

关于二次无约束二进制优化问题的难度

V. Mehta 与 F. Jin

德国尤利希研究中心尤利希超级计算中心高级模拟研究所, 邮编D-52425, 尤利希

K. Michielsen

德国尤利希研究中心尤利希超级计算中心高级模拟研究所, 邮编D-

52425, 尤利希

德国尤利希AIDAS公司, 邮编52425, 以及

亚琛工业大学, 德国亚琛市, 邮编52056

H. 德·雷特

德国尤利希研究中心尤利希超级计算中心先进模拟研究所, 邮编D-

52425, 德国尤利希, 及泽尔尼克先进材料研究所,

荷兰格罗宁根大学, 尼恩堡4号, NL-9747

AG 格罗宁根, 荷兰 (日期: 2022年6月24

日)

我们采用精确枚举法, 通过邻近解的汉明距离分布来刻画变量数少于21的二次无约束二进制优化问题的解。我们还使用D-Wave Advantage 5.1量子退火器进行了实验, 解决了多达170个变量的二次无约束二进制优化问题实例。实验结果表明, 描述D-Wave退火器解决二次无约束二进制优化问题成功概率的指数, 与基于小型问题实例计算的汉明距离分布所作预测高度吻合。

I. 引言

优化是科学、工程、金融、运筹学等领域解决问题的核心方法。其基本思想是为描述问题的每个变量赋予成本值, 并试图使该成本最小化。其中尤为重要的是所谓离散优化问题, 即部分或全部变量取值范围限定在有限集合内。离散优化问题通常具有NP难特性[1], 简言之, 这意味着在数字计算机上求解此类问题所需的资源将随变量数量呈指数级增长。

许多离散优化问题可重构为二次无约束二进制优化 (QUBO) 问题[2,3]。求解QUBO问题实质上是寻找使成本函数最小化的 N 个二进制变量 $x_i = 0, 1$ 的取值。

$$\text{Cost}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} Q_{i,j} x_i x_j, \quad x_i = 0, 1, \quad (1)$$

其中 $Q_{i,j} = Q_{j,i}$ 是 $N \times N$ 的对称浮点数矩阵。

随着D-Wave系统公司研发的量子退火器问世[4,5], 将离散优化问题表述为量子半整数优化问题 (QUBO) 的研究近期日益受到关注。理论上[6], 量子退火器利用绝热定理[7]来求解由哈密顿量定义的伊辛模型的基态

将 $S_i = 1 - 2x_i = \pm 1$ 代入式(2)得

$$H = \text{Cost}(x_1, \dots, x_N) - C_0, \quad (3)$$

式(1)中 Q 与 J, h', s 之间的关系, 以及 C_0 之间的关系给出在附录A中。

显然, 变换 $S_i = 1 - 2x_i = \pm 1$ 不改变优化问题的本质。在其他情况下

换言之, 最小化量子布朗尼奥米特方程(1)的成本函数与求解伊辛模型方程(2)的基态同样困难。当前可用的量子退火硬件通常能在微秒级时间内求解变量数约200个或更少的全连接问题中的(2)式基态[4,5], 速度相当快。这表明随着更大规模量子退火器的问世, 它们有望在相对较短的实际时间内解决大型QUBO问题。

尽管变换 $S_i = 1 - 2x_i = \pm 1$ 不会改变优化问题的本质, 但该公式——

将特定优化问题转化为量子二进制优化问题 (QUBO)

例如, 2-可满足性问题 (2SAT) [1] (参见第二节A) 可通过计算资源线性增长与二进制变量数量的方式求解[8-10]。然而, 当2SAT问题被转换为QUBO/伊辛模型时, 其允许高效求解的特殊特性便不复存在。事实上, 等效的QUBO模型通过模拟退火等方法求解时会变得极其困难[11]。另一方面, 构造出基态极易求解的伊辛模型也并非难事。

