

Зміст

1	Теорія прийняття рішень	3
1.1	Загальна характеристика задач прийняття рішень. Основні компоненти задач прийняття рішень.	3
1.1.1	Основні компоненти задач прийняття рішень	3
1.2	Задачі стохастичного програмування	4
1.2.1	М-модель стохастичного програмування	5
1.2.2	Р-модель стохастичного програмування	5
1.2.3	МР-модель стохастичного програмування	5
1.2.4	РМ-модель стохастичного програмування	5
1.2.5	Зв'язок між Р-моделью та М-моделью	5
1.2.6	Класи задач стохастичного програмування	6
1.3	Одноетапні задачі стохастичного програмування	6
1.3.1	Лінійні задачі стохастичного програмування	7
1.4	Двухетапні задачі стохастичного математичного програмування	9
1.5	Прямі методи стохастичного програмування. Метод проектування СКГ	10
1.5.1	Властивості оператора π_x	12
1.5.2	Метод проектування СКГ	12
1.5.3	Метод стохастичної апроксимації	14
1.6	Прийняття рішень в нечітких умовах	15
1.6.1	Нечіткі множини та операції над ними	15
1.6.2	Операції над нечіткими множинами	16
1.6.3	Властивості множин рівня α	16
1.6.4	Декомпозиція множини	17
1.7	Нечіткі відношення	17
1.7.1	Операції над нечіткими відношеннями	17
1.7.2	Композиції нечітких відношень	17
1.8	Нечітке відношення нестрогої переваги	18
1.9	Прийняття рішень за кількома критеріями	19
1.9.1	Підхід Белмана-Заде	20
1.9.2	Класифікація задач нечіткого математичного програмування	20
1.10	Нечіткі відображення. Принципи узагальнення Зеде-Орловського	22
1.10.1	Принцип узагальнення Зеде	22
1.10.2	Принцип узагальнення Орловського	22
1.10.3	Образ нечіткого відношення	23

1.10.4	Властивості узагальненого нечіткого відношення нестрогої переваги	23
1.11	Багатокритерійні задачі прийняття рішень	25
1.12	Знаходження функції приналежності нечітких множин	26
1.12.1	Метод парних порівнянь Томаса-Саті	26
1.13	Наближений метод виконання операцій над нечіткими числами . .	26
2	Практика	27
2.1	Складання математичних моделей	27
2.1.1	Задача №2	27
2.1.2	Завдання №3	28
2.2	Четверта практика	29
2.3	Шоста практика	30
2.4	Практика	31
2.5	Література	32

Розділ 1

Теорія прийняття рішень

1.1 Загальна характеристика задач прийняття рішень. Основні компоненти задач прийняття рішень.

12.02.2014

1.1.1 Основні компоненти задач прийняття рішень

- **Суб'єкт** - особа, або група осіб, який приймають рішення та несуть повну відповідальність за прийняте рішення;
- **Рішення (стратегія)** - ціль прийняття рішень. Позначення \vec{x} ;
- **Вихідні змінні задачі** - результати прийнятої стратегії. Позначення \vec{y} ;
- **Неконтрольовані змінні** - змінні, значення яких не залежить від особи, що приймає рішення. Вони є двох видів:
 - **Внутрішні змінні** - постійні в даній задачі, параметри задачі. Позначення p_k ;
 - **Зовнішні змінні** - змінні, які можуть змінюватися. Також називаються збудження. Позначення Ω .
- **Критерій або цільова функція** - ціль ефективності. Якщо в задачі багато критеріїв, вона називається **багатокритерійною**;
- **Обмеження** - обмеження даної задачі. Вони можуть бути на ресурси системи, на фінанси, на людські ресурси та на час;
- **Математична модель** - математична модель задачі прийняття рішень.

Приклад 1.1.1 (Приклад математичної моделі). c_j - прибуток від продажу j -го продукту.

a_{ij} - норма витрат i -го підприємства на j -тий продукт

b_i - об'єм ресурсу на i -тому підприємстві.

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\} \quad (1.1.1)$$

Обмеження:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i; \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.1.2)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overrightarrow{1, n} \quad (1.1.3)$$

Задачі прийняття рішень діляться на такі класи:

- Задачі, в умовах визначеності (задачі ДО);
- Задачі з впливом випадкових факторів (задачі прийняття рішень в умові ризику). Для них задано $\{p(y|x)\}$;
- Якщо зв'язок між прийнятим рішенням та наслідком не відомі, то це задача нестатистичної визначеності;
- Якщо в прийнятті рішень наявні кілька осіб, інтереси яких різні та, можливо, навіть протилежні, це задачі прийняття рішень в умовах конфлікту;
- Задачі, які є кілька критеріїв оптимальності. Такі задачі називаються багатокритерійними. Тут необхідно шукати деякий компроміс, оскільки рішення, яке б дало оптимальний результат за всіма критеріями у багатьох випадках не існує.

Задачі, що розв'язує теорія прийняття рішень поділяються на два типи:

- Задачі прийняття рішень в умовах випадкових факторів називаються **задачі стохастичного програмування**;
- Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності мають назву **задачі нечіткого програмування**.

1.2 Задачі стохастичного програмування

Задачі стохастичного програмування - це клас задач, в яких присутні випадкові фактори.

Приклад 1.2.1 (Приклад стохастичної задачі).

$$\min f(x, \omega) \quad (1.2.1)$$

$$g_i(x, \omega) \leq b_i, \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.2)$$

$\omega \in \Omega$ - множина станів середовища.

В такому вигляді, функції $f(x, \omega)$ та $g_i(x, \omega)$ випадкові функції, оптимізувати які немає сенсу. Тому потрібно перейти до яких численних характеристик.

1.2.1 М-модель стохастичного програмування

Ідея полягає в тому, щоб брати математичне очікування від функцій.

Критерій:

$$\mathbb{E}[f(x, \omega)] = F(x) \quad (1.2.3)$$

Обмеження:

$$\mathbb{E}[g_i(x, \omega)] = G_i(x), i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.4)$$

1.2.2 Р-модель стохастичного програмування

Модель, в якій числові функції знаходяться через ймовірності.

Нехай c - максимальні затрати.

Тоді модель перетвориться на:

Критерій:

$$\min \{\mathbb{P}\{f(x, \omega) \geq c\}\} \quad (1.2.5)$$

Обмеження:

$$\mathbb{P}\{g_i(x, \omega) \leq \alpha_i\}; i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.6)$$

$\alpha \in [0, 1]$ - задані.

1.2.3 МР-модель стохастичного програмування

Критерій:

$$\mathbb{E}[f(x, \omega)] = F(x) \quad (1.2.7)$$

Обмеження:

$$\mathbb{P}\{g_i(x, \omega) \leq \alpha_i\}; i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.8)$$

1.2.4 РМ-модель стохастичного програмування

Критерій:

$$\min \{\mathbb{P}\{f(x, \omega) \geq c\}\} \quad (1.2.9)$$

Обмеження:

$$\mathbb{E}[g_i(x, \omega)] = G_i(x), i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.10)$$

1.2.5 Зв'язок між Р-моделю та М-моделю

Існує можливість перейти від Р-моделі до еквівалентної М-моделі наступним чином.

