1 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir S en la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y$ Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

Sabemos que $\nabla f(x, y, z)$ es la normal a $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1$ Geométricamente se puede pensar que $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertenece a la superficie de la esfera, por lo tanto la recta en la dirección del radio (en este caso la del vector homónimo) será normal al plano tangente.

Analíticamente sabemos que el gradiente es la normal a la superficie, por lo tanto:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{1}{2}v$$

$$\therefore v \parallel \nabla f(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow v \text{ es normal a la superficie de } f(x, y, z) = x^2 \acute{+} y^2 + z^2 = 1 \blacksquare$$

$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un punto de la curva de nivel $=1$, el gradiente es perpendicular a la curva en todo punto, entonces es normal al plano tangente a la curva, en ese punto.

2 Consideremos la superficie $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Probar que las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t\,(0, 1, 1) + (1, 0, 0) \text{ y } \mathbb{L}_2 : t\,(0, 1, -1) + (1, 0, 0)$$

son ortogonales y están contenidas en S. Usar esto para hallar la ecuación del plano tangente a S en $(1, 0, 0)$.

$$\langle (0, 1, 1), (0, 1, -1) \rangle = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{Son ortogonales}$$

$$\mathbb{L}_1 = \{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

$$\mathbb{L}_2 = \{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = t \\ z = -t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\text{Reemplazo en la ecuación de } S \to \mathbb{L}_1 : 1 + z^2 - z^2 = 1 \wedge \mathbb{L}_2 : 1 + (-z)^2 - z^2 = 1$$

$$\therefore \mathbb{L}_1 \subset S \wedge \mathbb{L}_2 \subset S$$

$$f(1, t, -t) = 1 + t^2 - (-t)^2 = 1 \forall t \therefore L_2 \in S$$

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1} * v_2 \vec{=} 0$$

$$(0, 1, 1) * (0, 1, -1) = 0 + 1 - 1 = 0 \blacksquare$$

3 Calcular la ecuación del plano tangente (T) y de la recta normal (N), si existen, a las superficies en los puntos indicados.

3.1 $f(x, y, z) = x^{10}y - cos(z)x = -7 \ x_0 = (7, 0, 0)$

$$\nabla f(7, 0, 0) = \begin{pmatrix} -cos(0) & 7^{10} & sen(0) * 7 \end{pmatrix} = (-1, 7^{10}, 0) = (-1, 7^{10}, 0)$$

$$N = t(-1, 7^{10}, 0)$$

$$T : (-1, 7^{10}, 0) * (x - 7, y, z) = 0 \Rightarrow T = -x + 7 + 7^{10}y = 0$$

3.2 $f(x, y, z) = xy - zln(y) + e^{xy} = 1 \ x_0 = (0, 1, 1)$

$$\nabla f(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} y + ye^{xy} & x - \frac{z}{y} + xe^{xy} & -ln(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{(0,1,1)} = \begin{Bmatrix} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 1 \end{Bmatrix}$$

$$T : (2, -1, 0) * (x, y - 1, z - 1) = 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow T : x = 0$$

3.3 $f(x,y,z) = xy * sen(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \; x_0 = (4,0,1)$

$$\nabla f(4,0,1) = \begin{pmatrix} y * sen(y) + zye^{xy} & sen(y) * x + xy * cos(y) + zxe^{xy} & e^{xy} - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N_{(4,0,1)} = \begin{Bmatrix} x = t + 4 \\ y = 4t \\ z = -1t + 1 \end{Bmatrix}$$

$$T :< (1,4,-1), (x,y,z) - (4,0,1) >= 0 \Rightarrow x - 4 + 4y - z + 1 = x + 4y - 3 = 0$$

