1 Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

1.1 $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$

$$\ln(t) \text{ está definido } \forall t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 16 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow 16 > x^2 + y^2$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 16 > x^2 + y^2\}$$

1.2 $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

$$\sqrt{t} \text{ está definido } \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow 6 - (2x + 3y) \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x + 3y$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 6 \geq 2x + 3y\}$$

1.3 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{y - x^2}$

$$\sqrt{t} \text{ está definido } \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \wedge \frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow y - x^2 > 0 \wedge \sqrt{1 - x^2 - y^2} \neq 0$$

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 \neq ||(x,y)||^2$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 > 0 \wedge 1 \neq ||(x,y)||^2\}$$

1.4 $f(x,y) = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$$

1.5 $f(x,y) = \frac{\ln(1-y+x^2)}{\sin x}$

$$\ln(t) \text{ está definido } \forall t \in \mathbb{R}^+ \wedge \frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow 1 - y + x^2 > 0 \wedge \sin x \neq 0$$

$$1 > y - x^2 \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 1 > y - x^2 \wedge \neg x \equiv 0(\pi)$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 > y - x^2 \wedge \neg x \equiv 0(\pi)\}$$

1.6 $f(x,y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow 1 + t^2 \neq 0 \Rightarrow |t| \neq -1$$

$$\therefore D = \mathbb{R}$$

1.7 $f(x,y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2+y^2}}$

$$\frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2 + y^2} \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq x^2 - y^2$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \neq x^2 - y^2\}$$

1.8 $f(x,y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

$$\ln(t) \text{ está definido } \forall t \in \mathbb{R}^+ \wedge \frac{1}{t} \text{ está definido } \forall t \neq 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \wedge \ln(1 - x^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1 \wedge 1 - x^2 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \wedge x \neq 0$$

$$\therefore D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1 \wedge x \neq 0\}$$

2 Para distintos valoresw de c graficar (nop).

3 Estudiar las superifcies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones de determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$

3.1 $z = 2x^2 + y^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

3.2 $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$

$$|z| = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{2}} \Rightarrow z = -z \Rightarrow f(x, y) \text{ tendría 2 imágenes para el mismo valor } \therefore \text{no es función}$$

$$\text{ej: } x = 0, y = 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{1} \Rightarrow z = 1 \vee z = -1$$

3.3 $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}/f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

3.4 $3x + 2y - z = 0$

$$z = 2y + 3x \Rightarrow f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x, y) = 2y + 3x$$

3.5 $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} - 2$

$$|z| = \sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} - 2}$$

$$\text{Si } x = 4, y = \sqrt[3]{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{8 - 1 - 2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \nexists f(4, \sqrt[3]{3}) = z \Rightarrow \nexists f(x, y) = z$$

3.6 $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$6x^2 + y^2 + 1 = z^2 \Leftrightarrow \sqrt{6x^2 + y^2 + 1} = |z|$$

$$\text{Si } x = 1, y = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{6 + 2 + 1} = |z| \Leftrightarrow z = \pm 3 \Rightarrow \nexists f(1, \sqrt{2}) = z \Rightarrow \nexists f(x, y) = z$$

3.7 $x^2 + y^2 = 4z^2$

$$|z| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \Rightarrow \nexists f(x, y) = z$$

4 Para distintos valores de u graficar aproximadamente el conjunto $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = u\}$. En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

4.1 $f(x, y, z) = x + y + z$

- otro de graficar, no -

5 A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

5.1 $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$?

Ninguna distancia bastará, ya que $\frac{1}{\sqrt{16}} \notin \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ cualquier distancia de 16 tendrá puntos donde $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \left(0, \frac{1}{2}\right)$

5.2 $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right)$?

Como la función es continua $\forall x \neq 0$ sabemos que $\lim_{x \to 16} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon(\delta) \wedge |x - 16| < \delta$

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < 4^2 \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{7}{20} \Leftrightarrow x > \frac{400}{49} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > 4^2 \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} > -\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{20} \Leftrightarrow x < \frac{400}{9} \end{cases}$$

$$\therefore x \in \left(\frac{400}{49}, \frac{400}{9}\right)$$

5.3 $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000}\right)$?