鉴于量子退火器在不久的将来解决大型量子二进制优化问题 (QUBO) 的潜力, 探究量子退火器解决QUBO问题/寻找基态的预期成功程度具有重要意义。

$$H = \sum_{1=i < j=N} J_{i,j} S_i \cdot S_j + \sum_{i=1} h_i S_i , \quad (2) \quad \text{对应的伊辛模型, 而无需实际进行实验。}$$

本文证明，至少存在三类不同的量子非确定性优化问题（QUBO），它们通过以下方式区分：

1. D-Wave退火器找到伊辛模型基态/求解QUBO的成功概率。
2. 针对相对较小且具有代表性的问题实例计算的基态与最低激发态之间汉明距离分布。

我们证明，这些汉明距离分布的差异与D-Wave量子退火器寻找基态的成功概率的尺寸依赖性缩放相关。

本文结构如下：第二部分介绍所分析的三类不同QUBO问题；第三部分简要回顾三种求解QUBO实例的方法；第四、五部分分别呈现并讨论汉明距离分布、能级间距分布及量子退火实验结果；第六部分总结研究发现。

II. 二次无约束二进制优化问题

A. 2-可满足性问题

将二进制变量赋值以满足变量对约束的问题称为2-可满足性问题[1]。2SAT是更广泛的布尔可满足性问题（涉及超过两个变量的约束）的特例。与已知NP完全的3SAT等问题不同，2SAT可在多项式时间内求解。最高效的算法可将2SAT的求解时间缩短至变量数量的线性倍[8–10]。

一个2SAT问题由 N 个二进制变量 $x_i = 0, 1$ 及 M 个子句的合取式定义，该合取式构成了二进制值成本函数：

$$\begin{aligned} C &= C(x_1, \dots, x_N) \\ &= (L_{1,1} \vee L_{1,2}) \wedge (L_{2,1} \vee L_{2,2}) \wedge \dots \wedge (L_{(M-1),1} \vee L_{(M-1),2}), \quad (4) \end{aligned}$$

其中字面量 $L_{\alpha,j}$ 表示 $x_{i(\alpha,j)}$ 或其否定 $\bar{x}_{i(\alpha,j)}$ ，其中 $\alpha = 1, \dots, M$ 且 $j = 1, 2$ 。函数 $i(\alpha, j)$ 将索引对 (α, j) 映射到二进制变量的索引 i 。

x_i 若能找到至少一种 x_i 的赋值方案使成本函数 C 成立，则2SAT问题可满足。

求解2SAT问题等价于寻找伊辛自旋哈密顿量的基态[2, 11, 12]

$$H_{2SAT} = \sum_{\alpha=1}^M h_{2SAT}(\varepsilon_{\alpha,1} S_i(\alpha,1), \varepsilon_{\alpha,2} S_i(\alpha,2)), \quad (5)$$

其中 $\varepsilon_{\alpha,j} = +1(-1)$ 若 $L_{\alpha,j}$ 表示 x_i (x_i)且 $-$

$$h_{2SAT}(S_l, S_m) = (S_l - 1)(S_m - 1), \quad S_m, S_l = \pm 1. \quad (6)$$

通过分组与重新排列项，式(5)可表示为

$$H_{2SAT} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} S_i S_j + \sum_{i=1}^N h_i S_i + C_1, \quad (7)$$

其中 C_1 为无关常数。因此求解式(4)中的2SAT问题等价于求解式(7)定义的QUBO问题。值得注意的是：若仅给定QUBO问题而未知其源自2SAT问题，则无法确定该QUBO能否在 N 线性时间内求解。

构造2SAT问题较为简单，但随着 N 值增大，寻找具有唯一已知基态且第一激发态高度简并的2SAT问题会迅速变得困难[11]。我们已生成15组满足上述条件的2SAT问题，每组对应特定 N 值（ N 范围为6至20，子句数 $M=N+1$ ）。这些问题的表示图并非完全连通，即并非所有边权重 $J_{(i,j)}$ 均非零。

