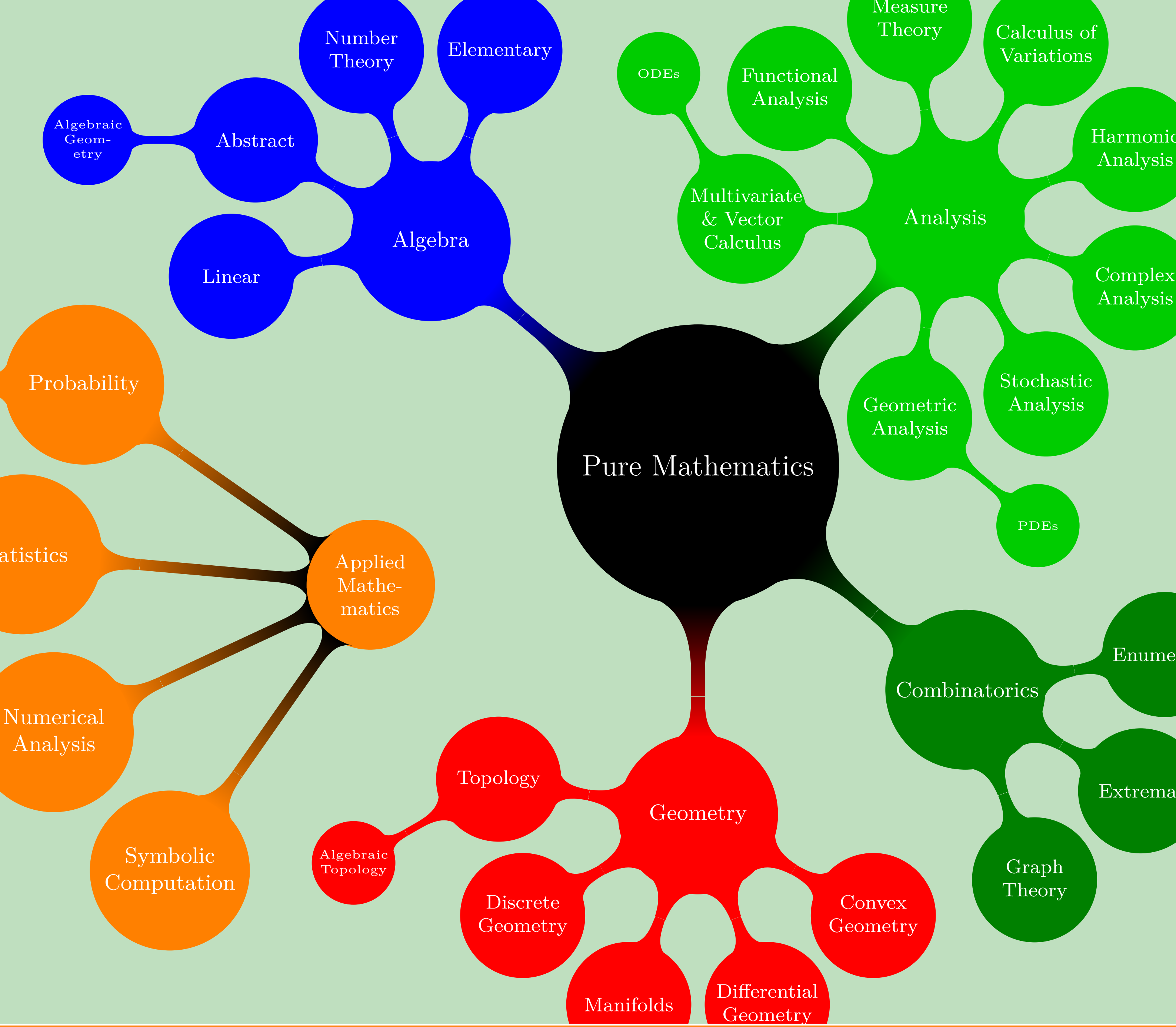

利息理论

made by LaTeX

作者：Icecream

目录

Introduction

保险精算研究的对象是年金, 现金流和债券，年金的性质是研究现金流和债券的基础.

