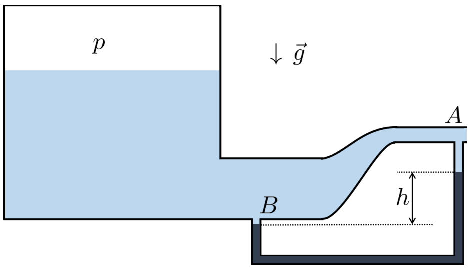
Segundo parcial

26/11/2020

- Resuelvan los diferentes problemas en hojas separadas
- Cuando sea necesario, usen $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ para la aceleración gravitatoria
- Justifiquen con precisión todos los cálculos y razonamientos

Problema 1. Un tanque cerrado de gran sección está lleno de agua y presurizado a $p = 2p_0$. El tanque está conectado a una tubería como se muestra en la figura. El desagüe está abierto a la atmósfera. Conectado a la tubería se encuentra un manómetro con mercurio. La superficie del agua del tanque está a una altura de 2 metros por encima del desagüe.



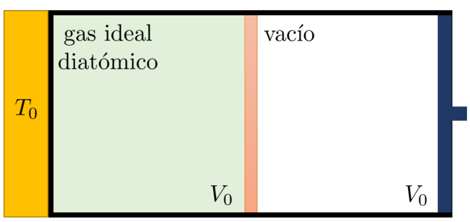
(a) ¿Con qué velocidad sale el agua por el desagüe?

(b) Si el área de la sección de la tubería en B es el doble que la del desagüe y el punto B se encuentra 1 metro por debajo del mismo. ¿Cuánto vale la presión en B?

(c) En las condiciones del inciso anterior, ¿Qué diferencia de altura h marca el manómetro de mercurio?

Datos: $p_0 = 1\,\mathrm{atm}$, $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13,6 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Problema 2. Un mol de un gas ideal diatómico se halla inicialmente en la mitad de un contenedor de volumen $2\,V_0$. La otra mitad, separada de la anterior por una membrana rígida, está vacía. El sistema se pone en contacto con una fuente a temperatura T_0 hasta alcanzar el equilibrio térmico (estado a). A partir de ahí se somete al sistema a un proceso con las siguientes etapas:



$a \to b$: Se elimina la membrana y se espera a que llegue al equilibrio.

$b \to c$: Se comprime de manera reversible y adiabática hasta retornar al volumen inicial.

$c \to d$: Se traba el pistón en V_0, y se pone en contacto nuevamente con la fuente a T_0.

(a) ¿Qué tipo de proceso termodinámico se da en cada etapa? Representar el proceso completo en un diagrama $p - V$ (usar línea de guiones si una etapa fuera irreversible).

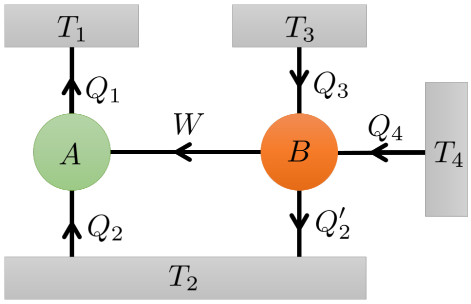
(b) Calcular los valores de p, V y T en todos los estados de equilibrio del sistema.

(c) Para cada etapa, hallar Q y W. Indicar si el sistema está absorbiendo o entregando calor, y si está realizando o recibiendo trabajo. ¿Cómo son ΔU, Q y W en el proceso completo?

(d) Supongamos que finalmente, estando en contacto con la fuente térmica, el gas se comprime hasta un volumen $V_0/10$ de manera reversible. Calcular la presión en el estado final a partir de la ecuación de estado del gas ideal y a partir de la ecuación de gas de Van der Waals utilizando las constantes a y b que se dan como datos. Comparar los resultados e interpretar.

Datos: $V_0 = 2\,\mathrm{l}$, $T_0 = 293\,\mathrm{K}$, $C_V = \frac{5}{2}R$, $\gamma = 7/5$, $a = 2.45 \times 10^{-2}\,\mathrm{J\,m^3/mol^2}$, $b = 23.71 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^3/mol}$.

