Математические основы компьютерной графики

(c) Корольков О.Г. http://vk.com/korolkov_amm

(c) Кафедра вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета

Аффинные преобразования на плоскости.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Аффинное преобразование общего вида	$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Тождественное аффинное преобразование	$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования на плоскости.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Перенос на вектор $\vec{a}(a_x, a_y)$	$\begin{cases} x' = x + a_x \\ y' = y + a_y \end{cases}$	$T_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Поворот вокруг начала координат на угол φ	$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$	$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Масштабирование вдоль координатных осей	$\begin{cases} x' = k_x \cdot x \\ y' = k_y \cdot y \end{cases}$	$S_{k_x, k_y} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования на плоскости.

Наименование АП	**Формула АП в декартовых координатах**	**Матрица АП в однородных координатах**
Отражение относительно оси абсцисс	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно оси ординат	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно начала координат	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Аффинное преобразование общего вида	$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Тождественное аффинное преобразование	$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Перенос на вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$	$\begin{cases} x' = x + a_x \\ y' = y + a_y \\ z' = z + a_z \end{cases}$	$T_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 1 & a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Поворот вокруг оси абсцисс на угол φ	$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\varphi - z\sin\varphi \\ z' = y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$	$R_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Поворот вокруг оси ординат на угол φ	$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y' = y \\ z' = -x\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$	$R_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Поворот вокруг оси аппликат на угол φ	$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$	$R_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Масштабирование вдоль координатных осей	$\begin{cases} x' = k_x \cdot x \\ y' = k_y \cdot y \\ z' = k_z \cdot z \end{cases}$	$S_{k_x,k_y,k_z} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно координатной плоскости yz	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$	$M_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Отражение относительно координатной плоскости $z\,x$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$	$M_{zx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно координатной плоскости $x\,y$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$	$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Отражение относительно оси абсцисс	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$	$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно оси ординат	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$	$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве.

Наименование АП	Формула АП в декартовых координатах	Матрица АП в однородных координатах
Отражение относительно оси аппликат	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$	$M_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Отражение относительно начала координат	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$	$M_O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Составное аффинное преобразование, совмещающее произвольный вектор с осью абсцисс.

Пусть задан ненулевой вектор $\vec{v}(A, B, C)$.

Пусть $\vec{v_0}\left(\sqrt{A^2+B^2+C^2},\ 0,\ 0\right)$.

Обозначим $R_{\vec{v}}$ матрицу составного аффинного преобразования, совмещающего вектор $\vec{v_0}$ с вектором $\vec{v}$ за конечное число поворотов вокруг координатных осей.

Тогда $R_{\vec{v}}^{-1}$ – матрица составного аффинного преобразования, совмещающего вектор $\vec{v}$ с вектором $\vec{v_0}$ за конечное число поворотов вокруг координатных осей.

Составное аффинное преобразование, совмещающее произвольный вектор с осью абсцисс.

Первый случай.

$$C = 0.$$

$$R_{\vec{v}}^{-1} = R_{z,-\alpha} \qquad\qquad R_{\vec{v}} = R_{z,\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Составное аффинное преобразование, совмещающее произвольный вектор с осью абсцисс.

Второй случай.

$$C \neq 0.$$

$$R_{\vec{v}}^{-1} = R_{z,-\alpha} \cdot R_{x,-\beta}$$

$$R_{\vec{v}} = R_{x,\beta} \cdot R_{z,\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{B^2+C^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}}$$