

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

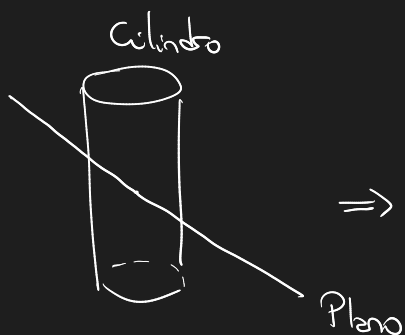
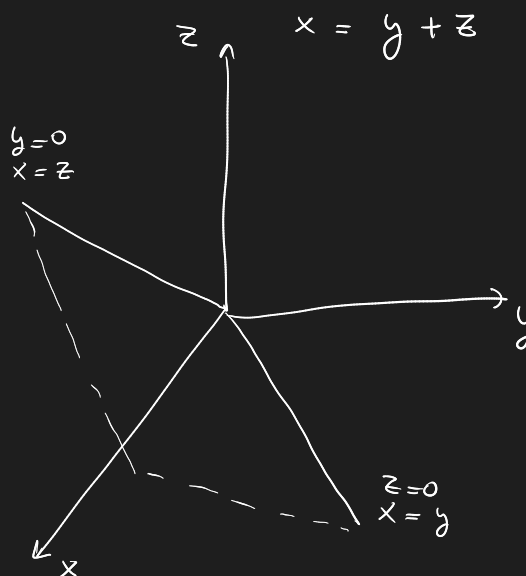
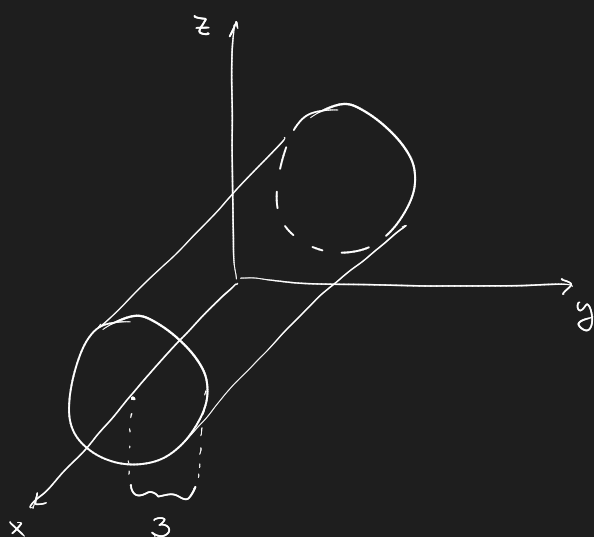
1er. cuatrimestre 2020

Primer Parcial - 08/06/2020

1. Sea \mathcal{C} la curva que se obtiene como intersección de las superficies

$$y^2 + z^2 = 9, \quad -x + y + z = 0.$$

- (a) Hallar una función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva \mathcal{C} .
(b) Verificar que el punto $P = (3, 3, 0)$ pertenece a la curva \mathcal{C} y hallar la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto P .



Tengo
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 9 \\ x = y + z \end{cases} \Rightarrow \left(\underbrace{3 \cdot \cos t}_y, \underbrace{3 \cdot \sin t}_z \right)$$

Solo falta parametrizar x :

$$\hookrightarrow x = 3 \cos \theta + 3 \sin \theta$$

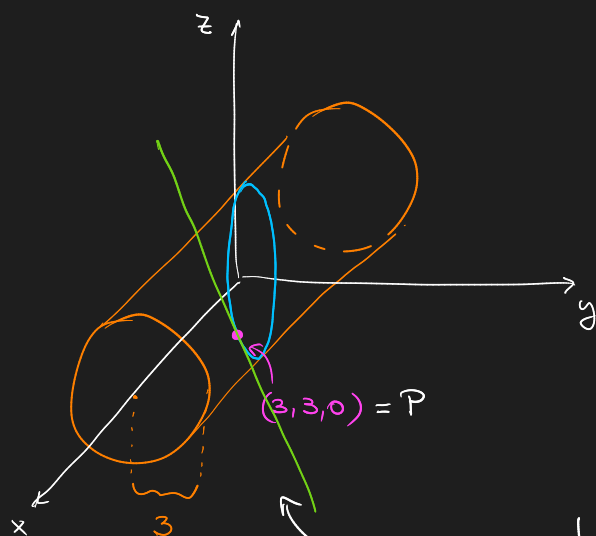
$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t + 3 \sin t, 3 \cos t, 3 \sin t)$$

$$\mathbf{r}(t) = 3(\cos t + \sin t, \cos t, \sin t)$$

b)

listo!

