

1. (a) Hallar una función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la intersección de

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad y = 3z^2$$

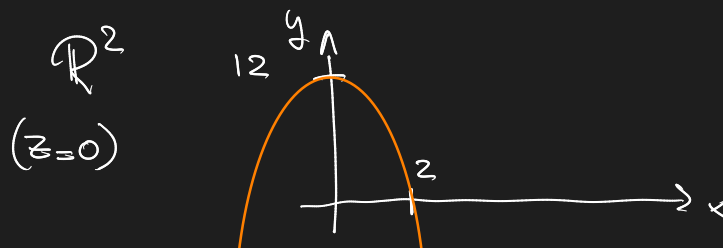
- (b) Para la función $r(t)$ hallada, encontrar valores t_1 y t_2 tales que $r(t_1) = (2, 0, 0)$ y $r(t_2) = (0, 12, 2)$

- (c) Calcular el área del paralelogramo de vértices $\vec{0}$, $A = r(t_1)$, $B = r(t_2)$ y $C = A + B$.

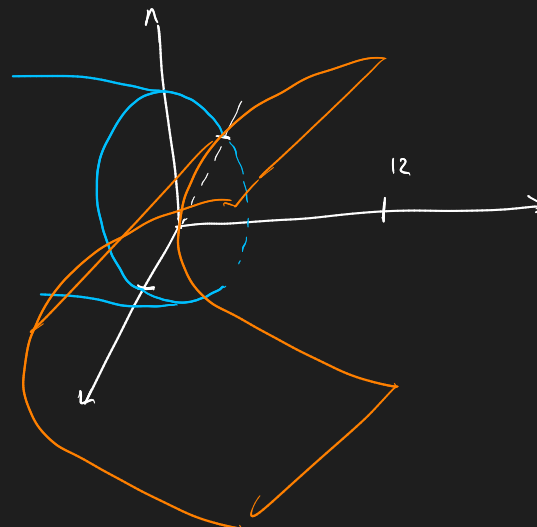
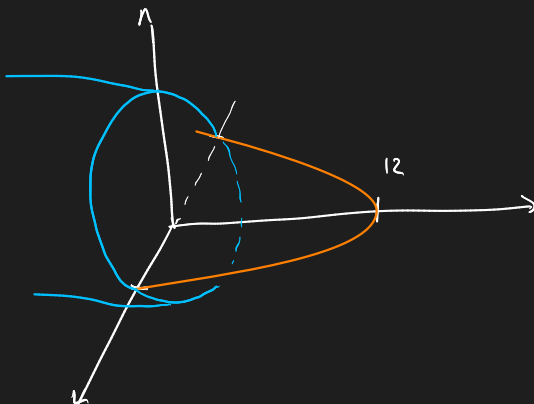
a) Después de pensar (abajo)

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 3z^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 4$$

$$y = 12 - 3x^2$$



\mathbb{R}^3



Parametrizo

$$\sigma(t) = \left(2 \cdot \cos t, \quad y, \quad \underbrace{2 \cdot \sin t}_z \right)$$

