1 Resolver las siguientes inecuaciones

1.1 $|x+3|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3>1 \Rightarrow & x<-2 \\ x+3<-1 \Rightarrow & x>-4 \end{cases}$

1.2 $|3x-1| \leq |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge 3x-1 \leq x-1 \Rightarrow & x>\frac{1}{3} \wedge x \geq 1 \wedge x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ 3x-1>0 \wedge x-1<0 \wedge 3x-1 \leq -x+1 \Rightarrow & x>\frac{1}{3} \wedge x<1 \wedge x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \\ 3x-1 \leq 0 \wedge x-1 \geq 0 \wedge -3x+1 \leq x-1 \Rightarrow & x \leq \frac{1}{3} \wedge x \geq 1 \wedge \left(-4x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ 3x-1 \leq 0 \wedge x-1<0 \wedge -3x+1 \leq -x+1 \Rightarrow & x \leq \frac{1}{3} \wedge x<1 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{3}] \end{cases} \therefore x \in [0, \frac{1}{2}]$

1.3 $|x-3| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 1 & x \geq 4 \\ x-3 \leq -1 & x \leq 2 \end{cases} \therefore x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

1.4 ej

$|x| \leq |x+3| \rightarrow$ se resuelve de manera similar al 1.2

1.5 ej

$\left|\frac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{|3x+1|} \Rightarrow$ se indefine para 3x+1=0, el resto es equivalente al 1.2

2 Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

2.1 $\{x : |x-1|<1, x \notin \mathbb{Z}\}$

$$\begin{cases} x-1>0 & x<2 \wedge x>1=(1,2) \\ x-1 \leq 0 & x>0 \wedge x \leq 1=(0,1] \end{cases} \therefore x \in (0,2)$$

2.2 $\{x : |x-3|<|2-x|\}$

Análogo al 1.b

2.3 $\{x : 0<x^2 \leq x^\mathbf{3}\}$

$$\begin{cases} x>1 \Rightarrow & x * x^2 \geq x^2 \\ 0<x \leq 1 \Rightarrow & x * x^2 \leq x^2 \\ \begin{cases} -1<x \leq 0 & x * x^2 \leq x^2 \\ x \leq -1 & x * x^2 \leq x^2 \end{cases} & \rightarrow \text{No incluídos} \end{cases} \therefore \{x : 0<x^2 \leq x^3\} \Leftrightarrow 0<x \leq 1$$

3 Representar los siguientes conjuntos en la recta real (complicado de hacer en latex)

4 Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$* : \text{si } b \leq 0 \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \text{ ya que } sg(a) \neq sg(b)$$

4.1 $|a+b|=|a|+|b|$

$$a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} b \geq 0 & |a+b|=a+b=|a|+|b| \\ b<0 & \text{por}* : |a+b| \leq |a|+|b| \end{cases} \therefore |a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow b \geq 0$$

4.2 $|a+b|<|a|+|b|$

$$\begin{cases} a>0 \wedge b>0 & |a+b|=|a|+|b| \Rightarrow |a+b| \not< |a|+|b| \\ a>0 \wedge b<0 & |a+b|<|a|+|b| \text{ reflexión análoga a } * \end{cases} \therefore |a+b|<|a|+|b| \Leftrightarrow b<0$$

4.3 $|a-b|=|a|+|b|$

$$\begin{cases} b>0 & |a-b|<|a|+|b| \rightarrow \text{ reflexión análoga a } * \\ b \leq 0 & |a-b|=|a+(-b)|=|a|+|b| \end{cases} \therefore |a-b|=|a|+|b| \Leftrightarrow b \leq 0$$

4.4 $|a-b| < |a|+|b|$

Se resuelve con el mismo razonamiento del punto anterior, en este caso el resultado que nos interesa es cuando $b > 0$

$$|a-b| < |a|+|b| \Leftrightarrow b > 0$$

4.5 $||a|-|b|| = |a-b|$

$$\begin{cases} b \geq 0 & |a| = a \wedge |b| = b \Rightarrow ||a|-|b|| = |a-b| \\ b < 0 & |a| = a \wedge |b| = -b \Rightarrow ||a|-|b|| = |a+b| \neq |a-b| \end{cases} \therefore ||a|-|b|| = |a-b| \Leftrightarrow b \geq 0$$