Problema 3. Una máquina compuesta está integrada por una refrigeradora, A, que trabaja entre dos fuentes, y una térmica, B, en contacto con tres fuentes. Ambas trabajan en ciclos. La máquina A es reversible, y su rendimiento es $K_A = 1$.



(a) Sabiendo que $Q_2 = 300\,\mathrm{kJ}$, calcular la temperatura T_2 de la fuente fría y el trabajo que recibe la máquina A.

(b) Si $Q_4 = 50\,\mathrm{kJ}$ y la eficiencia de B es $e_B = \frac{W}{Q_3+Q_4} = 0.6$, calcular Q'_2 y Q_3. ¿Es reversible la máquina B? Comparar con la eficiencia que tendría una máquina térmica haciendo un ciclo de Carnot reversible entre la fuente a temperatura T_2 y la fuente más caliente, a T_3.

(c) Calcular la variación de entropía de las fuentes y de las máquinas A y B, luego de que ambas realizaron un ciclo. Expresar la variación de entropía del universo y comparar con la segunda Ley de la Termodinámica.

Datos: $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, $T_3 = 600\,\mathrm{K}$, $T_4 = 400\,\mathrm{K}$.

Problema 1. Resolución

(a) Para ver con qué velocidad sale el fluido por el desagüe, podemos usar la ecuación de Bernoulli y comparar un punto sobre la superficie libre dentro del tanque, con el punto A. Tomando el cero de alturas a la altura de A (la superficie libre corresponde a $H = 2\,\mathrm{m}$)

$$p + \rho\, g\, H + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2.$$

Considerando que la sección del tanque es mucho mayor que la del desagüe, la ecuación de continuidad nos indica que el término proporcional a v^2 será despreciable frente al proporcional a v_A^2. Por lo tanto, podemos despejar v_A en función de los datos:

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{2\frac{p - p_0}{\rho} + 2gH} \\ &= \sqrt{2\frac{p_0}{\rho} + 2gH} \\ \Rightarrow &\boxed{v_A = 15.58\,\mathrm{m/s}}. \end{aligned}$$

(b) Ahora queremos conocer la presión en B. Tenemos que comparar ese punto del fluido con algún otro del que tengamos información. Lo más sencillo es compararlo con el punto A. Tenemos que plantear tanto la ecuación de continuidad del caudal como la de Bernoulli. Tomando ahora el cero de alturas en el fondo del tanque, $h_A = 1\,\mathrm{m}$,

$$\begin{cases} A_B\, v_B = A_A\, v_A \\ p_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2 = p_A + \rho\, g\, h_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $v_B = (A_A/A_B)v_A = v_A/2$. Reemplazando en la segunda,

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \frac{3}{8}\rho\, v_A^2 + \rho\, g\, h_A \\ \Rightarrow &\boxed{p_B = 202326\,\mathrm{Pa}} \end{aligned}$$

(c) Por último, queremos ver qué diferencia de altura h indica el manómetro. Para eso, podemos comparar dos puntos correspondientes al mercurio. Tomemos el que está en la interfaz agua-mercurio del lado izquierdo del tubo (llamémosle B'), y el que está a igual altura pero del lado derecho (A'). Al ser dos puntos a igual profundidad de un mismo fluido en reposo, su presión debe ser igual. A su vez, la presión en cada uno de esos puntos podemos relacionarla con la presión de los puntos B y A, respectivamente, vía la ecuación de presión hidrostática:

$$\begin{aligned} p_{B'} &= p_{A'} \\ p_B + \rho\, g\, d_B &= p_A + \rho\, g\, d_A + \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, h \\ \Rightarrow\ h &= \frac{p_B - p_A}{\rho_{\mathrm{Hg}}\, g} + \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{Hg}}}(d_B - d_A) \end{aligned}$$

De la expresión anterior, no conocemos d_A ni d_B, pero sabemos que $h + d_A - d_B = 1\,\mathrm{m}$. Con lo cual podemos resolver lo pedido. En cualquier caso, como el segundo término es proporcional a $\rho/\rho_{\mathrm{Hg}} = 0.074$, es esperable que podamos despreciarlo. Si lo despreciáramos,

$$h = \frac{p_B - p_A}{\rho_{\mathrm{Hg}}\, g} \ \Rightarrow\ \boxed{h = 0.74\,\mathrm{m}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, podemos verificar que el valor exacto de h corresponde a una corrección en el segundo decimal.

