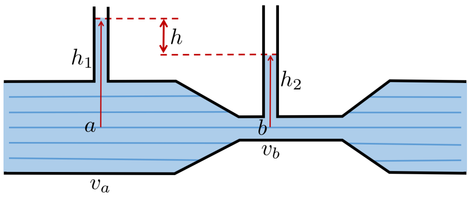
Resolución del 2do parcial

25/06/2021

- Resuelvan los diferentes problemas en hojas separadas
- Cuando sea necesario, usen $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ para la aceleración gravitatoria
- Justifiquen con precisión todos los cálculos y razonamientos

Problema 1. Por el tubo de Venturi de la figura fluye un líquido de densidad ρ. La diferencia de altura entre las superficies libres del agua en los tubos verticales, medida desde una línea en el centro del tubo es $h = h_1 - h_2$. Si se denota con a a la parte ancha del tubo, y con b a la parte estrecha del tubo, se pide:



(a) Escribir la diferencia de presiones entre los puntos a y b en términos de v_a, ρ y las áreas A_a y A_b.

(b) Si $v_a = 0.5\,\mathrm{m/s}$ ¿Cuál debe ser la relación entre A_a y A_b para que $h = 20\,\mathrm{cm}$? ¿Depende este resultado de ρ?

(c) En ese caso, determinar cuánto vale la velocidad en el punto b. ¿Es posible hallar el valor del caudal?

Resolución.

(a) Para hallar la expresión que nos pide el ejercicio debemos combinar dos conservaciones. Por un lado, la conservación del caudal Q y por el otro, la conservación de la energía representada por la ecuación de Bernoulli, de esta forma:

$$\text{caudal en } a,\, b \begin{cases} Q_a = Q = v_a \cdot A_a \\ Q_b = Q = v_b \cdot A_b \end{cases} \Rightarrow \left\{ v_b = \frac{A_a}{A_b} \cdot v_a . \right.$$

Escribimos ahora la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de flujo, comparando los puntos a y b a la misma altura en el tubo:

$$\frac{1}{2}\rho v_a^2 + p_a = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + p_b .$$

Usando la relación entre v_a y v_b hallada antes, esta ecuación queda:

$$\boxed{p_a - p_b = \frac{1}{2}\rho v_a^2 \left(\left(\frac{A_a}{A_b} \right)^2 - 1 \right)}$$

(b) Para resolver este ítem necesitamos usar la expresión que hallamos en (a). Para esto, planteamos la diferencia de presiones entre a y b en términos de la presión hidrostática en los tubos verticales, y teniendo en cuenta que ambos estan en contacto con el exterior a una presión p_0. De esta forma:

$$\text{presiones en } a,\, b \begin{cases} p_a - p_0 = \rho g h_1 \\ p_b - p_0 = \rho g h_2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ p_a - p_b = \rho g (h_1 - h_2) = \rho g h . \right.$$

Así, la diferencia de presiones hallada en el item (a) queda:

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_a^2 \left(\left(\frac{A_a}{A_b} \right)^2 - 1 \right).$$

De acá vemos que h se puede escribir como:

$$h = \frac{1}{2g} v_a^2 \left(\left(\frac{A_a}{A_b} \right)^2 - 1 \right).$$

Reemplazando los valores dados para h y para v_a, se obtiene que,

$$\boxed{\frac{A_a}{A_b} = 4.12}$$

De forma que el área en a deberá ser 5 veces el área en el punto b para obtener una lectura de 20 cm, y el resultado *NO depende de la densidad del fluido*.

(c) Dada la relación de áreas, podemos volver a la expresión hallada en (a) para las velocidades y se tiene que:

$$\boxed{v_b = \frac{A_a}{A_b} \cdot v_a = 2.06\,\mathrm{m/s}}$$

Notemos que *si bien se tienen las velocidades, al no tener el valor de las áreas (solo se tiene su relación), no es posible hallar el valor del caudal.* Esto hace que el tubo de Venturi no sea de gran utilidad. Normalmente, estos tubos se utilizan para conocer la velocidad del fluido dentro del canal, a través de los parámetros que se pueden conocer desde el exterior (como la altura h), de forma de no alterar el flujo.