$$y = 3z^2$$

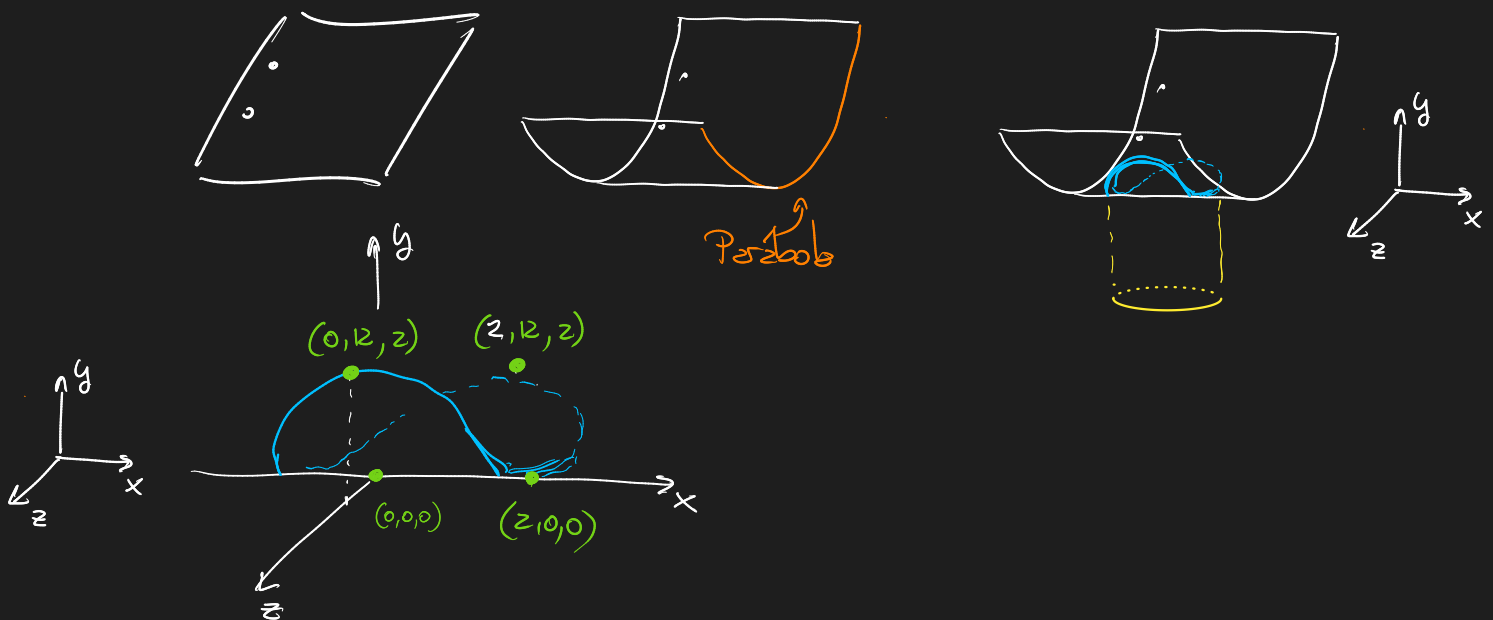
$$\sigma(t) = \left(2 \cdot \cos t, \quad 12 \cdot \sin^2 t, \quad 2 \cdot \sin t \right)$$

$$\text{con } t \in [0, 2\pi)$$

$$b) \quad \sigma(t_1) = (2, 0, 0) \Leftrightarrow t_1 = 0$$

$$\sigma(t_2) = (0, 12, 2) \Leftrightarrow t_2 = \pi$$

c) La curva es como recortar un círculo en un papel curvado como parábola





Cómo uso a) y b) para resolver c)?

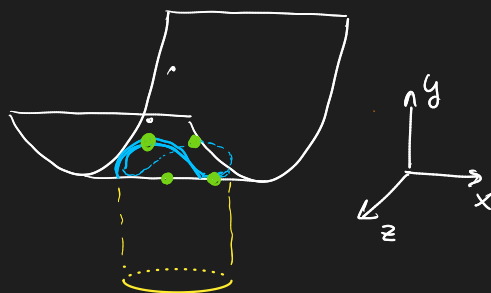
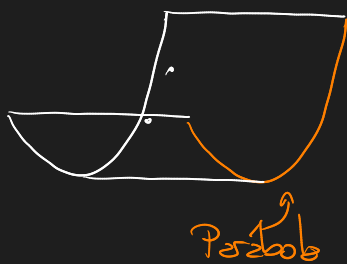
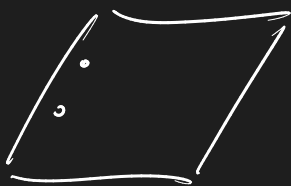
Con b) ya se dónde están los puntos, ni siquiera necesito a) ni el resto del enunciado para tener la información del paralelogramo e el espacio.

Primero, cómo podría calcular el area solo con esto, y

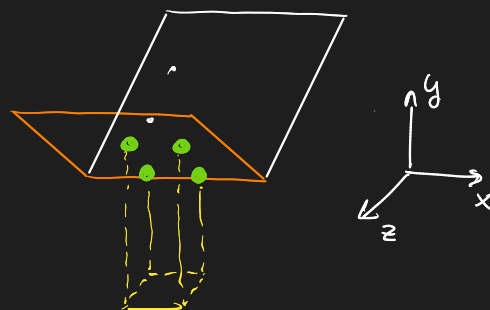
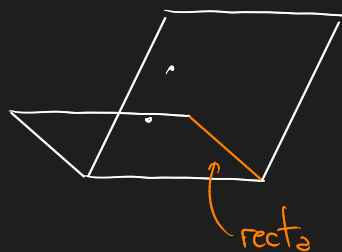
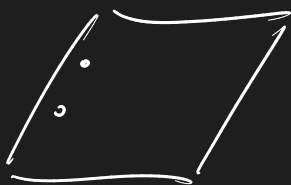
segundo, cómo puedo usar los datos anteriores para hacer más sencilla esta tarea?