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < 4^2 \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{251}{1000} \Leftrightarrow x > \left(\frac{1000}{251}\right)^2 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > 4^2 \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4} > -\frac{1}{1000} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{249}{1000} \Leftrightarrow x < \left(\frac{1000}{249}\right)^2 \end{cases}$$

$$\therefore x \in \left(\left(\frac{1000}{251}\right)^2, \left(\frac{1000}{249}\right)^2\right)$$

6 Se define $[x]$ la parte entera de x como $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Analizar la existencia de $\lim_{x\to a} f(x) \forall a \in \mathbb{R}$ siendo:

6.1 $f(x) = x - [x]$

$$\lim_{x\to a} x - [x] = \lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} [x] = a - \lim_{x\to a} [x] \to \text{ El límite de la resta es la resta de los límites; la función identidad es continua.}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \begin{cases} a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow & \lim_{x\to a} [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\} \\ a \in \mathbb{Z} \Rightarrow & \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\} = \begin{cases} \lim_{x\to a^+} [x] = & n_1 > a \to \text{me acerco por valores mayores que a} \\ \lim_{x\to a^-} [x] = & n_2 = a \to \text{me acerco por valores menores que a} \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore \exists \lim_{x\to a} x - [x] = a - \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\} \Leftrightarrow a \notin \mathbb{Z}$$

6.2 $f(x) = \frac{x}{[x]}$

$$\lim_{x\to a} \frac{x}{[x]} = \frac{\lim_{x\to a} x}{\lim_{x\to a} [x]} = \frac{a}{\lim_{x\to a} [x]} \to \text{El límite del cociente es el cociente de los límites; la función identidad es continua.}$$

$$\lim_{x\to a} [x] \neq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x > 1 \to \text{Por def de } [x] : 0 \leq x < 1, [x] = 0$$

$$\text{Por lo dicho antes } \forall a \in \mathbb{Z} : \lim_{x\to a^+} [x] \neq \lim_{x\to a^-} [x] \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} [x]$$

$$\therefore \exists \lim_{x\to a} \frac{x}{[x]} = \frac{a}{\max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}} \Leftrightarrow a \notin \mathbb{Z} \wedge 0 \leq a < 1$$

6.3 $f(x) = |x| + [x]$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| + \lim_{x\to a} [x] = |a| + \lim_{x\to a} [x] \to \text{El límite de la suma es la suma de los límites; la función módulo es continua.}$$

$$\text{Por lo dicho antes } \forall a \in \mathbb{Z} : \lim_{x\to a^+} [x] \neq \lim_{x\to a^-} [x] \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} [x]$$

$$\therefore \exists \lim_{x\to a} \frac{x}{[x]} = |a| + \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\} \Leftrightarrow a \notin \mathbb{Z}$$

7 Calcular, si existen, los siguientes límites:

7.1 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x} = \frac{\lim_{x\to+\infty} (e^x + \sin x)}{\lim_{x\to+\infty} (e^x + \cos x)} = 1 \to$$

Esto se debe a que algo que tiende a infinito no es modificado por algo acotado, es decir $e^x + \sin x \to e^X$ cuadno $x \to \infty$

De la misma manera $e^x + \cos x \to e^X$ cuadno $x \to \infty$

$$\therefore \frac{\lim_{x\to+\infty} (e^x + \sin x)}{\lim_{x\to+\infty} (e^x + \cos x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Tarea: Demostrarlo por definición, acotando.

7.2 $\lim_{x\to3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$

$$\lim_{x\to3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9} = \frac{\lim_{x\to3^+} [x^2] - \lim_{x\to3^+} [x]^2}{\lim_{x\to3^+} (x^2 - 9)} \to \text{Por álgebra de límites}$$

$$\lim_{x\to3^+} [x^2] = 10; \lim_{x\to3^+} [x]^2 = 4^2; \lim_{x\to3^+} \left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\lim_{x\to3^+} [x^2] - \lim_{x\to3^+} [x]^2}{\lim_{x\to3^+} (x^2 - 9)} = \frac{10 - 16}{\lim_{x\to3^+} (x^2 - 9)} = \frac{-6}{\lim_{x\to3^+} (x^2 - 9)}$$

$$\frac{-6}{\to 0} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9} = -\infty$$

