# La catadora de Té

Una señora afirma que al probar una taza de té con leche **puede distinguir** qué fue lo primero que se echó en la taza: *el té o la leche*.

¿Cómo podríamos hacer un experimento para determinar si la señora sabe distinguir?

Procuramos realizar un experimento que indique evindencia a favor de la señora.

Para ello, procedemos de la siguiente manera: le damos  $\mathbf{n} = \mathbf{12}$  tazas preparadas de diferentes maneras y contamos el número de veces que la mujer **acierta** el orden en el que fue preparado el té.

Sea X la variable aleatoria que cuenta el *número de aciertos en los n = 12 ensayos*.

**1.** ¿Qué **distribución** propone para la variable aleatoria X? ¿Cuáles son los **parámetros** de esta distribución?

Dado que contamos **cantidad de aciertos sobre un total** conocido (n) sin considerar el órden, X será correctamente modelada con una **distribución Binomial** de parámetros **n=12** y probabilidad de acierto **p**:

X = "# de aciertos en los 12 ensayos"

$$X \sim Bin(12,p)$$

Con función de probabilidad puntual:

$$p_X(k) = inom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte las 12 tazas si responde al azar?

¿Le daremos la oportunidad de equivocarse?

¿Cuántas tazas serán suficientes para que confiemos en que la señora tiene la habilidad que ella afirma?

Propongamos diferentes *regla*s que podemos utilizar para decidir que la señora es una entendida en el tema.

- Criterio 0: Determinamos que sabe si acierta las 12 veces.
- Criterio 1: Determinamos que sabe si acierta 11 o más veces.
- Criterio 2: Determinamos que sabe si acierta 10 o más veces.
- Criterio 3: Determinamos que sabe si acierta 9 o más veces.

Defino función Binomial:

Calculo Binomial(12, 0.5) para exactamente 12 aciertos de los 12 intentos (Criterio 0)

La probabilidad de que acierte las 12 tazas **si responde al azar** es de **0.0244**%:  $P(X=12)=2.441*10^{-4}$ 

También podemos interpretarlo como que si acierta las 12 tazas, entonces:

- es muy poco probable (0.0244%) de que haya elegido sus respuetas al azar
- muy probablemente (99.975%) NO sea una respuesta al azar.
  - **3.** Supongamos que la señora responde al azar. Para cada uno de los criterios propuestos, calcule la probabilidad de que consideremos que la señora sabe.

Defino eventos:

- $C_0 = "12 \text{ aciertos en los } 12 \text{ ensayos (Criterio } 0)"$
- $C_1$  = "al menos 11 aciertos en los 12 ensayos (Criterio 1)"
- $C_2 =$  "al menos 10 aciertos en los 12 ensayos (Criterio 2)"
- $C_3$  = "al menos 9 aciertos en los 12 ensayos (Criterio 3)"

Calculo probabilidades para cada evento a partir de la función de probabilidad puntual de una Binomial (12, 0.5):

$$P(C_i) = P(X \ge 12 - i)$$

$$i{\in}\{0,\!1,\!2,\!3\}$$

$$=\sum_{k=12-i}^{12}p_{X}(k)$$

$$=\sum_{k=12-i}^{12} inom{12}{k}*0.5^k*0.5^{12-k}$$

### Criterio 0:

$$P(C_0) = P(X \ge 12) = P(X = 12)$$

$$P(C_0) = p_X(12)$$

$$egin{aligned} P(C_0) &= \binom{12}{12}*0.5^{12}*0.5^0 \ P(C_0) &= 0.5^{12} \ P(C_0) &= rac{1}{4096} pprox 0.0002441 \end{aligned}$$

