

# Отчет о выполнении работы №1.2.5.

Воейко Андрей Александрович, Б01-109

Долгопрудный, 2022

## 1 Аннотация

В работе исследуется вынужденная прецессия гироскопа, устанавливается зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа, определяется скорость вращения ротора гироскопа по скорости прецессии оси гироскопа.

## 2 Теоретические сведения

Гироскопом называется вращающееся тело, момент импульса вращения которого по одной из осей значительно больше остальных. В таком случае при вращении вектора момента импульса  $L_\omega$  относительно главной оси со скоростью  $\Omega$  справедливо уравнение 1.

$$\frac{d\vec{L}_\omega}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_\omega. \quad (1)$$

В силу того, что  $\frac{d\vec{L}_\omega}{dt} = \vec{M}$ , где  $\vec{M}$  – суммарный момент сил, действующих на тело, получаем уравнение 2.

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}_\omega. \quad (2)$$

Такое медленное вращение оси гироскопа называется регулярной прецессией.

Благодаря этой формуле можно вычислить модуль и направления вектора момента силы, необходимого для прецессии гироскопа с определенной скоростью или находить угловую скорость регулярной прецессии по моменту импульса вращения гироскопа и суммарному моменту действующих на него сил.

В частности, если центр масс гироскопа массой  $m_\Gamma$ , ось которого наклонена на угол  $\alpha$  от вертикали, не совпадает с точкой подмассаа, а находится от нее на расстоянии  $l_\Pi$ , модуль угловой скорости регулярной прецессии можно найти по формуле 3.

$$\Omega = \frac{M}{L_\omega} = \frac{m_\Gamma g l_\Pi \sin \alpha}{I \omega_\Gamma \sin \alpha} = \frac{m_\Gamma g l_\Pi}{I \omega_\Gamma}, \quad (3)$$

где  $I$  – момент инерции гироскопа относительно оси вращения, а  $\omega_\Gamma$  – скорость углового вращения гироскопа.

Для изучения регулярной прецессии используются уравновешенные гироскопы с дополнительными грузами. В таком случае скорость прецессии определяется по формуле 4.

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega_\Gamma}, \quad (4)$$

Где  $m$  – масса груза, а  $l$  – расстояние от центра масс до груза. В данной работе исследуется как раз такой гироскоп. Момент инерции гироскопа определяется по периоду колебаний крутильного маятника с идентичным гироскопом в качестве груза. Период колебаний крутильного маятника зависит от момента инерции тела согласно формуле 5.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}, \quad (5)$$

Где  $T$  – период колебаний, а  $f$  – модуль кручения проволоки крутильного маятника.

Чтобы избежать погрешности при использовании модуля кручения проволоки, используется цилиндр с известными массой и размерами. Таким образом, момент инерции гироскопа определяется по формуле 6.

$$I_{\Gamma} = I_{\text{ц}} \frac{T_{\Gamma}^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (6)$$

где  $I_{\Gamma}$  – момент инерции гироскопа,  $I_{\text{ц}}$  – момент инерции цилиндра,  $T_{\Gamma}$  – период колебаний гироскопа, а  $T_{\text{ц}}$  – период колебаний цилиндра.

Для измерения частоты вращения гироскопа используется осциллограф, подключенный к обмотке, в которой вращающийся и слегка намагниченный (как любой ферромагнетик) гироскоп наводит периодически изменяющееся с частотой его вращения индуктивную ЭДС.

### 3 Оборудование

Гироскоп, идентичный гироскопу ротор, крутильный маятник, секундомер, осциллограф, набор грузов, цилиндр, весы, штангенциркуль, линейка, генератор колебаний.

Погрешности:

- Секундомер – инструментальная погрешность секундомера перекрывается погрешностью реакции человека –  $\Delta t = \pm 0,3$  с на включение и выключение.
- Весы – инструментальная погрешность составляет  $\pm 0,1$  г, что значительно меньше интересующего нас порядка – десятки грамм, поэтому для учета погрешностей будет использоваться погрешность округления –  $\Delta m = \pm 10$  г.
- Генератор колебаний – крайне высокоточный, но методика измерений при помощи осциллографа позволяет оценивать частоту колебаний гироскопа с точностью не более чем  $\Delta \nu = \pm 1$  Гц.

