
definimos **Campo Gradiente** como:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= F(x, y) && \text{definido en } D \\ &\parallel && \\ &(f_x, f_y) \end{aligned}$$

- Estos campos poseen las propiedades de los gradientes

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = (2x, 2y) \leftarrow \text{el cual sabemos es normal} \\ = z(x, y) \quad \text{a las curvas de nivel en} \\ \text{cada } (x, y)$$



Campos Conservativos

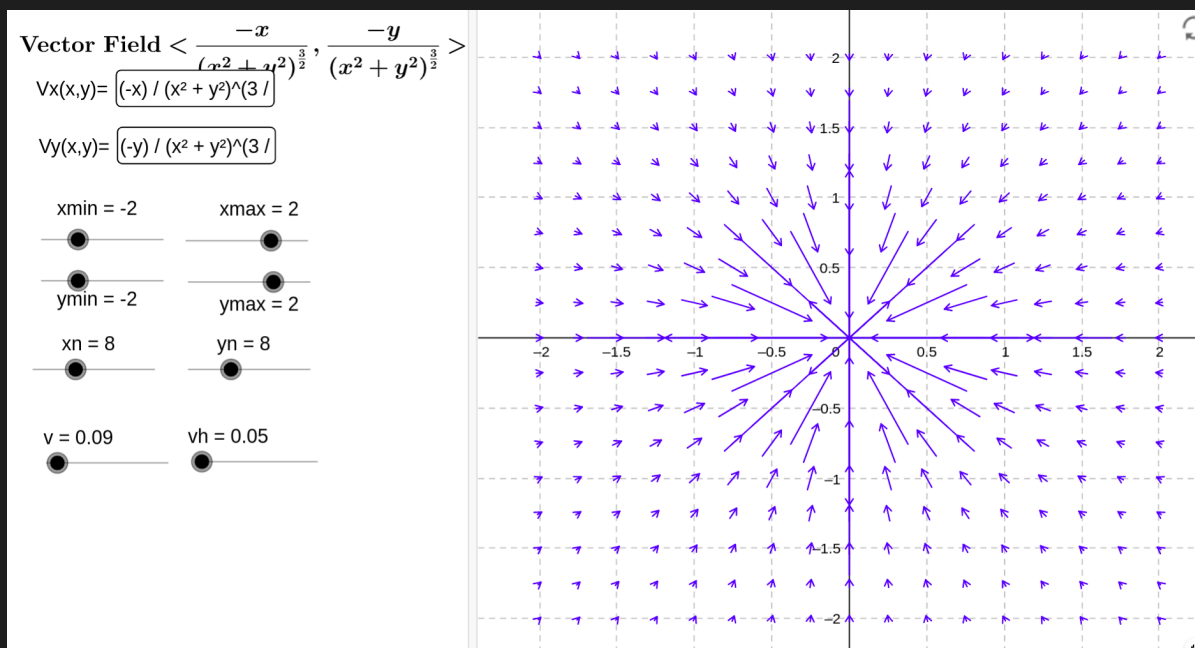
$$F = \nabla f$$

↑ f es un Potencial del campo F

Ejemplo : Ley de Gravitación de Newton

$$|F| = \frac{\overset{\text{masa}}{m} \cdot \overset{\text{de gravitación}}{M} \cdot G}{\underset{\text{distancia}}{r^2}}$$

$$F(x, y, z) = \text{cte} \cdot \frac{1}{\| (x, y, z) \|^2} \cdot \left(- \frac{(x, y, z)}{\| (x, y, z) \|} \right) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{normalizo la} \\ \text{fuerza} \end{array}$$



Podemos encontrar un potencial!

$$F = \nabla f \quad \checkmark$$

$$\text{con } f(x, y, z) = \text{cte} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

No todo Campo Vectorial es conservativo!

Teorema [1]

$$\text{Sea } F = (P, Q) \quad \text{con } P, Q \in \mathcal{C}^1$$

$$\text{Si } F \text{ es conservativo} \Rightarrow Q_x = P_y$$

derivadas
Cruzadas!

Teorema [2]

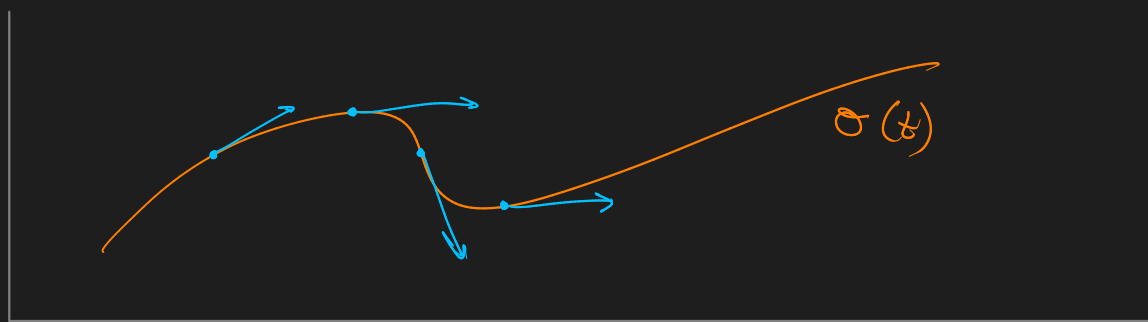
$$\text{Sea } F = (P, Q) \quad \underline{\text{definido}} \text{ en } \mathbb{R}^2 \text{ (o un disco)}$$

$$\text{Si } P, Q \text{ son } \mathcal{C}^1$$

$$\text{y } Q_x = P_y$$

$$\Rightarrow F \text{ es } \underline{\text{conservativo}} \cdot (\text{pero } \underline{\text{debe}} \text{ valer } !)$$

Líneas de Flujo



$$\sigma(t) = (x(t), y(t))$$

↑ Llamemos "líneas de flujo del campo F "

Si F es el campo de Velocidades de $\sigma(t)$

Para eso, debe suceder que

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

↑ evaluando el campo sobre la curva
obtenemos la velocidad de la partícula
que se mueve por ella siendo
trasladada por las fuerzas del campo.

Ejemplo:

$$\text{Si } F(x, y) = (-x, -y)$$

• Hallar las líneas de flujo de F :

$$\text{Queremos } \sigma(t) = (x(t), y(t))$$

Como F está bien definida en \mathbb{R}^2

$$\text{y además } Q_x = P_y = 0$$

$\Rightarrow F$ es conservativo.

Sea que

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

$$(x'(t), y'(t)) = (-x(t), -y(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x'(t)}{x(t)} = -1 \\ \frac{y'}{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int \frac{x'(t)}{x(t)} = \int -1 \\ \int \frac{y'}{y} = \int -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x(t)) = -t \\ \ln(y(t)) = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c \cdot e^{-t} \\ y(t) = d \cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$\therefore \sigma(t) = (c \cdot e^{-t}, d \cdot e^{-t}) //$$

Otro tipo de ejercicio :

Nos dan $\sigma(t)$

\Rightarrow obtener F / $\sigma(t)$ sea líneas de flujo de F .