4.6 $||a|-|b|| < |a-b|$

Se resuelve con el mismo razonamiento del punto anterior, en este caso el resultado que nos interesa es cuando $b < 0$

$$b < 0 \Rightarrow ||a|-|b|| = |a+b|$$

$$|a+b| < |a-b| \rightarrow \text{Ya que los signos son opuestos}$$

$$\therefore ||a|-|b|| < |a-b| \Leftrightarrow b < 0$$

5 Sean a y b dos números reales. Decidir para qué valores de a y b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

5.1 $a < a^2$

$$\begin{cases} a < 0 & a \leq |a| \leq a^2 \\ 0 \leq a \leq 1 & a^2 = a.a \leq a \rightarrow \text{ Ya que a reduce a cualquier número, en particular a } a \\ a > 1 & a^2 > a \rightarrow \text{ Ya que a incrementa a cualquier número, en particular a } a \end{cases} \therefore a < a^2 \Leftrightarrow a > 1$$

5.2 $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

$$\begin{cases} a > 1 \wedge a < b \Rightarrow & a * a < b * a \Rightarrow a^2 < b * a < b * b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ 0 \leq a \leq 1 \wedge a < b \Rightarrow & a * a < b * a \Rightarrow a^2 < b * a < b * b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ a < 0 \wedge |a| < |b| \wedge a < b \Rightarrow & |a| * |a| < |b| * |a| \Rightarrow a^2 < |b| * |a| < |b| * |b| \Rightarrow a^2 < b^2 \\ a < 0 \wedge |a| \geq |b| \wedge a < b \Rightarrow & |a| * |a| \geq |b| * |a| \Rightarrow a^2 \geq |b| * |a| \geq |b| * |b| \Rightarrow a^2 \geq b^2 \end{cases} \therefore a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < 0 \wedge |a| \geq |b|$$

5.3 $a > 0 \Rightarrow ab \geq b$

$a > 0$ entonces no cambia el signo de b y aumenta su módulo, por lo que

$$\begin{cases} b \geq 0 \Rightarrow & b * a \geq b \\ b < 0 \Rightarrow & b * a < b \end{cases} \therefore a > 0 \Rightarrow ab \geq b \Leftrightarrow b \geq 0$$

5.4 $a + b \geq max\{a, b\}$

Vamos a analizar las cuatro combinaciones de signos

$$\begin{cases} a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow & a+b \geq a \wedge a+b \geq b \Rightarrow a+b \geq max\{a,b\} \\ a \geq 0 \wedge b < 0 \Rightarrow & a+b < a \wedge a > b \Rightarrow a+b < a = max\{a,b\} \\ a < 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow & a+b < b \wedge b > a \Rightarrow a+b < b = max\{a,b\} \\ a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow & a+b < a \wedge a+b < b \Rightarrow a+b < max\{a,b\} \end{cases} \therefore a+b \geq max\{a,b\} \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

6 Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$

$$x > 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{x^2} = \sqrt{x * x}$$

$$y \geq x \Rightarrow \sqrt{x * x} \leq \sqrt{xy} \Rightarrow x \leq \sqrt{xy}$$

$$x \leq \frac{x+x}{2} \wedge y \geq x \Rightarrow x \leq \frac{x+y}{2}$$

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow x+y \leq y+y \Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y$$

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \sqrt{x * y} \leq \sqrt{y * y} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq |y| = y$$

7 Ej

7.1 Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormenete:

7.1.1 $\mathbb{R}_{>0}$;

Reducción al absurdo, supongo que existe $r \in \mathbb{R}$ supremo.

$$\exists r' = r + 1/r' > r \wedge r' \in \mathbb{R}_{>0} \text{ absurdo } \therefore \mathbb{R}_{>0} \text{ no tiene supremo en los números reales}$$

$$\therefore \mathbb{R}_{>0} \text{ no está acotado superiormente}$$

7.1.2 $A = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}$ con $n = m^2\}$

