EJERCICIO 1

a) Probar que la siguiente ecuación

$$ze^{x^2y} + x^2y + yz = 4$$

define implícitamente una función del tipo $z = \varphi(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1,2)$

Definimos $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y,z) = ze^{x^2y} + x^2y + yz - 4$

Entonces la ecuación $ze^{x^2y} + x^2y + yz = 4$

define la superficie de nivel cero de F,

es decir $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; F(x,y,z) = 0\}$.

Observar que la función F es C^1 y $F(0,1,2) = 0$

Además, $\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2) \neq 0$, de hecho.

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = e^{x^2y} + y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2) = e^0 + 1 = 2 \neq 0.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita.

existe ~~U~~ entorno abierto de $(0,1)$ y V un entorno abierto de 2.

$z = \varphi(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1,2)$ tal que

y $\varphi \in C^1$.

Además

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2)} = \frac{-\left(ze^{x^2y}\cdot y \cdot 2x + 2x\right)\Big|_{(x,y,z)=(0,1,2)}}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

EVALUADO EN:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,2)} = \frac{-\left(ze^{x^2y}\cdot x^2 + x^2 + z\right)\Big|_{(x,y,z)=(0,1,2)}}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

tal que $z=\varphi(x,y)$ en un entorno ...
y $\varphi \in C^1$.

b) para la función φ del inciso anterior, calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $z+\operatorname{sen}(xy)z^3+\varphi(x,y)=6$

en el punto $(0,1,4)$.

b)

Definimos $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $G(x,y,z)=z+\operatorname{sen}(xy)z^3+\varphi(x,y)-6$

G es C^1 por ser suma de funciones C^1 (Recordar que $\varphi\in C^1$)

Entonces tenemos que el plano tangente está determinado por: los $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \nabla G(0,1,4),(x-0,y-1,z-4)\rangle=0$$

La plano tangente a la superficie $R=\{G(x,y,z)=0\}$ en el punto $(0,1,4)$

Calculamos $\nabla G(0,1,4)=\left(\frac{\partial G}{\partial x}(0,1,4),\frac{\partial G}{\partial y}(0,1,4),\frac{\partial G}{\partial z}(0,1,4)\right)$

1) $\frac{\partial G}{\partial x}=\cos(xy)z^3.y+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$

$\frac{\partial G}{\partial x}(0,1,4)=\cos(0).4^3.1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,1)=1+\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,1)}_{\text{Calculado en el item a)}}=64+0=64$

2) $\frac{\partial G}{\partial y}=\cos(xy).xz^3+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial G}{\partial y}(0,1,4)=\cos(0).0.+(-1)=-1$

3) $\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)=1+3\operatorname{sen}(xy)z^2$

$\frac{\partial G}{\partial z}(0,1,4)=1+0=1$

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:

No. de libreta:

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática I - Análisis II (C)

Vearano 2020 - Segundo parcial - 13/03/2020

1. (a) Probar que la siguiente ecuación

$$ze^{x^2y} + x^2y + yz = 4$$

define implícitamente una función del tipo $z = \varphi(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1, 2)$.

(b) Para la función φ del inciso anterior, calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación

$$z + \sin(xy)z^3 + \varphi(x, y) = 6$$

en el punto $(0, 1, 4)$.

2. Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \leq 1\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ la función continua dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$. Encuentre los extremos absolutos de f.

3. Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{7\cos(x)}{(x^2+1)^{1/3}(x^2+x-2)^{1/2}}\,dx.$$

4. Calcular el valor de la siguiente integral

$$\iiint_{\mathcal{R}} \sqrt{z}e^{-(x^2+y^2)^{5/2}}\,dV$$

siendo $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$.

*Justifique **todas** sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.*

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

La ecuación del plano resulta.

$\langle (64, -1, 1), (x, y-1, z-4) \rangle = 0$

$64x - y + 1 + z - 4 = 0$

$\boxed{64x - y + z = 3}$ ← Plano.

