Note sur le Cours d' Automatique de K.J. Astrom

QUADRAT Quentin

2 février 2006

Table des matières

1 Formule de Taylor

Formule de Taylor avec un paramètre $x = x_0 + \delta x$:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \right)$$

Formule de Taylor dans le cas vectoriel :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \big(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(f''_x(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''_y(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + f''_{x,y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\big) \end{aligned}$$

2 Linéarisation

Exemple de linéarisation de l'équation du mouvement d'un pendule inversé (conditions initiales nulles) :

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= \frac{mgl}{J}\sin x_1 + \frac{ml}{J} u \cos x_2 \end{aligned}$$

On peut écrire $\dot{x_2} = f(x_1, x_2, u)$. Grâce à la formule de Taylor :

$$\dot{x_2} \simeq f(0,0,0) + \delta x_1 f'_{x_1}(0,0,0) + \delta x_2 f'_{x_2}(0,0,0) + \delta u f'_u(0,0,0)$$

Ce qui donne :

$$\delta\dot{x_2} = \dot{x_2} \simeq 0 + \delta x_1 \left(\frac{mgl}{J}\cos 0 - \frac{ml}{J} 0 \sin 0\right) + \delta u \left(\frac{ml}{J}\cos 0\right)$$

Ce qui donne :

$$\delta\dot{x_2} \simeq \delta x_1 \left(\frac{mgl}{J}\right) + \delta u \left(\frac{ml}{J}\right)$$

De même on a :

$$\delta\dot{x_1} = \delta x_2$$

Finalement, on obtient le systeme suivant 1 :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x_1} &= \delta x_2 \\ \delta\dot{x_2} &= \delta x_1 \left(\frac{mgl}{J}\right) + \delta u \left(\frac{ml}{J}\right) \\ \delta y &= \delta x_1 \end{aligned}$$

Ou bien sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J} \end{bmatrix} \delta u \\ \delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \delta u \end{aligned}$$

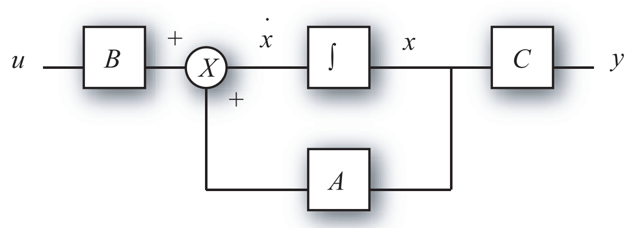

FIG. 1 – u est l'entrée, y la sortie, x l'état (ou mémoire)

En changeant de notation $\delta x \rightarrow x, \delta u \rightarrow u, \delta y \rightarrow y$, le système s'écrit bien sous la forme (cf. block diagramme 1) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Avec A une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times p$, C une matrice $q \times n$, et D une matrice $q \times p$.
Une propriété amusante : on peut emboiter les 4 matrices.

0	1	0
$\frac{mgl}{J}$	0	$\frac{ml}{J}$
1	0	0

2.1 Résolution de système d'equa diff avec Scilab

```
function xprim=f(t, x)
xprim(1)=x(2);
xprim(2)=(m*g*l)/j*x(1) + (m*l)/j*sin(100*t);
endfunction

m=10; g=10; l=1; j=10; x1_0=0.1; x2_0=0.;
t0=0; tmax=0.1; dt=0.001; t=t0:dt:tmax;

pendule=ode([x1_0;x2_0], t0, t, f);
```

3 Systèmes linéaires temps invariant

3.1 Exercice 1 de linéarisation

Soit $\dot{x} = 2x$, sachant $x(0) = x_0$. Que vaut $x(t)$?
Solution :

$$x(t) = a\ e^{2t}$$

$$\dot{x}(t) = 2a\ e^{2t}$$

Pour trouver a, on utilise la condition initiale de l'énnoncé, soit :

$$x(0) = a = x_0$$

3.2 Exercice 2 de linéarisation

Soit $\dot{x} = 2x + u$, sachant $x(0) = x_0$. Que vaut $x(t)$?
Solution :
Pour $u = 0$ on a : $x(t) = a(t)\ e^{2t}$
En dérivant on a :

$$\dot{x}(t) = 2a\ e^{2t} + \dot{a}(t)\ e^{2t} = 2x(t) + u(t) = 2a(t)\ e^{2t} + u(t)$$

