Зміст

Розділ 1

Теорія прийняття рішень

1.1 Загальна характеристика задач прийняття рішень. Основні компоненти задач прийняття рішень.

12.02.2014

1.1.1 Основні компоненти задач прийняття рішень

- **Суб'єкт** - особа, або група осіб, який приймають рішення та несуть повну відповідальність за прийняте рішення;
- **Рішення (стратегія)** - ціль прийняття рішень. Позначення $\vec{x}$;
- **Вихідні змінні задачі** - результати прийнятої стратегії. Позначення $\vec{y}$;
- **Неконтрольовані змінні** - змінні, значення яких не залежить від особи, що приймає рішення. Вони є двох видів:
  - **Внутрішні змінні** - постійні в даній задачі, параметри задачі. Позначення p_k;
  - **Зовнішні змінні** - змінні, які можуть змінюватися. Також називаються збудження. Позначення Ω.
- **Критерій або цільова функція** - ціль ефективності. Якщо в задачі багато критеріїв, вона називається **багатокритерійною**;
- **Обмеження** - обмеження даної задачі. Вони можуть бути на ресурси системи, на фінанси, на людські ресурси та на час;
- **Математична модель** - математична модель задачі прийняття рішень.

Приклад 1.1.1 (Приклад математичної моделі)**.** c_j- прибуток від продажу j-го продукту.
a_{ij}- норма витрат i-го підприємства на j-тий продукт

b_i- об'єм ресурсу на i-тому підприємстві.

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\} \tag{1.1.1}$$

Обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \le b_i; \quad i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.1.2}$$

$$x_j \quad \ge 0; \quad j = \overrightarrow{1,n} \tag{1.1.3}$$

Задачі прийняття рішень діляться на такі класи:

- Задачі, в умовах визначеності (задачі ДО);
- Задачі з впливом випадкових факторів (задачі прийняття рішень в умові риску). Для них задано $\{p(y|x)\}$;
- Якщо зв'язок між прийнятим рішенням та наслідком не відомі, то це задача нестатистичної визначеності;
- Якщо в прийнятті рішень наявні кілька осіб, інтереси яких різні та, можливо, навіть протилежні, це задачі прийняття рішень в умовах конфлікту;
- Задачі, які є кілька критеріїв оптимальності. Такі задачі називаються багатокритерійними. Тут необхідно шукати деякий компроміс, оскільки рішення, яке б дало оптимальний результат за всіма критеріями у багатьох випадках не існує.

Задачі, що розв'язує теорія прийняття рішень поділяються на два типи:

- Задачі прийняття рішень в умовах випадкових факторів називаються **задачі стохастичного програмування**;
- Задач прийняття рішень в умовах невизначеності мають назву **задачі нечіткого програмування**.

1.2 Задачі стохастичного програмування

Задачі стохастичного програмування - це клас задач, в яких присутні випадкові фактори.

Приклад 1.2.1 (Приклад стохастичної задачі)**.**

$$\min f(x, \omega) \tag{1.2.1}$$

$$g_i(x, \omega) \le b_i, \quad i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.2}$$

$\omega \in \Omega$ - множина станів середовища.

В такому вигляді, функції $f(x, \omega)$ та $g_i(x, \omega)$ випадкові функції, оптимізувати які немає сенсу. Тому потрібно перейти до яких численних характеристик.

1.2.1 M-модель стохастичного програмування

Ідея полягає в тому, щоб брати математичне очікування від функцій.
Критерій:

$$\mathbb{E}\left[f(x,\omega)\right] = F(x) \tag{1.2.3}$$

Обмеження:

$$\mathbb{E}\left[g_i(x,\omega)\right] = G_i(x), i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.4}$$

1.2.2 P-модель стохастичного програмування

Модель, в якій числові функції знаходяться через ймовірності.
Нехай c - максимальні затрати.
Тоді модель перетвориться на:
Критерій:

$$\min\left\{\mathbb{P}\left\{f(x,\omega) \geq c\right\}\right\} \tag{1.2.5}$$

Обмеження:

$$\mathbb{P}\left\{g_i(x,\omega) \leq \alpha_i\right\}; i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.6}$$

$\alpha \in [0,1]$ - задані.

1.2.3 MP-модель стохастичного програмування

Критерій:

$$\mathbb{E}\left[f(x,\omega)\right] = F(x) \tag{1.2.7}$$

Обмеження:

$$\mathbb{P}\left\{g_i(x,\omega) \leq \alpha_i\right\}; i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.8}$$

1.2.4 PM-модель стохастичного програмування

Критерій:

$$\min\left\{\mathbb{P}\left\{f(x,\omega) \geq c\right\}\right\} \tag{1.2.9}$$

Обмеження:

$$\mathbb{E}\left[g_i(x,\omega)\right] = G_i(x), i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.10}$$

1.2.5 Зв'язок між P-моделлю та M-моделлю

Існує можливість перейти від P-моделі до еквівалентної M-моделі наступним чином.
Введемо функції:

$$h_0(x,\omega) = \begin{cases} 1, f(x,\omega) \geq c \\ 0 \end{cases} \tag{1.2.11}$$

$$h_i(x,\omega) = \begin{cases} 1, g_i(x,\omega) \leq b_i \\ 0 \end{cases}; i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.2.12}$$

Тоді можливий такий перехід:
$\mathbb{P}\left\{f(x,\omega) \geq c\right\} = \mathbb{E}\left[h_0(x,\omega)\right]$
$\mathbb{P}\left\{g_i(x,\omega) \leq b_i\right\} = \mathbb{E}\left[h_i(x,\omega)\right]; i = \overrightarrow{1,m}$

1.2.6 Класи задач стохастичного програмування

В залежності від того, якою інформацією володіє ОПР (особа, що приймає рішення) задачі стохастичного програмування діляться на:

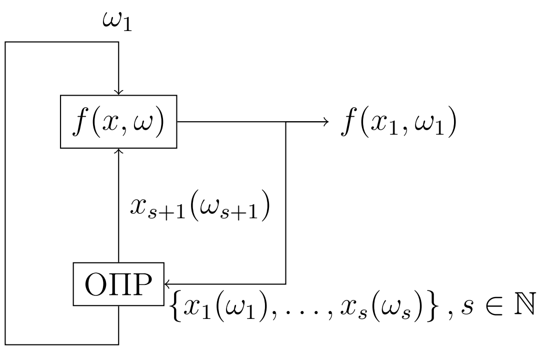
- Задачі перспективного СП - задачі, що виникають коли ОПР не може виміряти випадкові фактори. Наприклад, задачі випуску нової продукції. Такого плану задачі частіше за все виникають при стратегічному та перспективному плануванні. Або в задачах проектування. В такому випадку ми використовуємо увесь можливий спектр значень випадкових параметрів;

- Задачі оперативного СП - задачі, в яких ОПР має можливість провести спостереження та виміряти значення випадкових факторів, а після цього прийняти рішення. Це задачі діагностики.

Методи стохастичного програмування поділяються на:

- Прямі методи - це метод, який використовується для розв'язку оперативного СП. Частіше за все являє собою деякий ітеративний процес, в якому ОПР, вимірявши значення випадкових факторів, приймає рішення. Через деякий час ОПР спостерігає результати рішення і виміряє нові випадкові фактори;

- Непрямі методи - це розв'язок задачі перспективного СП, шляхом приведення ймовірнісного еквіваленту до задачі нелінійного програмування.



Приклад 1.2.2 (Модель прямого методу)**.**
$x_s(\omega_s)$ - випадкова послідовність.
Тоді критерій оптимальності: $\lim\limits_{s\to\inf} x_s(\omega_s) = x^*$ - аргумент F(x).