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Измерения

#### 4.1.1 Длина рычага

Длина рычага составляет  $l_{\text{ц}} = 119$  мм.

#### 4.1.2 Первая серия измерений

Проведем серию измерений периода регулярной прецессии для одного из грузиков и занесем результаты измерений в таблицу 1.

Масса грузика –  $m_1 = 180$  г.

№	Количество оборотов $n$	Время измерения $t$ , с	Период регулярной прецессии $T$ , с
1	2	$159,4 \pm 0,6$	$79,8 \pm 0,3$
2	2	$161,2 \pm 0,6$	$80,7 \pm 0,3$
3	2	$160,7 \pm 0,6$	$80,4 \pm 0,3$
4	2	$159,7 \pm 0,6$	$79,9 \pm 0,3$
5	2	$160,1 \pm 0,6$	$80,1 \pm 0,3$

Таблица 1: Время и количество оборотов в первой серии измерений.

Средний период прецессии составил  $\overline{T_1} = 80,2$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_1}} = 0,2$  с.

Таким образом, период прецессии составил  $T_1 = 80,2 \pm 0,2$  с.

Угловая скорость прецессии составляет  $\Omega_1 = 0,0783 \pm 0,002 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

#### 4.1.3 Вторая серия измерений

Повторим измерения с другим грузиком и занесем результаты в таблицу 2.

Масса грузика –  $m_2 = 219$  г.

№	Количество оборотов $n$	Время измерения $t$ , с	Период регулярной прецессии $T$ , с
1	2	$132,0 \pm 0,6$	$66,0 \pm 0,3$
2	2	$130,4 \pm 0,6$	$65,2 \pm 0,3$
3	2	$130,8 \pm 0,6$	$65,4 \pm 0,3$
4	2	$133,7 \pm 0,6$	$66,9 \pm 0,3$
5	2	$131,7 \pm 0,6$	$65,7 \pm 0,3$

Таблица 2: Время и количество оборотов во второй серии измерений.

Средний период прецессии составил  $\overline{T_2} = 65,8$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_2}} = 0,3$  с.

Таким образом, период прецессии составил  $T_2 = 65,8 \pm 0,3$  с.  
Угловая скорость прецессии составляет  $\Omega_2 = 0,0955 \pm 0,004 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

#### 4.1.4 Третья серия измерений

Повторим измерения с третьим грузиком и занесем результаты в таблицу 3.

Масса грузика –  $m_3 = 273$  г.

№	Количество оборотов $n$	Время измерения $t$ , с	Период регулярной прецессии $T$ , с
1	2	$104,5 \pm 0,6$	$52,3 \pm 0,3$
2	2	$106,0 \pm 0,6$	$53,0 \pm 0,3$
3	2	$103,7 \pm 0,6$	$51,8 \pm 0,3$
4	2	$104,7 \pm 0,6$	$52,3 \pm 0,3$
5	2	$104,0 \pm 0,6$	$52,0 \pm 0,3$

Таблица 3: Время и количество оборотов в третьей серии измерений.

Средний период прецессии составил  $\overline{T_3} = 52,3$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_3}} = 0,2$  с.

Таким образом, период прецессии составил  $T_3 = 52,3 \pm 0,2$  с.

Угловая скорость прецессии составляет  $\Omega_3 = 0,120 \pm 0,005 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

#### 4.1.5 Четвертая серия измерений

Повторим измерения с четвертым грузиком и занесем результаты в таблицу 4.

Масса грузика –  $m_4 = 116$  г.

№	Количество оборотов $n$	Период регулярной прецессии $T$ , с
1	1	$120,4 \pm 0,6$
2	1	$122,1 \pm 0,6$
3	1	$122,0 \pm 0,6$
4	1	$120,0 \pm 0,6$
5	1	$121,8 \pm 0,6$

Таблица 4: Время и количество оборотов в четвертой серии измерений.

