TP2-Correcciones

July 3, 2019

1 Probabilidad y Estadística (C)

1.1 Trabajo Práctico 2

Alumno: Leandro Carreira

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, b]$ con b un parámetro desconocido.

1. Calcular analíticamente los estimadores de momentos $\hat{b}_{mom}$ y de máxima verosimilitud $\hat{b}_{mv}$. Implementar estos estimadores en R como funciones.

LU: 669/18

1.1.1 Estimador de momentos:

Uso el **primer** momento, pues si $b > 0$ con $X_n \sim \mathcal{U}[0, b]$,

$$E[X_n] = \int_0^b x_i * \frac{1}{b} * dx$$

$$= \frac{1}{b} * \left[\frac{x_i^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{b^2}{2b}$$

$$E[X_n] = \frac{b}{2}$$

$$\overline{X} = \frac{\hat{b}_{mom}}{2}$$

$$\hat{b}_{mom} = 2 * \overline{X}$$

[90]:
```
# Función estimadora de primeros momentos
bmom1 = function(muestra){
    return(2*mean(muestra))
}
```

Similarmente se puede calcular el EM con el **segundo** momento, al cual también voy a agregar en los siguientes ejercicios del TP, pues me parece una comparación interesante (no solo entre diferentes estimadores, sino también entre un mismo tipo, usando dos grados distintos):

$$E[X_n^2] = \int_0^b x_i^2 * \frac{1}{b} * dx$$

$$= \frac{1}{b} * \left[\frac{x_i^3}{3}\right]_0^b$$

$$= \frac{b^3}{3b}$$

$$E[X_n^2] = \frac{b^2}{3}$$

$$b^2 = 3 * E[X_n^2]$$

$$b > 0$$

$$b = \sqrt{3 * E[X_n^2]}$$

$$\hat{b}_{mom2} = \sqrt{3 * \overline{X^2}}$$

[91]:

```
# Función estimadora de segundos momentos
bmom2 = function(muestra){
    n <- length(muestra)
    return(sqrt(3 * mean(muestra^2)))
}
```

1.1.2 Estimador de Máxima Verosimilitud

Estimador de Máxima Verosimilitud (EMV)

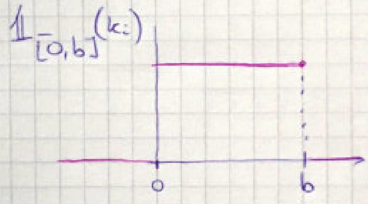
Sean $X_1, \dots, X_n$ una muestra iid $\sim \mathcal{U}[\overset{a}{0},b]$

$$P(X_1=k_1, X_2=k_2, \dots, X_n=k_n) \overset{iid}{=} P(X_1=k_1)\cdot \ldots \cdot P(X_n=k_n)$$

$$\overset{iid}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i=k_i) \overset{X_i\sim\mathcal{U}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a}\cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(k_i) =$$

$$\overset{a=0}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}\cdot \mathbb{1}_{[0,b]}(k_i) \quad (1)$$

• Ahora, quiero expresar $\mathbb{1}_{[0,b]}(k_i)$ en función de b, ya que es b que quiero despejar:



$$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k_i \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } b \geq k_i & 1 \\ \text{si } b < k_i & 0 \end{cases}$$

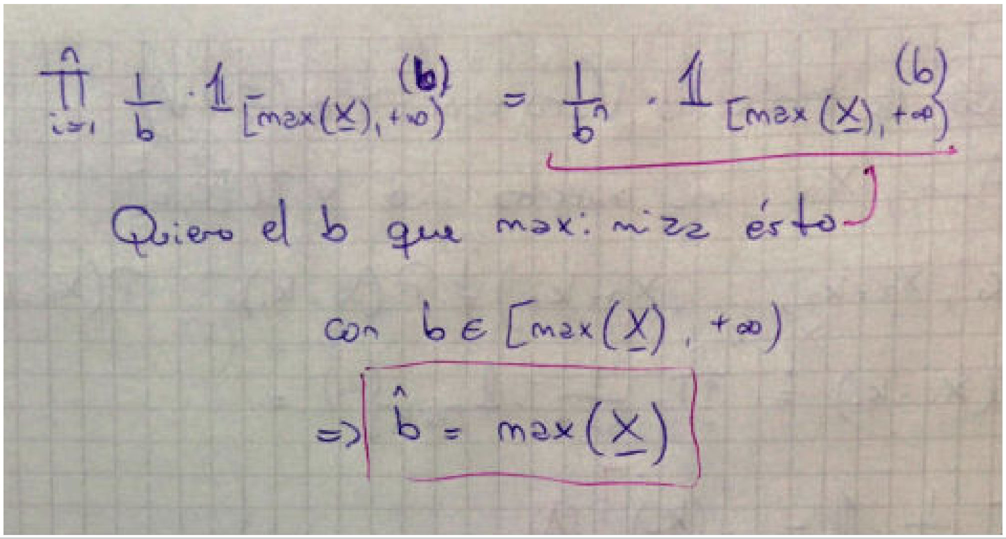
$$\Rightarrow \mathbb{1}_{[k_i,+\infty)}(b) = \mathbb{1}_{[0,b]}(k_i)$$

Reescribo (1):

$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}\cdot \mathbb{1}_{[k_i,+\infty)}(b)$ De aquí veo que para todo i, debe darse que $b \geq k_i$, pues si alguno es menor, la indicadora 0, y por ende la productoria será cero:

$$\Rightarrow b \geq \max(k_i) = \max(\underline{X})$$

muestra.



