

1. Sea \mathcal{C} la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$x = \sqrt{1+y}, \quad y^2 = 1+z.$$

- (a) Hallar una función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva \mathcal{C} . Calcular $\text{Dom}(r)$.
 (b) Verificar que el punto $P = (1, 0, -1)$ pertenece a la curva \mathcal{C} y hallar la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto P .

a)

$$x = \sqrt{1+y}$$

$$z = y^2 - 1$$

Defino

$$r(t) = (\sqrt{1+t}, t, t^2 - 1)$$

Calculo $\text{Dom}(r)$

Como $\sqrt{1+t} \Rightarrow 1+t \geq 0$
 $t \geq -1$

$$\text{Dom}(r) = [-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$$

b) $(1, 0, -1) = (\sqrt{1+t}, t, t^2 - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+t} = 1 \\ t = 0 \\ t^2 - 1 = -1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Si } t=0 \\ \sqrt{1+t} = 1 \quad \checkmark \\ t^2 - 1 = -1 \quad \checkmark \end{array}$$

∴ P pertenece a la curva $\mathcal{C} : r(0) = P$

Recta tangente

$$r(t) = (\sqrt{1+t}, t, t^2-1)$$

$$r'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, 1, 2t \right)$$

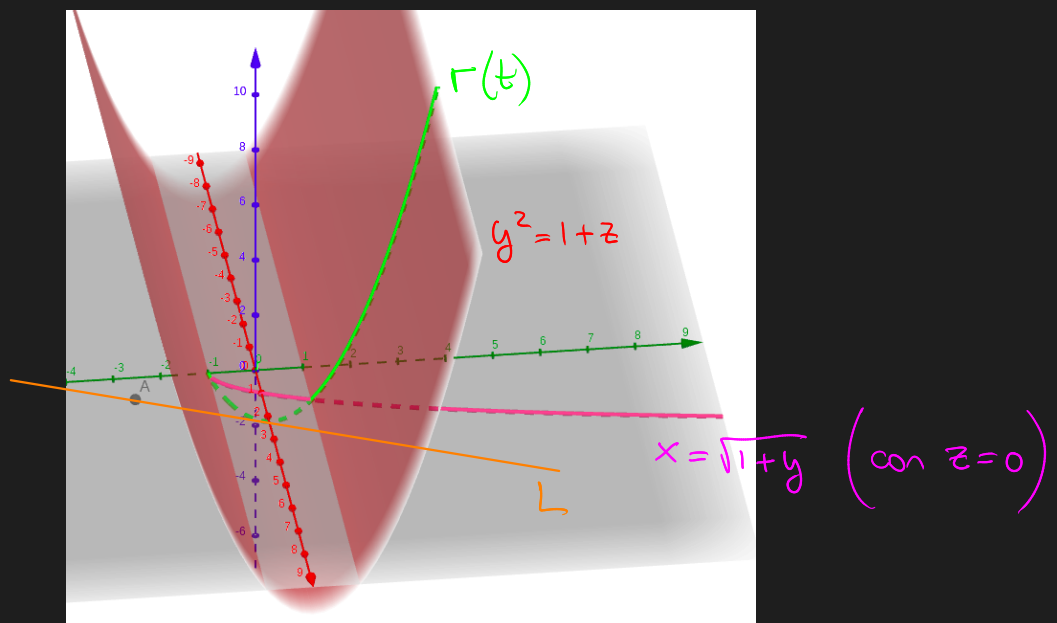
so $t=0$

$$r'(0) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right)$$

↑ vector dirección

Llamo L a la recta tangente a \mathcal{C} en P

$$L : (1, 0, -1) + \alpha \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



2. Analizar la existencia de los siguientes límites

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)y^2 \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{3(x-1)^2 + y^2},$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2)y}{x^2 - y + x^4}.$

a)
$$\left| \frac{(x-1)y^2 \cdot \overbrace{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}^{\leq 1}}{3(x-1)^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{(x-1)y^2 \cdot 1}{\underset{\substack{\uparrow \\ 3(x-1)^2 \geq (x-1)^2}}{(x-1)^2 + y^2}} \right|$$

$$\leq \frac{\|(x-1, y)\|^3}{\|(x-1, y)\|^2} = \|(x-1, y)\| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (1,0)} 0$$

∴ el límite existe, y es cero,

b) Si $x=0 \Rightarrow$ el límite es cero $\forall y \neq 0$

$$\left| \frac{\sin(x^2) \cdot y}{x^2 \cdot (1+x^2) - y} \right| \leq \frac{\cancel{x^2} \cdot y}{\cancel{x^2} (1+x^2) - y}$$

tiene pinta de que
no existe, pues
es una basura ese denominador

Busca acercarme al (0,0) por curvas,

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2)y}{x^2 - y + x^4}.$

$y=x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot x}{x^2 - x + x^4}$$

$$x - 1 + x^3$$

Nope

$$y = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot x^2}{x^2 - x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1 \quad \text{'' ''}$$

Como al acercarme por la curva $y=x^2$ obtuve un límite distinto de 0, entonces el límite del enunciado NO existe.

