Tema 3

Ecuación 1D de Convección.

Ecuación 1D convección. Disipación y Dispersión numéricas. Ecuación de Transporte. Métodos explícitos e implícitos.

Referencias del Capítulo:

- Numerical Recipes. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling. Cambridge University Press (1988).
- Computational Techniques for Fluid Dynamics. C.A.J. Fletcher. Springer-Verlag (1991).

M2: Ecuación 1D de Convección

Consideramos la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Donde u es la velocidad del flujo y T es una magnitud escalar. P.e. esta ecuación nos puede dar el transporte de energía debido a convección.

Para tener un problema bien planteado necesitamos aportar:

- Condiciones iniciales.
- Condiciones de frontera para todo *t*.

Este problema tiene solución exacta para u=cte:

$$T(x,t) = F(x - ut, 0) \quad \text{con la cond. inic.} \quad T(x,0) = F(x)$$

$$T(x_1, t_1) = T(x_1 - ut_1, 0)$$

Dada una condición inicial, esta ecuación la traslada en el tiempo a lo largo del eje x sin dispersarla (no existen términos de difusión).

M2: Ecuación 1D de Convección. Esquema FTCS

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x+\Delta x,t) - T(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = \frac{T_{i+1}^{n} - T_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u\frac{T_{i+1}^{n} - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

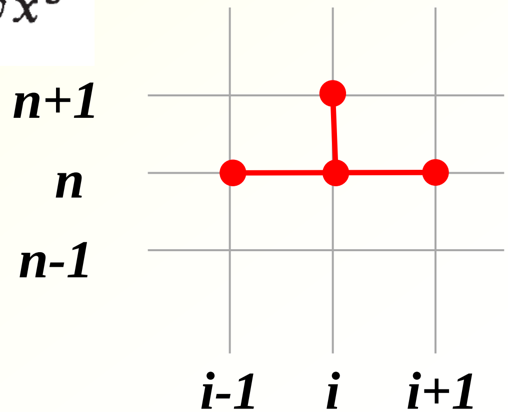
$$\Rightarrow \quad T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{1}{2}C\left(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n\right) \quad \text{con} \quad C = u\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{nº Courant}$$

Consistencia:

$$E_i^n = Cu(\Delta x/2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1+2C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

Estabilidad: Factor amplificación: $G = 1 - iC\sin\theta$

incondicionalmente **in**estable



M2: Ec. 1D de Convección. Esquema Upwind

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

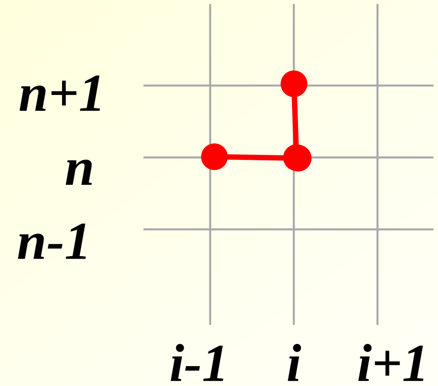
$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T(x,t)-T(x-\Delta x,t)}{\Delta x}=\frac{T_i^n-T_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}+u\frac{T_i^n-T_{i-1}^n}{\Delta x}=0$$

$$\Rightarrow \quad T_i^{n+1}=T_i^n-C\left(T_i^n-T_{i-1}^n\right)$$

$$T_i^{n+1}=(1\text{-}C)T_i^n+C\,T_{i-1}^n \quad \text{con} \quad C=u\frac{\Delta t}{\Delta x}=\text{nº Courant}$$



Consistencia: $$E_i^n=-u\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(1-C)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1-3C+2C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

Estabilidad: Factor amplificación: $G=1-C(1-\cos\theta)-iC\sin\theta$

$$|G|\le 1 \;\Rightarrow\; C=u\frac{\Delta t}{\Delta x}\le 1$$ condición Courant-Friedrichs-Lewy CFL

Una partícula en un flujo no puede desplazarse mas de Δx en un Δt

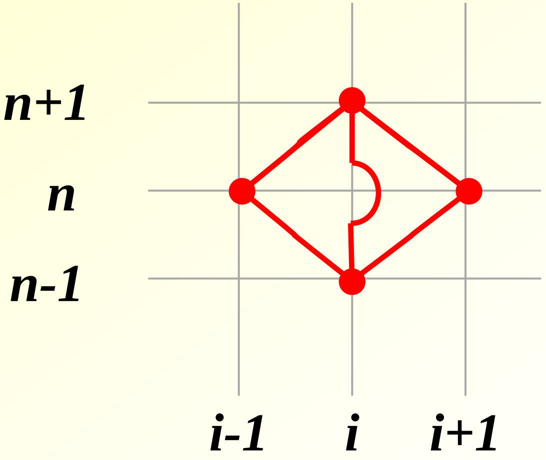
M2: Ec. 1D de Convección. DuFort-Frankel