7.3 $\lim_{x\to+\infty} x\sin x$

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} x\sin x \text{ ya que } \sin x \text{ oscila entre } -1 \text{y } 1 \text{y } x \text{es continua}$$

7.4 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)} \to \text{Aplico L'Hopital y veo los dos casos posibles}$$

$$\to \begin{cases} x\to 0^+ & \lim_{x\to 0^+} \frac{-1x^{-2}e^{x^{-1}}}{x^{-1}} = -x^{-2+1}e^{x^{-1}} = -\frac{e^{x^{-1}}}{x} \\ x\to 0^- & \lim_{x\to 0^-} \frac{-1x^{-2}e^{x^{-1}}}{-x^{-1}} = x^{-2+1}e^{x^{-1}} = \frac{e^{x^{-1}}}{x} \end{cases}$$

$\ln(a) = 1/x \Leftrightarrow e^{1/x} = a \Leftrightarrow e = a^x \Leftrightarrow a =$
$\ln(|x|) = a \Leftrightarrow e^a = |x|$
INCOMPLETO

7.5 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sin x \to (-1,1)}{\lim_{x\to+\infty} x\to\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \to \text{Argumento similar al del punto (a) y álgebra de límites}$$

7.6 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} \to \text{Aplico L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1-1}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x} \to 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$$

$\ln(1+e^x) = a \Leftrightarrow e^a = 1+e^x \to$ Tiene sentido que el límite sea 1 ya que $1+e^x \to e^x$ cuando $x\to\infty$ y entonces $\ln(1+e^x) = a = x$

7.7 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x} = \left(\lim_{x\to 0}(1+x)\right)^{\lim_{x\to 0}(1/\tan x)} = 1^{\lim_{x\to 0}(1/\tan x)\to+\infty} = 1$$

DUDOSO

7.8 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1 \to \text{Aplico L'Hopital}$$

7.9 $\lim_{\,x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

$$\lim_{\,x\to 0}(\cos x)^{1/x}$$

8 Resolver

8.1 Usando sólo la definición de límite demostrar que:

8.1.1 $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x+y = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x+y = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)/|x+y-1|<\varepsilon \wedge ||(x,y)-(1,0)||<\delta$$

$$|x-1+y| \le ||(x-1,y)|| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall\varepsilon\exists\delta(\varepsilon) = \varepsilon/|x-1+1|<\varepsilon \Rightarrow ||(x,y)-(1,0)||<\varepsilon$$

8.1.2 $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon)/|xy+8| < \varepsilon \wedge ||(x,y)-(-1,8)|| < \delta$$

$$||(x,y)-(-1,8)|| = ||(x+1,y+8)|| \leq \delta$$

$$(x+1)*(y-8) = xy + y - 8x - 8$$

$$|xy+8| \leq |xy + (8x-8x) + (y-y) + 8| \leq |(x+1)(y-8) + 8x - y + 16|$$

$$|xy-8| \leq |(x+1)(y-8)| + 8x - y \leq ||(x+1,y-8)||^2 + 8x + 8 + 8 - y$$

$$|xy-8| \leq ||(x+1,y-8)||^2 + 8|x+1| + |8-y| \leq ||(x+1,y-8)||^2 + 8||(x+1,y-8)|| + ||(x+1,y-8)|| < \varepsilon$$

$$\delta + 8\delta + \delta = 10\delta < \varepsilon \to 0 < \delta < 1 \Rightarrow \delta^2 < \delta$$

$$\therefore \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{10}, 1\right)$$

9 Probar por definición que si $(x,y) \to (2,3) \Rightarrow y\sin(xy-6) \to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\sin(xy-6) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(2,3)} y\sin(xy-6) \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon)/|y\sin(xy-6)| < \varepsilon \wedge ||(x,y)-(2,3)|| < \delta$$

$$||(x,y)-(2,3)|| < \delta \Leftrightarrow |x-2| < \delta \wedge |y-3| < \delta$$

$$(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$$

$$|y\sin(xy-6)| \leq |y||\sin(xy-6)| = |y||\sin((x-2)(y-3) + 3x + 2y - 12)|$$

$$\leq |y||\sin\left(\delta^2 + 3\delta + 2\delta\right)| = |y|\sin(6\delta) \to 0 < \delta < 1 \Rightarrow \delta^2 < \delta \wedge 2 < y < 4$$

$$|y\sin(xy-6)| \leq 4\sin(6\delta) < \varepsilon$$

$$\therefore \delta < \frac{\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{4}}{6}$$