Problema 2. Resolución

(a) La secuencia de etapas sería: *expansión libre* ($a \to b$), *compresión adiabática reversible* ($b \to c$), *enfriamiento isocórico* ($c \to d \equiv a$). Solo el segundo proceso es irreversible. También se deduce de las condiciones que se trata de un ciclo, ya que el estado final posee igual temperatura y volumen (por lo tanto, igual presión) que el inicial.

(b) Para calcular los valores de las variables termodinámicas en cada punto, tenemos que considerar el tipo de proceso que los conecta y la ecuación de estado (del gas ideal). A pesar de que algunos procesos son irreversibles, los estados a, b y c, son estados de equilibrio, y entonces la ecuación de estado es válida. Durante la expansión libre, la temperatura del gas *ideal* no se ve afectada. En la etapa adiabática, sabemos que pV^γ es constante.

Estado a

$$T_a = 293\,\mathrm{K}$$
$$V_a = V_0 = 2\,\mathrm{l}$$
$$p_a = p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = 12\,\mathrm{atm}$$

Estado b

$$T_b = T_a = 293\,\mathrm{K}$$
$$V_b = 2V_a = 4\,\mathrm{l}$$
$$p_b = \frac{nRT_0}{2V_0} = 6\,\mathrm{atm}$$

Estado c

$$V_c = V_a = 2\,\mathrm{l}$$
$$p_b V_b^\gamma = p_c V_c^\gamma \;\Rightarrow\; p_c = \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^\gamma p_b = 2^{\gamma-1} p_0 = 15.83\,\mathrm{atm}$$
$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = 386\,\mathrm{K}$$

(c) Para analizar cada etapa, además de lo calculado en el ítem anterior podemos recurrir al primer principio: $\Delta U = Q - W$. La primera etapa es una expansión libre. Como ya dijimos, en tal expansión la temperatura de un gas ideal no varía y la energía interna es la misma en los estados inicial y final. Nos queda,

$$\Delta U_{a\to b} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{a\to b} = W_{a\to b} = 0,$$

donde la última igualdad surge de que al ser una expansión contra presión externa nula, el trabajo es también cero.

En la segunda etapa, tenemos la condición de adiabaticidad. Recordando además que para el gas ideal $\Delta U = nC_V \Delta T$,

$$Q_{b\to c} = 0 \;\Rightarrow\; W_{b\to c} = -\Delta U_{b\to c} = -nC_V \Delta T_{bc} = -1932\,\mathrm{J}.$$

Por lo tanto, en esta etapa el gas recibe trabajo del entorno.

Por último, la tercera etapa es de volumen constante con lo cual el trabajo involucrado es también nulo. Usando otra vez la expresión del ΔU para un gas ideal,

$$W_{c\to a} = 0 \;\Rightarrow\; Q_{a\to b} = \Delta U_{c\to a} = -nC_V \Delta T_{ca} = -1932\,\mathrm{J}.$$

Es decir, que el sistema entrega calor al ambiente, de igual valor que el trabajo recibido en la etapa anterior.

Sumando todas las contribuciones anteriores tenemos las variaciones en el proceso completo. En primer lugar, nos queda $\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$, como es esperable dado que U es función de estado. Luego, $Q_{\text{ciclo}} = W_{\text{ciclo}} = -1932\,\text{J}$.

(d) Ahora incorporamos una última etapa. Una compresión reversible isotérmica hasta $V_e = V_0/10$. Usando las dos ecuaciones de estado obtenemos:

$$\text{gas ideal:} \quad p = \frac{nRT}{V} \;\Rightarrow\; p_e = \frac{nRT_e}{V_e} = \frac{nRT_0}{V_0/10} = 10p_0 = 120.13\,\text{atm}$$

$$\text{gas VdW:} \quad p = \frac{nRT}{V-nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2 \;\Rightarrow\; \tilde{p}_e = \frac{nRT_0}{V_0/10 - nb} - a\left(\frac{10n}{V_0}\right)^2 = 119.53\,\text{atm}$$

La diferencia es de apenas el 0.5 %, lo cual nos indica que el gas sigue estando muy diluido. Por otro lado, la presión calculada con la ecuación de VdW es menor, ya que se consideran las interacciones intermoleculares.