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\left(\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_i^{n+1} = T_i^{n-1} - C\left(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n\right)$$

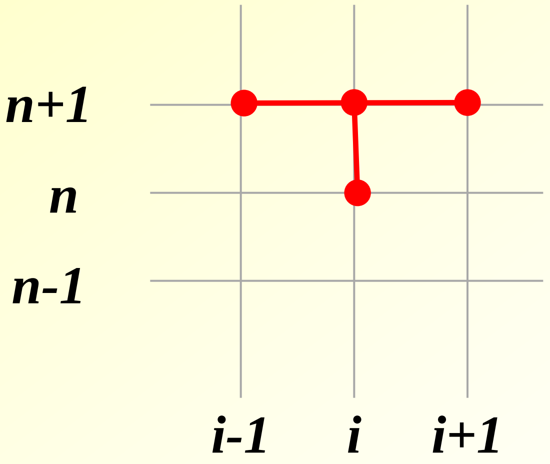
$$\text{con} \quad C = u\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{n}^{\text{o}}\ \text{Courant}$$



M2: Ec. 1D de Convec. Completamente Implícito

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u\,\frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$



$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}C\,T_{i-1}^{n+1} + T_i^{n+1} + \frac{1}{2}C\,T_{i+1}^{n+1} = T_i^n$$

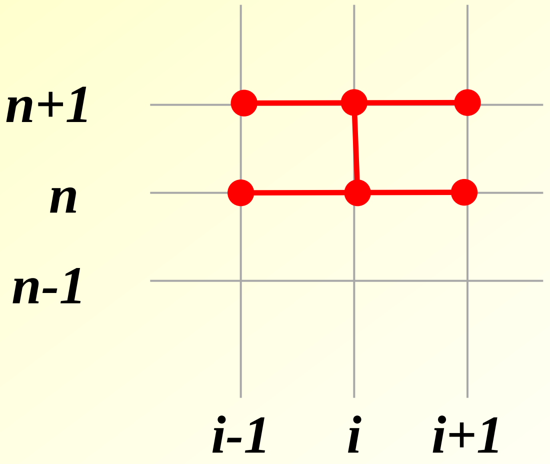
Consistencia:

Estabilidad: incondicionalmente estable

M2: Ec. 1D de Convección. Crank-Nicolson

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u\frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) = 0$$



$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}C\,T_{i-1}^{n+1} + T_i^{n+1} + \frac{1}{4}C\,T_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{4}C\,T_{i-1}^n + T_i^n - \frac{1}{4}C\,T_{i+1}^n$$