Средний период прецессии составил  $\overline{T_4} = 121,3$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_4}} = 0,4$  с.

Таким образом, период прецессии составил  $T_4 = 121,3 \pm 0,4$  с.

Угловая скорость прецессии составляет  $\Omega_4 = 0,0518 \pm 0,003 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

#### 4.1.6 Пятая серия измерений

Повторим измерения с четвертым грузиком и занесем результаты в таблицу 4.

Масса грузика –  $m_5 = 142$  г.

№	Количество оборотов $n$	Период регулярной прецессии $T$ , с
1	1	$96,9 \pm 0,6$
2	1	$95,8 \pm 0,6$
3	1	$96,6 \pm 0,6$
4	1	$96,2 \pm 0,6$
5	1	$96,4 \pm 0,6$

Таблица 5: Время и количество оборотов в пятой серии измерений.

Средний период прецессии составил  $\overline{T_5} = 96,2$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_5}} = 0,2$  с.

Таким образом, период прецессии составил  $T_5 = 96,2 \pm 0,2$  с.

Угловая скорость прецессии составляет  $\Omega_5 = 0,0653 \pm 0,001 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

#### 4.1.7 Измерение момента инерции

Масса цилиндра –  $m_{\text{ц}} = 1,62 \pm 0,01$  кг.

Диаметр цилиндра –  $d_{\text{ц}} = 79,3 \pm 0,1$  мм.

Таким образом, момент инерции цилиндра:

$$I_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ц}}(d/2)^2}{2} = \frac{m_{\text{ц}}d^2}{8} = 1,27 \cdot 10^{-3} \pm 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Проведем измерение периода колебаний этого цилиндра на крутильных весах. Результат запишем в таблицу 6.

№	Время $t$ , с	Количество колебаний $n$	Период колебаний цилиндра $T_{\text{ц}}$ , с
1	$88,4 \pm 0,6$	22	$4,02 \pm 0,03$
2	$87,9 \pm 0,6$	22	$3,99 \pm 0,03$
3	$89,0 \pm 0,6$	22	$4,05 \pm 0,03$
3	$88,5 \pm 0,6$	22	$4,02 \pm 0,03$
5	$88,8 \pm 0,6$	22	$4,04 \pm 0,03$

Таблица 6: Время и количество колебаний цилиндра на крутильном маятнике.

Средний период колебаний цилиндра составил  $\overline{T_{\text{ц}}} = 4,02$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_{\text{ц}}}} = 0,01$  с.

Таким образом, период колебаний цилиндра составил  $T_{\text{ц}} = 70,3 \pm 0,2$  с.

Поведем те же измерения для ротора гироскопа, записав результаты измерений в таблицу 8.

№	Время $t$ , с	Количество колебаний $n$	Период колебаний цилиндра $T_{\text{ц}}$ , с
1	$80,7 \pm 0,6$	25	$3,23 \pm 0,02$
2	$80,9 \pm 0,6$	25	$3,24 \pm 0,02$
3	$81,3 \pm 0,6$	25	$3,25 \pm 0,02$
3	$80,5 \pm 0,6$	25	$3,22 \pm 0,02$
5	$79,8 \pm 0,6$	25	$3,19 \pm 0,02$

Таблица 7: Время и количество колебаний ротор на крутильном маятнике.

Средний период колебаний ротора составил  $\overline{T_{\Gamma}} = 3,23$  с.

Стандартная ошибка среднего –  $\sigma_{\overline{T_{\Gamma}}} = 0,01$  с.

Таким образом, период колебаний цилиндра составил  $T_{\Gamma} = 3,23 \pm 0,01$  с.