1.3 Одноетапні задачі стохастичного програмування

Одноетапні задачі - відносяться до задачі перспективного СП і розв'язуються непрямими методами.
V-модель:

$$\min\{\mathbb{D}\left[f(x,\omega)\right]\} \tag{1.3.1}$$

$$\mathbb{E}\left[g_i(x,\omega)\right] \le b_i; \quad i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.3.2}$$

В загальному випадку побудова детермінованого еквіваленту ймовірнісної задачі являє собою досить важку задачу. Тому, вона розв'язується лише для простих розподілів.

1.3.1 Лінійні задачі стохастичного програмування

$$\max\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j\right]\right\} \tag{1.3.3}$$

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\}; \quad i=\overrightarrow{1,m} \tag{1.3.4}$$

$$x_j \geq 0; \qquad i=\overrightarrow{1,m} \tag{1.3.5}$$

Позначимо $\mathbb{E}\left[c_j(\omega)\right] = \hat{c_j}$

Випадок нормального розподілу

Нехай $p(a_{ij}) \sim \aleph\left(\hat{a_{ij}}, \Sigma_{ij}^2\right)$, $p(b_i) \sim \aleph\left(\hat{b_i}, \Theta_i^2\right)$
Також всі ці штуки між собою статистично незалежні.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i = \mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = \delta_i(x) \leq 0\right\} \tag{1.3.6}$$

$$\mathbb{E}\left[\delta_i(x)\right] = \sum_{j=1}^{n} \hat{a_{ij}}x_j - \hat{b_i} \tag{1.3.7}$$

$$\mathbb{D}\left[\delta_i(x)\right] = \sigma_i^2(x) = \sum_{j-1}^{n} \Sigma_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2 \tag{1.3.8}$$

$$\mathbb{P}\left\{\delta_i(x)\right\} \sim \aleph\left(\hat{\delta}_i(x), \sigma_i^2(x)\right) \tag{1.3.9}$$

$$\mathbb{P}\left\{\delta_i(x) \leq 0\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(x)} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\xi_i - \hat{\delta}_i(x)}{2\sigma_i^2(x)}} \,\mathrm{d}\,\xi \tag{1.3.10}$$

Заміна:$\dfrac{\xi_i - \hat{\delta}_i(x)}{2\sigma_i^2(x)} = v(x)$

$$\mathbb{P}\left\{\delta_i(x) \leq 0\right\} = \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-v^2} 2 \,\mathrm{d}\, v, t = -\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)} \tag{1.3.11}$$

$$\Phi(t) = \Phi\left(-\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i \tag{1.3.12}$$

$$-\frac{\hat{\delta}_i(x)}{\sigma_i(x)} = \Phi^{-1}\left(\alpha_i\right) \tag{1.3.13}$$

$$\delta_i(x) + \Phi^{-1}\left(\alpha_i\right)\sigma(x) \leq 0 \tag{1.3.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{a_{ij}} x_j + \Phi^{-1}\left(\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \hat{b_i} \tag{1.3.15}$$

В рівнянні (1.3.15) другий член рівняння дорівнює нулю, якщо величина невипадкова, а в інших випадках вказує на запас риску.
Якщо $\alpha_i \geq 0.5$ то $\Phi^{-1}\left(\alpha_i\right) \geq 0$ і маємо задачу випуклого програмування.
Тепер змінимо знак:

$$\mathbb{P}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega); i = \overrightarrow{1, m} \tag{1.3.16}$$

$$\mathbb{P}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega) = \mathbb{P}\left\{\delta_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0\right\} \tag{1.3.17}$$

Подальше аналогічно. Проробив усі пункти (1.3.7)-(1.3.14) отримаємо наступним детермінований еквівалент:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{a_{ij}} x_j - \Phi^{-1}(\alpha_i)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \hat{b_i} \tag{1.3.18}$$

Випадок рівномірного розподілу

Нехай a_{ij}мають рівномірний розподіл:

$$\mathbb{P}\left\{a_{ij}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{\delta_{ij} - \gamma_{ij}}, a_{ij} \in [\gamma_{ij}, \delta_{ij}] \\ 0 \end{cases} \tag{1.3.19}$$

Якщо число додатків більше 3, то можна використовувати центральну граничну теорему.

$$\max \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j = \sum \bar{c_j} x_j\right] \tag{1.3.20}$$

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge \alpha_i \tag{1.3.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a_{ij}} x_j + \Phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \Theta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \bar{b_i} \tag{1.3.22}$$

a_{ij} корелюється з b_i і a_{ik}

$$V_{ijk} = \mathbb{E}\left[(a_{ij} - \bar{a_{ij}})(a_{ik} - \bar{a_{ik}})\right] \tag{1.3.23}$$

$$\mathbb{E}\left[(a_{ij} - \bar{a_{ij}})\left(b_i - \bar{b_i}\right)\right] = \nu_{ij} \tag{1.3.24}$$

$$\mathbb{D}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ijk} x_j x_k - 2\sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} x_j + \Theta_i^2 \tag{1.3.25}$$

З (1.3.22) отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a_{ij}} x_j + \Phi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ijk} x_j x_k - 2\sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} x_j + \Theta_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \bar{b_i} \tag{1.3.26}$$

1.4 Двухетапні задачі стохастичного математичного програмування

19.02.2014

В задачах ПР при наявності випадкових факторів, які мають детерміновані обмеження і випадкові, процес розв'язку розбивається на два етапи:

1. Визначається за детермінованими обмеженнями і далі спостерігаємо реалізацію випадкових обмежень задачі;

2. Примаємо наступні розв'язки як план компенсації та виявлення нев'язок.

$$\min \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\right] = \bar{c}^{\mathrm{T}} x \tag{1.4.1}$$

$$A^{(1)} x = B^{(1)} \tag{1.4.2}$$

$$A(\omega) X = B(\omega) \tag{1.4.3}$$

$$x \ge 0 \tag{1.4.4}$$

Де (1.4.2) - детерміновані обмеження, а (1.4.3) - випадкові обмеження. $A = ||a_{ij}(\omega)||_{i=\overrightarrow{1,m}}^{j=\overrightarrow{1,n}}$ - випадкові.
$B(\omega) = [b_i(\omega)]_{i=\overrightarrow{1,m}}$

$A^{(1)} = ||a_{ij}||_{i=\overrightarrow{1,m}}^{j=\overrightarrow{1,n}}$
$\mathbb{E}\left[c_j\right] = \bar{c}_j$
Маємо задачу (1.4.1)-(1.4.4). Будемо розв'язувати в два етапи.

Перший етап

$$\min \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\right] \tag{1.4.5}$$

$$A^{(1)}X = B^{(1)} \tag{1.4.6}$$

$$x \geq 0 \tag{1.4.7}$$

Розв'язавши цю задачу отримаємо план X, який буде детермінованим. Нев'язка $\varepsilon = B(\omega) - A(\omega)x$

Другий етап

План компенсації нев'язко $y = [y_i]_{i=\overrightarrow{1,m}}$
$D(\omega)$ - матриця компенціючих способів виробництва.

$$Dy = B - Ax \tag{1.4.8}$$

Нехай вектор

1.5 Прямі методи стохастичного програмування. Метод проектування СКГ

26.02.2014

Розглянемо тепер задачі ОСП. В яких ми можемо вимірювати функцію $\vec{f}(\vec{x})$ в різних точках. При чому $\mathbb{E}\left[\vec{f}(\vec{x}, \omega)\right] = \vec{f}(\vec{x})$. І нам потрібно це мінімізувати. При цьому, $\vec{f}(\vec{x})$ не відома, а ми вимірюємо лише $\vec{f}(\vec{x}, \vec{\omega}_s)$, бо $\vec{f}(\vec{x})$ неможливо виміряти точно.
Одним з кращих методів для розв'язку такої задачі є метод стохастичних квазіградієнтов (СКГ). Він був запропонований в 1970 році академіком Ермальев Ю.М.
Він використовується тоді, коли $\vec{f}(\vec{x})$ випукла, але не гладка функція. Точки мінімума $\vec{f}(\vec{x})$ ми позначимо X^*.
Пропонується такий метод пошуку:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \rho_s \gamma_s \vec{\xi}_s, s = 0, 1, \ldots \tag{1.5.1}$$

