Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Examen Final (21-07-2021)

Nombre y apellido:

L.U.:

Carrera:

1	2	3	4	NOTA

1. La función

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

no está definida en $(0, 0)$ ¿Se la puede definir en ese punto de forma que resulte continua? Si su respuesta es afirmativa, hágalo.

2. Verifique que la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y + z + 2 = 0$$

define implícitamente un función diferenciable $z = f(x, y)$ en todos los puntos de la superficie determinada por ella. Además encuentre una ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 1, 1)$.

3. Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$$

¿En que puntos la función f alcanza los valores máximos y mínimos absolutos sobre la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$?

4. Calcule

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{1/2} x^2 e^{y^2} \, dydx.$$

Nota. Justifique debidamente todas sus afirmaciones y respuestas.

Ej 1) Para poder definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en el origen debería pasar que

$f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Llamo L a dicho límite y estudio su existencia.

Probemos por curvas:

$y=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{3x^2}{x^2}\right) = \ln 3$

Luego $L = \ln(3)$ es candidato a límite

Tomo $y=x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{6x^2 - x^4}{2x^2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(3 - \frac{x^4}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(3 - \frac{x^2}{2}\right) = \ln 3$

Probando por otras curvas sigue dando $\ln 3$. Probemos que L vale $\ln 3$. Para eso, como el logaritmo es una función continua, basta ver que su argumento tiende a 3. Por definición:

Dado $\varepsilon > 0$ busco $\delta > 0$ de modo que si $0 < \|(x,y)\| < \delta$ valga que: $\left|\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2} - 3\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{3x^2+3y^2-x^2y^2}{x^2+y^2} - 3\right| = \left|\frac{3\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} - \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 3\right| =$$

$$= \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|x|^2|y|^2}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\cancel{\|(x,y)\|^2}\ \|(x,y)\|^2}{\cancel{\|(x,y)\|^2}} =$$

uso $|x| \leq \|(x,y)\|$
$|y| \leq \|(x,y)\|$

Escaneado con CamScanner

quiero

$\|(x,y)\|^2 < \delta^2 \leq \varepsilon$

uso $\|(x,y)\| < \delta$

Bastará tomar $\delta \leq \sqrt{\varepsilon}$

Luego: $L = \ln 3$

defino $f(0,0) = \ln 3$ y f resulta continua en $(0,0)$

Ej 2) Tengo una ecuación del tipo $F(x,y,z) = 0$ con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función C^1 (polinómica).

No es difícil verificar que el punto $(1,1,1)$ cumple la ecuación pues $F(1,1,1) = 1^3 + 1^3 + 1^3 - 3 - 3 + 1 + 2 = 0$

Con lo cual $S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ es un conjunto no vacío que representa una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Para cada punto $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ (sabemos que existen puntos así pues $S \neq \phi$) tenemos que:

1) $P \in S$

2) F es C^1

3) $F_z(P) = \underbrace{3z_0^2}_{\geq 0} + 1 > 0$, por lo que: $F_z(P) \neq 0$

Por el Teorema de la Función Implícita vale que: existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ del punto (x_0, y_0) y una $f: U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 de modo que $z_0 = f(x_0, y_0)$ y $z = f(x,y)$ $\forall (x,y) \in U$.

Para hallar el plano tangente a S en $P = (1,1,1)$ podemos usar la ecuación:

$$\nabla F(1,1,1) \cdot (x-1, y-1; z-1) = 0$$

ya que $\nabla F(1,1,1)$ es perpendicular a S en $P = (1,1,1)$

Como $F_x(x,y,z) = 3x^2 - 3 \Rightarrow F_x(1,1,1) = 0$

$F_y(x,y,z) = 3y^2 - 3 \Rightarrow F_y(1,1,1) = 0$

$F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \Rightarrow F_z(1,1,1) = 4$

El plano tangente a S en $P = (1,1,1)$ es

$$(0,0,4) \cdot (x-1; y-1, z-1) = 0$$

$$4(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: \quad z = 1}$$

Ej 3) Como $f(x,y)$ es continua (por ser una función polinómica) y el conjunto R es compacto (cerrado y acotado) por tratarse de un círculo de radio 3 que incluye el borde, entonces por Teorema, puedo asegurar que f alcanza extremos absolutos en R.
Me basta hallar todos los candidatos y evaluar la función en ellos para determinar en cuál de ellos f alcanza el MAXIMO y en cuál alcanza el MINIMO.
En el interior de R: los candidatos son los que anulan el ∇f (pues f es C^1)

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \text{ sii } \begin{cases} 0 = f_x(x,y) = 2x - 3 - y & (1) \\ 0 = f_y(x,y) = 2y - x & (2) \end{cases}$$

De (2) $x = 2y$, reemplazo en (1): $0 = 4y - 3 - y$ sii $y = 1$, luego $x = 2y = 2$

