Part I

Aplicación de algunas resultados de diferenciación en una variable.

1 Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1.1 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R} \wedge f(1) = 0 = f(2) \wedge \left(f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} \in (1, 2) \therefore \text{Se cumple el teorema de Rolle}$$

1.2 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en el intervalo $[1, 3]$

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R} \wedge f(1) = 0 = f(3)$$

$$f'(x) = D\left(\left(x^2 - 3x + 2\right)(x - 3)\right) = D\left(x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6\right) = D\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = 3x^2 - 12x + 11$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2,577.. \vee x = 1,422...$$

$$2,577... \in [1, 3] \therefore \text{Se cumple el teorema de Rolle}$$

1.3 $f(x) = \sin^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R} \wedge f(0) = 0 = f(\pi) \wedge \left(f'(x) = 2\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$k = 0 : f'(\frac{\pi}{2}) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0 \wedge \frac{\pi}{2} \in (0, \pi) \therefore \text{Se cumple el teorema de Rolle}$$

2 Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle?

$$f(1) = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{(2)^2} = f(5)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{La función no es derivable en } 3 \Rightarrow \text{no es derivable en } (1, 5) \Rightarrow \text{ no se cumplen las condiciones que exige el teorema}$$

3 Resolver

3.1 Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k - 1$ raíces distintas.

Es inmediato por el teorema de Rolle, si tiene k raíces distintas puedo armar $k - 1$ intervalos donde la derivada se anualará, entonces habrá $k - 1$ raíces distintas.

3.2 Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

Es una función estrictamente creciente, entonces es inyectiva entonces no se puede establecer ningun intervalo para aplicar el teorema de Rolle.

3.3 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

$$f'(x) = a^2 e^{a^2 x} + 3x^2 + 1 \neq 0 \to \forall x, a : a^2 e^{a^2 x} \geq 0 \wedge 3x^2 > 0$$

$$f(x) \text{ es continua } \Rightarrow \nexists f(x') = 0 \Leftrightarrow x = x' \to \text{Sino sería aplicable el teorema de Rolle.}$$

4 Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar las siguientes afirmaciones:

4.1 Si $f' = g'$ en (a, b), entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

$$f' = g' \Leftrightarrow D(f(x) + c') = D(g(x) + c'') \Rightarrow f(x) + c' = g(x) + c'' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c'' - c'$$

$$\text{sea } c = c'' - c' \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

4.2 Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente.

$$f'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} > 0 \Leftrightarrow f(x+t)-f(x) > t \Leftrightarrow f(x+t)-t > f(x)$$

$$f(x+t)-t > f(x) \to f(x+t) \text{ es mayor a } f(x) \text{ para cualquier } t \wedge x+t > t \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente.}$$

4.3 Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente.

Análogo al anterior pero con $<$ en lugar de $>$

5 Como consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las suguientes acotaciones

5.1 $|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \, \forall x, y \in \mathbb{R}$

5.2 $|1/x - 1/y| \leq |x-y| \, \forall x, y > 1$

5.3 $|\arctan a - \arctan b| \leq \frac{1}{2} |a-b| \, \forall a, b \geq 1$

¡Preguntar!

6 Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1,2]$.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} \to \text{Por el teorema de Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{7} = \frac{2c}{3c^2} \Leftrightarrow 9c^2 = 14c \Leftrightarrow 9c^2 - 14c = 0$$

$$\Rightarrow (c = 0 \vee 9c - 14 = 0) \Rightarrow c = \frac{14}{9}$$

$$0 \notin [1,2]; \frac{14}{9} \in [1,2] \therefore c = \frac{14}{9}$$

7 Utilizando el teorema de Cauchy, calcular:

7.1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x^2-y^2} & \textbf{si } x \neq y \\ -\frac{1}{2} & \textbf{si } x = y \end{cases}$

$$f(x) = \cos x; g(x) = x^2; c \in [x,y] \Rightarrow \frac{\cos x - \cos y}{x^2-y^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \to \text{Por el teorema de Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - \cos y}{x^2-y^2} = \lim_{c\to 0} \frac{-\sin c}{2c} = -\frac{1}{2} \to \text{Si el límite existe entonces mantiene la igualdad, por ser cociente de funciones continuas}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - \cos y}{x^2-y^2} = -\frac{1}{2}$$