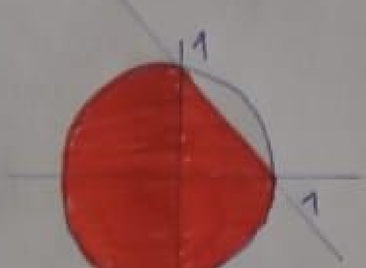
② SEAN $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1 , x+y\leq 1\}$ Y $f: D\to\mathbb{R}$ LA FUNCIÓN CONTINUA DADA POR $f(x,y)=x^2-y^2$. ENCUENTRE LOS EXTREMOS ABSOLUTOS DE f.

Lo primero que hacemos es graficar el conjunto D:

$x^2+y^2\leq 1$ ⇝ Nos indica una circunferencia de centro 0 y radio 1 con su interior

$x+y\leq 1$ ⇝ Nos indica la recta $y=1-x$ y el semiplano que cumple $y<1-x$

Como queremos que ocurran las dos condiciones a la vez nos queda:

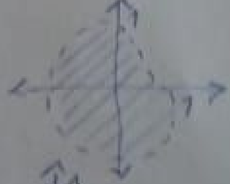


Observamos que se trata de un conjunto cerrado y acotado, luego es COMPACTO.

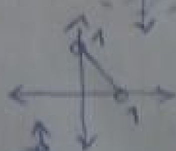
Identificamos que, como f continua (es un polinomio) y D es compacto, alcanzará máximo y mínimo absolutos. [ESTO ES RESULTADO DEL TEO DE WEIERSTRASS].

Es por esto, que nos bastará con "recolectar" candidatos a extremos en D. Será conveniente entonces, separar a D para este estudio

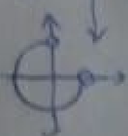
$D^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1 , x+y<1\}$



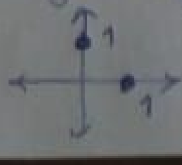
$\partial D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=1 , 0<x<1\}$



$\partial D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1 , x+y<1\}$



Esquinas del borde $\{(1,0),(0,1)\}$



■ <u>Empecemos con D°.</u>

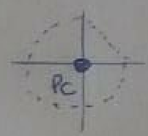
Como f es diferenciable, los puntos críticos son los (x,y) tales que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. [TEO. FERMAT]

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$

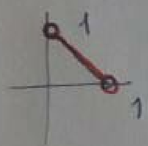
observemos que pertenece a D° !!



$$\boxed{\text{Luego } \{(0,0)\} = Pc}$$

■ <u>Analicemos ahora $f|_{\partial D_1}$:</u>

* Una opción sería parametrizar el segmento



$$\sigma : [0,1] \longrightarrow \partial D_1, \quad \sigma(t) = (t, 1-t)$$

(otra forma de decir esto es $(x, 1-x)$ con $x \in (0,1)$)

$$f(\sigma(t)) = f(t, 1-t) = t^2 - (1-t)^2 = t^2 - (1 - 2t + t^2)$$
$$= t^2 - 1 + 2t - t^2 = 2t - 1.$$

$\Rightarrow f(\sigma(t)) = 2t - 1 \leftarrow$ Busco puntos críticos:

$$[f(\sigma(t))]' = 2$$

Pero vemos (en este caso) que su derivada no se anula nunca.

Luego <u>no tenemos puntos críticos aquí</u>

* Otra opción sería hacer/utilizar el Teo de M. Lagrange.

