

Отчет о выполнении работы №1.2.4.

Воейко Андрей Александрович, Б01-109

Долгопрудный, 2021

1 Аннотация

В работе измеряются периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела с целью проверить теоретическую зависимость между периодами колебаний тела относительно нескольких осей, определить моменты инерции относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции.

2 Теоретические сведения

Тензор инерции твердого тела – симметричная матрица, полностью определяемая шестью элементами. Из этого следует, что эту матрицу можно привести к диагональному виду. Диагональные элементы называются главными. Геометрическим образом тензора называют эллипсоид, описываемый формулой 1, так называемый эллипсоид энергии.

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (1)$$

Координатные оси Ox , Oy , Oz совпадают с главными осями тела. Если начало координат O совпадает с центром масс, то эллипсоид называют центральным. Сам эллипсоид же позволяет определить момент инерции относительно любой оси. Для этого проводится радиус-вектор из центра координат до пересечения с эллипсоидом вдоль этой оси. Длина r определяет момент инерции:

$$I = \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, представляющее из себя рамку, закрепленную между потолком и столом двумя нитями, в которой может зажиматься груз. Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением 3.

$$(I + I_p) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -f \phi, \quad (3)$$

Здесь I – момент инерции тела, I_p – момент инерции рамки, ϕ – угол поворота рамки, t – время, f – модуль кручения проволоки.

Теоретически определим по формуле 4.

$$T = 2\pi \frac{I + I_p}{f} \quad (4)$$

Теперь предположим, что наше тело – прямоугольный параллелепипед.

Согласно общей формуле 5,

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma, \quad (5)$$

где I – момент инерции относительно произвольной оси, α , β и γ – углы между этой осью и осями Ox , Oy , Oz соответственно.

Рассмотрим момент инерции вдоль DD' . В таком случае это уравнение имеет такой вид:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2}, \quad (6)$$

где I_d – момент инерции относительно оси DD' , длины a , b , c и d – обозначенные на рисунке AA' , BB' , CC' и DD' соответственно. Поскольку $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, а период колебаний $T \sim \sqrt{I}$, формула 6 принимает вид формулы 7.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2. \quad (7)$$

Проверив формулу 7, мы также проверим формулу 6. Аналогично, для осей EE' , MM' , PP' , уравнения 8, 9 и 10 соответственно.

$$(b^2 + c^2)T_e^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2. \quad (8)$$

$$(a^2 + c^2)T_e^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2. \quad (9)$$

$$(a^2 + b^2)T_e^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2. \quad (10)$$

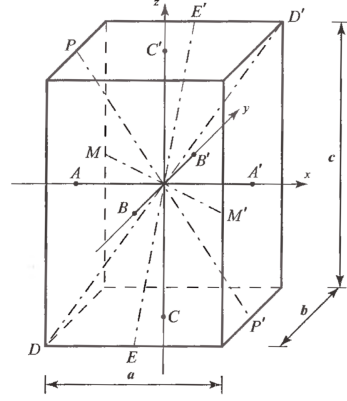


Рис. 1: Оси вращения прямо-угольного параллелепипеда

3 Оборудование и экспериментальная установка

В работе используются:

- Установка для получения крутильных колебаний.
- Исследуемые твердые тела: куб и параллелепипед.
- Секундомер: $\Delta_c = \pm 0,3$ с (реакция человека).
- Штангенциркуль: $\Delta_{шт} = \pm 0,01$ см.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Результаты измерений

4.1.1 Результаты измерения геометрических размеров тел

Измерим геометрические размеры тел. Результаты представим в таблице 1.

Тело	a , см	b , см	c , см
Куб	$9,19 \pm 0,01$	$9,20 \pm 0,01$	$9,20 \pm 0,01$
Параллелепипед	$9,96 \pm 0,01$	$4,95 \pm 0,01$	$15,01 \pm 0,01$

Таблица 1: Результаты измерений размеров тел.