7.2 $\sup_{x,y\in[0,2]} f(x,y)$ donde $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4-4(x^3-y^3)+4\left(x^2-y^2\right)}{y^2-x^2} & \textbf{si } x \neq y \\ 0 & \textbf{si } x = y \end{cases}$ ¿Cuánto vale $\sup_{x,y\in[0,2]} f(x,y)$?

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2; g(x) = x^2; c \in [x,y] \Rightarrow \frac{x^4-y^4-4(x^3-y^3)+4\left(x^2-y^2\right)}{y^2-x^2} = \frac{4c^3-12c^2-8c}{2c}$$

$$= \frac{4c^2-12c-8}{2} = 2c^2-6c-4 = \begin{cases} c=0 & -4 \\ c=2 & 8-12-4=-8 \end{cases}$$

??

Part II
Derivadas parciales y direccionales

8 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$. Probar que f es derivable en $x = a \Leftrightarrow \exists L(x) = m(x-a)+b$ única tal que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-L(x)}{x-a} = 0$$

Calcular el valor de m y de b. Al gráfico de $L(x)$ se la denomina la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0 \Rightarrow L(x) \to f(a) \text{ si } x \to a$$

$$\text{Sabemos que la función que mejor aproxima } f(x) \text{ es } f'(x) \Rightarrow L(x) = f'(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f'(x)}{x - a} = 0; f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x - a} = \frac{f(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x - a}$$

$$f \text{ es derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = m$$

????

9 Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$, calcular la derivada direccional en la dirección de v en el punto (x_0, y_0)

9.1 $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (1,0)$, $(x_0,y_0) = (1,2)$ y $v = (0,1)$, $(x_0,y_0) = (1,2)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((1,2) + t(0,1)) - f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + 4 + 4t + t^2 - 1 - 4}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t + t^2}{t} = \lim_{t\to 0} 4 + t = 4$$

9.2 $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$, $v = (1,1)$, $(x_0,y_0) = (2,3)$ y $v = (1,2)$, $(x_0,y_0) = (0,1)$

$$v' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \to \text{normalizo el vector}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + t\frac{2}{\sqrt{5}} - 5 - (1-5)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + t\frac{2}{\sqrt{5}} - 5 - 1 + 5}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t2}{t\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

9.3 $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$, $v = (0,1,0)$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((1,1,2) + t(0,1,0)) - f(1,1,2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^2\left(1 + t + 2^2\right) - e^2\left(1 + 2^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^2 + e^2 t + 4e^2 - e^2 - 4e^2}{t} = \frac{te^2}{t} = e^2$$

9.4 $f(x,y) = (x+1)\sin y - 2$, $v = (1,0)$, (x_0,y_0) cualquiera

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0) + t(1,0)) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x_0 + t + 1)\sin y_0 - 2 - ((x_0+1)\sin y_0 - 2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sin y_0}{t} = \sin y_0$$

9.5 $f(x,y) = ||(x,y)||$, $v = (a,b)$, (x_0,y_0) con $||(a,b)|| \neq 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0) + t(a,b)) - f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{||(x_0 + ta, y_0 + tb)|| - ||(x_0,y_0)||}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} ||(x_0 + ta, y_0 + tb)|| - ||(x_0,y_0)|| = \lim_{t\to 0} \sqrt{(x_0 + ta)^2 + (y_0 + tb)^2} - \sqrt{(x_0)^2 + (y_0)^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \sqrt{x_0^2 + 2x_0ta + t^2a^2 + y_0^2 + 2y_0tb + t^2b^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0ta + t^2a^2 + y_0^2 + 2y_0tb + t^2b^2 - x_0^2 - y_0^2}{t\left(||(x_0 + ta, y_0 + tb)|| + ||(x_0,y_0)||\right)}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{2x_0ta + t^2a^2 + 2y_0tb + t^2b^2}{t\,||(x_0 + ta, y_0 + tb)|| + ||(x_0,y_0)||} = \lim_{t\to 0} \frac{2x_0a + ta^2 + 2y_0b + tb^2}{||(x_0 + ta, y_0 + tb)|| + ||(x_0,y_0)||} = \frac{x_0a + y_0b}{||(x_0,y_0)||}$$

