Зміст

Розділ 1

Теорія випадкових процесів

1.1 Елементи аксіоматики А. Н. Колмогорова

12.02.2014

Була запропонована у 1933 році у праці "Основні поняття теорія імовірностей"німецькою мовою.
Основним поняттям аксіоматики є $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де Ω - простір ймовірнісних подій, F - σ-алгебра подій. $\mathbb{P}$ - ймовірнісна міра.

Приклад 1.1.1 (Двократне підкидання монетки)**.**

$$\Omega = \{RR = \omega_1, RG = \omega_2, GR = \omega_3, GG = \omega_4\}$$

Множина випадкових подій :

$$\{\emptyset, \{RR\}, \{RG\}, \{GR\}, \{GG\}, \{RR, RG\}, \{RR, GG\}, \ldots, \Omega\}$$

$\emptyset$ - неможлива подія.
Ω - достовірна подія.
Отже, в нас виникло 16 випадкових подій.

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

Що ми хочемо відносно $\mathcal{F}$(класу всіх випадкових подій).

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \rightarrow A \in \mathcal{F}$
- $\{A_1, \ldots\} \in \mathcal{F} \rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

Чому не можна завжди брати в якості $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$?

Приклад 1.1.2 (Контрприклад від G. Vitali)**.** Кидаємо матеріальну точку.

$$x + y = (x + y) \bmod 1 \tag{1.1.1}$$

Розглянемо на відрізку відношення: $x \sim y \leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in [0,1] : x\ 0\} \\ A_{\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \left\{x \in [0,1] : x\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Розглянемо деяку множину E - множина, яка включає рівно по одному представнику з кожного класу еквівалентності.
Для будь-якого раціонального числа $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ для нього існує $E_\alpha = E + \alpha$.
Подія E - точка потрапила у множину E.
Можна отримати деякі властивості:

- $\mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{E_\alpha\}, \alpha \in \mathbb{Q}$

- $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

- $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_\alpha = [0,1)$

Отже, ми отримали, що:

$$\mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{E_\alpha\} = p \tag{1.1.2}$$

$$1 = \mathbb{P}\{[0,1)\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_\alpha\right\} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \mathbb{P}\{E_\alpha\} = \sum_{n=1}^{\infty} p \tag{1.1.3}$$

Отримали протиріччя. Помітимо те, що тут використовувалася незліченність відрізку $[0,1)$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,+\infty)$ - має бути мірою на $\mathcal{F}$
І є лише дві вимоги, яким вона має задовольняти:

- σ-адитивність: $\forall A_1, \ldots ; A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \to \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_i\}$

- $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$

Наслідок 1.1.1. $\mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$

Доведення. $1 = \mathbb{P}\{\Omega\} = \mathbb{P}\{\Omega \cup \emptyset\} = \mathbb{P}\{\Omega\} + \mathbb{P}\{\emptyset\} \to \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$ □

Наслідок 1.1.2. $A \subset B \to \mathbb{P}\{B\} \geq \mathbb{P}\{A\}$

Доведення. $\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{A \cup (B \setminus A)\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B \setminus A\} \geq \mathbb{P}\{A\}$

□

Наслідок 1.1.3. $\forall A : \mathbb{P}\{A\} \leq 1$

Доведення. $A \subset \Omega \to \mathbb{P}\{A\} \leq \mathbb{P}\{\Omega\} = 1$ □

Випадкова величина є функцією $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Більш широко це позначає, що вона вимірно діє на двох вимірних просторах

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{вим.}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) ; \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F} \tag{1.1.4}$$

Тобто, дійсно існує ймовірність:

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} = \mathbb{P}\left\{\xi^{-1}(B)\right\} \tag{1.1.5}$$

Тоді, можна стверджувати, що:

$$\exists \mathbb{P}\{\xi \in (-\infty, x)\} = \mathbb{P}\{\xi < x\} = F_\xi(x) \tag{1.1.6}$$

Випадкові величини можна поділити на типи:

- **Дискретні випадкові величини** - множина значень скінчена або зліченна.
- **Неперервні випадкові величини** - функція розподілу неперервна.
- **Змішані випадкові величини** - випадкові величини змішаного типу.

Теорема 1.1.1. *ξ є неперервною $\leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{\xi = x\} = 0$*

Доведення. $\mathbb{P}\{\xi = x\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \xi \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\xi \in \left[x, x + \frac{1}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x + \frac{1}{n}) - F_\xi(x) = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x)$ □

Теорема 1.1.2. *ξ є неперервною $\leftrightarrow \forall B \subset \mathbb{R}$ - множина, яка є зліченною або скінченною, виконується $\mathbb{P}\{\xi \in B\} = 0$.*

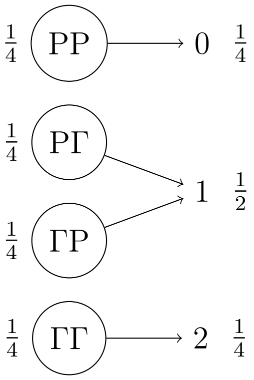
Доведення. Доведемо еквівалентність з попереднім критерієм 1.1.1.
Нехай $\forall B \subset \mathbb{R} : \mathbb{P}\{\xi \in B\} = 0$
Тоді $\forall x_j \in \mathbb{R}; \mathbb{P}\{\xi = x_j\} = \mathbb{P}\{\xi \in \{x_j\}\} = 0$
З множини в точку - очевидно.
Нехай $\forall x_j \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{\xi = x_j\} = 0$ $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$
$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi = x_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$ □

Випадкова величина називається **абсолютно неперервною величиною**, якщо

$$\forall B \subset \mathbb{R} : \lambda(B) = 0 \to \mathbb{P}\{\xi \in B\} = 0 \tag{1.1.7}$$

Чому в такому випадку існує щільність розподілу?
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{\xi} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_\xi)$
$\mathcal{P}_\xi$ - образ міри $\mathbb{P}$ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ породжена випадковою величиною ξ
$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi^{-1}(B)\} = \mathbb{P}\{\xi \in B\}$

Приклад 1.1.3 (Будування образу міри)**.** Умова задачі з попереднього прикладу 1.1.1.
Зрозуміло, що $\mathbb{P}\{\omega_1\} = \mathbb{P}\{\omega_2\} = \mathbb{P}\{\omega_3\} = \mathbb{P}\{\omega_4\} = \frac{1}{4}$



ξ - кількість гербів.
$\mathcal{P}_\xi(0) = \frac{1}{4}, \mathcal{P}_\xi(1) = \frac{1}{2}, \mathcal{P}_\xi(2) = \frac{1}{2}$

$\mathcal{P}_\xi$ часто називається **розподілом випадкової величини** ξ
Якщо ξ - абсолютно неперервна величина, то виконується:

$$\lambda(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\xi \in B\} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_\xi(B) = 0 \tag{1.1.8}$$

Міра $\mathcal{P}_\xi$ для абсолютно неперервних випадкових величин є абсолютно неперервною відносно міри Лебега.
Отже, можна використовувати теорему Радона-Нікодима:

$$\exists f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}, \lambda) : \mathcal{P}_\xi(B) = \int\limits_B f(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{1.1.9}$$

Оскільки це виконувалося для будь-який B ми можемо підставити туди будь-що. Підставимо $(-\infty, x)$

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{1.1.10}$$

Отже, $f(t)$ - щільність розподілу.
Неперервні випадкові величини, які не є абсолютно неперервними називаються **сингулярними**.

1.2 Випадкові вектори

$\boxed{26.02.2014}$

Випадковий вектор - це набір з n випадкових величин, які задані на спільному ймовірнісному просторі Ω.

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

$\xi_i : \Omega \to \mathbb{R}, \xi_i$ - вимірна відносно обох σ-алгебр $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
Але це означення досить погане, тому введемо інше:
$\vec{\xi}$ - це випадкова величина, яка $\vec{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, яка вимірна відносно σ-алгебр $\mathcal{F}$ та $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.2.1. *Два попередні означення еквівалентні.*

Доведення. Нехай виконується:

$$\vec{\xi} : (\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{вим.}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

Введемо функцію: $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ така, що $\pi_i(\vec{x}) = x_i$
$\xi_i(\omega) = \pi_i\left(\vec{\xi}(\omega)\right) = \pi \circ \vec{\xi}$ - вимірна, як композиція вимірних.
Залишилося довести, що є перехід з першого в друге.
Про вектор відомо лише те, що кожна його координата є вимірною функцією.
Потрібно довести, що $\vec{\xi}(\omega)$ вимірна відносно $\mathcal{F}$ та $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Тобто, потрібно довести, що

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F} \tag{1.2.1}$$

Скористаємося методом гарних множин. Візьмемо такі множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, для яких $\vec{\xi}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Назвемо цю множину множин C. Очевидно, що $C \subset \mathcal{B}$. Також нам відомо, що $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \in C, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall i$
Доведемо це.

$$\underbrace{\vec{\xi}^{-1}(B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n)}_{\text{брус}} = \left\{\omega \in \Omega : \vec{\xi}(\omega) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n\right\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \xi_i \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) \in B_i\} \in \mathcal{F}$$

Чи можна стверджувати, що $\mathbb{R}^n \in C$?

$$\vec{\xi}^{-1}(\mathbb{R}^n) = \Omega \in \mathcal{F} \tag{1.2.2}$$

Отже, таки так.

$$B_1, B_2, \ldots \in C \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in C \tag{1.2.3}$$

Доведемо це:

$$\vec{\xi}^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \vec{\xi}^{-1}(B_i) \in C \tag{1.2.4}$$

Нам залишилася необхідною лише одна властивість:

$$B \in C \Rightarrow \overline{B} \in C \tag{1.2.5}$$

І це також доведемо, хоча й очевидно, наче:

$$\vec{\xi}^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{\vec{\xi}^{-1}(B)} \in \mathcal{F} \tag{1.2.6}$$

З отриманих властивостей можна визначити, що наша C є σ-алгеброю та містить всі бруси. Отже, вона містить і σ-алгебру породжену брусами, а це є $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Отже, $\mathcal{B}\{\mathbb{R}^n\} \subset C$. Отримали, що $C = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. □

1.3 Характеристики випадкових векторів

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

1.3.1 Математичне сподівання

$$\mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[\xi_1] \\ \mathbb{E}[\xi_2] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[\xi_n] \end{pmatrix}$$

1.3.2 Кореляційна матриця

Також має назву **коваріаційної** або **дисперсійної матриці**.

$$\mathcal{D}_{\vec{\xi}} = \mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)^*\right] \tag{1.3.1}$$

Властивості цієї матриці:

1. $\mathcal{D}^*_{\vec{\xi}} = \mathcal{D}_{\vec{\xi}}$

   Доведення. $\mathcal{D}^*_{\vec{\xi}} = \left(\mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)^*\right]\right)^* = \mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)^{*,*}\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)^*\right] = \mathcal{D}_{\vec{\xi}}$ □

2. $\mathcal{D}_{\vec{\xi}}$ - невід'ємно визначена.

   Доведення. $\left(\mathcal{D}_{\vec{\xi}}\vec{c}, \vec{c}\right) = \left(\mathbb{E}\left[\vec{\xi}_0\vec{\xi}_0^*\right]\vec{c}, \vec{c}\right) = \mathbb{E}\left[\vec{\xi}_0^*\vec{c}, \vec{\xi}_0\vec{c}\right] \geq 0$ □

   Зауваження 1.3.1. Подумати про те, коли буде досягнута рівність.

3. Будь-яка матриця, яка задовольняє дві попередні властивості обов'язково є кореляційною матрицею деякого вектору.

Також можна ввести формулу **взаємнодисперсійної матриці**:

$$C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} = \mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}[\xi]\right)(\vec{\eta} - \mathbb{E}[\eta])\right] \tag{1.3.2}$$

1. $C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} = C^*_{\vec{\xi},\vec{\eta}}$

Приклад 1.3.1. Розглянемо деяку матрицю:
$t_1, \dots, t_n \geq 0$
Розглянемо матрицю їх локальних мінімумів:

$$|| \min (t_i, t_j) ||_{i,j} = \begin{pmatrix} t_1 & \min(t_1, t_2) & \dots \\ \min(t_2, t_1) & t_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

H - гільбертовий простір. $x_1, \dots, x_n \in H$

$$G = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n, x_1) & \dots & & \end{pmatrix}$$

Це **матриця Грама**, яка є ермітова та невід'ємно визначена.
Спробуємо побудувати деякий гільбертовий простір такий, щоб в ньому було легко знаходити скалярні добутки:
Візьмемо простір $\mathbb{L}_2(0, +\infty) : x_i(t) = I_{[0,t_i]}(t)$

$$(x_i, x_j) = \int_0^\infty I_{[0,t_j]} I_{[0,t_i]} \, \mathrm{d}\, t = \min(t_i, t_j)$$

Отже, матриця справді кореляційна.