$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} \cdot \mathbb{1}_{[\max(\underline{X}),+\infty)}(b) = \underbrace{\frac{1}{b^n} \cdot \mathbb{1}_{[\max(\underline{X}),+\infty)}(b)}$$

Quiero el b que maximiza ésto

con $b \in [\max(\underline{X}), +\infty)$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{b} = \max(\underline{X})}$$

[92]:
```r
# Estimador de maxima verosimilitud
bmv = function(muestra){
    return(max(muestra))
}
```

2. Implementar el siguiente estimador de b

$$\hat{b}_{med} = 2 \times \text{mediana}\{X_1, \ldots, X_n\}$$

[93]:
```r
bmed = function(muestra){
    return(2*median(muestra))
}
```

3. Utilizando $b = 1$, generar una muestra de tamaño $n = 15$. Calcular cada uno de los estimadores con la muestra obtenida y reportar el valor de cada estimador y su error.

[94]:
```r
b <- 1
n <- 15
muestra <- runif(n, min=0, max=b)
```

1.1.3 Valores estimados:

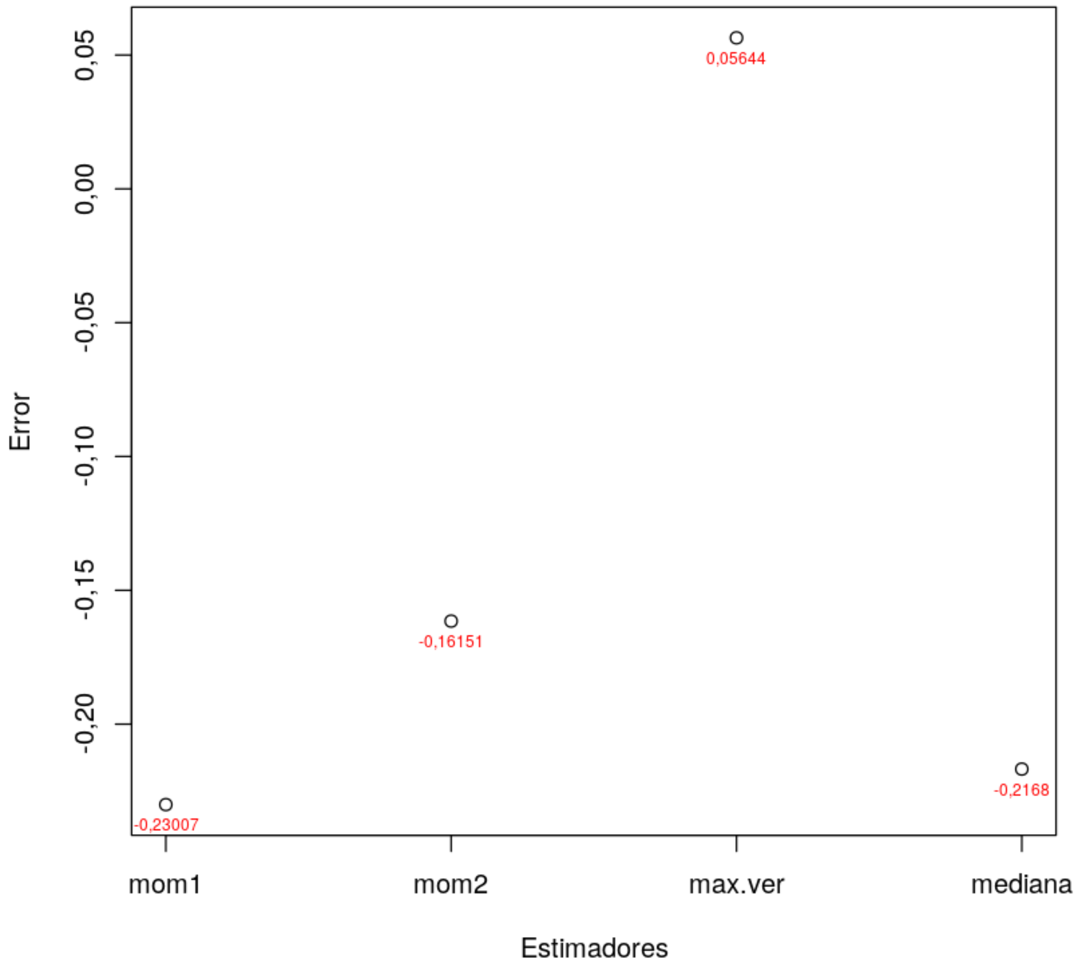
[95]:
```r
bmom1(muestra)
bmom2(muestra)
bmv(muestra)
bmed(muestra)
```