10 Resolver

10.1 Sea $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(2,1+t) - f(2,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} - \sqrt{2+2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2(1+t) + \frac{2}{1+t} - 4}{t\left(\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} + 2\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2(1+t)^2 + 2 - 4 - 4t}{1+t}}{t\left(\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} + 2\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2(1+t)^2 - 2 - 4t}{t\left(\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} + 2\right)(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{2 + 4t + 2t^2 - 2 - 4t}{t\left(\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} + 2\right)(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{t\left(\sqrt{2(1+t) + \frac{2}{1+t}} + 2\right)(1+t)} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(2+t,1)-f(2,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2+t+2+t}-\sqrt{2+2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{4+2t}-2}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4+2t-4}{t\left(\sqrt{2(2+t)}+2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t\left(\sqrt{2(2+t)}+2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(2+t)}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(2,1)=\left\langle \nabla f(2,1),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle=0+\frac{1}{2}*\frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.2 Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}+\ln(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,1,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1,1,1+t)-f(1,1,1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+(1+t)^2}+\ln(1)-\sqrt{2}-\ln(1)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+(1+t)^2-2}{t\left(\sqrt{1+(1+t)^2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t\left(\sqrt{1+(1+t)^2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{t+2}{\left(\sqrt{1+(1+t)^2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.3 Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & \textbf{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\,\forall v=(a,b)/\,||v||=1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a,b)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3a^3}{t^2(a^2+b^2)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{ta^3}{a^2+b^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{ta^3}{(a^2+b^2)\,t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3}{a^2+b^2}$$

11 Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones.

11.1 $f(x,y)=x^4+2xy+y^3x-1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+2y+y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x+2y^2x$$

11.2 $f(x,y,z)=ye^x+z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1$$

11.3 $f(x,y)=x^2\sin^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2\sin y\cos y=x^2\sin(2y)$$

11.4 $f(x,y)=\sin x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

11.5 $f(x,y,z)=z(\cos(xy)+\ln(x^2+y^2+1))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=z\left(y\sin xy+\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=z\left(x\sin xy+\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\cos(xy)+\ln\left(x^2+y^2+1\right)$$

11.6 $f(x,y)=xe^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2+y^2}+2x^2e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2yxe^{x^2+y^2}$$

11.7 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}*x^{-2}=-\frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)x^2}=-\frac{1}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}*\frac{1}{x}=\frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)x}=\frac{x}{y^2+x^2}$$

12 Probar que al función $f(x,y)=|x|+|y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}|x|+|y|=\lim_{(x,y)\to(a,b)}|x|+\lim_{(x,y)\to(a,b)}|y|=|a|+|b|=f(a,b)\Rightarrow\text{ es continua}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{|t|}{t}\Rightarrow\nexists\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\Rightarrow\nexists\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{|t|}{t}\Rightarrow\nexists\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\Rightarrow\nexists\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

13 Consideremos la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

Probar que las únicas direcciones $v\in\mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direcciones en $f_v$en el origen son $v=(1,0)$y $v=(0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

$$v=(1,0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0}{t^2}}{t}=0$$

$$v=(0,1)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0}{t^2}}{t}=0$$

$$v=(a,b)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{abt^2}{t^2(a^2+b^2)}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{ab}{t(a^2+b^2)}=\lim_{t\to0}\frac{ab}{t}\to\infty\forall a,b\neq0$$

$$\text{nota: } ||v||=1\wedge a^2+b^2=||v||^2=1$$

$$\text{si } y=mx\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to0}\frac{m}{1+m^2}\neq f(0,0)\,\forall m\Rightarrow f\text{ no es continua en }(0,0)$$

