Campos Vectoriales

en $\mathbb{R}^2$

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = \big(P(x,y),\ Q(x,y)\big) \quad \text{con } P, Q : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$= i \cdot P(x,y) + j \cdot Q(x,y)$$

en $\mathbb{R}^3$

Same con $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

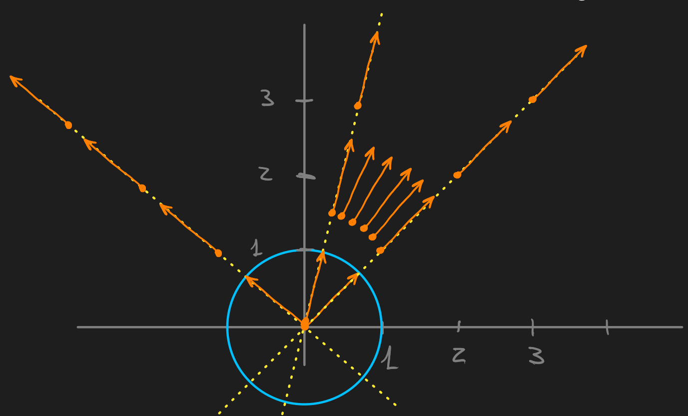
y $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ejemplo:

1) $F(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} , \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

no está definido

con $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



Campos Gradientes

- Un modo de obtener campos

Si $f = f(x,y)$ con derivadas parciales en D

definimos Campo Gradiente como:

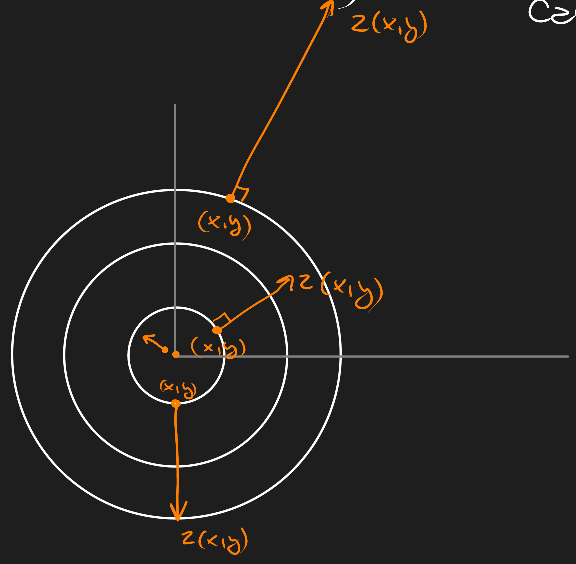
$$\nabla f(x,y) = F(x,y) \qquad \text{definido en } D$$
$$\nabla f(x,y) = (f_x, f_y)$$

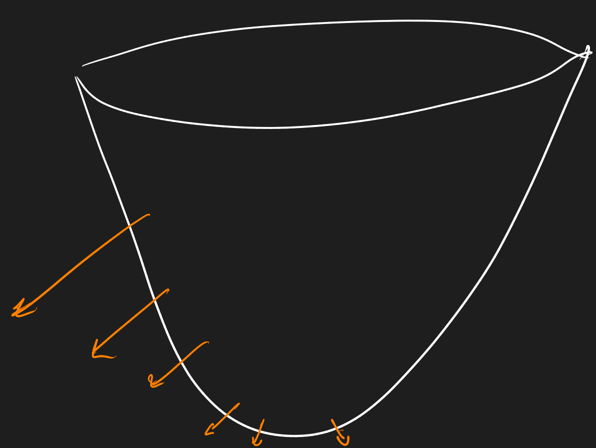
- Estos campos poseen las propiedades de los gradientes

Si $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ ← el cual sabemos es normal a las curvas de nivel en cada (x,y)