Введемо функції:

$$h_0(x, \omega) = \begin{cases} 1, & f(x, \omega) \geq c \\ 0 & \end{cases} \quad (1.2.11)$$

$$h_i(x, \omega) = \begin{cases} 1, & g_i(x, \omega) \leq b_i \\ 0 & \end{cases}; i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.2.12)$$

Тоді можливий такий перехід:

$$\mathbb{P}\{f(x, \omega) \geq c\} = \mathbb{E}[h_0(x, \omega)]$$

$$\mathbb{P}\{g_i(x, \omega) \leq b_i\} = \mathbb{E}[h_i(x, \omega)]; i = \overrightarrow{1, m}$$

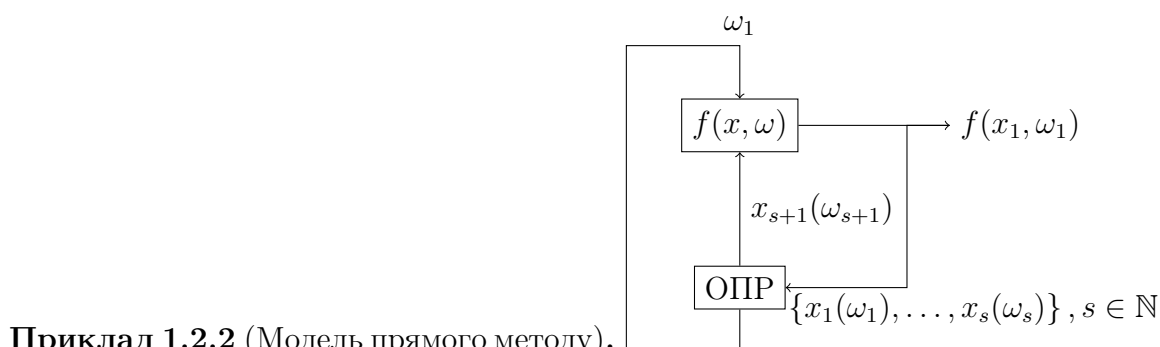
1.2.6 Класи задач стохастичного програмування

В залежності від того, якою інформацією володіє ОПР (особа, що приймає рішення) задачі стохастичного програмування діляться на:

- Задачі перспективного СП - задачі, що виникають коли ОПР не може виміряти випадкові фактори. Наприклад, задачі випуску нової продукції. Такого плану задачі частіше за все виникають при стратегічному та перспективному плануванні. Або в задачах проектування. В такому випадку ми використовуємо увесь можливий спектр значень випадкових параметрів;
- Задачі оперативного СП - задачі, в яких ОПР має можливість провести спостереження та виміряти значення випадкових факторів, а після цього прийняти рішення. Це задачі діагностики.

Методи стохастичного програмування поділяються на:

- Прямі методи - це метод, який використовується для розв'язку оперативного СП. Частіше за все являє собою деякий ітеративний процес, в якому ОПР, вимірявши значення випадкових факторів, приймає рішення. Через деякий час ОПР спостерігає результати рішення і виміряє нові випадкові фактори;
- Непрямі методи - це розв'язок задачі перспективного СП, шляхом приведення ймовірнісного еквіваленту до задачі нелінійного програмування.



1.3 Одноетапні задачі стохастичного програмування

Одноетапні задачі - відносяться до задачі перспективного СП і розв'язуються непрямыми методами.

V-модель:

$$\min \{ \mathbb{D} [f(x, \omega)] \} \quad (1.3.1)$$

$$\mathbb{E} [g_i(x, \omega)] \leq b_i; \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.3.2)$$

В загальному випадку побудова детермінованого еквіваленту ймовірнісної задачі являє собою досить важку задачу. Тому, вона розв'язується лише для простих розподілів.

1.3.1 Лінійні задачі стохастичного програмування

$$\max \left\{ \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \right] \right\} \quad (1.3.3)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\}; \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.3.4)$$

$$x_j \geq 0; \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.3.5)$$

Позначимо $\mathbb{E} [c_j(\omega)] = \hat{c}_j$

Випадок нормального розподілу

Нехай $p(a_{ij}) \sim \mathcal{N}(\hat{a}_{ij}, \Sigma_{ij}^2)$, $p(b_i) \sim \mathcal{N}(\hat{b}_i, \Theta_i^2)$

Також всі ці штуки між собою статистично незалежні.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i = \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = \delta_i(x) \leq 0 \right\} \quad (1.3.6)$$

$$\mathbb{E} [\delta_i(x)] = \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j - \hat{b}_i \quad (1.3.7)$$

$$\mathbb{D} [\delta_i(x)] = \sigma_i^2(x) = \sum_{j=1}^n \Sigma_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2 \quad (1.3.8)$$

$$\mathbb{P} \{ \delta_i(x) \} \sim \mathcal{N}(\hat{\delta}_i(x), \sigma_i^2(x)) \quad (1.3.9)$$

$$\mathbb{P} \{ \delta_i(x) \leq 0 \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i(x)}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{\xi_i - \hat{\delta}_i(x)}{2\sigma_i^2(x)}} d\xi \quad (1.3.10)$$

Заміна: $\frac{\xi_i - \hat{\delta}_i(x)}{2\sigma_i^2(x)} = v(x)$

$$\mathbb{P}\{\delta_i(x) \leq 0\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t e^{-v^2} 2 \, dv, t = -\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)} \quad (1.3.11)$$

$$\Phi(t) = \Phi\left(-\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i \quad (1.3.12)$$

$$-\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)} = \Phi^{-1}(\alpha_i) \quad (1.3.13)$$

$$\delta_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i) \sigma(x) \leq 0 \quad (1.3.14)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j + \Phi^{-1}(\alpha_i) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \hat{b}_i \quad (1.3.15)$$

В рівнянні (1.3.15) другий член рівняння дорівнює нулю, якщо величина не випадкова, а в інших випадках вказує на запас ризику.

Якщо $\alpha_i \geq 0.5$ то $\Phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$ і маємо задачу випуклого програмування.

Тепер змінимо знак:

$$\mathbb{P} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega); i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.3.16)$$

$$\mathbb{P} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega) = \mathbb{P} \left\{ \delta_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0 \right\} \quad (1.3.17)$$

Подальше аналогічно. Проробив усі пункти (1.3.7)-(1.3.14) отримаємо наступним детермінований еквівалент:

$$\sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j - \Phi^{-1}(\alpha_i) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \hat{b}_i \quad (1.3.18)$$

Випадок рівномірного розподілу

Нехай a_{ij} мають рівномірний розподіл:

$$\mathbb{P}\{a_{ij}\} = \begin{cases} \frac{1}{\delta_{ij} - \gamma_{ij}}, a_{ij} \in [\gamma_{ij}, \delta_{ij}] \\ 0 \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Якщо число додатків більше 3, то можна використовувати центральну граничну теорему.

$$\max \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j = \sum \bar{c}_j x_j \right] \quad (1.3.20)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right\} \geq \alpha_i \quad (1.3.21)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Phi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{b}_i \quad (1.3.22)$$

a_{ij} корелюється з b_i і a_{ik}

$$V_{ijk} = \mathbb{E} [(a_{ij} - \bar{a}_{ij})(a_{ik} - \bar{a}_{ik})] \quad (1.3.23)$$

$$\mathbb{E} [(a_{ij} - \bar{a}_{ij})(b_i - \bar{b}_i)] = \nu_{ij} \quad (1.3.24)$$

$$\mathbb{D} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ijk} x_j x_k - 2 \sum_{j=1}^n \nu_{ij} x_j + \Theta_i^2 \quad (1.3.25)$$

З (1.3.22) отримуємо:

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Phi^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ijk} x_j x_k - 2 \sum_{j=1}^n \nu_{ij} x_j + \Theta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{b}_i \quad (1.3.26)$$

1.4 Двухетапні задачі стохастичного математичного програмування

19.02.2014

В задачах ПР при наявності випадкових факторів, які мають детерміновані обмеження і випадкові, процес розв'язку розбивається на два етапи:

1. Визначається за детермінованими обмеженнями і далі спостерігаємо реалізацію випадкових обмежень задачі;
2. Примаємо наступні розв'язки як план компенсації та виявлення нев'язок.

$$\min \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \right] = \bar{c}^T x \quad (1.4.1)$$

$$A^{(1)} x = B^{(1)} \quad (1.4.2)$$

$$A(\omega) X = B(\omega) \quad (1.4.3)$$

$$x \geq 0 \quad (1.4.4)$$

Де (1.4.2) - детерміновані обмеження, а (1.4.3) - випадкові обмеження. $A = \|a_{ij}(\omega)\|_{i=1, \vec{m}}^{j=1, \vec{n}}$ - випадкові.
 $B(\omega) = [b_i(\omega)]_{i=1, \vec{m}}$

$$A^{(1)} = ||a_{ij}||_{i=1, \overrightarrow{m}}^{j=1, \overrightarrow{n}}$$

$$\mathbb{E}[c_j] = \bar{c}_j$$

Маємо задачу (1.4.1)-(1.4.4). Будемо розв'язувати в два етапи.