1.3.3 Перетворення $\mathcal{D}_{\vec{\xi}}$та $C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}$ при афінних перетвореннях

Задані$\vec{\xi}, \mathcal{D}_{\vec{\xi}}$ та афінне перетворення:

$$\vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{b} \tag{1.3.3}$$

Спробуємо знайти, як зміниться дисперсійна матриця при такому афінному перетворені:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\vec{\eta}} = \mathbb{E}\left[(\vec{\eta} - \mathbb{E}[\vec{\eta}])(\vec{\eta} - \mathbb{E}[\vec{\eta}])^*\right] = \\ = \mathbb{E}\left[\left(A\vec{\xi} + \vec{b} + \mathbb{E}\left[A\vec{\xi} + \vec{b}\right]\right)\left(A\vec{\xi} + \vec{b} + \mathbb{E}\left[A\vec{\xi} + \vec{b}\right]\right)^*\right] = \\ = \mathbb{E}\left[\left(A\vec{\xi} + \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)\left(A\vec{\xi} + \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right]\right)^*\right] = A\mathcal{D}_{\vec{\xi}}A^* \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

1.3.4 Гільбертовий простір $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Введемо такий гільбертовий простір:

$$\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{C}^n) = \left\{\vec{\xi} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)) : \mathbb{E}\left[|\xi_i|^2\right] < \infty, \forall i = \overrightarrow{1, n}\right\} \tag{1.3.5}$$

З нерівності Коші-Буняковського отримуємо, що:

$$\mathbb{E}\left[\xi_i\bar{\xi}_j\right] \le \sqrt{\mathbb{E}\left[|\xi_i|^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[|\xi_j|^2\right]} < \infty \tag{1.3.6}$$

Знайдемо в такому просторі скалярний добуток:

$$\left(\vec{\xi},\vec{\eta}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi},\vec{\eta}\right)_{\mathbb{R}^n}\right] = \mathbb{E}\left[\vec{\eta}^*\vec{\xi}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left(\vec{\xi},\vec{\eta}^*\right)\right] \tag{1.3.7}$$

1.4 Оптимальне лінійне оцінювання випадкових векторів

$\vec{\xi},\vec{\eta}$ - випадкові вектори.
$\vec{\xi} \in \mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{C}^m), \vec{\eta} \in \mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{C}^n)$
Вектор $\vec{\xi}$ спостерігається, а потрібно знайти оцінку $\hat{\vec{\eta}}$.
Будемо шукати оцінку в такому вигляді: $\hat{\vec{\eta}} = A\vec{\xi} + \vec{b}$.
Ми розглядаємо критерій мінімуму середньоквадратичного відхилення:

$$\min\left\{\mathbb{E}\left[\left|\left|\vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}}\right|\right|^2\right]\right\} \tag{1.4.1}$$

Шукаємо $A \in \mathcal{MAT}_{n\times m}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$, щоб

$$\mathbb{E}\left[\left|\left|\vec{\eta} - \left(A\vec{\xi} + \vec{b}\right)\right|\right|^2\right] = \min\left\{\mathbb{E}\left[\left|\left|\vec{\eta} - \left(C\vec{\xi} - \vec{d}\right)\right|\right|^2\right]\right\} \tag{1.4.2}$$

Теорема 1.4.1 (Лема про перпендикуляр у гільбертовому просторі)**.** *H - гільбертовий простір. $L \subset H$ - підпростір. $y \notin L$.*
Необхідно знайти таку точку $x_0 \in L$, що:

$$\left|\left|\overrightarrow{y - x_0}\right|\right| \le \left|\left|\overrightarrow{y - x}\right|\right|, \forall \vec{x} \in L$$

Також необхідно опустити якимось чином перпендикуляр. Тобто:

$$\overrightarrow{y - x_0} \perp \vec{x}, \forall \vec{x} \in L$$

Кожна ця задача має єдиний розв'язок і до того ж, вони однакові.

Доведення. $H = L \dotplus L^{\perp}$ - очевидний факт.
Це позначає, що $\forall \vec{y} \in H : \exists! \vec{x}_0 \in L, \vec{x}_1 \in L^{\perp} \vec{y} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1$
Очевидно, що це перпендикуляр. А оскільки розклад єдиний, то єдиність також гарантована.
$||\vec{y} - \vec{x}||^2 = (\vec{y} - \vec{x}, \vec{y} - \vec{x}) = (\vec{y} - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{x}, \vec{y} - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{x}) = (\vec{y} - \vec{x}_0, \vec{y} - \vec{x}_0) + (\vec{x}_0 - \vec{x}, \vec{x}_0 - \vec{x}) + (\vec{y} - \vec{x}_0, \vec{x}_0 - \vec{x}) + (\vec{x}_0 - \vec{x}, \vec{y} - \vec{x}_0) = (\vec{y} - \vec{x}_0, \vec{y} - \vec{x}_0) + (\vec{x}_0 - \vec{x}, \vec{x}_0 - \vec{x})$
Отже, в точці $\vec{x}_0$ досягається мінімальна відстань. А єдиність знову гарантована. □

Використаємо теорему 1.4.1 підставивши в неї такі множини: 05.03.2014

$$H = \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{C}^n) \tag{1.4.3}$$

$$L = \left\{\tilde{\vec{\eta}} = C\vec{\xi} + \vec{d}, C \in \mathcal{MAT}(n \times m), \vec{d} \in \mathbb{C}^n\right\} \tag{1.4.4}$$

$$\forall \tilde{\vec{\eta}}, \left(\vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}}, \tilde{\vec{\eta}}\right) = 0 \tag{1.4.5}$$

З отриманої формули (1.3.7) відомо, що:

$$\left(\vec{\xi}, \vec{\eta}\right) = \operatorname{tr} \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\vec{\eta}\right] \tag{1.4.6}$$

Використаємо це для формули (1.4.5). Отже, $\forall C, \vec{d}$ виконується:

$$\operatorname{tr} \mathbb{E}\left[\left(\vec{\eta} - \left(A\vec{\xi} + \vec{b}\right)\right)\left(C\vec{\xi} + \vec{d}\right)^*\right] = 0 \tag{1.4.7}$$

$$\operatorname{tr} \mathbb{E}\left[\vec{\eta}\vec{\xi}^*C^* - A\vec{\xi}\vec{\xi}^*C^* - \vec{b}\vec{\xi}^*C^* + \vec{\eta}\vec{d}^* - A\vec{\xi}\vec{d}^* - \vec{b}\vec{d}^*\right] = 0 \tag{1.4.8}$$

$$\begin{multline} \operatorname{tr}\left(\left(C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} + \vec{m}_{\vec{\eta}}\vec{m}_{\vec{\xi}}^*\right)C^* - A\left(\mathcal{D}_{\vec{\xi}} + \vec{m}_{\vec{\xi}}\vec{m}_{\vec{\xi}}^*\right)C^*\right) - \\ - \operatorname{tr}\left(b\vec{m}_{\vec{\xi}}^*C^* + \vec{m}_{\vec{\eta}}\vec{d}^* - A\vec{m}_{\vec{\xi}}\vec{d}^* - \vec{b}\vec{d}^*\right) = 0 \end{multline} \tag{1.4.9}$$

$$\begin{cases} C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} + \vec{m}_{\vec{\eta}}\vec{m}_{\vec{\xi}}^* - A\left(\mathcal{D}_{\vec{\xi}} + \vec{m}_{\vec{\xi}}\vec{m}_{\vec{\xi}}^*\right) - \vec{b}\vec{m}_{\vec{\xi}}^* = 0 \\ \vec{m}_{\vec{\eta}} - A\vec{m}_{\vec{\xi}} - \vec{b} = 0 \end{cases} \tag{1.4.10}$$

$$b = \vec{m}_{\vec{\eta}} - A\vec{m}_{\vec{\xi}} \tag{1.4.11}$$

$$C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} - A\mathcal{D}_{\vec{\xi}} = 0 \Rightarrow A = C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} \cdot D_{\vec{\xi}}^{-1} \tag{1.4.12}$$

$$b = \vec{m}_{\vec{\eta}} - C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} \cdot D_{\vec{\xi}}^{-1} \cdot \vec{m}_{\vec{\xi}} \tag{1.4.13}$$

Отримали оцінку:

$$\hat{\vec{\eta}} = C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} \cdot D_{\vec{\xi}}^{-1}\vec{\xi} + \vec{m}_{\vec{\eta}} - C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} \cdot D_{\vec{\xi}}^{-1} \cdot \vec{m}_{\vec{\xi}} \tag{1.4.14}$$

Або, якщо спростити:

$$\hat{\vec{\eta}} = \vec{m}_{\vec{\eta}} + C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}D_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi} - \vec{m}_{\vec{\eta}}\right) \tag{1.4.15}$$

1.4.1 Дисперсійна матриця похибки

Оскільки математичне сподівання оцінки нульове, виникає питання про її дисперсійну матрицю. Обчислимо дисперсійну матрицю похибки:

$$D_{\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}}} = \mathbb{E}\left[\left(\vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}}\right)\left(\vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}}\right)^*\right] \tag{1.4.16}$$

$$D_{\hat{\vec{\eta}}} = \mathbb{E}\left[\left(\vec{m}_{\vec{\eta}} + C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}D_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi} - \vec{m}_{\vec{\eta}}\right)\right)\left(\vec{m}_{\vec{\eta}} + C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}D_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi} - \vec{m}_{\vec{\eta}}\right)\right)^*\right] \tag{1.4.17}$$

$$D_{\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}}} = \mathbb{E}\left[(\vec{\eta}-\vec{m}_{\vec{\eta}})(\vec{\eta}-\vec{m}_{\vec{\eta}})^*\right] - \\ - \mathbb{E}\left[(\vec{\eta}-\vec{m}_{\vec{\eta}})\left(C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}D_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi}-\vec{m}_{\vec{\eta}}\right)^*\right)\right] - \mathbb{E}\left[C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}\mathcal{D}_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi}-\vec{m}_{\vec{\xi}}\right)(\vec{\eta}-\vec{m}_{\vec{\eta}})^*\right] + \\ + \mathbb{E}\left[C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}\mathcal{D}_{\vec{\xi}}^{-1}\left(\vec{\xi}-\vec{m}_{\vec{\xi}}\right)\left(\vec{\xi}-\vec{m}_{\vec{\xi}}\right)^*\left(D_{\vec{\xi}}^{-1}\right)^* C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}^*\right] \quad (1.4.18)$$

$$D_{\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}}} = D_{\vec{\eta}} - C_{\vec{\eta},\vec{\xi}}D_{\vec{\xi}}^{-1}C_{\vec{\xi},\vec{\eta}} \quad (1.4.19)$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\left|\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}}\right|\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[|\eta_1-\hat{\eta}_1|^2\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[|\eta_n-\hat{\eta}_n|^2\right] = \\ = \mathbb{D}\left[\eta_1-\hat{\eta}-1\right] + \ldots + \mathbb{D}\left[\eta_n+\hat{\eta}_n\right] = \operatorname{tr}\left(D_\eta - C_{\vec{\eta},\vec{\xi}}D_{\vec{\eta}}^{-1}C_{\vec{\xi},\vec{\eta}}\right) \quad (1.4.20)$$

1.5 Генератриси та їх застосування до випадкової кількості випадкових змінних. Гіллясті процеси Гальтона-Ватсона

Нехай в нас є випадкова величина ξ.

ξ	0	1	...	n	...
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	...	p_n	...

Генератриса випадкової величини ξ це функція $G_\xi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$

1.5.1 Властивості генератриси

1. $G_\xi(1) = 1$;
2. При $z \in [0,1]$ ряд збігається рівномірно;
3. $G_\xi(z) \geq 0$ монотонно не спадна і опукла в широкому сенсі;
4. $G'_\xi(1) = \mathbb{E}[\xi]$;
5. $G_\xi(z) = \mathbb{E}\left[z^\xi\right]$;
6. Якщо $\xi \perp \eta$, то $G_{\xi+\eta} = \mathbb{E}\left[z^{\xi+\eta}\right] = \mathbb{E}\left[z^\xi\right]\mathbb{E}\left[z^\eta\right] = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$.

Нехай є послідовність однаково розподілених величини $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots \in \{0, \ldots, 1\}$ ν є незалежна від них і також розподілена на $\{0, \ldots, n, \ldots\}$

Розглянемо $\Theta = \sum\limits_{i=1}^{\nu} \xi_i$

$$G_\Theta(z) = \mathbb{E}\left[z^\Theta\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\nu\left[z^\Theta\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_\nu\left[z^{\xi_1+\ldots+\xi_\nu}\right]\right] = \\ = \mathbb{E}\left[G_\xi^\nu(z)\right] = G_\nu\left(G_\xi(z)\right) \quad (1.5.1)$$

Приклад 1.5.1. $\xi \sim Pois\,(\lambda)$ - кількість студентів.
Студент здає іспит з ймовірністю p і не здає з ймовірністю $1-p$.
Потрібно довести, що кількість тих, хто склад іспит також розподілена $\sim Pois\,(\lambda p)$.
$\eta = \varepsilon_1 + \ldots + \epsilon_\xi$, де ε_i це одиниця, якщо студент іспит склав і нуль, якщо не склав.
$G_\xi(z) = e^{\lambda(z-1)}$
$G_\varepsilon(z) = pz + 1 - p$
$G_\eta(z) = G_\xi(G_\varepsilon(z)) = e^{\lambda(pz+1+p-1)} = e^{\lambda p(z-1)}$

1.5.2 Гіллясті процеси Гальтона-Ватсона

Нульовий крок. В нас є одна істота;

Перший крок. Ця істота народила $\xi^{(1)}$ нащадків і померла;

Другий крок. Кожна з цих істот-нащадків народжує ще нащадків $\xi^{(2)} = \sum\limits_{i=1}^{\xi^{(1)}} \nu_i$,

ν_i - незалежні і розподілені так само, як ξ_1.

$\vdots$

Введемо подію "Виродження для деякого кроку n наше $\xi^{(n)} = 0$.
Потрібно знайти ймовірність такої події.
Давайте позначимо $G_i(z)$ - генератриса кількості нащадків.
$G_1(z)$ - генератриса чисельності популяції на першому кроці.
$G_1(z) = G(z)$
$G_1(z) = G(G(z))$
$G_n(z) = \underbrace{G(G(\ldots(z)\ldots)}_{n \text{ штук}}$
$\mathbb{P}\left\{\text{Виродження}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \text{на n-тому кроці нікого немає}\right\}$
Ця послідовність подій, яка є неспадною.
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\text{на n-тому кроці нікого немає}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty} G_n(0) = ?$
Розглянемо деякі очевидні властивості цієї послідовності:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : G_n(0) \le G_{n+1}(0)$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} : G_n(0) \le 1$;

Отже, за теоремою Вейерштраса існує границя.
Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(0) = x$

$$G\left(\lim_{n\to\infty} G_n(0)\right) = G(x) \tag{1.5.2}$$

$$G\left(\lim_{n\to\infty} G_n(0)\right) = \lim_{n\to\infty} G(G_n(0)) = \lim_{n\to\infty} G_{n+1}(0) = x \tag{1.5.3}$$

Отримали рівняння: $G(z) = z$ На жаль, в цього рівняння може бути кілька розв'язків і ми не будемо знайти, який саме нам потрібний. Тому нам необхідний засіб знайти кількість розв'язків. Зазначимо, що хоча б один розв'язок точно є, оскільки границя задовольняє рівняння та існує.
Можливі ситуації

- Є лише один розв'язок;
- Нескінченно багато розв'язків;
- Два розв'язки.

Інші випадки неможливі.
Генератриса має бути випуклою, а якщо розв'язків більше за два, з'являються точки перелому.

