Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

1er. cuatrimestre 2020

Simulacro Segundo Parcial

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,1)$ es

$$p(x,y) = 2x^2 - xy + 5x - y + 5.$$

(a) Decidir si f tiene un extremo local en $(-1,1)$.

(b) Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{f(x,y)-2}{\|(x,y)-(-1,1)\|}$$

a) • Las derivadas segundas de f coinciden con el Polin. de Taylor de orden 2

• Calculo

$$f_x(x,y) \overset{\text{en } (-1,1)}{=} 4x - y + 5 \Rightarrow f_x(-1,1) = 0$$

$$f_y(x,y) = -x - 1 \Rightarrow f_y(-1,1) = 0$$

es Punto Crítico.

$$f_{xx}(x,y) \overset{\text{en } (-1,1)}{=} 4$$

$$f_{yy}(x,y) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) \underset{f \in \mathcal{C}^2}{=} f_{yx}(x,y) = -1$$

Armo Hessiano :

$$Hf_{(x,y)} \overset{(-1,1)}{=} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\det Hf = -1 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ es Punto Silla.

$\therefore$ $(-1,1)$ no es extremo local.

Recuerdo : Criterio del Hessiano

Concavidad en $\mathbb{R}$

$\cup$ $\quad$ $\cap$

$f'' > 0$ $\quad$ $f'' < 0$

concavidad

- $\left. \begin{array}{l} f_{xx} > 0 \\ \det Hf > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ PC. es mínimo

- $\left. \begin{array}{l} f_{xx} < 0 \\ \det Hf > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ PC. es máximo

- $\det Hf < 0 \Rightarrow$ PC es punto silla.

- $\det Hf = 0 \Rightarrow$ el Criterio no sirve

b) Quiero usar Prop. de Polinomio de Taylor

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - P_n(x,y)}{\|(x,y)-(a,b)\|^n} = 0$$

Como tengo P_2 y quiero P_1

$$P_1(x,y) = ?$$

$$P_2(x,y) = \underbrace{f(-1,1)}_{p(-1,1)=2} + \underbrace{f_x(-1,1)}_{=0}(x+1) + \underbrace{f_y(-1,1)}_{=0}(y-1)$$
$$+ \frac{1}{2}\underbrace{f_{xx}(-1,1)}_{=4}(x+1)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{f_{yy}(-1,1)}_{=0}(y-1)^2$$
$$+ \underbrace{f_{xy}(-1,1)}_{=-1}(x+1)(y-1)$$

$$\Rightarrow P_1(x,y) = 2$$

$\therefore$ estoy en el caso

Prop. Polin. de Taylor.

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{f(x,y) - \overbrace{P_1(x,y)}^{=2}}{\|(x,y)-(-1,1)\|^1} = 0$$

//

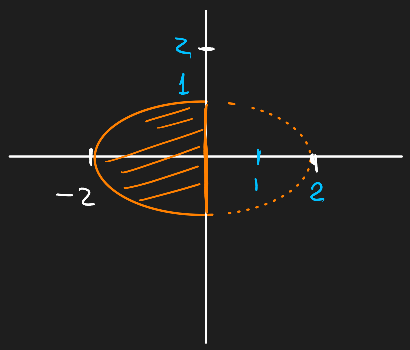
2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy^2 + 2y^2 + 1$. Hallar los máximos y mínimos absolutos de f en

$$D = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x \leq 0 \right\}.$$

Dibujo D

Elipse

D



Busco en el interior $\mathring{D}$

- $f_x = y^2 = 0 \iff y = 0$

  $f_y = 2xy + 4y = 0 \iff xy = -2y$

  si $y = 0 \Rightarrow x \cdot y = -2y \ \forall x$

PCs en $(x, 0)$ $\forall x \in (-1, 0)$

Además

$f(x,0) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Crit:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det Hf = -4y^2 \Big|_{y=0} = 0 \ \text{!!}$$

Después comparo con otros candidatos.

