1 Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-5,5]$. Hacer un gráfico aproximado de la función.

$$f'(x) = 4x^3 - x^2 - 3x \to f''(x) = 12x^2 - 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - x - 3 = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f''(0) = -3 < 0 \to \text{Máximo local}$$

$$f''(1) = 12 - 2 - 3 = 9 > 0 \to \text{Mínimo local}$$

$$f''\left(-\frac{3}{4}\right) = 12\frac{9}{16} + 2\frac{3}{4} - 3 = \frac{27+6}{4} - 3 = \frac{21}{4} > 0 \to \text{Mínimo local}$$

$$\left\{-\frac{3}{4}, 1\right\} \text{ son mínimos locales, 0 es un máximo}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [-5, -\frac{3}{4}) \cup (1,5] \text{ la función crece}$$

$$\therefore \begin{cases} \max(f(x)) = & \max(f(-5), f(5), f(0)) = \max\left(629 + \frac{1}{6}, 545 + \frac{5}{6}, 0\right) = 629 + \frac{1}{6} \text{ en } x = -5 \\ \min(f(x)) = & \min\left(f\left(-\frac{3}{4}\right), f(1)\right) = \min\left(-0,3867, -\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6} \text{ en } x = 1 \end{cases}$$

2 La empresa Pepsi quiere fabricar “Narajsi” un nuevo producto sabor naranja al mercado envasado de latitas. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pepsi minimice el costo de aluminio?

$$f(h,r) = \frac{V}{SB + SC} \to r_0/h_0 = k : f(h_0, r_0) = \max(f(h,r))$$

$$V = \pi r^2 h = 1; SC = 2\pi r h; SB = 2\pi r^2 \Rightarrow SB + SC = 2\pi r(h + r) = f(r)$$

$$2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2} + r\right) = \frac{2 + 2\pi r^3}{r}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \frac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \vee r = 0$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 4\left(\frac{1}{r^3} + \pi\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = 4(2\pi + \pi) = 12\pi > 0$$

$$f(h) = \frac{hr}{2(h+r)} \Rightarrow f'(h) =$$

PREGUNTAR

3 Resolver

3.1 Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 4y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$$Hf(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{ es definido positivo} \Rightarrow f(0,0) = 0 \text{es un mínimo}$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow Hg(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$$Hg(0,0) = 0 \text{ es indefinido.}$$

$$\text{Se puede ver que } f(0,0) = 0 \text{es un mínimo absoluto ya que } x^4 \geq 0 \wedge y^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + y^4 \geq 0$$

3.2 Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

No, pero debe ser semi-definida positiva o negativa.

4 Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

4.1 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$$Hf(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Es indefinido} \Rightarrow \text{Es un punto de ensilladura.}$$

4.2 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x = x\left(x^2 - 3\right) + y^3$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 & 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 6x * 6y$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \wedge 3y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge y = 0$$

$$\therefore P_1 = (1,0)\,; P_2 = (-1,0)$$

$$6x * 6y\Big|_{(1,0)} = 0; 6x * 6y\Big|_{(-1,0)} = 0 \rightarrow \text{El criterio no me dice nada}$$

Preguntar por la definición de punto silla de la rotonda, es muy rara!

$$x = 1 \Rightarrow x\left(x^2 - 3\right) + y^3 = 1(-2) + y^3 = y^3 - 2 \rightarrow \text{no tiene máximo ni mínimo local en } y = 0 \Rightarrow \text{Es punto de ensilladura}$$

$$x = -1 \Rightarrow x\left(x^2 - 3\right) + y^3 = -1(-2) + y^3 = y^3 + 2 \rightarrow \text{no tiene máximo ni mínimo local en } y = 0 \Rightarrow \text{Es punto de ensilladura}$$

Preguntar si está bien este criterio

4.3 $f(x,y) = xy$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{Es indefinido} \Rightarrow \text{Cualquier punto crítico será de ensilladura.}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$$\therefore P_1 = (0,0) \text{ es un punto de ensilladura}$$