14 Consideremos la siguiente función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v\in R^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

$$v=(a,b)\,;||v||=1\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^4a^3b}{t\left(t^6a^6+bt^2\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t^4a^3b}{t^3\left(t^4a^6+b\right)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{ta^3b}{t^4a^6+b}=0\forall a,b$$

$$\text{si } y=x^3\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{x^6}{x^6+x^6}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\neq f(0,0)\Rightarrow f \text{ no es continua en } (0,0)$$

15 Sea $f(x,y)=x^{1/3}y^{1/3}$

15.1 Usando la definición de derivada direccional mostrar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

y que $\pm e_1,\pm e_2$son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

$$v=(a,b)\wedge||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(tatb)^{1/3}}{t}=\begin{cases}a,b\neq0 & \to\infty\\ a=0\vee b=0 & 0\end{cases}\lim_{t\to0}\frac{(ab)^{1/3}}{t^{1/3}}$$

$$\therefore\left(\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0\Leftrightarrow a=0\vee b=0\Leftrightarrow v=(\pm1,0)\vee v=(0,\pm1)\right)\wedge\left(\nexists\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\,\forall a,b\neq0\right)$$

15.2 Mostrar que f es continua en $(0,0)$

$$x^{1/3}\text{ es continua en }\mathbb{R}^2\wedge y^{1/3}\text{ es continua en }\mathbb{R}^2\Rightarrow x^{1/3}y^{1/3}\text{ es continua en }\mathbb{R}^2$$

Part III
Diferenciabilidad

16 Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciablidad de la siguientes funciones en el origen:

16.1 $f(x,y,z)=\sqrt{|xyz|}$

$$xyz\text{ es continua }\Rightarrow|xyz|\text{ es continua }\Rightarrow\sqrt{|xyz|}\text{ es continua}$$

$$v=(a,b,c)\,/||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(at,bt,ct)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{|t^3abc|}}{t}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2\,|tabc|}}{t}=\lim_{t\to0}\sqrt{|tabc|}=0$$

$$f(x,y,z)\text{ diferenciable }\Leftrightarrow\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)(y)-\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)(z)}{||(x,y,z)||}=0$$

$$\frac{\sqrt{|xyz|}}{||(x,y,z)||}\leq\frac{\sqrt{|xyz|}}{||(x,y,z)||}\leq\frac{\sqrt{||(x,y,z)||^3}}{||(x,y,z)||}=\sqrt{||(x,y,z)||}$$

$$0\leq\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sqrt{|xyz|}}{||(x,y,z)||}\leq\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\sqrt{||(x,y,z)||}\leq0\to\sqrt{|xyz|}\geq0\wedge||(x,y,z)||\geq0\Rightarrow\frac{\sqrt{|xyz|}}{||(x,y,z)||}\geq0$$

$$\therefore\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sqrt{|xyz|}}{||(x,y,z)||}=0\Rightarrow f(x,y,z)\text{ es diferenciable}$$

16.2 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(4\arctan\frac{y}{x}\right) & \textbf{si } x\neq 0\\ 0 & \textbf{si } x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(4\arctan\frac{y}{x}\right)=(\to 0)*\sin\left(4\arctan\left(\to\infty\right)\right)=(\to 0)*\sin\left(4\left(\to\frac{\pi}{2}\right)\right)=0=f(0,y)\Rightarrow \text{ es continua}$$

$$v=(a,b)\,/||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{at\sin(4\arctan\frac{bt}{at})}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} a\sin(4\arctan\frac{b}{a})=a\sin(4\arctan\frac{b}{a})\Rightarrow\begin{cases}\nexists\frac{\partial f}{\partial x}(0,0):a=1,b=0 & \sin(4\arctan 0)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0):a=0,b=1 & 0\sin(4\arctan\frac{1}{0})\text{ no está definida la división por 0}\end{cases}$$

$$\therefore\text{ no es diferenciable ya que }\nexists\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

¿Puede ser que la derivada parcial en x tampoco esté definida? No veo como, pero wolfamalpha dice eso.

