

Зміст

1	Мікроекономіка	2
1.1	Введення у математичні методи економічного аналізу	2
1.1.1	Додадньовизначенні матриці	2
1.2	Якась задача	5
1.3	Задача №2. Економічний зміст множника Лагранджа λ^*	5
1.3.1	Задача №3	5
1.4	Література	5

Викладач:Подладчиков Володимир Миколайович

Електронна адреса:ipodlad@gmail.com

Розділ 1

Мікроекономіка

Основні теми курсу:

13.02.2014

- Теорія потреб;
- Теорія фірми;
- Теорія ринкових структур;
- Макроекономічні системи;
- Макроекономічна система Кейнса;

1.1 Введення у математичні методи економічного аналізу

1.1.1 Доданьовизначенні матриці

Розкладемо деяку функцію $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x) \quad (1.1.1)$$

Якщо x точка мінімуму, то $f(x+h) - f(x) = h^2 f''(x) > 0$

$x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + \nabla^T f \cdot \vec{h} + \vec{h}^T \cdot A \cdot \vec{h}$$

Якщо x точка мінімуму, то $f(x+h) - f(x) = \vec{h}^T \cdot A \cdot \vec{h} > 0$

Властивості доданьовизначеної матриці

Теорема 1. Для доданьовизначеної матриці A виконується:

$$e_i^T A e_i = a_{ii}$$

Теорема 2. Для усіх λ_i , які є власними числами додатньовизначеної матриці A виконується: $\lambda_i > 0$.

Доведення. $Ax = \lambda x$

$$x^T Ax = \lambda x^T x$$

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x} > 0$$

□

Задача цариці Додони

Постановка задачі: Є одна шкура вівці. Порізавши її на довгу нитку, потрібно обвести максимальну по площі ділянку біля моря.

$$\max xy \quad (1.1.2)$$

$$2 \cdot x + y = a \quad (1.1.3)$$

Розв'яжемо цю задачу за допомогою функції Лагранжа: $L = x \cdot y + \lambda (a - 2x - y)$
Після диференціювання отримали систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Отримали з неї:

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Розв'яжемо отримане рівняння $2\lambda + 2\lambda = 4$.

$$\text{Отримали: } \lambda = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}, x = \frac{a}{4}$$

Матрична арифметика

$$x \in \mathbb{R}^n : C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot L_{n \times p}$$

$$(\vec{x}_t, vx)_{1 \times 1}, (\vec{x}, \vec{x}_t)_{n \times n}$$

$$xA \quad Ax$$

$$\phi_1(x) = C^T x = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = C$$

$$\phi_2 = \vec{x}_t A \vec{x} = (\vec{x}, A \vec{x}) = (\vec{x} \vec{x}_t A)^T$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 2A \vec{x}$$

$$\frac{\partial \phi(A)}{\partial A} = \frac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}$$

$$\text{Зробити дома: } \frac{\partial \det A}{\partial A} = ?$$

Ортогональні матриці

Матриця A називається ортогональною, якщо $AA^T = I$

Розглянемо деякі вектори $\vec{y} = A\vec{x}$. При яких матрицях A співпадають $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$?

$$\|\vec{y}\|^2 = \vec{y}_t \vec{y} = \vec{x}_t A^T A \vec{x} = \vec{x}_t \vec{x}$$

Якщо A ортогональна, то $A^{-1} = A^T$

$$\det(A) = \pm 1$$

$$|\lambda(A)| = 1$$

$C = A \cdot B$ - добуток ортогональний також ортогональна.

$$C^T \cdot C = B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B = B^T \cdot B = I$$

Приклад 1 (матриця Якобі). $A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

$$\det A = 1$$

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 2 \cos \phi \lambda + 1$

$$\lambda_{\pm} = \cos \phi \pm \sqrt{\cos^2 \phi - 1} = -\cos \phi \pm i \sin \phi$$

Власні числа

Знайти екстремальну точку кривої другого порядку.

$$\min \vec{x}_t A \vec{x} \quad (1.1.6)$$

$$\vec{x}_t \vec{x} = 1 \quad (1.1.7)$$

Складемо функцію Лагранджа: $L = \vec{x}_t A \vec{x} + \lambda (1 - \vec{x}_t \vec{x})$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2A\vec{x} - \lambda \cdot 2\vec{x} = 0$$

$$\text{Отримали: } A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Функції від матриць

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix} \\ A &= T \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ & & \end{pmatrix} T \\ & \begin{matrix} 0 & \dots & \lambda_n \\ f(\lambda_1) & \dots & 0 \end{matrix} \\ A^2 &= T \Lambda T T \Lambda T = T \Lambda^2 T \\ & \begin{matrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{matrix} \\ f(A) &= T \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ & & \end{pmatrix} T \\ & \begin{matrix} e_1^\lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & e_n^\lambda \end{matrix} \\ e^A &= T \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ & & \end{pmatrix} T \\ & \begin{matrix} 0 & \dots & e_n^\lambda \end{matrix} \\ \det e^A &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= \text{tr} A \\ \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n &= \det A \\ \text{Отримали: } \det e^A &= e^{\text{tr} A} \end{aligned}$$

Теорема Гамільтона-Кері

Приклад 2. $\phi(\lambda) = \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2$

$$\phi(A) = A^2 + k_1 A + k_2 I \equiv 0$$

Через це можна виразити:

$$A^2 = -k_1 A - k_2 I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$A^n = \alpha_1 A + \alpha_2 I$$

$$\lambda^n = \alpha_1 \lambda + \alpha_2$$

1.2 Якась задача

27.02.2014

$$\max U(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1.2.1)$$

$$D - p\vec{x} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$L = u(x) + \lambda(D - \mp p\vec{x}) \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda p \quad (1.2.4)$$

$$x^* = x^*(p, D) \quad (1.2.5)$$

$$u^*(x^*(p, D)) \quad (1.2.6)$$

u^* - це **непряма функція корисності**. Одиниця виміру юділь (udil).

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & H \end{pmatrix} \quad (1.2.7)$$

$$\det \tilde{H} = -(pH^{-1}p) \det H \neq 0 \quad (1.2.8)$$

1.3 Задача №2. Економічний зміст множника Лагранджа λ^*

$$\lambda^* > 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} (u^*(D, p)) \quad (1.3.2)$$

Економічний зміст множника Лагранджа - він визначає граничну корисність грошей.

1.3.1 Задача №3

Довести, що непряма функція корисності є чимось. О боги, як мене бісить ця лекція.

Безкоштовних сніданків не буває.

1.4 Література