Polinomio de Taylor

- en 1 variable

Sea:

$f : I \to \mathbb{R}$ con f n veces derivable

(C^{n-1} ?)

I intervalo abierto

Llamamos

"Polinomio de Taylor de orden n de f en a"

a:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \cdot f^{(i)}(a) \cdot (x-a)^i$$

$$= f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

$P_1(x) =$ Recta tangente a f en a

* Qué pasa si calculo el Polinomio de Taylor de orden n de una función que resulta ser un polinomio de orden n?

Polinomio de McLaurin

Taylor en $x = 0$

Propiedades

$\boxed{1}$ $P_n(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$

tal que:

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= P_n(a) \\ f'(a) &= P_n'(a) \\ f''(a) &= P_n''(a) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= P_n^{(n)}(a) \end{aligned}\right\}$$

"Coinciden en las n derivadas"
(y sin derivar)

es el único!

$\boxed{2}$ $P_n(x)$ es el único polinomio de grado $\leq n$

que cumple

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Llamamos "resto de orden n de f en x, entorno a a"

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Si $x - a = \frac{1}{10}$, $R_n(x)$ está en el orden de $\frac{1}{10^n}$, pues el numerador tiende a cero más rápido que el denominador, para que el lím. sea cero, y no infinito.

$\boxed{3}$ Fórmula de Lagrange de $R_n(x)$:

- Ahora pedimos que f sea derivable $\underline{n+1}$ veces

$f : I \to \mathbb{R}$, $n+1$ veces derivable en I

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^{n+1}$$

Con $c \in [a, x]$ desconocido / Por qué es TRIVIAL que sea desconocido?

↑

Puedo acotar usando el c que maximiza el resto.

qué pasaría si conociera el resto exacto (ie. si conociera c)?

Generalmente nos interesa el valor absoluto del error

- $|R_n(x)|$

Polinomio de Taylor en $\mathbb{R}^2$

disco abierto centrado en (x_0, y_0)

- $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

  $f(x,y) \longmapsto z$

- $f \in \mathcal{C}^2$ en D

- Sea $P = (a,b)$

$$\Rightarrow P_2(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b) + \frac{1}{2!}\cdot f_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot f_{yy}(a,b) \cdot (y-b)^2 +$$

$$+ f_{xy}(a,b) \cdot (x-a) \cdot (y-b)$$

hay dos iguales pues $f \in \mathcal{C}^2$

Propiedad

$\boxed{2}$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_2(x,y)}{\| (x,y) - (a,b) \|^2} = 0$$

Esta propiedad está vinculada a la diferenciabilidad de f con n=1

Plano tangente

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_1(x,y)}{\| (x,y) - (a,b) \|^1} = 0$$