1,23007368957624
1,16150604298437
0,943564804969355
1,21679882565513

1.1.4 Errores:

[96]:
```
# Calculo errores
error_momento_1 <- b - bmom1(muestra)
error_momento_2 <- b - bmom2(muestra)
error_max_ver   <- b - bmv(muestra)
error_mediana   <- b - bmed(muestra)
# Agrupo datos para plot
errores <- c(error_momento_1, error_momento_2, error_max_ver,error_mediana)
nombres <- c('mom1','mom2','max.ver','mediana')
# Imprimo y ploteo errores para una mejor comparación
matrix(c(nombres, round(errores,5)), nrow=2, ncol=4, byrow=TRUE)
# Plot
#options(repr.plot.width=7, repr.plot.height=7)
plot(errores, xlab="Estimadores", ylab="Error", xaxt='n')
text(errores, as.character(round(errores,5)), cex=0.6, pos=1, col="red")
axis(1, c(1,2,3,4), nombres)
```

mom1	mom2	max.ver	mediana
-0,23007	-0,16151	0,05644	-0,2168



4. Hacer una simulación para obtener el sesgo, varianza y error cuadratico medio (ECM) de cada uno de los estimadores. Para lograr esto:

   a) Generar una muestra con $b = 1$, $n = 15$.
   b) Para la muestra obtenida, calcular $\hat{b}_{mv}$, $\hat{b}_{mom}$, $\hat{b}_{med}$ y almacenar los resultados.
   c) Repetir $N_{rep} = 1000$ veces los pasos (a) y (b).
   d) Obtener una aproximación del sesgo restando el valor verdadero de b a la media muestral de cada estimador.
   e) Obtener la aproximación de la varianza a partir de la varianza muestral de cada estimador.
   f) Obtener la aproximación del ECM a través de la fórmula que lo relaciona con el sesgo y la varianza.

[97]:
```
experimento = function(){
    # a)
    b <- 1
```

```
    n <- 15
    muestra <- runif(n, min=0, max=b)
    # b)
    b_mom1 <- bmom1(muestra)
    b_mom2 <- bmom2(muestra)
    b_mv  <- bmv(muestra)
    b_med <- bmed(muestra)
    #devuelvo un vector de estimadores
    c(b_mom1, b_mom2, b_mv, b_med)
}
```

[98]:
```
# c)
nrep <- 1000
estimadores <- array(dim=c(nrep,4), dimnames=list(1:nrep, c("b_mom1", "b_mom2",␣
 ↪"b_mv", "b_med")))
for(i in 1:nrep){
    estimadores[i,] <- array(experimento())
}
```

[99]:
```
# Estimaciones guardadas de cada experimento
estimadores[2:4,]
estimadores[997:1000,]
```

	b_mom1	b_mom2	b_mv	b_med
2	1,027140	1,046235	0,9691822	1,138274
3	1,301078	1,269474	0,9817760	1,690594
4	1,112685	1,067670	0,9360039	1,005805

	b_mom1	b_mom2	b_mv	b_med
997	1,135286	1,090027	0,9717307	1,086049
998	1,275937	1,152760	0,9913591	1,279192
999	1,185870	1,178291	0,9994554	1,439416
1000	1,117049	1,055218	0,9030076	1,028910

Sesgo:

[100]:
```
# d)
# aplico mean a cada columna (estimador) de mi data
b_muestrales <- apply(estimadores, MARGIN=2, FUN=mean)
print(b_muestrales)
```

```
   b_mom1    b_mom2      b_mv     b_med
0,9929238 0,9870084 0,9366054 0,9917986
```

[101]:
```
#sesgos <- medias_muestrales - b
b <- 1
sesgos <- b_muestrales - b
```

[102]:
```
print(sesgos)
```

```
      b_mom1       b_mom2         b_mv        b_med
-0,007076192 -0,012991577 -0,063394645 -0,008201381
```

Varianza muestral: Uso estimador insesgado: $S^2 = \frac{\sum(X_i - \hat{\mu})^2}{n-1}$

[103]:
```r
# e)
varianzas_muestrales <- apply(estimadores, MARGIN=2, FUN=var)
```

[104]:
```r
print(varianzas_muestrales)
```

```
     b_mom1      b_mom2        b_mv       b_med
0,023003304 0,014521963 0,003851397 0,058599452
```

Error Cuadrático Medio:

[105]:
```r
# f) Aproximación del Error Cuadratico Medio (ECM)
ECM <- varianzas_muestrales + sesgos^2
print(ECM)
```

```
     b_mom1      b_mom2        b_mv       b_med
0,023053377 0,014690744 0,007870278 0,058666715
```

5. Implementar las funciones $simulacion\_mv(b, n)$, $simulacion\_mom(b, n)$ y $simulacion\_med(b, n)$ que devuelven una aproximación del sesgo y de la varianza de cada uno de los estimadores correspondientes al b y al n.