#### Criterio 1:

$$P(C_1) = P(X \ge 11)$$
 
$$P(C_1) = P(X = 11) + P(X = 12)$$
 
$$P(C_1) = p_X(11) + p_X(12)$$
 In [345]: 
$$\begin{array}{c} \mathsf{PX12} < - \text{ f\_binomial}(\mathsf{n} = 12, \ \mathsf{p} = 0.5, \ \mathsf{aciertos} = 12) \\ \mathsf{PX11} < - \text{ f\_binomial}(\mathsf{n} = 12, \ \mathsf{p} = 0.5, \ \mathsf{aciertos} = 11) \\ \mathsf{PC1} < - \ \mathsf{PX11} + \ \mathsf{PX12} \\ \mathsf{PC1} \end{array}$$

0,003173828125

$$egin{aligned} P(C_1) &= P(C_0) + inom{12}{11} * 0.5^{11} * 0.5^{1} \\ P(C_1) &= P(C_0) + inom{12}{11} * 0.5^{12} \\ P(C_1) &= rac{1}{4096} + 12 * rac{1}{4096} \\ P(C_1) &= 13 * rac{1}{4096} pprox 0.003174 \end{aligned}$$

#### Criterio 2:

$$P(C_2) = p_X(10) + p_X(11) + p_X(12)$$

```
In [346]: PX12 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=12)
    PX11 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=11)
    PX10 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=10)</pre>
PC2 <- PX10 + PX11 + PX12
PC2
```

0,019287109375

$$egin{aligned} P(C_2) &= P(C_1) + inom{12}{10}*0.5^{10}*0.5^2 \ P(C_2) &= P(C_1) + inom{12}{10}*0.5^{12} \ P(C_2) &= 13*rac{1}{4096} + 66*rac{1}{4096} \ P(C_2) &= 79*rac{1}{4096}pprox 0.01929 \end{aligned}$$

#### Criterio 3:

$$P(C_2) = p_X(9) + p_X(10) + p_X(11) + p_X(12)$$

```
In [347]: PX12 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=12)
PX11 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=11)
PX10 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=10)
PX9 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=9)</pre>
PC3 <- PX9 + PX10 + PX11 + PX12
PC3
```

0,072998046875

$$egin{aligned} P(C_3) &= P(C_2) + {12 \choose 9} * 0.5^9 * 0.5^3 \ \\ P(C_3) &= P(C_2) + {12 \choose 9} * 0.5^{12} \ \\ P(C_3) &= 79 * rac{1}{4096} + 220 * rac{1}{4096} \ \\ P(C_3) &= 299 * rac{1}{4096} pprox 0.072998 \end{aligned}$$

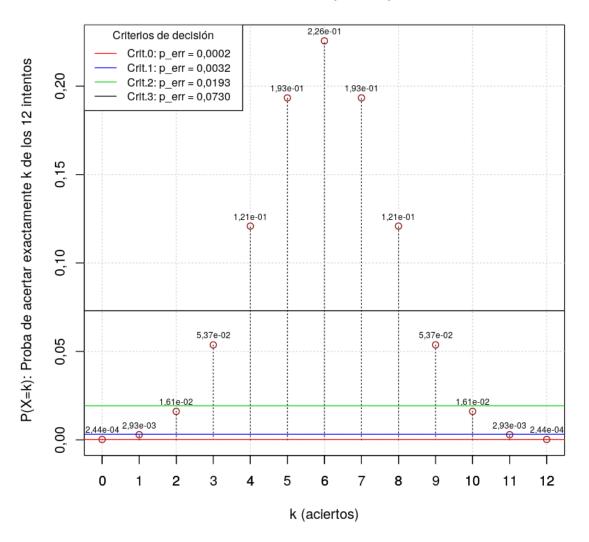
## Criterios y Binomial (12, 0.5)