En se simplifiant :

$$\dot{a}(t) = u(t)\ e^{2t}$$

D'où :

$$a(t) = \int_0^t u(s)\ e^{-2s} ds + a_0$$

$$x(t) = a_0\ e^{2t} + \int_0^t u(s)(\ e^{2(t-s)} ds$$

En utilisant la condition initiale de l'énnoncé, on a :

$$x(0) = x_0 = a_0$$

Finalement :

$$x(t) = x_0\ e^{2t} + \int_0^t u(s)\ e^{2(t-s)} ds$$

3.3 Une démonstration sur les exp de matrices

Montrons que si A est diagonalisable, nous avons : $e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}$
Soit A diagonalisable, alors A s'écrit sous la forme : $A = P\Lambda P^{-1}$
On rappelle que : $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$
D'où :

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{n\geq 0} \frac{P\Lambda^n P^{-1}}{n!}$$

$$e^A = P \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\Lambda^n}{n!} \right) P^{-1}$$

$$e^A = Pe^{\Lambda} P^{-1}$$

3.4 Scilab et les exp de matrice

```
-->A=[2,1;0,2]
 A  =
!   2.    1. !
!   0.    2. !

-->exp(2)
 ans  =
7.3890561

-->expm(A)
 ans  =
!   7.3890561    7.3890561 !
!   0.           7.3890561 !
```

3.5 Exercice 1 sur les exp de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

D'où : $A = P\Lambda P^{-1}$ avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Puisque Λ est diagonale on écrire :

$$e^{\Lambda t} = e^{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

3.6 Exercice 2 sur les exp de matrices

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Montrer que :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} & t^2 e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 = \begin{bmatrix} 1+\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} & t + \alpha t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 t^3 & \frac{1}{2}(t^2 + \alpha t^3) \\ 0 & 1+\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} & t + \alpha t^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 t^3 \\ 0 & 0 & 1+\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6} \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} & t^2 e^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

4 Modèle d'entrée-sortie

4.1 Réponse impulsionelle

Trouver la réponse impulsionelle $y(t) = \int_0^t g(t-s)u(s)ds$ du système 1.
Condition initiale : $x(0) = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix}(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J} \end{bmatrix} u(s)ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix}(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J} \end{bmatrix} u(s)ds \end{aligned}$$

Donc finalement on en déduit :

$$g(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{J} \end{bmatrix}$$

4.2 Transformée de Laplace et fonction de transfert

Trouver la fonction de transert $Y(s) = G(s)U(s)$ de la réponse impulsionelle $y(t) = \int_0^t g(t-s)u(s)ds$ et en déduire la stabilité du système.

On rappelle le système 1 (avec $\frac{ml}{J} = \frac{mgl}{J} = 1$ pour faire simple) et $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0$:

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{1}$$
$$\dot{x_2} = x_1 + u \tag{2}$$
$$y = x_1 \tag{3}$$

$$\mathcal{L}(x_2) = X_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} x_2 ds$$
$$\mathcal{L}(\dot{x_2}) = sX_2(s) - x_2(0)$$
$$\mathcal{L}(\dot{x_1}) = sX_1(s)$$

De (2) on a : $sX_1(s) = X_2(s)$
De (3) on a : $sX_2(s) = X_1(s) + U(s)$
De (1) on a : $Y(s) = X_1(s)$
D'où : $s^2 X_1 = sX_2 = X_1 + U$ puis $X_1(s^2 - 1) = U$
Finalement :

$$Y = X_1 = \frac{U}{s^2 - 1}$$

et donc, la fonction de transfert s'écrit :

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

En regardant les pôles (1 et -1) on en déduit que le système est instable.