10 Probar que:

10.1 $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$

$$\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = \lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(7,2)} y^2 - \lim_{(x,y)\to(7,2)} xy = 49 + 4 - 14 = 39$$

10.2 $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \sin(x\cos y) = 0$

$$\sin\left(\lim_{(x,y)\to(0,3)} (x\cos y)\right) = \sin(0 * \cos 3) = 0$$

10.3 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$

$$\left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} x\right) e^{\lim_{(x,y)\to(0,3)} xy} = 0 * e^0 = 0$$

10.4 $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2 + cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2 + cos(\pi - x)}{y} = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,3)} y^2 + \lim_{(x,y)\to(0,3)} cos(\pi - x)}{\lim_{(x,y)\to(0,3)} y} = \frac{9 + cos(\pi)}{3} = \frac{8}{3}$$

10.5 $\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = \left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x\right) = e^0 = 1$$

10.6 $\lim_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2-y^2} = 0$ si $c \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2-y^2} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon)/\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2-y^2}\right| < \varepsilon \wedge ||(x-c,y)|| < \delta$$

$$\lim_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2-y^2} = \begin{cases} c = 0 \Rightarrow & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2-y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2-y^2)} \begin{cases} y = \frac{1}{x} \Rightarrow & \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-\frac{1}{x^2}} \to -\infty \\ y = 2x \Rightarrow & \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{-3x^2} = 0 \end{cases} \\ c \neq 0 \Rightarrow & \frac{\lim_{(x,y)\to(c,0)}\left(\sin(x^2y)\right)}{\lim_{(x,y)\to(c,0)}(x^2-y^2)} = \frac{\sin(c^2 0)}{c^2} = 0 \end{cases}$$

11 Resolver

11.1 Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que f no se anula sobre $B_r(a,b)\backslash\{(a,b)\}$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Probar que :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

Demostración:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon)/|f(x,y)| < \varepsilon \wedge ||(x,y)-(a,b)|| < \delta$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon\exists\delta/\delta < \varepsilon \therefore ||(x,y)-(a,b)|| \leq |f(x,y)|$$

Es decir, para todo $f(x,y)$ puedo encontrar una norma que se acerque más a 0.

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = \lim_{||(x,y)-(a,b)||\to 0} \frac{\sin(||(x,y)-(a,b)||)}{||(x,y)-(a,b)||}$$

Por cálculo elemental sabemos que $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1 \Rightarrow \lim_{||(x,y)-(a,b)||\to 0} \frac{\sin(||(x,y)-(a,b)||)}{||(x,y)-(a,b)||} = 1$

no me convence del todo, pero me parece bien encaminada...

11.2 Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}/\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0$$

Es similar a la anterior

12 Calcular:

12.1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(||(x,y)||^2)}{||(x,y)||^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta(\varepsilon)/\left|\frac{\sin(||(x,y)||^2)}{||(x,y)||^2} - 1\right| < \varepsilon \wedge ||(x,y)|| < \delta$$

$$(x,y) \to 0 \Rightarrow ||(x,y)||^2 \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(g(x,y))}{g(x,y)} \to g(x,y) = ||(x,y)||^2$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(g(x,y))}{g(x,y)} = 1 \text{ fue demostrado en el punto anterior}$$

12.2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)y}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 1 \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

Usando lo demostrado en el punto 11-a

12.3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{||(x,y)||^2\to 0} \frac{\ln(||(x,y)||^2)}{\frac{1}{||(x,y)||^2}} = \lim_{||(x,y)||^2\to 0} \frac{\frac{2}{||(x,y)||}}{-\frac{2}{||(x,y)||^3}} =$$

$$\lim_{||(x,y)||^2\to 0} \frac{2}{||(x,y)||} * -\frac{||(x,y)||^3}{2} = \lim_{||(x,y)||^2\to 0} -||(x,y)||^2 = 0$$

Debería revisar por qué puedo usar álgebra de límites de $\mathbb{R}$, a pesar de que sea evidente que es razonable.