(b) Verificar que el punto $P = (3, 3, 0)$ pertenece a la curva \mathcal{C} y hallar la ecuación de la recta tangente a \mathcal{C} en el punto P .



es una recta vertical $(3, 3, z)$

veámoslo

$$\mathbf{r}(t) = 3(\cos t + \sin t, \cos t, \sin t)$$

$$\mathbf{r}'(t) = 3(\cos t - \sin t, -\sin t, \cos t)$$

$t = 0$:

$$\mathbf{r}'(0) = 3(1, 0, 1)$$

↑ vector tangente a \mathcal{C} en $(3, 3, 0)$

2. Analizar la existencia de los siguientes límites

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{x^2(y+1)}{x^3 + (y+1)^3},$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2}.$$

a) Fuez del $(0, -1)$ to do OK!

• Si $x = 0$

$$\Rightarrow f(0, y) = 0 \leftarrow \text{debe ser cero } y \neq 0$$

• Si $y = -1$

$$\Rightarrow f(x, -1) = 0 \quad x \neq 0$$

Veo $x = y+1$

$$\frac{(y+1)^2 (y+1)}{(y+1)^3 + (y+1)^3} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{no tiene límite,}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \left| \frac{x \cdot y \cdot \sin x}{x^2 + y^2} \right| &\leq \frac{|x| \cdot |y| \cdot |\sin x|}{\|(x, y)\|^2} \stackrel{\leq x}{=} \\
 &\leq \frac{\|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|^2} = \|(x, y)\| < \delta < \varepsilon \quad \begin{array}{c} \text{quiero} \\ \downarrow \end{array}
 \end{aligned}$$

Tomando $\delta < \varepsilon$

probé que el límite es cero siempre //

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 27y^3}$.

(a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

$$27y^3 = (3y)^3$$

$$f(x, y) = (x^3 + 27y^3)^{1/3}$$

a)

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{0^3} + \cancel{27 \cdot 0^3})^{1/3} + \left((h+0)^3 + 27 \cdot 0^3 \right)^{1/3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 1 \right]$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(27 \cdot h^3)^{1/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 \frac{h}{h} = 3$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 3 \right]$$

b) f es diferenciable en $(0,0)$ si

• tiene deriv. parciales en $(0,0)$

• vale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}_{=1} (x-0) + \underbrace{\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}_{=3} (y-0) \right)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^3 + 27y^3)^{1/3} - x - 3y}{\|(x,y)\|} \stackrel{?}{=} 0$$

Si $y = x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 27x^3)^{1/3} - 4x}{(2x^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{28} \cdot x - 4x}{\sqrt{2} \cdot |x|} = \frac{\sqrt[3]{28} - 4}{\sqrt{2}} \neq 0$$

\therefore no es dif.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que su plano tangente en el punto $(1, 4, f(1, 4))$ es

$$z = 3x - 2y + 7.$$

Sean $x = g(s, t) = s^2 \cos(t)$ e $y = h(s, t) = (2s + t)^2$ y sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$.

(a) Calcular $\frac{\partial F}{\partial s}(-1, 0)$ y $\frac{\partial F}{\partial t}(-1, 0)$.

(b) Calcular la ecuación del plano tangente al gráfico de F en $(-1, 0, F(-1, 0))$.

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial F}{\partial s} \overset{(s,t)}{(-1,0)} &= \frac{\partial f}{\partial g} \left(\overset{=1}{g(-1,0)}, \overset{=4}{h(-1,0)} \right) \cdot \overset{-2}{\frac{\partial g}{\partial s}(-1,0)} + \\ &\quad \frac{\partial f}{\partial h} (1, 4) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(-1,0) \end{aligned}$$

Plano tangente

$$z = f(1,4) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,4)}_{3x} (x-1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,4)}_{-2y} (y-4)$$

Si

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 3$$

$$\bullet \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = -2$$

$$\Rightarrow z = f(1,4) + 3x - 3 - 2y + 8$$

$$z = 3x - 2y + f(1,4) + 5$$

Como sé que

$$z = 3x - 2y + 7$$

$$\Rightarrow f(1,4) + 5 = 7$$

$$\Rightarrow f(1,4) = 2$$

Volviendo

$$\frac{\partial f}{\partial g}(1,4) = 3 \quad \left(\text{por } x = g(s,t) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1,4) = -2 \quad \left(\text{por } y = h(s,t) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial s}(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial g}(\overset{=1}{g}(-1,0), \overset{=4}{h}(-1,0)) \cdot \overset{-2}{\frac{\partial g}{\partial s}}(-1,0) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1,4) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(-1,0)$$

$$= 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (2(-2+0) \cdot 2)$$

$$= -6 + 16$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}(-1,0) = 10 \quad \Bigg]$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(-1,0) = 3 \cdot (-1) \cdot (-\sin 0) + (-2) \cdot 2(-2+0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(-1,0) = 8 \quad \Bigg]$$

