

**Ejercicios del tema y su valor:**

1- sin pivoteo (**1p**), 2-pivoteo parcial (**2p**), 3-pivoteo total (**3p**), 4-Gauss-Jordan (**3p**), 5-Inversión (**3p**), 6-LU (**4p**), 7- Gauss-Seidel (**1p**)

**Entrega:** un ejercicio obligatorio: el nº 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

**Sistema de ecuaciones lineales.**

A un conjunto de N ecuaciones con N incógnitas del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NN}x_N &= b_N \end{aligned} \quad (1)$$

se le conoce como *sistema de ecuaciones lineales*, donde  $a_{i,j}$  son los coeficientes,  $x_i$  las incógnitas y  $b_j$  los términos independientes.

En notación compacta el sistema (1) se expresa en la forma

$$Ax = b \quad (2)$$

donde A es la matriz de coeficientes, x el vector solución y b el vector de términos independientes.

**Métodos de resolución**

- **Eliminación gaussiana sin pivoteo**

El objetivo de este método es construir un sistema triangular superior equivalente.<sup>1</sup>

**EJEMPLO 1:** Utilizando el método de eliminación gaussiana sin pivoteo, resolver el sistema de ecuaciones lineales (3)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \quad (3)$$

Construimos la matriz ampliada formada por la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad (4)$$

y a continuación realizaremos sobre ella una serie de operaciones que no cambian el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineal.

En primer lugar, utilizamos la primera fila para eliminar los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal. En este paso, esta primera fila es la *fila pivote* y su elemento  $a_{11}$  es el *elemento pivote*. El proceso es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{array} \right.$$

<sup>1</sup> Dos sistemas de orden NxN son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto de soluciones

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array} \right) \quad (5)$$

A continuación, usamos la segunda fila (*fila pivote*) para eliminar los elementos de la segunda columna. Teniendo en cuenta que  $a_{22}$  es ahora el *elemento pivote*,

{ a la tercera fila se le resta el producto de  $\frac{a_{32}}{a_{22}}$  por la segunda fila

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \end{array} \right) \quad (6)$$

La ecuación (6) representa el sistema triangular superior.

Para obtener la solución de (6), realizamos una sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{-42}{-14} = 3 \\ x_2 &= \frac{a_{24} - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{8.5 - 2.5 \cdot 3}{0.5} = 2 \\ x_1 &= \frac{a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{2} = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

### EJERCICIO 1:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

### RESULTADO:

Matriz triangular superior Ab

Ab =

```

2.0000   -1.0000    1.0000    3.0000
      0    0.5000    2.5000    8.5000
      0         0  -14.0000  -42.0000

```

solución: sustitución regresiva

x(1)= 1.000000

x(2)= 2.000000

x(3)= 3.000000

### ■ Eliminación gaussiana con pivoteo parcial

**EJEMPLO 2:** Utilicemos el método de eliminación gaussiana sin pivoteo para resolver el sistema de ecuaciones lineales (8)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5\end{aligned}\tag{8}$$

Construimos la matriz ampliada

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array} \right)\tag{9}$$

y comenzamos la eliminación de Gauss por el pivote  $a(1,1)$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & -7 & 1 & -11 \end{array} \right)\tag{10}$$

Ahora bien, como en (10) el elemento  $a(2,2)=0$ , éste no puede usarse para continuar el procedimiento de eliminación gaussiana.

El procedimiento a seguir es lo que se denomina **pivoteo trivial**. Cuando el pivote  $a_{kk}$  sea nulo, entonces se localiza la primera fila  $j$  por debajo de la  $k$ -ésima en la cual se tenga que  $a_{jk} \neq 0$  y se intercambia la fila  $j$ -ésima y  $k$ -ésima. Esto proporciona el pivote no nulo deseado.