Si en vez de $y = 3z^2$ tuviera un plano, éste pasaría por los 4 puntos

Antes

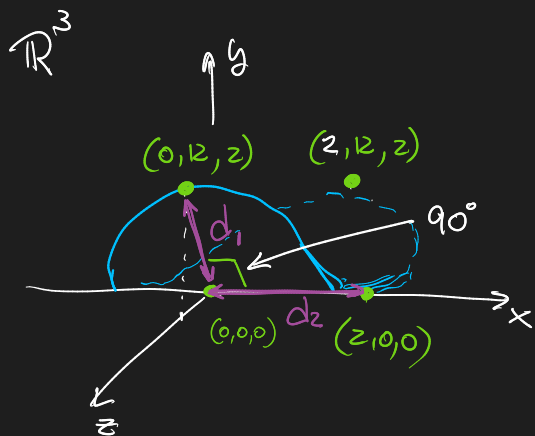


Ahora



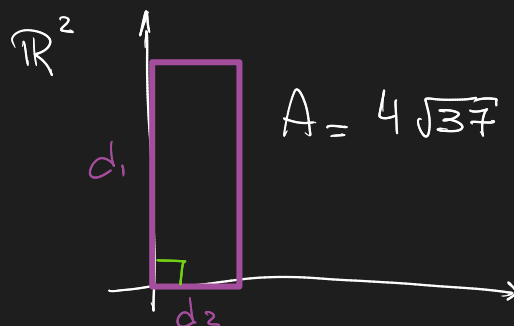
Falta completar. Revisa clases y videos.

Calcúlalo directamente (es clave que sea un paralelogramo)



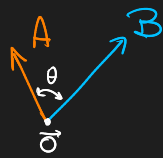
$$d_1 = \|(0, 12, 2)\| = 2\sqrt{37} \approx 12,17$$

$$d_2 = \|(2, 0, 0)\| = 2$$



Usando producto cruz!

Esto lo vi en el libro Stewart



$$\begin{aligned}\|A \times B\| &= \text{Área del Paralelogramo que formen} \\ &= \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \theta \\ \text{nuestro caso} \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{37} \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \\ &= 4\sqrt{37}\end{aligned}$$

Otra forma:

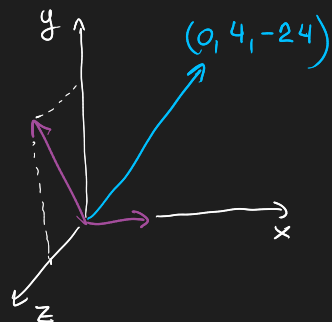
$$(0, 12, 2) \times (2, 0, 0) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot 0 - j \cdot (-4) + k \cdot (-24)$$

$$= (0, 4, -24)$$

↑ vector perpendicular
a los otros dos



$$\|(0, 4, -24)\| = 4\sqrt{37} \approx 24,33$$

Para recordar

$$A \times B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \sin \theta$$

↳ es sin y no cos pues debe valer
para rectángulos, y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ☹

¡U! intento fallido al copiar me!

1. (a) Hallar una función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la intersección de

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \text{y} \quad y = 3z^2$$

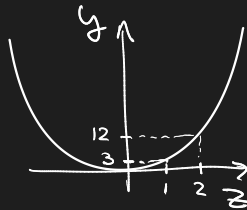
- (b) Para la función $r(t)$ hallada, encontrar valores t_1 y t_2 tales que $r(t_1) = (2, 0, 0)$ y $r(t_2) = (0, 12, 2)$

- (c) Calcular el área del paralelogramo de vértices $\vec{0}$, $A = r(t_1)$, $B = r(t_2)$ y $C = A + B$.