4.1.2 Результаты измерения периода собственных колебаний рамки

Измерим период собственных колебаний рамки. Результаты занесем в таблицу 2.

№	Время колебаний t , с	Количество колебаний N	Период колебаний T_p , с
1	$44,8 \pm 0,6$	10	$4,48 \pm 0,06$
2	$45,2 \pm 0,6$	10	$4,52 \pm 0,06$
3	$44,9 \pm 0,6$	10	$4,49 \pm 0,06$

Таблица 2: Период колебаний пустой рамки

Средний период колебаний составил $\overline{T_p} = 4,50$ с.

Стандартная ошибка среднего – $\sigma_{\overline{T_p}} = 0,01$ с.

Таким образом период составил $T_p = 4,50 \pm 0,01$ с.

4.1.3 Результаты измерения периодов колебаний рамки с кубом

Проведем измерения периодов колебаний куба относительно всех осей. Результаты представлены в таблице 3.

Погрешность вычисления среднего периода колебаний вычисляется, как стандартная ошибка среднего.

4.1.4 Результаты измерения периодов колебаний рамки с параллелепипедом

Проведем измерения периодов колебаний параллелепипеда относительно всех осей. Результаты представлены в таблице 4.

Погрешность вычисления среднего периода колебаний вычисляется, как стандартная ошибка среднего.

4.2 Обработка данных

4.2.1 Сечения эллипсоидов инерции главными плоскостями

Построим сечения эллипсоидов инерции с основными плоскостями. Для этого необходимо вычислить величину $\frac{10}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}$ для каждой из осей. Ре-

Ось	$10T_1, \text{ с}$	$T_1, \text{ с}$	$10T_2, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$	$10T_3, \text{ с}$	$T_3, \text{ с}$	$\overline{T_K}$
AA'	54,2	5,42	53,2	53,2	53,6	5,36	5,37
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,03$
BB'	52,9	5,29	53,4	5,34	54,3	5,43	5,35
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,04$
CC'	53,8	5,38	53,2	5,32	54,1	5,41	5,37
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,03$
DD'	53,6	5,36	53,7	5,37	54,0	5,40	5,38
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,01$
EE'	53,5	5,35	54,3	5,43	53,2	5,32	5,36
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,03$
PP'	53,2	5,32	54,0	5,40	53,6	5,36	5,36
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$
MM'	53,2	5,32	53,7	5,37	53,4	5,34	5,34
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,01$

Таблица 3: Период колебаний рамки с кубом.

Ось	$10T_1, \text{ с}$	$T_1, \text{ с}$	$10T_2, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$	$10T_3, \text{ с}$	$T_3, \text{ с}$	$\overline{T_K}$
AA'	66,0	6,60	66,1	6,61	65,6	6,56	6,59
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$
BB'	70,7	7,07	71,0	7,10	70,6	7,06	7,08
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,01$
CC'	56,8	5,68	56,0	5,60	56,5	5,65	5,64
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$
DD'	60,0	6,00	60,0	6,00	60,6	6,06	6,04
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$
EE'	57,8	5,78	57,7	5,77	57,8	5,78	5,78
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,03$
PP'	67,3	6,73	66,8	6,68	67,1	6,71	6,71
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,02$
MM'	59,5	5,95	59,6	5,96	59,2	5,92	5,94
	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,6$	$\pm 0,06$	$\pm 0,01$

Таблица 4: Период колебаний рамки с параллелепипедом.

зультаты представлены в таблице 5 для куба и таблице 6 для параллелепипеда.

Ось	Величина $\frac{10}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}, c^{-1}$
$x (AA')$	$2,0 \pm 0,1$
$y (BB')$	$2,0 \pm 0,1$
$z (CC')$	$2,0 \pm 0,1$
$x + y (MM')$	$2,0 \pm 0,1$
$y + z (EE')$	$2,0 \pm 0,1$
$x + z (PP')$	$2,0 \pm 0,1$

Таблица 5: Величина $\frac{10}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}$ для осей, находящихся в главных плоскостях для куба.