• Calculo todas las probabilidades puntuales de una distribución Binomial (12, 0.5)

```
In [387]: bin <- array(dim=12)
for(i in c(1:13)){
        aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
        bin[i] <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=aciertos)
}</pre>
```

```
In [391]:
          plot(c(0:12), bin, type="h", lty = 3, main="Binomial (12, 0.5)",
                              xlab="k (aciertos)",
                              ylab="P(X=k): Proba de acertar exactamente k de los 12 int
          entos")
          grid()
          axis(side=1, c(0:12))
          points(c(0:12), bin, pch=1, cex=1, col="dark red")
          text(c(0:12), bin+0.005, labels=formatC(bin, format="e", digits=2),
                cex=0.6, font=1)
          #Criterios
          criterios = c(PC0, PC1, PC2, PC3)
          nombres <- c('Crit.0: p_err =','Crit.1: p_err =','Crit.2: p_err =','Crit.3: p</pre>
          abline(h=criterios, col=c(2,4,3,1))
          legend("topleft", title="Criterios de decisión",
                             legend=paste(nombres, formatC(criterios, format="f", digits
          =4)),
                             col=c(2,4,3,1), lty=1, cex=0.8)
```

# Binomial (12, 0.5)



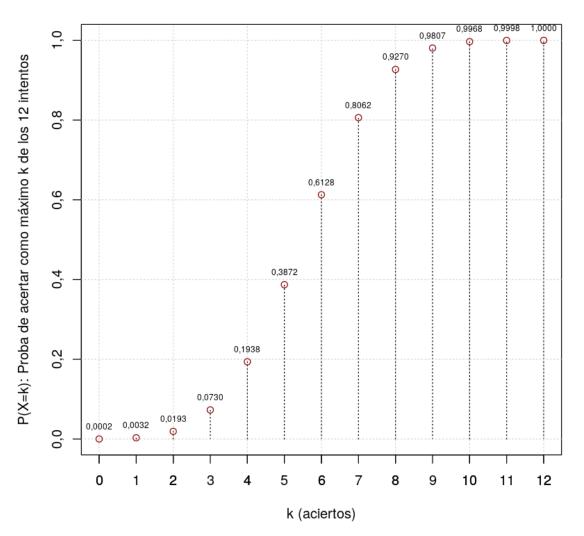
### Función de distribución Acumulada

#### Probabilidad de acertar COMO MÁXIMO k de los 12 intentos

• Suma probabilidades desde k=0 hasta k=12 aciertos

```
In [392]: acumulada <- numeric(13) # todos ceros
for(i in c(1:13)){
    aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
    if(i==1){
        acumulada[i] <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=aciertos)
    }
    else{
        acumulada[i] <- acumulada[i-1] + f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=aciertos)
     }
}</pre>
```