3.4 $f(x,y,z) = cos(x) * cos(y)e^z = 0 \; x_0 = (\frac{\pi}{2}, 1, 0)$

$$\nabla f(\frac{\pi}{2}, 1, 0) = \begin{pmatrix} -sen(x)cos(y)e^z & -sen(y)cos(x)e^z & cos(x) * cos(y)e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cos(1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_{(\frac{\pi}{2},1,0)} = \begin{Bmatrix} x = -cos(1)t + \frac{\pi}{2} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{Bmatrix}$$

$$T :< (-cos(1), 0, 0), (x,y,z) - (\frac{\pi}{2}, 1, 0) >= 0 \Rightarrow -cos(1)(x + \frac{\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

4 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : h(x,y,z) = f(x,y) - z$

$$h(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0 \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{El plano tangente T a } f \text{en } (x_0, y_0) \text{está dado por } < \nabla f(x_0, y_0), (x, y) + (x_0, y_0) >= 0$$

$$\Rightarrow T : \frac{df}{dx}(x_0, y_0) * (x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0) * (y - y_0) + f(x_0, y_0) = z$$

$$\Rightarrow T : \frac{df}{dx}(x_0, y_0) * (x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0) * (y - y_0) + h(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x_0, y_0) = 0$$

$$\therefore h(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = \text{ es entonces el caso particular en que las derivadas son 0}$$

5 Encontrar $P = (x_0, y_0, z_0)$ donde $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\right\}$ es paralelo a $\prod : x + 4y + 6z = 8$

$$T \text{ tangente en } P \text{a } S \Leftrightarrow T :< \nabla f(P), (x,y,z) + P) >= 0$$

$$< \nabla f(P), (x,y,z) + P) >=< (2x_0, 4y_0, 6z_0), (x + x_0, y + y_0, z + z_0) >= 0$$

6 $E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$

$$\text{Tesis: } P = (a,b,c) \in E \Rightarrow -P \in E$$

6.1 Es trivial porque $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{16} + c^2 = \frac{(-a)^2}{9} + \frac{(-b)^2}{16} + (-c)^2$

6.2 Los planos son paralelos si sus normales son paralelas:

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla f(-P)$$

$$\frac{2}{9}a(x + a) + \frac{1}{8}b(y + b) + 2c(z + c) \text{ y } -\frac{2}{9}a(x - a) - \frac{1}{8}b(y - b) - 2c(z - c)$$

$$N_1 = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{8}, 2\right) \text{ y } N_2 = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{8}, -2\right) = N_1 * -1 \blacksquare$$

6.3 La unica manera en que $\nabla f(P) = \lambda \nabla f(Q)$ es que $P = -Q$

$$\begin{array}{l} a = \lambda a' \\ b = \lambda b' \Rightarrow \lambda = -1 \text{ ya que no hay otras soluciones que pertenzcan a E (se ve al reemplazar en la def de E).} \\ c = \lambda c' \end{array}$$

$$\therefore Q = -P \; \blacksquare$$

7 ¿$f(x) = x^5 + x^3 + x$ biyectiva? ¿$f^{-1}(x)$ es diferenciable? Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico f^{-1}

$x^5 + x^3 + x \in R$ es biyectiva $\Rightarrow f(x)$ es biyectiva.

Por el teorema de la función inversa, $f(x)$ es inversible en un entorno $U \subseteq D, V \subseteq Im$

Como es un poliniomio biyectivo $U = D = R$ y$V = Im = R$

$$D(f^{-1}(x)) = \frac{1}{5y^4 + 3y^2 + 1} \Rightarrow D(f^{-1}(3)) = \frac{1}{9}$$

$$T : f^{-1}(3) + D(f^{-1}(3)) * (x - 3) = 1 + \frac{1}{9}(x - 3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}x$$

8 $f(x) = -3x^7 - x^5 + 6x^{\mathbf{3}} - x + e^x + 1$ →tiende a menos infinito cuando

$f'(x) = -21x^6 - 5x^4 + 18x^2 - 1 + e^x$ Si tomo un x suficientemente grande e crece más rápido por ser exponencial