Problema 3. Resolución

(a) La máquina A es una máquina refrigeradora reversible que trabaja entre dos fuentes. El rendimiento se define como el cociente entre el calor que se extrae de la fuente fría y el trabajo consumido. Por el teorema de Carnot, sabemos que en este caso está dado solo por las temperaturas de la fuente fría (T_2) y caliente (T_1), en la forma

$$K_A = \frac{|Q_2|}{|W_A|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = K_{\text{Carnot}}.$$

Usando que $K_A = 1$ y $T_1 = 300\,\text{K}$, obtenemos que

$$\boxed{T_2 = T_1/2 = 150\,\text{K}}$$

Por otro lado, volviendo a la ecuación de la eficiencia y sabiendo que $Q_2 = 300\,\text{kJ}$, podemos conocer el valor del trabajo empleado, W_A,

$$|W_A| = |Q_A| = 300\,\text{kJ} \Rightarrow \boxed{W_A = -300\,\text{kJ}}.$$

El signo negativo se debe a que es un trabajo recibido por el sistema. Aunque no nos lo piden en este ítem, podemos también calcular el trabajo Q_1 que entrega la máquina a la fuente caliente. Recordando que el sistema realiza un ciclo, $\Delta U_A = 0$ y entonces $W_A = Q_A = Q_1 + Q_2$. De los cálculos anteriores se sigue que $Q_1 = W_A - Q_2 = -600\,\text{kJ}$.

(b) Para saber si la máquina B es reversible tenemos que apelar al teorema de Clausius, para lo cual necesitamos conocer todas las temperaturas y calores intercambiados por esta máquina. En principio, del ítem anterior sabemos que el trabajo que realiza esta máquina es $W_B = -W_A = 300\,\text{kJ}$. Nos dan dos datos, el calor Q_4 y la eficiencia e_B, que nos van a servir para averiguar los dos calores restantes, Q_3 y Q_4. Tenemos que usar que esta máquina también trabaja en un ciclo, entonces $\Delta U_B = 0$ y vale $W_B = Q_B = Q_2' + Q_3 + Q_4$. Luego,

$$\begin{cases} Q_2' + Q_3 + Q_4 = W_B = 300\,\text{kJ} \\ Q_3 + Q_4 = W_B/e_B = 500\,\text{kJ} \end{cases} \Rightarrow Q_3 = 450\,\text{kJ} \quad \text{y} \quad Q_2' = -200\,\text{kJ}.$$

Está bueno notar que $Q_3 > 0$ (absorbido) y $Q_2' < 0$ (entregado) como se esperaba. Ahora sí podemos plantear la desigualdad de Clausius:

$$\frac{Q_2'}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = -0.46 < 0 \Rightarrow \boxed{B \text{ es irreversible}}$$

Para tener una comparación de eficiencia, podemos ver cómo rendiría una máquina de Carnot reversible entre T_2 y T_3. Esa máquina tendría una eficiencia

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 0.75 > e_B.$$

(c) Por último, nos piden evaluar la variación de entropía de los distintos subsistemas en un ciclo. Para las máquinas, dado que operan en ciclos y recordando que la entropía es una función de estado, tenemos que $\Delta S_A = \Delta S_B = 0$. Computemos ahora la variación entrópica de las fuentes. Para eso, hay que recordar que los calores que calculamos antes son los absorbidos/entregados por las máquinas, *no por las fuentes*. Así que para calcular lo que pasa con las fuentes teníamos que cambiar los signos:

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= -Q_1/T_1 = 600\,\text{kJ}/300\,\text{K} = 2.000\,\text{kJ/K} \\
\Delta S_2 &= -(Q_2 + Q_2')/T_2 = -100\,\text{kJ}/150\,\text{K} = -0.667\,\text{kJ/K} \\
\Delta S_3 &= -Q_3/T_3 = -450\,\text{kJ}/600\,\text{K} = -0.750\,\text{kJ/K} \\
\Delta S_4 &= -Q_4/T_4 = -50\,\text{kJ}/400\,\text{K} = -0.125\,\text{kJ/K}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\boxed{\Delta S_{\text{Univ}} = 0.458\,\text{kJ/K} > 0}$, consistente con la observación anterior de que una de las máquinas está operando de manera irreversible.