Borde ∂D

Sobre $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y^2 \\ f_y &= \underbrace{\cancel{2xy}}_{=0} + 4y \end{aligned}\right\} = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

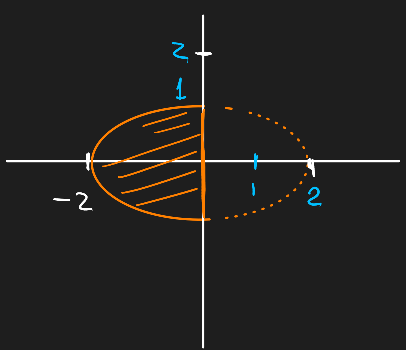
mismo que arriba.

Sobre la semi-elipse

- $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ con $x \leq 0$

Puedo parametrizar

$$\sigma(t) = (2 \cdot \cos t \,,\, \sin t) \qquad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$



$$(0 \,,\, 1) \checkmark \Big|_{\frac{\pi}{2}}$$

$$(-2 \,,\, 0) \checkmark \Big|_{\pi}$$

Compongo :

$$g(t) = 2\cos t \cdot \sin^2 t + 2\sin^2 t + 1$$

$$= 2 \cdot \sin^2 t \,(\cos t + 1) + 1$$

$$\underbrace{\quad}_{\substack{\geq 0 \\ \leq 1}} \qquad \underbrace{\quad\quad}_{\substack{\geq 0 \\ \leq 1}}$$

$1 \leq g(t) \leq 3$

$$g(t) = 1 \iff \sin^2 t = 0 \quad \text{ó} \quad \cos t + 1 = 0$$

$$\sin^2 t = 0 \iff \sin t = 0 \qquad t \in [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi]$$

$$\iff t = \pi$$

$$\cos t + 1 = 0 \iff \cos t = -1$$

$$\iff t = \pi$$

Evalúo sobre la curva

$$\sigma(t) = (2 \cdot \cos t, \sin t)$$

$$\sigma(\pi) = (-2, 0)$$

- PC en $(-2,0)$

Vértices : $\{(0,1), (0,-1)\}$

Evalúo en f los PCs

- $f(x,0) = 1 \quad \forall x \in (-2,0)$
- $f(0,0) = 1$

- $f(-2,0) = 1$

- $f(0,1) = 3$
- $f(0,-1) = 3$

$$\boxed{\text{máximos absolutos} = \{(0,1),\ (0,-1)\}}$$

$$\boxed{\text{mínimos absolutos} = \{(x,0) \mid x \in [-2,0]\}}$$

3. Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy.$

(b) $\displaystyle\iiint_E xz^2 \; dV$ donde E es el sólido debajo de la superficie $z = x^2$ y arriba del rectángulo $R = [0,1] \times [2,3]$ en el plano xy.

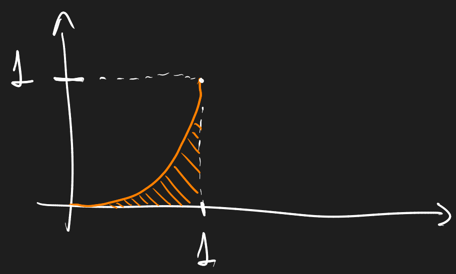
a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4} dx$ es complicada o no existe

$\therefore$ reescribo región de integración D

$$D = \{ 0 \leq y \leq 1 \;,\; \sqrt[3]{y} \leq x \leq 1 \}$$

$$\sqrt[3]{y} \leq x \leq 1$$

$$0 \leq \underbrace{y \leq x^3} \leq 1$$



$$\tilde{D} = \{ 0 \leq x \leq 1 \;,\; 0 \leq y \leq x^3 \}$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x^3} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{1+x^4} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1+x^4) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\ln(2) - 1 \right)$$

4. Hallar el volumen del sólido acotado por las superficies

$$z = e^{4x^2+4y^2} \quad y \quad z = e^4.$$