# Binomial (12, 0.5)

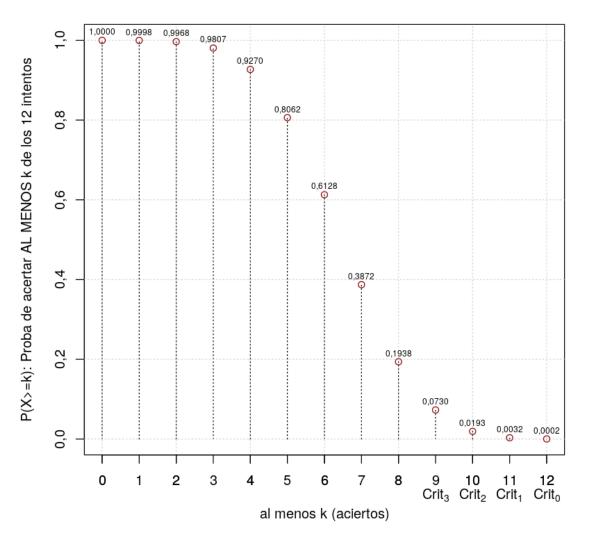


### Proba de acertar AL MENOS k de los 12 intentos

• Sumo probabilidades desde k=12 hasta k=0 aciertos

```
In [394]:
            acum_invertida <- numeric(13) # todos ceros</pre>
            for(i in c(13:1)){
                 aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
                 if(i==13){
                      acum_invertida[i] <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=aciertos)</pre>
                 else{
                      acum invertida[i] <- acum invertida[i+1] + f binomial(n=12, p=0.5, ac
            iertos=aciertos)
            }
            plot(c(0:12), acum_invertida, type="h", lty = 3, main="Acumulada 'Invertida'
In [395]:
             de Binomial (12, 0.5)",
                                  xlab="al menos k (aciertos)", ylab="P(X>=k): Proba de acert
            ar AL MENOS k de los 12 intentos")
            grid()
            axis(side=1, c(0:12))
            points(c(0:12), acum_invertida , pch=1, cex=1, col="dark red")
            text(c(0:12), acum invertida+0.02, labels=formatC(acum invertida, format="f",
            digits=4),
                   cex=0.6, font=1)
            # Criterios:
            mtext(expression(Crit[0]), side=1, line=2, at=12)
            mtext(expression(Crit[0]), side=1, tine=2, at=11)
mtext(expression(Crit[1]), side=1, line=2, at=11)
mtext(expression(Crit[2]), side=1, line=2, at=10)
mtext(expression(Crit[3]), side=1, line=2, at=9)
```

# Acumulada 'Invertida' de Binomial (12, 0.5)



**Obs:** Uso *Acumulada 'Invertida'* pues acumulo probabilidades de derecha a izquierda, orden inverso al de la función de distribución acumulada.

Notar que como la función puntual de la Binomial(n, p=0.5) es simétrica en su esperanza E[X]=6, acumular de izquierda a derecha es lo mismo que de derecha a izquierda, y por lo tanto, la acumulada 'invertida' es la misma que la función acumulada usual.

**Notar** que la **simetría** depende de p=0.5, que de ser distinto, el sentido de acumulación definiría funciones diferentes (más de ésto en 6.)

**4.** Que criterio debemos utilizar si queremos que la **probabildad de equivocarnos** al decidir que **sabe cuando en realidad responde al azar** no sea superior al valor 0.02?

Las probabilidades calculadas para cada criterio modelan nuestra confianza sobre cada evento:

Ej:

- Si acierta 12 de 12, nuestra confianza es muy alta, pues la probabilidad de que este evento ocurra al azar es muy baia.
- Acertar 9 de 12 es un evento más probable si se actúa al azar, por lo que confiamos menos en que acierte a causa de sus poderes, y más en que sea a causa del azar.

| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza |
|----------|-----------------------|-----------|
| 0        | 0,0002441406          | 0,9997559 |
| 1        | 0,0031738281          | 0,9968262 |
| 2        | 0,0192871094          | 0,9807129 |
| 3        | 0,0729980469          | 0,9270020 |

Buscamos los criterios que indican una probabilidad menor o igual a 0.02:

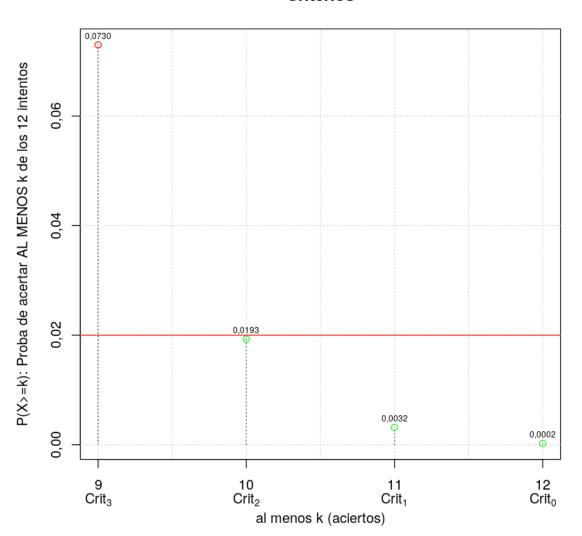
| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza |
|----------|-----------------------|-----------|
| 0        | 0,0002441406          | 0,9997559 |
| 1        | 0,0031738281          | 0,9968262 |
| 2        | 0,0192871094          | 0,9807129 |
| 3        | 0,0729980469          | 0,9270020 |

El criterio 3 resulta demasiado laxo para nuestra exigencia.