Si vamos por este camino, necesitamos definir:

PORQUE LA RESTRICCIÓN ERA $x+y=1$

$g : \partial D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x,y) = x+y-1$

y tenemos que ver que estamos en las condiciones de M-L

- $g \in \mathcal{C}^1$ $\wedge$ $\partial D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ ✓
- $\nabla g(x,y) = (1,1)$ es $\neq (0,0)$ en ∂D_1 ✓
- $f \in \mathcal{C}^1$ ✓ (ya lo vimos antes que f polinomio)

Luego los puntos críticos serán aquellos que cumplan:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) & \lambda \in \mathbb{R} \\ x+y=1 \end{cases}$$

Tenemos entonces que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 & \longrightarrow x = \lambda/2 \\ -2y = \lambda \cdot 1 & \longrightarrow y = \lambda/-2 \\ x+y=1 & \longrightarrow \lambda/2 + \lambda/-2 = 1 \iff 0 = 1 \end{cases}$$

ABSURDO!

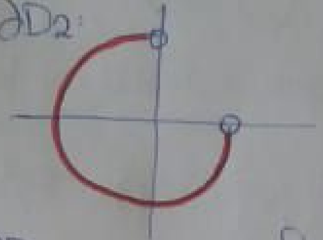
$$\boxed{\text{Luego no tenemos puntos críticos en } \partial D_1}$$

- Analizamos $f|_{\partial D_2}$

Lo podemos hacer parametrizando, pero usando MLagrange es más fácil o directo:

Ahora ∂D_2 recordemos es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ x+y<1\}$

Esta escritura tal vez mareó a algunos pero pensemos en el gráfico de ∂D_2:



Considero $h : \partial D_2 \to \mathbb{R}$ $\quad h(x,y) = x^2+y^2-1$

- $h \in \mathcal{C}^1$ ✓ (es polinomio)
- $\nabla h(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \iff (x,y)=(0,0) \notin \partial D_2$ ✓

o sea no se anula en ∂D_2

<u>Nota</u>: Si pasaba esto para algún punto de ∂D_2 lo recolectaba y analizaba al final con los otros puntos críticos.

- $f \in \mathcal{C}^1$ ✓

Luego los puntos críticos en ∂D_2 son aquellos que cumplan

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda . \nabla h(x,y) & \lambda \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2=1 \\ x+y<1 \end{cases}$$

← PODRÍA NO PONER ESTA CONDICIÓN Y CHEQUEAR AL FINAL (ESO VAMOS A HACER).

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda . 2x & \text{(I)} \\ -2y = \lambda . 2y & \text{(II)} \\ x^2+y^2=1 & \text{(III)} \end{cases}$$

(I) $\longrightarrow$ $2x - \lambda . 2x = 0$

$2x . (1-\lambda) = 0$

Para que se cumpla (I) sólo alcanzar con que se cumplar: $2x\cdot(1-\lambda)=0$

$$2x=0 \quad ó \quad 1-\lambda=0$$

$$\boxed{x=0} \quad ó \quad \boxed{\lambda=1}$$

Por esta observación considero dos casos:

Si $x=0$:

En (III) tenemos que $0^2+y^2=1 \leftrightarrow y^2=1 \leftrightarrow |y|=\sqrt{1}$

$y=1$ ó $y=-1$

Con estas condiciones si voy a (II) me queda

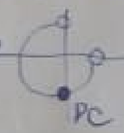
Si $y=1 \longrightarrow \lambda=-1$

Si $y=-1 \longrightarrow \lambda=1$

Y ninguna de estas condiciones niega las otras ecuaciones.

Tendríamos que $(0,1)$ y $(0,-1)$ son puntos críticos.

PERO $(0,1)$ no pertenece a ∂D_2. Sólo $(0,-1)$ será punto crítico.

lo veo acá → 

o sino veo que no cumple $x+y<1$

Si $x\neq 0$ (Como vimos al comienzo, tiene que ocurrir que $\lambda=1$ sino no se cumple (I)!!)