利息理论是精算专业的一门基础课．几乎所有国家和地区的精算师资格考试都会涉及该门课程的内容。最近几年．国际上主要的精算师协会［如北美寿险精算师协会 (SOA)、北美非寿险精算师协会 (CAS) 和中国精算师协会］在精算师资格考试中都把该门课程更名为金融数学．但利息理论仍然是其主体．只是在此基础上增加了金融衍生产品的一些基本内容。

在金融学和财务管理等专业课程中．都会涉及利息理论的一些基本内容．但对这部分内容的介绍各有侧重，系统性不够．不易形成完整的利息理论知识体系。利息理论课程把这类蜇化分析方法整合在一起，可以在一定程度上提高教学效率，同时可以避免不同课程在这部分内容上的重复。

第一章 利息度量

内容提要

- ❑ 累积函数
- ❑ 利息力
- ❑ 贴现

1.1 累积函数

定义 1.1. 累积函数

时间零点的 1 元在时间 t 的累值，记为 $a(t)$

性质 (1) $a(0)=1$

(2) $a(t)$ 通常是时间的增函数

(3) 当利息连续产生时，$a(t)$ 是时间的连续函数

1.2 贴现

定义 1.2. 贴现

$v=\frac{1}{1+i}$

$d=iv$

$i=\frac{1}{v}-1$

笔记 i: 利率,v: 贴现因子,d：贴现函数

定义 1.3. 利息力

设可积函数连续可导, 则称

$$\delta_t=\frac{a'(t)}{a(t)}=[\ln a(t)]'$$

为时刻 t 的利息力

衡量利息增长速率与利息本身大小的比值很有意思的是，我们把 t 当做横坐标的时候，相当于 t 是定下来的, 以这个为标准来用利息力来计算累积函数

$$\int_0^t \delta_s ds=\int_0^t \frac{a'(s)}{a(s)}ds=\int_0^t [\ln a(s)]'ds=\ln a(t)$$

性质

$$\ln\left(a\left(t_2\right)\right)-\ln\left(a\left(t_1\right)\right)=\int_{t_1}^{t_2}\delta_t dt \text{ or } a\left(t_2\right)=a\left(t_1\right)e^{\int_{t_1}^{t_2}(\delta_t)dt}$$

We can also write, assuming that $a(0)=1$

$$\ln(a(t))=\int_0^t \delta_\tau d\tau \text{ or } a(t)=e^{\int_0^t \delta_\tau d\tau}$$

性质 累积函数：

$$a(t)=\exp\left(\int_0^t \delta_s ds\right)$$

贴现函数：

$$a^{-1}(t)=\exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right)$$

Timeline:a essentail point of view for problem-solving

$$A \xrightarrow{\frac{a(t_2)}{a(t_1)}} A\frac{a(t_2)}{a(t_1)}$$

例 1.1 compound interest:$a(t)=(1+i)^t$

$$A\cdot\frac{a(t_2)}{a(t_1)}=A(1+i)^{t_2-t_1}$$

例 1.2 simple interest:$a(t)=1+it$

$$A\cdot\frac{a(t_2)}{a(t_1)}=A\cdot\frac{1+it_2}{1+it_1}$$

$$(1+\frac{i^{(n)}}{n})^n=(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

练习 1.1 在第 1 月末支付 314 元的现值与第 18 月末支付 271 元的现值之和, 等于在第 T 月末支付 1004 元的现值. 年实际利率为 5%. 求 T