4.3 Transformée de Laplace de la dérivée

Montrons que $\mathcal{L}\frac{\delta f}{\delta t} = s\mathcal{L}f - f(0)$
Par une IPP, on pose $u = e^{-st}$ d'où $u' = -se^{-st}$ ainsi que : $v' = f'(t)$ d'où $v = f$
Donc :

$$\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f e^{-st} dt$$

Finalement :

$$\mathcal{L}\frac{\delta f}{\delta t} = s\mathcal{L}f - f(0)$$

4.4 Transformée de Laplace de l'intégrale

Montrons que $\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}\mathcal{L}f$
Par une IPP, on pose $u = \int_0^t f(\tau)d\tau$ d'où $u' = f$ ainsi que : $v' = e^{-st}$ d'où $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$
Donc :

$$\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Finalement :

$$\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}\mathcal{L}f$$

5 Pôles et zéros

Montrons que la fonction de transfert $G(s)$ d'une LTI s'écrit : $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
On part du système suivant (avec pour hypothèse $x(0) = 0$) :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Par transformées de Laplace :

$$sX - x(0) = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

D'où :

$$(sI - A)X = BU$$
$$X = (sI - A)^{-1}BU$$
$$Y = C(sI - A)^{-1}BU$$

Finalement la fonction de transfert :

$$G = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B$$

6 Contrôlabilité – observabilité

6.1 Contrôlabilité

Le système peut être transféré de tout état vers tout autre autre état ssi la matrice de controlabilité W_c est de rang plein.

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & AB^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans le cas du pendule inversé (avec $\frac{mgl}{J} = \frac{ml}{J} = 1$) :

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

Calculons :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme le rang de W_c est 2. Le système est contrôlable.

6.2 Observabilité

L'état peut être calculé à partir de la sortie si la matrice d'observabilté W_o est de rang plein.

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans le cas du pendule inversé :

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

Calculons :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme le rang de W_o vaut 2. Le système est observable.

7 Forme diagonale

Rappel : la fonction de transfert du pendule inversé $G(s) = \frac{1}{s^2-1}$
Elle s'écrit aussi :

$$G = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1}$$

Avec : $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

8 Contrôleur

La forme compagnon peut être obtenue (en évitant les changements de bases) grâce à :
xxx FAURE xxx
Par un changement de base $z = Fx$, d'où : $z = f_1 x_1 + f_2 x_2$, d'où :

$$\dot{z} = FAF^{-1}z + TBu = Az + Bu$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A+BF)x + Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+f_1 & f_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

On voudrait que le polynôme caractéristique ai les pôles -2 et -2 à savoir qu'il s'ecrive sous la forme :

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = -s(f_2 - s) - 1 - f_1 = s^2 - sf_2 - 1 - f_2$$

On en deduit $f_1 = -5$ et $f_2 = -4$.
Donc

8.1 Scilab

```
sl=syslin('c', [0, 1; -10, -10], [0; 10], [1, 0]);
t=0:0.05:20;
a=csim("step",t,sl);
plot(a);

deff('u=input(t)','u=sin(t)')
t=0:0.05:20;
a = csim(input,t,sl)
```

9 Observateur

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule :

$$A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 1-k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $A - KC$ s'écrit :

$$P(\lambda) = (k_1 + \lambda)\lambda - 1 + k_2 = \lambda^2 + \lambda k_1 - 1 + k_2$$

On veut que P soit de la forme $(\lambda+10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$. On a donc : $k_1 = 20$ et $k_2 = 101$.
On réutilise l'expression de $U = FX + v$ avec $f_1 = 4$ et $f_2 = 5$ (cf. section précédente).
D'où :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + v\right) \\ \dot{\hat{X}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 101 \end{bmatrix}(x_1 - \hat{x_1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + v\right) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Matriciellement l'observateur est :

$$\begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ 20 & 0 & -20 & 1 \\ 101 & 0 & -106 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hat{x_1} \\ \hat{x_2} \end{bmatrix}$$

XXXX calculer $\dot{\hat{X}}$

9.1 Scilab

```
sl=syslin('c', [0, 1, 0, 0; 1, 0, -5, -4; 20, 0, -20, 1; 101, 0, -106, -4],
               [0; 16/5; 0; 16/5], [1, 0, 0, 0]);
t=0:0.05:20;
a=csim("step", t, sl);
plot(a);
nyquist(sl, 0.01, 100);
```

10 Passer d'une fonction de transfert à un système d'états directement observable

10.1 Exercice 1

Soit :

