1 Determinar los extremos absolutos de $f|_A$en los siguientes casos.

1.1 $f(x,y) = xy(x-y)^2 = x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y - 4xy + y^3 & x^3 - 4x^2y + 3y^2x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x^2y - 4xy^2 + y^3 = 0 & x^3 - 4x^2y + 3y^2x = 0 \end{pmatrix}$$

$$3x^2y - 4xy^2 + y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \vee 3x^2 - 4xy + y^2 = 0$$

$$x^3 - 4x^2y + 3y^2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$$

$$(x-2y)^2 = (y)^2 \wedge (2x-y)^2 = (x)^2$$

$$|x-2y| = |y| \wedge |2x-y| = |x|$$

$$|x-2y| = y \wedge |2x-y| = x$$

$$x > 2y \Rightarrow x - 2y = y \wedge 2x - y = x \therefore x = 3y \wedge y = x \Rightarrow x = y = 0$$

$$\frac{y}{2} < x < 2y \Rightarrow -x + 2y = y \wedge 2x - y = x \therefore x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$$

$$2x < y \Rightarrow -x + 2y = y \wedge -2x + y = x \therefore x = y \wedge y = 3x \Rightarrow x = y = 0$$

Tengo 1 punto crítico $(0,0)$y una recta $y = x$

$$detHf(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy - 4y^2 & 3x^2 - 8yx + 3y^2 \\ 3x^2 - 8xy + 3y^2 & -4x^2 + 6yx \end{vmatrix}$$

$$detHf(x,x) = \begin{vmatrix} 6x^2 - 8x^2 & 3x^2 - 8x^2 + 3x^2 \\ 3x^2 - 8x^2 + 3x^2 & -4x^2 + 6x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2x^2 & -2x^2 \\ -2x^2 & 2x^2 \end{vmatrix} = (2x^2)^2 - (2x^2)^2 = 0$$

$$\therefore detHf = 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{El criterio del hessiano no me sirve}$$

Como la función es el producto de dos funciones positivas $(xy), (x-y)^2$ $f(x,y) \geq 0$. Una de ellas puede valer 0, entonces el mínimo forzosamente será $(0,0)$ y se da en toda la recta $y = x$ con $x, y > 0$. Es evidente que no tiene máximo.

1.2 $f(x,y) = xy(x-y)^2 = x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$

Es igual que el anterior, pero esta vez $(0,0) \in D \Rightarrow y = x$ es mínimo con$x, y \geq 0$

1.3 $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3 \wedge |y| \leq 3\}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - y + 7 & -x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x - y + 7 = 0 & -x + 2y = 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 4x + 7 \Rightarrow -x + 2(4x + 7) = 0 \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore y = -8 + 7 = -1 \Rightarrow P_0 = (-2, -1) \rightarrow \text{cumple la condición}$$

$$detHf(-2,-1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$$

$$\therefore P_0 \text{ es un mínimo local}$$

Como el Hessiano es positivo $\forall x, y$ podemos concluir que la función está creciendo en ambas direcciones, por lo tanto el máximo se dará en sus cotas. Así tengo 4 puntos para estudiar.

$$P_0 = (-2,-1); P_1 = (3,3); P_2 = (3,-3); P_3 = (-3,3); P_4 = (-3,-3)$$

$$f(P_0) = 4 + 1 - 2 - 14 = -11$$

$$f(P_1) = 18 - 9 + 9 + 21 = 39$$

$$f(P_2) = 18 + 9 + 9 + 21 = 47$$

$$f(P_3) = 18 + 9 + 9 - 21 = 15$$

$$f(P_4) = 18 + 9 - 9 - 21 = -3$$

$$\therefore f(x,y) \text{ tiene un máximo absoluto en } P_2 \text{ y mínimo absoluto en } P_0$$

1.4 $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ y $A = \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2x & 4-2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-2x=0 & 4-2y=0 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 \wedge y = 2 \therefore P_0 = (1,2)$$

$$detHf(1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \wedge |-2| = -2 \therefore P_0 \text{ es un máximo local}$$