El punto $\boxed{P_1 = (2,1)}$ es pto. crítico de f y está en R° (pues $2^2 + 1^2 < 9$)

En el Borde de R: por ser una circunferencia de radio 3 los puntos pueden escribirse como:

$$(x,y) = (3\cos t\,,\ 3\,\text{sen}\,t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

Entonces $f(x,y) = 9\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 t - 9\cos t - 9\cos t\,\text{sen}\,t$

$$= 9 - 9\cos t - 9\cos t\,\text{sen}\,t = g(t)$$

$g: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

Los puntos críticos de f en ∂R son los correspondientes a los ptos críticos de g:

$t = 0$ y $t = 2\pi$ (extremos del intervalo $[0, 2\pi]$) se corresponde con el punto $\boxed{P_2 = (3,0)}$

y los t tal que $0 = g'(t) = 9\,\text{sen}\,t - 9(-\text{sen}^2 t + \cos^2 t)$

sii $0 = 9\,\text{sen}\,t + 9\,\text{sen}^2 t - 9\cos^2 t =$

↳ uso $-\cos^2 t = \text{sen}^2 t - 1$

sii $0 = 9\,\text{sen}\,t + 9\,\text{sen}^2 t + 9(\text{sen}^2 t - 1)$

sii $0 = 2\,\text{sen}^2 t + \text{sen}\,t - 1$ (Tomo $\alpha = \text{sen}\,t$)

$0 = 2\alpha^2 + \alpha - 1$

sii $\alpha = 1/2$ ó $\alpha = -1$

$\text{sen}\,t = 1/2$ ó $\text{sen}\,t = -1$

$t = \pi/6$ $\quad$ $t = \frac{5}{6}\pi$ $\quad$ $t = 3/2\,\pi$

$\boxed{P_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3/2\right)}$ $\quad$ $\boxed{P_4 = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3/2\right)}$ $\quad$ $\boxed{P_5 = (0,-3)}$

Tenemos los cinco candidatos a extremos absolutos de f en R. Evaluando en ellos obtenemos:

$f(P_1) = 4+1-6-2 = -3$, $f(P_2) = 9-9 = 0$; $f(P_3) = 9 - \frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}\sqrt{3}$

$f(P_3) = 9 - \frac{27}{4}\sqrt{3} \simeq -2{,}69$; $f(P_4) = 9 + \frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{3} = 9 + \frac{27}{4}\sqrt{3} \simeq 20{,}6$

$f(P_5) = 9$

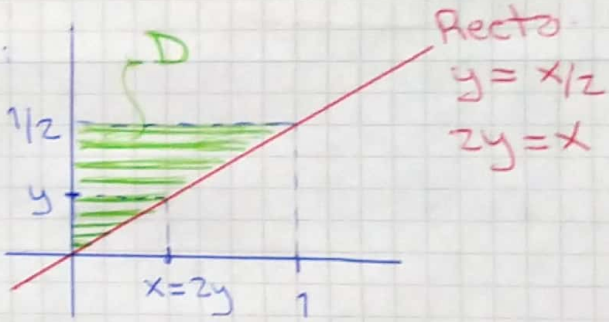
Por lo cual, en la región R, f alcanza su máximo valor en el punto P_4 y su mínimo en P_2.

Ej 4) $$I = \int_0^1 \int_{x/2}^{1/2} x^2 e^{y^2}\, dy\, dx$$

La función $f(x,y) = x^2 e^{y^2}$ no es fácilmente integrable respecto a "y" pero, como es continua, podemos cambiar el orden de integración (por Fubini)

La región de integración es:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$$



Podemos describir a D como: $0 \le y \le 1/2$; $0 \le x \le$ "recta"

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1/2 \\ 0 \le x \le 2y \end{cases}$$

Luego $$I = \int_0^{1/2}\int_0^{2y} x^2 e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^{1/2} e^{y^2} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=2y} dy$$

$$= \int_0^{1/2} e^{y^2} \frac{8y^3}{3}\, dy = \frac{8}{3}\int_0^{1/2} e^{\overset{t}{y^2}}\ \overset{t}{y^2}\ \overset{dt/2}{y\, dy} =$$

$\hookrightarrow$ Sust.
$$\begin{cases} t = y^2 \\ dt = 2y\, dy \end{cases}$$

$$= \frac{4}{3}\int_{t=0}^{t=1/4} e^t\ t\ dt$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{1/4} e^t \, t \, dt =$$

↳ partes: $u = t \qquad u' = 1$

$v' = e^t \qquad v = e^t$

$$= \frac{4}{3}\left[t e^t \Big|_0^{1/4} - \int_0^{1/4} e^t \, dt \right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4} e^{1/4} - 0 - e^{1/4} + 1 \right] = \frac{4}{3}\left[-\frac{3}{4} e^{1/4} + 1 \right] =$$

$$= \boxed{\frac{4}{3} - e^{1/4}}$$
