Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

2do. cuatrimestre 2020

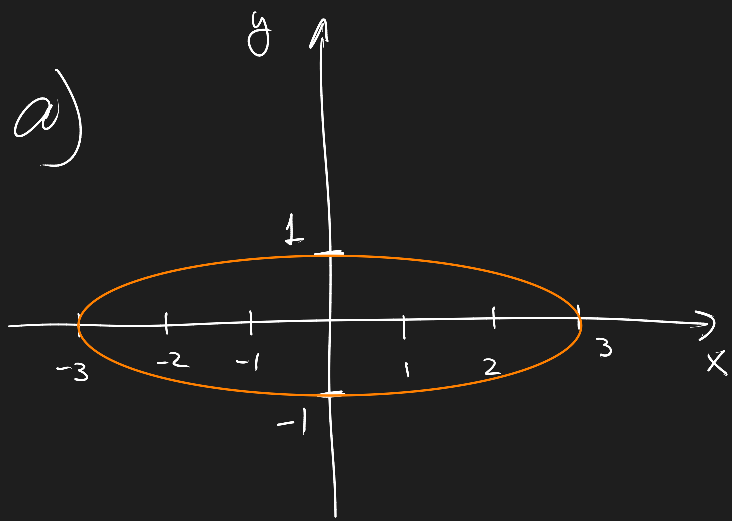
Primer Parcial - 21/10/2020

Ejercicio 1: Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene al intersecar las superficies $9 = x^2 + 9y^2$ y $2 = z - x$.

(a) Hallar una función $r(t)$ cuya imagen sea la curva $\mathcal{C}$.

(b) Probar que $P = (3, 0, 5)$ pertenece a $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

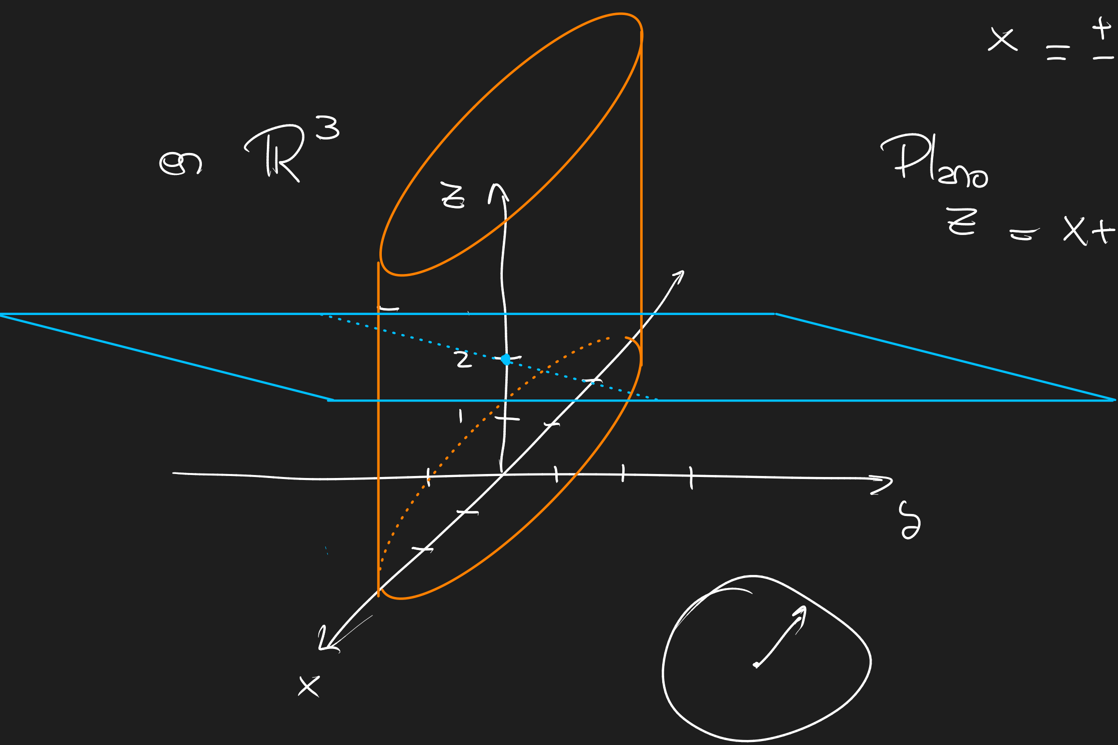
a)