Reducción al absurdo, supongo que existe $r \in \mathbb{R}$ supremo. Coloquialmente: tomo un natural mayor y lo elevo al cuadrado, este natural pertenecerá a A por definición.

$$\text{como todo real esta a menos de 1 de un natural: } \exists r' > r / r' \in \mathbb{N} \Rightarrow (r')^2 \in A \wedge (r')^2 > r \text{ absurdo}$$

$$\therefore \mathbb{A} \text{ no tiene supremo en los números reales, por lo tanto no está acotado superiormente.}$$

7.2 Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:

7.2.1 $\mathbb{Z}$

$-\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{<0} = \{-1, -2...\} = \{-n/n \in \mathbb{N}\}$. Por el segundo axioma de peano sabemos que todo número de$\mathbb{N}$ tiene un siguiente que pertenece al conjunto.

Para cualquier cota inferior r habrá un último $-n \in \mathbb{Z}/-n > r \wedge n \in \mathbb{N}$, pero por lo antedicho $n+1 \in \mathbb{N}/n+1 > n \Leftrightarrow -(n+1) \in \mathbb{N}/-(n+1) < -n$

$$\therefore -(n+1) < r \text{ lo que es absurdo.}$$

7.2.2 $\{x^{-1} : x < 0\}$;

nota: Supongo que x pertenece a $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^-} x^{-1} = -\infty \Rightarrow x \text{ no está acotado inferiormente en } \mathbb{R}$$

7.2.3 $Im(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

nota: Supongo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sabemos que x^2 cambia más rápido que $2x \therefore x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty \therefore f(x)$ no está acotada inferiormente.

8 Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos calcularlos.

8.1 $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$ y $20 < n \leq 35\}$

No creo que sea necesario otro argumento que el siguiente, ya que el conjunto es acotado por definición.

$$A = \left\{\frac{1}{35}, \frac{1}{34} ... \frac{1}{20}\right\} \Rightarrow \frac{1}{35} \text{ es el máximo (supremo) y } \frac{1}{20} \text{ es el mínimo (ínfimo)}$$

8.2 $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Se puede pensar $A = B \cup C / B = \left\{(B_n) = \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n\%2 = 0\right\}, C = \left\{(C_n) = \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \wedge n\%2 = 1\right\}$

$$B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} ...\right\}, C = \left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} ...\right\}$$

$$\begin{cases} B: & \lim_{n\to\infty}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ C: & \lim_{n\to\infty}(C_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 \end{cases} \therefore A, B, C \text{ son convergentes a } 0$$

$$\begin{cases} B: & \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow B \text{ es estrictamente creciente} \\ C: & -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow C \text{ es estrictamente decreciente} \end{cases}$$

B es estrictamente decreciente y su valor incial (y por lo tanto máximo) es $\frac{1}{2}$

C es estrictamente creciente y su valor inicial (y por lo tanto mínimo) es -1

$$\therefore \text{el máximo (supremo) de A es } A_2 = \frac{1}{2}, \text{ el mínimo (ínfimo) de A es } A_1 = -1$$

8.3 $A = \left\{(A_n) = \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$A = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} ...\right\}; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow (A_n) \text{ es convergente} \because \text{es acotada} \because \text{tiene supremo e ínfimo}$$

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (A_n) \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\therefore \text{máximo}\,(A_n) = 1; \text{ínfimo}\,(A_n) = 0; \text{ como } 0 \notin A \text{ no tiene mínimo}$$

8.4 $A = \left\{(A_n) = \frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{11}, \frac{1}{3} ...\right\}$$

$$\text{por ser cociente de polinomios } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{7n-3} = \frac{2}{7} \Rightarrow (A_n) \text{ es convergente} \because \text{es acotada} \because \text{tiene supremo e ínfimo}$$

[1]

$$A_{n+1}/A_n = \frac{2n+2}{7n+7-3} * \frac{7n-3}{2n} = \frac{14n^2+14n-6n-6}{14n^2+8n} = \frac{14n^2+8n-6}{14n^2+8n} = 1 - \frac{6}{14n^2+8n} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (A_n) \text{ es creciente } \therefore A_1 = \frac{1}{2} \text{ es el mínimo} \wedge \frac{2}{7} \text{ es el supremo, como nunca lo alcanza no tiene máximo.}$$