1.5 Igual al anterior pero $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$

Como sé que la función decrece con $(x,y) \to \pm\infty$ las cotas serán mínimos locales o absolutos, cosa que definiré al evaluarlas.

$$P_1 = (1,1); P_2 = (1,-1); P_3 = (-1,1); P_4 = (-1,-1)$$

$$f(P_1) = 2 + 4 - 1 - 1 - 3 = 1$$

$$f(P_2) = 2 - 4 - 1 - 1 - 3 = -7$$

$$f(P_3) = -2 + 4 - 1 - 1 - 3 = -3$$

$$f(P_1) = -2 - 4 - 1 - 1 - 3 = -11$$

$$\therefore P_1 \text{ es el mínimo absoluto de la función en } A$$

2 $f(x,y) = 2x - y^2$

$$A = \{(x,y)/ -1 \leq x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 0\} \Rightarrow A = \{(x,y)/|x| \leq 1 \wedge |y+1| \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y)/x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$C = \{(x,y)/x^2 + y^2 \geq 1 \wedge |x| \leq 1 \wedge |y+1| \leq 1\} \Rightarrow \{(x,y)/1 \leq x^2 + y^2 \leq 1 + 2^2 = 5\}$$

$$\text{Es evidente que en } f\big|_C : \begin{cases} max(f(x,y)) = & \{(x,y)/(x = 1 \wedge y = 0\} \\ min(f(x,y)) = & \{(x,y)/(x = -1 \wedge y = -2)\} \end{cases}$$

3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x, y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 3x^2 & 2y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6x - 3x^2 = 0 & 2y - 2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$(x = 0 \vee x = 2) \wedge y = 1$$

$$P_0 = (0, 1); P_1 = (2, 1)$$

$$\text{Por las restricciones: } P_2 = (2, 4); P_3 = (-2, 4) \text{ y } P_1 \notin f\Big|_D$$

$$detHf(x, y) = \begin{vmatrix} -6x + 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12x + 12 \wedge |-6x + 6| = -6x + 6$$

$$\therefore x < 1 \Rightarrow min \wedge x > 1 \Rightarrow silla$$

$$\therefore P_1 = silla \wedge P_0 = min \text{ pero como dijimos } P_1 \notin f\Big|_D$$

$$f(P_1) = -2^3 + 3 * 2^2 + 5 = 9$$

$$f(P_2) = 3^2 - 2^3 + 3 * 2^2 + 5 = 18$$

$$f(P_3) = 3^2 + 2^3 + 3 * 2^2 + 5 = 34$$

$$f(x, y) = y^2 - 2y - x^3 + 3x^2 + 6 \text{ si } x^2 \le y \Rightarrow f_1(x) \le x^4 - x^3 + x^2 + 6 \wedge |x| \le 2$$

$$\text{Opero en R: } f_1'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x = x(4x^2 - 3x + 2) \Rightarrow x = 0$$

$$f_1''(x) = 12x^2 - 6x + 2\Big|_{x=0} = 2 \Rightarrow f_1(x) \text{ tiene un minimo}$$

$$\therefore P_4 = (0, y) \text{ con } y \le 4\text{, lo tomo para obtener el menor número: } y = 1$$

$$\therefore f(P_4 = (0, 1)) = 5 \text{ mínimo absoluto.}$$

4 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}$$

Encontrar el máximo, el mínimo de $f\Big|_D$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1; x + y \ge 0\}$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 & 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - 1 = 0 & 2y = 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2} \wedge y = 0 \Rightarrow P_0 = (\frac{1}{2}, 0) \in D$$

$$detHf(P_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \wedge |2| = 2$$

$$\therefore f(P_0) = 0 = min(f\Big|_D(x, y)) \text{ absoluto por no haber otros puntos críticos}$$