13 Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

13.1 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1\neq\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1\therefore \text{ no existe el límite en } (0,0)$$

13.2 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\begin{cases}x=y & \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\\ 2x=y & \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2+4x^2}=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

13.3 $f(x,y)=\frac{\sin x}{y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin x}{y}\right)\to\text{indeterminado };\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{y}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{y}=\begin{cases}x=y & \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\ 2x=y & \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x}{y}$$

13.4 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\to x=y\quad\frac{x^2y^2}{x^2y^2}=1$$

$$\therefore\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

13.5 $f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{-x}=\lim_{x\to 0}-x\frac{\sin(x^2)}{x^2}=0;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}=\begin{cases}x=y\quad\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(2x^2)}{x^2}=2\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}=2\end{cases}$$

$$\therefore\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$$

13.6 $f(x,y)=|x|^y$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}|x|^y\right)=1;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}|x|^y\right)=0$$

$$\therefore\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|^y$$

13.7 $f(x,y)=\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{x^2}=0;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right)=0$$

$$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\frac{\sin(x^3+y^3)}{||(x,y)||^2}\leq\frac{\sin(2||(x,y)||^3)}{||(x,y)||^2}=\frac{2||(x,y)||\sin(2||(x,y)||^3)}{2||(x,y)||^3}\to\forall||(x,y)||^3<1$$

$$\Rightarrow 0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2||(x,y)||\sin(2||(x,y)||^3)}{2||(x,y)||^3}=0$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$$

¡Preguntar!

13.8 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)^{x^2y^2}\right)=1;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x^2+y^2)^{x^2y^2}\right)=1$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)/\left|(x^2+y^2)^{x^2y^2}-1\right|<\varepsilon\wedge||(x,y)||<\delta$$

$$\left|(x^2+y^2)^{x^2y^2}-1\right|\leq||(x,y)||^{2||(x,y)||}-1=$$

¡PREGUNTAR!

13.9 $f(x,y)=\frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+1}{x^2}+\infty;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}\right)=-\frac{1}{y^2}=-\infty$$

$$\therefore\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$$

13.10 $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\to\text{Indeterminado};\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\to\text{Indeterminado}$$

$$\begin{cases}\lim_{(x,y)\to(0,0)^+} & +\infty\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)^-} & -\infty\end{cases}\therefore\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

13.11 $f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{|x|+|y|}\right)=0;\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{|x|+|y|}\right)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}=0$$

$$0\leq\left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right|\leq\frac{||(x,y)||^2}{|x|+|y|}\leq||(x,y)||*\frac{||(x,y)||}{|x|+|y|}\leq||(x,y)||\to\frac{||(x,y)||}{|x|+|y|}\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}||(x,y)||=0$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|}=0$$

13.12 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}*\frac{\sqrt{y^2+1}+1}{\sqrt{y^2+1}+1}=\frac{y^2(1+\sqrt{y^2+1})}{y^2+1-1}=1+\sqrt{y^2+1}=2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)/\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|<\varepsilon\wedge||(x,y)||<\delta$$

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|=\left|\frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}-2\right|=\sqrt{x^2+y^2+1}-1\to\sqrt{x^2+y^2+1}>1$$

$$\sqrt{x^2+y^2+1}-1\leq\sqrt{x^2+y^2}+1-1=||(x,y)||<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta=\varepsilon/\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|<\varepsilon\wedge||(x,y)||<\delta\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$$

13.13 $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x\ln(x^2+y^2)\right) = \lim_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x^2}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2x}{x^2} * x^2 = -2x = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\ln(x^2+y^2)\right) = 0$$

$$0 \le \left|x\ln(x^2+y^2)\right| \le \left|\ln\left(||(x,y)||^{2||(x,y)||}\right)\right| \to 0 \text{ si } ||(x,y)|| \to 0$$

Aux:

$$\lim_{x\to 0} x^{2x} = \exp^{\lim_{x\to 0} 2x\ln x} = \exp^{2\lim_{1/t\to+\infty}\frac{\ln\left(t^{-1}\right)}{t}} = \exp^{2\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t}} = \exp^0 = 1$$