解

$$1004v^{T/12}=314v^{1/12}+271v^{18/12}\Rightarrow T=141.6$$

第 二 章 等额年金

内容提要

- ❑ 每年支付 m 次的年金
- ❑ 连续支付的等额年金

2.1 符号一览

$a_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$

2.2 等额年金

定义 2.1. 年金的终值与现值

$a_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}$

$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i}$ ♣

定义 2.2. Accumulated Value of an n -Payment Annuity-Immediate of 1 Per Period

The symbol $s_{\overline{n}|}$ denotes the accumulated value, at the time of (and including) the final payment of a series of n payments of 1 each made at equally spaced intervals of time, where the rate of interest per payment period is i

$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|} &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i) + 1 \\ &= \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n-1}{i} \end{aligned}$$ ♣

$$a_{\overline{n}|} \xrightarrow{(1+i)^n} s_{\overline{n}|}$$

$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-v^n}{\frac{1}{v}-1}$

```
#wolframalpha
(1-(1/(1+i)^n))/i=(1-v^n)/(1/v-1)
```

$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}$

$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i}$

$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{d}$

性质 $1 = ia_{\overline{n}|} + v^n$

性质

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \times (1+i)$$
$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|+1}$$
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\bar{n}} \times (1+i)$$
$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n+1}|} - 1$$

定义 2.3. 每年支付 m 次年金

$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$ ♣

2.3 永续年金 (Perpetuity)

期初付永续年金的现值

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$$

期末付永续年金的现值

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{v}{1-v} = \frac{v}{d} = \frac{v}{iv} = \frac{1}{i}$$

与有限年金的联系

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\pi} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-v^n}{d} = \tfrac{1}{d}$$
$$a_{\overline{n}|} = \tfrac{1-v^n}{i} = \tfrac{1}{i} - v^n \tfrac{1}{i} = a_{\overline{\infty}|} - v^n a_{\overline{\infty}|} \Leftrightarrow a_{\infty} = a_{\overline{\infty}|} + v^n a_{\overline{\infty}|}$$

对期初付年金也有相应的关系：$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \ddot{a}_{\pi} + v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|}$

第三章 变额年金

内容提要

- ❏ 递增年金
- ❏ 递减年金
- ❏ 复递增年金
- ❏ 每年支付 m 次的变额年金
- ❏ 连续支付的变额年金

3.1 符号一览

$(Ia)_{\overline{n|}}$: 第一年支付 1 元

$(Ia)_{\overline{n|}}^{(m)}$: 第一年支付 1 元，以后每年支付增加 1 元，每年支付 m 次

$(Ca)_{\overline{n|}}$: 复递增年金

3.2 变额年金

时间	0	1	2	3	...	n-1	n
递增年金	$(Ia)_{\overline{n\|}}$	1	2	3	...	n-1	n
等额年金	$a_{\overline{n\|}}$	1	1	1	...	1	1
	$va_{\overline{n\|}}$		1	1	...	1	1
	$v^2a_{\overline{n\|}}$			1	...	1	1

定义 3.1. 递增变额年金

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + 3v^3 + \cdots + (n-1)v^{n-1} + nv^n = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$$

♣

注 $(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i}$

$(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}}$

$$(Ia)_{\overline{n|}} \xrightarrow{(1+i)^n} (Is)_{\overline{n|}}$$

3.3 复递增年金

$(Ca)_{\overline{n|}}$: 复递增年金

定义 3.2. 期末付复递增年金

$(Ca)_{\overline{n}|} = \frac{(a)_{\overline{n}|}}{1+r}(r \neq i)(j = \frac{i-r}{1+r})$ ♣

注 $(Ca)_{\overline{n}|} = v + (1+r)v^2 + (1+r)^2v^3 + \cdots + (1+r)^{n-1}v^n$

3.4 每年支付 m 次的递增年金

$$(Ia)_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i^{(m)}}$$

第四章 收益率

内容提要

- 收益率
- 再投资
- 基金的利息度量
- 基金

4.1 收益率

已知一个项目的现金流，如何评价其收益水平的高低？

4.1.1 净现值

(1) 净现值法 (net present value, NPV)

$$NPV(i) = \sum_{t=0}^{n} v^t R_t = \text{资金流入现值} - \text{资金流出现值}$$

4.1.2 收益率法

资金流入的现值与资金流出的现值之差就是净现值，所以收益率也是使得净现值等于零的利率：

$$NPV(i) = \sum_{t=0}^{n} v^t R_t = 0$$

4.2 基金的利息度量

定义 4.1. 币值加权收益率

Suppose the following information is known: (i) the balance in a fund at the start of the year is A