对于我们的2SAT问题集， h_i 和 $J_{i,j}$ 可取-2到2之间的整数值。

B. 完全连接自旋玻璃

自旋玻璃模型由哈密顿量式(2)定义。计算基态配置通常极为困难。为验证某自旋配置具有最低能量，需满足：能量，通常需要遍历所有 $2^N - 1$ 种其他构型来验证其是否确实具有最低能量。此处的限定词“一般而言”至关重要，因为存在某些情况（例如当所有 $J_{i,j} = 0$ 时），基态便可轻易求得。为有效排除此类可轻易求解的问题，我们采用均匀（伪）随机数生成器。在区间 $[-1, +1]$ 内为所有 $J_{i,j}$ 及所有 h_i 赋值。 h_i 赋值。其中任一 $J_{i,j}$ 为零的概率极低微小，故称其为“全连接自旋玻璃”。下文将以此方式生成的模型实例集合称为RAN问题。

C. 完全连接的规则自旋玻璃模型

在开发基于QUBO的应用程序以评估大型GPU集群性能的过程中（参见附录B），我们偶然发现由式(2)定义的自旋玻璃态（其中

$$\begin{aligned} J_{i,j} &= 1 - (i + j - 2)/(N - 1), \quad i \neq j, \\ h_i &= 1 - 2(i - 1)/(N - 1), \end{aligned} \quad (8)$$

似乎具有特殊结构。注意其阶为 N

$J_{i,j}, S_i$ 为零。

尽管我们尚未能给出适用于所有 N 的证明，但在 $N \leq 200$ 的范围内，我们尚未发现任何反例来反驳以下猜想：具有式(8)所给参数的伊辛模型的基态由式(8)给出的参数的伊辛模型的基态由 $(S_1 = -1, \dots, S_k =$

$-1, S_{k+1} = 1, \dots, S_N = 1$) 或等效地 ($x_1 = 1, \dots, x_k = 1, x_{k+1} = 0, \dots, x_N = 0$) 其中 k 是使

$$f(k) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} Q_{i,j} = \frac{k(N-k)(N-2k+2)}{N-1}. \quad (9)$$

因此，尽管我们解决的是完全连接的量子化二进制优化问题，但若我们的猜想成立，则对于任意 N 值其解都极易求得。我们将由式(8)定义的特殊完全连接正则自旋玻璃问题称为REG问题。

由式(2)可立即得出：对所有随机反转自旋，并将 h_j 替换为 $-h_j$ 、 $J_{i,j}$ 替换为 $-J_{i,j}$ ，不会改变QUBO问题的基态能量。

将此类“规范变换”应用于随机选取的自旋集合后，可生成数学等价的REG问题集。该特性结合由于基态已知（至少在 $N \leq 200$ 范围内），REG问题非常适合用于常规和量子硬件的测试与基准评估。

，适用于传统与量子硬件的双重测试。

III. 量子博斯问题求解方法

我们采用三种不同方法解决QUBO问题。

1. 名为QUBO22的计算机代码利用GPU和/或CPU解决QUBO、多项式无约束二进制优化(PUBO)及精确覆盖问题(经重新表述为QUBO)。QUBO22

该算法通过枚举二进制变量 x_1, \dots, x_N 的所有 2^N 种可能取值，同时追踪能产生最小、次小及最大成本的 x 配置组合。QUBO22 算法显然总能找到真实基态。求解QUBO 所需的算术运算次数与

$N(N-1)2^N$ 。基于现有超级计算机的运算能力，随 N 指数级增长的计算量限制了QUBO22的应用范围，仅适用于规模 $N \leq 56$ 的问题。

为计算激发态与基态之间的汉明距离及能级间距分布，必须追踪大量不同状态。为此，我们采用另一套同样基于全枚举的编码方案，该方案在实际应用中可轻松处理 $N=20$ 以内的计算问题。