4.4 BUG

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{2xy}{(x^2y)^2} e^{\frac{1}{x^2y}} & -\frac{x^2}{(x^2y)^2} e^{\frac{1}{x^2y}} \end{pmatrix} & \text{si } xy \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \vee \left(-\frac{2xy}{(x^2y)^2} e^{\frac{1}{x^2y}} = 0 \wedge -\frac{x^2}{(x^2y)^2} e^{\frac{1}{x^2y}} = 0 \right) \rightarrow \text{Nunca pueden ser 0, solo miro } xy = 0$$

$$P_x = (x,0)\,; P_y = (0,y)$$

$$x^2 y \rightarrow 0^+ \Rightarrow e^{\frac{1}{x^2y}} \rightarrow +\infty$$

$$x^2 y \rightarrow 0^- \Rightarrow e^{\frac{1}{x^2y}} \rightarrow -\infty$$

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \text{ son todos puntos silla}$$

5 Sea $f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)=y^2-4x^2y+3x^4$. Probar que:

5.1 $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

5.2 El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es 0.

5.3 f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$ es decir, si $g(t)=(at,bt)$ entonces $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a,b

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} -8xy+12x^3 & 2y-4x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} 12x^3=8xy \\ 2y=4x^2 \end{array}\right\}$$

$$y=2x^2\Rightarrow 12x^3=16x^3\Rightarrow x=0\wedge y=0\Rightarrow P_1=(0,0)\text{ es el único punto crítico}$$

$$y=kx^2\Rightarrow x^2(k-3)x^2(k-1)=x^4\left(k^2-4k+3\right)$$

$x^4>0\Rightarrow$Es positiva en un entorno de $(0,0)$ con $k^2-4k>-3$ y negativa con $k^2-4k<-3\therefore(0,0)$ es un punto de ensilladura.

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 36x^2-8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix}$$

$$detHf(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$g(x,y)=mx-y\ ;\ s=\{(x,y)/g(x,y)=0\}$$

$$y=mx\Rightarrow f_s(x,y)=(f\circ g)(x,y)=f(x,mx)=m^2x^2-4x^2mx+3x^4$$

$$\text{Defino } f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_1(x)=m^2x^2-4x^3m+3x^4\text{ y derivo}$$

$$f_1'(x)=2xm^2-12x^2m+12x^3\text{ se anula en }(0)\text{ (es un punto crítico, no me importan los demás)}$$

$$f_1''(x)=2m^2-24xm+36x^2\Rightarrow f_1''(0)=2m^2\therefore f_1''(0)>0\forall m\neq 0$$

$$\therefore f_1(x)\text{ tiene un mínimo relativo en (0,0)}\Rightarrow f_s(x,y)\text{ tiene un mínimo relativo en (0,0)}$$

Las siguientes afirmaciones me parecían útiles pero hay que suponer $\nabla g\neq 0$ ¿Entonces no me sirven?

$$(0,0)\text{ es un máximo o mínimo de }f_s\Leftrightarrow\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$(0,0)\text{ es un máximo o mínimo de }f_s\Leftrightarrow\nabla f\perp S\text{ en }(0,0)$$

$$\text{En }(0,0)\nabla f=0=\lambda\nabla g\text{ por lo tanto existe un mínimo o máximo sin importar m}$$

Pensarlo más.

6 Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$

6.1 Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo

6.2 Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

$$\frac{df}{dx}=4x^3-4x+4y$$

$$\frac{df}{dy}=4y^3-4y+4x$$

$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{array}{c} 4x^3-4x+4y=0 \\ 4y^3-4y+4x=0 \end{array}\Rightarrow(0,0)\text{ es un punto crítico.}$$

$$\text{Busco otros puntos críticos: } y=\frac{4x-4x^3}{4}=x-x^3$$

$$\text{reemplazo en } \frac{df}{dy} = 4(x-x^3)^3 - 4x + 4x^3 + 4x = 0$$

$$4(x^3 - 3x^2x^3 + 3xx^6 - x^9) + 4x^3 = 0$$

$$4x^3(2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 0$$

$$z = x^2$$

$$-z^3 + 3z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$(z-2)(-z^2 + z - 1) = 0 \rightarrow \text{por ruffini}$$