9 Resolver

9.1 Considerar el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Calcule su supremo y concluya que A no tiene máximo.

$$a \in A \Leftrightarrow a^2 < 2 \Leftrightarrow |a| < \sqrt{2} \Rightarrow \text{supremo de } A = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow A \text{ no tiene máximo.}$$

9.2 Dado el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$, calcule su ínfimo y concluya que B no tiene mínimo.

$$\text{Por el punto anterior y la def. de } B\text{: } 0 < a < \sqrt{2} \Rightarrow \text{ínfimo de } B = 0$$

$$0 \notin A \Rightarrow A \text{ no tiene mínimo.}$$

10 Calcular

10.1 $sup\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$(A_n) = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \frac{49}{128}, \frac{64}{256} = \frac{1}{4}, ...\right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n = \frac{n^2}{2^n} \wedge A_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2.2^n}$$

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} * \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2 * n^2} = \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > 3$$

$$\therefore \forall n > 3 : (A_n) \text{ es decreciente} \Rightarrow sup\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{9}{8}$$

[1] $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{7n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{7n}$ ya que es un cociente de polinomios

10.2 $sup\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$(A_n) = \left\{\frac{\sqrt{2}}{11}, \frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{2}{13}, ...\right\}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n+1}{20(n+1)+81-1+n^2}} = \sqrt{\frac{n+1}{(n+1)*(20+\frac{81}{n+1}+\frac{n^2-1}{n+1})}} = \sqrt{\frac{1}{20+\frac{81}{n+1}+n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{20+\frac{81}{n+1}+n-1}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{10+n}\text{es convergente}\because\text{es acotada}\because\text{tiene supremo e ínfimo}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\sqrt{20+\frac{81}{n+1}+n-1}}{\sqrt{20+\frac{81}{n+2}+n}} = \sqrt{\frac{20+\frac{81}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}+n}{20+\frac{81}{n+2}+n}} = \sqrt{\frac{20+\frac{80-n}{n+1}+n}{20+\frac{81}{n+2}+n}}$$

$$\sqrt{\frac{20+\frac{80-n}{n+1}+n}{20+\frac{81}{n+2}+n}} < 1 \Leftrightarrow \frac{80-n}{n+1} < \frac{81}{n+2} \Rightarrow \text{Resuelvo la inecuación } \frac{80-n}{n+1} < \frac{81}{n+2}$$

$$(n+2)(80-n) < (n+1)81 \Leftrightarrow 80n+160-n^2-2n < 81n+81 \Leftrightarrow -n^2+78n+160-81-81n < 0$$

$$\Leftrightarrow -n^2-3n+79 < 0$$

$$\text{Pruebo algunos números: } \begin{cases} n=7 & -49-21+79=9 \\ n=8 & -64-24+79=-9 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{n+1}}{10+n} \text{ es creciente hasta 7 y luego decrece, convergiendo a 0}$$

$$\therefore A_7 \text{ es el supremo} = \frac{\sqrt{8}}{17} = \frac{2\sqrt{2}}{17}$$

10.3 $\mathbf{inf}\left\{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

$$A_n = \frac{n-3}{2^n}; \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2^n} = 0 \therefore \text{es convergente}\because\text{es acotada}\because\text{tiene supremo e ínfimo}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n-2}{2^{n+1}} * \frac{2^n}{n-3} = \frac{n-2}{2n-6}$$

$$\frac{n-2}{2n-6} > 1 \Leftrightarrow n-2 > 2n-6 \Leftrightarrow n < 4$$

$$\therefore \frac{n-3}{2^n} \text{ es creciente hasta } n=4 \text{ y luego decrece convergiendo a 0}$$

$$\therefore \inf\left\{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = min(A_1, A_2, A_3, 0) = min(\frac{-2}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{0}{8}, 0) = -1$$