Де $\rho_s > 0$ - це крок пошуку. γ_s - множник, що нормує. В часному випадку $\gamma_s = \dfrac{1}{\left|\left|\vec{f}_x(\vec{x}_s)\right|\right|}$. А $\vec{\xi}_s$ - це випадковий вектор такий, що

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s\right] = a_s \cdot \widehat{\vec{f}}_x\,(\vec{x}_s) + \vec{B}_s \tag{1.5.2}$$

Де $a_s(\omega) > 0$; $\widehat{\vec{f}}_x\,(\vec{x}_s)$ - квазіградіент функції $\vec{f}(\vec{x})$ в точці $\vec{x}_s$. $\vec{B}_s$ - деякий випадковий вектор, що незалежить від $\vec{x}_s$.
Якщо покласти $a_s = 1, \vec{B}_s = 0$, то отримуємо, що

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s\right] = \widehat{\vec{f}}_x\,(\vec{x}_s) \tag{1.5.3}$$

Вектор $\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$ називається **квазіградієнтом** або **узагальненим градієнтом** функції в точці $\vec{x}_s$, якщо

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_s) \geq \widehat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_s)(\vec{x} - \vec{x}_s), \forall \vec{x} \tag{1.5.4}$$

Якщо функція $\vec{f}(\vec{x})$ гладка, то вектор квазіградієнту співпадає з градієнтом.

Приклад 1.5.1. $\vec{f}(\vec{x})$ - гладка та випукла.
$\vec{f}_x(\vec{x}_s) = \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$

Приклад 1.5.2. $\vec{f}(\vec{x})$ - функція не гладка. Ми не можемо провести дотичну площину, а лише деяку *опорну*
В даному випадку можна провести навіть множину таких опорних площин, при чому вектор антинормалі буде потрапляти в область зменшення даної функції. Отже, отримали множину квазіградієнтів.

На цей випадок Наум Шор запропонував метод квазіградієнтів. Ми шукаємо $\min \vec{f}(\vec{x})$. Пошук мінімуму відбувається у відповідності до цих рекурентних співвідношень:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \gamma_s \rho_s \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) \tag{1.5.5}$$

$\rho_s > 0$ - крок, а $\gamma_s = \dfrac{1}{\left|\left|\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)\right|\right|}$ - множник, що нормує.
Також, Наум Шор довів теорему о збіжності цього методу.

Теорема 1.5.1. *Нехай $\vec{f}(\vec{x})$ - неперервна, не гладка випукла або квазівипукла фукнція.*
Для простоти покладемо $\gamma_s = 1$
Нехай виконуються наступні умови:

1. $\rho_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

2. $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$

Тоді послідовність $\{\vec{x}+s\} \xrightarrow[s\to\infty]{} \vec{x}^*, \vec{x}^* \in X^*$

Розглянемо таку ж задачу але з обмеженнями:

$$\min\left\{\vec{f}(\vec{x})\right\} \tag{1.5.6}$$
$$\vec{x} \in R \tag{1.5.7}$$

В цьому випадку використовується метод проектування квазіградієнтів:

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{\pi}_x\left(\vec{x}_s - \rho_s\gamma_s\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)\right) \tag{1.5.8}$$

Де $\vec{\pi}_x$ - оператор проектування вектора на допустимо область R.

1.5.1 Властивості оператора π_x

1. $\forall \vec{z} : \vec{\pi}_x(\vec{z}) \in R$
2. $\vec{y} \in R \Rightarrow ||\vec{y} - \vec{\pi}_x(\vec{z})|| \le ||\vec{y} - \vec{z}||, \forall \vec{z}$

Теорема 1.5.2. *Нехай виконуються такі самі умови:*

1. $\rho_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

2. $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$

Тоді послідовність $\{\vec{x}_s\}$*, що визначається відповідно формули* (1.5.8) *збіжна до точки мінімуму.*

1.5.2 Метод проектування СКГ

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{\pi}_x\left(\vec{x}_s - \rho_s\gamma_s\vec{\xi}_s\right), s = 0, 1, \dots \tag{1.5.9}$$

Покладемо $\gamma_s = 1$ для зручності. X^* - множина точок мінімуму функції $\vec{f}(\vec{x})$.

Теорема 1.5.3 (Теорема Ермольева)**.** *Нехай виконуються наступні умови:*

1. $nr\vec{\xi}_s^2 < \text{const}, \forall s$

2. $a_s \ge c_s, \forall s$

3. $\left|\left|\vec{B}_s\right|\right| \le b_s$

4. $\rho_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

5. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty$

6. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s c_s = \infty$

7. $\sum_{s=0}^{\infty} \rho_s b_s < \infty$

Початкова точка обирається так, що $||\vec{x}_0||^2 < \infty$. *Тоді випадкова послідовність, що визначається за формулою* (1.5.9) *збіжна до точки мінімуму з ймовірністю 1. Тобто:*

$$\min \left\{ \lim_{s\to\infty} \xrightarrow{p=1} \vec{x}^* \right\}, \vec{x}^* \in X^*$$

Доведення. За властивостями оператора проектування $||\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}||^2 \le \left|\left|\vec{x}^* - \vec{x}_s \rho_s \vec{\xi}_s\right|\right|$. Піднесемо це до квадрату: $||\vec{x}^* - \vec{x}_s||^2 + 2\rho_s \vec{\xi}_s^T (\vec{x}^* - \vec{x}_s) + \rho_s^2 \left|\left|\vec{\xi}_s\right|\right|^2$

$$\mathbb{E}\left[||\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}||^2 \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s\}\right] = \\ = ||\vec{x}^* - \vec{x}_s||^2 + 2\rho_s a_s \widehat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_0)(\vec{x}^* - \vec{x}) + 2\rho_s \vec{B}_s^T (\vec{x}^* - \vec{x}_s) + \rho^2 c \quad (1.5.10)$$

Так як $\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s)$ квазіградієнт, то виконується

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_s) \ge \widehat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_s)(\vec{x} - \vec{x}_s) \quad (1.5.11)$$

Підставимо $\vec{x}^*$:

$$0 > \vec{f}(\vec{x}^*) - \vec{f}(\vec{x}_s) \ge \widehat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_s)(\vec{x}^* - \vec{x}_s) \quad (1.5.12)$$

За нерівністю Коши-Буняковського:

$$\vec{B}_s^{\mathrm{T}}(\vec{x}^* - \vec{x}_s) \le \left|\left|\vec{B}_s\right|\right| ||\vec{x}^* - \vec{x}_s|| \le b_s ||\vec{x}^* - \vec{x}_s|| \quad (1.5.13)$$

З врахуванням формул (1.5.12) та (1.5.13) можна записати:

$$\mathbb{E}\left[||\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}||^2 \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s\}\right] \le ||\vec{x}^* - \vec{x}_s||^2 + \rho_s b_s \gamma + c\rho_s \quad (1.5.14)$$

При чому:

$$2\,||\vec{x}^* - \vec{x}_s|| = \gamma \quad (1.5.15)$$

Позначимо через $\vec{z}_s = ||\vec{x}^* - \vec{x}_s||^2 + \gamma \sum_{k=s}^{\infty} \rho_k b_k + c \sum_{k=s}^{\infty} \rho_k^2$

Отримуємо, що :

$$\mathbb{E}\left[\vec{z}_{s+1} \setminus \{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s\}\right] \le \vec{z}_s \Rightarrow \quad (1.5.16)$$

$$\mathbb{E}\left[\vec{z}_{s+1} \setminus \{\vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_s\}\right] \le \vec{z}_s \quad (1.5.17)$$