Перший етап

$$\min \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \right] \quad (1.4.5)$$

$$A^{(1)} X = B^{(1)} \quad (1.4.6)$$

$$x \geq 0 \quad (1.4.7)$$

Розв'язавши цю задачу отримаємо план X , який буде детермінованим. Нев'язка $\varepsilon = B(\omega) - A(\omega)x$

Другий етап

План компенсації невязки $y = [y_i]_{i=1, \overrightarrow{m}}$

$D(\omega)$ - матриця компенсуючих способів виробництва.

$$Dy = B - Ax \quad (1.4.8)$$

Нехай вектор

1.5 Прямі методи стохастичного програмування. Метод проектування СКГ

26.02.2014

Розглянемо тепер задачі ОСП. В яких ми можемо вимірювати функцію $\vec{f}(\vec{x})$ в різних точках. При чому $\mathbb{E}[\vec{f}(\vec{x}, \omega)] = \vec{f}(\vec{x})$. І нам потрібно це мінімізувати. При цьому, $\vec{f}(\vec{x})$ не відома, а ми вимірюємо лише $\vec{f}(\vec{x}, \vec{\omega}_s)$, бо $\vec{f}(\vec{x})$ неможливо виміряти точно.

Одним з кращих методів для розв'язку такої задачі є метод стохастичних квазіградієнтів (СКГ). Він був запропонований в 1970 році академіком Ермалєв Ю.М.

Він використовується тоді, коли $\vec{f}(\vec{x})$ випукла, але не гладка функція. Точки мінімуму $\vec{f}(\vec{x})$ ми позначимо X^* .

Пропонується такий метод пошуку:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \rho_s \gamma_s \vec{\xi}_s, s = 0, 1, \dots \quad (1.5.1)$$

1.5. ПРЯМІ МЕТОДИ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ПРОЕКТУВАННЯ

Де $\rho_s > 0$ - це крок пошуку. γ_s - множник, що нормує. В часному випадку $\gamma_s = \frac{1}{\|\vec{f}_x(\vec{x}_s)\|}$. А $\vec{\xi}_s$ - це випадковий вектор такий, що

$$\mathbb{E} [\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s] = a_s \cdot \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) + \vec{B}_s \quad (1.5.2)$$

Де $a_s(\omega) > 0$; $\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$ - квазіградієнт функції $\vec{f}(\vec{x})$ в точці \vec{x}_s . \vec{B}_s - деякий випадковий вектор, що незалежить від \vec{x}_s .

Якщо покласти $a_s = 1$, $\vec{B}_s = 0$, то отримуємо, що

$$\mathbb{E} [\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s] = \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) \quad (1.5.3)$$

Вектор $\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$ називається **квазіградієнтом** або **узагальненим градієнтом** функції в точці \vec{x}_s , якщо

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_s) \geq \widehat{\vec{f}}_x^T(\vec{x}_s)(\vec{x} - \vec{x}_s), \forall \vec{x} \quad (1.5.4)$$

Якщо функція $\vec{f}(\vec{x})$ гладка, то вектор квазіградієнту співпадає з градієнтом.

Приклад 1.5.1. $\vec{f}(\vec{x})$ - гладка та випукла.

$$\vec{f}_x(\vec{x}_s) = \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$$

Приклад 1.5.2. $\vec{f}(\vec{x})$ - функція не гладка. Ми не можемо провести дотичну площину, а лише деяку *опору*

В даному випадку можна провести навіть множину таких опорних площин, при чому вектор антинормалі буде потрапляти в область зменшення даної функції. Отже, отримали множину квазіградієнтів.

На цей випадок Наум Шор запропонував метод квазіградієнтів. Ми шукаємо $\min \vec{f}(\vec{x})$. Пошук мінімуму відбувається у відповідності до цих рекурентних співвідношень:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \gamma_s \rho_s \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) \quad (1.5.5)$$

$\rho_s > 0$ - крок, а $\gamma_s = \frac{1}{\|\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)\|}$ - множник, що нормує.

Також, Наум Шор довів теорему о збіжності цього методу.

Теорема 1.5.1. Нехай $\vec{f}(\vec{x})$ - неперервна, не гладка випукла або квазівипукла функція.

Для простоти покладемо $\gamma_s = 1$

Нехай виконуються наступні умови:

$$1. \rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

$$2. \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$$

Тоді послідовність $\{\vec{x} + s\} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \vec{x}^*, \vec{x}^* \in X^*$

Розглянемо таку ж задачу але з обмеженнями:

$$\min \left\{ \vec{f}(\vec{x}) \right\} \quad (1.5.6)$$

$$\vec{x} \in R \quad (1.5.7)$$

В цьому випадку використовується метод проектування квазіградієнтів:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{\pi}_x \left(\vec{x}_s - \rho_s \gamma_s \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) \right) \quad (1.5.8)$$

Де $\vec{\pi}_x$ - оператор проектування вектора на допустимо область R .

1.5.1 Властивості оператора π_x

1. $\forall \vec{z} : \vec{\pi}_x(\vec{z}) \in R$
2. $\vec{y} \in R \Rightarrow \|\vec{y} - \vec{\pi}_x(\vec{z})\| \leq \|\vec{y} - \vec{z}\|, \forall \vec{z}$

Теорема 1.5.2. *Нехай виконуються такі самі умови:*

$$1. \rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

$$2. \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$$

Тоді послідовність $\{\vec{x}_s\}$, що визначається відповідно формули (1.5.8) збіжна до точки мінімуму.

1.5.2 Метод проектування СКГ

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{\pi}_x \left(\vec{x}_s - \rho_s \gamma_s \vec{\xi}_s \right), s = 0, 1, \dots \quad (1.5.9)$$

Покладемо $\gamma_s = 1$ для зручності. X^* - множина точок мінімуму функції $\vec{f}(\vec{x})$.

Теорема 1.5.3 (Теорема Ермольєва). *Нехай виконуються наступні умови:*

$$1. nr \vec{\xi}_s^2 < \text{const}, \forall s$$

$$2. a_s \geq c_s, \forall s$$

$$3. \left\| \vec{B}_s \right\| \leq b_s$$

$$4. \rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

$$5. \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty$$

$$6. \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s c_s = \infty$$

$$7. \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s b_s < \infty$$

Початкова точка оберасться так, що $\|\vec{x}_0\|^2 < \infty$. Тоді випадкова послідовність, що визначається за формулою (1.5.9) збіжна до точки мінімуму з ймовірністю 1. Тобто:

$$\min \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} \xrightarrow{p=1} \vec{x}^* \right\}, \vec{x}^* \in X^*$$

Доведення. За властивостями оператора проектування $\|\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}\|^2 \leq \left\| \vec{x}^* - \vec{x}_s \rho_s \vec{\xi}_s \right\|^2$.