Entonces $\lambda=1 \longrightarrow$ en (II) nos queda $-2y=2y$

$$\Updownarrow$$

$$-4y=0$$

$$\boxed{y=0}$$

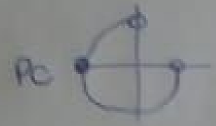
Ahora en (III) $x^2+0^2=1 \leftrightarrow x^2=1$

$\leftrightarrow |x|=\sqrt{1}$

$\leftrightarrow x=1$ ó $x=-1$

Nos quedan los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$

PERO como antes... solo nos quedaremos con $(-1,0)$ pues $(1,0) \notin \partial D_2$



$$\boxed{Pc = \{(-1,0)\}}$$

- Finalmente nos queda analizar las esquinas del borde de D

A ojo podemos ver que son $(1,0)$ y $(0,1)$. En "cuentas" sería hallar la intersección de

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=1 \rightarrow y=1-x \end{cases} \longrightarrow x^2+(1-x)^2=1$$

$$x^2+1-2x+x^2=1$$

$$2x^2-2x=0$$

$$2x(x-1)=0$$

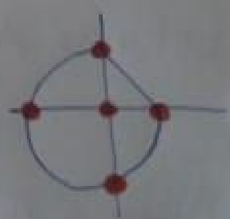
$$x=0 \rightarrow y=1 \qquad x=1 \rightarrow y=0$$

(NO HACÍA FALTA ACA ERAN FACIL DE VER)

Luego $\boxed{Pc = \{(1,0) ; (0,1)\}}$

Ya recolectamos TODOS nuestros candidatos:

$$\{\underbrace{(1,0),(0,1)}_{\text{ESQUINAS}}, \underbrace{(0,-1),(-1,0)}_{\partial D_2}, \underbrace{(0,0)}_{D^\circ}\}$$



y ∂D_1 no aportó nada.

Casi terminamos, solo basta ver cuáles serán los puntos para los cuales f alcanza máximo valor y cuáles mínimo. Como $f(x,y) = x^2 - y^2$ tenemos:

$f(1,0) = 1$

$f(0,1) = -1$

$f(0,-1) = -1$

$f(-1,0) = 1$

$f(0,0) = 0$

Entonces: f alcanzará máximo absoluto en $(1,0)$ y $(-1,0)$

f alcanzará mínimo absoluto en $(0,-1)$ y $(-1,0)$

Ejercicio 3 del 2do parcial del 13/03/2020

Analizar convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{7\cdot\cos(x)}{(x^2+1)^{1/3}\cdot(x^2+x-2)^{1/2}}\,dx$$

<u>Resolución:</u>

Comenzamos estudiando la continuidad de

$$f(x)=\frac{7\cdot\cos(x)}{(x^2+1)^{1/3}\cdot(x^2+x-2)^{1/2}}$$

Vemos que $7\cdot\cos(x)$ es continua $\forall x\in\mathbb{R}$.

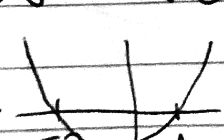
Para $\underbrace{(x^2+1)^{1/3}}_{\text{continua en } \mathbb{R}}$ $\underbrace{(x^2+x-2)^{1/2}}_{\text{continua en su dominio}=\{x\in\mathbb{R}/\ x^2+x-2\geq 0\}}$

por tener $\sqrt{\ }$.

Entonces $f(x)$ que es el cociente será continua en el dominio de $\sqrt{x^2+x-2}$ y cuando el denominador no se anule.

Vemos que $x^2+1\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Graf de x^2+x-2



$$x^2+x-2=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Como nos interesa mirar en $[1,+\infty)$,

$-2\notin[1,+\infty)$ y $x^2+x-2>0$ si $x>1$

(ver gráfico de la cuadrática)

entonces concluimos que f es continua en $(1, +\infty)$.

Luego para estudiar la $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ debemos tomar un $a \in (1, +\infty)$ y partir allí la integral.

Yo voy a tomar $a=2$.

Estudiamos a) $\int_1^2 f(x)\,dx$ y b) $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

Antes de estudiar cada caso tenemos que estudiar el signo de $f(x)$.