Podemos elegir entre los criterios 0,1 y 2, siendo 0 el más estricto (muy bajas probabilidades de equivocarnos, pero demasiado exigente) y el criterio 2 el más cercano al margen de error máximo requerido (0.02).

```
In [397]:
          proba_maxima <- 0.02</pre>
          criterios <- acum_invertida[10:13] # 9 a 12 aciertos</pre>
          plot(c(9:12), criterios, type="h", lty = 3, xaxt='n',
                         main="Criterios",
                         xlab="al menos k (aciertos)", ylab="P(X>=k): Proba de acertar A
          L MENOS k de los 12 intentos")
          grid()
          axis(side=1, c(9:12))
          points(c(9:12), criterios , pch=1, cex=1, col=c('red','green','green','green'
          text(c(9:12), criterios+0.0015, labels=formatC(criterios, format="f", digits=
          4),
                cex=0.6, font=1)
          abline(h=proba_maxima, col='red')
          # Criterios:
          mtext(expression(Crit[0]), side=1, line=2, at=12)
          mtext(expression(Crit[1]), side=1, line=2, at=11)
          mtext(expression(Crit[2]), side=1, line=2, at=10)
          mtext(expression(Crit[3]), side=1, line=2, at=9)
```

### **Criterios**



- 5. Supongamos que la señora responde bien en 10 ocaciones.
- i) ¿Cuál es el criterio más exigente que nos permite decir que la señora sabe?
- ii) ¿Cuál es la probabilidad de error de dicho criterio cuando en realidad responde al azar?
- iii) ¿Cuál es la probabilidad de observar un valor tan o más grande que el observado, asumiendo que responde al azar?
- i) Calculo probabilidad de 10 aciertos suponiendo que responde al azar:

La probabilidad de equivocarnos al decidir que la señora sabe es de 1.61%

Los criterios que **nos permiten decidir que la señora sabe** son aquellos cuyos márgenes de error estén **por encima** de 1.61%:

| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza |
|----------|-----------------------|-----------|
| 0        | 0,0002441406          | 0,9997559 |
| 1        | 0,0031738281          | 0,9968262 |
| 2        | 0,0192871094          | 0,9807129 |
| 3        | 0,0729980469          | 0,9270020 |

(Los criterios 0 y 1 consideran que la señora es una farsa si solo adivina 10 de las 12)

Entre los criterios 2 y 3, elijo el más exigente: el Criterio 2.

ii) La probabilidad de error del criterio 2 será la misma independientemente de lo que acierte la señora.

| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza |
|----------|-----------------------|-----------|
| 2        | 0,0192871094          | 0,9807129 |

iii) Pide la probabilidad de  $P(X \ge 10)$ , siendo 10 el valor observado.

Anteriormente definimos:

Criterio 
$$2 = p_X(10) + p_X(11) + p_X(12) = P(X \ge 10)$$

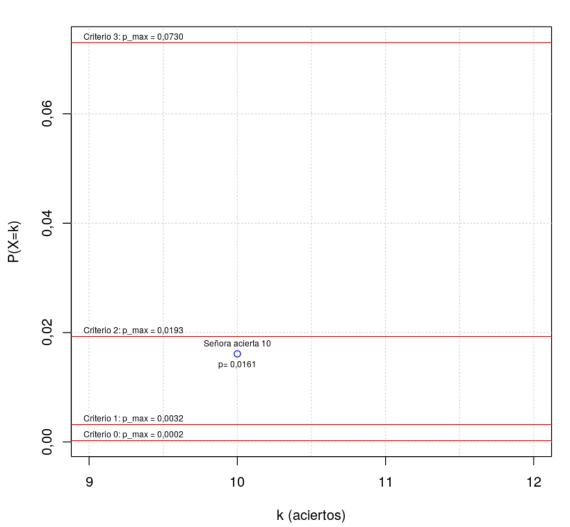
Por lo que la probabilidad de observar un valor tan o más grande que el observado, asumiendo que responde al azar **será** la misma que la probabilidad de equivocarnos con el criterio **10**:

Criterio
 Proba de equivocarnos
 
$$p_X(10) + p_X(11) + p_X(12)$$
 Confianza

 2
 0,0192871094
 0,0192871094
 0,9807129

```
In [399]:
          proba_10 <- f_binomial(n=12, p=0.5, aciertos=10)</pre>
          criterios <- acum_invertida[10:13] # 9 a 12 aciertos</pre>
          plot(c(9:12), criterios, type="h", lty = 0, xaxt='n',
                         main="Criterios";
                         xlab="k (aciertos)", ylab="P(X=k)")
          grid()
          axis(side=1, c(9:12))
          points(c(9:12), criterios , pch=1, cex=0, col=c('red','green','green','green'
          ))
          # Criterios:
          nombres <- c('Criterio 3: p_max =','Criterio 2: p_max =','Criterio 1: p_max</pre>
           =','Criterio 0: p_max =')
          text(rep(9.3,4), criterios+0.001, labels=paste(nombres, formatC(criterios, fo
          rmat="f", digits=4)),
                cex=0.6, font=1)
          abline(h=criterios, col='red')
          points(c(10), proba_10, col='blue')
          text(c(10), proba_10+0.002, labels=c('Señora acierta 10'),
                cex=0.6, font=1)
          text(c(10), proba_10-0.002, labels=paste('p=',formatC(proba_10, format="f", d
          igits=4)),
                cex=0.6, font=1)
```

## **Criterios**



**6.** Si en realidad la señora tiene un verdadero don y **acierta al orden** en que se pone la leche y el té **con probabilidad igual a 0.8**.

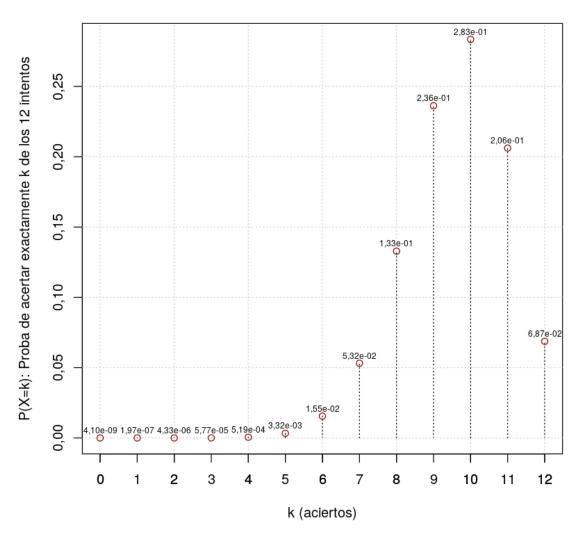
Para cada uno de los criterios propuestos, calcule la probabilidad de que consideremos que la señora sabe.

Y si la **probabilidad de acertar con el orden es 0.9**, ¿**cómo cambia** la probabilidad de decidir que la señora sabe con cada uno de los criterios?

# **Binomial (12, 0.8)**

Notar que la esperanza se desplaza hacia el extremo de mayores aciertos, dejando de ser una función simétrica.

# Binomial (12, 0.8)



### **Criterios**

Calculo probabilidades con p=0.8

```
In [401]: PX12 <- f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=12)
PX11 <- f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=11)
PX10 <- f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=10)
PX9 <- f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=9)</pre>
```

```
In [402]: PC0 <- PX12
    PC1 <- PX11 + PX12
    PC2 <- PX10 + PX11 + PX12
    PC3 <- PX9 + PX10 + PX11 + PX12
    criterios <- data.frame(c(0:3), c(PC0,PC1,PC2,PC3), 1-c(PC0,PC1,PC2,PC3))
    colnames(criterios) <- c('Criterio', 'Proba de equivocarnos', 'Confianza')
    criterios</pre>
```

| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza |
|----------|-----------------------|-----------|
| 0        | 0,06871948            | 0,9312805 |
| 1        | 0,27487791            | 0,7251221 |
| 2        | 0,55834575            | 0,4416543 |
| 3        | 0,79456895            | 0.2054311 |

Muy distinto a los valores obtenidos suponiendo que la señora actuaba al azar, ahora con muy pocos errores, la probabilidad de equivocarnos aumenta considerablemente.