Піднесемо це до квадрату: $\|\vec{x}^* - \vec{x}_s\|^2 + 2\rho_s \vec{\xi}_s^T (\vec{x}^* - \vec{x}_s) + \rho_s^2 \left\| \vec{\xi}_s \right\|^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}\|^2 \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s\} \right] &= \\ &= \|\vec{x}^* - \vec{x}_s\|^2 + 2\rho_s \widehat{f}_x^T(\vec{x}_0)(\vec{x}^* - \vec{x}_s) + 2\rho_s \vec{B}_s^T (\vec{x}^* - \vec{x}_s) + \rho_s^2 c \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Так як $\widehat{f}_x(\vec{x}_s)$ квазіградієнт, то виконується

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_s) \geq \widehat{f}_x^T(\vec{x}_s) (\vec{x} - \vec{x}_s) \quad (1.5.11)$$

Підставимо \vec{x}^* :

$$0 > \vec{f}(\vec{x}^*) - \vec{f}(\vec{x}_s) \geq \widehat{f}_x^T(\vec{x}_s) (\vec{x}^* - \vec{x}_s) \quad (1.5.12)$$

За нерівністю Коши-Буняковського:

$$\vec{B}_s^T (\vec{x}^* - \vec{x}_s) \leq \left\| \vec{B}_s \right\| \left\| \vec{x}^* - \vec{x}_s \right\| \leq b_s \left\| \vec{x}^* - \vec{x}_s \right\| \quad (1.5.13)$$

З врахуванням формул (1.5.12) та (1.5.13) можна записати:

$$\mathbb{E} \left[\|\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}\|^2 \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s\} \right] \leq \|\vec{x}^* - \vec{x}_s\|^2 + \rho_s b_s \gamma + c \rho_s \quad (1.5.14)$$

При чому:

$$2 \left\| \vec{x}^* - \vec{x}_s \right\| = \gamma \quad (1.5.15)$$

Позначимо через $\vec{z}_s = \|\vec{x}^* - \vec{x}_s\|^2 + \gamma \sum_{k=s}^{\infty} \rho_k b_k + c \sum_{k=s}^{\infty} \rho_k^2$

Отримуємо, що :

$$\mathbb{E} [\vec{z}_{s+1} \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_s\}] \leq \vec{z}_s \Rightarrow \quad (1.5.16)$$

$$\mathbb{E} [\vec{z}_{s+1} \setminus \{\vec{z}_0, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_s\}] \leq \vec{z}_s \quad (1.5.17)$$

Така послідовність $\{\vec{z}_s\}$, що задовольняє умові (1.5.17) називається **супермар-тингауер**.

Так як $\vec{z}_s > 0$, то вона з ймовірністю 1 збіжна до якоїсь границі.

Повторимо (1.5.10) s разів:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}\| \mid \{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_s\}] &\geq \|\vec{x}^* - \vec{x}_0\|^2 + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^s \rho_k a_k \hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) + \gamma \sum_{k=0}^s \rho_k b_k + c \sum_{k=0}^s \rho_k^2 \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

Ми замінили $2\vec{B}_s^T(\vec{x}^* - \vec{x}_s) \leq b_s$

Спрямуємо $s \rightarrow \infty$:

В силу умов теореми $\sum_{k=0}^s \rho_k b_k$ - обмежений та $\sum_{k=0}^s \rho_k^2$ також обмежений. Тоді

$$\sum_{k=0}^s \rho_k a_k \hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) > -\infty \quad (1.5.19)$$

Так як ліва частина більша за нуль, а добуток $\hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) < 0$.

І тоді, тим більше

$$\rho_k a_k \hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) > -\infty \quad (1.5.20)$$

Тоді, щоб виконувалася умова (1.5.20) необхідно, щоб:

$$0 > \hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (1.5.21)$$

$$0 > \vec{f}(\vec{x}^*) - \vec{f}(\vec{x}_k) \leq \hat{f}_x^T(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (1.5.22)$$

Тоді з (1.5.22) випливає, що знайдеться така підпослідовність послідовності $\{\vec{x}_k\}$, $\{\vec{x}_{k,l}\}$, що $\lim_{l \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_{kl}) = \vec{f}(\vec{x}^*)$ \square

1.5.3 Метод стохастичної апроксимації

Використовується для знаходження мінімуму функції регресії без обмежень.

$$\min \mathbb{E} [\vec{f}(\vec{x}, \vec{\omega})] = \vec{f}(x) \quad (1.5.23)$$

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \rho_s \vec{\xi}_s \quad (1.5.24)$$

ρ_s - крок, $\vec{\xi}_s$ - випадковий вектор.

$$\vec{\xi}_s = \sum_{j=1}^n \frac{\vec{f}(\vec{x}_s + \vec{e}_j \delta_s, \vec{\omega}_{sj}) - \vec{f}(\vec{x}_s, \vec{\omega}_{s0})}{\delta_s} \vec{e}_j \quad (1.5.25)$$

$$\mathbb{E} [\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_1] = \vec{f}_x(\vec{x}_s) + \delta_s \vec{\omega}_s \quad (1.5.26)$$

$\vec{\omega}_s$ - крок. $||\vec{\omega}_s|| < c$

$$\mathbb{E} [\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s] = a_s \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) + \vec{B}_s \quad (1.5.27)$$

$$a_s = 1, \vec{B}_s = \delta_s \vec{\omega}_s$$

Використаємо теорему о збіжності. Перевіримо умови:

1. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty$
2. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$
3. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s b_s \geq \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \delta_s ||\vec{\omega}_s|| \leq c \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s \delta_s < \infty$

З 1 випливає, що $\rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$.

А з 2 та 3 випливає, що $\delta_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0, \rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$.

Узагальненням цього методу є метод **випадкового пошуку**. Якщо у нас $n \geq 10$, то використовувати ці формули досить незручно. В таких випадках використовують метод випадкового пошуку, замінюючи метод знаходження квазіградієнту не по ортам, а за випадковими напрямками, що розподілені рівномірно. При цьому:

$$\vec{\xi}_s = \sum_{k=1}^K \frac{\vec{f}(\vec{x}_s + \beta_{sk} \delta_s, \vec{\omega}_{sk}) - \vec{f}(\vec{x}_s, \vec{\omega}_{sk})}{\delta_s} \beta_{sk} \quad (1.5.28)$$

K - число випадкових векторів.

$$\beta_{sk} = [\beta_{skj}], \beta_{skj} \in [-1, 1]$$

$$\mathbb{E} [\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s] = \frac{K}{3} \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) + \delta_s \vec{\omega}_s, K < n, ||\vec{\omega}_s|| < C \quad (1.5.29)$$

1.6 Прийняття рішень в нечітких умовах

05.03.2014

1.6.1 Нечіткі множини та операції над ними

Нечіткою множиною A на X називають множина, що задається парами $(x, \mu_A(x))$, де $x \in A$, а $\mu_A(x)$ - функція приналежності нечіткої множини A , яка визначається наступним чином: $\mu_A : A \rightarrow [0, 1]$.

Носієм нечіткої множини A на універсальній множині X називається множина $\text{supp } A = \{x : \mu_A(x) > 0\}$.

Доповненням до нечіткої множини A називається множина \bar{A} така, що

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X \quad (1.6.1)$$

Універсальною множиною називається множина A така, що:

$$\mu_A(x) = 1, \forall x \in X \quad (1.6.2)$$

Нечітка множина A називається **нормальною**, якщо $\max_{x \in X} \{\mu_A(x)\} = 1$. В іншому випадку вона називається **субнормальною**.

Підмножиною рівня α нечіткої множини A називається нечітка множина A_α з функцією приналежності

$$\mu_{A_\alpha} = \begin{cases} \mu_A(x), & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, & \mu_A(x) < \alpha \end{cases} \quad (1.6.3)$$

1.6.2 Операції над нечіткими множинами

Задані A, μ_A, B, μ_B .