13.14 $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right) = \lim_{x\to 0} x^2\ln x^2 = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right)$$

$$0 \le \left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right| \le \left|\ln\left(||(x,y)||^{2||(x,y)||}\right)\right| \to 0 \text{ si } ||(x,y)|| \to 0 \to \text{Demostrado en el punto anterior}$$

$$\text{Uso que } ||(x,y)||^2 \le ||(x,y)||\forall||(x,y)|| \le 1$$

13.15 $f(x,y) = x\sin\frac{\pi}{y} + y\sin\frac{\pi}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x\sin\frac{\pi}{y} + y\sin\frac{\pi}{x}\right), \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{y} + y\sin\frac{\pi}{x}\right) \to \text{Indeterminados}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{\pi}{y} + y\sin\frac{\pi}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{\pi}{y}\frac{\frac{\pi}{y}}{\frac{\pi}{y}}\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(y\sin\frac{\pi}{x}\frac{\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{y}x\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{x}y\right)\begin{cases} x = y & \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{x}x\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{x}x\right) = 2\pi \\ 2x = y & \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{x}2x\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\pi}{x}2x\right) = 4\pi \end{cases}$$

$$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{\pi}{y} + y\sin\frac{\pi}{x}$$

13.16 $f(x,y) = \sin\frac{x}{y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\sin\frac{x}{y}\right) \to \text{Indeterminado}; \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\frac{x}{y} : x = y \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin 1 = \sin 1$$

$$\sin 1 \ne 0 \therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\frac{x}{y}$$

14 Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualqueir recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$

14.1 $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

$$y = kx \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^4\,(kx)^4}{(x^2+(kx)^4)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{k^4x^8}{(x^2+k^4x^4)^3} = \lim_{x\to 0}\frac{k^4x^8}{x^6+3x^4k^4x^4+3x^2k^8x^8+k^{12}x^{12}} \to 0$$

Por ser cociente de polinomios conel denominador de mayor grado.

$$x = y^2 \Rightarrow \frac{y^8y^4}{(y^4+y^4)^3} = \frac{y^{12}}{8y^{12}} = \frac{1}{8} \ne 0 \therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$$

14.2 $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$

$$y = kx \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+k^2x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+k^2x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(x(k+1)-1)} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x-x} = 1 \ne 0 \therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$$

14.3 $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

$$y=kx \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\,(kx)^2}{x^2+(kx)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{xk^2x^2}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(1+k^4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+k^4x^2}=0$$

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{xx}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq 0 \therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

14.4 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y)y}{x^4} & \textbf{si } 0<y<x^2\\ 0 & \textbf{en otro caso}\end{cases}$

$$0<y=kx<x^2\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-kx)kx}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-k)kx}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{kx-k^2}{x^2}=0$$

$$y=x\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)x}{x^4}$$

¿Esto no tiende a cero?

15 Para cada una de las siguientes funciones:

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada cunto de su dominio.
- En los puntos de discontinuidad indicar de qué tipo se trata. En los puntos que no pertenezcan al dominio definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

15.1 $f(x)=\frac{1}{2}\sin^2(x)$

- $D=\mathbb{R}$
- No presenta discontinuidades: sin es una función continua y solo usa operaciones algebraicas continuas.

15.2 $f(x)=x^2-[x^2]$

- $D=\mathbb{R}$
- Es discontinua en $\mathbb{Z}$, continua en todo el resto del dominio.
- Habría que redefinir el operador [] para subsanar la disconuidad. No es posible redefinirla, los límites laterales son diferentes y cualquier valor que se le asigne mantendrá la discontinuidad.

15.3 $f(x)=\begin{cases}x & \textbf{si } x\in\mathbb{Q}\\ -x & \textbf{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

- $D=\mathbb{R}$
- Es discontinua en todos los puntos, en cualquiera de ellos cualquier bola tendrá puntos pertenecientes y no pertenecientes al dominio.
- Habría que redefinir una de las dos parte de la función. No es posible redefinirla, siempre habrá puntos no pertenecientes al dominio.