En nuestro ejemplo, intercambiamos la fila 2 y la fila 3

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array} \right)\tag{11}$$

con lo que procediendo a la sustitución regresiva, resulta

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{21}{7} = 3 \\x_2 &= \frac{-11 - 1 \cdot 3}{-7} = 2 \\x_1 &= \frac{2 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1} = 1\end{aligned}\tag{12}$$

La estrategia de **pivoteo parcial** consiste en que antes de proceder a la eliminación gaussiana por el elemento  $a_{kk}$ , busquemos por debajo un elemento  $a_{jk}$  tal que  $|a_{jk}| > |a_{kk}|$  y, si existe, procedamos al intercambio de filas.

### **EJERCICIO 2:**

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5\end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

## RESULTADO:

Método eliminación de Gauss con pivoteo parcial y sustitución regresiva

matriz ampliada inicial

1	2	-1	2
2	4	5	25
3	-1	-2	-5

intercambio filas 1 y 3

3	-1	-2	-5
2	4	5	25
1	2	-1	2

eliminación de Gauss por pivote  $a(1,1)$

3.0000	-1.0000	-2.0000	-5.0000
0	4.6667	6.3333	28.3333
0	2.3333	-0.3333	3.6667

eliminación de Gauss por pivote  $a(2,2)$

3.0000	-1.0000	-2.0000	-5.0000
0	4.6667	6.3333	28.3333
0	0	-3.5000	-10.5000

Matriz triangular superior Ab

Ab =

3.0000	-1.0000	-2.0000	-5.0000
0	4.6667	6.3333	28.3333
0	0	-3.5000	-10.5000

solución: sustitución regresiva

$x(1) = 1.000000$

$x(2) = 2.000000$

$x(3) = 3.000000$

### ■ Eliminación gaussiana con pivoteo total

El **pivoteo total** consiste en el intercambio de filas y columnas con el propósito de usar como pivote el elemento de mayor magnitud (en valor absoluto) y, una vez colocado en la diagonal principal, usarlo para eliminar los restantes elementos de su columna que están por debajo de él.

Mientras que un intercambio entre filas deja invariable las soluciones del sistema, el intercambio de columnas produce un reordenamiento del vector solución.

**EJERCICIO 3:**

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5\end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo total y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

**RESULTADO:**

Método eliminación de Gauss con pivoteo total y sustitución regresiva

matriz ampliada inicial

1	2	-1	2
2	4	5	25
3	-1	-2	-5

intercambio filas 1 y 2

2	4	5	25
1	2	-1	2
3	-1	-2	-5

intercambio columnas 1 y 3

5	4	2	25
-1	2	1	2
-2	-1	3	-5

orden solución

3	2	1
---	---	---

eliminación de Gauss por pivote a(1,1)

5.0000	4.0000	2.0000	25.0000
0	2.8000	1.4000	7.0000
0	0.6000	3.8000	5.0000

intercambio filas 2 y 3

5.0000	4.0000	2.0000	25.0000
0	0.6000	3.8000	5.0000
0	2.8000	1.4000	7.0000

intercambio columnas 2 y 3

5.0000	2.0000	4.0000	25.0000
0	3.8000	0.6000	5.0000
0	1.4000	2.8000	7.0000

orden solución

3	1	2
---	---	---

eliminación de Gauss por pivote a(2,2)

```

5.0000    2.0000    4.0000    25.0000
      0    3.8000    0.6000    5.0000
      0         0    2.5789    5.1579

```

solución

```

3.0000
1.0000
2.0000

```

ordenar la solución

```

1.0000
2.0000
3.0000

```

solución: sustitución regresiva

```

x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000

```

#### ■ Eliminación de Gauss-Jordan

El método de eliminación de Gauss-Jordan es una variación del método de eliminación de Gauss con pivoteo total.

