# Sistemas No Lineales

Control no lineal de una rueda de reacción para un péndulo invertido

Víctor Lechuga

23 de Agosto de 2021

## 1. Introducción.

Se elaboraron las siguientes actividades, divididas por secciones.

1. **Resumen del tema de linealización entrada - salida y entrada - estado.**

   Se presenta el resumen acerca de los temas mencionados más algunas subsecciones en las que se abordan el procedimiento general y particular (caso práctico de aplicación) para un ejemplo incluido en la literatura.

   También se incluyen las definiciones de Grado Relativo, Dinámico Cero, Difeomorfismo y algunos ejemplos acádemicos con el fin de hacer comprensibles los conceptos.

2. **Ejemplo ilustrativo.**

   En esta parte se desarrolla el modelo del péndulo y se aplican los conceptos abordados en la sección anterior: grado relativo y dinámica cero.

3. **Ejemplo no trivial.** Adicional a lo anterior, se presenta un sistema no lineal, el cual es transformado para convertirlo en una forma linealizable por retroalimentación completa de estados (*full-state linearization*), se propone una entrada tal que se cancelen las no linealidades y se comprueba este hecho. Por último, se calcula el grado relativo para este sistema.

Cada una desarrolladas con base en los objetivos establecidos.

# 2. Linealización.

La linealización se define como un proceso matemático empleado en la Teoría de Control, y más precisamente, en la Teoría de Sistemas no Lineales. Su propósito representa un esfuerzo por convertir la dinámica del sistema no lineal a uno lineal para facilitar su interpretación, dinámica resultante y otros cálculos, como la interpolación o extrapolación; lo que convierte a la linealización como una herramienta útil en el estudio de sistemas de control.

## 2.1. Tipos de linealización.

Existen varias formas de linealizar un sistema no lineal.Estas son [5]:

1. **Linealización completa de estados (*full-state linearization*)**, la cual es donde las ecuaciones de estado son completamente linealizadas.
2. **Linealización de entrada a salida. (*input-output linearization*)**; dónde el mapeo de entradas con respecto a salidas es linealizada, mientras que las ecuaciones de estado pueden ser parcialmente linealizadas. Debido a esto, en ocasiones este método recibe el nombre de *linealización parcial*.

Así, el tipo más común de linealización para sistemas no lineales es la linealización completa de estados, o simplemente conocida como (*feedback linearization*).

A continuación se aborda un ejemplo visto en la literatura en el que se explica este concepto.

## 2.2. Procedimiento General.

La cual consiste en tomar un sistema no lineal del tipo:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{gathered} \tag{1}$$

dónde $x \epsilon \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \epsilon \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas y $y \epsilon \mathbb{R}^m$ es el vector de salidas; y el objetivo es desarrollar una acción de control tal que adquiera la siguiente forma:

$$u = a(x) + b(x)\nu \tag{2}$$

Y con lo que se genere un mapeo lineal de entrada-salida entre la nueva entrada $v$ y la salida. Luego entonces, se puede aplicar una estrategia de control de lazo externo para el sistema de control lineal resultante.

Todo lo anterior se ilustra en la figura 1.

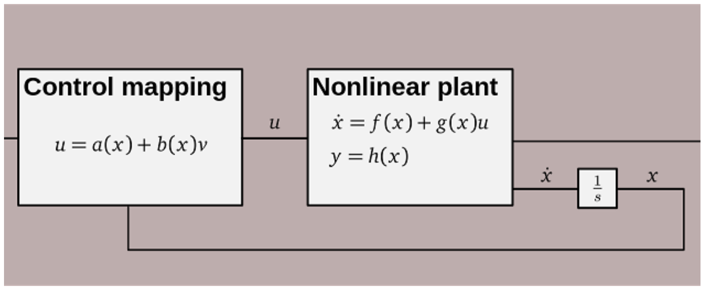


Figura 1: Diagrama a bloques para ilustrar la linealización por retroalimentación.