Така послідовність $\{\vec{z}_s\}$, що задовольняє умові (1.5.17) називається **супермартингауер**.
Так як $\vec{z}_s > 0$, то вона з ймовірністю 1 збіжна до якоїсь границі.
Повторимо (1.5.10) s разів:

$$\mathbb{E}\left[||\vec{x}^* - \vec{x}_{s+1}|| \setminus \{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_s\}\right] \geq ||\vec{x}^* - \vec{x}_0||^2 + \\ + 2\sum_{k=0}^{s} \rho_k a_k \hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) + \gamma \sum_{k=0}^{s} \rho_k b_k + c \sum_{k=0}^{s} \rho_k^2 \quad (1.5.18)$$

Ми замінили $2\vec{B}_s^{\mathrm{T}}(\vec{x}^* - \vec{x}_s) \leq b_s$
Спрямуємо $s \to \infty$:
В силу умов теореми $\sum\limits_{k=0}^{s} \rho_k b_k$ - обмежений та $\sum\limits_{k=0}^{s} \rho_k^2$ також обмежений. Тоді

$$\sum_{k=0}^{s} \rho_k a_k \hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) > -\infty \quad (1.5.19)$$

Так як ліва частина більша за нуль, а добуток $\hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) < 0$.
І тоді, тим більше

$$\rho_k a_k \hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) > -\infty \quad (1.5.20)$$

Тоді, щоб виконувалася умова (1.5.20) необхідно, щоб:

$$0 > \hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)\left(\vec{x}^* - \vec{x}_k\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (1.5.21)$$

$$0 > \vec{f}(\vec{x}^*) - \vec{f}(\vec{x}_k) \leq \hat{\vec{f}}_x^{\mathrm{T}}(\vec{x}_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad (1.5.22)$$

Тоді з (1.5.22) випливає, що знайдеться така підпослідовність послідовності $\{\vec{x}_k\}, \{\vec{x}_{k,l}\}$, що $\lim\limits_{l\to\infty} \vec{f}(\vec{x}_{kl}) = \vec{f}(\vec{x}^*)$ □

1.5.3 Метод стохастичної апроксимації

Використовується для знаходження мінімуму функції регресії без обмежень.

$$\min \mathbb{E}\left[\vec{f}(\vec{x}, \vec{\omega})\right] = \vec{f}(x) \quad (1.5.23)$$

$$\vec{x}_{s+1} = \vec{x}_s - \rho_s \vec{\xi}_s \quad (1.5.24)$$

ρ_s - крок, $\vec{\xi}_s$ - випадковий вектор.

$$\vec{\xi}_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\vec{f}(\vec{x}_s + \vec{e}_j \delta_s, \vec{\omega}_{sj}) - \vec{f}(\vec{x}_s, \vec{\omega}_{s0})}{\delta_s} \vec{e}_j \quad (1.5.25)$$

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_1\right] = \vec{f}_x(\vec{x}_s) + \delta_s \vec{\omega}_s \tag{1.5.26}$$

$\vec{\omega}_s$ - крок. $||\vec{\omega}_s|| < c$

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s\right] = a_s \widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) + \vec{B}_s \tag{1.5.27}$$

$a_s = 1, \vec{B}_s = \delta_s \vec{\omega}_s$
Використаємо теорему о збіжності. Перевіримо умови:

1. $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s^2 < \infty$

2. $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s a_s = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty$

3. $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s b_s \geq \sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s \delta_s \, ||\vec{\omega}_s|| \leq c \sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s \delta_s < \infty$

З 1 випливає, що $\rho_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.
А з 2 та 3 випливає, що $\delta_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0, \rho_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.
Узагальненям цього методу є метод **випадкового пошуку**. Якщо у нас $n \geq 10$, то використовувати ці формули досить незручно. В таких випадках використовують метод випадкового пошуку, замінюючи метод знаходження квазіградієнту не по ортам, а за випадковими напрямами, що розподілені рівномірно. При цьому:

$$\vec{\xi}_s = \sum_{k=1}^{K} \frac{\vec{f}(\vec{x}_s + \beta_{sk}\delta_s, \vec{\omega}_{sk}) - \vec{f}(\vec{x}_s, \vec{\omega}_{sk})}{\delta_s} \beta_{sk} \tag{1.5.28}$$

K - число випадкових векторів.
$\beta_{sk} = [\beta_{skj}]\,, \beta_{skj} \in [-1, 1]$

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_s \setminus \vec{x}_s\right] = \frac{K}{3}\widehat{\vec{f}}_x(\vec{x}_s) + \delta_s \vec{\omega}_s, K < n, ||\vec{\omega}_s|| < C \tag{1.5.29}$$

1.6 Прийняття рішень в нечітких умовах

05.03.2014

1.6.1 Нечіткі множини та операції над ними

Нечіткою множиною A на X називають множина, що задається парами $(x, \mu_A(x))$, де $x \in A$, а $\mu_A(x)$ - функція приналежності нечіткої множини A, яка визначається наступним чином: $\mu_A : A \to [0, 1]$.
Носієм нечіткої множини A на універсальній множині X називається множина $\operatorname{supp} A = \{x : \mu_A(x) > 0\}$.
Доповненням до нечіткої множини A називається множина $\bar{A}$ така, що

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X \tag{1.6.1}$$

Універсальною множиною називається множина A така, що:

$$\mu_A(x) = 1, \forall x \in X \tag{1.6.2}$$

Нечітка множина A називається **нормальною**, якщо $\max\limits_{x \in X} \{\mu_A(x)\} = 1$. В іншому випадку вона називається **субнормальною**.
Підмножиною рівня α нечіткої множини A називається нечітка множина A_α з функцією приналежності

$$\mu_{A_\alpha} = \begin{cases} \mu_A(x), \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0, \mu_A(x) < \alpha \end{cases} \tag{1.6.3}$$

1.6.2 Операції над нечіткими множинами

Задані A, μ_A, B, μ_B.
Об'єднанням множин A та B називається множина $C = A \cup B$ така, що

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{1.6.4}$$

Перетином множин A та B називається множина $C = A \cap B$ така, що

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{1.6.5}$$

Об'єднанням множин в сильному сенсі A та B називається множина $C = A \hat{\cup} B$ така, що

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\} \tag{1.6.6}$$

Перетином множин в сильному сенсі A та B називається множина $C = A \hat{\cap} B$ така, що

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \tag{1.6.7}$$

Різницею множин A та B називається множина $C = A \setminus B$ така, що

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x), 0\} \tag{1.6.8}$$

1.6.3 Властивості множин рівня α

Виконуються наступні співвідношення

$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha \tag{1.6.9}$$

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \tag{1.6.10}$$

$$\left(A \hat{\cup} B\right)_\alpha \supseteq A_\alpha \cup B_\alpha \tag{1.6.11}$$

$$\left(A \hat{\cap} B\right)_\alpha \subseteq A_\alpha \cap B_\alpha \tag{1.6.12}$$

1.6.4 Декомпозиція множини

Нехай задана нечітка множина A з функцією приналежності $\mu_A(x)$. Тоді його можна розкласти за рівнями α.

$$A = \bigcup_{\alpha=0}^{1} A_\alpha \tag{1.6.13}$$

Операція концентрування нечіткої множини:

$$\operatorname{con} A = A^k, k > 1, k \in \mathbb{N} \tag{1.6.14}$$

$$\mu_{A^k}(x) = \mu_A^k(x) \tag{1.6.15}$$

Операція розтягування нечіткої множини:

$$\operatorname{dil} A = A^{\frac{1}{k}}, k > 1, k \in \mathbb{N} \tag{1.6.16}$$

$$\mu_{A^{\frac{1}{k}}}(x) = \mu_A^{\frac{1}{k}}(x) \tag{1.6.17}$$

1.7 Нечіткі відношення

Нечіткою відношенням R на X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, що задається сукупністю пар $((x, y), \mu_R(x, y))$