$$z - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$\text{Vuelvo a } \frac{df}{dx} : 4\left(\pm\sqrt{2}\right)^3 - 4\left(\pm\sqrt{2}\right) + 4y = 0$$

$$y = 2\left(\pm\sqrt{2}\right) - \left(\pm\sqrt{2}\right) = -\left(\pm\sqrt{2}\right) = \begin{cases} x = \sqrt{2} & y = -\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} & y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$P_0 = (0,0)\,;P_1 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right); P_2 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\right| = \left|Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right| = \begin{vmatrix} 24-4 & 4 \\ 4 & 24-4 \end{vmatrix} = 400 - 16 > 0 \Rightarrow \text{ mínimo local}$$

$$y = kx \Rightarrow x^4 + k^4x^4 - 2(x-kx)^2 = x^4(k+1) - 2x(1-k)^2 = \left\{k = -1 \quad -8x \rightarrow \text{no tiene extremo en 0}\right.$$

$$\therefore (0,0) \text{ es punto silla.}$$

corroborar

7 Encontrar puntos críticos y analizar máximos y mínimos locales o puntos de ensilladura.

7.1 $f(x,y) = (2x+1-y)^2$

$$= (2x+1-y)(2x+1-y) = 4x^2 + 2x - 2xy + 2x + 1 - y - 2xy - y + y^2$$

$$4x^2 + 4x - 4xy + 1 - 2y + y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x + 4 - 4y & 2y - 2 - 4x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 1 - y = 0 & y - 1 - 2x = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 1 = y & 2x + 1 = y \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tengo 1 sola ecuación distinta}$$

$$2x + 1 = y \Rightarrow \text{Son puntos críticos los de la forma } y = 2x + 1$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detHf = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \in \mathbb{R}_0^+ \wedge (f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = y) \Rightarrow \text{La función tiene mínimos absolutos en esa recta}$$

$$\text{y no tiene máximos}$$

7.2 $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y + 3 & -2y - x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y + 3 = 0 & -2y - x + 3 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 3 = y & 3 - 2y = x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2(3-2y) + 3 = y \Leftrightarrow 6 - 4y + 3 = y \Leftrightarrow -5y = -9 \Leftrightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow x = 3 - 2 * \frac{9}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = -\frac{6}{5} + 3 = \frac{9}{5} \therefore (-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}) \text{ es un punto crítico}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$detHf(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 < 0$$

$$detH_1 f(x,y) = |2| = 2 > 0 \therefore f(x,y) \text{ tiene un punto silla en} (-\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$$

7.3 $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 20x + 12y + 2 & 20y + 12x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 20x + 12y + 2 = 0 & 20y + 12x + 6 = 0 \end{pmatrix}$$

$$20x = -12y - 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}y - \frac{1}{10}$$

$$5y + 3\left(-\frac{3}{5}y - \frac{1}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow 5y - \frac{9}{5}y = \frac{3}{10}$$

$$(25-9)y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{32} \Rightarrow x = -\frac{5}{32} \therefore \left(\frac{3}{32}, -\frac{5}{32}\right) \text{ es un punto crítico}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$detHf(x,y) = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 20 \end{vmatrix} = 256 > 0 \wedge detH_1 f(x,y) = |20| = 20 > 0$$

$$\therefore \left(\frac{3}{32}, -\frac{5}{32}\right) \text{ es un mínimo local, absoluto por ser el único punto crítico.}$$

7.4 $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{1+x^2+y^2} & 2ye^{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2xe^{1+x^2+y^2} = 0 & 2ye^{1+x^2+y^2} = 0 \end{pmatrix}$$

$$2xe^{1+x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2ye^{1+x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\therefore \text{El único punto crítico es } (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{1+x^2+y^2} + 4x^2e^{1+x^2+y^2} & 2x2ye^{1+x^2+y^2} \\ 2x2ye^{1+x^2+y^2} & 2e^{1+x^2+y^2} + 4y^2e^{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$detHf(0,0) = \begin{vmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{vmatrix} = 2e * 2e > 0$$

$$detH_1 f(0,0) = \left|2e\right| = 2e > 0 \therefore (0,0) \text{ es un mínimo relativo y absoluto.}$$