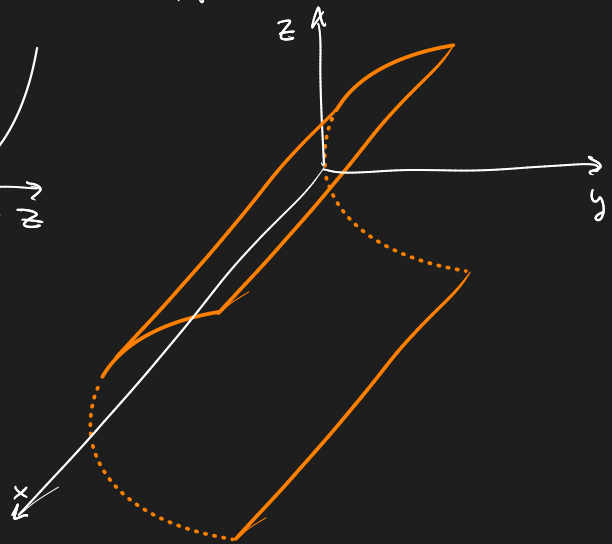
a) $x^2 + y^2 = 4$ Cilindro

$$y = 3z^2$$

\mathbb{R}^2



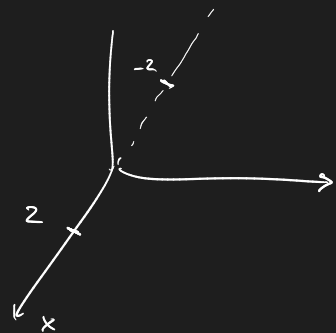
\mathbb{R}^3



Intersección de superficies

$$x^2 + (3z^2)^2 = 4$$

$$x^2 + 9z^4 = 4$$



• Si $x=0$

$$\Rightarrow z^4 = \frac{4}{9}$$

$$z = \sqrt[4]{\frac{4}{9}}$$

$z \geq 0$

• Si $z=0$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Puedo escribir la como

en xy , se mueve siempre como

$$\sigma(\theta) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, z)$$

$$\text{donde } r = 2 \quad (x^2 + y^2 = 2^2)$$

$$\theta \in [0, \pi) \text{ pues } y \geq 0$$

$$\sigma(\theta) = (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta, z)$$

Si reescribo

$$y = 3z^2$$

como

$$z = \pm \sqrt{\frac{y}{3}} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin \theta}$$

!
 con $\theta \in [0, \pi)$
 $\sin \theta$ no puede
 ser negativo

Defino

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin \theta}) & \theta \in [0, \pi) \\ (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta, -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin \theta}) & \theta \in [0, \pi) \end{cases}$$

Puedo parametrizarlo en una sola pieza?

$$x^2 + y^2 + z^4 = 4$$

$$x = r \cdot \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$z = r \cdot \sin \theta \quad r = \phi(\theta) ?$$

$$y = 3 \cdot z^2$$

Sigo con

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin \theta}) & \theta \in [0, \pi) \\ (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta, -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\sin \theta}) & \theta \in [0, \pi) \end{cases}$$

quiero

$$\sigma(t_1) = (2, 0, 0) \Leftrightarrow t_1 = 0$$

$$\sigma(t_2) = (0, 12, 2) \Leftrightarrow t_2 = \underline{\text{No}} \text{ existe sobre la curva, solo sobre } y = 3z^2$$

Demo

Todas los puntos de la intersección viven sobre el cilindro.

Pero $(0, 12, 2)$ no vive sobre el cilindro pues

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$0^2 + 12^2 = 4 \quad \underline{\text{Abys!}}$$

$\therefore (0, 12, 2) \notin \text{ la curva.}$



Acá me di cuenta que el cilindro es $x^2 + \textcolor{red}{z}^2 = 4$ y no $x^2 + \textcolor{red}{y}^2 = 4$

2. Calcular el siguiente límite para $a = 0$ y $a = 1$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-1)^2 x^2 y^2 + a \sin(y^2) x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$a = 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ← "norma 6°"
← "norma cubo"

• Si: $x = 0 \Rightarrow \lim \rightarrow 0$ ∴ si el $\lim \exists \Rightarrow$ debe ser cero

$$\left| \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2}{\|(x,y)\|^3} - 0 \right| \leq \frac{(x-1)^2 \cdot \|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3}$$

$$= \underbrace{(x-1)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \cdot \underbrace{\|(x,y)\|}_{\rightarrow 0} < \delta < \varepsilon$$

Probé que dado ε , si elijo $\delta < \varepsilon$
 \Rightarrow el límite existe y es cero.