10.4 $\mathbf{inf}\{n^2-9n-10 : n \in \mathbb{N}\}$

$$A_n = n^2-9n-10$$

Como es un polinomio (continuo con n$\in\mathbb{R}$) uso el criterio de la derivada para hayar máximos y mínimos:

$$A'_n = 2n-9 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{revriso los valores más cercanos } \in \mathbb{N}: \begin{cases} n=4 & 16-36-10=-30 \\ n=5 & 25-45-10=-30 \end{cases}$$

$$A''_n = 2 \therefore n=4 \wedge n=5 \text{ son mínimos locales} \therefore \inf\{n^2-9n-10 : n \in \mathbb{N}\} = A_{4/5} = -30$$

11 Decidir si las siguientes afirmaciones son verdadras o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):

11.1 Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ **entonces** $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{falso: } a_n = \frac{2n-99}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \wedge a_1 = \frac{-97}{1} < 0$$

11.2 Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $\exists n_0 / a_n > 0 \forall n \geq n_0$

Verdadero: por la definición de límite de sucesiones $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 : |a_n - 2| < \epsilon$

$\Rightarrow$ basta tomar un n_0 lo suficientemente grande para lograr que $a_n > 0$

11.3 Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n < 2$

Falso: sea $a_n = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow a_n < 2 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \not< 2$

11.4 Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n < 2$

Falso: sea $a_n = 2 - \frac{1}{2n} \Rightarrow a_n < 2 - \frac{1}{n} \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \not< 2$

12 Calcular $l = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\epsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\epsilon) / \left|\frac{n+1}{n} - l\right| < \epsilon$ si $n > n_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \rightarrow$ usando el criterio de cociente de polinomios de mismo grado (ver nota al pie #1)

Busco la relación entre n_0y ϵ : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n > n_0 : \frac{n+1}{n} - 1 < \epsilon$

$$\frac{n+1-n}{n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon^{-1} < n$$

ϵ	$0,1$	$0,027$	$0,00001$	10^{-6}
n_0	$0,1^{-1} = 10$	$0,027^{-1} = 37.03 \Rightarrow n_0 = 34$	$0,00001^{-1} = 100000$	10^6

13 Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

13.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$\text{Defino } a'_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \leq a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+1)^2}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{2n} + 1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$a'_n \leq a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

13.2 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

$$\text{Defino } b'_n = \frac{n+1}{n} \geq b_n \text{ y } b''_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} \leq b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} b'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+n+n+1}{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n(n+1)} + 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$b'_n \geq b_n \geq b''_n \wedge \lim_{n\to\infty} b''_n = \lim_{n\to\infty} b''_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

14 Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$

14.1 Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-10}{n+1} = 4 \to \text{por el criterio de límite tendiendo a infinito de cociente de polinomios}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0, |\frac{4n-10}{n+1} - 4| < \varepsilon \to \text{Por definición de límite}$$

$$\text{Si } \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0, |\frac{4n-10}{n+1} - 4| < 1 \Rightarrow 3 < a_n < 5 \to \text{ por definición de distancia}$$

$$\left|\frac{4n-10}{n+1} - \frac{4n+4}{n+1}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{14}{n+1}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{14}{n+1} < 1 \Leftrightarrow 14 - 1 < n$$

$$\therefore \forall n > 13, |\frac{4n-10}{n+1} - 4| < 1 \Rightarrow n_0 = 13$$

14.2 Encontrar, si existen, $max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{4(n+1)-10}{n+2} > \frac{4n-10}{n+1} \Leftrightarrow (4n+4-10)(n+1) > (n+2)(4n-10)$$

$$\Leftrightarrow (4n-6)(n+1) > (n+2)(4n-10) \Leftrightarrow (4n-6)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 6n + 4n - 6 > 4n^2 - 10n + 8n - 20 \Leftrightarrow -2n + 2n - 6 + 20 > 0 \Leftrightarrow 14 > 0$$

$$\therefore a_n \text{ es monótona estrictamente creciente} \therefore min\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a_1 = \tfrac{4-10}{2} = -3$$

$$sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = 4 \to \text{ por ser convergente y monótona creciente}$$

Como es creciente: $\nexists a_n / a_n = 4 \to$ porque entonces para los siguientes números se alejaría del 4 y no sería convergente, como se probó.

$$\therefore 4 \notin (a_n) \Rightarrow \nexists max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

15 Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{R}/a_0 > b_0 > 0$. Se consideran las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