Твердження 1.5.1. $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(0) = x$ *- це найменший корінь рівняння* $G(z) = z$ *на проміжку* $[0, 1]$.

Доведення. Нехай y - це найменший розв'язок. Отже, $o \leq y$.

$$G(0) \leq G(y) = y$$
$$G_2(0) \leq G(y) = y$$
$$\vdots$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(0) \leq y$.
Але ми знаємо, що ця границя також є розв'язком рівняння $G(z) = z$.
Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(0) = y$ □

Теорема 1.5.1. *Ймовірність виродження гіллястого процесу Гальтона-Ватсона дорівнює найменшому невід'ємному розв'язку рівняння* $G(z) = z$.

Приклад 1.5.2. $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$ $G(z) = \dfrac{z^2+1}{2}$
$\dfrac{z^2+1}{2} = z \Rightarrow z = 1$
Отже, виродження з одиничною ймовірністю.

Приклад 1.5.3. $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 3 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$ $G(z) = \dfrac{z^3+1}{2}$
$\dfrac{z^3+1}{2} = z \Rightarrow z = \min\left\{1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Отже, виродження з такою дивною ймовірністю.

12.03.2014

Коли ймовірність виродження дорівнює 1?

Теорема 1.5.2. *Якщо ξ - кількість нащадків. Тоді ймовірність виродження дорівнює 1, якщо $\mathbb{E}[\xi] \le 1$, і менше одиниці, коли $\mathbb{E}[\xi] > 1$.*

Наслідок 1.5.1 (Виняток)**.** *Якщо $\mathbb{P}\{\xi = 1\} = 1$, то ймовірність виродження буде нульовою.*

Доведення. Нехай $G(z) \not\equiv z$
Доведемо, що:$\mathbb{E}[\xi] > 1 \Rightarrow \mathbb{P}_d < 1$

$$\mathbb{E}[\xi] = G'(1) \tag{1.5.4}$$

В точці 1 - співпадають $G(1) = 1$.
В околі 1 $G'(z) > z$
Тоді $\exists z^* < 1 : G(z^*) = z^*$
Тепер, нехай $\mathbb{E}[\xi] \le 1$. Методом від супротивного $\mathbb{P}_d < 1$. Тоді $\exists z^* < 1; G(z^*) = z^*$.
Тоді за теоремою Лагранжа $\exists y : G'(y) = 1$. Але тоді похідна в останній точці $G'(1) > 1$, а отже $\mathbb{E}[\xi] > 1$, а це протиріччя. $\square$

За цим критерієм можна розбити процеси Гальтона-Ватсона на три типи:

1. $\mathbb{E}[\xi] < 1$ - **докритичний** випадок. Ймовірність виродження строго дорівнює 1;

2. $\mathbb{E}[\xi] = 1$ - **критичний** випадок. Ймовірність виродження строго дорівнює 1, окрім винятку;

3. $\mathbb{E}[\xi] > 1$ - **надкритичний** випадок. Ймовірність виродження строго менше за 1.

1.6 Ланцюги Маркова

Розглянемо простір станів (або скінчений, або злічений) $E = \{1, \dots, n, (\dots)\}$. З'являються випадкові величини ξ_k - номер стану, в якому знаходиться частинка після k-того кроку. $\xi_k \in E$.

1.6.1 Марківська властивість

Ця властивість є вкрай необхідною для ланцюгів Маркова.

$$\mathbb{P}\{\xi_{k+1} = i_{k+1} \setminus \{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_k = i_k\}\} = \mathbb{P}\{\xi_{k+1} = i_{k+1} \setminus \{\xi_k = i_k\}\} \tag{1.6.1}$$

Тобто, при теперішньому, що фіксовано, майбутнє не залежить від минулого. Розглянемо таку ймовірність:

$$\mathbb{P}\{\xi_{k+1} = j \setminus \xi_k = i\} \tag{1.6.2}$$

Якщо ця ймовірність не залежить від k. Тобто, в будь-який момент часу ймовірність переходу зі стану i в стан j однакова, то це ланцюг Маркова називають

однорідним ланцюгом Маркова і саме з такими однорідними ланцюгами Маркова ми будемо працювати.
Оскільки ланцюг Маркова у нас тепер однорідний, можемо ввести таке позначення:

$$\mathbb{P}\left\{\xi_{k+1} = j \setminus \xi_k = i\right\} = p_{ij} \tag{1.6.3}$$

Надалі, деякий час припускаємо, що E - скінченний простір аж до спеціального попередження. В такому випадку ми можемо розглянути матрицю:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.6.4}$$

P - це **матриця перехідних ймовірностей**.

1.6.2 Властивості матриці перехідних ймовірностей

1. $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : p_{ij} \in [0, 1]$;
2. $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, тобто P відноситься до класу **стохастичних матриць**;
3. $P - I$ - матриця, у якої $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} - 1 = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$; Отже, $\det(P - I) = 0$.
   А з цього випливає, що 1 - це власне число матриці P;

1.6.3 Дві основні характеристики ланцюга Маркова

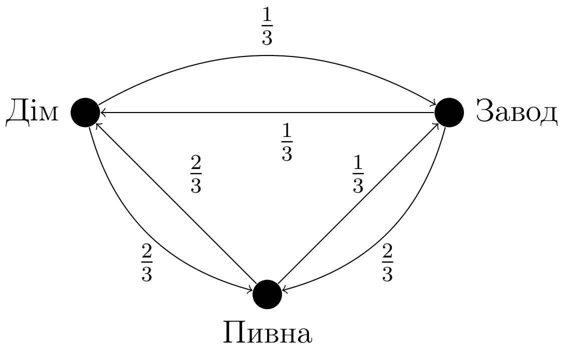
Це матриця перехідних ймовірностей P та початковий розподіл (який задається у вигляді ковектора) $\overleftarrow{p}^{(0)}$
Знайдемо ймовірність на $k+1$-шому кроці.

$$p_i^{(k+1)} = \mathbb{P}\left\{\xi_{k+1} = i\right\} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left\{\xi_k = j\right\} \mathbb{P}\left\{\xi_{k+1} = i \setminus \xi_k = j\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} p_{ji} = p_1^{(k)} p_{1i} + \ldots + p_n^{(k)} p_{ni} \tag{1.6.5}$$

Отже, тепер ми можемо стверджувати, що

$$\overleftarrow{p}^{(1)} = \overleftarrow{p}^{(0)} \cdot P \tag{1.6.6}$$
$$\overleftarrow{p}^{(2)} = \overleftarrow{p}^{(1)} \cdot P = \overleftarrow{p}^{(0)} \cdot P^2 \tag{1.6.7}$$
$$\vdots$$
$$\overleftarrow{p}^{(k+1)} = \overleftarrow{p}^{(k)} \cdot P = \overleftarrow{p}^{(0)} \cdot P^k \tag{1.6.8}$$

Приклад 1.6.1. Є дядя Гриша. У нього є три стани: дім, завод і пивна. Задаємо



матрицю переходів:
Задача. Відомо, що дядя Гриша був вдома. Ймовірність того, що після k-го кроку він буде в пивній.

$$\overleftarrow{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Шукаємо власні числа цієї матриці. Одне з цих власних чисел, це 1.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{7}{9}\lambda + \frac{2}{9}$$

Поділимо цей многочлен на $\lambda - 1$: $-\lambda^2 - \lambda - \dfrac{2}{9}$

Після розв'язку цього рівняння отримуємо три власні числа: $\lambda = \left\{1, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right\}$

Отже, після переходу отримаємо таку матрицю:

$$P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Перемножимо її k разів, щоб отримати правильну відповідь:

$$P_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k\dfrac{1}{3^k} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k\dfrac{2^k}{3^k} \end{pmatrix}$$

Спробуємо зхитрити та не знаходити власні вектори: $p_3^{(k)}$ - лінійне перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^k \frac{1}{3^k} \\ (-1)^k \frac{2^k}{3^k} \end{pmatrix}.$$

Отже, отримуємо, що:

$$p_3^{(k)} = a + (-1)^k \frac{1}{3^k} b + (-1)^k \frac{2^k}{3^k} c$$

Підставимо різні значення k, щоб створити систему:

$$p_3^{(0)} = 0 \quad (1.6.9)$$

$$p_3^{(1)} = \frac{2}{3} \quad (1.6.10)$$

$$p_3^{(2)} = \frac{2}{9} \quad (1.6.11)$$

Отже, отримали систему:

$$0 = a + b + c \quad (1.6.12)$$

$$\frac{2}{3} = a - \frac{b}{3} - \frac{2c}{3} \quad (1.6.13)$$

$$\frac{2}{9} = a + \frac{b}{9} + \frac{4}{9} c \quad (1.6.14)$$

Розв'яжемо цю систему:

$$a = \frac{2}{5} \quad (1.6.15)$$

$$b = 0 \quad (1.6.16)$$

$$c = -\frac{2}{5} \quad (1.6.17)$$

$$(1.6.18)$$

Отже, отримали відповідь:

$$p_3^{(k)} = \frac{2}{5} + (-1)^{k+1} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k}$$

19.03.2014

Чи обов'язково існує розподіл $\lim\limits_{n\to\infty} \overleftarrow{p}^{(n)}$?
Як цей розподіл пов'язаний з початковими?

Приклад 1.6.2.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{p}^{(0)} &= (1,0) \\ \overleftarrow{p}^{(2k)} &= (1,0) \\ \overleftarrow{p}^{(2k+1)} &= (0,1) \end{aligned}$$

Приклад 1.6.3.

$$\overleftarrow{p}^{(0)} = (p, q) \tag{1.6.19}$$
$$\overleftarrow{p}^{(2k)} = (p, q) \tag{1.6.20}$$
$$\overleftarrow{p}^{(2k+1)} = (p, q) \tag{1.6.21}$$

Теорема 1.6.1 (Ергодична теорема Маркова)**.** *Нехай ОЛМ і* $\exists k \in \mathbb{N} : \min\limits_{i,j=1,\ldots,n} p_{ij}^k > 0$
Тобто, існує таке k*, що за* k *кроків можна перейти звідки завгодно куди завгодно.*
Тоді

- $\exists \lim\limits_{r\to\infty} \mathbb{P}^r = \mathbb{P}^\infty = \Pi$;
- $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \ldots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_1 & \ldots & \Pi_n \end{pmatrix}$;
- $\overleftarrow{\Pi}$ *може бути знайдений, як єдиний розв'язок СЛАР*

$$\begin{cases} \overleftarrow{\Pi}\mathbb{P} = \overleftarrow{\Pi} \\ \Pi_1 + \ldots + \Pi_n = 1 \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо матрицю переходу за один крок

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.6.22}$$

$$m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)} \tag{1.6.23}$$

$$M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)} \tag{1.6.24}$$

Твердження 1.6.1.

$$m_j^{(r+1)} \geq m_j^{(r)} \tag{1.6.25}$$
$$M_j^{(r+1)} \leq M_j^{(r)} \tag{1.6.26}$$

$$m_j^{(r+1)} = \min_i p_{ij}^{(r+1)} \tag{1.6.27}$$

$$p_{ij}^{(r+1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}^{(1)} p_{\alpha j}^{(r)} \geq \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}^{(1)} \cdot m_j^{(r)} = m_j^{(r)} \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}^{(1)} = m_j^{(r)} \tag{1.6.28}$$

$$\Rightarrow m_j^{(r+1)} \geq m_j^{(r)} \tag{1.6.29}$$

Залишилося довести, що $M_j^{(r_l)} - m_j^{(r_l)} \to 0$

$$M_j^{(k+r)} = \max_i p_{ij}^{(k+r)} \tag{1.6.30}$$

$$\min_i p_{ij}^{(k)} = \varepsilon \tag{1.6.31}$$

$$p_{ij}^{(k+r)} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}^{(k)} p_{\alpha j}^{(r)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underbrace{\left(p_{i\alpha}^{(k)} - p_{j\alpha}^{(r)}\varepsilon\right)}_{\geq 0} p_{\alpha j}^{(r)} + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{j\alpha}^{(r)} \varepsilon p_{\alpha j}^{(r)} \leq \sum_{\alpha=1}^{n} \left(p_{i\alpha}^{(k)} - p_{j\alpha}^{(r)}\varepsilon\right) M_j^{(r)} + \varepsilon p_{jj}^{(2r)} =$$

$$= M_j^{(r)} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left(p_{i\alpha}^{(k)} - p_{j\alpha}^{(r)}\varepsilon\right)\right) + \varepsilon p_{jj}^{(2r)} = (1-\varepsilon) M_j^{(r)} + \varepsilon p_{jj}^{(2r)} \tag{1.6.32}$$

$$\Rightarrow M_j^{(k+r)} \geq (1-\varepsilon) M_j^{(r)} + \varepsilon p_{jj}^{(2r)} \tag{1.6.33}$$

Аналогічно можна отримувати з мінімумом:

$$\Rightarrow m_j^{(k+r)} \leq (1-\varepsilon) m_j^{(r)} + \varepsilon p_{jj}^{(2r)} \tag{1.6.34}$$

Остаточно ми отримуємо:

$$M_j^{(k+r)} - m_j^{(k+r)} \leq (1-\varepsilon)\left(M_j^{(r)} - m_j^{(r)}\right) \tag{1.6.35}$$

$$r = 0: \quad M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leq (1-\varepsilon)\left(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}\right) \tag{1.6.36}$$

$$M_j^{(2k)} - m_j^{(2k)} \leq (1-\varepsilon)^2\left(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}\right) \tag{1.6.37}$$

$$\vdots$$

$$M_j^{(l\cdot k)} - m_j^{(l\cdot k)} \leq (1-\varepsilon)^l\left(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}\right) \tag{1.6.38}$$

$$\tag{1.6.39}$$

Отже, отримали:

$$l \to \infty M_j^{(lk)} - m_j^{(lk)} \to 0 \tag{1.6.40}$$

Отже, за підпослідовністю у нас є збіжність. А після цього і для всієї послідовності.
Як знайти $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$?

$$\Pi = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}^r \tag{1.6.41}$$

$\mathbb{P}^r$ - матриця переходу за r кроків. Сума в кожному рядку дорівнює одиниці.
Тоді і для матриці Π сума в рядку дорівнює одинці.