Об'єднанням множин A та B називається множина $C = A \cup B$ така, що

$$\mu_C(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (1.6.4)$$

Перетином множин A та B називається множина $C = A \cap B$ така, що

$$\mu_C(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (1.6.5)$$

Об'єднанням множин в сильному сенсі A та B називається множина $C = A \hat{\cup} B$ така, що

$$\mu_C(x) = \min \{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\} \quad (1.6.6)$$

Перетином множин в сильному сенсі A та B називається множина $C = A \hat{\cap} B$ така, що

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (1.6.7)$$

Різницею множин A та B називається множина $C = A \setminus B$ така, що

$$\mu_C(x) = \max \{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\} \quad (1.6.8)$$

1.6.3 Властивості множин рівня α

Виконуються наступні співвідношення

$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha \quad (1.6.9)$$

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \quad (1.6.10)$$

$$(A \hat{\cup} B)_\alpha \supseteq A_\alpha \cup B_\alpha \quad (1.6.11)$$

$$(A \hat{\cap} B)_\alpha \subseteq A_\alpha \cap B_\alpha \quad (1.6.12)$$

1.6.4 Декомпозиція множини

Нехай задана нечітка множина A з функцією приналежності $\mu_A(x)$. Тоді його можна розкласти за рівнями α .

$$A = \bigcup_{\alpha=0}^1 A_\alpha \quad (1.6.13)$$

Операція концентрування нечіткої множини:

$$\text{con } A = A^k, k > 1, k \in \mathbb{N} \quad (1.6.14)$$

$$\mu_{A^k}(x) = \mu_A^k(x) \quad (1.6.15)$$

Операція розтягування нечіткої множини:

$$\text{dil } A = A^{\frac{1}{k}}, k > 1, k \in \mathbb{N} \quad (1.6.16)$$

$$\mu_{A^{\frac{1}{k}}}(x) = \mu_A^{\frac{1}{k}}(x) \quad (1.6.17)$$

1.7 Нечіткі відношення

Нечіткою відношенням R на X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, що задається сукупністю пар $((x, y), \mu_R(x, y))$

1.7.1 Операції над нечіткими відношеннями

Нехай задані нечіткі відношення $A, \mu_A(x, y), B, \mu_B(x, y); A, B \subset X \times X$

$$C = A \cup B \Rightarrow \mu_C(x, y) = \max \{ \mu_A(x, y), \mu_B(x, y) \} \quad (1.7.1)$$

$$C = A \hat{\cup} B \Rightarrow \mu_C(x, y) = \min \{ \mu_A(x, y) + \mu_B(x, y), 1 \} \quad (1.7.2)$$

$$C = A \cap B \Rightarrow \mu_C(x, y) = \min \{ \mu_A(x, y), \mu_B(x, y) \} \quad (1.7.3)$$

$$C = A \hat{\cap} B \Rightarrow \mu_C(x, y) = \mu_A(x, y) \cdot \mu_B(x, y) \quad (1.7.4)$$

1.7.2 Композиції нечітких відношень

На відмінність від звичайних відношень, в нечітких існує три варіанти композицій. Нехай задано $A \subset X \times Y, \mu_A(x, y)$ та $B \subset Y \times Z, \mu_B(y, z)$.

Максимінною композицією A та B називається таке відношення $C = A * B$, що

$$\mu_C(x, z) = \max_{y \in Y} \min \{ \mu_A(x, y), \mu_B(y, z) \} \quad (1.7.5)$$

Мінімаксною композицією A та B називається таке відношення $C = A \circ B$, що

$$\mu_C(x, z) = \min_{y \in Y} \max \{ \mu_A(x, y), \mu_B(y, z) \} \quad (1.7.6)$$

Максимумплікативною композицією A та B називається така $C = A \cdot B$, що

$$\mu_C(x, z) = \max_{y \in Y} \mu_A(x, y) \cdot \mu_B(y, z) \quad (1.7.7)$$

Якщо X скінченне, то функцію приналежності до відношення можна задавати у вигляді матриці. Нечітке відношення R називається **рефлексивним**, якщо

$$\mu_R(x, x) = 1, \forall x \in X \quad (1.7.8)$$

Нечітке відношення R називається **антірефлексивним**, якщо

$$\mu_R(x, x) = 0, \forall x \in X \quad (1.7.9)$$

Нечітке відношення R називається **симетричним**, якщо

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x), \forall x, y \in X \quad (1.7.10)$$

Нечітке відношення R називається **антисиметричним**, якщо

$$\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0, \forall x, y \in X \quad (1.7.11)$$

Приклад 1.7.1. Розглянемо відношення R

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & |x - y| < 1 \\ 0 & \text{інакше} \end{cases} \quad (1.7.12)$$

Це відношення майже рівні. Воно є симетричним, рефлексивним.

1.8 Нечітке відношення нестрогої переваги

12.03.2014

Нечітким відношенням нестрогої переваги R називається будь-яке рефлексивне нечітке відношення.

Відношення R породжує **нечітке відношення строгої переваги** $R_s = R \setminus R^{-1}$.

$$\mu_{R_s}(x, y) = \max \{ \mu_R(x, y) - \mu_R(y, x), 0 \} \quad (1.8.1)$$

$\mu_{R_s}(x, y)$ - ступінь, з якої x домінує y .

Також R породжує **нечітке відношення еквівалентності** $R_e = R \cup R^{-1}$

$$\mu_{R_e}(x, y) = \min \{ \mu_R(x, y), \mu_R(y, x) \} \quad (1.8.2)$$

Нечітке відношення індеферентності $R_i = (X \times X) \setminus (R \cup R^{-1}) \cup (R \cap R^{-1})$

$$\mu_{R_i}(x, y) = \max \{ 1 - \max \{ \mu_R(x, y), \mu_R(y, x) \}, \min \{ \mu_R(x, y), \mu_R(y, x) \} \} \quad (1.8.3)$$

В тому випадку, якщо $R^{-1} \cup R = X \times X$, то відношення еквівалентності співпадає з відношенням індеферентності.

Задана множина альтернатив X , задано R - нечітке відношення нестрогої переваги. Воно відразу породжує R_s, R_e, R_i .

$1 - \mu_{R_s}(y, x)$ - ступінь, з якої x не домінується y .

Спробуємо знайти степінь, з якої x не домінується будь-якою альтернативою y .

$$\mu_R^{nd}(x) = \max_{y \in X} \{1 - \mu_{R_s}(y, x)\} \quad (1.8.4)$$

Множиною недовінованих альтернатив за нечітким відношенням нестрогої переваги R називається нечітка множина R^{nd} для якої:

$$\mu_R^{nd}(x) = \max_{y \in X} \{1 - \mu_{R_s}(y, x)\} = \min_{y \in X} \{\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\} \quad (1.8.5)$$

Якщо $\mu_R^{nd}(x) = 1$, то x це ЧНД (чітко недовінована) альтернатива.

Множиною чітко недовінованих альтернатив за нечіткє відношення нестрогої переваги R називається множина (чітка) X_{cnd} , для якого виконується:

$$X_{cnd} = \{x : \mu_R^{nd}(x) = 1\} \quad (1.8.6)$$

Нечіткє відношення нестрогої переваги R називається **сильно лінійним**, якщо:

$$\max \{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = 1, \forall x, y \in X \quad (1.8.7)$$

Нечіткє відношення нестрогої переваги R називається **λ -лінійним** ($\lambda \in [0, 1]$), якщо:

$$\max \{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} \geq \lambda, \forall x, y \in X \quad (1.8.8)$$

Теорема 1.8.1. *Якщо нечіткє відношення нестрогої переваги R є сильно лінійним, то ЧНД альтернативи x_1 та x_2 є еквівалентні зі степінню 1. Тобто $\mu_{R_e}(x_1, x_2) = 1$*

1.9 Прийняття рішень за кількома критеріями

Задана множина альтернатив X , на якій задано кілька відношень нестрогої переваги (нечітких або чітких), які ми будемо позначати $R_j, j = \overrightarrow{1, m}$. Також задані ваги критерії $w_j \geq 0, \sum_{j=1}^m w_j = 1$. Потрібно прийняти найкраще рішення.