7.5 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+xy$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y=0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x=0\end{pmatrix}\rightarrow(x,y)\neq(0,0)$$

$$x=0\Rightarrow y=0 \text{ y viceversa } \therefore x\neq 0\wedge y\neq 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=-\frac{x}{y}\rightarrow y*\left(-\frac{y}{x}\right)+x=0\Rightarrow\frac{x^2-y^2}{x}=0\Leftrightarrow x^2=y^2\therefore|x|=|y|$$

$$Hf(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & 1-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\\ 1-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{vmatrix}=\frac{y^2x^2}{(x^2+y^2)^{6/2}}-\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}+1+\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{6/2}}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}-1$$

$$\text{Si } |x|=|y|\Rightarrow\frac{2xy}{\left(|x|^2+|x|^2\right)^{3/2}}-1=\frac{xy}{2^{1/2}|x|^3}-1>0\Leftrightarrow xy>\sqrt{2}|x|^3$$

$$xy\leq|xy|\Rightarrow|xy|>\sqrt{2}|x|^3\Rightarrow|x|^2>\sqrt{2}|x|^3\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}>|x|$$

$$\text{Si } |x|=|y|: det\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)>0\Leftrightarrow\frac{|y|^2}{(2^{3/2}|y|^3)}>0\Leftrightarrow\frac{1}{2^{3/2}|y|}>0\therefore\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\therefore\{P_x(x,y)/|x|=|y|\}\text{ son máximos locales si }\frac{1}{\sqrt{2}}>|x|\text{ y puntos silla si }\frac{1}{\sqrt{2}}<|x|$$

Bardoooooooooo

7.6 $f(x,y)=(x-y)^2+1+2(x-y)$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2(x-y)+2 & -2(x-y)-2\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2(x-y)+2=0 & -2(x-y)-2=0\end{pmatrix}$$

$$2x=2y-2\Rightarrow x=y-1$$

$y=x+1$ es decir, no plantea otra restricción (son la misma ecuación)

$\therefore$ toda la recta y=x+1 es de puntos críticos

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$detHf(x,y)=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4-4=0$$

Reviso esa recta: $f(x,x+1)=(1)^2+1+2(1)=4$

$f(0,0)=1; f(2,0)=4+1+4=9\Rightarrow$ La recta $y=x+1$ es de puntos silla

7.7 $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}e^{x-y}(x^2-2y^2)+2xe^{x-y} & e^{x-y}(x^2-2y^2)-4ye^{x-y}\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}e^{x-y}(x^2-2y^2)+2xe^{x-y}=0 & -e^{x-y}(x^2-2y^2)-4ye^{x-y}=0\end{pmatrix}$$

$$x^2-2y^2+2x=0\rightarrow\text{saco } e^{x-y}\neq 0$$

$$\frac{x^2}{2}+x=y^2\Rightarrow|y|=\sqrt{\frac{x^2}{2}+x}\Rightarrow x(\frac{x}{2}+1)>0\Rightarrow x>0\vee\frac{x}{2}+1>0\Rightarrow x>-2$$

$$\sqrt{2y^2-4y}=|x|\Rightarrow 2y^2-4y>0\Rightarrow y>0\vee y-2>0\Rightarrow y>2$$

7.8 $f(x,y,z) = xy + z^2$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y = 0 & x = 0 & z = 0 \end{pmatrix}$$

Punto crítico único: $(0,0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detHf(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 * 1 * 2 = -2 < 0$$

$$detH_1 f(x,y) = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$detH_2 f(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Con z=0 es evidente que la función xyno es acotada.$\therefore$es un punto silla

7.9 $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x - y + 2z & 2y - x & 2z + 2x + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x - y + 2z = 0 & 2y - x = 0 & 2z + 2x + 1 = 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

$$y = 4x + 2z \Rightarrow z = \frac{-3}{2}x$$

$$2\frac{-3}{2}x + 2x + 1 = -3x + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = -\frac{3}{2}$$

Punto crítico único: $\left(1, 1, -\frac{3}{2}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detHf(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 * 2 * 2 + (-1) * 0 * 2 + 2 * (-1) * 0 - 2 * 2 * 2 - (-1) * (-1) * 2 - 4 * 0 * 0$$

$$16 - 2 = 14 > 0$$

$$detH_1 f(x,y) = \begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$detH_2 f(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 > 0$$