$= 2(x,y)$





Campos Conservativos

$$F = \nabla f$$

↑ f es un Potencial del campo F

Ejemplo: Ley de Gravitación de Newton

masas

↙ ↓

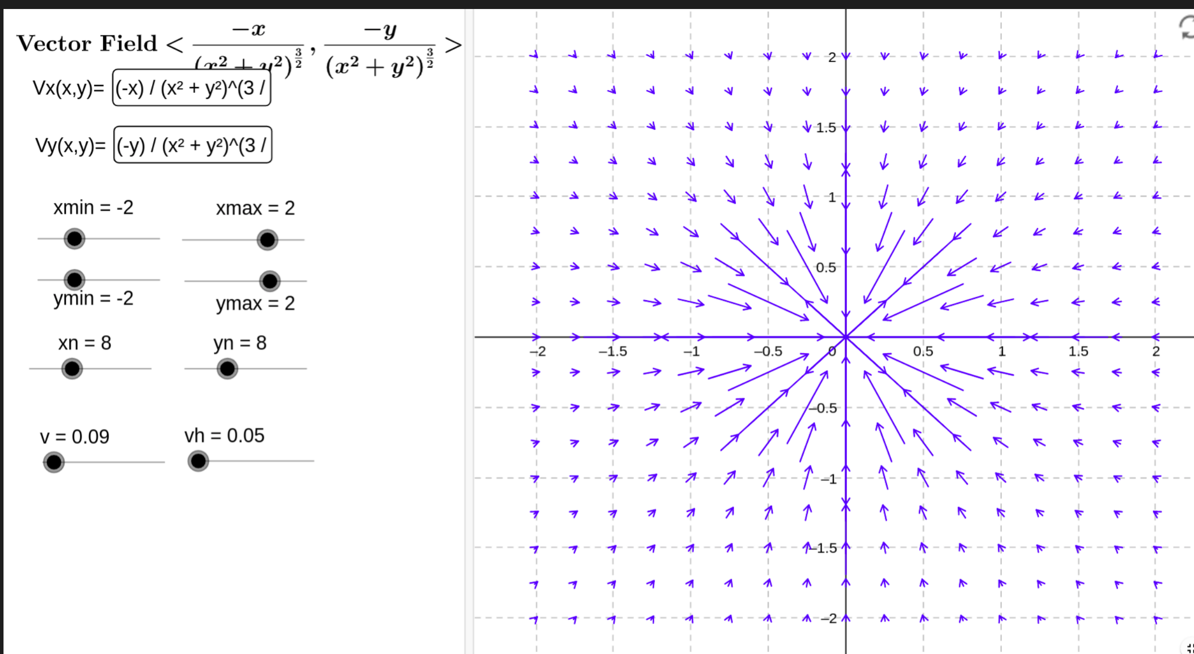
↙ cte gravitacional

$$|F| = \frac{m \cdot M \cdot G}{r^2}$$

↑ distancia

$$F(x,y,z) = \text{cte} \cdot \frac{1}{\|(x,y,z)\|^2} \cdot \left(- \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right)$$

↙ normalizo la fuerza



Podemos encontrar un potencial!

$$F = \nabla f$$

con $f(x,y,z) = cte \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

No todo Campo Vectorial es conservativo!

Teorema $\boxed{1}$

Sea $F = (P,Q)$ con $P, Q \in \mathcal{C}^1$

Si F es conservativo $\Rightarrow$ $Q_x = P_y$

derivadas cruzadas!

Teorema $\boxed{2}$

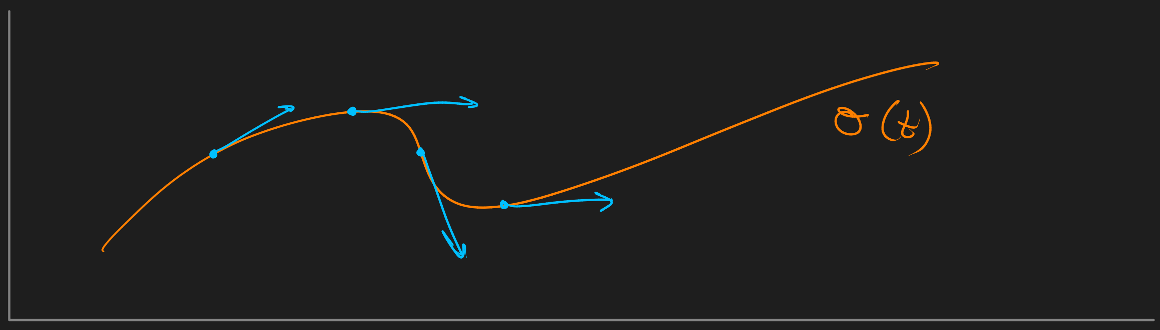
Sea $F = (P,Q)$ definido en $\mathbb{R}^2$ (o un disco)

Si P, Q son $\mathcal{C}^1$

y $Q_x = P_y$

$\Rightarrow$ F es conservativo. (pero debe valer!)

Líneas de Flujo



$$\sigma(t) = (x(t), y(t))$$

Llamamos "líneas de flujo del campo F"

Si F es el campo de velocidades de $\sigma(t)$

Para eso, debe suceder que

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

evaluando el campo sobre la curva obtenemos la velocidad de la partícula que se mueve por ella siendo trasladada por las fuerzas del campo.

Ejemplo:

Si $F(x,y) = (-x, -y)$

- Hallar las líneas de flujo de F:

Queremos $\sigma(t) = (x(t), y(t))$

Como F está bien definido en $\mathbb{R}^2$

y además $Q_x = P_y = 0$

$\Rightarrow F$ es conservativo.

Sé que

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

$$(x'(t), y'(t)) = (-x(t), -y(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'(t)}{x(t)} = -1 \\ \dfrac{y'}{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int \dfrac{x'(t)}{x(t)} = \int -1 \\ \int \dfrac{y'}{y} = \int -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x(t)) = -t \\ \ln(y(t)) = -t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = c.e^{-t} \\ y(t) = d.e^{-t} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \sigma(t) = (c.e^{-t}, d.e^{-t}) \quad //$$

Otro tipo de ejercicio:

Nos dan $\sigma(t)$

$\Rightarrow$ obtener F / $\sigma(t)$ sea línea de flujo de F.