Problema 2. Una máquina reversible lleva 1 mol de gas ideal monoatómico ($c_V = \frac{3}{2}R$, $\gamma = 5/3$) a través del ciclo $ABCDA$, con las siguientes características en cada una de las etapas:

AB: expansión isotérmica hasta duplicar el volumen $V_B = 2V_A$

BC: expansión adiabática hasta disminuir la temperatura a la mitad, $T_C = \frac{T_B}{2}$

CD: compresión hasta $V_D = V_A$ a presión constante

DA: cierre del ciclo por proceso isocórico aumentando la presión hasta p_A

(a) Graficar cualitativamente el diagrama p–V correspondiente.

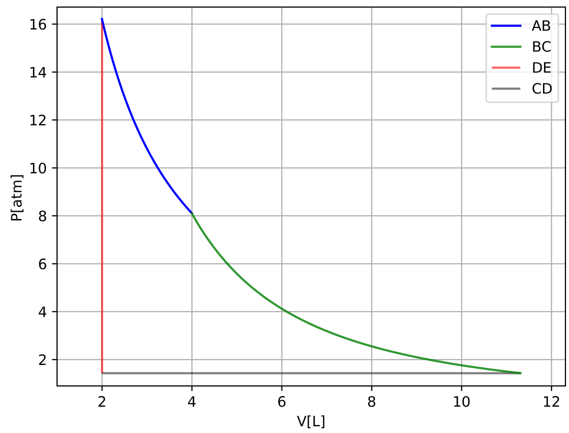
(b) Calcular cuánto valen cada una de las variables de estado (p, V, T) en los estados A, B, C y D.

(c) Indicar los signos de Q, W y ΔU en cada proceso y en el ciclo completo.

Datos: $p_A = 16.2$ atm, $V_A = 2\,\mathrm{l}$.

Resolución.

(a) Para el diagrama p–V, tenemos que recordar la relaciones funcionales que la ecuación de estado impone entre ambas variables para cada tipo de proceso. Para la primera etapa, al ser isotérmica, tenemos la hipérbola $p = nRT/V \propto 1/V$. La segunda etapa es adiabática, con lo cual teníamos pV^γ es constante. La tercera y cuarta etapa son más sencillas, dado que son a presión y volumen constante, respectivamente.



(b) Inicialmente, conocemos $p_A = 16.2$ atm y $V_A = 2\,\mathrm{l}$. Usando la ecuación de estado de los gases ideales, obtenemos el valor de la temperatura,

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 395.12\,\mathrm{K}$$

Al estado B llegamos desde A vía una isoterma, con lo cual $T_B = T_A = 395.12\,\mathrm{K}$. Por otro lado, es dato que $V_B = 2V_A = 4\,\mathrm{l}$. Usando nuevamente la ecuación de estado,

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 8.10\,\mathrm{atm}$$

Para el estado C, nos dicen que $T_C = T_B/2 = 197.56\,\mathrm{K}$. Usando la relación antes mencionada para los procesos adiabáticos —pV^γ es constante— podemos obtener las otras dos cantidades:

$$V_C = 11.31\,\mathrm{l} \quad \text{y} \quad p_C = 1.43\,\mathrm{atm}$$

Finalmente, el estado D sabemos que está vinculado con C vía una isobara y con A vía una isocora. Por lo tanto, $V_D = 2\,\mathrm{l}$ y $p_D = 1.43\,\mathrm{atm}$. Usando nuevamente la ecuación de estado,

$$T_D = 34.88\,\mathrm{K}$$

Resumiendo todo en una tabla, tenemos los siguientes valores para las variables de estado:

	p[atm]	V[L]	T[K]
A	16.2	2	395.12
B	8.1	4	395.12
C	1.43	11.31	197.56
D	1.43	2	34.88

(c) Para hallar los signos de Q, W y ΔU, vamos a apelar al primer principio que afirma que la variación de energía interna es $\Delta U = Q - W$. Recordemos también que todos los procesos del ciclo son reversibles, con lo cual vale $W = \int p\,dV$, con p la presión del sistema. El primer proceso es una *expansión isotérmica*. Sabemos que para un gas ideal, un proceso isotérmico no varía la energía interna del sistema. Por ser una expansión, tenemos además que el gas está *haciendo trabajo* sobre el ambiente:

$$\Delta U_{AB} = 0,\ W_{A\to B} > 0 \xrightarrow{\text{1er Ppio}} Q_{A\to B} = W_{A\to B} > 0$$