Como todos los determinantes principales son positivos la matriz es definida positiva.$\therefore$hay un mínimo local

7.10 $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x-2y^2 & -4yx+4y^3-5y^4\end{pmatrix}$$

$$2x-2y^2=0\Rightarrow x=y^2$$

$$-4y^3+4y^3-5y^4=-5y^4=0\Rightarrow y=0\wedge x=0$$

$$\text{Único punto crítico: (0,0)}$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -4y\\ -4y & -4x+12y^2-20y^3\end{pmatrix}$$

$$detHf(0,0)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Tomo la curva $x=0\Rightarrow f(0,y)=y^4-y^5$que claramente no está acotada $\therefore$(0,0)es punto silla

7.11 $f(x)=\frac{1}{1+||x||^2}$ con $x\in\Re^n$

$$\forall 1\leq i\leq n: \frac{df}{dx_i}=-\frac{2x_i}{(1+||x||^2)^2}\rightarrow \text{se anula sí y sólo sí } x_i=0$$

$\therefore$ 0 es el único punto crítico. Como $||x||^2\geq 0$ 0 es máximo absoluto.

8 $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}\in C^2$; $g:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$

$$f(0,1)=0, \nabla f(0,1)=(0,2) \text{ y } \mathbb{H}f(0,1)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$g(x,y)=3x^2y+e^{f(x,y)}-2y$$

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}6xy+\frac{df}{dx}(x,y)*e^{f(x,y)} & 3x^2-2+\frac{df}{dy}(x,y)*e^{f(x,y)}\end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6xy+\frac{df}{dx}(x,y)*e^{f(x,y)}=0 & 3x^2-2+\frac{df}{dy}(x,y)*e^{f(x,y)}=0\end{pmatrix}$$

$$\text{En }(0,1)\rightarrow\begin{matrix}6xy+\frac{df}{dx}(x,y)*e^{f(x,y)}=\frac{df}{dx}(0,1)*e^{f(0,1)}=0\\ 3x^2-2+\frac{df}{dy}(x,y)*e^{f(x,y)}=-2+\frac{df}{dy}(0,1)*e^{f(0,1)}=0\end{matrix}$$

$$\therefore (0,1) \text{ es un punto crítico.}$$

$$\mathbb{H}g(0,1)=\begin{pmatrix}6+\left(\frac{df}{dx}(0,1)\right)^2*e^{f(0,1)}+\frac{d^2f}{dx^2}(0,1)*e^{f(0,1)} & \frac{d^2f}{dydx}(0,1)*e^{f(0,1)}+\left(\frac{df}{dy}(0,1)\right)^2*e^{f(0,1)}\\ 6x+\frac{d^2f}{dxdy}(0,1)*e^{f(0,1)}+\left(\frac{df}{dx}(0,1)\right)^2*e^{f(0,1)} & \left(\frac{df}{dy}(0,1)\right)^2*e^{f(0,1)}+\frac{d^2f}{dy^2}(0,1)*e^{f(0,1)}\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}g(0,1)=\begin{pmatrix}6+(0)^2*e^0+2*e^0=8 & -1*e^0+(1)^2*e^0=0\\ 6*0+-1*e^0+(0)^2*e^0=-1 & (1)^2*e^0+2*e^0=3\end{pmatrix}$$

8.1 Problema con lyx: matrices y secciones no se llevan bien. =(

$$Hg(0,1)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

8.2 ¿Tiene g un extremo relativo en (0,1)? Sí, $(0,1)$ es un punto crítico.