**EJEMPLO 3:** Utilizando el método de eliminación Gauss-Jordan, resolver el sistema de ecuaciones lineales (13)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \quad (13)$$

Construimos la matriz ampliada

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array} \right) \quad (14)$$

y a continuación procedemos a realizar las siguientes operaciones:

Con el objeto de utilizar el pivote máximo, se intercambia la fila 1 con la 2 y a continuación la columna 1 con la 3 (esto significa que el orden de las soluciones es  $x_3, x_2, x_1$ )

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 25 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -5 \end{array} \right) \quad (15)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{array} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 25 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} & 7 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 5 \end{array} \right) \quad (16)$$

ahora intercambiamos la fila 2 con la 3 y a continuación la columna 2 con la 3 (esto significa que el orden de las soluciones es  $x_3, x_1, x_2$ )

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 5 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} & 7 \end{array} \right) \quad (17)$$

{ a la tercera fila se le resta el producto de  $\frac{a_{32}}{a_{22}}$  por la segunda fila

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{245}{95} & \frac{98}{19} \end{array} \right) \quad (18)$$

{ dividimos la tercera fila por el elemento  $a_{33}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad (19)$$

Utilizamos ahora la tercera fila para eliminar los elementos de la tercera columna por encima de la diagonal principal

{ a la primera fila se le resta el producto de  $\frac{a_{13}}{a_{33}}$  por la tercera fila  
 { a la segunda fila se le resta el producto de  $\frac{a_{23}}{a_{33}}$  por la tercera fila

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & \frac{19}{5} & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad (20)$$

{ dividimos la segunda fila por el elemento  $a_{22}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad (21)$$

A continuación, usamos la segunda fila para para eliminar los elementos de la segunda columna por encima de la diagonal principal

{ a la primera fila se le resta el producto de  $\frac{a_{12}}{a_{22}}$  por la segunda fila

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad (22)$$

Por último,

{dividimos la primera fila por el elemento  $a_{11}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad (23)$$

Como podemos ver, la solución del sistema (en el orden  $x_3, x_1, x_2$ ) se corresponde con la columna  $a_{N+1, N+1}$  de la matriz ampliada.

#### EJERCICIO 4:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

#### RESULTADO:

Método eliminación de Gauss Jordan con pivoteo total

orden solución

3	1	2		
1.0000		0	0	3.0000
0	1.0000		0	1.0000
0		0	1.0000	2.0000

solución: Eliminación Gauss Jordan

x(1)= 1.000000

x(2)= 2.000000

x(3)= 3.000000

#### ■ Inversión matricial de Gauss-Jordan

El método de inversión matricial de Gauss-Jordan es una variación del método de eliminación de Gauss con pivoteo total.

**EJEMPLO 4:** Utilizando el método de inversión matricial Gauss-Jordan, resolver el sistema de ecuaciones lineales (24)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \quad (24)$$

Construimos la matriz ampliada



$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (25)$$

y realicemos las siguientes operaciones:

Para utilizar el pivote máximo, se intercambia la fila 1 con la 2 y a continuación la columna 1 con la 3 ( el orden de las columnas es: col 3, col 2, col 1 )

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (26)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{array} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{7}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{array} \right) \quad (27)$$

ahora intercambiamos la fila 2 con la 3 y a continuación la columna 2 con la 3 (el orden de las columnas es: col 3, col 1, col 2 )

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) \quad (28)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila} \end{array} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{245}{95} & 1 & \frac{5}{95} & -\frac{7}{19} \end{array} \right) \quad (29)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{dividimos la tercera fila por el elemento } a_{33} \end{array} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \end{array} \right) \quad (30)$$

Utilizamos la tercera fila para eliminar los elementos de la tercera columna por encima de la diagonal principal

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a la primera fila se le resta el producto de } \frac{a_{13}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \\ \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{23}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \end{array} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & -\frac{380}{245} & \frac{225}{245} & \frac{140}{245} \\ 0 & \frac{19}{5} & 0 & -\frac{57}{245} & \frac{95}{245} & \frac{266}{245} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \end{array} \right) \quad (31)$$

$\left\{ \text{dividimos la segunda fila por el elemento } a_{22} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & -\frac{380}{245} & \frac{225}{245} & \frac{140}{245} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{931} & \frac{95}{931} & \frac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \end{array} \right) \quad (32)$$

Ahora, usamos la segunda fila para para eliminar los elementos de la segunda columna por encima de la diagonal principal