$a = 1$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot y^2 + \sin(y^2) \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\left| \frac{\overset{\rightarrow 1}{(x-1)^2} \cdot x^2 \cdot \overset{\leq y^2}{y^2} + \sin(y^2) \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|^4 + \|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^3}$$

Sospecho que no existe

Si $y = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 \cdot x^2 \cdot x^2 + \sin(x^2) \cdot x}{(2x^2)^{3/2}} =$$

$2^{3/2} \cdot |x|^3 \leftarrow$ Clave este módulo! no ponerlo este

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(x-1)^2 \cdot x^4}{2^{3/2} \cdot |x|^3}}_{\rightarrow 0} + \frac{\sin(x^2) \cdot x}{2^{3/2} \cdot |x|^3}$$

MAL!

$$\underbrace{(x^2)^{3/2}}_{|x|^3} \neq \underbrace{x^{\cancel{2} \cdot \frac{3}{2}}}_{x^3} = x^3$$

- Las operaciones sobre x son en orden, primero elevo al cuadrado, luego a la $3/2$.
- Esto muestra cómo elevar al cuadrado puede hacer perder información, y sucede porque $f(x)=x^2$ NO es inyectiva $f(2) = f(-2) = 4$
- En otras palabras, dado el número 4 como cuadrado de un número, no sabemos si antes fue un 2 o un -2. Es esa la pérdida de información en la operación.
- Por eso, asumir la rama positiva está MAL.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^{3/2}} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|}$$

Si veo el límite por izq. y derecha

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2^{3/2}} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{x}{x} = -\frac{1}{2^{3/2}} \end{aligned} \right\}$$

Como obtuve 2 límites
diferentes

\Rightarrow No existe el límite.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$. Si existe dar la ecuación del plano tangente a f en $(0, 0, f(0, 0))$

Puedo ver :

- Continuidad de derivadas parciales $\Rightarrow f$ diferenciable
(no vale la vuelta !)

Sirve si pudiera mostrar que f es diferenciable (en todo (x, y)). Como las derivadas parciales son continuas fuera del $(0, 0)^*$ $\Rightarrow f$ es diferenciable en todo (x, y) que no sea el $(0, 0)$.

* Son continuas porque es cociente de polinomios sin problemas fuera del $(0, 0)$, aunque hacer esa cuenta es un poco trabajoso.

ó

- por Def :

f es diferenciable en $(0, 0)$ si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - \left(f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) \right)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} \stackrel{\text{quiero}}{=} 0$$

Calculo cada una de las partes del plano

- $f(0, 0) \stackrel{\text{def } f}{=} 0$

Para f_x y f_y , uso definición sobre el punto en cuestión
(no regla de la cadena !)

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3h^3}{h^2} - 0}{h} = -3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = -3$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\bullet f_x(0,0) = -3$$

$$\bullet f_y(0,0) = 0$$

Calculo límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\overset{=0}{f(0,0)} + \overset{-3}{f_x(0,0)} \cdot x + \overset{0}{f_y(0,0)} \cdot y \right)}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) + 3x}{\|(x,y)\|}$$

CA:

$$f(x,y) + 3x = \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x}{x^2 + y^2} + 3x$$

$$= \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x + 3x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3y^2x + 3x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

Vuelvo a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) + 3x}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}$$

no olvidar !!!

Acoto

$$\left| \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{2\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3} = 2\|(x,y)\| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

∴ $f(x,y)$ es diferenciable.

Usando epsilon/delta

$$2\|(x,y)\| < 2\delta < \varepsilon$$

$$\therefore \text{Si } \delta < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f \text{ es diferenciable}$$

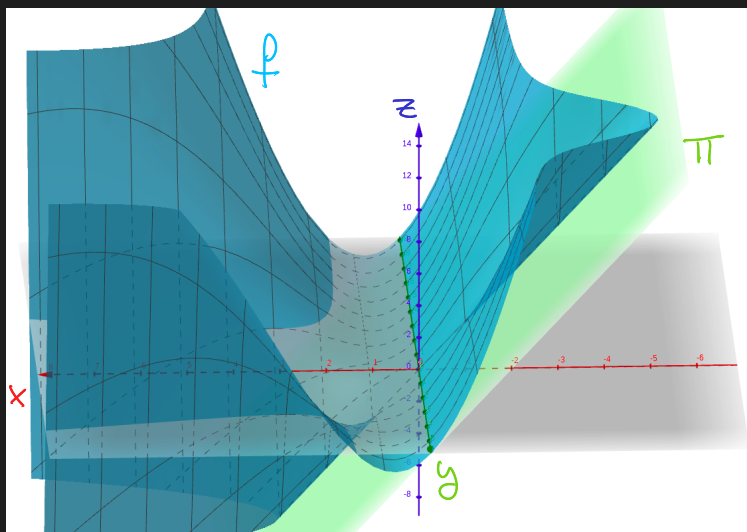
Falta eq. de Plano tangente en $(0,0) =: \Pi_{(0,0)}$