[106]:
```r
# Funciones simuladoras:
# Devuelven sesgo y varianza aproximados
# promediando 1000 experimentos
# con Estimador de Maxima Verosimilitud
simulacion_mv = function(b, n){
    nE <- 1000
    # Guardo todas las estimaciones
    all_b_est <- vector(length=nE)
    varianza <- vector(length=nE)
    for (i in 1:nE){
        muestra <- runif(n, min=0, max=b)
        b_est <- bmv(muestra)
        # Guardo b estimado para calcular Sesgo/Var luego
        all_b_est[i] <- b_est
    }
    # Calculo Sesgo y Varianza usando todas las muestras
    sesgo_est <- mean(all_b_est) - b
    # Calculo varianza muestral, usando b estimados
    varianza_est <- var(all_b_est)
    return(c(sesgo_est, varianza_est))
}

# con Estimador de 1er Momento
simulacion_mom = function(b, n){
```

```
    nE <- 1000
    all_b_est <- vector(length=nE)
    varianza <- vector(length=nE)
    for (i in 1:nE){
        muestra <- runif(n, min=0, max=b)
        b_est <- bmom1(muestra)
        all_b_est[i] <- b_est
    }
    sesgo_est <- mean(all_b_est) - b
    varianza_est <- var(all_b_est)
    return(c(sesgo_est, varianza_est))
}

# Agrego también simulación de 2do momento
simulacion_mom2 = function(b, n){
    nE <- 1000
    all_b_est <- vector(length=nE)
    varianza <- vector(length=nE)
    for (i in 1:nE){
        muestra <- runif(n, min=0, max=b)
        b_est <- bmom1(muestra)
        all_b_est[i] <- b_est
        }
    sesgo_est <- mean(all_b_est) - b
    varianza_est <- var(all_b_est)
    return(c(sesgo_est, varianza_est))
}

# con Mediana de la muestra
simulacion_med = function(b, n){
    nE <- 1000
    all_b_est <- vector(length=nE)
    varianza <- vector(length=nE)
    for (i in 1:nE){
        muestra <- runif(n, min=0, max=b)
        b_est <- bmed(muestra)
        all_b_est[i] <- b_est
        }
    sesgo_est <- mean(all_b_est) - b
    varianza_est <- var(all_b_est)
    return(c(sesgo_est, varianza_est))
}
```

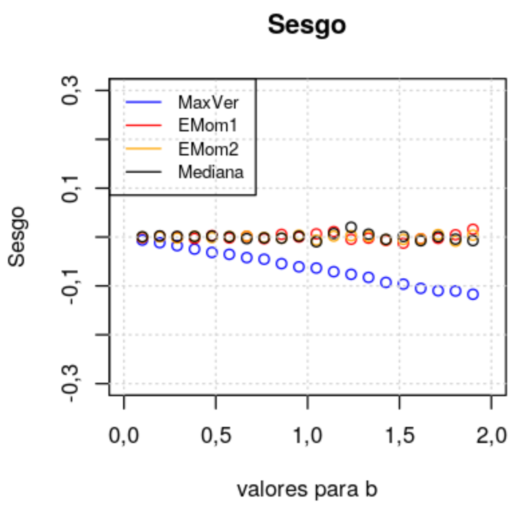
6. Comparar mediante gráficos, el sesgo, la varianza y el ECM de cada estimador con $n = 15$ y $0 < b < 2$. ¿Qué observa? ¿Qué estimador elige?

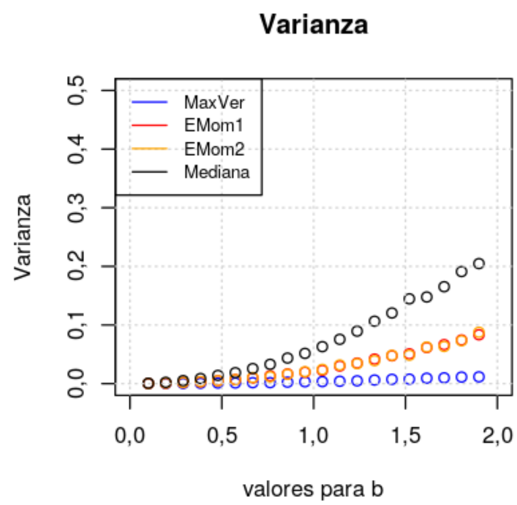
[107]:
```
# Calculo sesgos, varianzas y ECM para 20 valores
# distintos de b entre 0 y 2 (no inclusives)
```