Esto es muy importante ya que ambos criterios de comparación requieren tener signo. Es decir, para usar comparación del cociente necesitamos que ambas funciones sean positivas en el intervalo. Y para usar comparación de desigualdad necesitamos que ambas sean no negativas (≥ 0).

Estudiemos entonces ~~[illegible]~~ si $f(x) > 0$.

En este caso, al tener $\cos(x)$ en el numerador vemos que tanto en $(1,2)$ ($\cos(x)$ cambia de signo en $x=\pi/2 \in (1,2)$) como en $(2,+\infty)$, $\cos(x)$ cambia de signo.

Luego, estudiamos convergencia absoluta es decir estudiaremos $\int |f(x)|\,dx$ en ambos intervalos $(1,2]$ y $[2,+\infty)$ y si tenemos convergencia absoluta sabemos que también tendremos convergencia.

a) $$|f(x)| = \frac{7 \cdot |\cos(x)|}{|(x^2+1)^{1/3} \cdot (x^2+x-2)^{1/2}|}$$

Factorizamos $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

(ya vimos que 1 y -2 son raíces)

$$\Rightarrow |f(x)| = \frac{7 \cdot |\cos(x)|}{\underbrace{(x^2+1)^{1/3}} \cdot (x-1)^{1/2} \cdot (x+2)^{1/2}}$$

también son >0 si $x>1$

saqué | | porque sé que $(x^2+1)^{1/2} > 0$

Además, como queremos ver su comportamiento cerca de 1 por derecha

(porque sabemos que ahí no es continua y podría no converger por eso)

miramos

$$\lim_{x\to 1^+} |f(x)| = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{7 \cdot |\cos(x)|}^{7\cdot|\cos(1)|}}{\underbrace{(x^2+1)^{1/3}(x+2)^{1/2}}_{2^{1/2}\cdot 3^{1/2}}\underbrace{(x-1)^{1/2}}_{0^+}}$$

luego este cociente tiene $\lim_{x\to 1^+} |f(x)| = +\infty$

gracias (o por culpa de) $\dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$!

Ahí me aviso que si divido por ese factor tendremos $\lim_{x\to 1^+} = \text{no}$.

Observemos que $\dfrac{1}{(x-1)^{1/2}} > 0$ si $x > 1$

Calculamos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|f(x)|}{1/(x-1)^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{7\cdot|\cos(x)|}{(x^2+1)^{1/3}(x+2)^{1/2}\cancel{(x-1)^{1/2}}}}{\frac{1}{\cancel{(x-1)^{1/2}}}} = \frac{7\cdot|\cos(1)|}{2^{1/3}\cdot 3^{1/2}}$$

luego $\int_1^2 |f(x)|\,dx$ se comportará

como $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx$

Esta lo puedo calcular!

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \underbrace{\frac{1}{(x-1)^{1/2}}}_{=(x-1)^{-1/2}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 1^+} (x-1)^{1/2}\cdot 2 \Big|_a^2 = \lim_{a\to 1^+} 2-2\cdot(a-1)^{1/2} = 2$$

luego, como $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,dx$ converge

por comparación del cociente

$$\int_1^2 |f(x)|\,dx \quad \text{converge}$$

y por teo que dice que convergencia absoluta implica convergencia, tenemos que $\int_1^2 f(x)\,dx$ converge.

b) Estudiamos ahora $\int_2^{+\infty} |f(x)|\,dx$

Para esto queremos analizar

$\lim_{x \to +\infty} |f(x)|$ pero nos encontramos

con que $|\cos(x)|$ no tiene límite

Entonces nos conviene sacarnos de encima este factor acotando $|\cos(x)| \leq 1$

Como ~~estudiamos~~

$$|f(x)| = \frac{7\,|\cos(x)|}{(x^2+1)^{1/3}\,(x^2+x-2)^{1/2}} \leq \frac{7}{(x^2+1)^{1/3}(x^2+x-2)^{1/2}}$$

y estudiamos

$$g(x) = \frac{7}{(x^2+1)^{1/3}\cdot(x^2+x-2)^{1/2}}$$

En este caso, al tener un dominio <u>no</u> acotado $[2,+\infty)$, tenemos que estudiar

