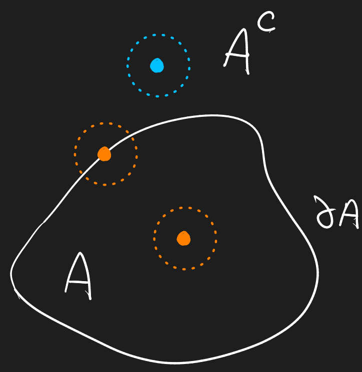
Extremos absolutos en Regiones

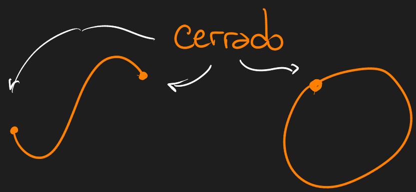
$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

con A cerrado

Región



$\boxed{1}$ Si A es una curva



Contienen extremos de la curva

Parametrización

elipse

ej: $A = \left\{ (x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$

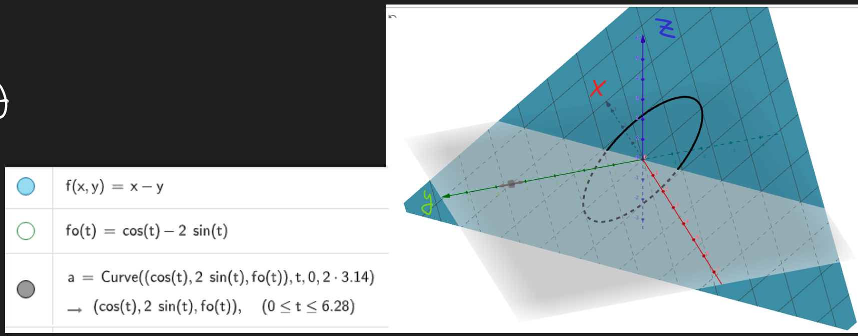
Parametrizo como

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \cdot \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \ 2 \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi)$$

Ahora quiero calcular los extremos de f sobre esta curva, donde:

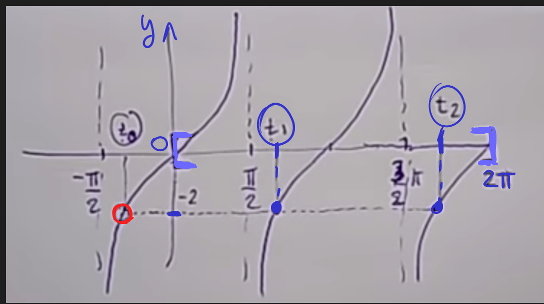
$$f(x,y) = x - y$$



Compongo

$$f \circ \sigma(t) = \underbrace{\cos t - 2\sin t}_{\text{Basta encontrar los extremos acá!}}$$

$$g(t) := f \circ \sigma(t)$$



$$\Rightarrow g'(t) = -\sin t - 2\cos t$$

$$-\sin t - 2\cos t = 0$$

$$-2\cos t = \sin t \qquad (\cos t \neq 0)$$

$$-2 = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$-2 = \tan t$$

$$0 > \left\{ t_0 = \arctan(-2) \approx -1{,}107\ldots < 0 \right.$$

$$\text{en } [0, 2\pi] \begin{cases} t_1 = t_0 + \pi \\ t_2 = t_0 + 2\pi < 2\pi \end{cases}$$

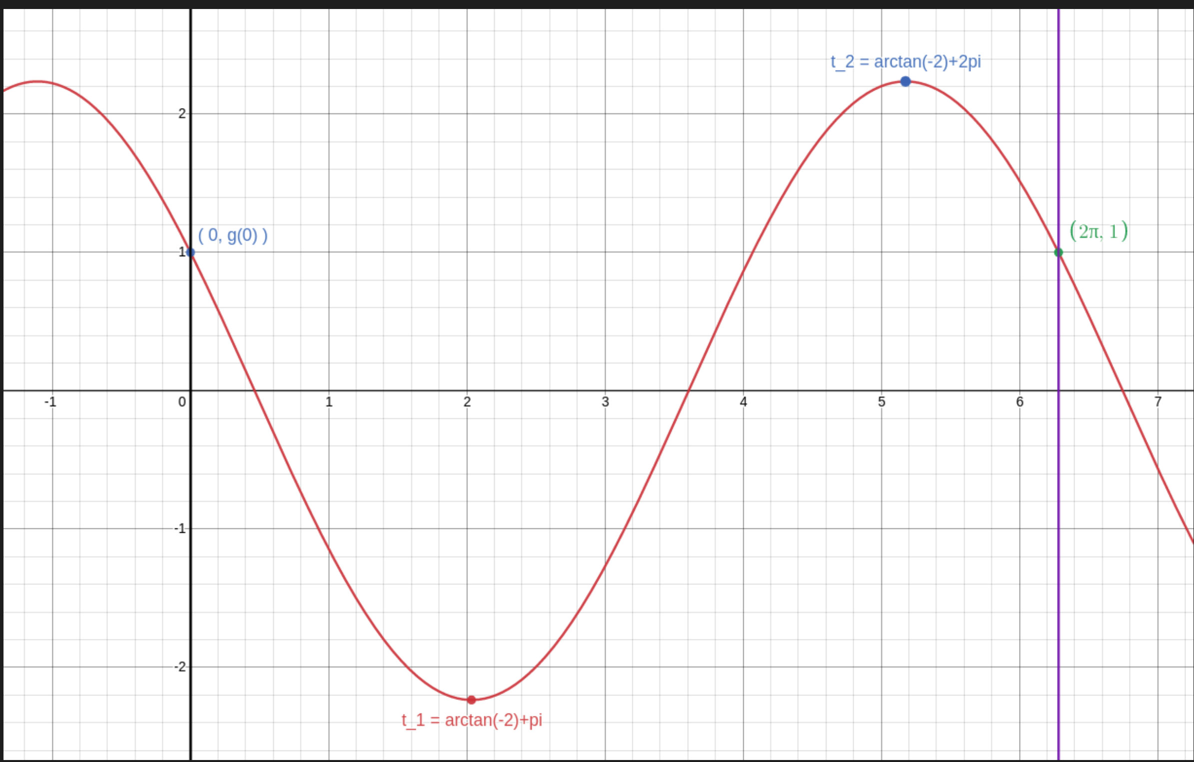
$$2\pi < \begin{cases} t_3 = t_0 + 3\pi > 2\pi \\ \vdots \\ t_n = t_0 + n.\pi \end{cases}$$