Ось	Величина $\frac{10}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}, c^{-1}$
$x (AA')$	$1,6 \pm 0,1$
$y (BB')$	$1,5 \pm 0,1$
$z (CC')$	$1,9 \pm 0,1$
$x + y (MM')$	$1,6 \pm 0,1$
$y + z (EE')$	$1,9 \pm 0,1$
$x + z (PP')$	$1,8 \pm 0,1$

Таблица 6: Величина $\frac{10}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}$ для осей, находящихся в главных плоскостях для параллелепипеда.

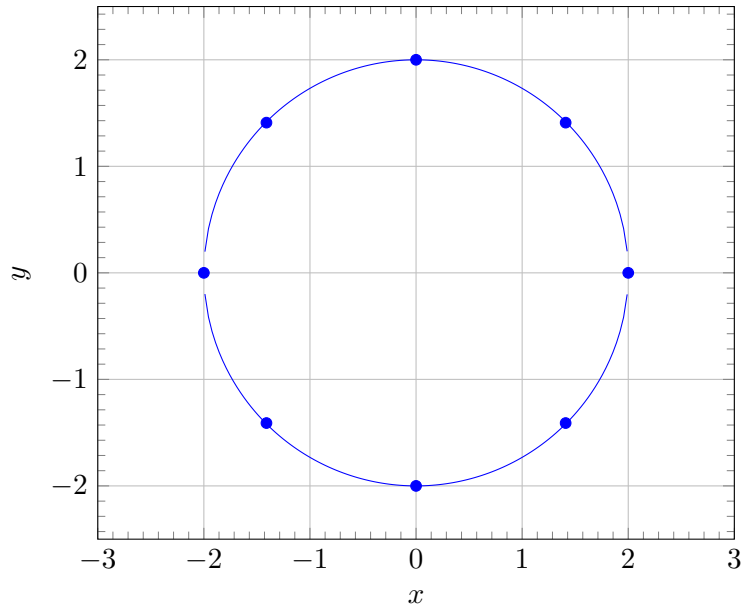


Рисунок 1: Сечение эллипсоида инерции куба плоскостью x, y .

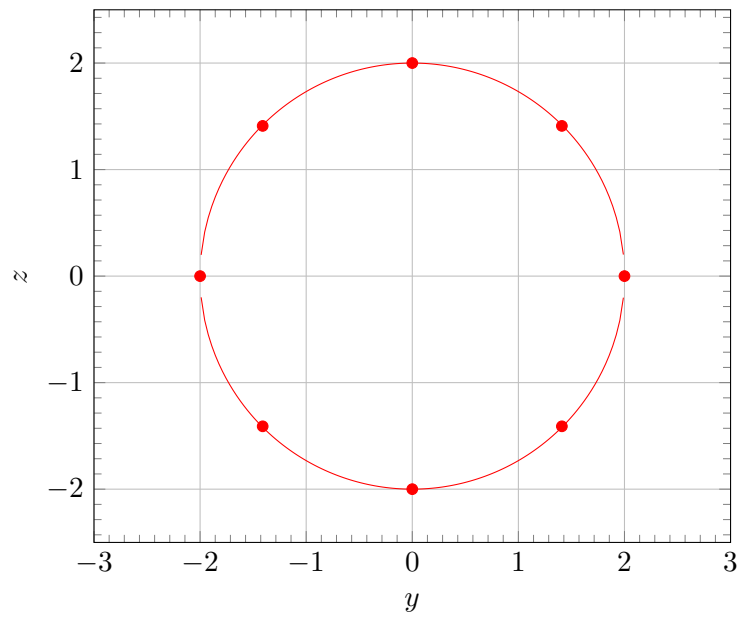


Рисунок 2: Сечение эллипсоида инерции куба плоскостью y, z .