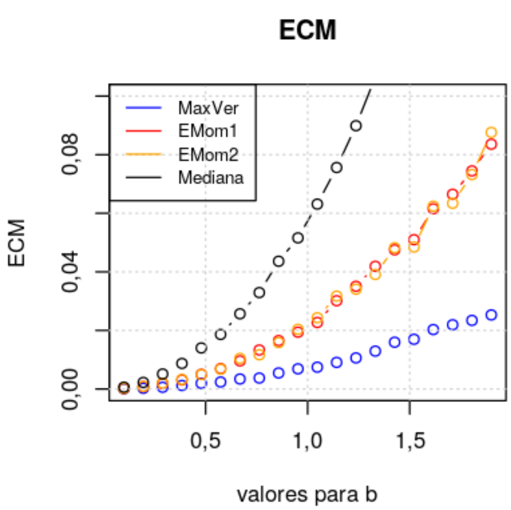
```
nB <- 20
b_values <- seq(0.1, 1.9, by=1.8/(nB-1))
# nB filas, 3 columnas: (bias, var, ECM)
results_mv   <- matrix(nrow=nB, ncol=3)
results_mom  <- matrix(nrow=nB, ncol=3)
results_mom2 <- matrix(nrow=nB, ncol=3)
results_med  <- matrix(nrow=nB, ncol=3)

for (i in 1:nB){
    b <- b_values[i]
    results_mv[i,1:2]   <- simulacion_mv(b, 15)
    results_mom[i,1:2]  <- simulacion_mom(b, 15)
    results_mom2[i,1:2] <- simulacion_mom2(b, 15)
    results_med[i,1:2]  <- simulacion_med(b, 15)
    # ECM = Var + Sesgo^2
    results_mv[i,3]   <- results_mv[i,1]^2   + results_mv[i,2]
    results_mom[i,3]  <- results_mom[i,1]^2  + results_mom[i,2]
    results_mom2[i,3] <- results_mom2[i,1]^2 + results_mom2[i,2]
    results_med[i,3]  <- results_med[i,1]^2  + results_med[i,2]
}
```

[108]:
```
par(mfrow=c(2,2))
# Sesgos
plot(b_values, results_mv[,1], ylim=c(-0.3,0.3), xlim=c(0,2),
     col="blue", main="Sesgo", xlab="valores para b", ylab="Sesgo", type="b")
points(b_values, results_mom[,1], col="red", type="b")
points(b_values, results_mom2[,1], col="orange", type="b")
points(b_values, results_med[,1], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topleft", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2",␣
 ↪"Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
# Varianzas
plot(b_values, results_mv[,2], ylim=c(0,0.5), xlim=c(0,2),
     col="blue", main="Varianza", xlab="valores para b", ylab="Varianza",␣
 ↪type="b")
points(b_values, results_mom[,2], col="red", type="b")
points(b_values, results_mom2[,2], col="orange", type="b")
points(b_values, results_med[,2], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topleft", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2",␣
 ↪"Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
```

```r
# ECM = Var + Sesgo^2
plot(b_values, results_mv[,3], col="blue", main="ECM", xlab="valores para b", ylab="ECM", type="b", ylim=c(0.0,0.1))
points(b_values, results_mom[,3], col="red", type="b")
points(b_values, results_mom2[,3], col="orange", type="b")
points(b_values, results_med[,3], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topleft", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2", "Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
```







1.1.5 Observaciones:

- A medida que aumento b (manteniendo el tamaño de muestra), los estimadores de momento y mediana aumentan tanto varianza como ECM
- El estimador de máxima verosimilitud muestra una varianza de un orden mucho menor, aunque un sesgo que aumenta de manera negativa.
- Ésto es de esperarse ya que para un b cercano a cero, los valores que serán simulados en la muestra estarán muy acotados, mientras que al incrementar b, podrán aparecer valores más grandes en la muestra, y por ende, haber diferencias más grandes en las estimaciones.

1.1.6 Decisiones:

- El criterio para decidir qué estimador elegir será seleccionar el de menor ECM, en este caso, el estimador de máxima verosimilitud.

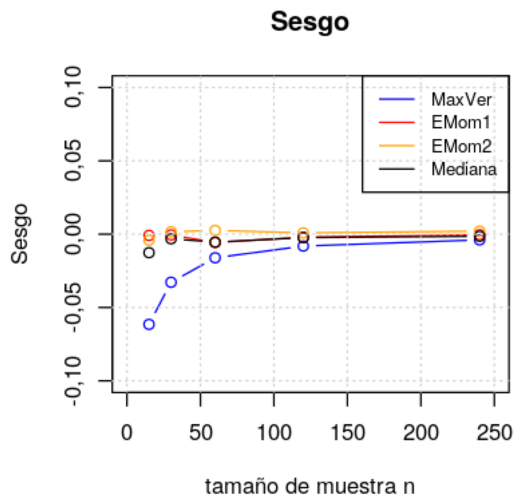
7. Realizar un grafico de los ECM con $b = 1$ y $n = 15, 30, 60, 120, 240$. ¿Qué observa? ¿Qué estimador elige? ¿Que sospecha sobre la consistencia de los estimadores?