2. 启发式方法解决QUBO问题所需的时间远少于QUBO22。然而，启发式方法无法保证返回QUBO问题的解(尽管它们通常能做到)。在我们的研究中，采用D-Wave提供的启发式求解器qbsolv计算所有问题实例的基态。对于QUBO22可解的问题，qbsolv与QUBO22获得的基态结果一致。在所有RAN和REG问题($N \leq 200$)中，qbsolv与D-Wave优势求解器4.1混合求解器所获得的基态也完全一致。

3. 我们使用D-Wave Advantage 5.1量子退火器解决了所有问题实例。我们计算

通过使用qbsolv获得的基态来计算成功概率。随后利用成功概率数据分析其作为函数的标度行为
问题规模为 N 。

IV. 汉明距离与级间距

两个等长比特串(或S字符串)之间的汉明距离定义为对应比特(S)不同的位置数量。针对本数据集中的每个问题，我们通过精确枚举法找出最多6037个最低能态。基于这些数据，我们计算了基态与这些激发态之间的汉明距离。

本节仅展示从2SAT、RAN和REG类中各选取一个具有代表性的 $N=20$ 问题的结果。其他 $N=20$ 实例的图表呈现相似趋势。

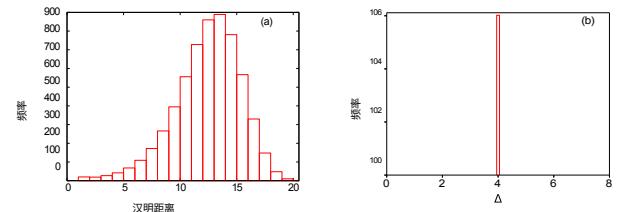


图1. (彩色在线) (a) 通过分析 $N=20$ 的2SAT问题获得的基态配置与前6036个激发态之间的汉明距离频率分布。(b) 能级间距分布，即第一激发态与基态、第二激发态与第一激发态等能级间能量差 Δ 的分布。对于所考虑的2SAT问题，前6036个激发态呈简并态，在 $\Delta = 4$ 。

从图1可得出以下结论。需知用于生成图1(a)的首批激发态均具有相同能量。根据构造方法，依据式(6)，能级间距分布图1(b)仅在 $\Delta=4$ 时不为零。现在设想基态搜索过程(如模拟退火算法)最终落入这些激发态之一。根据图1(a)可立即推知：通过单自旋翻转达到基态的概率将极低。事实上，这些激发态大多具有10-15的汉明距离，要通过特定单自旋翻转序列将汉明距离降至零几乎需要奇迹。综上所述，通过图1不难理解为何模拟退火法难以解决此类2SAT问题[11, 12]。

从图2中我们可以得出以下结论。与图1(a)不同，汉明距离分布的多数权重集中在5附近。此外，图2(b)中的能级间距分布与2SAT问题截然不同。这表明仅需5次或更少的自旋翻转即可将激发态转变为基态。因此，相较于我们选取的2SAT问题类，该

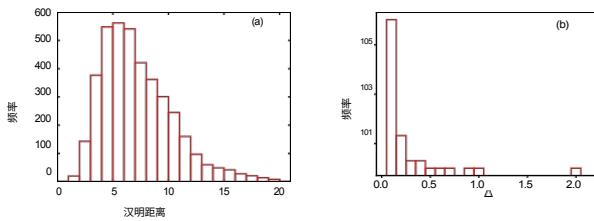


图2. (彩色在线) 与图1相同, 但问题实例属于N=20的RAN问题类别, 且仅展示能量最接近基态的4000个态的结果。在此情况下, 前4000个激发能级相差约17个能量单位; 而对于2SAT问题, 最低的6036个激发态能量仅比基态高出4个能量单位。