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i = 1 \tag{1.6.42}$$

$$\mathbb{P}^n\mathbb{P} = \mathbb{P}^{n+1} \tag{1.6.43}$$

$$n \to \infty : \qquad \Pi\mathbb{P} = \Pi \tag{1.6.44}$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_1 & \dots & \Pi_n \end{pmatrix} \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_1 & \dots & \Pi_n \end{pmatrix} \tag{1.6.45}$$

$$\overleftarrow{\Pi}\mathbb{P} = \overleftarrow{\Pi} \tag{1.6.46}$$

Отже, Π можна знайти, як розв'язок системи

$$\begin{cases} \overleftarrow{\Pi}\mathbb{P} = \overleftarrow{\Pi} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Pi_i = 1 \end{cases} \tag{1.6.47}$$

Залишилося довести, що ця система має лише єдиний розв'язок.
Якщо $\overleftarrow{p}^{(0)}$, то який буде $\overleftarrow{p}^{(\infty)}$

$$\overleftarrow{p}^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \overleftarrow{p}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \overleftarrow{p}^{(0)} \cdot \mathbb{P}^n = \overleftarrow{p}^{(0)} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \overleftarrow{p}^{(0)}\Pi =$$
$$= \left(p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)}\right) \cdot \begin{pmatrix} \Pi_1 & \dots & \Pi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi_1 & \dots & \Pi_n \end{pmatrix} = (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \tag{1.6.48}$$

Отже, для кожного розподілу граничним розподілом є Π.
Нехай, окрім розв'язку $\overleftarrow{\Pi}$ є ще розв'язок $\vec{\nu}$

$$\vec{\nu}\mathbb{P}^\infty = \vec{\nu}\Pi = \overleftarrow{\Pi} \tag{1.6.49}$$

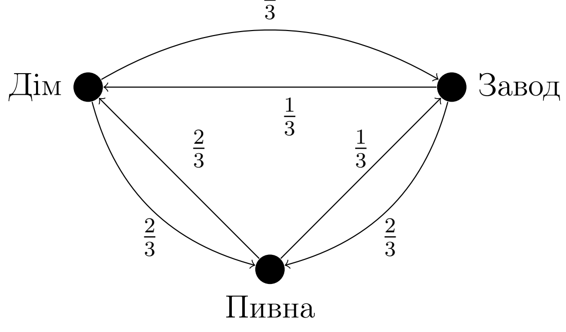
$$\vec{\nu}\mathbb{P}^\infty = \lim_{n\to\infty} \vec{\nu}\mathbb{P}^n = \vec{\nu} \tag{1.6.50}$$

$\square$

Приклад 1.6.4. Згадаємо дядю Гришу. Його матриця переходів:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6.51}$$

Хочемо знайти розподіл на нескінченності. Перевіримо спочатку умови за гра-



фом:

При $k = 2$ умови виконані. Отже, можемо записати систему:

$$\begin{cases} \overleftarrow{\Pi}\mathbb{P} = \overleftarrow{\Pi} \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} \tag{1.6.52}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\Pi_2 + \frac{2}{3}\Pi_3 = \Pi_1 \\ \frac{1}{3}\Pi_1 + \frac{1}{3}\Pi_3 = \Pi_2 \\ \frac{2}{3}\Pi_1 + \frac{2}{3}\Pi_2 = \Pi_3 \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} \tag{1.6.53}$$

Отримали розв'язок:

$$\overleftarrow{\Pi} = \left(\frac{7}{20}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right) \tag{1.6.54}$$

1.6.4 Частота потрапляння в деякий стан

$$\nu_k^{(r)} = \frac{\mathbb{I}_{\xi_1 = k} + \ldots + \mathbb{I}_{\xi_r = k}}{r} \tag{1.6.55}$$

Теорема 1.6.2 (Закон великих чисел для ОЛМ)**.** *Якщо виконується умова ергодичності, тобто* $\min\limits_{i,j} p_{ij}^{(k)} > 0, \exists k \in \mathbb{N}$
То $\exists \mathbb{P} \lim\limits_{r\to\infty} \nu_k^{(r)} = \Pi_k$

Доведення. Ідея доведення: будемо доводити збіжність в середньому квадратичному. За критерієм, потрібно перевірити, що:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{I}_{\xi_1 = k} + \ldots + \mathbb{I}_{\xi_r = k}}{r}\right] \to \Pi_k \tag{1.6.56}$$

$$\mathbb{D}\left[\frac{\mathbb{I}_{\xi_1 = k} + \ldots + \mathbb{I}_{\xi_r = k}}{r}\right] \to 0 \tag{1.6.57}$$

Розберемося спочатку з першим фактом:

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{I}_{\xi_1 = k} + \ldots + \mathbb{I}_{\xi_r = k}}{r}\right] \to \Pi_k = \frac{1}{r}\left(\mathbb{P}\left\{\xi_1 = k\right\} + \ldots + \mathbb{P}\left\{\xi_r = k\right\}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(p_k^{(1)} + \ldots + p_k^{(r)}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} \Pi_k \tag{1.6.58}$$

□ 02.04.2014

Теорема 1.6.3. $\forall e \in E : e$ *- або рекурентний, або транзієнтний.*

Розділ 2

Випадкові процеси

2.1 Основні поняття

09.04.2014

Випадковий процес $(X(t), t \in T)$ - це сукупність випадкових величин $X(t)$, індексованих параметром $t \in T$, які задані на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
Розглянемо деякі випадки:

- $T = 1$ - випадкова величина;
- $T = 1, 2, \dots, n$ - випадковий вектор;
- $T = \mathbb{N}$ - випадкова послідовність. Також, цей випадок допускає будь-яку злічену множину;
- $T = [a, b], (a, b), \dots$ - тобто, деякий інтервал. І це буде називатися просто випадковий процес.
- $T = \mathbb{R}^d$ - випадкове поле.

Фактично, параметр t можна ототожнювати з часом.
Отже, випадковий процес X - це функція від двох змінних $X(t, \omega)$. Тоді, з цієї точки зору, можна сказати, що $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$. Оскільки нам необхідна випадковість, то необхідно вимагати, щоб:

$$\forall t \in T : X(t, \cdot) - \text{вимірна, відсно } \mathcal{F} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{2.1.1}$$

$X(t, \cdot)$ - випадкове значення нашого процесу X в момент t.
$X(\cdot, \omega)$ - **траєкторія** або **реалізація** випадкового процесу X.

Приклад 2.1.1. В нас є параметрична множина $T = (0, 90)$.
В момент τ на пару приходить Павло. $\tau \sim U(0, 90)$.
Тепер введемо деякий випадковий процес: $X(t)$ - кількість Павлів на парі у момент t.

$$X(t) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ 1, t \geq \tau \end{cases}$$

2.1.1 Основна характеристика випадкового процесу

Основна характеристика випадкового процесу це **система скінченновимірних розподілів**.

- Одновимірні функції розподілу:

$$F_X(t,x) = \mathbb{P}\{X(t) < x\} \tag{2.1.2}$$

  Одновимірний розподіл:

$$P_t(B) = \mathbb{P}\{X(t) \in B\}; B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^1\right) \tag{2.1.3}$$

- Двовимірні функції розподілу:

$$F_X(t_1,t_2,x_1,x_2) = \mathbb{P}\{X(t_1) < x_1 \cap X(t_2) < x_2\} \tag{2.1.4}$$

  Двовимірний розподіл:

$$P_{t_1,t_2}(B) = \mathbb{P}\{(X(t_1),X(t_2)\} \in B; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \tag{2.1.5}$$

  І так далі можна ввести n-вимірні функції розподілу і n-вимірний розподіл.

Система випадкових розподілів

Потрібно задати усю систему - $\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in T$.

Приклад 2.1.2.

$$X(t) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ 1, t \geq \tau \end{cases}$$

t - фіксуємо.

$X(t)$	0	1
$\mathbb{P}$	$1 - \frac{t}{90}$	$\frac{t}{90}$

Двовимірний розподіл: фіксуємо $t_1, t_2 (t1 \leq t_2)$.

$X(t_2) \setminus X(t_1)$	0	1
0	$1 - \frac{t}{90}$	0
1	$\frac{t_2 - t_1}{90}$	$\frac{t_1}{90}$

$X(t_1) = X(t_2) = 0$

2.1.2 Властивості скінченновимірного розподілу

Розглянемо $P_{t_1,\dots,t_n}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.1.1 (Теорема Колмагорова)**.** *Нехай задана система скінченновимірних розподілів:* $P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n), \forall n \in \mathbb{N}$*:*
яка задовольняє попереднім умовам Тоді, на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *існує випадковий процес* $X(t,\omega)$*, який має саме цю систему скінчених розподілів.*

2.2 $\mathbb{L}_2$-процеси

X - це $\mathbb{L}_2$**-процес**, якщо:

$$\forall t : \mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty \vee \mathbb{E}\left[|X(t)|^2\right] < \infty \tag{2.2.1}$$

Тоді можемо ввести **математичне сподівання**:

$$m(t) = \mathbb{E}\left[X(t)\right], t \in T \tag{2.2.2}$$

Це може бути будь-яка функція, без будь-яких обмежень.
Кореляційна функція:

$$C_x(s,t) = \mathbb{E}\left[(X(s) - m(s))\,\overline{(X(t) - m(t))}\right] = \mathbb{E}\left[X(s)\overline{X(t)}\right] - (\mathbb{E}\left[X(s)\right])\,\overline{(\mathbb{E}\left[X(t)\right])} \tag{2.2.3}$$

Чому вона існує:

$$\left|\mathbb{E}\left[(X(s) - m(s))\,\overline{(X(t) - m(t))}\right]\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[|X(s) - m(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[|X(t) - m(t)|\right]^2} < \infty \tag{2.2.4}$$

2.2.1 Властивості кореляційної функції

Теорема 2.2.1 (Ермітовість)**.** $C_x(s,t) = \overline{C_x(t,s)}$

Доведення. Позначимо: $X_0(t) = X(t) - m(t)$

$$C_x(t,s) = \mathbb{E}\left[X_0(t)\overline{X_0(s)}\right] = \overline{\mathbb{E}\left[X_0(s)\overline{X_0(t)}\right]} = \overline{C_x(s,t)}$$

□

Теорема 2.2.2. *Розглянемо* $\vec{X} = \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix}$

$C_{\vec{X}} = ||C_x(t_i,t_j)||_{i,j=1,\dots,n}$
Оскільки це дуже схоже на кореляційну матрицю, вона отримує деяку її властивість: $\forall t_1, \dots, t_n : ||C_x(t_i,t_j)||_{i,j=1,\dots,n}$ *- невід'ємно визначена.*

А це означає, що така квадратична форма:

$$\left(||C_x(t_i,t_j)||_{i,j=1,\ldots,n}\,\vec{b},\vec{b}\right) \geq 0, \forall \vec{b} \in \mathbb{C}^n \tag{2.2.5}$$

Або, якщо переписати у вигляді суми:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_x\left(t_i,t_j\right) b_i \overline{b_j} \geq 0, \forall b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{C} \tag{2.2.6}$$

Отже, кореляційна функція завжди ермітово симетрична і задовольняє властивість (2.2.6). Функції, що задовольняють умові (2.2.6), то вони називаються **невід'ємно визначеними**.

Теорема 2.2.3. *Якщо функція є ермітово симетричною та невідємно визначеною, то вона є кореляційною функцією.*

Доведення. Фіксуємо $n \geq 1$.
Фіксуємо $t_1,\ldots,t_n \in T$.
Тоді матриця $= ||C_x(t_i,t_j)||_{i,j=1,\ldots,n}$ - є невід'ємно визначеною та ермітовою.
Тоді, $P_{t_1,\ldots,t_n}(B)$ = розподіл Гаусовського вектора з кореляційною матрицею $||C_x(t_i,t_j)||_{i,j=1,\ldots,n}$
Тоді, за теоремою Колмагорова, можна побудувати процес. □

Приклад 2.2.1. $T = [0,+\infty]$
$C(s,t) = \min\{s,t\}$

- $\min s,t = \min\{t,s\}$ - симетричність;
- $||\min\{s,t\}||_{i,j=1,\ldots,n}$ - невід'ємна визначна (раніше було).

Приклад 2.2.2.

$$X(t) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ 1, t > \tau \end{cases} \tag{2.2.7}$$

$$m(t) = \mathbb{E}\left[\xi\right] X(t) = 0\mathbb{P}\left\{X(t)=0\right\} + 1\cdot\mathbb{P}\left\{x(t)=1\right\} = \frac{t}{90} \tag{2.2.8}$$

Тепер шукаємо кореляційну функцію:

$$C(s,t) = \mathbb{E}\left[X(t)\cdot X(s)\right] - \mathbb{E}\left[X(t)\right]\mathbb{E}\left[X(s)\right] = \frac{\min\{s,t\}}{90} - \frac{st}{8100} \tag{2.2.9}$$

2.3 Гаусовський процес

16.04.2014

Процес $X(t)$ називається **гаусовським**, якщо:

$$\forall n \in \mathbb{N}; t_1,\ldots,t_n \in T : \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} - \text{гаусовский} \tag{2.3.1}$$

2.3.1 Критерій гаусовості випадкового вектора

Теорема 2.3.1. *Вектор* $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ *є гаусовсъким тоді і тільки тоді, коли кожна лінійна комбінація вигляду* $c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$ *є гаусовою величиною.*

Доведення. $\Rightarrow$
Якщо вектор дійсно гаусовський, то $c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$ - це лінійне перетворення, а отже, гаусовське.
$\Leftarrow$
Нехай $\forall \{c_1, \ldots, c_n\} : c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$ - є гаусівською.

$$\mathbb{E}\left[c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n\right] = c_1a_1 + \ldots + c_na_n = (\vec{c}, \vec{a}) \tag{2.3.2}$$

B - кореляційна матриця $\vec{\xi}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left[c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n\right] = \mathbb{D}\left[(\vec{c}, \vec{a})\right] = \text{кор. матриця вектора } (\vec{c}, \vec{a}) = \\ = \overleftarrow{c}\, B_{\vec{\xi}}\vec{c} = (B_{\vec{\xi}}\vec{c}, \vec{c})\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Запишемо тепер характеристичну функцію нашої комбінації.
Згадаємо формулу:

$$\gamma \sim \aleph a.\sigma^2 : \chi_\gamma(t) = e^{-iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \tag{2.3.4}$$

А тепер запишемо формулу у нашому випадку:

$$\chi_{c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n}(t) = e^{i(\vec{c}, \vec{a})t - \frac{\left(B_{\vec{\xi}}\vec{c}, \vec{c}\right)^2 t^2}{2}} \tag{2.3.5}$$

$$\chi_{c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n}(1) = e^{i(\vec{c}, \vec{a}) - \frac{\left(B_{\vec{\xi}}\vec{c}, \vec{c}\right)^2}{2}} \tag{2.3.6}$$

З іншого боку:

$$\chi_{c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n}(1) = \mathbb{E}\left[e^{1 \cdot i \cdot (c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\left(\vec{c}, \vec{\xi}\right)}\right] = \chi_{\vec{\xi}}(\vec{c}) \tag{2.3.7}$$

Отже, $\vec{\xi}$ - гаусовський вектор. □

Наслідок 2.3.1. *Процес* $(X(t), t \in T)$ *є гаусовсъким тоді і тільки тоді, коли:*

$$\forall n \in \mathbb{N} :, t_1, \ldots, t_n \in T, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} c_i X(t_i) - \textit{гаусовський} \tag{2.3.8}$$

Гаусовський процес повністю визначається за $m(t)$ та $C_x(s, t)$.