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2+2}U(s)$$

On le réecrit différemment :

$$\frac{(s^2+2)}{s-1}Y = U$$

On pose :

$$X_1 = \frac{sY}{D} \text{ et } X_2 = \frac{Y}{D}$$

On obtient les égalités suivantes :

$$sX_2 = X_1$$
$$sX_1 + 2X_2 = U$$

Soit :

$$\begin{array}{rcccc} sX_2 = & & -2X_2 & +U \\ sX_1 = & X_1 & & \\ Y = & X_1 \text{ - } X_2 & & \end{array}$$

On obtient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10.2 Exercice 2

Soit :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+1}U(s)$$

On le réecrit différemment :

$$\frac{s+1}{s^3+s^2+1}Y = U$$

On pose :

$$X_1 = \frac{s^2Y}{D} \text{ et } X_2 = \frac{sY}{D} \text{ et } X_3 = \frac{Y}{D}$$

On a :

$$U = sX_1 + X_1 + X_3$$
$$X_1 = sX_2$$
$$X_2 = sX_3$$
$$Y = X_2 + X_3$$

D'où :

$$\begin{array}{rcccc} sX_1 = & -X_1 & & -X_3 & +U \\ sX_2 = & X_1 & & & \\ sX_3 = & & X_2 & & \\ Y = & & X_2 & +X_3 & \end{array}$$

Finalement, on obtient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11 Passer d'une fonction de transfert à un système d'états directement contrôlable

11.1 Exercice 1

Soit :

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+1}U(s)$$

On le réecrit différemment :

$$(s^2+1)Y = (s+1)U$$

Y observe X_1, d'où : $Y = X_1$
On le réecrit différemment :

$$s^2X_1 + X_1 = sU + U$$

On pose :

$$sX_1 = \frac{-1}{s}X_1 + U + \frac{1}{s}U = U + \frac{1}{s}(U - X_1)$$

Puis :

$$X_2 = \frac{1}{s}(U - X_1)$$

D'où le système :

$$\begin{array}{rccc} sX_1 = & & X_2 & +U \\ sX_2 = & -X_1 & & +U \\ Y = & X_1 & & \end{array}$$

Finalement, on obtient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

12 Nyquist

12.1 Theoreme

Le diagrame de Nyquist permet de determiner graphiquement si un systeme est stable.

Un modele est stable si le point de coordonnees $(-1, 0)$ est entoure dans le sens direct un nombre de fois égal au nombre de poles instables de la fonction de transfert.

Plus la courbe passe pres du point -1 moins le modele est stable par rapport aux erreurs de modelisations.

12.2 Scilab et diagramme de Nyquist

```
s=poly(0,'s');
h=syslin('c',1/(s^2+s+1))
nyquist(h,0.01,100);

t=0:0.05:20;
a=csim("step",t,h);
plot(a);
```

12.3 Tracer à la main un diagramme de Nyquist

Soit la fonction de transfert $G(s) = \frac{1}{s+1}$

$$G(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} = x(\omega) + iy(\omega)$$

Avec : $x = 1/(1+\omega^2)$ et $y = -1/(1+\omega^2)$
En mettant $y/x = -\omega$ on a : $x = x^2 + y^2$
Ou equivalent :

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$$

C'est l'équation du cercle de coordonnées $(1/2, 0)$ et de rayon $1/2$.

12.4 Exemple

```
 s=poly(0,'s');
 slin=(s+1)/(s^2+5*s+1-0.001*s^5);
 Plant=syslin('c',slin);

 t=0:0.1:50;
 a=csim('step',t,Plant);
 plot(a);

// poles et zeros
plzr(Plant);

//
// PID
//
// k: gain
// Ti: proportionnelle integrale
// Td: proportionnelle derivee
k=10; Ti=0.1; Td=0;

// controleur
con=k+1/(Ti*s)+s*Td;
//boucle fermee
bf=con*slin/(1+con*slin);
bflin=syslin('c',bf);
aa=csim('step',t,bflin);
plot(aa);

//nyquist
h=syslin('c',con*slin);
nyquist(h, 0.03,10);
```

En conclusion : XXX

13 Equation de la programmation dynamique

On prend l'exemple de barrage où $a(t)$ est l'apport d'eau dans le barrage. La quantité d'eau est $x(t)$. Le barrage écoule $u(t)$ d'eau (cf. Fig 2).