Podemos escribirlo como una implicación:

si **DEBERÍA** acertar en el 80%, pero **OBSERVAMOS** que acierta menos  $\Rightarrow$  **DUDAMOS** de que nuestra afirmación A PRIORI (la del 80%) sea correcta

$$P(X,Y) = P(Y|X). P(X)$$



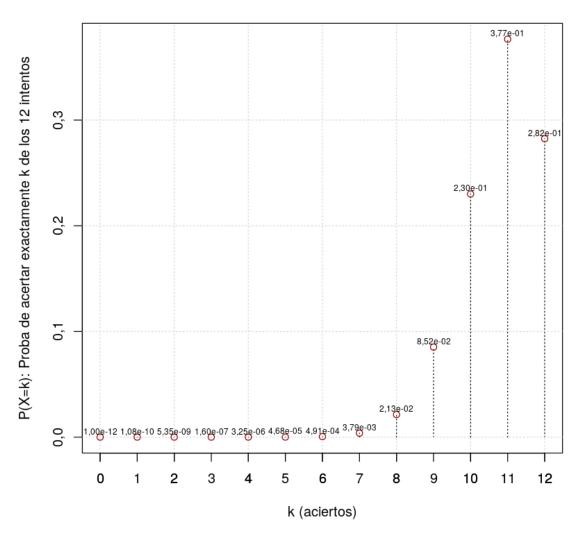
**TODO:** Chequear la relación con proba Bayesiana.

## **Binomial (12, 0.9)**

Notar como la esperanza se desplaza aún más hacia el extremo de mayores aciertos.

```
In [403]:
          # Armo vector de todas las posibles probabilidades puntuales
          bin <- array(dim=12)</pre>
          for(i in c(1:13)){
               aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
              bin[i] <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=aciertos)</pre>
          # Plot del vector de probabilidades
          plot(c(0:12), bin, type="h", lty = 3, main="Binomial (12, 0.9)",
                              xlab="k (aciertos)",
                              ylab="P(X=k): Proba de acertar exactamente k de los 12 int
          entos")
          grid()
          axis(side=1, c(0:12))
          points(c(0:12), bin, pch=1, cex=1, col="dark red")
          text(c(0:12), bin+0.005, labels=formatC(bin, format="e", digits=2),
                cex=0.6, font=1)
```

# Binomial (12, 0.9)



## **Criterios**

Calculo probabilidades con p=0.9

```
In [404]: PX12 <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=12)
    PX11 <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=11)
    PX10 <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=10)
    PX9 <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=9)</pre>
```

| Criterio | Proba de equivocarnos | Confianza  |
|----------|-----------------------|------------|
| 0        | 0,2824295             | 0,71757046 |
| 1        | 0,6590023             | 0,34099775 |
| 2        | 0,8891300             | 0,11086998 |
| 3        | 0,9743625             | 0,02563747 |

Similar a p=0.8, nuestra **confianza** en la decisión que tomemos **se reduce** en gran medida con **muy pocos fracasos observados**.

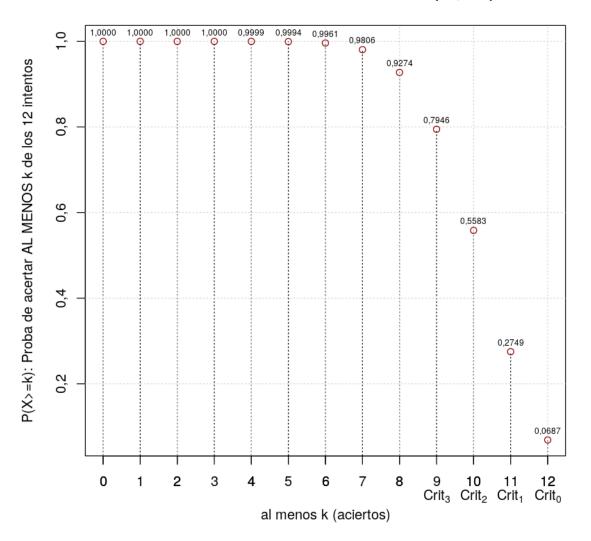
## Plots: Criterios y Acumuladas 'Invertidas'

**Observar** como *esperamos* que acierte **al menos 7** con probabilidad 98%, de forma que al establecer una probabilidad p=0.8, *esperamos* grandes resultados de parte de la señora.