2.4 Вінеровський процес (Броунівський рух)

S_n - положення частки у рідині у момент дискретного часу n.
$\{\xi_i, i \geq 1\}$ - незалежні та мають такий розподіл:

ξ	-1	1
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Процес $(S_n, n \geq 0)$

$$m(n) = \mathbb{E}\left[S_n\right] = \mathbb{E}\left[\xi_1 + \ldots + \xi_n\right] = 0 \tag{2.4.1}$$

$$\begin{aligned} C_s(n_1, n_2) = |n_1 \leq n_2| = \mathbb{E}\left[\left(S_{n_1} - m(n_1)\right)\left(S_{n_2} - m(n_2)\right)\right] = \\ = \mathbb{E}\left[S_{n_1} \cdot S_{n_2}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{n_1}\right)\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{n_2}\right)\right] = \\ = \mathbb{E}\left[x_1 + \ldots + \xi_{n-1}\right]^2 + \mathbb{E}\left[\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{n_1}\right)\left(\xi_{n_1+1} + \ldots + \xi_{n_2}\right)\right] = \\ = \mathbb{D}\left[\xi_1 + \ldots + \xi_{n_1}\right] = n_1 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

В загальному випадку:

$$C_s(n_1, n_2) = \min\left\{n_1, n_2\right\} \tag{2.4.3}$$

Новий процес $X(t) = \frac{1}{c} S\left(tc^2\right)$

$$\mathbb{E}\left[X(t)\right] = \frac{1}{c}\mathbb{E}\left[S\left(tc^2\right)\right] = 0 \tag{2.4.4}$$

$$C_x(s,t) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{c}S\left(sc^2\right)\frac{1}{c}S\left(tc^2\right)\right] = \frac{1}{c^2}\mathbb{E}\left[S\left(sc^2\right)S\left(tc^2\right)\right] = \frac{1}{c^2}\min\left\{sc^2, tc^2\right\} = \min\left\{s,t\right\} \tag{2.4.5}$$

При одночасному масштабуванні часу в c^2 разів в простору в c разів, в нового процесу $X(t)$ зберігаються такі самі математичні сподівання і кореляційна функція як і у не масштабованого процесу.
Спрямуємо c до нескінченності:

$$X(t) =? - \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{c} S\left(c^2 t\right) \tag{2.4.6}$$

Вінерівським процесом або **броунівським рухом** називають процес $(W(t), t > 0)$, який задовольняє три властивості:

1. $W(t)$ - гаусовський процес;
2. $\mathbb{E}\left[W(t)\right] = 0$;
3. $C_W(s,t) = \mathbb{E}\left[W(s), W(t)\right] = \min\left\{s, t\right\}$;

2.4.1 Властивості Вінерівського процесу

1. Вінерівський процес існує.
   $\min\{s,t\}$ - невід'ємно визначений та симетричний.
   Отже, можна побудувати в $\mathbb{R}^n$ відповідний розподіл з математичним сподіванням $\vec{0}$ та з матрицею $||\min t_1, t_2||$. Отже, за теоремою Колмагорова можна побудувати такий випадковий процес.

2. $w(0) = 0$ майже напевно. Тобто $\mathbb{P}\{w(0) = 0\} = 1$

   Доведення. $\mathbb{E}[w(0)]\, 0$
   $\mathbb{E}[w^2(0)] = \mathbb{E}[w(0)w(0)] = \min 0, 0 = 0$
   $\Rightarrow \mathbb{P}\{w(0) = 0\} = 1$ □

3. Глянемо на $W(t)$ через лупу.

$$\tilde{w}(t) = \frac{1}{c} w(c^2 t) \tag{2.4.7}$$

   Стверджується, що це також вінерівський процес.

   (a) $\mathbb{E}[\tilde{w}(t)] = \frac{1}{c}\mathbb{E}[w(c^2 t)] = 0$

   (b) $C_{\tilde{w}}(t) = \mathbb{E}[\tilde{w}(s), \tilde{w}(t)] = \frac{1}{c^2}\min\{sc^2, tc^2\} = \min\{s,t\}$

   (c) Чому цей процес знову гаусовський?

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{w}(t_n) \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} w(t_1 c^2) \\ \vdots \\ w(t_n c^2) \end{pmatrix} - \text{гаусовський} \tag{2.4.8}$$

4. $w(t+h) - w(t) \sim \aleph(0, h)$

   Доведення. Те, що ця величина гаусівськая очевидно, оскільки вона є різницею двох величин, які утворюють гаусовський вектор.

$$\mathbb{E}[w(t+h) - w(t)] = 0 \tag{2.4.9}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}[w(t+h) - w(t)] = \\ &\quad = \mathbb{E}\left[(w(t+h) - w(t))^2\right] = \mathbb{E}\left[w^2(t+h)\right] + \mathbb{E}\left[w^2(t)\right] - \\ &\quad - 2\mathbb{E}[w(t+h)w(t)] = h \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

□

5. Вінерівський процес має незалежні прирости.
   $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t_n$
   Тоді $w(t_1) - w(s_1), \ldots, w(t_n) - w(s_n)$ є незалежними величинами у сукупності

   Доведення. $s_i \leq t_i \leq s_j \leq t_j$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(w(t_i) - w(s_i)\right)\left(w(t_j) - w(s_j)\right)\right] = \\ &\quad = \mathbb{E}\left[w(t_i)w(t_j)\right] - \mathbb{E}\left[w(t_i)w(s_j)\right] - \mathbb{E}\left[w(s_i)w(t_j)\right] + \mathbb{E}\left[w(s_i)w(s_j)\right] = \\ &\quad\quad = t_i - t_i - s_i + s_i = 0 \quad (2.4.11)\end{aligned}$$

   Отже, вони некорельовані. А в силу гаусовості вектора $\begin{pmatrix} w(t_1) - w(s_1) \\ \vdots \\ w(t_n) - w(s_n) \end{pmatrix}$, вони тоді й незалежні. □

2.5 Просунуті задачі вінерівського процесу

30.04.2014

2.5.1 Траєкторії вінерівського процесу

Вінерівський процес має неперервні траєкторії майже напевно

Тобто, стверджується, що:

$$\mathbb{P}\left\{w(t) \in C\left[0; +\infty\right)\right\} = 1 \quad (2.5.1)$$

Маючи систему скінченно вимірних розподілів, неможливо визначити, чи будуть траєкторії майже напевно неперервними.

Приклад 2.5.1. Розглядаємо два процеси: $X(t), Y(t), t \in [0,1]$
$X(t) \equiv 0$ - неперервна траєкторія.
$Y(t) = \begin{cases} 0, t \neq \tau \\ 1, t = \tau \end{cases}, \tau \sim U\left([0,1]\right)$
Ці розподіли випадково рівні.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left\{Y(t_1) = 0, \ldots, Y(t_n) = 0\right\} = \\ &\quad = \mathbb{P}\left\{\tau \in (t_1, \ldots, t_n)\right\} = 0 = \\ &\quad = \mathbb{P}\left\{X(t_1) = 0, \ldots, X(t_n) = 0\right\}, \forall n, \{t_1, \ldots, t_n\} \in [0,1]\end{aligned}$$

Після довгих та впевнених доведення невідомо кому невідомо кого, отримали таке формулювання:

Теорема 2.5.1. *Існує версія вінерівського процесу з неперервними траєкторіями.*

Розглянемо деякий допоміжний факт:

Теорема 2.5.2 (Колмогорова про неперервність траєкторії)**.** *$X(t)$ - випадковий процес. Просто випадковий процес.*
І виконується така умова:

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \mathbb{E}\left[|x(t) - x(s)|^{\alpha}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\beta}, \forall s, t \in T, C = C(\alpha, \beta)$$

Тоді існує версія процесу $X(t)$ з майже напевно неперервними траєкторіями.

Доведення. Доведення не буде, бо воно дуже складне. □

Доведення основної теореми. Перевіримо умову, яка необхідна для виконання $\alpha = 2$

$$\mathbb{E}\left[(w(t) - w(s))^2\right] = \mathbb{E}\left[\aleph^2\,(0, t-s)\right] = |t-s|^1 ?1 \neq 1 + \beta, \beta > 0 \tag{2.5.2}$$

Не пішло. Візьмемо $\alpha = 4$:

$$\mathbb{E}\left[(w(t) - w(s))^4\right] = \mathbb{E}\left[\aleph^4\,(0, t-s)\right] = |t-s|^2 \mathbb{E}\left[\aleph^4\,(0,1)\right] = 3|t-s|^2 \tag{2.5.3}$$

Отже, умова теореми Колмогорова виконалася з $\alpha = 4, \beta = 1$. □

Варіація та довжина вінерівського процесу

$$\mathrm{Var}_{x\in[a,b]}\, f(x) = \sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \tag{2.5.4}$$

Приклад 2.5.2. $\mathrm{Var}_{x\in[a,b]} \sin x = 1 + 2 + 1 = 4$

Теорема 2.5.3.

$$\mathbb{P}\left\{\mathrm{Var}_{x\in[a,b]}\, w(t) = \infty\right\} = 1 \tag{2.5.5}$$

Квадратична варіація:

$$\mathrm{Var}^2_{x\in[a,b]}\, f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\Delta, \max|x_k - x_{k-1}|\leq\delta} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^2 \tag{2.5.6}$$

Теорема 2.5.4. *Якщо функція $f(x)$ має $\mathrm{Var}_{x\in[a,b]} < \infty, f \in C\,([a,b])$, то $\mathrm{Var}^2_{x\in[a,b]}\, f(x) = 0$*

Доведення. Функція $f(x)$ рівномірно неперервна. Отже

$$\forall \varepsilon, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{2.5.7}$$

Зафіксуємо ε і беремо такі розбиття, що $\max|x_k - x_{k-1}| < \delta$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^2 \quad\leq\quad \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \quad\leq\quad \varepsilon\, \mathrm{Var}_{x\in[a,b]}\, f(x) \tag{2.5.8}$$

Отже, отримали:

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^2 \leq \varepsilon\, \mathrm{Var}_{x\in[a,b]}\, f(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \tag{2.5.9}$$

□

Але для вінерівського процесу $\operatorname{Var}^2 w(t) \neq 0$.

Теорема 2.5.5 (Теорема Леві про квадратичну варіацію вінерівського процесу)**.** *Якщо в нас є послідовність розбиттів відрізку* $[a, b]$ *такий, що* $\max\limits_{k=0,\dots,n} |x_k - x_{k-1}| \to 0$*, то*

$$\mathbb{L}_2 - \sum_{k=1}^{n} \left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2 \to b - a \tag{2.5.10}$$

Доведення. Перевіримо умову критерію $\mathbb{L}_2$ збіжності до константи

$$\mathbb{E}\left[\xi_a\right] \to \text{const} \tag{2.5.11}$$

$$\mathbb{D}\left[\xi_a\right] \to 0 \tag{2.5.12}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a \tag{2.5.13}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\left[\left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2\right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^4\right] - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2\right]^2 = \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k-1}^2\right) = 2\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 \to 0\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

Отже, з цим умов випливає, що:

$$\mathbb{L}_2 - \sum_{k=1}^{n} \left(w(x_k) - w(x_{k-1})\right)^2 \to b - a \tag{2.5.15}$$

□

Отже, ми довели такий факт: $\mathbb{P}\left\{\operatorname{Var}^2_{[a,b]} w = 0\right\} = 0$
Отже, з урахуванням попередньої теореми

$$\mathbb{P}\left\{\operatorname{Var}_{[a,b]} w < \infty\right\} = 0 \tag{2.5.16}$$

або

$$\mathbb{P}\left\{\operatorname{Var}_{[a,b]} w = \infty\right\} = 1 \tag{2.5.17}$$

Висновок: Інтеграли вигляду $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,w(t)$ не можна визначити потраєкторно і потрібний більш складний підхід.