## 2.3. Procedimiento Particular (ejemplo académico).

Un ejemplo tomado de [3] para explicar este tema consiste en un sistema por control de nivel en un tanque, en donde primero se define el modelo. El cual es:

$$\frac{d}{dt}\int_0^h A(h)dh = u(t) - a\sqrt{2gh} \tag{3}$$

Que se reduce como:

$$A(h)\dot{h} = u(t) - a\sqrt{2gh} \tag{4}$$

Ahora bien, se considera $\dot{h} = \nu$ y la entrada $u(t)$ como:

$$u(t) = a\sqrt{2gh} + A(h)\nu \tag{5}$$

Y a $\nu$ como:

$$\nu = -\alpha(h(t) - h_d) \tag{6}$$

donde $\tilde{h}$ representa el error del nivel, $(h(t) - h_d)$ equivale a $\tilde{h}$ y $\alpha$ es una constante definida como positiva. Se sustituye en (6) y la dinámica resultante es:

$$\dot{h} + a\tilde{h} = 0 \tag{7}$$

Cuya solución está dada por:

$$h(t) = \alpha h_d e^{-\alpha t} \tag{8}$$

Lo cual tiende a cero conforme el tiempo se aproxima infinito.

Si por otra parte, en lugar de un nivel deseado constante $h_d$, se tiene uno variable descrito por alguna función (por ejemplo), $h_d(t)$, entonces la ecuación (8) pasa a ser:

$$\nu = h_d(t) - \alpha\tilde{h} \tag{9}$$

En donde se conserva la misma tendencia al infinito.

Ahora bien, el objetivo de la linealización por retroalimentación es contrarrestar las no linealidades aplicando una dinámica lineal a sistemas descritos por sistemas lineales en una forma canónica controlable, lo que se aplica a cada uno de los estados del sistema.

Para esto, se elige $u(t)$ como:

$$u(t) = \frac{1}{b}(\nu - f(x)) \tag{10}$$

Con lo que se deja disponible una variable $\nu$.

Ahora, $\nu$ es un polinomio con $k$ coeficientes equivalentes a los de un polinomio característico estable cuyas raíces se encuentran en el semiplano izquierdo complejo para asegurar la estabilidad.

En las siguientes subsecciones se continuarán algunos conceptos que van de la mano con esta clase de linealización.

## 2.4. Grado Relativo.

El grado relativo $r$ de un sistema dinámico de una entrada y una salida se define como el número de veces que la salida $y(t)$ se debe derivar con respecto al tiempo para obtener explicitamente la entrada $u(t)$, y entonces diseñar $u(t)$ para cancelar la no linealidad [6].

Para entender mejor este concepto, supóngase un sistema no lineal expresado en su forma general [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{11}$$

Para el cual se dice que tiene un grado relativo $r$ en un punto $x_0$, si:

1. $L_g L_f^k h(x) = 0$ para todo $x$ en un entorno de $x_0$ y todo $k < (r-1)$
2. $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$

A partir de la expresión anterior se desprende la siguiente observación: si $n$ es el orden del sistema de partida, entonces siempre se cumplirá la relación $r \leq n$.

Algo que debe quedar claro es que la determinación del grado relativo es la antesala para el cálculo de la dinámica cero, misma que se analiza en la próxima sección.

Más adelante, en el estudio de un ejercicio académico se aprecia un ejemplo de grado relativo.

## 2.5. Dinámica Cero.

La dinámica cero (*Zero Dynamics*) es el concepto relacionado con la evaluación del efecto de ceros en los sistemas [6].

La idea original fue introducida en la década de 1930 con el propósito inicial de desarrollar una estabilización asintótica con un conjunto de regiones de atracción garantizadas - lo que se conoce ahora como estabilización semi-global -, con el propósito de hacer que el sistema general sea estable.

De tal suerte que la dinámica cero se refiere a la acción de control elegida en la que las variables de salida del sistema se mantienen idénticamente como cero; es decir, $y(t)$ y sus $n-1$ derivadas se igualan a cero.

Lo anterior con el propósito de que desarrollar este concepto fuera más sencillo el estudio y control de sistemas de fase no mínima y los no lineales, al mismo tiempo que se hace más efectivo el control. Esto es, se busca garantizar que el sistema completo sea al menos localmente asintóticamente estable.

Así, se define un **sistema de fase mínima** como aquel cuya dinámica cero es asintóticamente estable. Análogamente, se define **sistema de fase no mínima** como aquel cuya dinámica cero es inestable.