## Binomial(12, 0.8)

```
In [406]: acum_invertida <- numeric(13) # todos ceros
for(i in c(13:1)){
    aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
    if(i==13){
        acum_invertida[i] <- f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=aciertos)
    }
    else{
        acum_invertida[i] <- acum_invertida[i+1] + f_binomial(n=12, p=0.8, aciertos=aciertos)
    }
}</pre>
```

## Acumulada 'Invertida' de Binomial (12, 0.8)

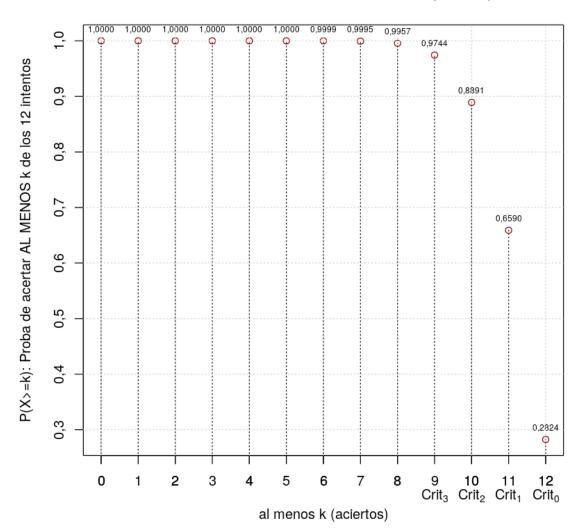


```
In [408]:
          acum_invertida <- numeric(13) # todos ceros</pre>
          for(i in c(13:1)){
               aciertos <- i-1 # indices arrancan en 1, aciertos en 0
               if(i==13){
                   acum_invertida[i] <- f_binomial(n=12, p=0.9, aciertos=aciertos)</pre>
               else{
                   acum invertida[i] <- acum invertida[i+1] + f binomial(n=12, p=0.9, ac
          iertos=aciertos)
               }
          }
          plot(c(0:12), acum_invertida, type="h", lty = 3, main="Acumulada 'Invertida'
In [409]:
           de Binomial (12, 0.9)",
                             xlab="al menos k (aciertos)", ylab="P(X>=k): Proba de acert
          ar AL MENOS k de los 12 intentos")
          axis(side=1, c(0:12))
          points(c(0:12), acum_invertida , pch=1, cex=1, col="dark red")
          text(c(0:12), acum_invertida+0.02, labels=formatC(acum_invertida, format="f",
          digits=4),
               cex=0.6, font=1)
          # Criterios:
          mtext(expression(Crit[0]), side=1, line=2, at=12)
          mtext(expression(Crit[1]), side=1, line=2, at=11)
```

mtext(expression(Crit[2]), side=1, line=2, at=10)
mtext(expression(Crit[3]), side=1, line=2, at=9)

grid()

## Acumulada 'Invertida' de Binomial (12, 0.9)



# Lady tasting tea

From Wikipedia, the free encyclopedia

In the design of experiments in statistics, the lady tasting tea is a randomized experiment devised by Ronald Fisher and reported in his book The Design of Experiments (1935).

The experiment is the original exposition of Fisher's notion of a null hypothesis, which is "never proved or established, but is possibly disproved, in the course of experimentation".

https://en.wikipedia.org/wiki/Lady\_tasting\_tea (https://en.wikipedia.org/wiki/Lady\_tasting\_tea)

| In [ ]: |  |
|---------|--|
| In [ ]: |  |