$\left\{ \text{a la primera fila se le resta el producto de } \frac{a_{12}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -\frac{65170}{45619} & \frac{32585}{45619} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{931} & \frac{95}{931} & \frac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \end{array} \right) \quad (33)$$

$\left\{ \text{dividimos la primera fila por el elemento } a_{11} \right.$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{13034}{45619} & \frac{6517}{45619} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{931} & \frac{95}{931} & \frac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \end{array} \right) \quad (34)$$

Si en la matriz de la derecha de (34) restituimos el orden de las filas según ( 3, 1, 2 ) obtenemos la matriz inversa

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} -\frac{57}{931} & \frac{95}{931} & \frac{266}{931} \\ \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \\ -\frac{13034}{45619} & \frac{6517}{45619} & 0 \end{array} \right) \quad (35)$$

Ahora podemos obtener la solución del sistema simplemente realizando el producto de  $A^{-1}b$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{57}{931} & \frac{95}{931} & \frac{266}{931} \\ \frac{95}{245} & \frac{5}{245} & -\frac{35}{245} \\ -\frac{13034}{45619} & \frac{6517}{45619} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

**EJERCICIO 5:**

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de inversión matricial de Gauss-Jordan.

**RESULTADO:**

Método inversión de Gauss Jordan con pivoteo total

matriz inversa: método Gauss Jordan

```
-0.0612    0.1020    0.2857
 0.3878    0.0204   -0.1429
-0.2857    0.1429         0
```

solución del sistema

```
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Factorización LU**

La factorización LU permite escribir una matriz dada A como el producto de una matriz triangular inferior L (cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1) por una matriz triangular superior (cuyos elementos diagonales son distintos de cero)

$$A = LU \quad (37)$$

Por lo tanto, un sistema lineal  $AX=b$  puede escribirse de forma equivalente

$$LUx = b \quad (38)$$

Si denominamos

$$Ux = y \quad (39)$$

la ecuación (38) adopta la forma

$$Ly = b \quad (40)$$

Para resolver el sistema lineal, primero se calcula  $y$  por la ecuación (40) mediante un proceso sustitución progresiva, y después, se calcula  $x$  por la ecuación (39) mediante un proceso sustitución regresiva.

Dado que en el proceso de factorización se utiliza el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial <sup>2</sup> cabe preguntarse como se ven afectadas las matrices  $L$  y  $U$ . Si  $P$  es la matriz de permutación <sup>3</sup> que contiene información de los intercambios realizados en la matriz de coeficientes  $A$  durante el proceso de eliminación gaussiana, podemos escribir

$$PAx = Pb \quad (41)$$

y por consiguiente, si

$$PA = LU \quad (42)$$

resulta

$$LUx = Pb \quad (43)$$

de forma que

$$Ux = y \quad (44)$$

$$Ly = Pb \quad (45)$$

**EJEMPLO 5:** Utilizando el método de factorización LU, resolver el sistema de ecuaciones lineales (46)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \quad (46)$$

Inicialmente la matriz de permutación  $P$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

y la matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Ahora procedemos al pivoteo parcial intercambiado la fila 1 con la 3

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

<sup>2</sup> La función PYTHON *lu* que produce la factorización LU, utiliza pivoteo parcial.

<sup>3</sup>  $P$  es una matriz  $N \times N$  tal que en cada fila y en cada columna solo tiene un elemento igual a 1 siendo todos los demás iguales a 0. Las filas de  $P$  son una permutación de la matriz identidad.

de forma que la matriz de permutación P será ahora

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Y ahora comenzamos el proceso de eliminación por el pivote  $a_{11}$ :

- construimos el multiplicador  $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{3}$  y sustituimos los elementos de la segunda fila,  $a_{2c}$ , por  $a_{2c} - m_{21}a_{1c}$  ( $c=1, 2, 3$ )
- construimos el multiplicador  $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{3}$  y sustituimos los elementos de la tercera fila,  $a_{3c}$ , por  $a_{3c} - m_{31}a_{1c}$  ( $c=1, 2, 3$ )

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (51)$$

- en la matriz (51) sustituimos los elementos  $a_{21}$  por  $m_{21}$  y  $a_{31}$  por  $m_{31}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Ahora como  $a_{22} > a_{32}$  no hace falta realizar pivoteo, con lo que a continuación realizamos el proceso de eliminación por el pivote  $a_{22}$ :

- construimos el multiplicador  $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1}{2}$  y sustituimos los elementos de la tercera fila,  $a_{3c}$ , por  $a_{3c} - m_{32}a_{2c}$  ( $c=2, 3$ )

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ \boxed{\frac{1}{3}} & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad (53)$$

- en la matriz (53) sustituimos los elementos  $a_{32}$  por  $m_{32}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Finalizado el proceso de eliminación, tenemos ya las matrices L y U

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad (56)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (45), calculemos en primer lugar el término  $Pb$

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (57)$$

y a continuación planteamos  $Ly = Pb$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (58)$$

que puede resolverse mediante un proceso de sustitución progresivo

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{5}{1} = -5 \\ y_2 &= 25 + \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{85}{3} \\ y_3 &= 2 + \frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{3} = -\frac{63}{6} \end{aligned} \quad (59)$$

Ahora, de acuerdo con (44), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{85}{3} \\ -\frac{63}{6} \end{pmatrix} \quad (60)$$

y mediante un proceso de sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{63}{6} \cdot \frac{2}{7} = 3 \\ x_2 &= \left( \frac{85}{3} - \frac{19}{3} \cdot 3 \right) \cdot \frac{3}{14} = 2 \\ x_1 &= \frac{-5 + 2 + 2 \cdot 3}{3} = 1 \end{aligned} \quad (61)$$

que representa la solución del sistema.

**EJERCICIO 6:**

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5\end{aligned}$$

por el método de factorización LU.

**RESULTADO:**

Método factorización LU con pivoteo parcial

matriz triangular inferior L

