Tema 4
Ecuación Difusión Multidimensional

Ecuación de Difusión 2D. Métodos explícitos e implícitos. Método ADI.

Referencias del Capítulo:

- Numerical Recipes. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling. Cambridge University Press (1988).
- Computational Techniques for Fluid Dynamics. C.A.J. Fletcher. Springer-Verlag (1991).

M4: Ecuación Difusión 2D.

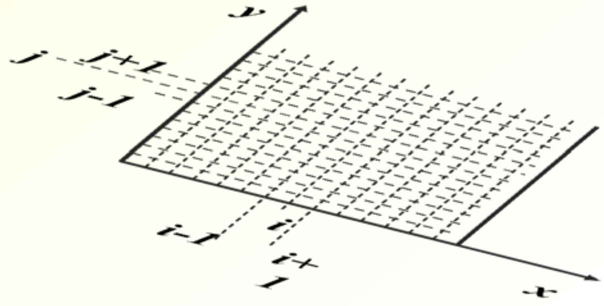
En dos dimensiones, la ecuación de difusión tiene la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

donde ahora T(x,y,t) es la variable a estudiar (p.e.: temperatura) que se difunde con una difusividad α_x en la dirección del eje OX y α_y en la dirección OY.

Condiciones de frontera (Dirichlet) :

$$T(x=0, y, t) = a(y, t)$$
$$T(x=L, y, t) = b(y, t)$$
$$T(x, y=0, t) = c(x, t)$$
$$T(x, y=L, t) = d(x, t)$$



Condiciones iniciales: $T(x, y, t=0) = T_o(x, y)$

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos Explícitos $\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

Esquema FTCS:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}$$

$$\Rightarrow T_i^{n+1} = T_i^{n} + \frac{\alpha_x \Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n}\right) + \frac{\alpha_y \Delta t}{\Delta y^2}\left(T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n}\right)$$

Error de consistencia: $E_{i,j}^{n} = O\left(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2\right)$

Condiciones de Estabilidad:

$$\frac{\alpha_x \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_y \Delta t}{\Delta y^2} \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s_x + s_y \le \frac{1}{2}$$

si $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ y $\Delta x = \Delta y$ $\Rightarrow$ $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{4}$

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos Implícitos

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Esquema Completamente Implícito:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\Rightarrow -s_x T_{i-1,j}^{n+1} + \left(1 + 2s_x + 2s_y\right) T_{i,j}^{n+1} - s_x T_{i+1,j}^{n+1} - s_y T_{i,j-1}^{n+1} - s_y T_{i,j+1}^{n+1} = T_{i,j}^{n}$$

$$j \in \left(1,\ldots,N\right)$$

$$i \in \left(1,\ldots,N\right)$$

Error de consistencia:

$$E_{i,j}^{n} = O\left(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2\right)$$

Condiciones de Estabilidad: incondicionalmente estable.

Problemas: las matrices son mucho más complicadas de construir y los algoritmos son mucho más lentos.

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos ADI

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\alpha_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

Método ADI (alternating direction implicit):

•Implícito en la dirección OX y explícito en OY

$$\frac{T^*_{i,j}-T^n_{i,j}}{\Delta t/2}=\alpha_x\frac{T^*_{i-1,j}-2T^*_{i,j}+T^*_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\alpha_y\frac{T^n_{i,j-1}-2T^n_{i,j}+T^n_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

•Explícito en la dirección OX e implícito en OY

$$\frac{T^{n+1}_{i,j}-T^*_{i,j}}{\Delta t}=\alpha_x\frac{T^*_{i-1,j}-2T^*_{i,j}+T^*_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\alpha_y\frac{T^{n+1}_{i,j-1}-2T^{n+1}_{i,j}+T^{n+1}_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Error de consistencia: $E^n_{i,j}=O\left(\Delta t^2,\Delta x^2,\Delta y^2\right)$

Condiciones de Estabilidad: incondicionalmente estable.

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos ADI

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$