16.3 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \textbf{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\text{si } y=\sqrt[3]{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{x^2+x^{\frac{2}{3}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2-1\right)}{x\left(x+x^{\frac{1}{3}}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+x^{\frac{1}{3}}}=\infty\Rightarrow\text{No es continua en }(0,0)$$

$$v=(a,b)\,/||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3\left(a^3-b^3\right)}{t^2\left(a^2+b^2\right)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}=\begin{cases}a=1,b=0: & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1\\ a=0,b=1: & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1\end{cases}$$

No es continua por lo tanto no será diferenciable.

16.4 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textbf{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textbf{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$0\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|\leq\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{||(x,y)||^2}{||(x,y)||}=||(x,y)||$$

$$\therefore\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}||(x,y)||=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\text{Es continua}$$

$$v=(a,b)\,/||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{abt^2}{t\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\begin{cases}a=0\vee b=0\Rightarrow & 0*\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{a^2+b^2}}\right)=0\\ a,b\neq 0\Rightarrow & \text{oscila}\end{cases}\to\text{ya que }\nexists\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{t\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

No es diferenciable porque no todas sus derivadas direccionales existen.

16.5 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \textbf{si } y\neq 0\\ 0 & \textbf{si } y=0\end{cases}$

$$\text{si } x=y:\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\to\nexists\therefore\text{no es continua}$$

$$v=(a,b)\,/||v||=1:\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a}{b}\sin\left(\frac{1}{bt}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{bt}\right)\to\nexists\therefore\text{No tiene derivadas direccionales}\Rightarrow\text{no es diferenciable.}$$

17 Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales pero no es diferenciable.

$$0 \leq \left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||(x,y)||^2}{||(x,y)||} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)|| \leq 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow \text{Es continua}$$

$$v = (a,b) \,/ ||v|| = 1 : \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(at,bt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{|at|bt}{t\sqrt{a^2+b^2}}}{t} = \lim_{t\to0} \frac{|at|b}{t} = \lim_{t\to0} \frac{|t||a|b}{t} \to \nexists$$

$$\therefore \text{No tiene derivada direccional} \Rightarrow \text{no es diferenciable}$$

18 Sea $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$

18.1 Encontrar las ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t+1, 3, f(t+1,3)) \text{ y } \sigma_2(t) = (t+1, t+3, f(t+1, t+3))$$

Resolución tangente σ_1:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}(t_0 = 0) = \left(1, 0, \frac{df}{dt}(1,3)\right); f(1,3) = 1 - 9 + 9 = 1$$

$$\frac{df}{dt}(1,3) = \lim_{t\to0} \frac{f(1+t,3) - f(1,3)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^2 - 3(1+t)3 + 3^2 - 1}{t} =$$

$$\lim_{t\to0} \frac{(1+t)^2 - 9t - 1}{t} = \lim_{t\to0} \frac{t^2 + 2t + 1 - 9t - 1}{t} = -7$$

$$\text{tangente } \sigma_1(1,3,1) : (1,3,1) + \lambda(1,0,-7)$$

Resolución tangente σ_2:

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}(t_0 = 0) = \left(1, 1, \frac{df}{dt}(1,3)\right)$$

$$\frac{df}{dt}(1,3) = \lim_{t\to0} \frac{f(1+t, 3+t) - f(1,3)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^2 - 3(3+t)(1+t) + (3+t)^2 - 1}{t} = \lim_{t\to0} \frac{1 + 2t + t^2 - 3(3 + 4t + t^2) + 9 + 6t + t^2 - 1}{t}$$

$$\lim_{t\to0} \frac{2t + t^2 - 9 - 12t - 3t^2 + 9 + 6t + t^2}{t} = \lim_{t\to0} 2 - 12 + 6 + 5t = -4$$

$$\text{tangente } \sigma_2(1,3,1) : (1,3,1) + \lambda(1,1,-4)$$

18.2 Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x,y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{||(x,y) - (1,3)||} = 0$$