El proceso BC es otra *expansión* ($W_{B\to C} > 0$), esta vez *adiabática* ($Q_{B\to C} = 0$):

$$W_{B\to C} > 0,\ Q_{B\to C} = 0 \xrightarrow{\text{1er Ppio}} \Delta U_{BC} = -W_{B\to C} < 0$$

La tercera etapa es una *compresión isobárica*. Por ser una compresión, $W_{C\to D} < 0$. Por otro lado, habíamos determinado en (b) que $T_D < T_C$, con lo cual, de la expresión del ΔU para un gas ideal, tenemos que

$$\Delta U_{CD} = nC_V(T_D - T_C) \propto \Delta T_{CD} < 0$$

El signo del calor intercambiado lo obtenemos mediante el primer principio: $Q_{C\to D} = \Delta U_{CD} + W_{C\to D} < 0$, es decir que el gas cede calor. La última etapa es *isocórica*, entonces $W_{D\to A} = 0$. Además, como $T_A > T_D$, podemos usar el mismo argumento de recién para ver que $\Delta U_{DA} > 0$. Finalmente, por el primer principio, $Q_{D\to A} = \Delta U_{DA} > 0$, indicando que el sistema absorbe calor.

En el ciclo completo, la variación de energía interna es nula, por tratarse de una función de estado. Por otro lado, el trabajo total es positivo, algo que puede verse a partir del diagrama p–V, recordando que W está asociado al área encerrada entre la curva del diagrama p–V y el eje horizontal. En este caso, la curva $A \to B \to C$, asociada a trabajo positivo, encierra un área mayor que la curva $C \to D$, asociada a trabajo negativo. Por lo tanto, el saldo neto para el ciclo es positivo.[1] Por último, apelando al primer principio, tenemos que para el ciclo completo el trabajo coincide con el calor y es también positivo. En resumen,

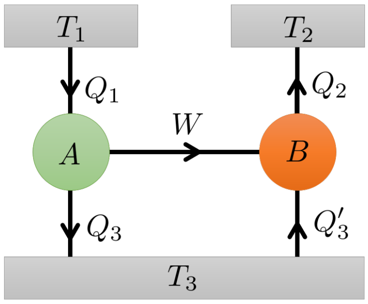
$$\begin{aligned}
&\Delta U_{\text{ciclo}} = 0 && \text{porque } U \text{ es función de estado} \\
&W_{\text{ciclo}} > 0 && \to \text{el gas realiza trabajo} \\
&Q_{\text{ciclo}} > 0 && \to \text{el gas absorbe calor}
\end{aligned}$$

Para resumir, tenemos que los signos son:

	ΔU	Q	W
$A \to B$	0	+	+
$B \to C$	-	0	+
$C \to D$	-	-	-
$D \to A$	+	+	0
TOTAL	0	+	+

[1] También puede justificarse observando que el ciclo se recorre en sentido horario.

Problema 3. Una máquina térmica reversible, A, opera entre dos fuentes a temperaturas T_1 y T_3. El trabajo que extrae, W, alimenta una refrigeradora, B, que trabaja entre la fuente a temperatura T_3 y otra a temperatura T_2. Ambas máquinas trabajan en ciclos.



(a) Sabiendo que $T_1 = 600\,\mathrm{K}$, $T_3 = 200\,\mathrm{K}$ y $|Q_3| = 450$ kcal, hallar el calor que la máquina A extrae de la fuente 1 y el trabajo, W.

(b) Si $|Q_3'| = 250$ kcal, calcular el calor que B entrega a la fuente 2 y hallar el coeficiente de rendimiento de la refrigeradora.

(c) Considerando $T_2 = 400\,\mathrm{K}$, verificar si la máquina B es o no reversible. Calcular las variaciones de entropía de cada una de las máquinas y fuentes. ¿Cuál es la variación de entropía del universo?

Resolución.