(ii) for $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$, the net deposit at time t_k is amount C_k (positive for a net deposit, negative for a net withdrawal), and

(iii) the balance in the fund at the end of the year is B Then the net amount of interest earned by the fund during the year is $I = B - \left[A + \sum_{k=1}^{n} C_k\right]$, and the dollar-weighted rate of return earned by the fund for the year is

$$\frac{I}{A + \sum_{k=1}^{n} C_k (1 - t_k)}$$

---度量投资者的业绩

♣

注 $(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$

定义 4.2. 时间加权收益率

Suppose the following information is known:

(i) the balance in a fund at the start of the year is A

(ii) for $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$, the net deposit at time t_k is amount C_k(positive for a net deposit, negative for a net withdrawal)

(iii) the value of the fund just before the net deposit at time t_k is F_k, and

(iv) the balance in the fund at the end of the year is B The time-weighted return rate earned by the fund for the year is

$$\left[\frac{F_1}{A} \times \frac{F_2}{F_1 + C_1} \times \frac{F_3}{F_2 + C_2} \times \cdots \times \frac{F_k}{F_{k-1} + C_{k-1}} \times \frac{B}{F_k + C_k}\right] - 1$$

度量基金经理人的业绩 ♣

4.3 再投资

例 4.1 期初投资 1 元，投资期限为 n 年，年实际利率为 i , 如果每年产生的利息按照年实际利率 j 进行用投资, 试计算在第 n 年末的累积值与该项投资的年平均收益率。

解 (1) 该投资在第 n 年末的黑积值为 $1 + i \cdot s_{\overline{n}|j}$

(2) 假设该项投资的年平均收益率为 X，则由价值方程

$$1 + i \cdot s_{\overline{n}|j} = (1 + x)^n \Longrightarrow x = \left(1 + i \cdot s_{\overline{n}|j}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

特别地，当 $j = i$ 时 , $x = i$

4.3.1 修正收益率

如果再投资的利率与筹集资金的利率不同时, 则评价项且应该使用修正收益率 (modified rate of internal rate) 在计算修正收益率时

对资金流出使用筹资的利率计算其现值

对资金流入使用再投资的利率计算其累积值

4.4 基金

基金的收益：

收入：利息（债券，银行存款）、股息、资本利得（股票价格上涉）

净收益：收入 - 费用基金包括不同时期投资，如何把基金收入分配给不同时期的投资?

分配方法：

投资组合法 (portfolio method)

投资年度法 (investment year method)

第 五 章 债务偿还方法

内容提要

- ❑ 等额分期偿还
- ❑ 变额分期偿还
- ❑ 等额偿债基金

5.1 分期偿还法

5.1.1 等额分期偿还

每次偿还的金额:$R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|}}$

未偿还本金:$L_k = Ra_{\overline{n-k}|} = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|}$

支付的本金: 支付的利息:$I_k = iL_{k-1} = iRa_{\overline{n-k+1}|} = R(1-v^{n-k+1})$

$$R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|}}$$

$$I_k = iL_{k-1}$$

$$L_k = Ra_{\overline{n-k}|}$$

✍ **练习 5.1** 贷款一笔钱，n 年内等额分期付款，每年末还一次，偿还金额是 X，第一年利息是 604RMB，第三年是 593.75，第五年利息是 582.45，计算 X

笔记 支付的利息:$I_k = iL_{k-1} = iRa_{\overline{n-k+1}|} = R(1-v^{n-k+1})$

✍ **练习 5.2** 按年实际利率 i 偿还一笔 1000 元的贷款。已知:

（1）在第 6 年末偿还第一笔款项

（2）然后每年末等额偿还一次在第 15 年末可以偿清这笔贷款（即一共偿还 10 次）

（3）在第 10 年末的付款结束后。未偿还本金余额为 908.91 元

试计算第 5 年末的未偿还本金余额

解 设等额付款金额为 $R : Ra_{\overline{5}|i} = 908.81, Ra_{\overline{10}|} = 1000(1+i)^5$

$51000 \times (1+i)^5 = 1510.6$ 元

5.2 等额偿债基金

区别: 偿还本金采用不同的计息方式

$$D = \frac{L_0}{s_{\overline{n}|j}}$$

$$R = I + D$$

$$L_k = L_0 - Ds_{\overline{n}|j}$$

第 六 章　债务价值分析

内容提要

- 定价公式
- 等额偿债基金
- 变额分期偿还

6.1　符号一览

P : 债券价格 (bond price)

i : 债券的到期收益率（yield-to-maturity rate)，即投资人购买债券者购买债券所要求的收益率

F : 债券的面值 (par value,face amount, nominal value)，即债券到时支付给债券持有人的金额，也称为票面价值或到期值

r : 债券的息票率 (coupon rate per payment period)

rF 息票收入

i_c : 债券的当期收益率：$i_c = \frac{rF}{P}$

C 债券的偿还值 (redemption payment)，通常等于侦券面值 F

n : 息票的支付次数 (number of coupon payments)

g : 债券的修正息票率, $g = \frac{rF}{C}$

债券定价原理：到期偿还值 + 债券未来息票

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

笔记

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -\left(\sum_{t=1}^{n} rFtv^{t+1} + Cnv^{n+1}\right) < 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \sum_{t=1}^{n} rFt(t+1)v^{t+2} + Cn(n+1)v^{n+2} > 0$$

定价公式主要包含：

(1) 基本公式

(2) 溢价公式

(3) 基价公式

(4) Makeham 公式

$$P = \begin{cases} rFa_{\overline{n}|} + Cv^n & \text{基本公式} \\ C + C(g-i)a_{\overline{n}|} & \text{溢价公式} \\ G + (C-G)v^n & \text{基价公式} \\ \frac{g}{i}(C-K) + K & \text{Makeham 公式} \end{cases}$$

(1) 息票率：

$$r = \frac{\text{息票收入}}{\text{面值}(F)}$$

(2) 修正息票率：

$$g = \frac{\text{息票收入}}{\text{偿还值}(C)}$$

(3) 到期收益率：

$$i = \frac{\text{息票收入}}{\text{基价}(G)}$$

(4) 当期收益率：

$$i_c = \frac{\text{息票收入}}{\text{债券价格}(P)}$$

第七章 利率风险

内容提要

- Macaulay duration
- 修正久期
- 凸度

定义 7.1. 利息力

设可积函数连续可导，则称

$$\delta_t = \frac{a'(t)}{a(t)} = [\ln a(t)]'$$

为时刻 t 的利息力

衡量利息增长速率与利息本身大小的比值很有意思的是，我们把 t 当做横坐标的时候，相当于 t 是定下来的，以这个为标准来用利息力来计算累积函数

$$\int_0^t \delta_s ds = \int_0^t \frac{a'(s)}{a(s)} ds = \int_0^t [\ln a(s)]' ds = \ln a(t)$$

7.1 Macaulay duration

定义 7.2. Macaulay duration

$D_{麦} = \frac{\sum_{t>0} t \cdot R_t e^{-\delta t}}{\sum_{t>0} \cdot R_t e^{-\delta t}}$