15.1 $a_n \geq b_n \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + b_n}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{b_n}{2a_n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$$

$$\text{Si fuera cierto que: } \frac{a_n + b_n}{2a_n} \geq \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \Rightarrow \frac{a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n}{4a_n^2} \geq \frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow \left(a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n\right) * b_n \geq 4a_n^2 a_n$$

$$a_n^2 b_n + b_n^3 + 2a_n b_n^2 \geq 4a_n^3$$

$$\begin{cases} a_n^2 b_n \leq & a_n^3 \\ b_n^3 \leq & a_n^3 \\ 2a_n b_n^2 \leq & a_n^3 \end{cases} \Rightarrow a_n^3 + a_n^3 + 2a_n^3 \geq 4a_n^3 \Rightarrow a_n^3 + a_n^3 + 2a_n^3 \geq 4a_n^3$$

15.2 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + b_n}{2a_n} < 1 \Rightarrow \text{es decreciente } (a_n + b_n < 2a_n)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} > 1 \Rightarrow \text{es creciente}$$

16 Sea a_0 un número positivo. Se define la siguiente sucesión dara por recurrencia:

$$a_{n+1} = sen(a_n)$$

Probar que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y calcular su límite.

$$\text{Sabemos que } sen(x) \leq x \forall x > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \text{ la suecesión es monótona decreciente}$$

17 Resolver

17.1 Probar que $\left(\sum_{j=0}^{n} q^j\right) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\text{Demuestro por inducción: } \begin{cases} P(1): & \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q^1}{1-q} = 1; \sum_{j=0}^{0} q^j = q^0 = 1 \\ P(n) \Rightarrow P(n+1): & \left(\sum_{j=0}^{n} q^j\right) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\sum_{j=0}^{n+1} q^j\right) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

17.2 Calcular $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$ y $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 7 * 2^{-j} = 7 * 2^0 + 7 * 2^{-1} + ... + 7 * 2^{-n} = 7(2^0 + 2^{-1} + ... + 2^{-\infty})$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{2}; a_0 = 7 + 7\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 7 + 7\left(\frac{1}{2} * \frac{2}{1}\right) = 14 \rightarrow \text{aplicando la suma de términos infinitos de una progresión geométrica}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} 3 * 4^{-j} = 3 * \left(4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} ... + 4^{-\infty} - 4^{-1}\right) = 3 * \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) - \frac{3}{4} = 3 * \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4-1}{4}}\right) - \frac{3}{4}$$

$$= 3 * \left(\frac{1}{4} * \frac{4}{3}\right) - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

18 Resolver

18.1 Probar que $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$. Sugerencia: Sumar el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + n - 3 + n - 2 + n - 1 + n = n + 1 + n + 1 + ... + n + 1 + n + 1 \rightarrow \text{hago lo sugerido, quedan } \frac{n}{2} \text{ términos}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

18.2 Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Sea

$$a_n = \frac{k_1 + ... + k_n}{k_n^2}$$

Probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$

$$\forall i \leq n, k_i \leq k_n \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{k_n^2}$$

¿?¿?¿?¿?¿?¿?¿?¿?

19 Resolver las siguientes ecuaciones e einecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

Esto no tiene mucho sentido resolverlo acá.

20 Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ y $||x||_\infty = max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$. Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

20.1 $|x_i| \leq ||x||_2$, si $i = 1, ..., n$;

$$\forall i = 1, ..., n; \sqrt{x_1^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2} = ||x||_2$$

$$x_1^2, ..., x_i^2, ..., x_n^2 \geq 0 \Rightarrow |x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2} \rightarrow \text{Ya que quito términos mayores o iguales que cero}$$

$$\therefore |x_i| \leq ||x||_2$$

20.2 $||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty$;