```
1.0000      0      0
0.6667    1.0000      0
0.3333    0.5000    1.0000
```

matriz triangular superior U

```
3.0000   -1.0000   -2.0000
      0    4.6667    6.3333
      0      0   -3.5000
```

matriz de permutación P

```
0      0      1
0      1      0
1      0      0
```

solución: factorización LU

x(1)= 1.000000

x(2)= 2.000000

x(3)= 3.000000

- **Método interactivo de Gauss-Seidel**

Los métodos iterativos para obtener las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales no son aplicables a todos los casos en general.

En los casos en que el número de ecuaciones es grande y la matriz de coeficientes contiene muchos ceros, resulta más adecuado utilizar un método interactivo.

Consideremos el sistema

$$Ax = b$$

la condición suficiente para que el método interactivo converja a la solución es que la matriz de coeficientes A de orden NxN sea *diagonal estrictamente dominante*, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \quad \text{para todo } i \quad (62)$$

Partiendo de una aproximación inicial de la solución, el método de iteración de Gauss-Seidel permite calcular la solución en la iteración ( $k$ ) en función de la iteración ( $k - 1$ ) mediante la expresión

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad (63)$$

**EJERCICIO 7:**

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 &= -21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

por el método iterativo de Gauss-Seidel.

**RESULTADO:**

```
=====
método iteración Gauss Seidel

precisión en la solución= 1e-07

aproximación inicial: [ 0.  0.  0.]

  i    x1          x2          x3
  1    1.75000000    3.50000000    3.00000000
  2    1.87500000    3.93750000    2.96250000
  3    1.99375000    3.99218750    2.99906250
  4    1.99828125    3.99902344    2.99950781
  5    1.99987891    3.99987793    2.99997598
  6    1.99997549    3.99998474    2.99999325
  7    1.99999787    3.99999809    2.99999953
  8    1.99999964    3.99999976    2.99999990
  9    1.99999996    3.99999997    2.99999999
 10    1.99999999    4.00000000    3.00000000
=====
>>>
```