笔记 一笔 n 年期贷款，年实际利率为 i，按年等额分期偿还，求该笔贷款的麦考利久期。

解

$$\begin{aligned} D_{麦} &= \frac{\sum\limits_{t>0} t \cdot R(1+i)^{-t}}{\sum\limits_{t>0} R(1+i)^{-t}} = \frac{(Ia)_{\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}}} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i \cdot a_{\overline{n|}}} = \frac{(1+i)a_{\overline{n|}}}{i \cdot a_{\overline{n|}}} - \frac{nv^n}{i \cdot \frac{1-v^n}{i}} \\ &= \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

7.1.1 修正久期

定义 7.3. 修正久期

$D = \frac{D_{麦}}{1+\frac{y}{m}}$

笔记 债券面值为 F，期限为 n，到期时按面值偿还，年息票率为 r，到期收益率 r，求 $D_{麦}$

$$D_{麦} = \frac{\sum_{t=1}^n tv^t rF + nv^n F}{\sum_{t=1}^n rFv^t + v^n F}$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} tv^t r + nv^n}{\sum_{t=1}^{n} rv^t + v^n}$$

练习 7.1 某 2 年期债券的面值为 1000 元，年息票率为 8

解 该债券的价格为

$$P = 2 \times 40 a_{\overline{2}|4\%}^{(2)} + 1000 \times (1 + 4\%/2)^{-4} = 1076.16(\text{ 元})$$

麦考利久期为

$$D_{麦} = \frac{\sum_{t>0} t \cdot R_t (1+i)^{-t}}{P} = \frac{2036.19}{1076.16} = 1.89$$

修正久期:

$$D = \frac{D_{麦}}{1 + i^{(2)}/2} = \frac{1.89}{1 + 4\%/2} = 1.86$$

7.1.2 修正久期

定义 7.4. 有效久期

$D_{效} = \frac{P_- - P_+}{2\Delta y \cdot P}$

P_+ : 收益率上升 Δy 时的债券价格

P_- : 收益率下降 Δy 时的债券价格

7.2 凸度

定义 7.5. 凸度

于名义收益率 Y 的凸度:

$$C = \frac{P''(y)}{P(y)} = \frac{1}{P(y)} \left[\sum_{t>0} t \left(t + \frac{1}{m} \right) R_t \left(1 + \frac{y}{m} \right)^{-mt-2} \right]$$

特别地，当 $m = 1$ 时，y 即为实际利率 i, 此时，凸度化简为:

$$C = \frac{P''(i)}{P(i)} = \frac{1}{P(i)} \left[\sum_{t>0} t(t+1) R_t (1+i)^{-t-2} \right]$$

定义 7.6. 有效凸度

$$C_{麦} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t>0} t^2 \cdot R_t e^{-\delta t}}{P(\delta)} = \sum_{t>0} t^2 \cdot \frac{R_t e^{-\delta t}}{\sum_{t>0} R_t e^{-\delta t}}$$

笔记 凸度可以用麦考利久期和麦考利凸度表示为:

$$C = (C_{麦} + D_{麦}) \cdot (1+i)^{-2}$$

7.3 小结

$$P(y)=\sum_{i=0} R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}$$

马考勒久期: $\mathrm{MacD}=-\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}=\frac{\sum_{i>0}tR_t\mathrm{e}^{-\delta t}}{P}$
马考勒凸度 : $\mathrm{Mac}\,C=\frac{P''(\delta)}{P}=\frac{\sum_{t>0}t^2R_t\mathrm{e}^{-\delta t}}{P}$
修正久期 : $D=-\frac{P'(y)}{P(y)}=\frac{MacD}{1+y/m}$
凸度 : $C=\frac{P''(y)}{P(y)}=\frac{1}{P(y)}\left[\sum_{t>0}t\left(t+\frac{1}{m}\right)R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-nt-2}\right]$
有效久期 : $EffD=\frac{P_{-}-P_{+}}{P_0(2\Delta y)}$
有效凸度 : $EffC=\frac{(P_{+}+P_{-}-2P_0)}{(\Delta y)^2P_0}$