Consistencia: $E_i^n = O\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$

Estabilidad: incondicionalmente estable

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

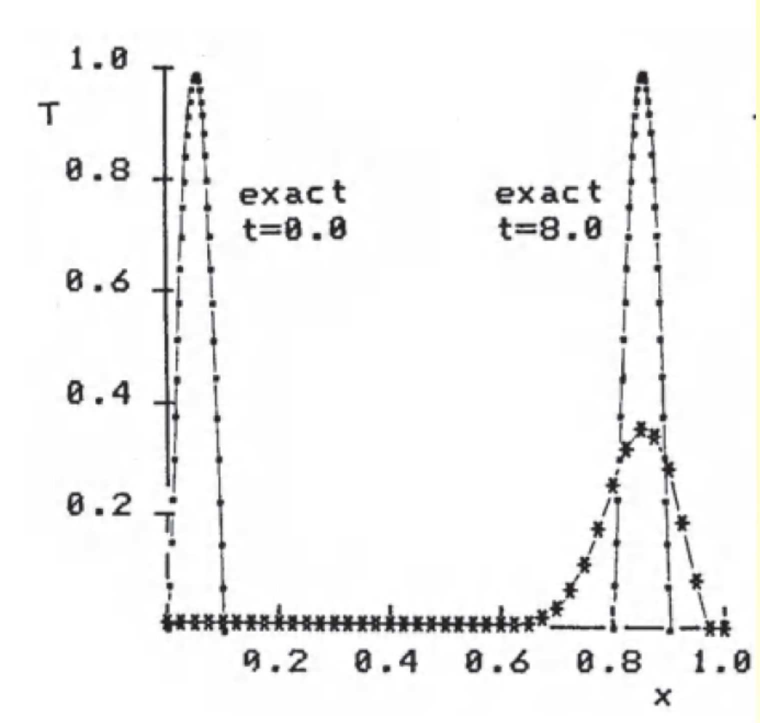


Fig. 9.2. Upwind solution for the convection equation with $C = 0.8$

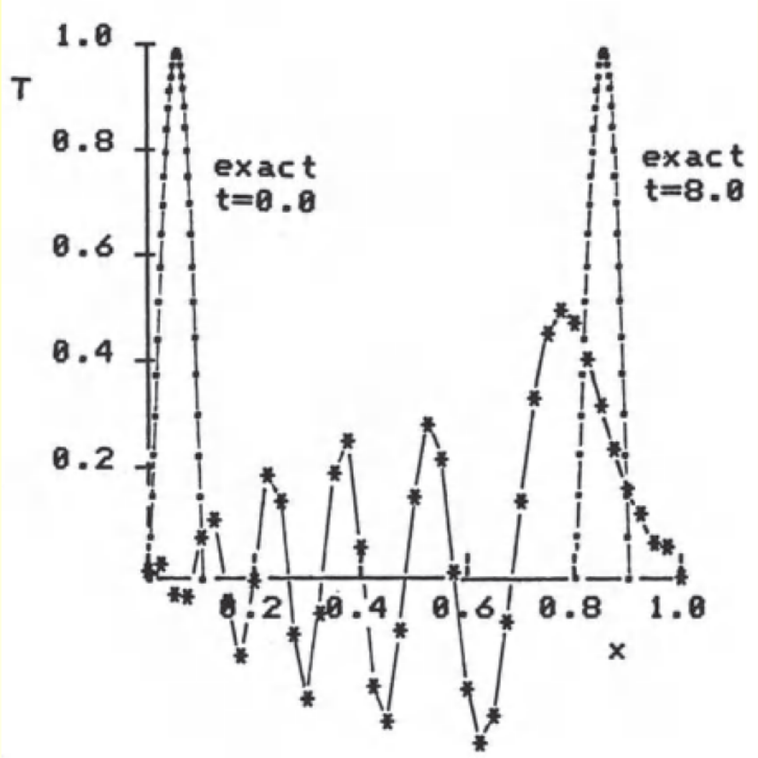


Fig. 9.4. Crank-Nicolson finite difference solution for the convection equation with $C = 0.8$

Soluciones obtenidas con diferentes métodos partiendo de una condición inicial de medio seno. Disipación y Dispersión

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

La solución de este tipo de ecuaciones son ondas que se propagan:

•sin pérdida de amplitud: disipación

•velocidad de propagación constante: dispersión

La propagación de una onda numérica que está sujeta a ambos fenómenos se puede describir como:

$$T = Real\left\{T_{amp} e^{-p(m)t}\ e^{i\,m(x-q(m)t)}\right\}$$

Con

•$T_{amp} \geq 0 \in \Re^{+}$

• m = nº onda, λ = longitud de onda = 2π/m

• p(m) = controla la velocidad de decaimiento de la amplitud de la onda

• q(m) = velocidad de propagación de cada onda, distinta para cada m

La solución exacta vendría dada por:

• p(m) = 0

• q(m) = u para todo m

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

Consideremos las siguientes dos ecuaciones:

$$(I) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ecuación de transporte}$$

$$(II) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 0 \quad \text{ecuación Korteweg de Vries}$$

Sustituimos la solución $T = Real\left\{T_{amp} e^{-p(m)t}\ e^{i\,m(x - q(m)t)}\right\}$

en la ecuación de transporte (I)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -p(m)T - q(m)\,i\,m\,T \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= i\,m\,T \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -m^2 T \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$-p(m)T - q(m)\,i\,m\,T + u\,i\,m\,T + \alpha\,m^2 T = 0$$

$$m^2\,\alpha - p(m) + i\left(u\,m - q(m)\,m\right) = 0$$

$$\Rightarrow p(m) = m^2\,\alpha \quad \text{(parte real)}$$

$$q(m) = u \quad \text{(parte imaginaria)}$$

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$p(m) = m^2\,\alpha \qquad \text{(parte real)}$$

$$q(m) = u \qquad \text{(parte imaginaria)}$$

Disipación

Numérica

- La amplitud se atenúa debido al término difusivo de la ecuación de transporte.
- La velocidad de la onda no se ve afectada.
- Los números de onda (m) grandes (e.d. longitudes de onda pequeñas, $\lambda=2\pi/m$) se atenúan mucho antes.