$x > M = 22$ es una función estrictamente creciente $\therefore \exists f^{-1}$ con el dominio de f acotado a ese intervalo

9 Sea

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 3x - 2y & 5x - 2y \end{pmatrix} \Rightarrow u = 3x - 2y \quad v = 5x - 2y$$

$$y = \frac{3x - u}{2} \Rightarrow v = 5x- \Rightarrow x = \frac{v - u}{2} \therefore y = \frac{3(\frac{v-u}{2}) - \frac{2u}{2}}{2} = \frac{3v - 3u - 2u}{2 * 2} = \frac{3v - 5u}{4}$$

$$T^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{v-u}{2} & \frac{3v-5u}{4} \end{pmatrix}$$

$$DT(a) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow DT^{-1}(a) = \frac{1}{det(DT(a))} * \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore DT^{-1}(a) = \frac{1}{-6 + 10} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Corroboro derivando la inversa que calculé: $DT^{-1}(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

10 Determinar si son localmente inversibles de clase C^1 en a y calcular la diferencial de F^{-1}en $F(a)$

10.1 $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $a = (x, y) \neq (0, 0)$

$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow$ Tiene $det \neq 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$y derivadas continuas en todo R

$$DF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{4x^2+4y^2} & \frac{2y}{4x^2+4y^2} \\ -\frac{2y}{4x^2+4y^2} & \frac{2x}{4x^2+4y^2} \end{pmatrix}$$

10.2 $F(x, y) = (senx, cos(xy))$ en $a = (\pi, \pi/2)$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} cosx & 0 \\ -ysen(xy) & -xsen(xy) \end{pmatrix}$$

Pendiente por apuro

11 Encontrar $y = f(x,z)$ para $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en:

11.1 (0,1,1)

$$|y| = \sqrt{z^3 - x^2}$$

$$D \subseteq U = B_{0,1}(0,1) y > 0, z^3 > x^2 \Rightarrow y = \sqrt{z^3 - x^2} \text{ es continua}$$

$$1 = \sqrt{1-0}$$

$$D \subseteq U = B_{0,1}(2,2) \wedge Im = B_{0,1}(1) \subseteq\Rightarrow y < 0 \wedge z^3 > x^2$$

$$\therefore y = -\sqrt{2^3 - 2^2} = -2$$

12 ... voy a empezar a saltear ejercicios ...

13 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$dada por $F(x,y) = (e^x cosy, e^x seny)$ Probar que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x,y)\ det(DF(x,y)) \neq 0$ y no es inyectiva.

$$\forall y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ F(x,y) = (0,0) \therefore \text{no es inyectiva}$$

$$det(DF(x,y)) = \begin{vmatrix} e^x cosy & -e^x seny \\ e^x seny & e^x cosy \end{vmatrix} = (e^x cosy)^2 + (e^x seny)^2 \neq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Ya que no se pueden anular simultáneamente el coseno y el seno de un ángulo y ambos términos son positivos.

14 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$

14.1 Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en $(1,1,1)$

$$x^3 - 2y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2y^2 - z^2} = \varphi(y,z)$$

14.2 Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3} 4y(2y^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}} \bigg|_{(1,1)} = \frac{1}{3} 4(2-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1) = -\frac{1}{3} 2z(2y^2 - z^2)^{-\frac{2}{3}} \bigg|_{(1,1)} = -\frac{2}{3}$$

15 salteado

16 salteado

17 salteado

18 salteado

19 Dadas dos superficies S_1 y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas implícitamente

$$\begin{cases} S_1 : & F(x,y,z) = 0 \\ S_2 : & G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

con $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones C^1. $S_1 \cap S_2$ es una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y sea $\sigma(t_0) = P_0 \in S_1 \cap S_2$. Probar que si el J parcial

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) = det \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}$$

entonces se puede despejar $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno de P_0 de modo diferenciable y valen las fórmulas

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

$$J($$