Зробимо так:

1. $Q_1 = \bigcap_{j=1}^m R_j; \mu_{Q_1}(x, y) = \min \{\mu_{R_j}(x, y)\};$
2. Породжується $Q_{1,s}$ та $\mu_{Q_{1,s}}(x, y) = \max \{\mu_{Q_1}(x, y) - \mu_{Q_1}(y, x), 0\};$
3. Знаходимо $Q_1^{nd} = 1 - \max_{y \in X} \{\mu_{Q_{1,s}}(x, y)\};$
4. $x_0 : \mu_{Q_1^{nd}}(x_0) = \max \{\mu_{Q_1^{nd}}(x)\};$
5. Якщо альтернатив багато, то будуємо ще одну згортку, яка є взваженою сумою наших критеріїв

$$Q_2 = \sum_{j=1}^m w_j R_j \quad (1.9.1)$$

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^m w_j \mu_{R_j}(x, y) \quad (1.9.2)$$

6. Породжується $Q_{2,s}$ та $\mu_{Q_{2,s}}(x, y) = \max \{ \mu_{Q_2}(x, y) - \mu_{Q_2}(y, x), 0 \}$;
7. Знаходимо $Q_2^{nd} = 1 - \max_{y \in X} \{ \mu_{Q_{2,s}}(x, y) \}$;
8. Після цього шукає найкращу альтернативу за обома згортками.
9. $\mu_Q^{nd}(x) = \min \{ \mu_{Q_1}^{nd}(x), \mu_{Q_2}^{nd}(x) \}$;
10. $x_0 : \mu_{Q^{nd}}(x_0) = \max \{ \mu_{Q^{nd}}(x) \}$;

1.9.1 Підхід Белмана-Заде

Знаходження розв'язку при нечітких критеріях та нечітких обмеженнях.

Постановка задачі: є множина альтернатив X . Нехай на цій множині задана нечітка ціль G з функцією приналежності $\mu_G(x)$ і нечітке обмеження C з функцією приналежності $\mu_C(x)$.

Суть метода в тому, що не робиться ніякої різниці між цілю та обмеженнями, вони розглядаються як "полноправні" нечіткі множини. Тоді нечітка множина розв'язків визначається як $D = G \cap C : \mu_D(x) = \min \{ \mu_C(x), \mu_G(x) \}$.

Тобто, шукаємо $x_0 : \mu_D(x_0) = \max \{ \mu_D(x) \}$

Це можна узагальнити на випадок, коли є кілька критеріїв та кілька обмежень.

Нехай є m цілій G_1, \dots, G_m та n нечітких обмежень C_1, \dots, C_n .

Тоді, множина розв'язків

$$D = G_1 \cap \dots \cap G_m \cap C_1 \cap \dots \cap C_n \quad (1.9.3)$$

$$\mu_D(x) = \min_{i,j} \{ \mu_{C_j}(x), \mu_{G_i}(x) \} \quad (1.9.4)$$

Тоді найкраща альтернатива x_0 :

$$\mu_D(x_0) = \max \mu_D(x) \quad (1.9.5)$$

1.9.2 Класифікація задач нечіткого математичного програмування

Клас 1. Чітка ціль $f(x)$ та нечітке обмеження $C, \mu_C(x)$. Тоді знаходимо $\max f(x) = f_{\max}, \min f(x) = f_{\min}$

І далі переходимо від $f(x)$ до $\phi(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} \in [0, 1]$

Далі використовуємо підхід Белмана-Заде;

Клас 2. Чітка ціль та чіткі обмеження.

$$\max f(x) \quad (1.9.6)$$

$$g_i(x) \leq 0, i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.9.7)$$

Задаємося деякою границею z та переходимо від цієї задачі до

$$f(x) \rightarrow z \quad (1.9.8)$$

$$g_i(x) \leq 0, i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.9.9)$$

Введемо поріг a . Тоді ми можемо ввести таку функцію приналежності

$$\mu_f(x) = \begin{cases} 1, f(x) = z \\ 0, f(x) < z - a \\ > 0, z > f(x) \geq z - a \end{cases} \quad (1.9.10)$$

Можемо записати цю функцію однозначно:

$$\mu_f(x) = \frac{f(x) - (z - a)}{a} \quad (1.9.11)$$

Тепер розглянемо обмеження. Нехай ми можемо порушити ці обмеження з якимсь порогом b_i . Тобто

$$0 \leq g_i(x) \leq b_i \quad (1.9.12)$$

Введемо функцію приналежності

$$\mu_{g_i}(x) = \begin{cases} 1, g_i(x) \leq 0 \\ 0, g_i(x) \geq b_i \\ > 0, 0 < g_i(x) < b_i \end{cases} \quad (1.9.13)$$

Можемо записати цю функцію однозначно:

$$\mu_{g_i}(x) = \frac{b_i - g_i(x)}{b_i} \quad (1.9.14)$$

Далі використовуємо підхід Белмана-Заде

Клас 3. Нечітка ціль $\phi(x) = y; \mu_\phi(x, y) : X \times Y \rightarrow [0, 1]$. Та нечіткі обмеження $C; \mu_C(x)$;

Клас 4. Чітка ціль та нечіткі обмеження, де нечіткі саме параметри обмеження.

$$\max f(x) = \sum_j c_j x_j \quad (1.9.15)$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.9.16)$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n} \quad (1.9.17)$$

де a_{ij} - нечіткі величини;

Клас 5. Нечітка ціль та нечіткі обмеження, де нечіткість в параметрах

$$\max f(x, C) = \sum_j c_j x_j \quad (1.9.18)$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.9.19)$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n} \quad (1.9.20)$$

c_j, a_{ij} - нечіткі величини. Саме такими задачами ми й будемо займатися.

1.10 Нечіткі відображення. Принципи узагальнення Зеде-Орловського

19.03.2014

Задана нечітка множина A на X з функцією приналежності $\mu_A(x)$.

Нехай в нас наявне чітке відображення на Y , $\phi(X) = Y$.

1.10.1 Принцип узагальнення Зеде

Образом нечіткої множини A на X при чіткому відображенні $\phi(X) = Y$ називається нечітка множина B на Y , що задається сукупністю пар

$$(y, \mu_B(y)) = (\phi(x), \mu_A(x)) \quad (1.10.1)$$

Де

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad (1.10.2)$$

Тепер розглянемо випадок, коли наявне нечітке відношення $\phi(x, y)$ з функцією приналежності $\mu_\phi(x, y)$. За таким можна отримати таке представлення $(\mu_\phi(x, y), \mu_A(x))$.

1.10.2 Принцип узагальнення Орловського

Він розглядає B як максимінну композицію A та ϕ .

Образом нечіткої множини A на X при нечіткому відображенні $\phi(x, y)$ називається нечітка множина B на Y , що задається сукупністю пар $(y, \mu_B(y))$, де

$$\mu_B(y) = \max_x \min \{ \mu_A(x), \mu_\phi(x, y) \} \quad (1.10.3)$$

Розглянемо випадок, коли ϕ - чітке відображення, тоді

$$\mu_\phi(x, y) = \begin{cases} 1, \phi(x) = y \\ 0, \phi(x) \neq y \end{cases} \quad (1.10.4)$$

Підставимо (1.10.3) у (1.10.4) отримуємо

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad (1.10.5)$$

А це саме принцип узагальнення Зеде, тобто все вірно.

1.10.3 Образ нечіткого відношення

Наявна множина Y . На них задано нечітке відношення $R \subset Y \times Y$. Тоді, Y відображається у ν_1 і у ν_2 . Спробуємо знайти відношення між ними, назвемо його η . Функції відображення δ_1, δ_2 .

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \max_{y, z \in Y} \min \{\nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(y, z)\} \quad (1.10.6)$$

Образом нечіткого відношення R при нечітких відображеннях ν_1, ν_2 називається узагальнене відношення переваги, що визначається за формулою (1.10.6). Тоді зворотнім до нього буде відношення:

$$\eta(\nu_2, \nu_1) = \max_{y, z \in Y} \min \{\nu_1(z), \nu_2(y), \mu_R(z, y)\} \quad (1.10.7)$$

Нехай відношення R є чітке відношення нестроого порядку " \geq ". В такому випадку:

$$\mu_R(y, z) = \begin{cases} 1, & y \geq z \\ 0, & y < z \end{cases} \quad (1.10.8)$$

Підставивши (1.10.8) у (1.10.6) отримуємо:

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \max_{y \geq z; y, z \in Y} \min \{\nu_1(y), \nu_2(z)\} \quad (1.10.9)$$

А зворотнім до нього відношенням буде:

$$\eta(\nu_2, \nu_1) = \max_{y \leq z; y, z \in Y} \min \{\nu_1(y), \nu_2(z)\} \quad (1.10.10)$$

Нехай R - нечітке відношення нестрогої переваги. Тоді $\eta(\nu_1, \nu_2)$ - буде узагальненим відношенням нестрогої переваги. Позначення \succeq .

