Campos vectoriales en R^3

Operaciones sobre Campos:

- Rotor (o rotacional)
- Divergencia.

Rotor

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\nabla \times F = \left(R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\right)}$$

Obs:

El rotor es a su vez un campo vectorial

Teorema $\boxed{1}$

$\forall x,y,z$ del Dom. de f.

$$\text{Si } f(x,y,z) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \text{rot}(\nabla f) = (0,0,0)$$

Campo gradiente

Esto nos dice que

- Si F es un campo conservativo (ie $F = \nabla f$)

$\Rightarrow$ su rotor debe ser cero.

$\therefore$

- Si el rotor de F no es cero

$\Rightarrow$ F no es campo conservativo.

- Si el rotor de F es cero

$\Rightarrow$ F podría ser campo conservativo.

Teorema $\boxed{2}$

Condición sobre el dominio de F:

- es $\mathbb{R}^3$ ó una bola.

Si $P, Q, R \in \mathcal{C}^1$

y $\nabla \times F = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ F es conservativo $(\exists f \,/\, \nabla f = F)$

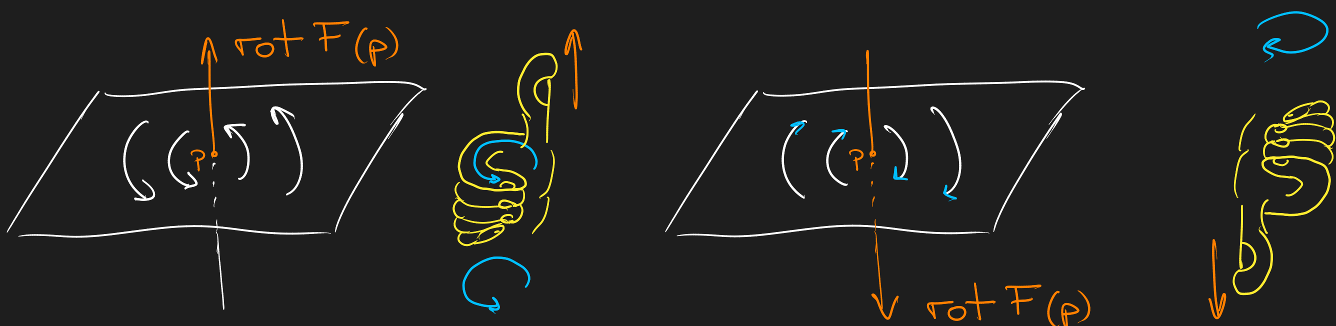
Qué mide el rotor?

Si F es campo de Velocidades de un fluido

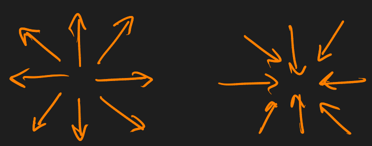
$\Rightarrow$ $\text{rot}\, F(p)$ describe cómo rota el campo en p

y además

- $|\text{rot}\, F(p)|$ = intensidad de rotación
- Dirección y sentido (Regla de la mano derecha)



Divergencia



$$\text{div}\, F = P_x + Q_y + R_z$$

$$= \underset{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}{\underset{\uparrow}{\nabla}} \cdot F$$

Teorema:

$F = (P, Q, R)$ con $P, Q, R \in \mathcal{C}^2$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) \underset{\forall x,y,z}{=} 0$

Podemos usarlo para detectar si un campo G es rotor de algún otro campo.

Qué mide?

- Si F es campo de velocidades de un fluido (ej: gas)

$\Rightarrow \operatorname{div} F$ mide velocidad de compresión/expansión del fluido.

- Si $\operatorname{div} F = 0 \quad \forall x, y, z$

$\Rightarrow$ el campo es incompresible.