Ejercicios del tema y su valor:
1-bisección (1p), 2-regula falsi (1p), 3-Newton (1p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: a elegir

Resolución de ecuaciones no lineales.

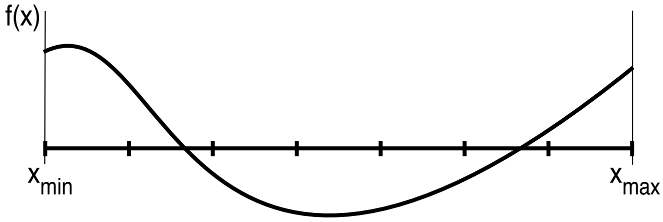
Encontrar las raíces reales de f(x)=0 en un intervalo (x_{min}, x_{max}) dado.

Localización de raíces

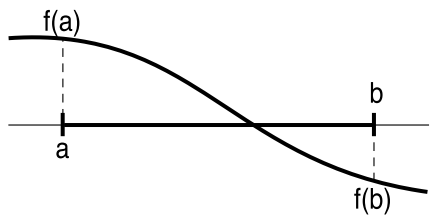
Muchos de los métodos que se utilizan para calcular las raíces de una ecuación f(x)=0, precisan de la localización previa de la raíz en un intervalo (a,b) que la contenga

Supongamos que desemos obtener las raíces de la función f(x)=0 en el intervalo $x_{min} \leq x \leq x_{max}$.

El procedimiento a seguir consiste en dividir el intervalo inicial (x_{min}, x_{max}) en un número n de intervalos más pequeños (figura 1a). A continuación se analiza cada uno de estos subintervalos (a, b), examinando el signo de la función en los extremos del mismo para determinar si la función $f(x)$ tiene una raíz en él (figura 1b)



(a)



(b)

Fig. 1

$$Si \begin{cases} signo\ f(a) \neq signo\ f(b) & \text{hay solución en el intervalo (a,b)} \\ signo\ f(a) = signo\ f(b) & \text{no hay solución en el intervalo (a,b)} \end{cases} \tag{1}$$

EJERCICIO 1:

Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, analizar la existencia de raíces en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$ (figura 2).

Dividir el intervalo inicial en 20 subintervalos y determinar en cuales de ellos se encuentran sus raíces.

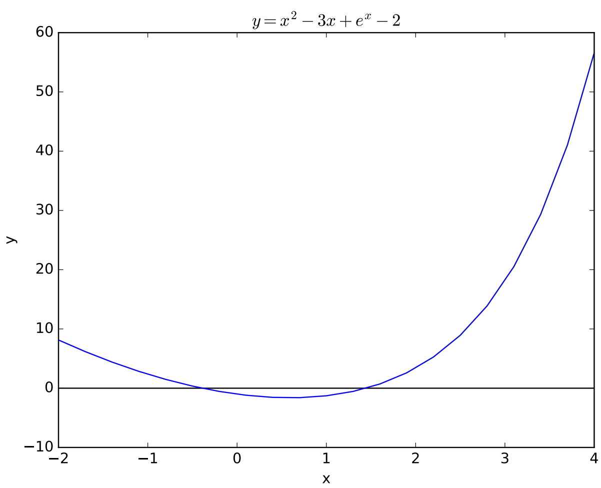


Fig. 2

RESULTADO:

$$\begin{cases} \text{primera raíz} & -0.5 \leq x \leq -0.2 \\ \text{segunda raíz} & 1.3 \leq x \leq 1.6 \end{cases}$$

Bisección.

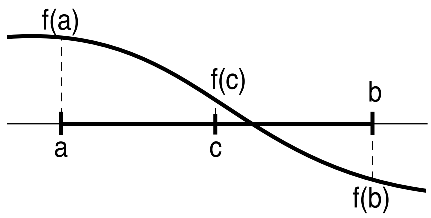


Fig. 3

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b).

Se obtiene el punto medio del intervalo

$$c = \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

y se calcula f(c). Si f(c)=0 (o f(c)$\leq$ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$Si\ el \begin{cases} signo\ f(c) = signo\ f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo (c,b)} \\ signo\ f(c) = signo\ f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo (a,c)} \end{cases}$$

a continuación se toma el nuevo intervalo y se vuelve a dividir a la mitad, procediendo de esta manera hasta alcanzar la solución con la precisión buscada.

EJERCICIO 2:

Calcular, por el método de la bisección, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

```
Método de la bisección
Soluciones en el intervalo (-2.000000,4.000000)
x1= -0.390274   f(x1)= 0.000007
x2= 1.446237   f(x2)= -0.000006
```

Régula falsi.

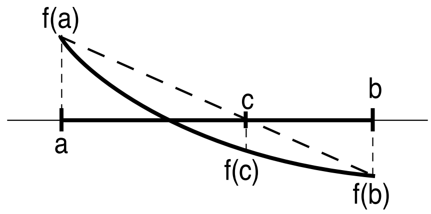


Fig. 4

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b).

La ecuación de la recta que une los puntos [a,f(a)] y [b,f(b)] es

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a) \tag{3}$$

dicha recta corta al eje f(x)=0 en el punto c, dado por

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \tag{4}$$

Si f(c)=0 (o f(c)$\leq$ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$Si\ el \begin{cases} signo\ f(c) = signo\ f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo (c,b)} \\ signo\ f(c) = signo\ f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo (a,c)} \end{cases}$$

se toma el nuevo intervalo y se repite el proceso hasta alcanzar la solución.

EJERCICIO 3:

Calcular, por el método de la régula falsi, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

```
Método de la régula falsi
Soluciones en el intervalo (-2.000000,4.000000)
x1= -0.390274   f(x1)= 0.000008
x2= 1.446237   f(x2)= -0.000008
```

Newton-Raphson.

La aplicación de este método presupone que la función f(x) tiene primera derivada, f'(x).

La figura 5 muestra el proceso a seguir. Se parte de una primera aproximación de la raíz x_1 (obtenida por cualquier método anterior). Para x_1 se calcula f(x_1) y f'(x_1). La recta tangente a la curva f(x) en el punto x_1 cruza al eje x en el punto x_2, que será la nueva aproximación de la raíz

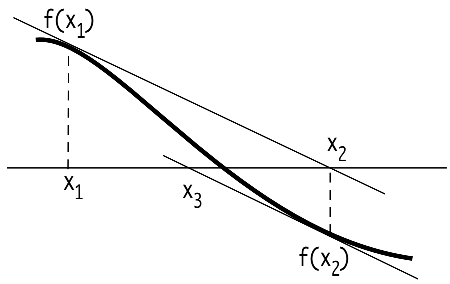


Fig. 5

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{5}$$

Análogamente se obtienen las aproximaciones sucesivas x_3, etc. Generalizando la expresión anterior, podemos escribir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{6}$$

La raíz buscada, x_{k+1}, será aquella para la que f(x_{k+1})=0 (o f(x_{k+1})$\leq$ precisión deseada).

EJERCICIO 4:

Calcular, por el método de Newton-Raphson, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

```
Método Newton-Rapson
Soluciones en el intervalo (-2.000000,4.000000)
x1= -0.390272   f(x1)= 0.000001
x2= 1.446239   f(x2)= 0.000000
```