Ahora miro la frontera de D para ver si encuentro el máximo, ya que la función no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$
Como $x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow f(x, y) \le 1 - x + \frac{1}{4}$ el máximo será el menor x $|x| \le 1 \wedge x + y \ge 0$
$x^2 \le 1 - y^2 \Rightarrow |x| \le \sqrt{1 - y^2} \begin{cases} x > 0 & x \le \sqrt{1 - y^2} \\ x \le & x \le -\sqrt{1 - y^2} \end{cases}$ $y \ge -x \Rightarrow y \ge -\sqrt{1 - y^2} \Rightarrow y^2 \ge 1 - y^2 \Rightarrow y^2 \ge \frac{1}{2} \Rightarrow |y| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore P_{max} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Verifico: $f(P_{max}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = 1,9571$

5 Encontrar el punto de $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.

Hago un cambio de variable: $x^2 = 4y \Rightarrow (0,1)$ es el punto al que quiero acercarme

5.1 Usando multiplicadores de Lagrange

$$f(x) = \frac{x^2}{4}; g(x) = |x-1| = 0$$

$$f'(x) = \lambda g'(x) \Rightarrow x = 2\lambda$$

$$|x-1| = k \Rightarrow |2\lambda - 1| = k \begin{cases} 2\lambda - 1 \geq 0 & \lambda = \frac{k+1}{2} \\ 2\lambda - 1 < 0 & \lambda = \frac{-k+1}{2} \end{cases}$$

5.2 Reduciéndolo a una función de una variable

6 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$ en el círculo unitario y en el borde

$$C = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\} \Rightarrow x^2 \leq 1 \wedge y^2 \leq 1$$

$x^4 \leq x^2 \forall x \leq 1 \wedge y^4 \leq y^2 \forall y \leq 1 \Rightarrow f(x,y) \leq 0 \forall x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow (0,0)$ es máximo absoluto y pertenece al círculo unitario.
Como no está acotada inferiormente, el mínimo estará dado por C.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - \lambda x^2 - \lambda y^2 = x^4 + y^4 - x^2(\lambda - 1) - y^2(\lambda - 1)$$

$$L_x = 4x^3 - 2x(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{2(\lambda - 1)}{4}$$

$$L_y = 4y^3 - 2y(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y^2 = \frac{2(\lambda - 1)}{4}$$

$$\frac{(\lambda - 1)}{2} + \frac{(\lambda - 1)}{2} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq 2 \Rightarrow |y|, |x| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{2(2-1)}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2(2-1)}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Los 4 puntos críticos que me quedaron son iguales porque tengo potencias pares y solo varían en el signo:

$$\therefore f(P_X) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Mínimo absoluto.}$$

7 Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y & 1 - 2x \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(x,y) = \left(\begin{cases} x > 0 & 1 & 0 \\ x \leq 0 & -1 & 0 \end{cases} \right)$$

$$\begin{cases} x > 0 & 1 - 2y = \lambda \wedge 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x \leq 0 & 1 - 2y = -\lambda \wedge 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{\lambda - 1}{2} = \lambda - \frac{1}{2}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

Hay infinitas soluciones. Tomando $x = 0$ se ve que la función no está acotada en $|x| \leq \frac{1}{2}$

8 ni a palos

9 Resolver usando el método de Lagrange

9.1 Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $f(X) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$

La distancia de la superficie al punto está dada por $g(X) = ||(B - A)||/B \in S$. Necesito buscar el mínimo.

$$g(x) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - a_1}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} & \frac{x_2 - a_2}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} & \frac{x_3 - a_3}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(x) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda(x_1 - a_1)}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} = b_1 & \frac{\lambda(x_2 - a_2)}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} = b_2 & \frac{\lambda(x_3 - a_3)}{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} = b_3 \end{pmatrix}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$$

Queda un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, al resolverlo ¿obtengo la distancia mínima?

10 Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$

$$f(x, y) = x^2 - y; g(x, y) = x - y - 2; d(x, y) = ||(x_1 - x_2, y_1 - y_2)||$$