**Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)**

Examen Final - 23/04/2021

**1**. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + 8y^3}$.

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.

(b) Estudiar la diferenciabilidad de $f$ en $(0,0)$.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$(x_0,y_0) = (0,0)$

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{8.\, h^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2 \cdot \frac{h}{h} = 2 \quad \checkmark$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\overbrace{f(0,0)}^{=0} + \overbrace{f_x(0,0)}^{=1} \cdot x + \overbrace{f_y(0,0)}^{=2}\, y\right)}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[3]{x^3+8y^3} - x - 2y}{\|(x,y)\|}$$

sospecho que <u>no</u> es dif.

$y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{9x^3} - 3x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{9}\cdot x - 3x}{\sqrt{2}\cdot |x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt[3]{9} - 3\right)}{\sqrt{2}\cdot |x|}$$

Veo que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\sqrt[3]{9}-3\right)}{\sqrt{2}\cdot |x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\sqrt[3]{9}-3\right)}{\sqrt{2}\cdot x}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{9}-3\right)}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$\therefore$ <u>no</u> es diferenciable.

**2**. Calcular la integral

$$\int_0^1 \int_{x^3}^1 x^2 \cos(y^2)\, dy\, dx$$

**3**. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x + e^y, 2x - y^2).$$

Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $h = g \circ f$. Se sabe que el polinomio de Taylor de orden 2 de $h$ en $(0, 0)$ es $T_2(x, y) = 3x + y - x^2 + 2xy + y^2$.

(a) Calcular $g(1, 0)$ y $\nabla g(1, 0)$.

(b) Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

**4.** Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(1,2) = 0$ y $f_x(1,2) = 3$.

Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1,2) = 4$ y sea $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $u(x,y) = f(x,y)g(x,y)$. Probar que existe la derivada parcial $u_x(1,2)$ y calcularla.