Si no lo recuerdo, usar L'H

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(x^2)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow 0}} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\cos x^2 \cdot 2x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{2x}_{\rightarrow 0}} \\ &\stackrel{L'H}{=} \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

(a) Analizar la existencia de las derivadas direccionales de f en el $(0, 0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(h, 0)}^{=0} - \overbrace{f(0, 0)}^{=0}}{h} \\ &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0, h)}^{=0} - \overbrace{f(0, 0)}^{=0}}{h} = 0 \quad \checkmark$$

Ambas derivadas existen, y son cero.

$$\text{b) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - \left(\overbrace{f(0, 0)}^{=0} + \overbrace{f_x(0, 0)}^{=0} \cdot x + \overbrace{f_y(0, 0)}^{=0} \cdot y \right)}{\|(x, y)\|} =$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|(x, y)\|} \cdot y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\left| \frac{1}{\|(x, y)\|} \cdot y \cdot \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) - 0 \right|$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

↑ Tiene pinta de no existir, por que con cualquier cosa queda ≤ 1

$$\text{Si } y = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}} \cdot x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |x|} \cdot x \cdot \sin(2)$$

Ves que

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot |x|} \cdot \sin(2) \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot x} \cdot \sin(2)$$

$$= \frac{\sin 2}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot |x|} \cdot \sin(2) \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x}{\sqrt{2} \cdot x} \cdot \sin(2)$$

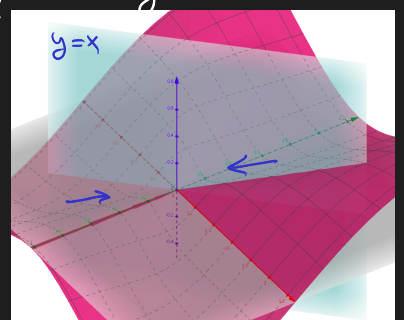
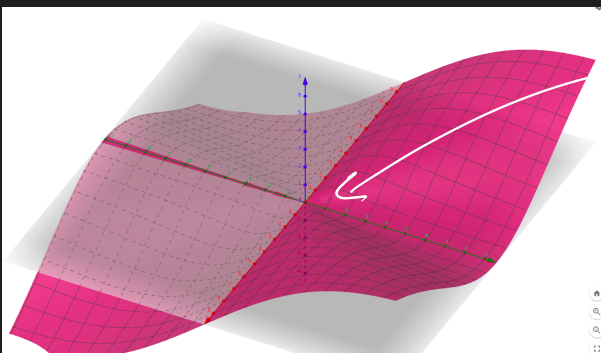
$$= -\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}$$

Como obtuve valores distintos para un mismo límite según me acerque por derecha o izquierda, entonces el límite NO existe.

Por lo tanto, la función NO es diferenciable.

Nota que

no hay chance de que tenga un plano tangente en $\vec{0}$.



4. Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y, x)$. Sabiendo que el $\nabla f(2, 0, 1) = (1, 2, 3)$ y que $f(2, 0, 1) = 5$, hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de h en el punto $(1, 1, h(1, 1))$.

Quiero P. de Taylor de orden 1 en $(1, 1)$

$$P_1(x, y) = h(1, 1) + h_x(1, 1)(x-1) + h_y(1, 1)(y-1)$$

Calc:

$$\begin{aligned} \bullet h(1, 1) &= f(1+1, 1-1, 1) \\ &= f(2, 0, 1) \\ &\stackrel{\text{dato}}{\downarrow} 5 \end{aligned}$$

Llamo u, v, w a:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(x^2 + y^2, x^2 - y, x) \\ &= f(\underbrace{x^2 + y^2}_{u(x, y)}, \underbrace{x^2 - y}_{v(x, y)}, \underbrace{x}_{w(x, y)}) \end{aligned}$$

f es función de u, v, w
 u es función de x e y

$$\bullet \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \bullet \nabla f(2, 0, 1) &= (f_u(2, 0, 1), f_v(2, 0, 1), f_w(2, 0, 1)) \\ &\stackrel{\text{dato}}{\downarrow} (1, 2, 3) \end{aligned}$$

$$* \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = 2x \Rightarrow \mu_x(1,1) = 2$$

$$* \sigma_x(x,y) = 2x \Rightarrow \sigma_x(1,1) = 2$$

$$* \omega_x(x,y) = 1 \Rightarrow \omega_x(1,1) = 1$$

∴

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

$$h_x(1,1) = 9$$

Falta $h_y(1,1)$

$$h_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(u,v,\omega) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,\omega) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial \omega}(u,v,\omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)$$

↑ mesma que antes ↑

$$* \mu_y(1,1) = 2y|_{y=1} = 2$$

$$* \sigma_y(1,1) = -1$$

$$* \omega_y(1,1) = 0$$

∴

$$h_y(1,1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0$$

$$= 0$$

$$\nabla h(1,1) = (9, 0)$$

Finalmente

$$P_1(x,y) = 5 + 9 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1)$$

Si llamo π al plano

$$\pi : z = 5 + 9 \cdot (x-1) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$