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{(x^2+1)^{1/3}(x^2+x-2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3}\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right)^{1/2}}$$

Actuamos $(x^2)^{1/2}=x$ porque $x>0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x^{2/3}\cdot x \cdot \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{1/2}}$$

$x^{2/3}\cdot x = x^{5/3}$; $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$; $\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{1/2} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$

$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \longleftarrow x^{5/3}$

Vemos que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y lo hace con la "velocidad" de $\frac{1}{x^{5/3}}$

Ahí veo que si comparo con $\frac{1}{x^{5/3}} > 0$ si $x>0$ el límite del cociente será un nº.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{x^{5/3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{7}{\cancel{x^{5/3}}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}\cdot\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{1/2}}}{\frac{1}{\cancel{x^{5/3}}}}$$

$= 7$

Entonces $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ se comporta como

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx = \int_2^{+\infty} x^{-5/3}\,dx$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} x^{-5/3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} x^{-2/3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\Big|_2^M$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \underbrace{M^{-2/3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\downarrow\, 0} - 2^{-2/3}\left(-\frac{3}{2}\right) = 2^{-2/3}\cdot\frac{3}{2}.$$

Entonces como $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx$ converge

tenemos que $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$

Por comparación, como $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$

$\forall\ x \in [2, +\infty)$ tenemos que

$\int_2^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Finalmente, como $\int_1^{2} f(x)\,dx$ y $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$

convergen, concluimos que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

④ Calcular el valor de la siguiente integral. (I)

$$\iiint_R \sqrt{z}\, e^{-(x^2+y^2)^{5/2}}\, dV.$$

Siendo $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \leq 0$
$y \geq 0,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$

Una primer observación, es que, por las características de R, integrar en función de la variable x, y, z no sería lo más conveniente. Para convencerse que conviene utilizar algún tipo de cambio de variable, "intentemos" hacer un dibujo de R. (Voy a dar lo mejor de mí)

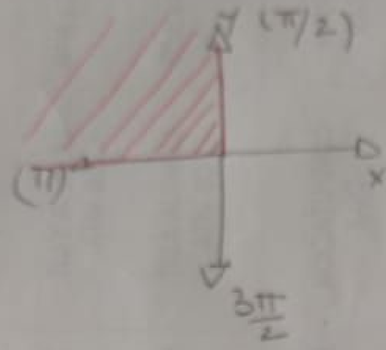
Observemos que R se conforma por 4 condiciones

$x^2+y^2 \leq 1 \rightarrow$ Cilindro de radio 1.

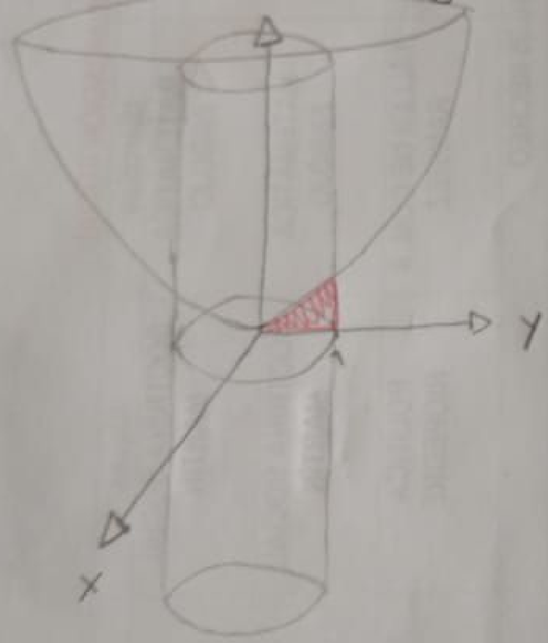
$\left.\begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ sobre cuadrante se trabaja.