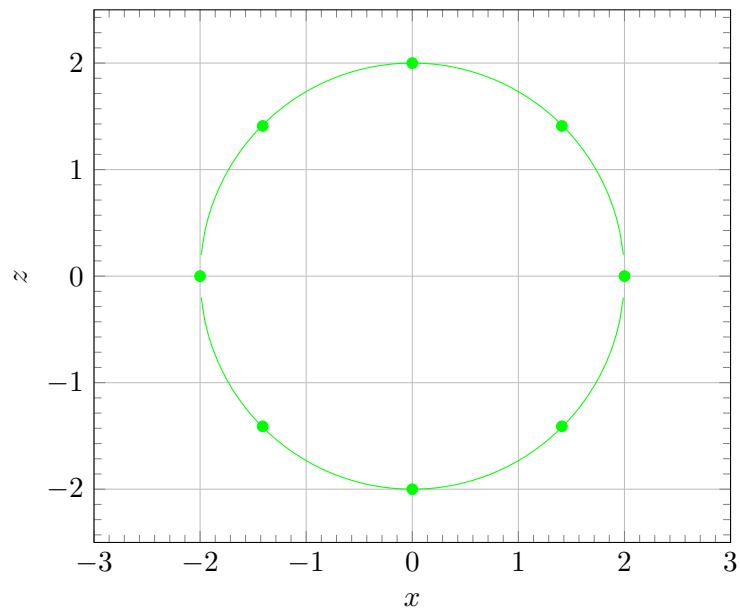


Рисунок 3: Сечение эллипсоида инерции куба плоскостью x, z .

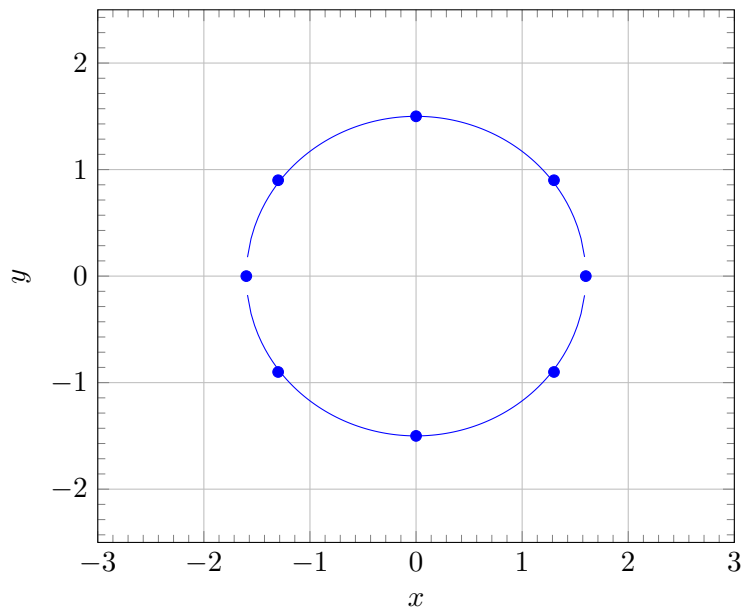


Рисунок 4: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда плоскостью x, y .