Ліричний відступ

Якщо $|f'| \leq C$, то

$$\mathrm{Var} \leq C \sup \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = C\,(b-a) \leq \infty \tag{2.5.18}$$

Отже, $\mathbb{P}\left\{w \notin C^1\left([a,b]\right)\right\} = 1$

Теорема 2.5.6. *Для будь-якої точки* $\forall t \geq 0$*.*

$$\mathbb{P}\left\{\exists w'(t)\right\} = 0 \tag{2.5.19}$$

Доведення. Якщо б існувала похідна

$$w'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \tag{2.5.20}$$

$$\mathbb{D}\left[\frac{w(t+h) - w(t)}{h}\right] = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h} \tag{2.5.21}$$

$$\frac{w(t+h) - w(t)}{h} \sim \aleph\left(0, \frac{1}{h}\right) \tag{2.5.22}$$

$$\chi_{\frac{w(t+h)-w(t)}{h}}(x) = e^{-\frac{x^2}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \tag{2.5.23}$$

Але 0 не характеристична функція, оскільки $\chi(0) = 1$ $\square$

Теорема 2.5.7.

$$\mathbb{P}\left\{\forall t \geq 0 : \nexists w'(t)\right\} = 1 \tag{2.5.24}$$

2.6 Пуасонівський потік та процес

$\boxed{14.05.2014}$

2.6.1 Потік Пуассона

$$N(s,t) = \#\left\{i : t_i^* \in [s,t]\right\} \tag{2.6.1}$$

1. Стаціонарність:

$$\forall s,t,h \geq 0 : N(s,t) = N(s+h, t+h) \tag{2.6.2}$$

2. Відсутність післядії:

$$s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t_n : N(s_1,t_1), \ldots, N(s_n,t_n) - \text{Незалежні в сукупності} \tag{2.6.3}$$

3. Ординарність:

$$\mathbb{P}\left\{N(o,h) \geq 2\right\} = o(h), h \to 0 \tag{2.6.4}$$

Якщо виконані ці три умови, то цей потік називається **потік Пуассона**

Теорема 2.6.1. $\forall s < t, N(s,t) \sim Pois(\lambda \cdot (t-s)), \lambda > 0$
λ - деякий параметр, інтенсивність потоку

Теорема 2.6.2. $\exists \lambda > 0 : \mathbb{P}\left\{N(0,h) = 1\right\} = \lambda \cdot h + o(h), h \to 0$

Доведення.

$$\mathbb{P}\left\{N(0,h) = 0\right\} = P_0(h) \tag{2.6.5}$$

$$\begin{aligned}
&P_0(1) = \Theta = \mathbb{P}\left\{N(0,1) = 0\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=1}^{n} N\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = 0\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{N\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = 0\right\} = \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{N\left(o, \frac{1}{n}\right) = 0\right\} = P_0^n\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \prod_{t=1}^{k} P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \Theta^{k/n} \tag{2.6.7}$$

Нехай тепер є t - довільне дійсне додатне.

$$r_1^- \leq \ldots \leq t \leq \ldots \leq r_1^+ \tag{2.6.8}$$

Отримали дві послідовності: $\left\{r_n^-, n \in \mathbb{N}\right\}, \left\{r_n^+, m \in \mathbb{N}\right\}, r_i^-, r_i^+ \in \mathbb{Q}$
$P_0(t)$ - ймовірність того, що не відбудеться жодної події на проміжку від нуля до t.

$$P_0(r_n^-) \geq P_0(t) \geq P_0(r_n^+) \tag{2.6.9}$$

За правилом трьох міліціонерів отримуємо, що

$$\lim_{n \to \infty} P_o(t) = \Theta^t \tag{2.6.10}$$

Звідси очевидним образом можна отримати, що:

$$P_o(t) = \Theta^t \tag{2.6.11}$$

$0 < \Theta < 1 : \Theta = e^{-\lambda}$
Отримали тоді таку формулу:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.6.12}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&P_1(h) = \\
&= \mathbb{P}\left\{N(0,h) = 1\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{N(0,h) = 0\right\} - \mathbb{P}\left\{N(0,h) \geq 2\right\} = 1 - e^{-\lambda h} - o(h) = \\
&= \left|\frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1\right| = \lambda \cdot h + o(h) - o(h)
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

□

Доведення попередньої теореми.

$$P_k(t) = \mathbb{P}\left\{N(0,h) = k\right\}, k \geq 0 \tag{2.6.14}$$

$$\begin{gathered}P_{k+1}(t+h) = \\ = \mathbb{P}\left\{N(0,t+h) = k+1\right\} = \sum_{l=0}^{k+1} \mathbb{P}\left\{N(0,t) = l\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{N(t,t+h) = k+1-l\right\} = \\ = P_{k+1}(t) \cdot P_0(h) + P_k(t) P_1(h) + o(h) = P_{k+1}(t) \cdot (1 - \lambda h + o(h)) + P_k(t)\left(\lambda h + o(h)\right) + o(h) = \\ = -\lambda h P_{k+1}(t) + \lambda h P_k(t) + o(h)\end{gathered} \tag{2.6.15}$$

Отже, отримали:

$$\frac{P_{k+1}(t+h) - P_{k+1}(t)}{h} = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t) + o(1) \tag{2.6.16}$$

$$h \to 0 : P'_{k+1} = -\lambda P_{k+1} + \lambda P_k \tag{2.6.17}$$

Складемо систему рівнянь:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.6.18}$$

$$P'_{k+1} = -\lambda P_{k+1} + \lambda P_k \tag{2.6.19}$$

$$P_0(k) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases} \tag{2.6.20}$$

Зробимо заміну функції: $Q_k(t) = e^{\lambda t} P_k(t)$
А зворотною буде заміна: $P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t)$

$$P'_{k+1}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + e^{-\lambda t} Q'_{k+1}(t) \tag{2.6.21}$$

А тепер підставимо це добро:

$$-\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1} + e^{-\lambda t} Q'_{k+1} = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1} + \lambda e^{-\lambda t} Q_k \tag{2.6.22}$$

Залишилося після скорочення таке:

$$Q'_{k+1}(t) = \lambda Q_k(t) \tag{2.6.23}$$

З такими початковими умовами:

$$Q_0(t) = 1 \tag{2.6.24}$$

$$Q_k(0) = \begin{cases} 0, k \neq 0 \\ 1, k = 0 \end{cases} \tag{2.6.25}$$

Починаємо розв'язувати знизу:

$$Q_0(t) = 1 \tag{2.6.26}$$

$$\Rightarrow Q'_1(t) = \lambda \Rightarrow Q_1(t) = \lambda t \tag{2.6.27}$$

$$\vdots$$

$$Q_k(t) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} \tag{2.6.28}$$

Тоді

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^k t^k}{k!} \tag{2.6.29}$$

Тоді можна легко отримати:

$$\mathbb{P}\left\{N(s,t) = k\right\} = e^{-\lambda(t-s)}\frac{\lambda^k\left(t-s\right)^k}{k!} \tag{2.6.30}$$

□

2.6.2 Пуассонівський процес

Процес Пуассона визначаємо за такою формулою:

$$N(t) = N\left([0,t]\right) \tag{2.6.31}$$

Потік Пуассона має мати такі властивості:

- $\mathbb{P}\left\{N(0) = 0\right\} = 1$
- $N(t) - N(s) \sim Pois\left(\lambda\left(t-s\right)\right)$
- прирости $N(t_1) - N(s_1), \ldots, N(t_n) - N(s_n)$ - незалежні в сукупності, якщо $s_1 \leq t_1 \ldots \leq s_n \leq t_n$
- $N(t)$ - неперервний з правої сторони та має границі з лівої сторони.

Математичне сподівання

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \mathbb{E}\left[N(t) - N(0)\right] = \mathbb{E}\left[Pois(\lambda t)\right] = \lambda t \tag{2.6.32}$$

Кореляційна функція

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(N(s) - \lambda s\right)\left(N(t) - \lambda t\right)\right] = \\
&\quad = |s \leq t| = \mathbb{E}\left[\left(N(s) - \lambda s\right)\left(N(s) - \lambda s + N(t) - N(s) - \lambda\left(t-s\right)\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\left(N(s) - \lambda s\right)\left(N(s) - \lambda s\right)\right] + \mathbb{E}\left[\left(N(s) - \lambda s\right)\left(N(t) - N(s) - \lambda\left(t-s\right)\right)\right] = \\
&\qquad = \mathbb{D}\left[Pois(\lambda s)\right] + 0 = \lambda s = \lambda \min\left\{s,t\right\}
\end{aligned} \tag{2.6.33}$$

2.6.3 Час між подіями

21.05.2014

Введемо нові величини, які будуть позначати час подій $\left\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ - *inter-arrival times*.

Теорема 2.6.3. $\left\{\tau_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ - *незалежні та розподілені за* $Exp(\lambda)$.

Доведення. Доведемо лише частину з цієї великої теореми. □

Теорема 2.6.4 (Еквівалентне формулювання)**.** *Нехай* $\{\tau_i, i \in \mathbb{N}\}$ *- послідовність незалежних експоненціально* $(Exp\,(\lambda))$ *розподілених випадкових величин. За ними побудуємо процес стрибків у заданий час.*
Тоді такий процес буде Пуассонівським.

Доведення. Назвемо побудований процес $N(t)$. Тоді

$$N(t) = \max\left\{n \geq 0 : T_n \leq t\right\}, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} t_i, T_0 = 0 \tag{2.6.34}$$

Подивимося, які властивості явно виконуються:

1. $N(0) = 0$

2. Неперервність справа і має стрибки зліва.

Головне довести інші властивості.
Розглянемо $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq s_k \leq t_k$ і прирости: $N(t_1) - N(s_1), \ldots, N(t_k) = N(s_k)$. Необхідно довести їх незалежність та правильний розподіл. Отже, потрібно довести, що:

$$\mathbb{P}\left\{\begin{pmatrix} N(t_1) - N(s_1) \\ \vdots \\ N(t_k) = N(s_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_k \end{pmatrix}\right\} = \frac{e^{-\lambda(t_1 - s_1)}\left(\lambda\left(t_1 - s_1\right)\right)^{\Delta_1}}{\Delta_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t_k - s_k)}\left(\lambda\left(t_k - s_k\right)\right)^{\Delta_k}}{\Delta_k!} \tag{2.6.35}$$

Ми хочемо це довести, але не будемо. А доведемо для $k = 1$, а ще для простоти покладемо $s_1 = 0$.
Отже, ми хочемо довести таку річ:

$$\mathbb{P}\left\{N(t) = \Delta\right\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\Delta}}{\Delta!} \tag{2.6.36}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{N(t) = \Delta\right\} = \mathbb{P}\left\{N(t) \geq \Delta\right\} - \mathbb{P}\left\{N(t) \geq \Delta + 1\right\} = \mathbb{P}\left\{T_\Delta \leq t\right\} - \\ - \mathbb{P}\left\{T_{\Delta+1} \leq t\right\} = \mathbb{P}\left\{\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta \leq t\right\} - \mathbb{P}\left\{\tau_1 + \ldots + \tau_{\Delta+1} \leq t\right\} \end{aligned} \tag{2.6.37}$$

$\tau_1, \ldots, \tau_\Delta \sim Exp(\lambda)$ тоді
$\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta \sim G(\Delta, \lambda)$ Отже, отримуємо таку щільність розподілу:

$$f_{\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta - 1)!}x^{\Delta-1}e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \tag{2.6.38}$$

Тоді:

$$\mathbb{P}\left\{\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta \leq t\right\} = \int\limits_0^t \frac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta - 1)!}x^{\Delta-1}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = I_1 \tag{2.6.39}$$

Для другого доданка те саме:

$$\mathbb{P}\{\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta \leq t\} = \int\limits_0^t \frac{\lambda^{\Delta+1}}{(\Delta)!} x^{\Delta} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x = I_2 \tag{2.6.40}$$

Віднімемо їх:

$$\mathbb{P}\{\tau_1 + \ldots + \tau_\Delta \leq t\} - \mathbb{P}\{\tau_1 + \ldots + \tau_{\Delta+1} \leq t\} = I_1 - I_2 \tag{2.6.41}$$

Давайте трошки розважимося з цими інтегралами:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int\limits_0^t \frac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta-1)!} x^{\Delta-1} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x - \int\limits_0^t \frac{\lambda^{\Delta+1}}{(\Delta)!} x^{\Delta} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x = \\ &= \frac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta-1)!} \int\limits_0^t x^{\Delta-1} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x - \frac{\lambda^{\Delta+1}}{(\Delta)!} \left(-\frac{x^{\Delta}}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^t + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^t e^{-\lambda x} \Delta x^{\Delta-1} \,\mathrm{d}\, x \right) = \\ &= \frac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta-1)!} \int\limits_0^t x^{\Delta-1} e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x + \frac{\lambda^{\Delta}}{\Delta!} t^{\Delta} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^{\Delta}}{(\Delta-1)!} \int\limits_0^t e^{-\lambda x} x^{\Delta-1} \,\mathrm{d}\, x = \\ &= \frac{\lambda^{\Delta}}{\Delta!} t^{\Delta} e^{-\lambda t} = \mathbb{P}\{Pois(\lambda t) = \Delta\} \end{aligned} \tag{2.6.42}$$

□

2.7 Елементи актуарної математики

Актуарна математика - це математика страхових компаній.
Під цими елементами буде основна та найбільш проста модель - модель Крамера-Лундберга, яка виникла у 20-30-тих роках 20-того сторіччя.
Логічно припустити, що страхові випадки утворюють потік Пуассона з деякою інтенсивністю λ. І в нас виникає такий собі **процес ризику** - процес, який описує поточний капітал страхової компанії.