预计RAN问题将更适合采用模拟退火和量子退火方法进行求解。

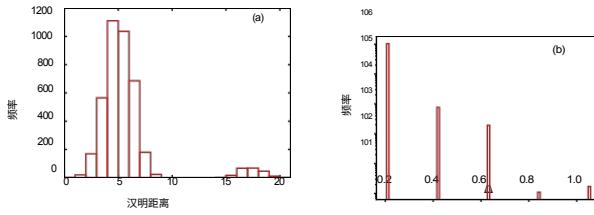


图3 (彩色在线版) 与图1相同, 但问题实例属于N=20的REG问题类别。在此情况下仅存在五种不同的能级差。最低的4000个能级之间相差约24个单位。

REG问题的汉明距离与能级间距分布 (见图3) 与2SAT或RAN问题存在显著差异。此类问题仅存在五种不同的能级间距, 且汉明距离分布表明:许多激发态与基态仅相差几个自旋翻转。

因此, 在所考虑的三类问题中, REG类问题可能是通过模拟退火或量子退火最易解决的。

V. 量子退火实验

我们证明了第IV节得出的结论

通过对小型问题实例的分析, 其结果与在D-Wave Advantage 5.1量子退火器上解决显著更大规模问题时观察到的难度程度高度吻合。

在图4(a)中, 我们展示了在D-Wave量子退火器上求解所有REG类问题所得的结果。如前所述, 对于每个N值, 通过自旋反演变换生成实例。随着问题规模N的增大, 成功概率 (即D-Wave产生基态的相对频率) 呈指数级下降从O(1)降至O(10⁻⁶)。通过对数据拟合指数函数

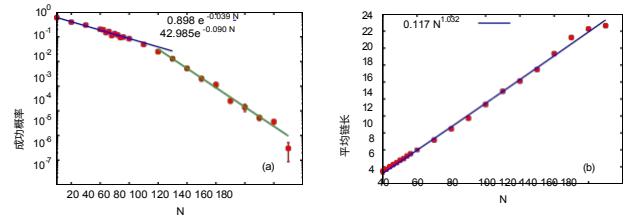


图4. (彩色在线) (a) 作为问题规模N函数的平均成功概率及其方差, 通过在D-Wave Advantage 5.1量子退火器上求解所有REG类问题实例获得。实线分别对应N<80和N>80数据点的最小二乘拟合。(b) 平均链长随问题规模N的变化关系图, 该指标反映QUBO问题中表示单个变量所需物理量子位的平均数量。

揭示出指数在N≈80时从-0.039变为-0.090。指数的绝对值越大, 量子退火法求解该量子半整数优化问题就越困难。

随着问题规模N的增大, 将全连接QUBO问题映射到定义D-Wave量子比特连接性的奇美拉或飞马晶格变得越来越困难, 最终变得不可能。即使是小型全连接问题, 若不将逻辑比特替换为物理量子比特的链, 也无法嵌入D-Wave Advantage 5.1飞马晶格。例如, 一个包含170个变量的型REG问题, 需映射到D-Wave系统约3964个物理量子位上。

Wave Advantage 5.1. 我们通过计算平均链长来量化这一方面, 该指标反映D-Wave软件将变量映射到物理量子比特组时所使用的平均物理量子比特数。图4(b)展示了通过求解所有REG问题获得的数据计算出的平均链长。显然, 平均链长仅随N呈线性增长, 并未出现成功概率标度依赖性中观察到的交叉现象 (参见图4(a))。

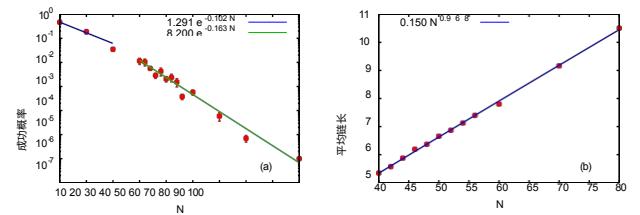


图5. (彩色在线) 与图5相同, 但问题实例属于RAN类。

在图5中, 我们展示了在D-Wave量子退火器上求解所有RAN类问题所得的结果。乍看之下, 图4和图5似乎相似, 但存在显著差异。首先注意到N=90时没有数据点, 原因在于经过200000次尝试后, D-Wave仍未能返回基态。对于N=100的情况, 我们较为幸运, 但对于N≥110的情况, 我们未能获得正确解, 这与REG问题形成鲜明对比——在REG问题中, D-Wave Advantage 5.1量子退火器能返回正确解直至N=170。显然, 对于RAN问题, D-