- Si
  $x = 0$
  $\Rightarrow 9 = 9y^2$
  $\pm 1 = y$

- Si
  $y = 0$
  $\Rightarrow x^2 = 3^2$
  $x = \pm 3$

en $\mathbb{R}^3$



Plano
$z = x+2$

Uso Polares

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \\ z = r \cdot \cos\theta + 2 \end{cases}$$

Como $z = x + 2$

$\theta \in [0, 2\pi)$

r es función de θ $\therefore$ quiero

$$\left.\begin{aligned} r(0) &= 3 \\ r\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ r(\pi) &= 3 \\ r\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$9 = x^2 + 9y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1}$$

$$\frac{1}{3^2} \cdot r^2 \cdot \cos^2\theta + r^2 \cdot \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{1}{9} \cdot r^2 \left(\cos^2\theta + 9 \cdot \sin^2\theta\right) = 1$$

$$r^2 = \frac{9}{\left(\cos^2\theta + 9 \cdot \sin^2\theta\right)}$$

$$r(\theta) \overset{r \geq 0}{=} \frac{3}{\sqrt{\cos^2\theta + 9 \cdot \sin^2\theta}}$$

en general

$$r(\theta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2\theta + a^2 \cdot \sin^2\theta}}$$

Defino

$$\boxed{\begin{gathered}\sigma(t) = \left(r(t)\cdot\cos t,\ r(t)\cdot\sin t,\ r(t)\cdot\cos t + 2\right) \\ \text{con} \quad r(\theta) \overset{r\geq 0}{=} \frac{3}{\sqrt{\cos^2\theta + 9\cdot\sin^2\theta}} \\ \text{y } \theta \in [0, 2\pi)\end{gathered}}$$

b) $P = (3, 0, 5)$ $\longrightarrow$

$$\sigma(0) = \left(r(0)\cdot\cos(0),\ r(0)\cdot\sin(0),\ r(0)\cdot\cos(0) + 2\right)$$

$$= (3, 0, 5) \checkmark$$

con $t = 0$ en $\sigma(t)$ obtengo P.

Si:

$$\sigma(t) = \left(r(t)\cdot\cos t,\ r(t)\cdot\sin t,\ r(t)\cdot\cos t + 2\right)$$

$$\sigma'(t) = \left(-r'(t)\cdot\sin t,\ r'(t)\cdot\cos t,\ -r'(t)\cdot\sin t + 2\right)$$

evalúo en $t=0$

$$\sigma'(0) = (0, r'(0), 2)$$

Calculo $r'(t)$

Si $r(\theta) \overset{r \geq 0}{=} \dfrac{3}{\sqrt{\cos^2\theta + 9 \cdot \sin^2\theta}}$

$$r'(\theta) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 9 \cdot \sin^2\theta}} \cdot \left(-2\cos\theta \cdot \sin\theta + 18 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta\right)$$

evalúo en $\theta = 0$

$$r'(0) = 0$$

$\therefore$

$$\sigma'(0) = (0, 0, 2)$$

$\uparrow$ vector dirección de la rta tang.

Armo recta L

$$\boxed{L: (x, y, z) = P + \alpha\,(0, 0, 2) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2: Hallar todos los $a \in (0, +\infty)$ tales que el siguiente límite existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^a}{x^2+y^2}.$$

Candidato:

Si $x = 0 \Rightarrow$ el lím es cero pues

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Acoto

$$\left| \frac{x \cdot y^a}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x y^a|}{\|(x,y)\|^2}$$

Como
$|x| \leq \|(x,y)\|$
$|y| \leq \|(x,y)\|$

• Si $a \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{|x y^2|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{|x| \cdot y^2}{\|(x,y)\|^2}$$

$$\leq \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

• Si $a > 1$

$$|y^a| \overset{a>1}{\leq} |y|^a$$

$$\frac{|x y^a|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{|x| \cdot |y|^a}{\|(x,y)\|^2}$$

$$\leq \frac{\|(x,y)\|^{1+a}}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\|^{(1+a-2)}$$

$$= \|(x,y)\|^{\overbrace{a-1}^{>0}} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

Si $a=1$: Busco curvas en

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} = ?$$

Si $y=x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \therefore$$ no tiene límite si $a=1$

Finalmente los $a \in \mathbb{R}^+$ que cumplen son

$$\boxed{a \in (1, +\infty)}$$

Ejercicio 3: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos(y) + 3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Qvq

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left(\underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{f_x(0,0)}_{?}(x-0) + \underbrace{f_y(0,0)}_{?}(y-0)\right)}{\|(x,y)\|} \overset{?}{=} 0$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{h^3}{h^2} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(0,h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot 0 = 0$$

Volviendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x}{\|(x,y)\|} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \left(\frac{x^3 \cdot \cos y + 3xy^2}{x^2+y^2} - x \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{x^3 \cdot \cos y + 3xy^2 - x^3 - x \cdot y^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\|(x,y)\|} \cdot \frac{x^3 \cdot \cos y + 2xy^2 - x^3}{x^2+y^2}$$

Sospecho que no tiene límite.