1.7.1 Операції над нечіткими відношеннями

Нехай задані нечіткі відношення $A, \mu_A(x, y), B, \mu_B(x, y); A, B \subset X \times X$

$$C = A \cup B \quad \Rightarrow \quad \mu_C(x, y) = \max\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\} \tag{1.7.1}$$

$$C = A \hat{\cup} B \quad \Rightarrow \quad \mu_C(x, y) = \min\{\mu_A(x, y) + \mu_B(x, y), 1\} \tag{1.7.2}$$

$$C = A \cap B \quad \Rightarrow \quad \mu_C(x, y) = \min\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\} \tag{1.7.3}$$

$$C = A \hat{\cap} B \quad \Rightarrow \quad \mu_C(x, y) = \mu_A(x, y) \cdot \mu_B(x, y) \tag{1.7.4}$$

1.7.2 Композиції нечітких відношень

На відмінність від звичайних відношень, в нечітких існує три варіанти композицій. Нехай задано $A \subset X \times Y, \mu_A(x, y)$ та $B \subset Y \times Z, \mu_B(y, z)$.
Максимінною композицією A та B називається таке відношення $C = A * B$, що

$$\mu_C(x, z) = \max_{y \in Y} \min\{\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)\} \tag{1.7.5}$$

Мінімаксною композицією A та B називається таке відношення $C = A \circ B$, що

$$\mu_C(x, z) = \min_{y \in Y} \max\{\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)\} \tag{1.7.6}$$

Максімультиплікативною композицією A та B називається така $C = A \cdot B$, що

$$\mu_C(x,z) = \max_{y \in Y} \mu_A(x,y) \cdot \mu_B(y,z) \quad (1.7.7)$$

Якщо X скінченне, то функцію приналежності до відношення можна задавати у вигляді матриці. Нечітке відношення R називається **рефлексивним**, якщо

$$\mu_R(x,x) = 1, \forall x \in X \quad (1.7.8)$$

Нечітке відношення R називається **антірефлексивним**, якщо

$$\mu_R(x,x) = 0, \forall x \in X \quad (1.7.9)$$

Нечітке відношення R називається **симетричним**, якщо

$$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x), \forall x, y \in X \quad (1.7.10)$$

Нечітке відношення R називається **антісиметричним**, якщо

$$\mu_R(x,y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y,x) = 0, \forall x, y \in X \quad (1.7.11)$$

Приклад 1.7.1. Розглянемо відношення R

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} |x-y|, |x-y| < 1 \\ 0 \end{cases} \quad (1.7.12)$$

Це відношення майже рівні. Воно є симетричним, рефлексивним.

1.8 Нечітке відношення нестрогої переваги

12.03.2014

Нечітким відношенням нестрогої переваги R називається будь-яке рефлексивне нечітке відношення.
Відношення R породжує **нечітке відношення строгої переваги** $R_s = R \backslash R^{-1}$.

$$\mu_{R_s}(x,y) = \max\{\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), 0\} \quad (1.8.1)$$

$\mu_{R_s}(x,y)$ - ступінь, з якої x домінує y.
Також R породжує **нечітке відношення еквівалентності** $R_e = R \cup R^{-1}$

$$\mu_{R_e}(x,y) = \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\} \quad (1.8.2)$$

Нечітке відношення індеферентності $R_i = (X \times X) \setminus (R \cup R^{-1}) \cup (R \cap R^{-1})$

$$\mu_{R_i}(x,y) = \max\{1 - \max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}, \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}\} \quad (1.8.3)$$

В тому випадку, якщо $R^{-1} \cup R = X \times X$, то відношення еквівалентності співпадає з відношенням індеферентності.
Задана множина альтернатив X, задано R - нечітке відношення нестрогої переваги. Воно відразу породжує R_s, R_e, R_i.
$1 - \mu_{R_s}(y,x)$ - степінь, з якої x не домінується y.

Спробуємо знайти степінь, з якої x не домінується будь-якою альтернативою y.

$$\mu_R^{nd}(x) = \max_{y \in X} \{1 - \mu_{R_s}(y, x)\} \tag{1.8.4}$$

Множиною недомінованих альтернатив за нечітким відношенням нестрогої переваги R називається нечітка множина R^{nd} для якої:

$$\mu_R^{nd}(x) = \max_{y \in X} \{1 - \mu_{R_s}(y, x)\} = \min_{y \in X} \{\mu_R(y, x) - \mu_R(x, y)\} \tag{1.8.5}$$

Якщо $\mu_R^{nd}(x) = 1$, то x це ЧНД (чітко недомінована) альтернатива.
Множиною чітко недомінованих альтернатив за нечітке відношення нестрогої переваги R називається множина (чітка) X_{cnd}, для якого виконується:

$$X_{cnd} = \{x : \mu_{R^{nd}}(x) = 1\} \tag{1.8.6}$$

Нечітке відношення нестрогої переваги R називається **сильно лінійним**, якщо:

$$\max \{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} = 1, \forall x, y \in X \tag{1.8.7}$$

Нечітке відношення нестрогої переваги R називається **λ-лінійним** ($\lambda \in [0, 1]$), якщо:

$$\max \{\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)\} \geq \lambda, \forall x, y \in X \tag{1.8.8}$$

Теорема 1.8.1. *Якщо нечітке відношення нестрогої переваги R є сильно лінійним, то ЧНД альтернативи x_1 та x_2 є еквівалентні зі степіню 1. Тобто* $\mu_{R_e}(x_1, x_2) = 1$

1.9 Прийняття рішень за кількома критеріями

Задана множина альтернатив X, на якій задано кілька відношень нестрогої переваги (нечітких або чітких), які ми будемо позначати $R_j, j = \overrightarrow{1, m}$. Також задані ваги критерії $w_j \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{m} w_j = 1$. Потрібно прийняти найкраще рішення.

Зробимо так:

1. $Q_1 = \bigcap\limits_{j=1}^{m} R_j; \mu_{Q_1}(x, y) = \min \left\{\mu_{R_j}(x, y)\right\}$;
2. Породжується $Q_{1,s}$ та $\mu_{Q_{1,s}}(x, y) = \max \{\mu_{Q_1}(x, y) - \mu_{Q_1}(y, x), 0\}$;
3. Знаходимо $Q_1^{nd} = 1 - \max\limits_{y \in X} \left\{\mu_{Q_{1,s}}(x, y)\right\}$;
4. $x_0 : \mu_{Q_1^{nd}}(x_0) = \max \left\{\mu_{Q_1^{nd}}(x)\right\}$;
5. Якщо альтернатив багато, то будуємо ще одну згортку, яка є взваженою сумою наших критеріїв

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{m} w_j R_j \tag{1.9.1}$$

$$\mu_{Q_2}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu_{R_j}(x,y) \tag{1.9.2}$$

6. Породжується $Q_{2,s}$ та $\mu_{Q_{2,s}}(x,y) = \max\{\mu_{Q_2}(x,y) - \mu_{Q_2}(y,x), 0\}$;
7. Знаходимо $Q_2^{nd} = 1 - \max_{y\in X}\left\{\mu_{Q_{2,s}}(x,y)\right\}$;
8. Після цього шукає найкращу альтернативу за обома згортками.
9. $\mu_Q^{nd}(x) = \min\left\{\mu_{Q_1}^{nd}(x), \mu_{Q_2}^{nd}(x)\right\}$;
10. $x_0 : \mu_{Q^{nd}}(x_0) = \max\left\{\mu_{Q^{nd}}(x)\right\}$;