Wave Ad-vantage 5.1量子退火器比处理REG问题更困难，尽管两者在N=170之前都表现出相似的性能。

正确解直至N=170。显然，D-Wave Advantage 5.1量子退火器发现RAN问题比REG问题更难解决，尽管两者的量子二进制优化模型（QUBO）都涉及完全连接图。通过对数据拟合指数函数进一步证实了这一观察结果。与REG问题类似，在这种情况下，交叉点并非出现在N=80处，而是在N≈35处，指数值从-0.102变为-0.162，详见图5(a)。

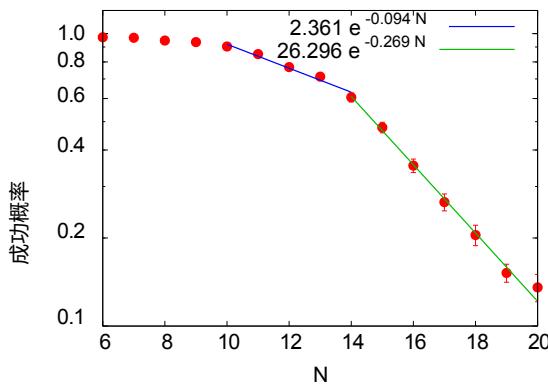


图6. (彩色在线) 与图4(a)相同，但问题实例属于2SAT类。

本文分析的2SAT问题类已通过计算机模拟量子退火及D-Wave量子退火器进行了广泛研究[13, 14]。总体结论是，尽管变量数量较少 ($N \leq 20$) 时，2SAT类包含难以通过模拟退火[11]和量子退火[13,14]求解的实例。为完整起见，图6展示了 $N \leq 20$ 时各变量数量对应的成功概率数据。

退火算法[11]和量子退火算法[13,14]解决。为完整起见，图6展示了 $N \leq 20$ 问题集的成功概率数据，该数据集亦用于研究汉明距离与能级间距分布。在规模为 $N=14$ 至 20 的问题上，我们发现 D-Wave Advantage 5.1 量子退火器获得的成功概率呈指数级下降，其指数值为 -0.269。该绝对值远大于 对应 RAN 和 REG 问题的指数值 -0.162 与 -0.090。当然，我们不能简单地将此归因于退火过程的随机性。

为 -0.269，其绝对值远大于 对应 RAN 和 REG 问题的指数值 -0.162 和 -0.090。当然，我们不能简单地将 14 ≤ $N \leq 20$ 的指数关系外推至更大 N 值时，我们认为随着 N 的进一步增大，该指数变小的可能性不大。 N 继续增大时，该指数值变小的可能性不大。过

在我们的 D-Wave 实验中，我们采用了默认退火 20 微秒的时间。可以预期，通过延长退火时间，成功概率将提高，从而能够解决更多且规模更大的随机数生成器分类问题。

VI 结论

我们已分析了大量我们所拥有的 QUBO 通过三种不同方式合成的量子布尔变量 (QUBO)。第一组 QUBO 是通过将特定选取的 2SAT 问题映射到 QUBO 获得的。这些 2SAT 问题具有特殊性，在于

由于问题计算量巨大，我们仅对变量数少于 21 的实例进行搜索。

第二类问题包含伊辛模型，其中所有双自旋相互作用和局部磁场均由均匀随机数决定。从统计力学角度看，这类全连接自旋玻璃模型呈现挫败现象，其基态及温度依赖性质的计算已知存在困难。

最后，第三类问题同样属于全连接自旋玻璃类型，但其相互作用与场值由自旋指数的特殊线性函数决定。数值实验表明该问题可能对任意自旋数具有可解性，但我们尚未能从数学上证明这一猜想。