Pero esto es casi inmediato dado que ya lo usamos en la definición de diferenciabilidad

$$\Pi_{(0,0)} : z = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{f_x(0,0)}_{-3} (x-0) + \underbrace{f_y(0,0)}_{=0} (y-0)$$

$$\Pi_{(0,0)} : z = -3x$$

Verifico con geogebra
(esto no vale en el
parcial / final !!)



4. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 3z^2 + e^{xz} - y^2z$.

- (a) Probar que la ecuación $F(x, y, z) = 11$ define de manera implícita una función diferenciable $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1)$ tal que $f(0, 1) = 2$.
(b) Hallar la dirección de más rápido crecimiento de f en $(0, 1)$

a) Solo basta verificar las hipótesis (condiciones) del Teo. de la Función Implícita.

[0] f es de la forma $F(x, y) = 0$

[1] f debe ser \mathcal{C}^1 en un entorno de (x_0, y_0, z_0)

[2] $f_z \neq 0$ en ese punto. Recordar que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_z(x_0, y_0)}$$

$\Rightarrow \exists \phi(x, y)$ de clase \mathcal{C}^1 /

[i] $\underbrace{\phi(x_0, y_0)} = z_0$

[ii] $f(x, y, \phi(x, y)) = f(x, y, z)$

$\forall (x, y) \in$ un entorno de (x_0, y_0)

[iii] $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{f_x(x, y)}{f_z(x, y)}$

$\forall (x, y) \in$ un entorno de (x_0, y_0)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{f_y(x, y)}{f_z(x, y)}$$

• F es \mathcal{C}^1 en todo (x,y) por ser compo de func. \mathcal{C}^1

• $F_z(x,y,z) = 6z + x \cdot e^{xz} - y^2$

$$F_z(0,1,z) = 6z - 1 \neq 0 \quad \forall z \neq \frac{1}{6}$$

• Además

$$F(0,1,z) = 11 = 3z^2 + 1 - z$$

$$3z^2 - z - 10 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z = 2}_{\text{solo me interesa este}} \text{ ó } z = -\frac{5}{3}$$

Por Teo. de Func. Imp.

\exists un despeje $\phi(x,y)$ con $\phi(x,y) \in \mathcal{C}^1$ /

$$\phi(0,1) = 2$$

b) Dirección de más rápido crecimiento $\equiv \nabla \phi(0,1)$ normaliz_{zando}

Calculo derivadas parciales, dadas por Teo. F.I.

$$\phi_x(x,y) = \frac{F_x}{F_z} = \frac{\phi \cdot e^{x \cdot \phi(x,y)}}{\underbrace{e \cdot \phi(x,y) - 1}_{=z}}$$

$\forall (x,y)$ en un entorno del $(0,1)$

$$\phi_x(0,1) = \frac{2 \cdot e^{0 \cdot 2}}{e \cdot 2 - 1} = \frac{2}{11}$$

$$\phi_y(x,y) = \frac{-2y \cdot \overbrace{\phi(x,y)}^{=z}}{6\phi - 1}$$

$$\phi_y(0,1) = \frac{-2 \cdot 2}{12 - 1} = -\frac{4}{11}$$

$$\nabla \phi(0,1) = \left(\frac{2}{11}, -\frac{4}{11} \right)$$

Normalizo

$$\|\nabla \phi(0,1)\| = \frac{2\sqrt{5}}{11}$$

$$\frac{\nabla \phi(0,1)}{\|\nabla \phi(0,1)\|} = \underbrace{\frac{11\sqrt{5}}{10}}_{\|0\|^{-1}} \cdot \left(\frac{2}{11}, -\frac{4}{11} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} (1, -2)$$

Dirección de mayor crecimiento en $f(0,1)$

$$\frac{\nabla \phi(0,1)}{\|\nabla \phi(0,1)\|} = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$