15.4 $f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/2) & \textbf{si } |x|\le 1\\ |x-1| & \textbf{si } |x|>1\end{cases}$

- $D=\mathbb{R}$
- Será continua $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}|x-1|=\lim_{x\to 1^-}\cos(\pi x/2)\wedge \lim_{x\to -1^-}|x-1|=\lim_{x\to -1^+}\cos(\pi x/2)$

$$\lim_{x\to 1^+}|x-1|=0=\lim_{x\to 1^-}\cos(\pi x/2)$$

$$\lim_{x\to -1^-}|x-1|=|-2|\neq \lim_{x\to -1^+}\cos(\pi x/2)=0\Rightarrow \text{No es continua en }-2\text{, es continua en los demás puntos del dominio}$$

- Se podría salvar al discontinuidad redefiniendo el valor en un entorno de -2

15.5 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \textbf{si } x>0\\ x^2+1 & \textbf{si } x\le 0\end{cases}$

- $D=\mathbb{R}$
- Es continua $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}x^2+1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to 0^-}x^2+1 \therefore \text{Es continua en todo su dominio}$$

16 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

16.1 Probar que f no es continua en $(-1,0)$.

$$\frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3} \leq \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3} \leq sg(x+1)\frac{y^4}{(x+1)^2} \leq sg(x+1)\frac{||(x+1,y)||^4}{||(x+1,y)||^2} = sg(x+1)||(x+1,y)||^2 = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left| \lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(-1,0)} ||(x+1,y)||^2 \leq 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3} = 0 \neq 1 \Rightarrow f \text{ no es continua}$$

16.2 Redefinirla en $(x,y) = (-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 0 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

17 Consideremos la función

$$f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

17.1 Calcular su dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \vee y \neq 0\}$$

17.2 Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Esto se debe a que el límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es 0.

18 Estudiar la continudad de las siguientes funciones en los puntos indicados

18.1 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \textbf{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{1} = 1 = f(1,0) \Rightarrow \text{ Es continua en } (1,0)$$

$$\begin{cases} y = 2x & \lim_{x\to 0} \frac{x-2x}{x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{5x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{5x} = \infty \end{cases}$$

$$\therefore f(x,y) \text{ no es continua en } (0,0)$$

18.2 $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \wedge y > -1; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$

En entornos de los puntos pedidos la función está definida y no presenta discontinuidades:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} |y|^x(1+x)^y = f(1,0) = |0|^1(1+1)^0 = 1 \Rightarrow \text{ Es continua en } (1,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} |y|^x(1+x)^y = f(0,2) = |2|^0(1+0)^2 = 1 \Rightarrow \text{ Es continua en } (0,2)$$

18.3 $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$

$$\sin \text{ y } \cos \text{ son funciones continuas en } \mathbb{R} \Rightarrow f(x,y) = \sin(x\cos y) \text{ es continua en } (1,1) \text{ y } (0,2)$$

18.4 $f(x,y)=\begin{cases} x+y & \textbf{si } x\neq 0 \textbf{ e } y\neq 0; \\ 1 & \textbf{en otro caso} \end{cases}$ **en** $(0,0)$ **y** $(1,1)$;

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x+y=f(x,y)=2\Rightarrow f(x,y) \text{ es continua en } (1,1)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y=0\neq f(x,y)\Rightarrow \text{ no es continua en } (0,0)$$

18.5 $f(x,y)=\begin{cases} 1 & \textbf{si } xy\neq 0; \\ 0 & \textbf{si } xy=0; \end{cases}$ **en** $(1,0)$ $(-1,2)$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} 1=1\neq f(1,0)\Rightarrow \text{ no es continua en } (1,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} 1=f(-1,2)\Rightarrow \text{ es continua en } (-1,2)$$

19 Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x,y)\to(0,0)$.

$$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{|x-y|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{|x-y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)xy}{|x-y|\,xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x-y|}$$

1.

$$\text{Si } y=\frac{x}{x+1}\Rightarrow x>y\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x-y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{\left|x-\frac{x}{x+1}\right|}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{\left|\frac{x(x+1)-x}{x+1}\right|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x+1}*\left|\frac{x+1}{x\,(x+1-1)}\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x}{x}\right|=1$$

$$\to \text{Puedo agrandar el módulo porque es producto y } \frac{x^2}{x+1}>0$$

$$\text{Si } x=2y\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x-y|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2y^2}{|y|}=\frac{2|y|^2}{2|y|}=0$$