$0 \leq z \leq x^2+y^2 \rightarrow$ paraboloide.

Las condiciones $x \leq 0$ e $y \geq 0$ nos indican, (II)
si nos paramos en el plano $z=0$, la siguiente parte del gráfico a analizar



Ahora, teniendo en cuenta el gráfico superior, veamos cómo quedan las cuatro condiciones en simultáneo a un gráfico de $\mathbb{R}^3$



- Miramos el octante correspondiente a las condiciones $x \leq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$

- Para $x^2+y^2 \leq 1$ (el cilindro) nos quedamos con los $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que se encuentran contenidos adentro.

- Para $z \leq x^2+y^2$ (el paraboloide) nos indica que debemos quedarnos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que la coordenada z esté por debajo del gráfico. Es decir, los puntos por debajo del paraboloide.

Pidiendo que se cumplan las cuatro condiciones anteriores debemos cual es la región R con la que queremos trabajar

Dado que la región a tratar tiene un cilindro uno se tira trabajar con cilíndricas. Debemos observar también que existe entre el radio del cilindro y la altura (Esto se ve reflejado en en los puntos más cercanos al origen).

Utilizo coordenadas cilíndricas

$x = r\cos\theta \qquad r \geq 0$

$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$z = z \qquad z$ con alguna restricción

Lo que vamos hacer ahora es trabajar con el intervalo donde se mueve r, θ, z para poder describir la región R.

- Para empezar si volvemos a las condiciones $x \leq 0$ e $y \geq 0$ nos queda que $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Bien, para describir la relación entre z y r observemos que $x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2 \stackrel{?}{=} r^2$.

y a R se tiene que $r^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$, (IV)

Por otro lado $0 \leq z \leq x^2+y^2=r^2$.

Luego, $r \in [0,1]$
$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
$z \in [0, r^2]$

Antes de realizar el cambio de variable, recordemos que debemos calcular el jacobiano para que esto sea posible. En este caso $\det \begin{vmatrix} \cos\theta & \sen\theta & 0 \\ -r\sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Por el teorema de cambio de variable se tiene que:

$$\iiint_R \sqrt{z}\, e^{-(x^2+y^2)^{5/2}}\, dV = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} \sqrt{z}\, e^{-r^5}\, r \, dz\,dr\,d\theta =$$

jacobiano

como z depende de r lo ponemos al comienzo

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 \frac{2}{3} z^{3/2} e^{-r^5} r \Big|_0^{r^2} dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 \frac{2}{3} r^3 e^{-r^5} r\, dr\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 r^4 e^{-r^5} dr\,d\theta.$$

Resuelvo $\int r^4 e^{-r^5} dr$ en un calculo auxiliar

$$\left[\int r^4 e^{-r^5}\,dr = \int -\frac{1}{5} \quad = -\frac{1}{5} e^{u} = -\frac{1}{5} e^{-r^5}\right]$$

$$u = -r^5$$

$$du = -5r^4\,dr$$

Volviendo al ejercicio se tiene que.

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1 r^4 e^{-r^5}\,dr\,d\theta = \frac{-2}{15}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-r^5}\Big|_0^1 d\theta = -\frac{2}{15}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-1} - e^{0}\,d\theta =$$

$$+\frac{2}{15}(1-e^{-1})\int_{\pi/2}^{\pi} 1\,d\theta = \frac{2}{15}(1-e^{-1})(\pi - \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{15}(1-e^{-1})\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{15}(1-e^{-1}) \geq 0.$$

Luego $\iiint_R \sqrt{z}\, e^{-(x^2+y^2)^{5/2}}\,dV = \frac{\pi}{15}(1-e^{-1})$.