On cherche à maximiser $\sum_{n=0}^{N} E_t$ où l'énergie $E_t = h(x_t)u_t$.

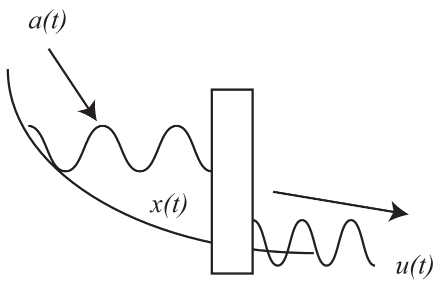

Fig. 2 – a_t l'apport, x_t le stock (ou quantité), u_t ce qui découle

A l'instant $t+1$ la quantité d'eau est : $x(t+1) = x(t) + a(t) - u(t)$.

On calcule la Fonction Valeur (ou Fonction de Bellman) à l'instant t :

$$V(x,t) = Max \left\{ \sum_{n=t}^{N} E_t \;\middle|\; X_t = x \right\}$$

On veut écrire $V(x,t)$ en fonction de $V(x,t+1)$. Pour cela, on prend une décision u et x sur 1 période. On connait le coût instantané, c'est : $h(x)u$. A l'instant $t+1$, j'arrive à l'état : $V(x,t+1) = x + a(t) + u$. Par hypothèse de récurrence, on connait le coût jusqu'à la fin : c'est $V(t+1)$. On résume ceci par le diagramme suivant (Fig. 3).

Donc :

$$V(x,t) = Max \left\{ h(x)u + V(x + a(t) + u, t+1) \right\}$$

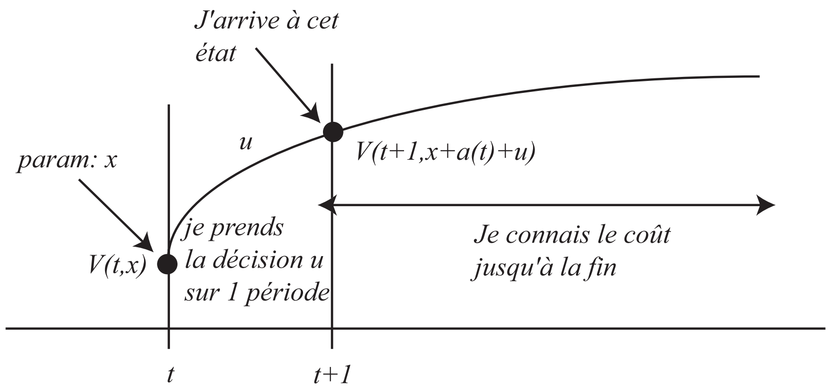

FIG. 3 – Principe de la prog dyna : faire une récurrence du futur vers le passé

14 Pontriagyn

On cherche à minimiser $f(x)$ sachant $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0$.
Si j'ai des contraintes, je dualise le système en utilisant le lagrangien. Sinon j'intégre les données directement.
Pour dualiser, il faut resoudre le systeme d'equation aux derivees partielles du Lagrangien egales a 0.
On rappelle que la formule du Lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda)$ vaut :

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_n g_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Donc le systeme a resoudre est :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x_i} = 0$$
$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \lambda_i} = 0 \Rightarrow g_i(x) = 0$$

14.1 Exercice 1

Minimiser $x_1^2 + x_2^2$ sachant $x_1 + x_2 = 1$
Le Lagrangien vaut :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$
$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$$

Le systeme a resoudre est :

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x_1} = 0 \Rightarrow 2x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = -\lambda/2$$
$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -\lambda/2$$
$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \lambda} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow -\lambda - 1 = 0$$

Finalement on a : $\lambda = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1/2$.