### 2.5.1. Ejemplo de dinámica cero.

Considérese un sistema no lineal [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 - 3x_2 + u \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Al derivar la salida $y(t)$ con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{y} = 2x_1x_2 - 3x_2 + u \tag{13}$$

A lo que, si se aplica la entrada:

$$u = -2x_1x_2 - 3x_2 + \nu \tag{14}$$

Resulta $\dot{y} = \nu$. A partir de ello, la dinámica cero se puede encontrar igualando la salida y su derivada a cero, es decir, $\dot{y} = y = 0$. Esto implica que $x_2 = 0$, lo cual a su vez:

$$\dot{x}_1 = x_1\dot{x}_2 = u \tag{15}$$

Lo que deja ver que $\dot{x}_1 = -x_1$; es decir, la ecuación de su dinámica cero.

## 2.6. Difeomorfismo.

Un difeomorfismo es una transformación no lineal que sirve para cambiar las variables de estado en las que se expresa un sistema no lineal. Existen dos tipos de difeomorfismos: global y local, mismos que a continuación se definen [6].

- El difeomorfismo global se define formalmente como *una función* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definida en una región* $\Omega$ *del espacio de estado es un difeomorfismo si es suave y su inversa* $\phi^{-1}$ *existe y es también suave.*

  Si $\Omega$ es todo el espacio $\mathbb{R}^n$, entonces $\phi(x)$ es un difeomorfismo global.

- Para el difeomorfismo local: *sea $\phi(x)$ una función suave definida en una región $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$, si su Jacobiano ($\nabla\phi$) es no singular en un punto $x_0$ de $\Omega$, entonces $\phi(x)$ es un difeomorfismo local en una subregión de $\Omega$.*

Una tercera definición, y un poco más digerible, indica que un difeomorfismo es un cambio de variables $T$ tal que $z = T(x)$ está definido en un dominio $D_x$, su transformación inversa $x = T^{-1}(z)$ está definida en $D_z = T(D_x)$, y ambos $T$ y $T^{-1}$ son continuamente diferenciables en $D_x$ y $D_z$, respectivamente.

# 3. Ejemplos ilustrativo.

En esta sección se presenta dos ejemplos con el fin de ilustrar los conceptos y métodos presentados en la sección anterior. Uno de ellos es un ejercicio académico, y otro es producto de un caso de estudio real.

## 3.1. Desarrollo del ejemplo ilustrativo del péndulo.

En esta sección se presenta el ejemplo didáctico del péndulo invertido con el fin de revisar los conceptos abordados en las subsecciones anteriores.

El péndulo invertido es un sistema dinámico no lineal, cuya dinámica es describible como [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] - bx_2 + cu \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Para lo cual se desprecia el término $b$ neutrolizándolo, ya que éste corresponde a un amortiguamiento; el cual no es considerado para propósitos de este ejercicio.

### 3.1.1. Diseño de un control linealizante para el péndulo.

Si se revisa con cuidado, se observa que las ecuaciones de estado permite seleccionar una $u$ tal que se cancele el término no lineal correspondiente a $a[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)]$.

Esto hace que $u$ sea entonces:

$$u = \frac{a}{c}[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] + \frac{\nu}{c} \tag{17}$$

La mejor manera para demostrar esto es mediante la sustitución directa de (17) en (16), entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] + c[\frac{a}{c}[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] + \frac{\nu}{c}] \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Se reduce eliminando a $c$ del extremo derecho:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] + a[sin(x_1+\delta) - sin(\delta)] + \nu \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{19}$$

Por último, se contrarrestan las no linealidades. Lo que queda como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \nu \\ y &= x_2\end{aligned} \tag{20}$$

Nótese que esta selección de $u$ logró contrarestar las no linealidades efectivamente.

Por lo tanto, el problema de estabilización para un sistema no lineal se ve reducido únicamente a controlar el sistema ahora lineal. Para ello, se procede a diseñar un controlador lineal estabilizante por retroalimentación, es decir:

$$\nu = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \tag{21}$$

Lo cual hace que el sistema dado por (20) se convierta ahora en:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - (k_2 + b) x_2\end{gathered} \tag{22}$$

donde los valores negativos indican una retroalimentación negativa con el fin de que los polos se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo $s$.