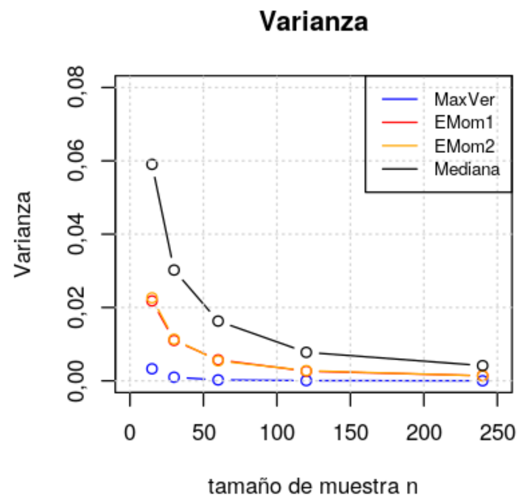
[109]:
```
# Calculo sesgos, varianzas para distintos valores de n
n_values <- c(15, 30, 60, 120, 240)
nN <- length(n_values)
# nN filas, 4 columnas: (n, Sesgo, Var, ECM)
results_mv   <- matrix(nrow=nN, ncol=4)
results_mom  <- matrix(nrow=nN, ncol=4)
results_mom2 <- matrix(nrow=nN, ncol=4)
results_med  <- matrix(nrow=nN, ncol=4)

for (i in 1:nN){
    n <- n_values[i]
    # Guardo n en [1]
    results_mv[i,1]   <- n
    results_mom[i,1]  <- n
    results_mom2[i,1] <- n
    results_med[i,1]  <- n
    # Realizo 1000 simulaciones y guardo
    # Sesgos[2] y Varianzas[3] para graficarlos
    results_mv[i,2:3]   <- simulacion_mv(1, n)
    results_mom[i,2:3]  <- simulacion_mom(1, n)
    results_mom2[i,2:3] <- simulacion_mom2(1, n)
    results_med[i,2:3]  <- simulacion_med(1, n)
    # ECM[4] = Var + Sesgo^2
    results_mv[i,4]   <- results_mv[i,2]^2   + results_mv[i,3]
    results_mom[i,4]  <- results_mom[i,2]^2  + results_mv[i,3]
    results_mom2[i,4] <- results_mom2[i,2]^2 + results_mv[i,3]
    results_med[i,4]  <- results_med[i,2]^2  + results_mv[i,3]
}
```

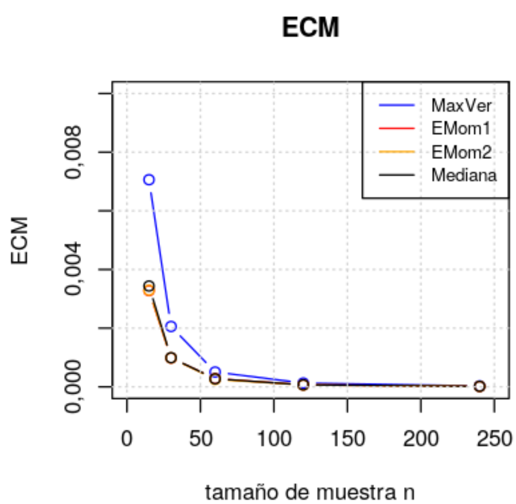
[110]:
```
results_mv
# n   Sesgo     Varianza   ECM
```

15	-0,061511780	3,277360e-03	7,061059e-03
30	-0,032789664	9,820771e-04	2,057239e-03
60	-0,016096645	2,453247e-04	5,044266e-04
120	-0,008107359	6,243177e-05	1,281610e-04
240	-0,003909748	1,401666e-05	2,930279e-05