14.2 Exercice 2

Minimiser $\int_0^1 (x(t)^2 + u(t)^2)dt$ sachant $\dot{x(t)} = u(t)$
Par definition, le Lagrangien vaut (C est le contour) :

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \int_0^T (C(x, u) + \lambda(\dot{x} - f(x, u))\, dt$$

Avec, dans notre cas : $C(x, u) = x^2 + u^2$ et $f(x, u) = \dot{x} - u$.
On calcule : $\mathcal{L}(x + \delta x, u + \delta u, \lambda + \delta\lambda) - \mathcal{L}(x, u, \lambda)$

$$= \int_0^T \Big((x + \delta x)^2 + (u + \delta u)^2 + (\lambda + \delta\lambda)(x \dot{+} \delta x - u - \delta u) - (x^2 + u^2 + \lambda(\dot{x} - u)\Big)\, dt$$

$$= \int_0^T \Big(2x\delta x + 2u\delta u + \delta\lambda(\dot{x} - u) + \lambda(\dot{\delta x} - \delta u)\Big)\, dt$$

$$= \int_0^T \Big((\delta x 2x + \lambda \dot{\delta x}) + (2u - \lambda)\delta u + (\dot{x} - u)\delta\lambda \Big)\, dt$$

On integre par partie $\int_0^T \delta x 2x + \lambda \dot{\delta x}$, et on obtient :

$$\int_0^T \Big(\delta x 2x - \dot{\lambda}\delta x \Big)\, dt + [\lambda \delta \lambda]_0^T = \lambda(T)\delta x(T) - \lambda(0)\delta x(0) = \int_0^T \Big((2x - \dot{\lambda})\delta x \Big)\, dt$$

Donc :

$$= \int_0^T \Big((2x - \dot{\lambda})\delta x + (2u - \lambda)\delta u + (\dot{x} - u)\delta\lambda \Big)\, dt$$

On veut que pour tout $\delta x, \delta u, \delta \lambda$ soit egale a zero. Donc on obtient le systeme suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} - u &= 0 \\ 2u - \lambda &= 0 \\ 2x - \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

14.3 Exercice 3

Minimiser $\int_0^T \left((x^2 + u^2) \right) dt + (x(t))^2$ sacahant $\dot{x} = x + u$.
On rappelle : $C = x^2 + u^2$ et $f = x + u$

$$\int_0^T = \Big((x + \delta x)^2 + (u + \delta u)^2 + (\lambda + \delta\lambda)(\dot{x} + \dot{\delta x} - x - \delta x - u - \delta u) - x^2 - u^2 - \lambda(\dot{x} - x - u) \Big)\, dt + 2x(T)\delta x(T)$$

$$= \int_0^T \Big(2x\delta x + 2u\delta u + \lambda \dot{\delta x} - \lambda\delta x - \lambda \delta u + \delta\lambda(\dot{x} - x - u) \Big)\, dt + 2x(T)\delta x(T)$$

Apres l'IPP :

$$= \int_0^T \Big((2x - \lambda - \dot{\lambda})\delta x + (2u - \lambda)\delta u + (\dot{x} - x - u)\delta\lambda \Big)\, dt + (2x(T) + \lambda(T))\, \delta x(T)$$

Finalement on a le systeme :

$$\begin{aligned} 2x - \lambda - \dot{\lambda} &= 0 \\ 2u - \lambda &= 0 \\ \dot{x} - x - u &= 0 \\ \lambda(T) &= -2x(T) \end{aligned}$$

14.4 Exercice 4

Sachant $x(0) = 0$ et $x(1) = 1$ on veut : $Min_{x(.)} \left\{ J(x) = \int_0^T \left(x^2 + \dot{x}^2 \right) dt \right\}$

$$\begin{aligned} \delta J &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= \int_0^T \Big((x + \delta x)^2 + (\dot{x} + \dot{\delta x})^2 \Big)\, dt \\ &= \int_0^T \Big(2x\delta x + 2\dot{x}\dot{\delta x} \Big)\, dt \end{aligned}$$

Aprés intégration par partie :

$$[\dot{x}\delta x]_0^1 + \int_0^1 (-2\ddot{x}\delta x + 2x\delta x)\, dt$$

A cause de la classe de fonctions que l'on prend ($x(0) = 0$ et $x(1) = 1$) toutes les fonctions vérifient cette propriété : elles passent par ces 2 points.
Donc : $\dot{x}(1)\delta x(1) - \dot{x}\delta x(0) = 0$.
Pour tout $\delta x(.), \delta J$ doit valoir 0. D'où : $2x - 2\ddot{x} = 0$
Pour trouver les solutions de cette équation diff du deuxième ordre ce fait en deux temps :

- La solution est du type (sans la constante) est : $e^{\lambda t}$. D'où : $-\lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} = 0$ Ce qui ce simplifie par $-\lambda^2 + 1 = 0$
- La solution est du type avec la constante est : $Ae^{\lambda t} + Be^{\lambda t}$
  Pour $t = 0$ on a : $A = -B$.
  Pour $t = 1$ on a : $Ae^1 + Be^{-1} = 1$
  On en déduit A et B.