Construyo tabla de intervalos entre PCs

$g(t) = \cos t - 2\sin t$

$g'(t) = -\sin t - 2\cos t$

	$[\,0$	$(0, t_1)$	t_1	(t_1, t_2)	t_2	$(t_2, 2\pi)$	$2\pi\,]$
g'	-2	$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$	0	$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +1$	0	< 0	-2
	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$
g	1						1



Teorema de Weierstrass (versión 1 : $\in \mathbb{R}$)

- $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua
  cerrado

$\Rightarrow$ g alcanza máx y min abs en $[a,b]$

Compacidad

Def : $A \subset \mathbb{R}^2$ es compacto si

- Cerrado

y

- Acotado ($\exists\, D \,/\, A \subset D$) disco $B(x,r)$

Obs :

Una recta es cerrada pero no acotada

También vale en $\mathbb{R}^2$

- $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua

A cerrado y acotado (compacto)

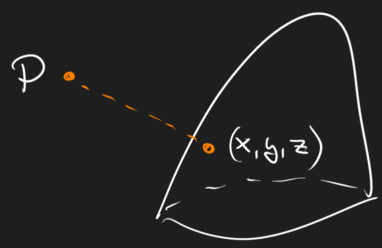
$\Rightarrow$ g alcanza máx y min abs en $[a,b]$

Estrategia para hallar PCs

Buscar en

- Interior de A : $\mathring{A}$
  - ↳ Busco (x,y) / $\nabla f(x,y) = (0,0)$
  - ↳ ó si ∇f no existe ($\nexists\ f_x$ y/o f_y)
- Borde de A : ∂A
  - ↳ Parametrizo el borde
    - ↳ veo Vértices como PCs.
  - ↳ Despejo y Compongo con la función (no siempre se puede $\Rightarrow$ Mul. de Lag)
  - ↳ Derivo y busco extremos
- Categorizo PC con Criterio del Hessiano

Distancia



$\boxed{1}$ $$\text{dist} = \| P - (x,y,z) \| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

quiero dist mínima, pero puedo usar

$$\| P - (x,y,z) \|^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$

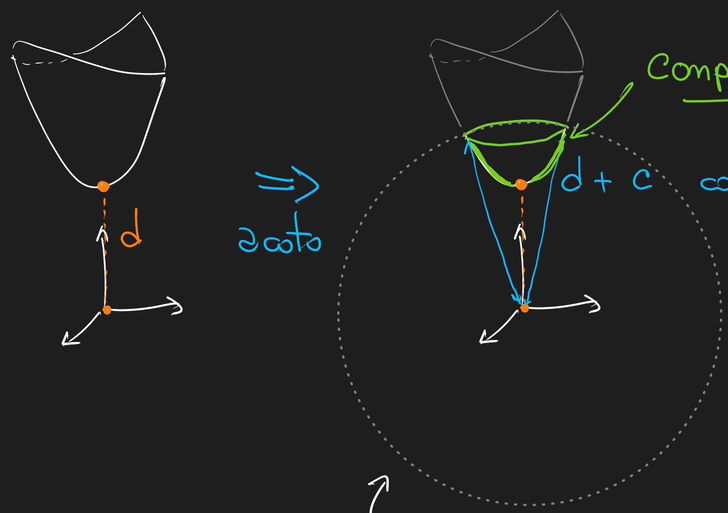
$\boxed{2}$ Despejo alguna variable o variable^2 y reemplazo

$\boxed{3}$ Busco mínimo de esa composición.

Variantes:

1. el conjunto de puntos <u>no</u> es acotado

   ↳ Sol: acoto con distancia encontrada en PC



Compacta!

$d + c$ con c un valor chico

Bola en $(0,0,0)$ y radio $d+c$