Момент инерции составляет, согласно формуле 6, составляет

$$I_{\Gamma} = 1,27 \cdot 10^{-3} \frac{3,23^2}{4,02^2} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Погрешность вычислим по формуле:

$$\Delta I_{\Gamma} = \sqrt{\left(\frac{T_{\Gamma}^2}{T_{\text{ц}}^2}\right)^2 \cdot (\Delta I_{\text{ц}})^2 + \left(I_{\text{ц}} \frac{2T_{\Gamma}}{T_{\text{ц}}^2}\right)^2 \cdot \sigma_{T_{\Gamma}}^2 + \left(-I_{\text{ц}} \frac{2T_{\Gamma}^2}{T_{\text{ц}}^3}\right)^2 \cdot \sigma_{T_{\text{ц}}}^2}.$$

Подставляя значения, получаем:

$$\Delta I_{\Gamma} = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом, момент инерции –  $I = 1,05 \cdot 10^{-3} \pm 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

#### 4.1.8 Частота вращения ротора

Выставим на генераторе частоты частоту генератора – 400 Гц. Поскольку двигатель, вращающий ротор, асинхронный, частота вращения ротора должна быть меньше. Наша задача –, снижая частоту, добиться статичного эллипсоида на экране осциллографа сразу после отключения питания двигателя.

Частота вращения ротора по осциллографу –  $\nu = 392 \pm 1$  Гц.

Угловая частота:

$$\omega = 2\pi\nu = 2463 \pm 6 \text{ Гц} = 2,46 \cdot 10^3 \pm 0,01 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Момент импульса гироскопа составляет  $L_{\omega} = I\omega = 2,58 \pm 0,03 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

## 4.2 Обработка данных

### 4.2.1 Оценка момента силы трения

Поскольку эксперименты по измерению периода регулярной прецессии проводились с поднятием оси на  $5-6^\circ$  и до принятия осью горизонтального положения, для оценки воспользуемся результатами первой серии измерений. Там ось опустилась на  $5^\circ$  за 112с. Таким образом, угловая скорость прецессии в следствие действия сил трения составляет  $\Omega_{\text{тр}} = \sim 0,04 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Тогда момент сил трения, согласно формуле 2,

$$M_{\text{тр}} = \Omega_{\text{тр}} \times L_{\omega} = \sim 0,10 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

### 4.2.2 Проверка формулы 2

Вычислим момент веса грузика в каждой серии измерений периода колебаний по формуле  $M_{\text{гр}} = m_{\text{гр}} g l_{\text{ц}}$ . При помощи нее, а также средней угловой скорости гироскопа при помощи формулы 3 вычислим расчетную угловую скорость прецессии  $\Omega_{\text{рассч}}$ , и сравним ее с полученным в ходе эксперимента значением.

№	Момент веса груза $M_{\text{гр}}, \text{ Н} \cdot \text{м}$	Расчетная угловая скорость прецессии $\Omega_{\text{рассч}}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Найденная угловая скорость прецессии $\Omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$
1	$0,210 \pm 0,001$	$0,0813 \pm 0,0013$	$0,0783 \pm 0,002$
2	$0,256 \pm 0,001$	$0,0992 \pm 0,0015$	$0,0955 \pm 0,004$
3	$0,319 \pm 0,001$	$0,124 \pm 0,002$	$0,120 \pm 0,005$
3	$0,135 \pm 0,001$	$0,0523 \pm 0,0010$	$0,518 \pm 0,003$
5	$0,166 \pm 0,001$	$0,0643 \pm 0,0011$	$0,0653 \pm 0,001$

Таблица 8: Время и количество колебаний ротор на крутильном маятнике.

## 5 Выводы

В ходе работы были найдены и вычислены угловые скорости регулярной прецессии гироскопа.

С одной стороны, найденные угловые скорости прецессии вследствие действия веса грузиков довольно точно соответствуют рассчитанным (расхождение составляет 3,69% для первой серии измерений, 3,73% – для второй, 3,23% – для третьей, 0,96% – для четвертой и 1,56% – для пятой), что свидетельствует о соответствии формулы 2 действительности. С другой стороны, только в ходе третьих измерений окрестности



погрешностей вычисления найденных величин пересекаются, что свидетельствует об ошибке в измерении данных. Скорее всего, ошибка систематически происходила на этапе измерения периода прецессии, так как во всех случаях эта ошибка разная и в разную сторону.