14.5 Rappel sur comment faire une IPP

$$\int_a^b \underset{\substack{\Downarrow \\ \dot{f}}}{f} \; \overset{\substack{G \\ \Uparrow}}{g} = [fG]_a^b - \int_a^b \dot{f} G$$

Dans le cas de l'exercice 14.4 on a :

$$\int_0^1 \underset{\substack{\Downarrow \\ \ddot{x}}}{\dot{x}} \; \overset{\substack{\delta x \\ \Uparrow}}{\dot{\delta x}} = [\dot{x}\delta x]_0^1 - \int_0^1 \ddot{x}\delta x$$

15 Application Scicos, SynDEx

Une voiture V_2 de position $x_2(t)$ suit une autre V_1 de position $x_1(t)$ et essaie de garder une distance l entre elles. La voiture V_1 accélère ou ralentit aléatoirement. Les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont respectivement la vitesse de V_1 et la distance entre les deux voitures. La voiture V_2 contrôle l'accélération de V_1.

On a le système suivant :

$$\begin{aligned}
\ddot{x_1} &= k_1 u \\
\ddot{x_2} &= k_2(x_1 - x_2 - l) \\
y_1 &= \dot{x_1} \\
y_2 &= x_1 - x_2 - l
\end{aligned}$$

Pour simplifier le système on fait un changement de variable : $z = x_2 + l$, puis on renomme z en x_2. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
\ddot{x_1} &= k_1 u \\
\ddot{x_2} &= k_2(x_1 - x_2) \\
y_1 &= \dot{x_1} \\
y_2 &= x_1 - x_2
\end{aligned}$$

16 Etude complète d'un pendule inversé sur un chariot

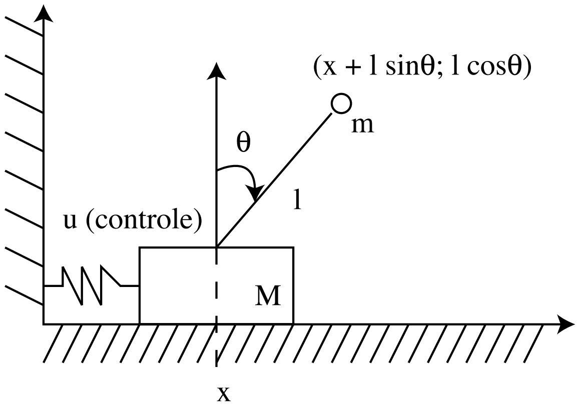

Fig. 4 – Modèle

16.1 Le modèle

16.1.1 Les énergies

L'énergie cinétique du chariot :

$$\mathcal{E}_c^{chariot} = 1/2M\dot{x}^2.$$

L'énergie potentielle du chariot :

$$\mathcal{E}_p^{chariot} = ux.$$

L'énergie cinétique du penduke :

$$\mathcal{E}_c^{pendule} = 1/2m\left(\left(\frac{d}{dt}(x + l\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2\right),$$

$$= 1/2m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta).$$

L'énergie potentielle du pendule :

$$\mathcal{E}_p^{pendule} = mgl\cos\theta$$

16.1.2 Principe de la moindre action

TODO
On obtient le système suivant :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta) = u$$
$$l\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}(\dot{x}\cos\theta) + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta = g\sin\theta$$

Soit :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = u$$
$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta = g\sin\theta$$

16.1.3 Linéarisation

En supposant que θ est petit on a :

$$\ddot{x} + l_2\ddot{\theta} = f$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta = mgl\sin\theta$$

Avec $l_1 = \frac{Ml}{M+m}, l_2 = \frac{ml}{M+m}, f = \frac{u}{M+m}$