9 $f(x,y)=2x^4+y^2-3yx^2$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}8x^3-6xy & 2y-3x^2\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y)=0\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{4x^2}{3}=y & \frac{2*4x^2}{3}-3x^2=0\end{pmatrix}\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2=0$$

$$\therefore x=0\Rightarrow y=0$$

$$\mathbb{H}f(0,0)=\begin{pmatrix}24x^2-6y & -6x\\ -6x & 2\end{pmatrix}$$

9.1 Problema con lyx: matrices y secciones no se llevan bien. =(

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$y=mx\Rightarrow f_1(x)=2x^4+(mx)^2-4(mx)x^2$$

$$\frac{df_1}{dx}(x)=8x^3+2m^2x-12mx^2$$

$$\frac{d^2f_1}{dx^2}(x)=24x^2+2m^2-24mx$$

$$\frac{d^2f_1}{dx^2}(0)=2m^2>0\forall m$$

9.2 La $d^2f_{y=mx}(0)>0\forall m\Rightarrow$es un mínimo.

$$\text{Pruebo}y=\frac{3}{2}x^2\Rightarrow f_2(x)=2x^4+(\frac{3}{2}x^2)^2-4(\frac{3}{2}x^2)x^2$$

$$f_2(x)=2x^4+\frac{9}{4}x^4-6x^4=\frac{9x^4-16x^4}{4}=-\frac{7}{4}x^4<0$$

$$\text{Pruebo }y=0\Rightarrow f(x,0)=x^4>0$$

9.3 $\therefore(0,0)$ es un punto silla.

10 $f(x,y)=e^{y^4-x^2}+a(x-y)+b(x-2)(y-1)$¿Existen a y b reales con mínimo en $(2,1)$?

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-2xe^{y^4-x^2}+a+b(y-1) & 4y^3e^{y^4-x^2}-a+b(x-2)\end{pmatrix}$$

$$\text{Mínimo en }(2,1)\Leftrightarrow\nabla f(2,1)=0\wedge detHf(2,1)>0\wedge detH_1f(2,1)>0$$

$$\nabla f(2,1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-2*2e^{1^4-2^2}+a+b(1-1)=0\Rightarrow a=4e^{-3}\\ 4*1^3e^{1^4-2^2}-a+b(2-2)=0\Rightarrow a=4e^{-3}\end{cases}$$

$$detHf(x,y)=\begin{vmatrix}-2e^{y^4-x^2}+4x^2e^{y^4-x^2} & -2x4y^3e^{y^4-x^2}+b\\ -2x4y^3e^{y^4-x^2}+b & 12y^2e^{y^4-x^2}+16y^6e^{y^4-x^2}\end{vmatrix}$$

$$detHf(2,1)=\begin{vmatrix}-2e^{1^4-2^2}+4*2^2e^{1^4-2^2} & -2*2*4*1^3e^{1^4-2^2}+b\\ -2*2*4*1^3e^{1^4-2^2}+b & 12*1^2e^{1^4-2^2}+16*1^6e^{1^4-2^2}\end{vmatrix}$$

$$detHf(2,1)=\begin{vmatrix}-2e^{-3}+16e^{-3} & -16e^{-3}+b\\ -16e^{-3}+b & 12e^{-3}+16e^{-3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14e^{-3} & -16e^{-3}+b\\ -16e^{-3}+b & 28e^{-3}\end{vmatrix}$$

$$14e^{-3}*28e^{-3}-(-16e^{-3}+b)^2=392e^{-6}-256e^{-6}-32e^{-3}b+b^2$$

$$b^2-32e^{-3}b-136e^{-6}>0$$

Rta: como $detH_1f(2,1)=14e^{-3}>0$ basta tomar $b>3,5179$ para que haya un mínimo relativo en (2,1)

11 $f(x,y)\cong P(x,y)=1+2x-y+xy-x^2+y^2$

$$g(x,y)=f(x,y)-2x+y+x^2y$$

$$\therefore Hf(0,0)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\wedge\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\wedge f(0,0)=1$$

$$\nabla g(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{df}{dx}(0,0)+2xy-2 & \frac{df}{dy}(0,0)+x^2+1\end{pmatrix}\Rightarrow(0,0)\text{ es punto crítico}$$

$$Hg(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{d^2f}{dx^2}(0,0)+2y & \frac{d^2f}{dydx}(0,0)+2x\\ \frac{d^2f}{dxdy}(0,0)+2x & \frac{d^2f}{dy^2}(0,0)\end{pmatrix}$$

$$detHg(0,0)=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2*2-1<0\Rightarrow(0,0)\text{ es punto silla}$$