$$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{|x-y|}$$

20 Analizar la existencia del límite en el origen para

$$f(x,y)=\frac{e^{\left(x^2+y^3\right)}-1}{xy-x+y^2}$$

$$0\leq\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{\left(x^2+y^3\right)}-1}{xy-x+y^2}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{e^{\left(x^2+y^3\right)}-1}{x(y-1)}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{e^{2||(x,y)||}-1}{x(y-1)}\right|\leq\frac{\left(e^{||(x,y)||}+1\right)\left(e^{||(x,y)||}-1\right)}{x(y-1)}$$

$$e^{||(x,y)||}>1>y\Rightarrow\left|\frac{\left(e^{||(x,y)||}-1\right)}{(y-1)}\right|>1\Rightarrow$$

preguntar

21 Estudiar la continuidad de f en el puinto $(1,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si } (x,y)\neq(1,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

$$0\leq\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left|\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left|\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2\frac{1}{2}}\right|\to x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left|\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{\frac{1}{2}\,||(x-1,y)||^2}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left|\frac{||(x-1,y)||^{\frac{7}{3}}}{\frac{1}{2}\,||(x-1,y)||^2}\right|=\lim_{(x,y)\to(1,0)}2\,||(x-1,y)||^{\frac{1}{3}}\leq 0$$

$$\therefore\left|\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|}\right|=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|}=0$$

22 Estudiar la continuidad de f en el origen de coordenadas.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2-\tan\left(x^2y\right)}{\frac{1}{2}x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$0\leq\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2-\tan\left(x^2y\right)}{\frac{1}{2}x^2+y^2}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy^2-\tan\left(x^2y\right)}{\frac{1}{2}\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^2}\right|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}2\left|\frac{\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3+\frac{\sin\left(\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3\right)}{\cos\left(\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3\right)}}{\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^2}\right|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}2\left|\left|\left|x^2+y^2\right|\right|+\frac{\sin\left(\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3\right)}{\cos\left(\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3\right)\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^2}\frac{\left|\left|x^2+y^2\right|\right|}{\left|\left|x^2+y^2\right|\right|}\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2\left|\left|\left|x^2+y^2\right|\right|+\frac{\left|\left|x^2+y^2\right|\right|}{\cos\left(\left|\left|x^2+y^2\right|\right|^3\right)}\right|=0$$

$$\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2-\tan\left(x^2y\right)}{\frac{1}{2}x^2+y^2}\right|=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2-\tan\left(x^2y\right)}{\frac{1}{2}x^2+y^2}=0$$

23 Probar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

$$\text{La afirmación equivale a }\left(\lim_{x\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0\right)\wedge\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}\neq0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{y^2}=0;\lim_{y\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{x^2}=0$$

$$x=y\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1\neq0\to\nexists\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2+x^2}$$

$$\therefore\left(\lim_{x\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0\right)\wedge\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}\neq0$$

24 Demostrar que si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $x=a$ y la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y). Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=g(x)\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{x\to a}g(x)=g(a)\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=g(a)=f(a,b)$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)\to f\text{ es continua }\forall b\in\mathbb{R}$$

24.1 $f(x,y)=\sin(x)$.

$$\sin(x)\text{ es continua en }\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\sin(x)=\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)=f(a,b)$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)\Rightarrow f\text{ es continua}$$

24.2 $f(x,y)=\sin(x^2)+e^y$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\sin(x^2)+\lim_{(x,y)\to(a,b)}e^y\to\text{ El límite de la suma es la suma de los límites}$$

$$\sin(x^2),e^y\text{ son continuas }\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(a,b)}\sin(x^2)+\lim_{(x,y)\to(a,b)}e^y=\sin a^2+e^b$$

$$\therefore\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\sin a^2+e^b=f(a,b)\Rightarrow f\text{ es continua en todo }\mathbb{R}^2$$

25 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

25.1 $f(x,y) = (x^2, e^x)$

$$x^2, e^x \textbf{ son continuas } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x,y) = \left(x^2, e^x\right) \textbf{ es continua en todo } \mathbb{R}^2$$

Fundamentalmente por lo demostrado en el punto anterior

25.2 $f(x,y) = \left(\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \text{ es cociente de funciones continuas, pero se indefine en } (0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} \text{ es continua } \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ si se redefine el valor en 0a 0}$$

$$\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$

26 Resolver:

26.1 Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x)^2 - e^x = 0$