我们计算了小规模问题实例的汉明距离分布与能级间距分布，并将小规模与大规模 QUBO 实例提交至 D-Wave 量子退火器进行求解。研究结果表明，描述 D-Wave 退火器求解 QUBO 成功概率的指数参数，与基于小规模 QUBO 实例计算的汉明距离及能级间距分布所作预测高度吻合。

值得探究的是：小型问题实例的汉明距离分布是否也能预测模拟退火法的有效性。

致谢

作者衷心感谢 JUNIQ 项目提供的支持，该项目获得德国联邦教育与研究部 (BMBF)、北莱茵-威斯特法伦州文化与科学部以及高斯超级计算中心 e.V. (www.gauss-centre.eu) 提供的计算时间支持，该项目在尤利希超级计算中心 (JSC) 的 GCS 超级计算机 JUWELS 上运行。

附录 A：量子半整数优化问题与伊辛模型的关联

$Q_{i,j}$ 、 J 、 h 与 C 之间的关系
通过

$$Q_{i,j} = \frac{1}{4} Q_{i,j} \quad \text{若 } i=j, \quad J_{i,i} = 0, \quad (A1)$$

$$h_i = \frac{1}{2} Q_{i,i} + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N Q_{i,j}, \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} C &= 2 \sum_{i=1}^N Q_{i,i} + 4 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq N \\ N}} Q_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} - \sum_{i=1}^N h_i + \sum_{j=i+1}^N J_{i,j}, \end{aligned} \quad (A3)$$

具有独特的基态和大量简并的第一激发态。诸如 2SAT

$$Q_{i,j} = 4J_{i,j} - 2\delta_{i,j} \quad h_i + \sum_{k \neq i} J_{i,k} \quad . \quad (A4)$$

附录B：精确QUBO求解器

我们简要讨论了QUBO求解器QUBO22随问题规模 N 变化的扩展行为，并展示了精确求解QUBO问题所需的资源规模。QUBO22不仅能提供真实基态解，还被发现对识别性能异常的处理单元极具价值。这是因为该算法能将所有可用GPU或CPU的利用率维持在接近100%的水平，从而对冷却系统等部件造成严峻考验。

求解QUBO所需的算术运算量与 $N(N - 1)2^N$ 成正比。实现“快速”求解的关键在于将工作负载分配至多个处理单元。对于完全枚举，这几乎是显而易见的。我们只需将集合 $\{0, \dots, 2^N - 1\}$ 中的不相交且近似等大的子集，分配给可用独立进程数 M 。每个进程枚举其子集以寻找最低、次低及最高成本对应的配置。此步骤每个进程需执行 $O(\text{OpCount}(N/M))$ 次操作。随后汇集所有进程结果，用于确定全局集合的最低、次低及最高成本。后一步骤需执行 $O(M)$ 次操作。

使用32个英特尔至强铂金处理器求解 $N=40$ 的QUBO问题8168个CPU（每个拥有24个核心）解决该问题约需505秒。使用4块NVIDIA A100 GPU解决相同的QUBO问题仅需约82秒。粗略而言，在解决QUBO问题时，1块NVIDIA A100 GPU的计算能力相当于49个英特尔至强白金8168 CPU。显然，使用GPU

（）替代CPU能显著缩短

显著缩短了解决QUBO问题的耗时。

在表I中，我们展示了QUBO22在JUWELS加速器[15]的GPU上运行的强缩放与弱缩放结果。问题实例均为具有 N 个变量的完全连接、规则QUBO。需注意，当 $44 < N \leq 54$ 时测得的耗时略小于基于 $N=44$ 耗时推算的预测值，这表明理想的强缩放与弱缩放特性。

