

Ejercicios del tema y su valor:

1-Jacobi (1p)

Entrega: un ejercicio obligatorio: el nº 1**Autovalores y autovectores.**

Dada la matriz cuadrada \mathbf{A} de dimensión $n \times n$, nos planteamos la búsqueda de los escalares λ para los que exista un vector no nulo \mathbf{X} tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad (1)$$

Cuando esto ocurre, se dice que \mathbf{X} es un *autovector* correspondiente al *autovalor* λ y juntos forman un *autopar* (λ, \mathbf{X}) de \mathbf{A} ¹.

La matriz identidad \mathbf{I} puede usarse para expresar la ecuación (1) como $\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{X}$ que, a su vez puede escribirse en la forma de un sistema lineal homogéneo

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X} = 0 \quad (2)$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si, y sólo si, la matriz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ es singular, es decir

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3)$$

Este determinante puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

que al desarrollarlo, se forma un polinomio de grado n que se denomina *polinomio característico* de la matriz \mathbf{A}

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \quad (5)$$

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (no necesariamente distintas). Al sustituir cada una de las raíces λ en la ecuación (3), obtenemos un sistema de ecuaciones subdeterminado que tiene una solución no trivial \mathbf{X} .

EJEMPLO 1: Calcular los autovalores y autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

mediante su polinomio característico.

Empezamos por plantear el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

que al resolver, nos proporciona el polinomio característico

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0 \quad (8)$$

¹ En general, el escalar λ y las componentes del vector \mathbf{X} son números complejos. En lo que sigue trabajaremos con matrices \mathbf{A} reales y simétricas para las cuales tanto λ como las componentes de \mathbf{X} son números reales.

Las soluciones de (8) son los autovalores correspondientes: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

1. Autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$

De acuerdo la (2), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

y realizando el producto, resulta

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Como una las ecuaciones anteriores es combinación de las otras dos (la suma de la primera más dos veces la segunda nos da la tercera), el sistema se reduce a dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

Si tomamos arbitrariamente $x_1 = a$, resultan $x_2 = 2a$ y $x_3 = a$. Por tanto, al autovalor $\lambda_1 = 1$ le corresponde el autovector $V = a[1, 2, 1]^T$ o bien normalizado $V = [0.4082, 0.8165, 0.4082]^T$

2. Autovector correspondiente a $\lambda_2 = 3$

Tendremos en este caso

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

y realizando el producto, resulta

$$\begin{array}{rrcr} & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & & = & 0 \end{array}$$

que es equivalente a

$$\begin{array}{rrcr} & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

tomando $x_1 = b$, tenemos que $x_2 = -b$ y $x_3 = -b$. Entonces, para $\lambda_2 = 3$ el autovector es $V = b[1, 0, -1]^T$ y normalizado $V = [0.7071, 0, -0.7071]^T$

3. Autovector correspondiente a $\lambda_3 = 4$

Tendremos ahora que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

y operando

$$\begin{array}{rrrr} -x_1 & -x_2 & & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rrrr} -x_1 & -x_2 & & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 0 \end{array}$$

Y si $x_1 = c$, nos queda $x_2 = -c$ y $x_3 = c$. Al autovalor $\lambda_3 = 4$ le corresponde el autovector $V = c[1, -1, 1]^T$ o normalizado $V = [0.5774, -0.5774, 0.5774]^T$

Método de Jacobi para el cálculo de autovalores y autovectores

Este método permite calcular todas las parejas autovalor-autovector de una matriz simétrica real \mathbf{A} de dimensión $n \times n$.

Empezamos construyendo las matrices \mathbf{D} y \mathbf{V} , que inicialmente tienen los valores $\mathbf{D}_0 = \mathbf{A}$ y $\mathbf{V}_0 = \mathbf{I}$.

El método iterativo es el siguiente. En primer lugar hay que elegir la fila p y la columna q de manera que el elemento $D_{p,q}$, fuera de la diagonal principal, tenga el mayor valor absoluto. A continuación se calculan los parámetros siguientes

$$\theta = \frac{D_{q,q} - D_{p,p}}{2D_{p,q}} \quad (9)$$

$$t = \frac{\text{signo}(\theta)}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}} \quad (10)$$

siendo $\text{signo}(\theta) = 1$ cuando $\theta \geq 0$ y $\text{signo}(\theta) = -1$ cuando $\theta < 0$,

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad (11)$$

$$s = ct \quad (12)$$

Ahora construimos la matriz $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ y cambiamos los elementos $R_{p,p} = c$, $R_{p,q} = s$, $R_{q,p} = -s$ y $R_{q,q} = c$

$$R = \begin{array}{ccccccc} & & \begin{array}{c} \text{col } p \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \text{col } q \\ \downarrow \end{array} & & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{fila } p \\ \leftarrow \text{fila } q \end{array} \end{array} \quad (13)$$

y se calculan las matrices siguientes

$$D_{k+1} = R' D_k R \quad (14)$$

$$V_{k+1} = V_k R \quad (15)$$

y se repite el proceso iterativo. Cuando la solución converja (los elementos de \mathbf{D} como los de \mathbf{V} no varíen con la precisión deseada), la matriz diagonal \mathbf{D} contiene los autovalores, mientras que la matriz \mathbf{V} contiene, en forma de columnas, los correspondientes autovectores.

EJERCICIO 1:

Implementar un programa que calcule los autovalores y los autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mediante el método de Jacobi

RESULTADO:

Método de Jacobi

precisión: 1e-07

Autovalores

4.00000000	1.00000000	3.00000000
------------	------------	------------

Autovectores

0.57735027	0.40824829	-0.70710678
-0.57735027	0.81649658	0.00000000
0.57735027	0.40824829	0.70710678