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

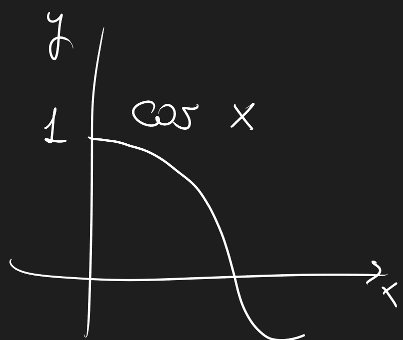
Separo en 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(\cos y - 1)}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)} + \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^2+y^2)}$$

Si $y = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot (\cos x - 1)}{2\sqrt{2}\,|x| \cdot x^2} + \frac{2x^3}{2\sqrt{2}\,|x| \cdot x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \cdot \overbrace{(\cos x - 1)}^{\to 0}}{2\sqrt{2}\; x^3} + \frac{2x^3}{2\sqrt{2} \cdot x^3} =$$



$= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \quad \therefore$ <u>No</u> es diferenciable.

Ejercicio 4: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que el plano tangente a su gráfico en el punto $(2, 1, f(2, 1))$ es

$$-x + 2y + z = 3.$$

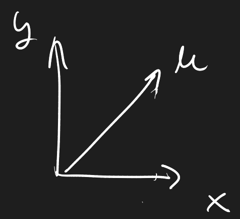
Si $x = \text{sen}(t) + 2$ e $y = s^2 + t$ y definimos $F(s, t) = f(x, y)$, calcular la derivada direccional de F en la dirección del vector $v = (3, 1)$ en el punto $(s_0, t_0) = (1, 0)$.

$$F(s,t) = f\big(x(s,t),\ y(s,t)\big)$$

Recuerdo

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\ y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Si tengo un vector $u = (a,b)$



$$f_u(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h.a,\ y_0 + h.b) - f(x_0,y_0)}{h}$$

otra forma

Teorema

Si f es diferenciable en (x_0,y_0)

y u es vector unitario

$$\Rightarrow f_u(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot u$$

$$= f_x(x_0,y_0) . a + f_y(x_0,y_0) . b$$

Quiero

$$F_v \underbrace{(1,0)}_{(s_0,t_0)} = \left\langle \nabla F(1,0)\, , \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1) \right\rangle$$

Necesito

$F_s(1,0)$ y $F_t(1,0)$

Sé que

$$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$$

Entonces

$$F_s(s,t) = f_x(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + f_y(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$F_t(s,t) = f_x(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + f_y(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

- Calculo ∇f a partir del plano tangente pues al ser su polinomio de Taylor de grado 1, coinciden sus deriv. parciales en el punto $(2,1, f(2,1))$

Plano : $-x + 2y + z = 3$

$$z = 3 + x - 2y$$

$$f(2,1) = 3$$

$$f_x(2,1) = 1$$

$$f_y(2,1) = -2$$

Calculo ∇x y ∇y

$$x = s \sin t + 2$$
$$y = s^2 + t$$

- $\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 0$
- $\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \cos t \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t}(1,0) = 1$
- $\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 2s \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial s}(1,0) = 2$
- $\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = 1$

Reemplazando en

$$F_s(s,t) = f_x(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + f_y(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$F_t(s,t) = f_x(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + f_y(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$F_s(1,0) = 1 \cdot 0 \quad -2 \cdot 2$$

$$F_t(1,0) = 1 \cdot 1 \quad -2 \cdot 1$$

$$F_s(1,0) = -4$$

$$F_t(1,0) = -1$$

$$\therefore \quad \nabla F(1,0) = (-4, -1)$$

$$\Rightarrow \quad F_v(1,0) = \left\langle \nabla F(1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1) \right\rangle$$

$$= \left\langle (-4,-1), \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3,1) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-12 - 1\right)$$

$$\boxed{F_v(1,0) = \frac{-13}{\sqrt{10}}}$$