Зміст

Викладач:Подладчиков Володимир Миколайович
Електронна адреса:ipodlad@gmail.com

Розділ 1

Мікроекономіка

Основні теми курсу: 13.02.2014

- Теорія потреб;
- Теорія фірми;
- Теорія ринкових структур;
- Макроекономічні системи;
- Макроекономічна система Кейнса;

1.1 Введення у математичні методи економічного аналізу

1.1.1 Додадньовизначенні матриці

Розкладемо деяку функцію $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x) \tag{1.1.1}$$

Якщо x точка мінімуму, то $f(x+h) - f(x) = h^2 f''(x) > 0$
$x \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\vec{f}\left(\vec{x} + \vec{h}\right) = \vec{f}\left(\vec{x}\right) + \nabla^T f \cdot h + \vec{h}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot h$
Якщо x точка мінімуму, то $f(x+h) - f(x) = h^T \cdot A \cdot h > 0$

Властивості доданьовизначенної матриці

Теорема 1.1.1. *Для доданьовизначенної матриці A виконується:*
$e_i^t A e_i = a_i i$

Теорема 1.1.2. *Для усіх λ_i, які є власними числами додатньовизначенної матриці A виконується: $\lambda_i > 0$.*

Доведення. $Ax = \lambda x$
$x^T Ax = \lambda x^T x$
$\lambda = \dfrac{x^T Ax}{x^T x} > 0$ □

Задача цариці Додони

Постановка задачі: Є одна шкура вівці. Порізавши її на довгу нитку, потрібно обвести максимальну по площі ділянку біля моря.

$$\max xy \tag{1.1.2}$$

$$2 \cdot x + y = a \tag{1.1.3}$$

Розв'яжемо цю задачу за допомогою фуункції Лагранджа: $L = x \cdot y + \lambda \left(a - 2x - y\right)$
Після диференціювання отримали систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Отримали з неї:

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Розв'яжемо отримане рівняння $2\lambda + 2\lambda = 4$.
Отримали:$\lambda = \dfrac{a}{4} \Rightarrow y = \dfrac{a}{2}, x = \dfrac{a}{4}$

Матрична арифметика

$x \in \mathbb{R}^n : C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot L_{n \times p}$
$(\vec{x}^{\mathrm{T}}, vx)_{1 \times 1}, (\vec{x}, \vec{x}^{\mathrm{T}})_{n \times n}$
$xA \; Ax$
$\phi_1(x) = C^{\mathrm{T}} x = C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n$
$\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} = C$
$\phi_2 = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x} = (\vec{x}, A\vec{x}) = \mathrm{tr}\left(\vec{x}\vec{x}^{\mathrm{T}} A\right)$
$\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} = 2A\vec{x}$
$\dfrac{\partial \phi(A)}{\partial A} = \dfrac{\partial \phi}{\partial a_{ij}}$
Зробити дома: $\dfrac{\partial \det A}{\partial A} =?$

Ортогональні матриці

Матриця A називається ортогональною, якщо $AA^{\mathrm{T}} = I$
Розглянемо деякі вектори $\vec{y} = A\vec{x}$. При яких матрицях A співпадають $||\vec{x}|| = ||\vec{y}||$?
$||\vec{y}||^2 = \vec{y}^{\mathrm{T}} \vec{y} = \vec{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \vec{x} = \vec{x}^{\mathrm{T}} \vec{x}$
Якщо A ортогональна, то $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$
$\det\left(A\right) = \pm 1$

$|\lambda(A)| = 1$
$C = A \cdot B$ - добуток ортогональний також ортогональна.
$C^{\mathrm{T}} \cdot C = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot B = B^{\mathrm{T}} \cdot B = I$

Приклад 1.1.1 (матриця Якобі)**.** $A = \begin{matrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{matrix}$
$\det A = 1$
Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 2\cos\phi\lambda + 1$
$\lambda_{\pm} = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = -\cos\phi \pm i\sin\phi$

Власні числа

Знайти екстремальну точку кривої другого порядку.

$$\min \vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} \tag{1.1.6}$$
$$\vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{x} = 1 \tag{1.1.7}$$

Складемо функцію Лагранджа: $L = \vec{x}^{\mathrm{T}} A\vec{x} + \lambda\left(1 - \vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{x}\right)$
$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2A\vec{x} - \lambda \cdot 2\vec{x} = 0$
Отримали:$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Функції від матриць

$A = T^{\mathrm{T}} \begin{matrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix} T$
$A^2 = T^{\mathrm{T}}\Lambda T T^{\mathrm{T}}\Lambda T = T^{\mathrm{T}}\Lambda^2 T$
$f(A) = T^{\mathrm{T}} \begin{matrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{matrix} T$
$e^A = T^{\mathrm{T}} \begin{matrix} e_1^{\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e_n^{\lambda} \end{matrix} T$
$\det e^A = e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$
$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$
$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A$
Отримали: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$

Теорема Гамільтона-Кері

Приклад 1.1.2. $\phi(\lambda) = \lambda^2 + k_1\lambda + k_2$
$\phi(A) = A^2 + k_1 A + k_2 I \equiv 0$

Через це можна виразити:
$A^2 = -k_1 A - k_2 I$
$A^3 = A^2 \cdot A$
$A^n = \alpha_1 A + \alpha_2 I$
$\lambda^n = \alpha_1 \lambda + \alpha_2$

1.2 Якась задача

27.02.2014

$$\max U(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1.2.1}$$
$$D - p^{\mathrm{T}}\vec{x} = 0 \tag{1.2.2}$$
$$L = u(x) + \lambda(D - \mp p\vec{x} \tag{1.2.3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda p \tag{1.2.4}$$
$$x^* = x^*(p, D) \tag{1.2.5}$$
$$u^*(x^*(p, D)) \tag{1.2.6}$$

u^* - це **непряма функція корисності**. Одиниця виміру юділь (udil).

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p^{\mathrm{T}} \\ -p & H \end{pmatrix} \tag{1.2.7}$$
$$\det \tilde{H} = -(p^{\mathrm{T}} H^{-1} p) \det H \neq 0 \tag{1.2.8}$$

1.3 Задача №2. Економічний зміст множника Лагранджа λ^*

$$\lambda^* > 0 \tag{1.3.1}$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D}(u^*(D, p)) \tag{1.3.2}$$

Економічний зміст множника Лагранджа - він визначає граничну корисність грошей.

1.3.1 Задача №3

Довести, що непряма функція корисності є чимось. О боги, як мене бісить ця лекція.
Безкоштовних сніданків не буває.

1.4 Література