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Sustituimos ahora la solución $\quad T = Real\left\{T_{amp} e^{-p(m)t}\, e^{i\,m(x-q(m)t)}\right\}$

en la ecuación Korteweg de Vries (II)

$$(II) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= -p(m)T - q(m)\,i\,m\,T \\
\frac{\partial T}{\partial x} &= i\,m\,T \\
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -m^2 T \\
\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} &= -i\,m^3\,T
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$-p(m)T - q(m)\,i\,m\,T + u\,i\,m\,T - \beta\,i\,m^3\,T = 0$$

$$-\ p(m)\ + i\left(u\,m - q(m)\,m - \beta\,m^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow p(m) = 0 \qquad \text{(parte real)}$$

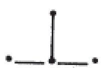
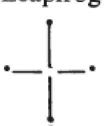
$$q(m) = u - \beta\,m^2 \qquad \text{(parte imaginaria)}$$

- La amplitud se mantiene constante.
- La velocidad depende de la longitud de onda ($\lambda=2\pi/m$) ⇒ **Dispersión Numérica**
- Las ondas compuestas por varias λ, dispersan y se separan en λ diferentes.

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Table 9.1. Algebraic (discretised) schemes for the convection equation $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}=0$

Scheme	Algebraic form	Truncation error[a] (E) (leading terms)	Amplification factor G ($\theta=m\pi\Delta x$)	Stability restrictions	Remarks
FTCS 	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t}+uL_x T_j^n=0$	$Cu(\Delta x/2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $+u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1+2C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$1-iC\sin\theta$	unstable	$C=u\frac{\Delta t}{\Delta x}$ $L_x=\frac{1}{2\Delta x}\{-1, 0, 1\}$
Upwind 	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t}+u\frac{(T_j^n-T_{j-1}^n)}{\Delta x}=0$	$-u\left(\frac{\Delta x}{2}\right)(1-C)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ $+u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1-3C+2C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$1-C(1-\cos\theta)-iC\sin\theta$	$C\leq 1$	$\Delta T_j^{n+1}=T_j^{n+1}-T_j^n$
Leapfrog 	$\frac{T_j^{n+1}-T_j^{n-1}}{2\Delta t}+uL_x T_j^n=0$	$u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1-C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$-iC\sin\theta+(1-C^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$	$C\leq 1$	

Disipación Numérica

M2: Ec. 1D Convección. Disipación y Dispersión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Table 9.1. (cont.)

Scheme	Algebraic form	Truncation error[a] (E) (leading terms)	Amplification factor G ($\theta = m\pi\Delta x$)	Stabiity restrictions	Remarks
Lax-Wendroff	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x T_j^n - 0.5uC\Delta x L_{xx} T_j^n = 0$	$u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1-C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + uC\left(\frac{\Delta x^3}{8}\right)(1-C^2)\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$	$1 - iC\sin\theta - 2C^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$C \leqq 1$	$L_{xx} = \left\{\frac{1}{\Delta x^2}, -\frac{2}{\Delta x^2}, \frac{1}{\Delta x^2}\right\}$
Crank-Nicolson	$\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x\left(\frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2}\right) = 0$	$u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1+0.5C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{(1-0.5iC\sin\theta)}{(1+0.5iC\sin\theta)}$	None	
Three-level fully implicit	$\frac{3}{2}\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{2}\frac{\Delta T_j^n}{\Delta t} + uL_x T_j^{n+1} = 0$	$u\left(\frac{\Delta x^2}{6}\right)(1+2C^2)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{1 \pm \frac{1}{3}i(3+i8C\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}{2\left(1+i\frac{2C}{3}\sin\theta\right)}$	None	
Linear F.E.M./ Crank-Nicolson	$M_x\frac{\Delta T_j^{n+1}}{\Delta t} + uL_x\left(\frac{T_j^n + T_j^{n+1}}{2}\right) = 0$	$C^2u\left(\frac{\Delta x^2}{12}\right)\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$	$\frac{(2+\cos\theta - 1.5iC\sin\theta)}{(2+\cos\theta + 1.5iC\sin\theta)}$	None	$M_x = \left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right\}$

[a] The truncation error (E) has been expressed in terms of Δx and x-derivatives as in the modified equation approach (Sect. 9.2.2). Thus the algebraic scheme is equivalent to $\partial T/\partial t + u\partial T/\partial x + E(T) = 0$.

Dispersión Numérica