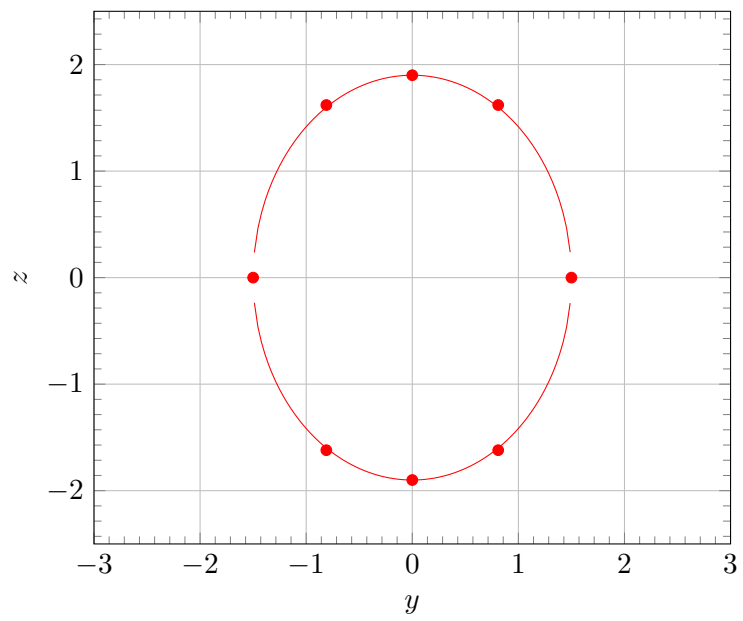


Рисунок 5: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда плоскостью y, z .

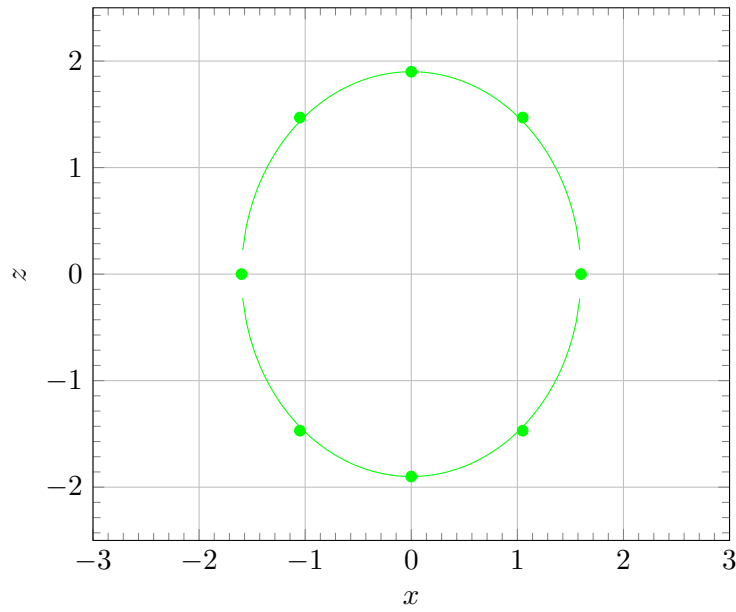


Рисунок 6: Сечение эллипсоида инерции параллелепипеда плоскостью x, z .

4.2.2 Проверка справедливости формул 7–10

Проверим справедливость формул 7–10.

$$(a^2 + b^2 + c^2)(T_d^2 - T_p^2) = 5730 \pm 90.$$

$$a^2(T_x^2 - T_p^2) + b^2(T_y^2 - T_p^2) + c^2(T_z^2 - T_p^2) = 5700 \pm 90.$$

$$(b^2 + c^2)(T_e^2 - T_p^2) = 3330 \pm 50.$$

$$b^2(T_y^2 - T_p^2) + c^2(T_z^2 - T_p^2) = 3380 \pm 60.$$

$$(a^2 + c^2)(T_p^2 - T_p^2) = 4940 \pm 70.$$

$$a^2(T_x^2 - T_p^2) + c^2(T_z^2 - T_p^2) = 4960 \pm 80.$$

$$(a^2 + b^2)(T_m^2 - T_p^2) = 3080 \pm 30.$$

$$a^2(T_x^2 - T_p^2) + b^2(T_y^2 - T_p^2) = 3050 \pm 30.$$

5 Выводы

В ходе работы были найдены периоды колебаний двух тел в различных осях. Были построены проекции эллипсов инерции в основных плоскостях. Была проверена справедливость формул 7–10. Полученные значения лежат в пределах погрешности.