(a) De la máquina térmica A sabemos dos cosas: (i) es cíclica, y (ii) es reversible. En cada ciclo, la variación de cualquier función de estado es nula. En particular, pasa para la energía interna U. Por lo tanto, del primer principio de la TD:

$$0 = \Delta U_A = Q_A - W_A \quad \Rightarrow \quad W_A = Q_A$$

donde $W_A = W$ es el trabajo que entrega la máquina A, mientras que $Q_A = Q_1 + Q_2$ es el calor total que intercambia con las fuentes. Queda entonces:

$$W = Q_1 + Q_3 \tag{1}$$

Nos queda usar la condición de reversibilidad. Al ser una máquina que opera entre *dos* fuentes, sabemos que su reversibilidad implica que la eficiencia debe ser igual a la de una máquina de Carnot que opere entre las mismas fuentes. Por lo tanto,

$$\eta_A = \frac{W}{Q_1} = \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} \quad \Rightarrow \quad W = \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) Q_1 \tag{2}$$

Juntando las ecuaciones (1) y (2),

$$W = Q_1 + Q_3 = \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) Q_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1 = -\frac{T_1}{T_3} Q_3} \text{ y } \boxed{W = \left(1 - \frac{T_1}{T_3}\right) Q_3}$$

Usando los datos, y teniendo en cuenta que $Q_3 = -|Q_3|$, nos queda $Q_1 = 1350$ kcal y $W = 900$ kcal.

(b) Para la máquina B, también podemos asumir que trabaja en un ciclo y entonces la variación ΔU_B será nula. Usando otra vez el primer principio,

$$0 = \Delta U_B = Q_B - W_B \quad \Rightarrow \quad W_B = Q_B$$

Ahora, hay que tener en cuenta que $W_B = -W$ (porque el W del esquema es recibido por B). Por otro lado, $Q_B = Q_2 + Q_3'$. Por lo tanto, de la ecuación anterior,

$$-W = Q_2 + Q_3' \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_2 = -(W + Q_3')}$$

El trabajo ya lo obtuvimos antes, $W = 900$ kcal, mientras que $Q_3' = 250$ kcal es dato. Usando eso nos queda que $Q_2 = -1150$ kcal.

El coeficiente de rendimiento de esta refrigeradora es

$$\boxed{K_B = \frac{|Q_3'|}{|W_B|} = \frac{Q_3'}{W}}$$

Reemplazando los valores numéricos, $K_B = 0.278$.

(c) Para verificar si B es reversible, tenemos al menos dos alternativas. Una es comparar su rendimiento con el de una refrigeradora de Carnot, dado que esta máquina opera entre dos fuentes. Otra opción es acudir al teorema de Clausius. Si vamos por el primer camino, tenemos que recordar que para una refrigeradora de Carnot vale

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_3}{T_2 - T_3} = \frac{200\,\text{K}}{400\,\text{K} - 200\,\text{K}} = 1 > 0.278 = K_B$$

Por lo tanto, podemos concluir que la máquina B no es reversible. Miremos cómo sería la cuenta si apelamos a la desigualdad de Clausius:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3'}{T_3} = -\frac{1150\,\text{kcal}}{400\,\text{K}} + \frac{250\,\text{kcal}}{200\,\text{K}} = -1.625 < 0$$

Recordando que esa suma debe ser igual a cero para máquinas reversibles (y negativa en otro caso), podemos concluir nuevamente que B no lo es.

Veamos ahora qué nos dice la variación de entropía de ambas máquinas y sus fuentes. Los sistemas A y B, propiamente, dado que evolucionan en ciclos, no aportan a la variación de entropía:

$$\Delta S_{\text{Univ}} = \Delta S_A + \Delta S_B + \Delta S_{\text{fuentes}} = \Delta S_{\text{fuentes}}$$

Como las tres fuentes son ideales, podemos calcular las respectivas variaciones de entropía mediante los cocientes de sus calores absorbidos y sus temperaturas absolutas:

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\text{fuente 1}} &= \frac{\tilde{Q}_1}{T_1} = -\frac{1350\,\text{kcal}}{600\,\text{K}} = -2.250\frac{\text{kcal}}{\text{K}} \\
\Delta S_{\text{fuente 2}} &= \frac{\tilde{Q}_2}{T_2} = \frac{1150\,\text{kcal}}{400\,\text{K}} = 2.875\frac{\text{kcal}}{\text{K}} \\
\Delta S_{\text{fuente 3}} &= \frac{\tilde{Q}_3 + \tilde{Q}_3'}{T_3} = \frac{200\,\text{kcal}}{200\,\text{K}} = 1\frac{\text{kcal}}{\text{K}}
\end{aligned}$$

donde llamamos $\tilde{Q}_i = -Q_i$ al calor absorbido por la fuente i. Por lo tanto,

$$\boxed{\Delta S_{\text{Univ}} = 1.625} > 0$$