1.10.4 Властивості узагальненого нечіткого відношення нестрогої переваги

- Нехай δ_1, δ_2 - нормальні. І нехай нечітке відношення R - рефлексивне. Тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta(\nu_1, \nu_2)$ також рефлексивне;
- Нехай нечітке відношення R є сильно лінійним, тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta(\nu_1, \nu_2)$ сильно лінійне на множині усіх нормальних підмножин ν_1, ν_2 ;
- Нехай нечітке відношення R є λ -лінійним, тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta(\nu_1, \nu_2)$ λ -лінійне на множині усіх нечітких підмножин ν_1, ν_2 таких, що $\max_y \mu_{\nu_1}(y) > \lambda, \max_z \mu_{\nu_2}(z) > \lambda$.

Приклад 1.10.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}; Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

X	x_1	x_2	x_3
$\mu_A(x)$	0.3	0.7	1

Окрім того, задане нечітке відношення $R \subset X \times X$ таблицею:

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.8	1	9	0.3	0.7
x_2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.7
x_3	0.2	0.3	0.5	0.2	1

Знайдемо множину B .

$$\mu_B(y) = \max_x \min \{ \mu_A(x), \mu_R(x, y) \}$$

$$\mu_B(y_1) = \max \{ \min \{ 0.3, 0.8 \}, \min \{ 0.7, 0.8 \}, \min \{ 1, 0.2 \} \} = 0.7$$

В результаті отримаємо:

Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\mu_B(y)$	0.7	0.3	0.7	0.4	1

Приклад 1.10.2. Задано дві нечіткі множини ν_1, ν_2 на $Y =]0, \infty$. Функції приналежності:

$$\begin{aligned} \nu_1(y) &= e^{-k_1 y}, k_1 > 0 \\ \nu_2(y) &= e^{-k_2 |z-5|}, k_2 > k_1 \end{aligned}$$

Нехай R нечітке відношення нестрого порядку \geq .
Знайти $\eta(\nu_1, \nu_2)$.

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \max_{z, y \in Y} \min \{ \nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(z, y) \} = \max_{z \geq y} \min \{ \nu_1(y), \nu_2(z) \}$$

Спочатку знайдемо точки перетину функцій:

$$\mathbf{z < 5:} \quad z = \frac{-k_1 y + 5k_2}{k_2}; \quad z_1 = y = \frac{5k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\bullet \quad y \leq z_1:$$

$$\max_{z \geq y} \min \{ \nu_1(y), \nu_2(z) \} = \nu_1(y = z_1) = e^{\frac{-5k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

$$\bullet \quad z_1 < y < z_2:$$

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = e^{-k_1 y}$$

$$\bullet \quad y > z_2:$$

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = e^{k_2(y-5)}$$

X - множина альтернатив, що оцінюються функцією $\phi(x, y)$ нечітка множина Y оцінок.

На Y задане нечітке відношення переваги $R \subset Y \times Y$.

Очевидно, що між цими штуками буде відношення η і ми можемо його знайти.

$$\eta(x_1, x_2) = \max_{y, z} \min \{ \phi(x_1, y), \phi(x_2, z), \mu_R(y, z) \} \quad (1.10.11)$$

R чітке відношення нестрого порядку, тоді:

$$\eta(x_1, x_2) = \max_{y \geq z} \min \{ \phi(x_1, y), \phi(x_2, z) \} \quad (1.10.12)$$

$$\begin{aligned} \eta^{nd}(x) &= 1 - \max_{x'} (\eta(x', x) - \eta(x, x')) = \\ &= 1 - \max_{x'} \left\{ \max_{y \geq z} \min \{ \phi(x', y), \phi(x, z) \} - \max_{y \geq z} \min \{ \phi(x, y), \phi(x', z) \} \right\} \end{aligned} \quad (1.10.13)$$

1.11 Багатокритерійні задачі прийняття рішень

02.04.2014

$$\max f_i(x), \quad i \in I_1 \quad (1.11.1)$$

$$\min f_i(x), \quad i \in I_2 \quad (1.11.2)$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = \overrightarrow{1, m} \quad (1.11.3)$$

Вектор x^0 називається **парето оптимальний розв'язком**, якщо $\nexists x'$:

$$f_i(x') \geq f_i(x^0), \quad i \in I_1 \quad (1.11.4)$$

$$f_i(x') \leq f_i(x^0), \quad i \in I_2 \quad (1.11.5)$$

І хоча б одна нерівність виконується строго. Тобто $\nexists x'$, який би домінував над x^0 .

Альтернативи x_1, x_2 називаються непорівнюваними, якщо за деякими критеріями одна краща, а за іншими - інша.

Твердження 1.11.1. *Всі парето-оптимальні альтернативи або еквівалентні, або непорівнянні.*

$$x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2), i \in I_1 \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2), i \in I_2 \end{cases} \quad (1.11.6)$$

$x_1 > x_2$, якщо виконується (1.11.6) і хоча б одна нерівність виконується строго. Вектор критеріїв $f^{(1)}(x) = [f_i^{(1)}(x)]$ еквівалентний $f^{(2)}(x) = [f_i^{(2)}(x)]$ тоді і тільки тоді, коли вони утворюють на множині альтернатив однакові відношення переваги.

Теорема 1.11.1. *Множина або вектор критеріїв $[f_i^{(1)}(x)]$ еквівалентний множині критеріїв $[f_i^{(2)}(x)]$ тоді і тільки тоді, коли існує деяке монотонне перетворення w , яке переводить область значень кожного з критеріїв одної множини у область значень відповідного критерію з іншої множини.*

$$\boxplus \quad (1.11.7)$$

1.12 Знаходження функції приналежності нечітких множин

16.04.2014

1.12.1 Метод парних порівнянь Томаса-Саті

Є нечітка множина A на X і потрібно знайти $\mu_a(x)$.

На основі знаній експертів будується матриця парних порівнянь - $M = ||m_{ij}||$

При цьому: $m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}; m_{ii} = 1$

1.13 Наближений метод виконання операцій над нечіткими числами

23.04.2014

Є дві нечіткі множини A та B з множини \mathbb{R} .

Є чотири операції: $+$, $-$, \times , \div

Розділ 2

Практика

2.1 Складання математичних моделей

26.02.2014

2.1.1 Задача №2

Таблиця рівномірного розподілу затрати ресурсів:

Дошки	Стіл	Бюро	Стул	Шкаф	Кількість
Перший ресурс	[4, 6]	[8, 12]	[1, 2]	[9, 15]	1000
Другий ресурс	[1, 3]	[4, 6]	[2, 4]	[10, 16]	500
Чоловіко-ресурс	[2, 5]	[5, 8]	[1, 3]	[8, 12]	800
Ціна	120	150	50	300	

Початок інтервалу позначимо γ_{ij} , а кінець δ_{ij} .

Потрібно знайти розв'язок, який задовільняє нас з ймовірністю більше, ніж $p = 0.9$

Запишемо математичну модель:

$$\max \{120x_1 + 150x_2 + 50x_3 + 300x_4\} \quad (2.1.1)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \leq b_i \right\} \geq \alpha_{ij} \quad (2.1.2)$$

Перетворимо у детермінований еквівалент.

$$5x_1 + 10x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 12x_4 + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{1}{12}x_3^2 + 3x_4^2 \right) \leq 1000 \quad (2.1.3)$$

Інші аналогічно.