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{2.7.1}$$

c - компанія отримує в одиницю часу. X_i- claims, страхові виплати - деякі незалежні, однаково розподілені випадкові величини такі, що $X_i \geq 0$
Банкрутство(In) - це $\{\exists t \geq 0 : U(t) < 0\}$ на нескінченному часовому горизонті.
Введемо ймовірність банкрутства:

$$\psi(u) = \mathbb{P}\{\exists t \geq 0 : U(t) < 0\} \tag{2.7.2}$$

Знайдемо $\psi(u)$, u - початковий капітал.

$$\mathbb{E}\left[U(t)\right] = u + ct - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] =$$
$$= u + ct - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \big/ {N(t)=k}\right]\right] = u + ct - \mathbb{E}\left[N(t)\cdot\mathbb{E}\left[X\right]\right] =$$
$$= u + ct - \mathbb{E}\left[N(t)\right]\cdot\mathbb{E}\left[X\right] = u + ct - \lambda m t, \quad m = \mathbb{E}\left[X\right] \quad (2.7.3)$$

Перепишемо цю формулу у такому вигляді:

$$\mathbb{E}\left[U(t)\right] = u + (c - \lambda m)\, t, \quad t \geq 0 \quad (2.7.4)$$

Якщо $c \leq \lambda m$, то $\forall u: \quad \psi(u) = 1$
Якщо $c > \lambda m$, то $\forall u: \quad \psi(u) < 1$
Умова $c > \lambda m$ називається **умова чистого прибутку** або в англомовній літературі "**NPC(Net Profit Condition)**".
Умову банкрутства можна переписати так:

$$In = \left\{\inf_{t\geq 0} U(t) < 0\right\} = \left\{u + \inf_{t\geq 0}\left(ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right) < 0\right\} =$$
$$= \left\{u + \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(cT_n + \sum_{i=1}^{n} X_i\right) < 0\right\} =$$
$$= \left\{u + \inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i) < -u\right\} \quad (2.7.5)$$

$\{\tau_i, i \in \mathbb{N}\}$ - незалежні $Exp(\lambda)$
Згідно до ЗВЧ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[c\tau_i - X_i\right] = \frac{c}{\lambda} - m \quad (2.7.6)$$

Отже, якщо $\frac{c}{\lambda} - m < 0$, то $\frac{\sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i)}{n}$ прямує до деякого від'ємного числа і тоді $\sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i) \to -\infty$.
Для рівності довести складно, але повірте - це щира правда!
Якщо $c < \lambda m$, то $\frac{\sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i)}{n}$ буде прямувати до якогось додатного числа і $\sum_{i=1}^{n} (c\tau_i - X_i) \to +\infty$

2.8 Інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \tag{2.8.1}$$

Теорема 2.8.1. *Якщо виконано умову NPC, то ймовірність небанкрутства $\phi(u)$ задовольняє рівнянню:*

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \phi(u-t)\overline{F}_x(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{2.8.2}$$

де $\overline{F}_x(t) = 1 - F_x(t) = \mathbb{P}\{x_i \geq t\}$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \mathbb{P}\left\{x_1 - c\tau_1 \leq u, \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=2}^{n}(x_i - c\tau_i) \leq u + c\tau_1 - x_1\right\} = \\
= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{I}\left\{x_1 - c\tau_1 \leq u, \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=2}^{n}(x_i - c\tau_i) \leq u + c\tau_1 - x_1\right\}\diagup_{(\tau_1,x_1)}\right]\right] = \\
= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\cdot\mathbf{I}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=2}^{n}(x_i - c\tau_i) \leq u + c\tau_1 - x_1\right\}\diagup_{(\tau_1,x_1)}\right]\right] = \\
= \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\cdot\mathbb{E}\left[\mathbf{I}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=2}^{n}(x_i - c\tau_i) \leq u + c\tau_1 - x_1\right\}\diagup_{(\tau_1,x_1)}\right]\right] = \\
= \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\cdot\mathbb{P}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i=2}^{n}(x_i - c\tau_i) \leq u + c\tau_1 - x_1\diagup_{(\tau_1,x_1)}\right\}\right] = \\
= \mathbb{E}\left[\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\cdot\phi\left(u + c\tau_1 - x_1\right)\right] = \\
= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f_x(x)\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\,\phi\left(u + ct - x\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,t = \\
= \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,t\int\limits_0^{u+ct} f_x(x)\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\,\phi\left(u + ct - x\right)\mathrm{d}\,x
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Отже, ми отримали таке інтегральне рівняння:

$$\phi(u) = \lambda\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,t\int\limits_0^{u+ct} f_x(x)e^{-\lambda t}\mathbf{I}\{x_1 - c\tau_1 \leq u\}\,\phi\left(u + ct - x\right)\mathrm{d}\,x \tag{2.8.4}$$

Робимо заміну $u + ct = s : t \to s; t = \dfrac{s-u}{c}$.

$$\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty \mathrm{d}\, s \int_0^s f(x) e^{-\lambda\dfrac{s}{c}} e^{\lambda\dfrac{u}{c}} \phi(s-x)\,\mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{\lambda}{c} e^{\lambda \frac{u}{c}} \int_{s=u}^\infty \int_{x=0}^\infty f(x) e^{-\lambda\frac{s}{c}} \phi(s-x)\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, s \quad (2.8.5)$$

$$\phi'(u) = \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\lambda\frac{u}{c}} \int_{s=u}^\infty \int_{x=0}^\infty f(x) e^{-\lambda\frac{s}{c}} \phi(s-x)\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, s -$$

$$- \frac{\lambda}{c} e^{\lambda\frac{u}{c}} \int_0^u f(x) e^{-\lambda\frac{u}{c}} \phi\,(u-x)\,\mathrm{d}\, x = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)\,\mathrm{d}\, x \quad (2.8.6)$$

Ця штука має назву **інтегро-диференціальне рівняння для небанкрутства**. Загалом, нічого ідейного далі немає, а просто штучні перетворення. Залишається лише повірити. □

Отримали ще два дивних питання: 24.05.2014

1. $\phi(0) = ?$
2. $x_i = Exp(\lambda)$ - єдина ситуація, в яких це рівняння можна чесно та аналітично розв'язати.

Перше питання:
Що відбувається при $u \to +\infty$:

$$1 = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty 1 \cdot \overline{F}(t)\,\mathrm{d}\, t \quad (2.8.7)$$

Також можна зобразити у такому вигляді:

$$1 = \phi(0) + \frac{\lambda}{c} m \quad (2.8.8)$$

А отже,

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c} m \quad (2.8.9)$$

Друге питання:

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} m + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-t)\overline{F}(t)\,\mathrm{d}\, t \quad (2.8.10)$$

Якщо $x_i = Exp(\alpha)$, то $m = \dfrac{1}{\lambda}, \overline{F}(t) = e^{-\alpha t}, t \geq 0$

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c\alpha} + \frac{\lambda}{c}\int\limits_0^u \phi(u-t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t \tag{2.8.11}$$

Використаємо перетворення Лапласа

$$\Phi(p) = \frac{1 - \frac{\lambda}{c\alpha}}{p} + \frac{\lambda}{c}\Phi(p)\frac{1}{p+\alpha} \tag{2.8.12}$$

Перенесемо всі $\Phi(p)$ в одну частину

$$\Phi(p)\left(1 - \frac{\lambda}{c\,(p+\alpha)}\right) = \frac{1 - \frac{\lambda}{c\alpha}}{p} \tag{2.8.13}$$

Ну і поділимо на коефіцієнт при $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \frac{(c\alpha - \lambda)\,(p+\alpha)}{c\alpha p\left((p+\alpha) - \frac{\lambda}{c}\right)} \tag{2.8.14}$$

Розкладемо на прості дроби

$$\Phi(p) = \left(1 - \frac{\lambda}{c\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)p} - \frac{\frac{\lambda}{c}}{\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)\left(p + \alpha - \frac{\lambda}{c}\right)}\right) \tag{2.8.15}$$

Використаємо зворотнє перетворення Лапласа

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u} \tag{2.8.16}$$

Тоді ймовірність банкрутства буде така:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)u} \tag{2.8.17}$$

Розділ 3

Практика

3.1 Практика

05.03.2014

Завдання 3.1.1. $\xi \sim Pois(\lambda)$ - кількість студентів.
Студент здає іспит з ймовірністю p і не здає з ймовірністю $1-p$.
Потрібно довести, що кількість тих, хто склад іспит також розподілена $\sim Pois(\lambda p)$.

$$\mathbb{P}\{\eta = k\} = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi = i\} \cdot \mathbb{P}\{\eta = k \setminus \xi = i\} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} =$$
$$= e^{-\lambda} p^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} C_i^k (1-p)^{i-k} = \big| j = i-k \big| = e^{-\lambda} p^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} C_{j+k}^k (1-p)^j =$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} p^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}(1-p)^j = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} p^k \cdot e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-p\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \tag{3.1.1}$$

Завдання 3.1.2. $\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$
Це **вектор білого шуму**, тобто:

- $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0, \forall i$;
- $\mathbb{D}[\varepsilon_i] = 1, \forall i$;
- $\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0, \forall i, j : i \neq j$.

Будуємо з нього інший вектор:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon + 4 + 2\varepsilon_5 \\ \varepsilon_1 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_5 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_4 \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

Спостерігаються координати з непарними номерами, а знайти оцінку координат з парними номерами.

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ \varepsilon_1 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_5 \\ \varepsilon_5 - \varepsilon_4 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

$$A_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon + 4 + 2\varepsilon_5 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

$$B_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

Запишемо формулу оцінки:

$$\hat{\vec{\eta}} = \vec{m}_{\vec{\eta}} + C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} \mathcal{D}_{\vec{\xi}}^{-1} \left(\vec{\xi} - \vec{m}_{\vec{\xi}} \right) \tag{3.1.7}$$

З умови відомо, що:

$$\vec{m}_{\vec{\eta}} = \vec{0}; \vec{m}_{\vec{\xi}} = \vec{0} \tag{3.1.8}$$

Знайдемо дисперсійну матрицю:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\vec{\xi}} &= \mathbb{E}\left[\left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right] \right) \left(\vec{\xi} - \mathbb{E}\left[\vec{\xi}\right] \right)^{\mathrm{T}} \right] = \mathbb{E}\left[\left(A\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[A\vec{\varepsilon}\right] \right) \left(A\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[A\vec{\varepsilon}\right] \right)^{\mathrm{T}} \right] = \\ &= \mathbb{E}\left[A \left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right) A \left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right)^{\mathrm{T}} \right] = \mathbb{E}\left[A \left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right) \left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \right] = \\ &= A \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right) \left(\vec{\varepsilon} - \mathbb{E}\left[\vec{\varepsilon}\right] \right)^{\mathrm{T}} \right]}_{\mathcal{D}_{\vec{\varepsilon}}} A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Здогадаємося по аналогії до формули:

$$C_{\vec{\eta},\vec{\xi}} = BA^{\mathrm{T}} \tag{3.1.10}$$

Отже, отримали:

$$\hat{\vec{\eta}} = BA^{\mathrm{T}} \left(AA^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{17}{55} & \frac{1}{11} & \frac{16}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \tag{3.1.11}$$

Завдання 3.1.3. Саша та Маша стріляють в лося. Кожен робить по 10 пострілів, при чому навіть у мертве тіло. Ймовірність потрапляння Саші 0.9, а Маші 0.5. Спостерігається загальна кількість влучень, побудувати лінійну оцінку для кількості потраплянь Саші.

Завдання 3.1.4. Випадкова величина $X \sim U(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$. Спостерігається sin, оцінити cos.

$$\xi = \sin X; \eta = \cos X \tag{3.1.12}$$

$$\mathbb{E}\left[\eta\right] = \frac{2}{\pi} \tag{3.1.13}$$

$$\mathbb{E}\left[\xi\right] = \frac{2}{\pi} \tag{3.1.14}$$

$$\mathbb{E}\left[\xi^2\right] = \frac{1}{2} \tag{3.1.15}$$

$$\mathbb{D}\left[\xi\right] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \tag{3.1.16}$$

$$K_{\xi,\eta} = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \tag{3.1.17}$$

$$\hat{\eta} = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) \tag{3.1.18}$$

Завдання 3.1.5. Розподіл числа потомків є геометричним з параметром p. Знайти ймовірність виродження гіллястого процесу.

3.1.1 Домашнє завдання

Завдання 3.1.6. Маша стріляє в круглу ціль радіусу 1 метр. Точка потрапляння рівномірно розподілена в цьому колі. Спостерігається відхилення від центра по горизонталі. Знайти оптимальну лінійну оцінку відхилення по вертикалі. Відхилення обчислюється через модулі.
$|\xi|$ - відстань по горизонталі.
$|\eta|$ - відстань по вертикалі.

$$|\hat{\eta}| = m_{|\eta|} + C_{|\eta|,|\xi|} D^{-1} \left(|\xi| - m_{|\xi|}\right) \tag{3.1.19}$$

Завдання 3.1.7. Спостерігається обидва відхилення в задачі (3.1.6). Оцінити відстань від точки потрапляння до центру мішені.

Завдання 3.1.8. Теж сама задача, що й (3.1.6), але в нас тепер немає мішені. Координати точки потрапляння це незалежні гаусовські величини. Спостерігаються відхилення від вісей, оцінити відстань від точки потрапляння до початку координат.

Завдання 3.1.9. Число потомків має пуасонівський розподіл. Яким має бути параметр цього розподіл, щоб ймовірність виродження дорівнювала $\frac{1}{2}$.

3.2 Практика

19.03.2014

$$\begin{tikzcd} \text{Саша} \arrow[r, "1"] & \text{Паша} \arrow[r, "1"] & \text{Даша} \arrow[ll, bend left, "1/2"] \arrow[loop right, "1/2"] \end{tikzcd}$$

Завдання 3.2.1.

$$\overleftarrow{p}^{(0)} = (1, 0, 0) \tag{3.2.1}$$

Мінімальне $k = 4$.
Запишемо систему:

$$\begin{cases} \overleftarrow{\Pi}\mathbb{P} = \overleftarrow{\Pi} \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Розпишемо цю систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Pi_3 = \Pi_1 \\ \Pi_1 = \Pi_2 \\ \Pi_2 + \frac{1}{2}\Pi_3 = \Pi_3 \\ \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Отримали розв'язок

$$\overleftarrow{\Pi} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \tag{3.2.4}$$

Знайдемо власні числа нашої матриці $\mathbb{P}$.

$$\det(\mathbb{P} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} \tag{3.2.5}$$

Розв'язавши це рівняння отримуємо:

$$\lambda = \left(1, \frac{1}{4}\left(-1 + i\sqrt{7}\right), \frac{1}{4}\left(-1 - i\sqrt{7}\right)\right) \tag{3.2.6}$$

Загалом, все сумно. Тоді спробуємо щось зробити більш адекватне. Але ні, не спробували.

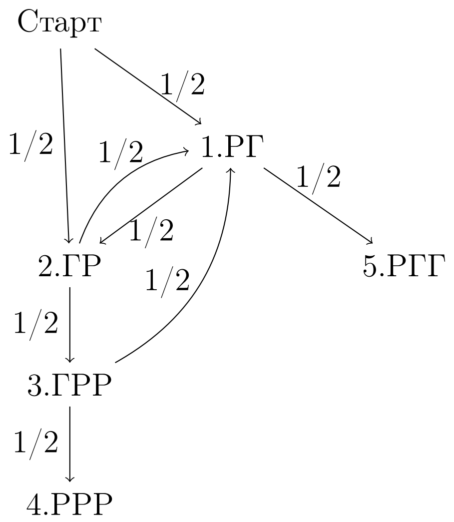
Завдання 3.2.2. Знайте математичне сподівання момента першого повернення до Саші.
τ - момент першого повернення до Саші.

τ	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{P}$	0	0	1/2	1/4	1/16	...