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2} \leq \sqrt{||x||_\infty^2 + ... + ||x||_\infty^2} \rightarrow \text{ ya que } ||x||_\infty^2 \text{ es mayor o igual que cada } x_i$$

$$\sqrt{||x||_\infty^2 + ... + ||x||_\infty^2} = \sqrt{n\,||x||_\infty^2} = \sqrt{n}\,||x||_\infty$$

$$\therefore ||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty$$

20.3 $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty$

$$||x||_\infty \in \{x_1, ..., x_n\} \Rightarrow ||x||_\infty \leq ||x||_2 \rightarrow \text{ por lo expuesto en el punto (a)}$$

$$||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty \rightarrow \text{ por lo expuesto en el punto (b)}$$

$$\Rightarrow ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}\,||x||_\infty \rightarrow \text{ Por definición de orden, o bien propiedad transitiva de la desigualdad.}$$

21 Representar gráficamente los siguientes conjuntos A.

Tampoco tiene sentido resolverlo en el latex directamente, si luego investigo el tema podría armar los gráficos.

22 Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados y/o acotados:

22.1 $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

$$X = (x, y) \in K_1 \Rightarrow \exists B_{1-||X||}(X) / \forall Y \in B_{1-||X||}(X) : ||Y||_2 < ||X|| + 1 - ||X|| = 1$$

$$\therefore ||Y||_2 < 1 \Rightarrow Y \in K_1 \Rightarrow K_1 \text{es un conjunto abierto.}$$

$$||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \Rightarrow K_1 \text{ es acotado}$$

22.2 $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\text{Tomo el complemento } \overline{K_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$X = (x, y) \in \overline{K_2} \Rightarrow \exists B_{||X||-1}(X) / \forall Y \in B_{1-||X||}(X) : 1 < ||Y||_2 < ||X|| + 1 = 1 \rightarrow$$

Es decir: su norma es menor a la norma de X menos la distancia entre X y K_2

$$\therefore ||Y||_2 > 1 \Rightarrow Y \in \overline{K_2} \Rightarrow \overline{K_2} \text{ es un conjunto abierto} \Rightarrow K_2\text{, que es su complemento, es un conjunto cerrado.}$$

$$\forall X = (x, y) \in K_2 : ||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow K_2 \text{es acotado.}$$

¿?¿?¿? creo que falta un argumento no geométrico para la cuestión de $1 < ||Y||_2$

22.3 $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \land y > 0\}$

$$X = (x,y) \in K_3 \Rightarrow \exists B_{min(|x|,|y|)}(X) / \forall Y = (y_1, y_2) \in B_{min(|x|,|y|)}(X) : y_1 > ||X|| - min(|x|,|y|) \land x_1 > ||X|| - min(|x|,|y|)$$

$$||X|| \geq ||X||_\infty \geq min(|x|,|y|) \Rightarrow ||X|| - min(x,y) \Rightarrow y_1 > 0 \land y_2 > 0$$

$$\therefore Y \in K_3 \Rightarrow K_3 \text{es un conjunto abierto.}$$

$$x, y \in (0, +\infty) \Rightarrow \text{ no es un conjunto acotado.}$$

22.4 $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

No es abierto ya que cualquier bola que se tome tendrá números reales dentro, y estos no pertenecen a K_4

$$\text{Su complemento es } \overline{K_4} = R^2 - \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

Se me ocurre como justificación que es un abierto sin algunos puntos, y esto es siempre otro conjunto abierto...

22.5 $K_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \land y = 0\}$

No es abierto ya que cualquier bola que se tome tendrá $y \neq 0$, y estos no pertenecen a K_5

$$\text{Su complemento es } \overline{K_5} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \lor x > 1 \land y \neq 0\}$$

$$\forall X \in \overline{K_5} : \begin{cases} x < 0 \Rightarrow & \exists B_{min(|x|,|y|)}(X) / \forall Y \in B_{min(|x|,|y|)}(X) : ||Y|| > |X| - min(|x|,|y|) \\ x > 1 \Rightarrow & \exists B_{min(|x|-1,|y|)}(X) / \forall Y \in B_{min(|x|-1,|y|)}(X) : ||Y|| > |X| - min(|x|-1,|y|) \end{cases}$$

$$||X|| \geq ||X||_\infty \geq min(|x|,|y|) \Rightarrow |X| > 0$$

UFffffffffffffffff

23 Calcular $\partial A, \overline{A}, \overline{A} \backslash A$ y $A \backslash \partial A$ para los conjuntos A que aparecen en el ejercicio 21

(a)