De esta forma, la ecuación correspondiente a $u$ que linealizó al sistema, ahora también lo estabiliza. Así, si se sustituye la ecuación (21) en (17):

$$u = (\frac{a}{c})[sin(x_1 + \delta) - sin(\delta)] + \frac{\nu}{c} \tag{23}$$

Lo que se reduce finalmente a:

$$u = (\frac{a}{c})[sin(x_1 + \delta) - sin(\delta)] - \frac{(k_1 x_1 + k_2 x_2)}{c} \tag{24}$$

Cabe señalar que en este caso la linealización es relativamente sencilla dado que la cancelación así lo permite, pero no se puede esperar que suceda así para todos los sistemas no lineales.

Con esto se da por concluida esta parte del ejercicio.

#### 3.1.2. Grado Relativo.

Supóngase que se busca el grado relativo del modelo del péndulo, descrito por la ecuación (16). Entonces su grado relativo es dos ($r = 2$) debido a que es necesario derivar la salida dos veces para obtener la entrada.

Así pues:

$$y = x_2 \tag{25}$$

Si se deriva nuevamente:

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_1 \tag{26}$$

Una segunda vez:

$$\ddot{y} = \ddot{x}_2 = \dot{x}_1 \quad (27)$$

Lo que equivale al grado de $u$, por lo que $r = 2$.

### 3.1.3. Dinámica Cero.

Retomando el modelo del péndulo, la ecuación (16):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[sin(x_1 + \delta) - sin(\delta)] + cu \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Al derivar la salida $y(t)$ con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -a[sin(x_1 + \delta) - sin(\delta)] + cu \quad (29)$$

A la que, si se aplica una entrada:

$$u = \frac{a}{c}[sin(x_1 + \delta) - sin(\delta)] + \frac{\nu}{c} \quad (30)$$

Solo queda $\dot{y} = \dot{x}_2 = \nu$, y si $\dot{y} = 0$, entonces, el estado $x_1$:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (31)$$

Lo que quiere decir que la dinámica cero depende únicamente de $\dot{x}_1 = x_2$.

# 4. Ejemplo no trivial.

Se tiene un sistema no lineal conformado por un péndulo invertido equipado con una rueda de reacción en un extremo libre del eslabón único, mientras el otro extremo está anclado a un rodamiento que le permite rotar en libertad en una dimensión. Este ejemplo fue tomado a partir del trabajo [1].

El sistema es ilustrado en la siguiente figura (fig. 2):

Para simplificar los cálculos:

- El centro de masas está ubicado justo en la mitad del eslabón
- Se desprecia la fricción.
- Se ignora cualquier otro desplazamiento o rotación que no sea el indicado.

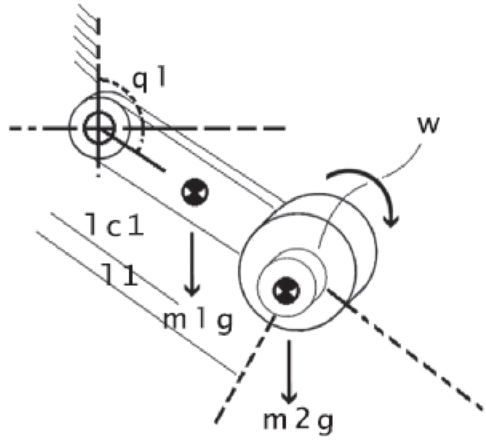


Figura 2: Péndulo invertido con una rueda de reacción (RWP). [1]

Su modelo normalizado es:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \epsilon\ddot{q} = sin(q) \\ \ddot{q} + \ddot{\theta} = u \end{aligned} \tag{32}$$

donde la coordenada no actuada $q$ es la posición angular del péndulo, mientras que la coordenada actuada $\theta$ corresponde a la posición angular de la rueda de reacción, y donde $\epsilon$ es una constante del sistema.

El modelo expresado en espacio de estados está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\frac{\epsilon}{\epsilon - 1} + \frac{sin(x_1)}{\epsilon - 1} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{sin(x_1)}{\epsilon - 1} + \frac{u}{\epsilon - 1} \end{aligned} \tag{33}$$

Lo que implica cuatro estados, dados por:

$$\begin{aligned} q &= x_1 \\ \dot{q} &= x_2 \\ \theta &= x_3 \\ \dot{\theta} &= x_4 \end{aligned} \tag{34}$$

## 4.1. Diseño de Control.

En esta sección se continuará con el diseño del controlador del ejemplo no trivial.