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{i=3}^{\infty} p_i = \sum_{i=3}^{\infty} 2^{-(k-2)} i = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-(l+1)}(l+3) = 1 + 3 = 4 \tag{3.2.7}$$

3.2.1 Домашнє завдання

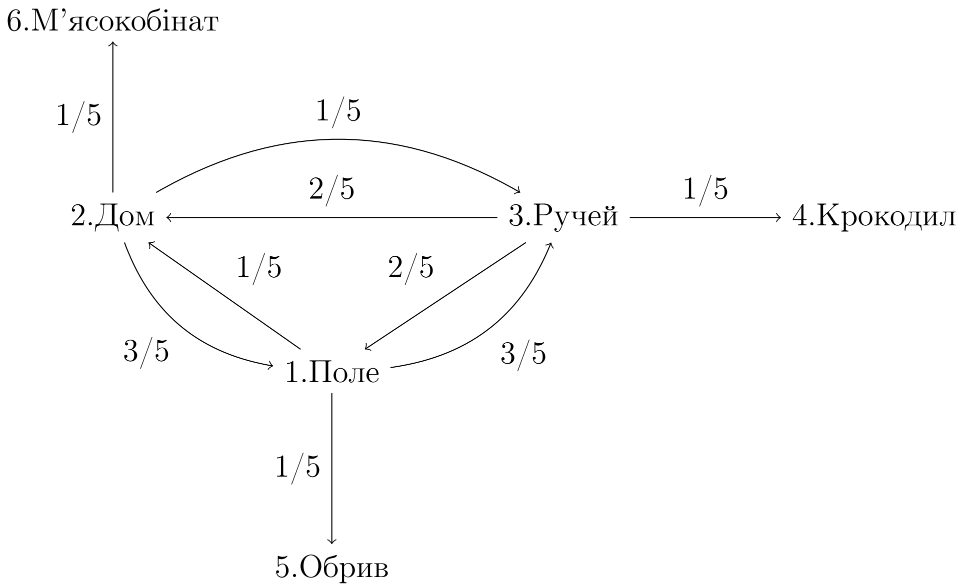
Завдання 3.2.3. Маша підкидає монетку нескінченну кількість разів. Яка ймовірність того, що три решки підряд з'являться раніше, ніж два герби підряд.
Розглянемо таку схему:



Отримали ймовірності: $h_1 = \frac{1}{5}; h_2 = \frac{2}{5}; h_3 = \frac{3}{5}; h_4 = 1$
Тоді, за формулою повної ймовірності:

$$\frac{1}{2} \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot h_2 = \frac{3}{10} \tag{3.2.8}$$

Завдання 3.2.4.



- Спочатку корова у домі, обчислити ймовірність кожної смерті на нескінченності.
- Знайти математичне сподівання смерті.

$$h_i = \mathbb{P}\left\{\xi_\infty = 4 \setminus \xi_0 = i\right\} \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned}
h_4 &= 1 && (3.2.10)\\
h_5 &= 0 && (3.2.11)\\
h_6 &= 0 && (3.2.12)\\
h_1 &= \frac{1}{5}h_2 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}h_3 && (3.2.13)\\
h_2 &= \frac{3}{5}h_1 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}h_3 && (3.2.14)\\
h_3 &= \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 && (3.2.15)
\end{aligned}$$

Розв'яжемо цю милу систему рівнянь.
Отримали: $h_1 = 0.32; h_2 = 0.28; h_3 = 0.44$
Тепер знайдемо математичні сподівання:

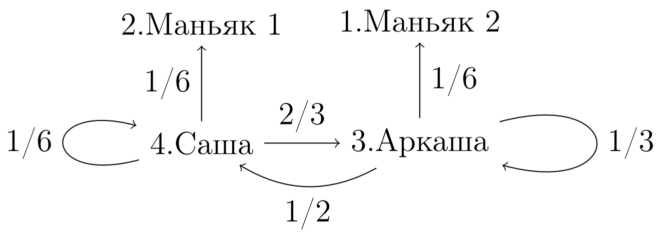
$$\begin{aligned}
m_4 &= 0 && (3.2.16)\\
m_5 &= 0 && (3.2.17)\\
m_6 &= 0 && (3.2.18)\\
m_2 &= 1 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot m_3 + \frac{3}{5}\cdot m_1 && (3.2.19)\\
m_1 &= 1 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot m_3 + \frac{1}{5}\cdot m_2 && (3.2.20)\\
m_3 &= 1 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot m_2 + \frac{2}{5}\cdot m_1 && (3.2.21)
\end{aligned}$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 5 \tag{3.2.22}$$

3.3 Практика

02.04.2014



Завдання 3.3.1.
Питання :

$$h_i = \mathbb{P}\left\{\xi_\infty = 1 \setminus \xi_0 = i\right\} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= 1 && (3.3.2)\\
h_2 &= 0 && (3.3.3)\\
h_3 &= \frac{1}{6}\cdot h_1 + \frac{1}{6}\cdot h_3 + \frac{2}{3}\cdot h_4 && (3.3.4)\\
h_4 &= \frac{1}{2}\cdot h_3 + \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{3}\cdot h_4 && (3.3.5)
\end{aligned}$$

Отримали: $h_3 = \frac{1}{2}; h_4 = \frac{3}{8}$
Тепер знайдемо середній час життя:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 && (3.3.6)\\ m_2 &= 0 && (3.3.7)\\ m_3 &= 1 + \frac{1}{6}m_1 + \frac{1}{6}m_3 + \frac{2}{3}m_4 && (3.3.8)\\ m_4 &= 1 + \frac{1}{2}m_3 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_4 && (3.3.9) \end{aligned}$$

Отримали: $m_3 = m_4 = 6$

Завдання 3.3.2.

$$h_0 = 1 \tag{3.3.10}$$

$$h_n = 0 \tag{3.3.11}$$

$$k = 1, \ldots, n \quad h_k = \frac{1}{2}h_{k+1} + \frac{1}{2}h_{k-1} \tag{3.3.12}$$

$$h_k = 1 - \frac{k}{n} \tag{3.3.13}$$

Завдання 3.3.3. Та сама задача, але скільки часу займе її прогулянка? Тобто, знайдемо m_k

$$\begin{aligned} m_0 &= 0 && (3.3.14)\\ m_n &= 0 && (3.3.15)\\ m_k &= 1 + \frac{1}{2}m_{k+1} + \frac{1}{2}m_{k-1} && (3.3.16) \end{aligned}$$

Розв'язавши це добро можна отримати:

$$m_k = k - k^2 + k\,(n-1) \tag{3.3.17}$$

3.3.1 Домашнє завдання

Завдання 3.3.4. Розв'язати обидві ці задачі, якщо ймовірність піти направо дорівнює p, а наліво q. Звісно, $p + q = 1$.

Завдання 3.3.5.

3.4 Практика

30.04.2014

Завдання 3.4.1.

$$\xi = 2 \cdot w(1) - 3w(2) + 4w(3) + 5 \tag{3.4.1}$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.4.2}$$

Знайдемо розподіл ξ:

$$\mathbb{E}[\xi] = 2\mathbb{E}[w(1)] - 3\mathbb{E}[w(2)] + 4\mathbb{E}[w(3)] + 5 = 5 \tag{3.4.3}$$

Знайдемо дисперсію:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}[\xi])^2\right] = \mathbb{E}\left[(2 \cdot w(1) - 3w(2) + 4w(3))^2\right] = \\ = 4\mathbb{E}\left[w^2(1)\right] + 9\mathbb{E}\left[w^2(2)\right] + 16\mathbb{E}\left[w^2(3)\right] - \\ - 12\mathbb{E}[w(1)w(2)] - 16\mathbb{E}[w(1)w(3)] - 24\mathbb{E}[w(2)w(3)] = 26\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Отримали:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{52\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{52}} \tag{3.4.5}$$

Завдання 3.4.2.

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.4.6}$$

Знайдемо $\mathbb{E}[||\vec{w}||(t)]$

$$\mathbb{E}[||\vec{w}||(t)] = \mathbb{E}\left[\sqrt{w_1^2(t) + w_2^2(t)}\right] \tag{3.4.7}$$

Розглянемо дещо окремо

$$f_{w_1(t)}(x) = f_{w_2(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \tag{3.4.8}$$

Отже, отримуємо інтеграл:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||\vec{w}||(t)] = \\ = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2+y^2} \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\phi \int\limits_0^{\infty} \rho^2 \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\rho^2}{2t}} \,\mathrm{d}\,\rho = \\ = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2t}} \frac{\rho^2}{t} \,\mathrm{d}\,\rho\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Розглянемо це окремо:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2t}} \frac{\rho^2}{t} \,\mathrm{d}\,\rho = \left| z = \frac{\rho^2}{2t} \right| = \int\limits_0^{\infty} e^{-z} 2z \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2z}} \,\mathrm{d}\,z = \sqrt{2t} G\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi t}{2} \tag{3.4.10}$$

Завдання 3.4.3. $w(1), w(2), w(5)$ - спостерігається. Знайти оптимальну оцінку для $w(3)$.
Згадаємо формулу:

$$\hat{\eta} = m_\eta + C_{\eta,\xi}\mathbb{D}_\xi^{-1}\left(\xi - m_\xi\right) \tag{3.4.11}$$

$$\eta = w(3) \tag{3.4.12}$$

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} w(1) \\ w(2) \\ w(5) \end{pmatrix} \tag{3.4.13}$$

Відомо, що:

$$m_\eta = 0 \tag{3.4.14}$$

$$m_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}\left[\xi\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{D}\left[w(1)\right] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbb{D}\left[w(2)\right] & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbb{D}\left[w(5)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[w^2(1)\right] & \mathbb{E}\left[w(1)w(2)\right] & \mathbb{E}\left[w(1)w(5)\right] \\ \mathbb{E}\left[w(2)w(1)\right] & \mathbb{E}\left[w^2(2)\right] & \mathbb{E}\left[w(2)w(5)\right] \\ \mathbb{E}\left[w(5)w(1)\right] & \mathbb{E}\left[w(5)w(2)\right] & \mathbb{E}\left[w^2(5)\right] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

$$\begin{aligned} C_{\eta,\xi} &= \mathbb{E}\left[\left(\eta - m_\eta\right)\left(\xi - m_\xi\right)^{\mathrm{T}}\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\eta \cdot \xi^{\mathrm{T}}\right] = \mathbb{E}\left[w(3)\cdot\left(w(1), w(2), w(5)\right)\right] = \\ &= (1, 2, 5) \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Отже, в кінці отримали:

$$\hat{\eta} = \frac{2}{3}w(2) + \frac{1}{3}w(5) \tag{3.4.18}$$

Завдання 3.4.4.

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} t \cdot w\left(\dfrac{1}{t}\right), t > 0 \\ 0, t = 0 \end{cases} \tag{3.4.19}$$

Довести, що $\tilde{w}(t)$ - вінеровський. Для цього мають виконуватися три умови:

1. $\tilde{w}(t)$ - гаусовський процес
2. $\mathbb{E}\left[\tilde{w}(t)\right] = 0$
3. $\mathbb{E}\left[\tilde{w}(t)\tilde{w}(s)\right] = \min\left\{t, s\right\}$

Другий та третій пункти очевидні, просто перевіряються в лоб.

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}(t_1) \\ \vdots \\ \tilde{w}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w\left(\frac{1}{t_1}\right) \\ \vdots \\ t_n w\left(\frac{1}{t_n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & t_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w\left(\frac{1}{t_1}\right) \\ \vdots \\ w\left(\frac{1}{t_n}\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.20}$$

Отже, гаусовість зберігається.

3.5 Практика

14.05.2014

Завдання 3.5.1. Знайти:

$$\mathbb{P}\left\{N(2) = 3, N(3) = 4, N(5) > 6\right\} \tag{3.5.1}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{N(2) = 3, N(3) = 4, N(5) > 6\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{N(2) = 3, N(3) - N(2) = 1, N(5) - N(3) > 2\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{N(2) = 3\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{N(3) - N(2) = 1\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{N(5) - N(3) > 2\right\} = \\ &= \frac{e^{-2\lambda}\left(2\lambda\right)^3}{3!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!}\left(1 - \frac{e^{-2\lambda}\left(2\lambda\right)^0}{1} - \frac{e^{-2\lambda}\left(2\lambda\right)^1}{1} - \frac{e^{-2\lambda}\left(2\lambda\right)^2}{2}\right) = \\ &= \frac{e^{-3\lambda}4\lambda^4}{3}\left(1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda} - 2\lambda^2\left(-2\lambda\right)\right) \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Завдання 3.5.2. Знайти

$$\mathbb{P}\left\{N(t) \div 2\right\} \tag{3.5.3}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{N(t) \div 2\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\exists k \in N : N(5) = 2k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{N(5) = 2k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-5\lambda}\frac{\left(5\lambda\right)^{2k}}{2k!} = \\ &= e^{-5\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(5\lambda\right)^{2k}}{2k!} = e^{-5\lambda} + \operatorname{ch} 5\lambda = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-10\lambda} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Завдання 3.5.3. Знайти

$$\mathbb{P}\left\{N(1) + N(3) + N(5) = N(2) + N(4) + N(6)\right\} \tag{3.5.5}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{N(1) + N(3) + N(5) = N(2) + N(4) + N(6)\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{N(1) = N(2), N(3) = N(4), N(5) = N(6)\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{N(1) - N(2) = 0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{N(3) - N(4) = 0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{N(5) - N(6) = 0\right\} = \\ &= e^{-3\lambda} \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Завдання 3.5.4. Знайти

$$\mathbb{P}\left\{N(1)+N(3)+N(5)+10=N(2)+N(4)+N(6)\right\} \tag{3.5.7}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{N(1)+N(3)+N(5)+10=N(2)+N(4)+N(6)\right\} = \\ = \mathbb{P}\left\{(N(2)-N(1))+(N(4)-N(3))+(N(5)-N(6))=10\right\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=10\right\}, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \sim Pois(\lambda)\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=10\right\} = \mathbb{P}\left\{\eta=10\right\}, \eta \sim Pois(3\lambda) \tag{3.5.9}$$

$$\mathbb{P}\left\{\eta=10\right\} = e^{-3\lambda}\frac{(3\lambda)^1 0}{10!} \tag{3.5.10}$$

3.5.1 Домашнє завдання

Завдання 3.5.5. Знайти коваріаціну функцію процесу $X(t)$, де

$$X(t) = N(t+1) - N(t) \tag{3.5.11}$$

Завдання 3.5.6. Знайти

$$f_{\tau / _{N(1)=1}}(x) \tag{3.5.12}$$

Де τ - момент появи першої події у потоку Пуассона

3.6 Література