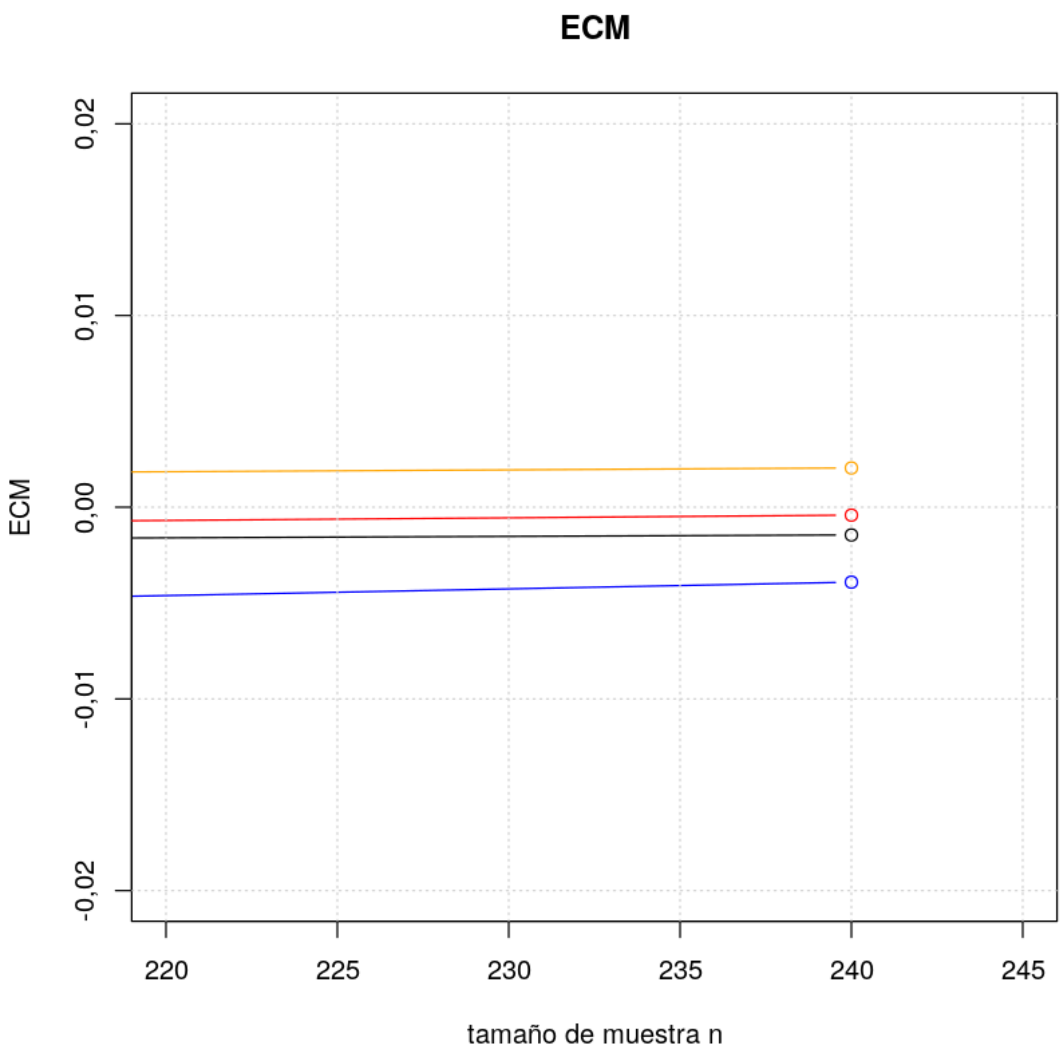
[111]:
```
par(mfrow=c(2,2))
# Sesgos
plot(results_mv[,c(1,2)], ylim=c(-0.10,0.1), xlim=c(0,250),
     col="blue", main="Sesgo", xlab="tamaño de muestra n", ylab="Sesgo",␣
 ↪type="b")
points(results_mom[,c(1,2)], col="red", type="b")
points(results_mom2[,c(1,2)], col="orange", type="b")
points(results_med[,c(1,2)], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topright", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2",␣
 ↪"Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
# Varianzas
plot(results_mv[,c(1,3)], ylim=c(0.0,0.08), xlim=c(0,250),
     col="blue", main="Varianza", xlab="tamaño de muestra n", ylab="Varianza",␣
 ↪type="b")
points(results_mom[,c(1,3)], col="red", type="b")
points(results_mom2[,c(1,3)], col="orange", type="b")
points(results_med[,c(1,3)], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topright", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2",␣
 ↪"Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
# ECM
plot(results_mv[,c(1,4)], col="blue", main="ECM", xlab="tamaño de muestra n",␣
 ↪ylab="ECM", type="b", ylim=c(0.0,0.01), xlim=c(0,250))
points(results_mom[,c(1,4)], col="red", type="b")
points(results_mom2[,c(1,4)], col="orange", type="b")
points(results_med[,c(1,4)], col="black", type="b")
grid()
transpa_color <- rgb(0, 0, 0, max = 255, alpha = 0, names = "transparent")
legend("topright", bg=transpa_color,legend=c("MaxVer", "EMom1", "EMom2",␣
 ↪"Mediana"),
       col=c("blue", "red", "orange", "black"), lty=1, cex=0.8,
       box.lty=1)
```







[112]:
```
# Zoom en mayor n alcanzado
plot(results_mv, ylim=c(-0.02, 0.02), xlim=c(220,245),
     col="blue", main="ECM", xlab="tamaño de muestra n", ylab="ECM", type="b")
points(results_mom, col="red", type="b")
points(results_mom2, col="orange", type="b")
points(results_med, col="black", type="b")
grid()
```



1.1.7 Observaciones:

- Todos los estimadores parecen converger (al menos de manera asintótica) a cero a medida que se aumenta el tamaño de la muestra, de tener un tamaño de muestra grande, cualquier estimador devolvería buenas estimaciones, mientras que para tamaños de muestra más pequeños, sería un poco más cauteloso e iría por los estimadores de momento, que parecen devolver buenos resultados a pesar de ello (como fue observado más arriba).

