Multiplicadores de Lagrange.

Buscamos extremos de funciones $\in \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$

- en dominios dados por ecuaciones
  ↳ ie: sobre una curva $(\mathbb{R}^2)$: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) = k\}$
  ó superficie $(\mathbb{R}^3)$: $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, g(x,y,z) = k\}$

Teorema (M. de L.)

- Sea $f(x,y)$

con dominio dado por $g(x,y) = k$

con extremo (local) en $p = (x_0, y_0)$

Además

- f, g diferenciables en p
- $\nabla g(p) \neq 0$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

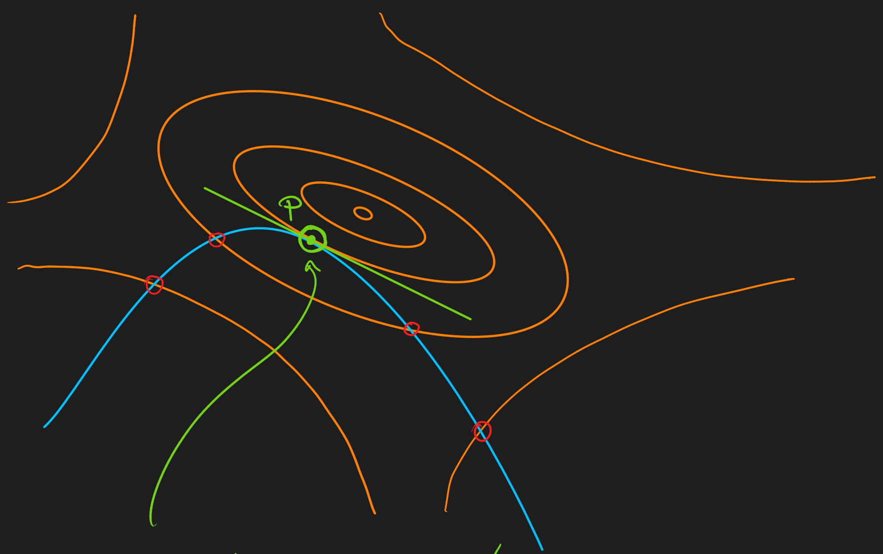
Para resolver ejercicios lo uso armando

$$\begin{cases} f_x = \lambda \cdot g_x \\ f_y = \lambda \cdot g_y \\ g(x,y) = K \end{cases}$$

y resolviendo el sistema.

Con los candidatos obtenidos, evalúo y busco max, mín.

Intuición geométrica



tangentes en P (PC obtenido con M. de L.)
Coinciden

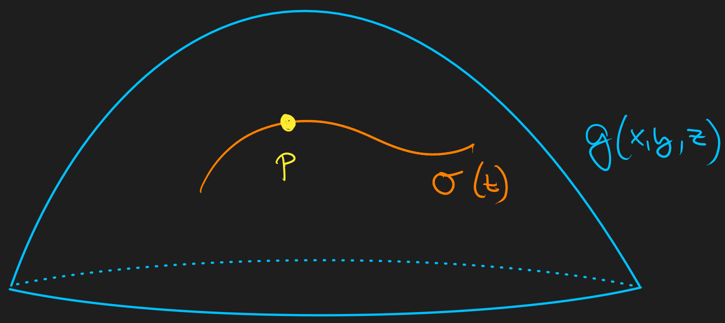
$\Rightarrow$ sus normales ∇f y ∇g apuntan en la misma dir

$\Rightarrow$ son múltiplos

$$\nabla f = \lambda . \nabla g .$$

Notar que

Si a su vez restringo $g(x,y,z)$ con una curva $\sigma(t)$



con $p = \sigma(t_0)$

Si $p \in \{g(x,y,z) = k\} \Rightarrow p \in \{\sigma(t)\}$

y es máx   y además es máx sobre $\sigma(t)$

Como $f(p) = f(\sigma(t_0))$ es máx

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \Big|_{t=t_0} = 0$$

$$= \langle \underbrace{\nabla f(\sigma(t_0))}_{\in \mathbb{R}^3} , \underbrace{\sigma'(t_0)}_{\in \mathbb{R}^3} \rangle$$

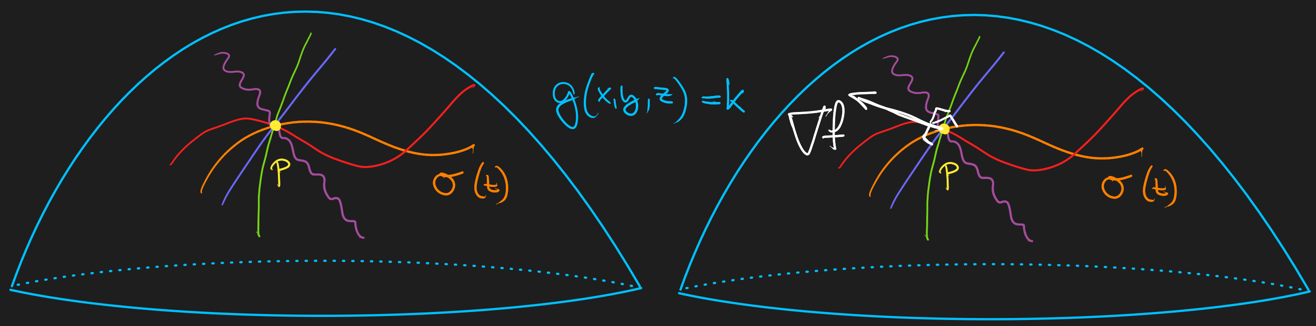
Obtuve

$$\langle \nabla f(p) , \sigma'(t_0) \rangle = 0$$

∴ son perpendiculares.

O sea que dada cualquier curva σ que pase por t_0

el $\nabla f(\sigma(t_0))$ será perpendicular a todas ellas



$\Rightarrow \nabla f$ es perpendicular a $g(x,y,z) = k$ (pues es máx)

y además sé que

∇g es perpendicular a $g(x,y,z) = k$ (pues prop. de gradiente)

∴ deben ser múltiplos

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Más restricciones

Sea $f(x,y,z)$ con dominio en la curva (interseco 2 superficies)

$$\begin{cases} g(x,y,z) = k \\ h(x,y,z) = l \end{cases}$$

Con $\nabla g \neq 0$

$\nabla h \neq 0$

y además

$\nabla g \neq \alpha . \nabla h$ (no son múltiplos)

Entonces

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda\, g(x,y,z) + \mu . h(x,y,z)$$