Radar.

Tramite un apparecchio radar posto al livello del mare viene osservata la traiettoria di una nave, che si muove di moto rettilineo, e se ne vuole stimare la traiettoria.

Sono stati osservati alcuni valori (θ, ρ), dove θ è il valore di un angolo e ρ è il valore di una distanza. Assumendo il radar nell'origine di un sistema di riferimento Cartesiano, θ, espresso in radianti, è l'angolo formato dalla retta congiungente il radar e la nave rispetto al semiasse positivo delle ascisse (angoli crescenti in senso antiorario), mentre ρ è la distanza misurata tra il radar e la nave.

Poiché il radar è un po' vecchiotto, le sue osservazioni di ρ sono imprecise, mentre quelle di θ sono precise.

Si vuole stimare la traiettoria rettilinea della nave che meglio corrisponde alle osservazioni, secondo i tre criteri seguenti:

1. minimizzare il massimo errore in valore assoluto;
2. minimizzare la somma dei valori assoluti degli errori;
3. minimizzare l'errore quadratico medio.

Per errore si intende la differenza tra il valore di distanza calcolato ed il valore di ρ osservato, per ogni dato valore di θ.

Si assuma, per semplicità, che il sistema di riferimento sia stato orientato in modo che le posizioni osservate giacciano solo nel primo e quarto quadrante.

Formulare il problema e classificarlo in ciascuno dei casi.

Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel file RADAR.TXT. Discutere ottimalità e unicità delle soluzioni ottenute nei tre casi.

Tra le osservazioni compiute potrebbe nascondersi un outlier, dovuto ad un errore di trascrizione del dato osservato. Modificare il modello precedente per identificare l'outlier e ottimizzare la stima della traiettoria potendo trascurare l'outlier.

Classificare il problema risultante in questo caso e discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Dati.

Angolo θ	Distanza ρ
-0,036	7,5
0,124	10,5
0,208	13,5
0,260	16,5
0,294	19,5
0,318	26
0,337	27
0,351	30

Tabella 1: Coordinate polari dei punti osservati.

Soluzione commentata.

Dati. I dati sono l'insieme indicizzato N delle osservazioni e la coppia di valori (θ_i, ρ_i) per ciascuna osservazione $i \in N$.

Variabili. La variabili sono i parametri che descrivono la retta nel piano, cioè a, b e c che definiscono l'equazione in forma generale $ax + by + c = 0$. Non si è autorizzati a supporre che si possa usare la forma esplicita $y = mx + q$, perché la retta cercata potrebbe anche essere verticale. Tutti i tre coefficienti sono liberi in segno.

Utilizziamo per comodità anche le variabili ausiliarie $e_i \ \forall i \in N$ per rappresentare l'errore relativo ad ogni osservazione. Anch'esse sono libere in segno.

Vincoli. Anzitutto è necessario imporre la condizione di normalizzazione $a^2 + b^2 = 1$.

Il generico punto (x_i, y_i) sulla retta $ax+by+c = 0$ ha coordinate polari (θ_i, r_i) tali che $x_i = r_i \cos\theta_i$ e $y_i = r_i \sin\theta_i$. Quindi se la distanza fosse osservata con precisione in corrispondenza dell'angolo θ_i sarebbe pari a

$$r_i = \frac{-c}{a\cos\theta_i + b\sin\theta_i}.$$

L'errore è quindi

$$e_i = \rho_i - \frac{-c}{a\cos\theta_i + b\sin\theta_i}.$$

Obiettivo. Il primo obiettivo è min-max e va linearizzato introducendo una variabile ausiliaria Δ:

$$\text{minimize } z_1 = \Delta$$

$$\Delta \geq e_i \ \ \forall i \in N$$

$$\Delta \geq -e_i \ \ \forall i \in N$$

Il secondo obiettivo è min-sum ma contiene i valori assoluti e va linearizzato introducendo una variabile ausiliaria δ_i per ogni osservazione:

$$\text{minimize } z_2 = \sum_{i \in N} \delta_i$$

$$\delta_i \geq e_i \ \ \forall i \in N$$

$$\delta_i \geq -e_i \ \ \forall i \in N$$

Il terzo obiettivo è quadratico:

$$\text{minimize } z_3 = \frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} e_i^2$$

In tutti i casi il problema è non-lineare a causa della condizione di normalizzazione.

La soluzione ottima fornita dal solutore ha una soluzione speculare equivalente, che si ottiene cambiando di segno ai tre coefficienti a, b e c. Eliminando la simmetria (ad esempio imponendo $c \leq 0$) si ottiene un problema convesso, poiché ogni distanza d_i è una funzione convessa di a, b e c: rispetto a c è una retta, rispetto ad a e b è un ramo di iperbole. Quindi anche e_i è una funzione convessa e quindi anche le tre funzioni obiettivo lo sono.

Per identificare un eventuale outlier, si può associare ad ogni osservazione $i \in N$ una variabile binaria w_i, che, se posta a 1, annulla il contributo dell'osservazione $i \in N$ all'obiettivo. Per limitare a 1 il numero di outliers consentiti, è necessario quindi imporre

$$\sum_{i \in N} w_i \leq 1.$$

Per modificare il modello tenendo conto della possibilità di scartare un outlier si può procedere come segue, in ciascuno dei tre casi.

Nel primo caso, i vincoli vengono modificati così:

$$\Delta \geq e_i - Mw_i \ \ \forall i \in N$$

$$\Delta \geq -e_i - Mw_i \ \ \forall i \in N$$

dove M è una costante grande abbastanza.

Nel secondo caso, i vincoli vengono modificati così:

$$\delta_i \geq e_i - Mw_i \ \ \forall i \in N$$

$$\delta_i \geq -e_i - Mw_i \ \ \forall i \in N$$

dove M è una costante grande abbastanza.

Nel terzo caso, l'obiettivo diventa

$$\text{minimize } z_3 = \frac{1}{|N|-1} \sum_{i \in N} (1-w_i) e_i^2.$$

Un valore grande abbastanza per dimensionare M può essere scelto ad esempio in modo da essere maggiore del massimo valore di ρ_i.

Un altro modo di formulare il modello con outlier è quello di sostituire nei tre obiettivi e_i con $(1-w_i)e_i$, introducendo così un'ulteriore non-linearità.

Il problema risultante è un modello di PNLI. La soluzione è ottima e unica grazie alla convessità della parte non-lineare e all'enumerazione implicita sulle variabili binarie.

L'outlier la cui eliminazione dal set di dati fa migliorare massimamente la stima (con tutti e tre i criteri) è il sesto degli otto dati.