Вводимо додаткову умову з задачі: $\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow x_3 = 6x_1$

Отримаємо змінену математичну модель:

$$\max \{120x_1 + 150x_2 + 300x_3 + 300x_4\} \quad (2.1.4)$$

$$5x_1 + 10x_2 + 9x_1 + 12x_4 + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + 3x_1^2 + 3x_4^2 \right) \leq 1000 \quad (2.1.5)$$

2.1.2 Завдання №3

Матриця витрату ресурсів:

Продукти	Норми трат						Об'єм	
	А		В		С			
	1	2	1	2	1	2	1	2
1	[1, 3]	[2, 6]	[0.5, 1.5]	[2, 3]	[2, 3]	[2, 4]	250	150
2	[1, 2]	[3, 7]	[1, 3]	[1.5, 3]	[2, 2.5]	[1, 4]	100	200
3	[1, 3]	[2, 4]	[1, 1.5]	[1, 2]	[1, 3]	[3, 5]	240	300
	x_1		x_2		x_3			
	300		170		250			

Таблиця вартості:

c_{ij}	А	В	С
1	2	8	5
2	3	6	6
3	3	9	5

Відповідно, обмежуюча ймовірність $p = 0.9$. Потрібно мінімізувати витрати. x_{ij} - скільки виробляємо j -того товару на i -тому виробництві.

$$\min \left\{ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \right\} \quad (2.1.6)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(k)} x_{ij} \leq b_i^{(k)} \right\} \geq 0.9, i = \overrightarrow{1, 3}, k = \overrightarrow{1, 2} \quad (2.1.7)$$

Детермінізуємо. З критерієм все очевидно, бо він не змінюється, запишемо обмеження.

Для $k = 1$:

$$2x_{11} + x_{12} + 2.5x_{13} + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{1}{3}x_{11}^2 + \frac{1}{12}x_{12}^2 + \frac{1}{12}x_{13}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 250 \quad (2.1.8)$$

$k = 2, i = 1$:

$$4x_{11} + 2.5x_{12} + 3x_{13} + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{4}{3}x_{11}^2 + \frac{1}{12}x_{12}^2 + \frac{2}{3}x_{13}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 150 \quad (2.1.9)$$

Також додаються обмеження на кількість продукцій:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 300 \quad (2.1.10)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 170 \quad (2.1.11)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 250 \quad (2.1.12)$$

2.2 Четверта практика

09.04.2014

Завдання 2.2.1. Середні норми витрат для фабрик та максимальні об'єми виробництва

Види ресурсу	Норми витрат				Об'єм
Сировина	4	5	2	5	80
Робоча сила	20	12	20	40	400
Обладнання	10	15	10	16	150

Середній прибуток з кожної фабрики:

i	1	2	3	4
c_i	30	25	56	8

Нечіткі величини, середні значення яких вказані на таблиці, мають такі розподіли.

$$\mu_{\gamma}(a_{ij}) = e^{-\frac{(a_{ij} - \bar{a}_{ij})^2}{2}} \quad (2.2.1)$$

$$\gamma(c_j) = \frac{1}{1 - (c_j - \bar{c}_j)^2} \quad (2.2.2)$$

Запишемо математичну модель недетермінованої задачі

$$\max \sum_j c_j x_j \quad (2.2.3)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq v_i \quad (2.2.4)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.2.5)$$

$$\mu(a_{ij}) \geq 0.8 \quad (2.2.6)$$

$$\mu(c_j) \geq 0.8 \quad (2.2.7)$$

$$(2.2.8)$$

Розв'яжемо дві останні нерівності для оцінки можливих варіантів:

$$\frac{1}{2} \geq |c_j - \bar{c}_j| \quad (2.2.9)$$

$$-\frac{1}{2} + \bar{c}_j \leq c_j \leq \frac{1}{2} + \bar{c}_j \quad (2.2.10)$$

$$|a_{ij} - \bar{a}_{ij}| \leq \sqrt{-2 \ln 0.8} \quad (2.2.11)$$

$$-\sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} + \bar{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} + \bar{a}_{ij} \quad (2.2.12)$$

Запишемо задачі песиміста та задачі оптиміста, тобто задачі, які передбачають найгірший та найкращий розвиток:

Задача песиміста:

$$\max \sum_j \left(\bar{c}_j - \frac{1}{2} \right) x_j \quad (2.2.13)$$

$$\sum_j \left(\bar{a}_{ij} + \sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} \right) x_j \leq v_i \quad (2.2.14)$$

Задача оптиміста:

$$\max \sum_j \left(\bar{c}_j + \frac{1}{2} \right) x_j \quad (2.2.15)$$

$$\sum_j \left(\bar{a}_{ij} - \sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} \right) x_j \leq v_i \quad (2.2.16)$$

2.3 Шоста практика

23.04.2014

Завдання 2.3.1.

$$\max 3x_1 + 2x_2 \quad (2.3.1)$$

$$\max x_1 - x_2 \quad (2.3.2)$$

$$x_1 - 6x_2 \leq 3 \quad (2.3.3)$$

$$x_1 + x_2 \geq 10 \quad (2.3.4)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 1 \quad (2.3.5)$$

$$x_2 \leq 11 \quad (2.3.6)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 32 \quad (2.3.7)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.3.8)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} \quad (2.3.9)$$

$A(3, 7); B(5, 11); C(10.5, 11); D(15, 2); E(9, 1)$

Знайдемо максимум та мінімум:

$$f_1^0(C) = 53.5 \quad (2.3.10)$$

$$f_2^0(D) = 13 \quad (2.3.11)$$

$$f_1^{\min}(A) = 32 \quad (2.3.12)$$

$$f_2^{\min}(B) = -6 \quad (2.3.13)$$

$$(2.3.14)$$

$$w_1(x) = \frac{53.5 - 3x_1 - 2x_2}{30.5} \quad (2.3.15)$$

$$w_2(x) = \frac{13 - x_1 + x_2}{19} \quad (2.3.16)$$

$$\min x_3 \quad (2.3.17)$$

$$\rho_1 w_1 \leq x_3 \quad (2.3.18)$$

$$\rho_2 w_2 \leq x_3 \quad (2.3.19)$$

$$Ax \leq B \quad (2.3.20)$$

Далі просто рахуємо.

Завдання 2.3.2.

$$\max 3x_1 + 2x_2 \quad (2.3.21)$$

$$\max x_1 - x_2 \quad (2.3.22)$$

$$\bar{c}_{11} = 3 \quad (2.3.23)$$

$$\bar{c}_{12} = 2 \quad (2.3.24)$$

$$\bar{c}_{21} = 1 \quad (2.3.25)$$

$$\bar{c}_{22} = -1 \quad (2.3.26)$$

$$\alpha = 0.8 \quad (2.3.27)$$

$$f_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \quad (2.3.28)$$

$$f_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \quad (2.3.29)$$

$$\mu(c_{ij}) = \frac{1}{1 + (c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2} \quad (2.3.30)$$

Знаходимо обмеження для критеріїв:

$$c_{ij} \in \left[-\frac{1}{2} + \bar{c}_{ij}, \frac{1}{2} + \bar{c}_{ij} \right] \quad (2.3.31)$$

Отримуємо критерії:

$$f_1^e(x) = 2.5x_1 + 1.5x_2 \quad (2.3.32)$$

$$f_1^u(x) = 3.5x_1 + 2.5x_2 \quad (2.3.33)$$

$$f_2^e(x) = 1.5x_1 - 1.5x_2 \quad (2.3.34)$$

$$f_2^u(x) = 2.5x_1 - 0.5x_2 \quad (2.3.35)$$

2.4 Практика

14.05.2014

$$\max x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \quad (2.4.1)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40 \quad (2.4.2)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (2.4.3)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 20 \quad (2.4.4)$$

$$x_3 \leq 10 \quad (2.4.5)$$

$$x_1 \leq 10 \quad (2.4.6)$$

$$x_3 + x_4 \leq 15 \quad (2.4.7)$$

$$x_1 > 0 \quad (2.4.8)$$

2.5 Література

Література : підручник дослідження операцій