## 4.2. Presentación de la ley de control.

Para poder encontrar un control, primero es necesario transformar al sistema:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + \epsilon x_3 \\ \xi_2 &= x_2 + \epsilon x_4 \\ \xi_3 &= sin(x_1) \\ \xi_4 &= x_4 cos(x_1) \end{aligned} \tag{35}$$

Se puede observar que estas transformaciones son invertibles mientras $|x_1| < \pi/2$, ya que de lo contrario se entraría en una singularidad.

Así pues, tras la transformación expresada en la ecuación (35), se puede obtener una forma linealizable de (33) equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= g(x) + h(x)u = \nu \end{aligned} \tag{36}$$

En esta última ecuación en donde se observa la forma general de los sistemas no lineales: $g(x) + h(x)u$. Así,

$$g(x) \;\; = -x_2^2 sin(x_1) + \tfrac{sin(x_1)cos(x_1)}{\epsilon - 1}, \quad h(x) = \tfrac{\epsilon cos(x_1)}{\epsilon - 1} \tag{37}$$

Por lo anterior, el control $u$ linealiza al sistema dado por la ecuación (36) mediante retroalimentación, está dado por:

$$u = \frac{1}{h(x)}(\nu - g(x)) \tag{38}$$

Lo que convierte al sistema en una cadena de integradores, los cuales son lineales. Esto hace que el sistema sea linealizado por retroalimentación al cancelar los términos no lineales $g(x)$ y $h(x)$.

### 4.2.1. Demostración de la linealización.

La demostración de lo anterior es la siguiente.
Se sustituye la ecuación (38) en (36), lo que da por consecuencia:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= g(x) + h(x)[\frac{1}{h(x)}(\nu - g(x))] \end{aligned} \tag{39}$$

Y se hace la siguiente reducción. Nótese que para efectos de cálculo se omiten los demás estados en el desarrollo.

$$\dot{\xi}_4 = g(x) + \frac{h(x)}{h(x)}(\nu - g(x)) \tag{40}$$

Se cancela $h(x)$:

$$\dot{\xi}_4 = g(x) + (\nu - g(x)) \tag{41}$$

Se cancela $g(x)$:

$$\dot{\xi}_4 = \nu \tag{42}$$

Lo que regresa a la ecuación (36), lo que finalmente implica que las no linealidades fueron canceladas de acuerdo con lo expuesto en (36), dando por concluida la demostración.

## 4.3. Grado Relativo.

Si se considera a $q_1$ como la salida (que es la posición del péndulo) entonces $y = q_1$; mismo que después de la transformación queda como $y = q_1 = \dot{\xi}_1$.
Al derivar la salida, se tiene:

$$\dot{y} = \dot{\xi}_1 = \xi_2 \tag{43}$$

Una vez más:

$$\ddot{y} = \ddot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = \xi_3 \tag{44}$$

Por tercera vez:

$$\dddot{y} = \dddot{\xi}_1 = \ddot{\xi}_2 = \dot{\xi}_3 \tag{45}$$

Por cuarta:

$$\ddddot{y} = \ddddot{\xi}_1 = \dddot{\xi}_2 = \ddot{\xi}_3 = \dot{\xi}_4 = g(x) + h(x)u \tag{46}$$

Al ser un sistema de cuatro estados compuesto por cuatro integradores, entonces el sistema es de grado relativo $r = 4$, ya que se requiere derivar en cuatro ocasiones.

# Referencias


[1] José de Jesus Rubio et al C. Aguilar-Íbañez J.C. Martínez. “Induced sustained oscillations in feedback-linearizable single-input nonlinear systems”. En: *ISA Transactions* 54 (2015) (2014), págs. 117-124.

[2] A. Delgado. “Linealización Entrada/Salida de Sistemas no Lineales Afines Utilizando un Filtro.” En: *Revista de Ingeniería e Investigación* 45 (2014), págs. 62-66.

[3] W. Li J.P. Slotine. “Applied Nonlinear Control”. En: (1991), pág. 208.

[4] L. Jenkins. “A few illustrations on the Basic Concepts of Nonlinear Control.”

[5] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. Upper Saddle River., 1996, págs. 505-508. ISBN: 0-13-067389-7.

[6] M. Lopez-Martínez. *Linealización por Retroalimentación.* 2009.