表I. 基于Nvidia A100 GPU的QUBO22强缩放与弱缩放结果。第二列给出所用GPU数量，第三列列出求解耗时。

算术运算次数比值由公式 $S(N) = N(N - 1)^2 / (44 \times 43 \times 2^{44})$ （最后一列）定义，结合GPU使用数量比值及 $N=44$ QUBO求解耗时（第四列），共同预估预测 $N>44$ 时的耗时（第四列）。

| N | A100 GPU | 耗时 (s) | $1562 \times S_{44}(N)$ (s) | $S_{44}(N)$ |
|-----|----------|--------|-----------------------------|-------------|
| 44 | 4 | 1562 | 1562 | 1 |
| 50 | 256 | 1973 | 2015 | 1.29 |
| 50 | 512 | 987 | 1015 | 0.65 |
| 50 | 1024 | 493 | 500 | 0.32 |
| 54 | 1024 | 9121 | 9451 | 6.05 |
| 56 | 512 | 83502 | 81224 | 52 |

- [1] G. R. Garey 与 D. Johnson, 《计算机与不可解性》(W.H. Freeman 出版社, 2000年)。
- [2] A. Lucas, 《NP 问题的伊辛模型》，《物理前沿》，2, 5 (2014)。
- [3] M. Lewis 和 F. Glover, 二次无约束二进制优化问题预处理：理论与实证分析, arXiv:cs.AI/1705.09844 (2017)。
- [4] M. W. Johnson, M. H. S. Amin, S. Gildert, T. Lanting, F. 哈姆泽, N. 迪克森, R. 哈里斯, A. J. 伯克利, J. 约翰松, P. 布尼克、E. M. 查普尔、C. 恩德鲁德、J. P. 希尔顿、K. 卡里米、E. 拉迪津斯基、N. 拉迪津斯基、T. 哦、I. 佩尔米诺夫、C. 里奇、M. C. Thom, E. Tolkacheva, C. J. S. Truncik, S. Uchaikin, 王杰、威尔逊、罗斯，基于人工自旋的量子退火，《自然》473期, 194页 (2011)。
- [5] C. McGeoch与P. Farre', 《D-Wave优势系统：概述》，技术报告(D-Wave Systems Inc, Burnaby, BC, Canada, 2020) D-Wave技术报告系列14- 1049A-A, 2020)。
- [6] T. Kadowaki 与 H. Nishimori, 转译模型中的量子退火, 物理评论E 58, 5355 (1998)。
- [7] M. Born 与 V. Fock, 绝热定理的证明, 《物理学杂志》51卷, 165页 (1928年)。
- [8] M. R. Krom, 《所有析取式均为二元的一类一阶公式的判定问题》, Zeitschrift für

数学逻辑与数学基础杂志 13, 15 (1967)。

- [9] S. Even、A. Itai 和 A. Shamir, 《关于时间表和多商品流问题的复杂性》，《SIAM 计算杂志》5, 691 (1976)。
- [10] B. Aspvall、M. F. Plass 和 R. E. Tarjan, 《一种用于测试某些量化布尔公式真值的线性时间算法》，《信息处理快报》第 8 卷, 第 121 页 (1979 年)。
- [11] T. Neuhaus, 用于量子退火的蒙特卡罗搜索：针对极难K-SAT实例的实现, arXiv:1412.5361 (2014)。
- [12] T. Neuhaus , 量子搜索在困难的 2-sat 集合中的应用 , arXiv:1412.5460 (2014)。
- [13] V. Mehta, F. Jin, H. De Raedt, and K. Michielsen, 带触发哈密顿量的量子退火：在2-可满足性与非随机化问题中的应用, 《物理评论A》 104, 032421 (2021)。
- [14] V. Mehta, F. Jin, H. De Raedt, and K. Michielsen, 量子退火处理困难的2-SAT问题：最小能量间隙与成功概率的分布及标度关系, arXiv:2202.00118 (2022)。
- [15] D. Alvarez, JUWELS集群与加速器：于尤利希超级计算中心采用模块化超级计算架构的百亿亿次级路径探索器, 《大规模研究设施期刊》JLSRF 7, 10.17815/jlsrf-7-183 (2021)。