1.9.1 Підхід Белмана-Заде

Знаходження розв'язку при нечітких критеріях та нечітких обмеженнях.
Постановка задачі: є множина альтернатив X. Нехай на цій множині задана нечітка ціль G з функцією приналежності $\mu_G(x)$ і нечітке обмеження C з функцією приналежності $\mu_C(x)$.
Суть метода в тому, що не робиться ніякої різниці між цілю та обмеженнями, вони розглядаються як "полноправние"нечіткі множини. Тоді нечітка множина розв'язків визначається як $D = G \cap C : \mu_D(x) = \min\{\mu_C(x), \mu_G(x)\}$.
Тобто, шукаємо $x_0 : \mu_D(x_0) = \max\{\mu_D(x)\}$
Це можна узагальнити на випадок, коли є кілька критеріїв та кілька обмежень.
Нехай є m цілій $G_1, \ldots, G_m$ та n нечітких обмежень $C_1, \ldots, C_n$.
Тоді, множина розв'язків

$$D = G_1 \cap \ldots \cap G_m \cap C_1 \cap \ldots C_n \tag{1.9.3}$$
$$\mu_D(x) = \min_{i,j}\left\{\mu_{C_j}(x), \mu_{G_j}(x)\right\} \tag{1.9.4}$$

Тоді найкраща альтернатива x_0:

$$\mu_D(x_0) = \max \mu_D(x) \tag{1.9.5}$$

1.9.2 Класифікація задач нечіткого математичного програмування

Клас 1. Чітка ціль $f(x)$ та нечітке обмеження $C, \mu_C(x)$. Тоді знаходимо $\max f(x) = f_{\max}, \min f(x) = f_{\min}$

I далі переходимо від $f(x)$ до $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} \in [0,1]$

Далі використовуємо підхід Белмана-Заде;

Клас 2. Чітка ціль та чіткі обмеження.

$$\max f(x) \tag{1.9.6}$$
$$g_i(x) \le 0, i = \overrightarrow{1,m} \tag{1.9.7}$$

Задаємося деякою границею z та переходимо від цієї задачі до

$$f(x) \to z \tag{1.9.8}$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overrightarrow{1, m} \tag{1.9.9}$$

Введемо поріг a.Тоді ми можемо ввести таку функцію приналежності

$$\mu_f(x) = \begin{cases} 1, f(x) = z \\ 0, f(x) < z - a \\ > 0, z > f(x) \ge z - a \end{cases} \tag{1.9.10}$$

Можемо записати цю функцію однозначно:

$$\mu_f(x) = \frac{f(x) - (z - a)}{a} \tag{1.9.11}$$

Тепер розглянемо обмеження. Нехай ми можемо порушити ці обмеження з якимсь порогом b_i. Тобто

$$0 \le g_i(x) \le b_i \tag{1.9.12}$$

Введемо функцію приналежності

$$\mu_{g_i}(x) = \begin{cases} 1, g_i(x) \le 0 \\ 0, g_i(x) \ge b_i \\ > 0, 0 < g_i(x) < b_i \end{cases} \tag{1.9.13}$$

Можемо записати цю функцію однозначно:

$$\mu_{g_i}(x) = \frac{b_i - g_i(x)}{b_i} \tag{1.9.14}$$

Далі використовуємо підхід Белмана-Заде

Клас 3. Нечітка ціль $\phi(x) = y; \mu_\phi(x, y) : X \times Y \to [0, 1]$. Та нечіткі обмеження $C; \mu_C(x)$;

Клас 4. Чітка ціль та нечіткі обмеження, де нечіткі саме параметри обмеження.

$$\max f(x) = \sum_j c_j x_j \tag{1.9.15}$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overrightarrow{1, m} \tag{1.9.16}$$

$$x_j \ge 0, j = \overrightarrow{1, n} \tag{1.9.17}$$

де a_{ij} - нечіткі величини;

Клас 5. Нечітка ціль та нечіткі обмеження, де нечіткість в параметрах

$$\max f(x, C) = \sum_j c_j x_j \tag{1.9.18}$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overrightarrow{1, m} \tag{1.9.19}$$

$$x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n} \tag{1.9.20}$$

c_j, a_{ij} - нечіткі величини. Саме такими задачами ми й будемо займатися.

1.10 Нечіткі відображення. Принципи узагальнення Зеде-Орловского

19.03.2014

Задана нечітка множина A на X з функцією приналежності $\mu_A(x)$.
Нехай в нас наявне чітке відображення на Y, $\phi(X) = Y$.

1.10.1 Принцип узагальнення Зеде

Образом нечіткої множини A на X при чіткому відображенні $\phi(X) = Y$ називається нечітка множина B на Y, що задається сукупністю пар

$$(y, \mu_B(y)) = (\phi(x), \mu_A(x)) \tag{1.10.1}$$

Де

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{1.10.2}$$

Тепер розглянемо випадок, коли наявне нечітке відношення $\phi(x, y)$ з функцією приналежності $\mu_\phi(x, y)$. За таким можна отримати таке представлення $(\mu_\phi(x, y), \mu_A(x))$.

1.10.2 Принцип узагальнення Орловського

Він розглядає B як максимінну композицію A та ϕ.
Образом нечіткої множини A на X при нечіткому відображенні $\phi(x, y)$ називається нечітка множина B на Y, що задається сукупністю пар $(y, \mu_B(y))$, де

$$\mu_B(y) = \max_x \min \{\mu_A(x), \mu_\phi(x, y)\} \tag{1.10.3}$$

Розглянемо випадок, коли ϕ - чітке відображення, тоді

$$\mu_\phi(x, y) = \begin{cases} 1, \phi(x) = y \\ 0, \phi(x) \neq 0 \end{cases} \tag{1.10.4}$$

Підставимо (1.10.3) у (1.10.4) отримуємо

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \phi^{-1}(y)} \mu_A(x) \tag{1.10.5}$$

А це саме принцип узагальнення Зеде, тобто все вірно.

1.10.3 Образ нечіткого відношення

Наявна множина Y. На них задано нечітке відношення $R \subset Y \times Y$. Тоді, Y відображається у ν_1 і у ν_2. Спробуємо знайти відношення між ними, назвемо його η. Функції відображення δ_1, δ_2.

$$\eta\left(\nu_1, \nu_2\right) = \max_{y,z \in Y} \min\left\{\nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(y,z)\right\} \tag{1.10.6}$$

Образом нечіткого відношення R при нечітких відображеннях ν_1, ν_2 називається узагальнене відношення переваги, що визначається за формулою (1.10.6). Тоді зворотнім до нього буде відношення:

$$\eta\left(\nu_2, \nu_1\right) = \max_{y,z \in Y} \min\left\{\nu_1(z), \nu_2(y), \mu_R(z,y)\right\} \tag{1.10.7}$$

Нехай відношення R є чітке відношення нестрого порядку "$\geq$". В такому випадку:

$$\mu_R(y,z) = \begin{cases} 1, y \geq z \\ 0, y < z \end{cases} \tag{1.10.8}$$

Підставивши (1.10.8) у (1.10.6) отримуємо:

$$\eta\left(\nu_1, \nu_2\right) = \max_{y \geq z;\ y,z \in Y} \min\left\{\nu_1(y), \nu_2(z)\right\} \tag{1.10.9}$$

А зворотнім до нього відношенням буде:

$$\eta\left(\nu_2, \nu_1\right) = \max_{y \leq z;\ y,z \in Y} \min\left\{\nu_1(y), \nu_2(z)\right\} \tag{1.10.10}$$

Нехай R - нечітке відношення нестрогої переваги. Тоді $\eta\left(\nu_1, \nu_2\right)$ - буде узагальненим відношенням нестрогої переваги. Позначення $\succeq$.

1.10.4 Властивості узагальненого нечіткого відношення нестрогої переваги

- Нехай δ_1, δ_2 - нормальні. І нехай нечітке відношення R - рефлексивне. Тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta\left(\nu_1, \nu_2\right)$ також рефлексивне;
- Нехай нечітке відношення R є сильно лінійним, тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta\left(\nu_1, \nu_2\right)$ сильно лінійне на множині усіх нормальних підмножин ν_1, ν_2;
- Нехай нечітке відношення R є λ-лінійним, тоді і узагальнене нечітке відношення $\eta\left(\nu_1, \nu_2\right)$ λ-лінійне на множині усіх нечітких підмножин ν_1, ν_2 таких, що $\max\limits_y \mu_{\nu_1}(y) > \lambda, \max\limits_z \mu_{\nu_2}(z) > \lambda$.