8. Calcular los estimadores en la siguiente muestra. ¿Observa algo extraño? ¿A qué cree que se debe?

0,917 0,247 0,384 0,530 0,798 0,912 0,096 0,684 0,394 20,1 0,769 0,137 0,352 0,332 0,670

[113]:
```
X <- c(0.917, 0.247, 0.384, 0.530, 0.798,
       0.912, 0.096, 0.684, 0.394, 20.1,
       0.769, 0.137, 0.352, 0.332, 0.670)
```

[114]:
```
b_mv <- bmv(X)
b_mom <- bmom1(X)
b_mom2 <- bmom2(X)
b_med <- bmed(X)
```

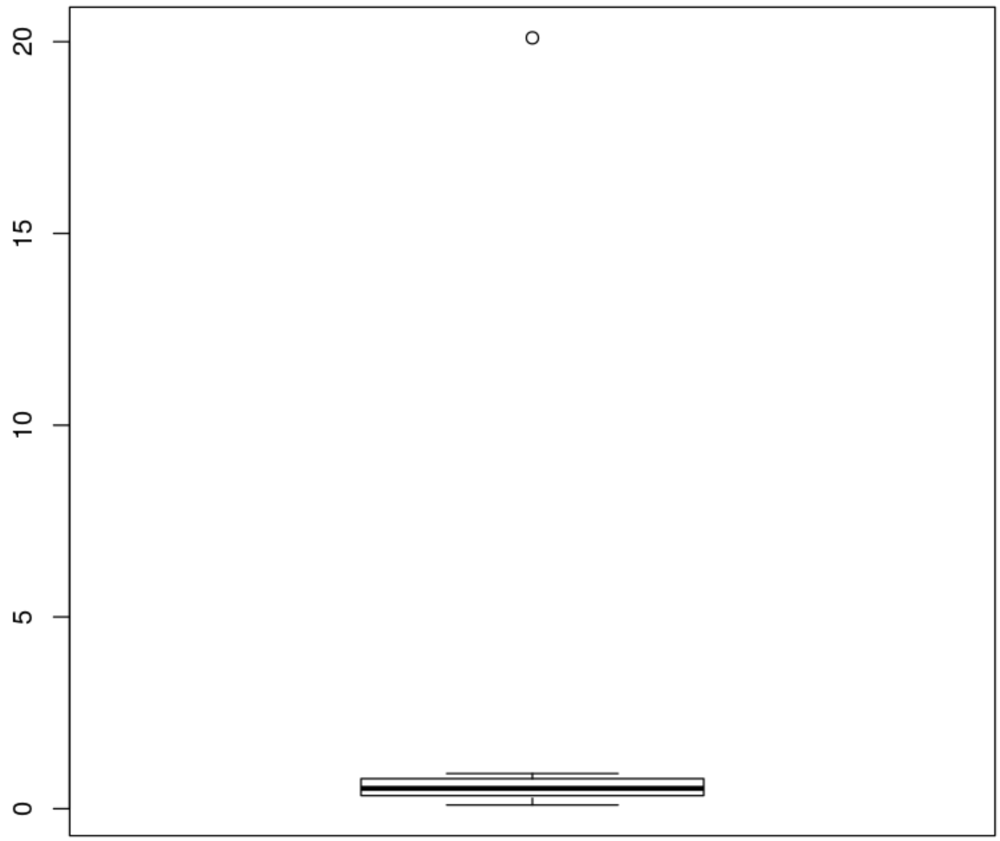
[115]:
```
b_mv
b_mom
b_mom2
b_med
```

20,1
3,64293333333333
9,04139666202075
1,06

1.1.8 Observaciones:

- Tanto revisando la data como gradicando un boxplot, se ve que el error es debido a un outlier de un valor 40 veces mayor al resto de la muestra.

[116]:
```
boxplot(X)
```



- Una vez **comprobado** que sea un outlier, podemos 'reparar' nuestra muestra eliminando el valor fuera de rango, y calcular los estimadores con el resto de la muestra, como se realiza a continuación:

[117]:
```
X_fixed <- c(0.917, 0.247, 0.384, 0.530, 0.798,
       0.912, 0.096, 0.684, 0.394,
       0.769, 0.137, 0.352, 0.332, 0.670)
```

[118]:
```
b_mv <- bmv(X_fixed)
b_mom <- bmom1(X_fixed)
b_mom2 <- bmom2(X_fixed)
b_med <- bmed(X_fixed)
```

[119]:
```
b_mv
b_mom
b_mom2
b_med
```

0,917
1,03171428571429
1,006152643915
0,924

[120]:
```
boxplot(X_fixed)
```