Приклад 1.10.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}; Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

X	x_1	x_2	x_3
$\mu_A(x)$	0.3	0.7	1

Окрім того, задане нечітке відношення $R \subset X \times X$ таблицею:

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.8	1	9	0.3	0.7
x_2	0.8	0.3	0.8	0.4	0.7
x_3	0.2	0.3	0.5	0.2	1

Знайдемо множину B.

$$\mu_B(y) = \max_x \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}$$

$$\mu_B(y_1) = \max\{\min\{0.3, 0.8\}, \min\{0.7, 0.8\}, \min\{1, 0.2\}\} = 0.7$$

В результаті отримаємо:

Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\mu_B(y)$	0.7	0.3	0.7	0.4	1

Приклад 1.10.2. Задано дві нечіткі множини ν_1, ν_2 на $Y =$ $cb0, \infty$. Функції приналежності:

$$\begin{aligned} \nu_1(y) &= e^{-k_1 y}, k_1 > 0 \\ \nu_2(y) &= e^{-k_2|z-5|}, k_2 > k_1 \end{aligned}$$

Нехай R нечітке відношення нестрого порядку $\geq$.
Знайти $\eta(\nu_1, \nu_2)$.

$$\eta(\nu_1, \nu_2) = \max_{z,y \in Y} \min\{\nu_1(y), \nu_2(z), \mu_R(z,y)\} = \max_{z \geq y} \min\{\nu_1(y), \nu_2(z)\}$$

Спочатку знайдемо точки перетину функцій:

z<5: $z = \dfrac{-k_1 y + 5k_2}{k_2}; z_1 = y = \dfrac{5k_2}{k_1 + k_2}$

- $y \leq z_1$:
$$\max_{z \geq y} \min\{\nu_1(y), \nu_2(z)\} = \nu_1(y = z_1) = e^{\frac{-5k_1k_2}{k_1+k_2}}$$
- $z_1 < y < z_2$:
$$\eta(\nu_1, \nu_2) = e^{-k_1 y}$$
- $y > z_2$:
$$\eta(\nu_1, \nu_2) = e^{k_2(y-5)}$$

X - множина альтернатив, що оцінюються функцією $\phi(x,y)$ нечітка множина Y оцінок.

На Y задане нечітке відношення переваги $R \subset Y \times Y$.
Очевидно, що між цими штуками буде відношення η і ми можемо його знайти.

$$\eta\left(x_1, x_2\right) = \max_{y,z} \min\left\{\phi(x_1, y), \phi(x_2, z), \mu_R\left(y, z\right)\right\} \tag{1.10.11}$$

R чітке відношення нестрого порядку, тоді:

$$\eta\left(x_1, x_2\right) = \max_{y \geq z} \min\left\{\phi(x_1, y), \phi(x_1, z)\right\} \tag{1.10.12}$$

$$\begin{aligned}\eta^{nd}(x) &= 1 - \max_{x'}\left(\eta\left(x', x\right) - \eta\left(x, x'\right)\right) = \\ &= 1 - \max_{x'}\left\{\max_{y \geq z} \min\left\{\phi(x', y), \phi(x, z)\right\} - \max_{y \geq z} \min\left\{\phi(x, y), \phi(x', z)\right\}\right\}\end{aligned} \tag{1.10.13}$$

1.11 Багатокритерійні задачі прийняття рішень

02.04.2014

$$\max f_i(x), \quad i \in I_1 \tag{1.11.1}$$

$$\min f_i(x), \quad i \in I_2 \tag{1.11.2}$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = \overrightarrow{1, m} \tag{1.11.3}$$

Вектор x^0 називається **парето оптимальний розв'язком**, якщо $\nexists x'$:

$$f_i(x') \geq f_i(x^0), \quad i \in I_1 \tag{1.11.4}$$

$$f_i(x') \leq f_i(x^0), \quad i \in I_2 \tag{1.11.5}$$

І хоча б одна нерівність виконується строго. Тобто $\nexists x'$, який би домінував над x^0.
Альтернативи x_1, x_2 називаються непорівнюваними, якщо за деякими критеріями одна краща, а за іншими - інша.

Твердження 1.11.1. *Всі парето-оптимальні альтернативи або еквівалетні, або непорівняні.*

$$x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2), i \in I_1 \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2), i \in I_2 \end{cases} \tag{1.11.6}$$

$x_1 > x_2$, якщо виконується (1.11.6) і хоча б одна нерівність виконується строго.
Вектор критеріїв $f^{(1)}(x) = \left[f_i^{(1)}(x)\right]$ еквівалентний $f^{(2)}(x) = \left[f_i^{(2)}(x)\right]$ тоді і тільки тоді, коли вони утворюють на множині альтернатив однакові відношення переваги.

Теорема 1.11.1. *Множина або вектор критеріїв* $\left[f_i^{(1)}(x)\right]$ *еквівалентний множині критеріїв* $\left[f_i^{(2)}(x)\right]$ *тоді і тільки тоді, коли існує деяке монотонне перетворення* w*, яке переводить область значень кожного з критеріїв одної множини у область значень відповідного критерію з іншої множини.*

$$\text{ffl} \tag{1.11.7}$$

1.12 Знаходження функції приналежності нечітких множин

16.04.2014

1.12.1 Метод парних порівнянь Томаса-Саті

Є нечітка множина A на X і потрібно знайти $\mu_a(x)$.
На основі знаній експертів будується матриця парних порівнянь - $M = ||m_{ij}||$
При цьому: $m_{ij} = \dfrac{1}{m_{ji}}; m_{ii} = 1$

1.13 Наближений метод виконання операцій над нечіткими числами

23.04.2014

Є дві нечіткі множини A та B з множини $\mathbb{R}$.
Є чотири операції: $+, -, \times, \div$

Розділ 2

Практика

2.1 Складання математичних моделей

26.02.2014

2.1.1 Задача №2

Таблиця рівномірного розподілу затрати ресурсів:

Дошки	Стіл	Бюро	Стул	Шкаф	Кількість
Перший ресурс	$[4, 6]$	$[8, 12]$	$[1, 2]$	$[9, 15]$	1000
Другий ресурс	$[1, 3]$	$[4, 6]$	$[2, 4]$	$[10, 16]$	500
Чоловіко-ресурс	$[2, 5]$	$[5, 8]$	$[1, 3]$	$[8, 12]$	800
Ціна	120	150	50	300	

Початок інтервалу позначимо γ_{ij}, а кінець δ_{ij}.
Потрібно знайти розв'язок, який задовільняє нас з ймовірністю більше, ніж $p = 0.9$
Запишемо математичну модель:

$$\max\left\{120x_1 + 150x_2 + 50x_3 + 300x_4\right\} \tag{2.1.1}$$

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq \alpha_{ij} \tag{2.1.2}$$

Перетворимо у детермінований еквівалент.

$$5x_1 + 10x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 12x_4 + \Phi^{-1}(0.9)\left(\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{1}{12}x_3^2 + 3x_4^2\right) \leq 1000 \tag{2.1.3}$$

Інші аналогічно.
Вводимо додаткову умову з задачі: $\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow x_3 = 6x_1$
Отримаємо змінену математичну модель:

$$\max\left\{120x_1 + 150x_2 + 300x_3 + 300x_4\right\} \tag{2.1.4}$$

$$5x_1 + 10x_2 + 9x_1 + 12x_4 + \Phi^{-1}(0.9)\left(\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_2^2 + 3x_1^2 + 3x_4^2\right) \leq 1000 \tag{2.1.5}$$

2.1.2 Завдання №3

Матриця витрату ресурсів:

Продукти	Норми трат						Об'єм	
	A		B		C			
	1	2	1	2	1	2	1	2
1	$[1,3]$	$[2,6]$	$[0.5,1.5]$	$[2,3]$	$[2,3]$	$[2,4]$	250	150
2	$[1,2]$	$[3,7]$	$[1,3]$	$[1.5,3]$	$[2,2.5]$	$[1,4]$	100	200
3	$[1,3]$	$[2,4]$	$[1,1.5]$	$[1,2]$	$[1,3]$	$[3,5]$	240	300
	x_1		x_2		x_3			
	300		170		250			

Таблиця вартості:

c_{ij}	A	B	C
1	2	8	5
2	3	6	6
3	3	9	5

Відповідно, обмежуюча ймовірність $p = 0.9$. Потрібно мінімізувати витрати. x_{ij} - скільки виробляємо j-того товару на i-тому виробництві.

$$\min \left\{ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \right\} \tag{2.1.6}$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^{(k)} x_{ij} \leq b_i^{(k)} \right\} \geq 0.9, i = \overrightarrow{1,3}, k = \overrightarrow{1,2} \tag{2.1.7}$$

Детермінізуємо. З критерієм все очевидно, бо він не змінюється, запишемо обмеження.
Для $k = 1$:

$$2x_{11} + x_{12} + 2.5x_{13} + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{1}{3} x_{11}^2 + \frac{1}{12} x_{12}^2 + \frac{1}{12} x_{13}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 250 \tag{2.1.8}$$

$k = 2, i = 1$:

$$4x_{11} + 2.5x_{12} + 3x_{13} + \Phi^{-1}(0.9) \left(\frac{4}{3} x_{11}^2 + \frac{1}{12} x_{12}^2 + \frac{2}{3} x_{13}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 150 \tag{2.1.9}$$

Також додаються обмеження на кількість продукцій:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 300 \tag{2.1.10}$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 170 \tag{2.1.11}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 250 \tag{2.1.12}$$

2.2 Четверта практика

09.04.2014

Завдання 2.2.1. Середні норми витрат для фабрик та максимальні об'єми виробництва

Види ресурсу	Норми витрат				Об'єм
Сировина	4	5	2	5	80
Робоча сила	20	12	20	40	400
Обладнання	10	15	10	16	150

Середній прибуток з кожної фабрики:

i	1	2	3	4
c_i	30	25	56	8

Нечіткі величини, середні значення яких вказані на таблиці, мають такі розподіли.

$$\mu_\gamma(a_{ij}) = e^{\dfrac{(a_{ij} - \bar{a_{ij}})^2}{2}} \tag{2.2.1}$$

$$\gamma\left(c_j\right) = \frac{1}{1 - \left(c_j - \bar{c_j}\right)^2} \tag{2.2.2}$$

Запишемо математичну модель недетермінованої задачі

$$\max \textstyle\sum_j c_j x_j \tag{2.2.3}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq v_i \tag{2.2.4}$$

$$x_j \geq 0 \tag{2.2.5}$$

$$\mu\left(a_{ij}\right) \geq 0.8 \tag{2.2.6}$$

$$\mu\left(c_j\right) \geq 0.8 \tag{2.2.7}$$

$$\tag{2.2.8}$$

Розв'яжемо дві останні нерівності для оцінки можливих варіантів:

$$\frac{1}{2} \geq |c_j - \bar{c_j}| \tag{2.2.9}$$

$$-\frac{1}{2} + \bar{c_j} \leq c_j \leq \frac{1}{2} + \bar{c_j} \tag{2.2.10}$$

$$|a_{ij} - \bar{a_{ij}}| \leq \sqrt{-2\ln 0.8} \tag{2.2.11}$$

$$-\sqrt{2\ln\frac{5}{4}} + \bar{a_{ij}} \leq a_{ij} \leq \sqrt{2\ln\frac{5}{4}} + \bar{a_{ij}} \tag{2.2.12}$$

Запишемо задачі песиміста та задачі оптиміста, тобто задачі, які передбачають найгірший та найкращій розвиток:

Задача песиміста:

$$\max \sum_j \left(\bar{c_j} - \frac{1}{2} \right) x_j \tag{2.2.13}$$

$$\sum_j \left(\bar{a_{ij}} + \sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} \right) x_j \leq v_i \tag{2.2.14}$$

Задача оптиміста:

$$\max \sum_j \left(\bar{c_j} + \frac{1}{2} \right) x_j \tag{2.2.15}$$

$$\sum_j \left(\bar{a_{ij}} - \sqrt{2 \ln \frac{5}{4}} \right) x_j \leq v_i \tag{2.2.16}$$

2.3 Шоста практика

23.04.2014

Завдання 2.3.1.

$$\max 3x_1 + 2x_2 \tag{2.3.1}$$
$$\max x_1 - x_2 \tag{2.3.2}$$
$$x_1 - 6x_2 \leq 3 \tag{2.3.3}$$
$$x_1 + x_2 \geq 10 \tag{2.3.4}$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 1 \tag{2.3.5}$$
$$x_2 \leq 11 \tag{2.3.6}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 32 \tag{2.3.7}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{2.3.8}$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \tfrac{1}{2} \tag{2.3.9}$$

$A(3,7); B(5,11); C(10.5,11); D(15,2); E(9,1)$
Знайдемо максимум та мінімум:

$$f_1^0(C) = 53.5 \tag{2.3.10}$$
$$f_2^0(D) = 13 \tag{2.3.11}$$
$$f_1^{min}(A) = 32 \tag{2.3.12}$$
$$f_2^{min}(B) = -6 \tag{2.3.13}$$
$$\tag{2.3.14}$$

$$w_1(x) = \frac{53.5 - 3x_1 - 2x_2}{30.5} \tag{2.3.15}$$

$$w_2(x) = \frac{13 - x_1 + x_2}{19} \tag{2.3.16}$$

$$\min x_3 \tag{2.3.17}$$
$$\rho_1 w_1 \le x_3 \tag{2.3.18}$$
$$\rho_2 w_2 \le x_3 \tag{2.3.19}$$
$$Ax \le B \tag{2.3.20}$$

Далі просто рахуємо.

Завдання 2.3.2.

$$\max 3x_1 + 2x_2 \tag{2.3.21}$$
$$\max x_1 - x_2 \tag{2.3.22}$$
$$\bar{c}_{11} = 3 \tag{2.3.23}$$
$$\bar{c}_{12} = 2 \tag{2.3.24}$$
$$\bar{c}_{21} = 1 \tag{2.3.25}$$
$$\bar{c}_{22} = -1 \tag{2.3.26}$$
$$\alpha = 0.8 \tag{2.3.27}$$
$$f_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \tag{2.3.28}$$
$$f_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \tag{2.3.29}$$
$$\mu(c_{ij}) = \frac{1}{1 + (c_{ij} - \bar{c}_{ij})^2} \tag{2.3.30}$$

Знаходимо обмеження для критеріїв:

$$c_{ij} \in \left[-\frac{1}{2} + \bar{c}_{ij}, \frac{1}{2} + \bar{c}_{ij} \right] \tag{2.3.31}$$

Отримуємо критерії:

$$f_1^e(x) = 2.5x_1 + 1.5x_2 \tag{2.3.32}$$
$$f_1^u(x) = 3.5x_1 + 2.5x_2 \tag{2.3.33}$$
$$f_2^e(x) = 1.5x_1 - 1.5x_2 \tag{2.3.34}$$
$$f_2^u(x) = 2.5x_1 - 0.5x_2 \tag{2.3.35}$$

2.4 Практика

14.05.2014

$$\max x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \tag{2.4.1}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \tag{2.4.2}$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30 \tag{2.4.3}$$
$$2x_1 + x_2 \le 20 \tag{2.4.4}$$
$$x_3 \le 10 \tag{2.4.5}$$
$$x_1 \le 10 \tag{2.4.6}$$
$$x_3 + x_4 \le 15 \tag{2.4.7}$$
$$x_1 > 0 \tag{2.4.8}$$

2.5 Література

Література : підручник дослідження операцій