

Introduction aux bancs de filtres

J.Prado

25 novembre 2008

Table des matières

1	Traitement en sous bandes	7
1.1	Découpage du spectre	7
1.1.1	Deux sous bandes	7
1.1.2	Caractéristiques des filtres	8
1.1.3	Comportement fréquentiel.	11
1.1.4	Position des zéros du filtre à phase linéaire.	13
1.2	Méthodes de synthèse	14
1.2.1	Méthode de la fenêtre.	15
1.2.2	Méthode aux valeurs propres.	24
1.2.3	Méthode itérative.	26
1.3	Reconstruction	31
1.4	Filtre demi-bande	32
1.5	Redondance d'information	36
2	Banc de filtres à 2 voies	39
2.1	Changement de cadence d'échantillonnage	39
2.1.1	Réduction	39
2.1.2	Augmentation	42
2.1.3	Représentation polyphase	44
2.2	Banc de filtres à deux voies	47
2.2.1	Un banc élémentaire	49
2.2.2	Un banc plus efficace	50
2.2.3	Application	53

Table des figures

1.1	Spectrogramme de parole.	8
1.2	Réponse symétrique, N impair	10
1.3	Réponse symétrique, N pair	10
1.4	Réponse antisymétrique, N impair	11
1.5	Réponse antisymétrique, N pair	11
1.6	Définition du gabarit	14
1.7	Gabarit idéal	15
1.8	Réponse impulsionnelle	16
1.9	Troncature temporelle	16
1.10	Phénomène de Gibbs	17
1.11	Fenêtre rectangulaire	19
1.12	Fenêtre de Bartlett	20
1.13	Fenêtre de Hann	20
1.14	Fenêtre de Hamming	21
1.15	Fenêtre de Blackman	21
1.16	Fenêtre de Kaiser	22
1.17	Spectre pour différentes valeurs de α	22
1.18	Gabarit passe-bas	23
1.19	Gabarit passe-bande	23
1.20	Filtres séparateurs.	32
1.21	Réponses en fréquence de H_0 et H_1	33
1.22	Réponses temporelles des filtres.	34
1.23	$V_0(e^{j\omega})$	35
1.24	$V_0(e^{j2\omega})$	36
1.25	Décomposition sans filtrage.	37
1.26	Banc de filtres à deux voies	37
2.1	Principe de réduction de fréquence	39
2.2	Filtrage antirepliement	40
2.3	Spectre du signal après sous-échantillonnage	41
2.4	Train d'impulsions équivalent pour le sous-échantillonnage	41

2.5	Principe de l'augmentation de fréquence	42
2.6	Signal et spectre avant suréchantillonnage	42
2.7	Signal et spectre après insertion de $L - 1$ zéros	43
2.8	Signal et spectre après suréchantillonnage	44
2.9	Décimation : implantation directe.	46
2.10	Décimation : implantation polyphase.	46
2.11	Interpolation : implantation polyphase.	47
2.12	Banc de filtres à deux voies	47
2.13	Structure polyphase d'un banc de 2 filtres	50
2.14	Synthèse de filtre pour la reconstruction parfaite	52
2.15	Transmultiplexeur.	53

Chapitre 1

Traitement en sous bandes

La notion d'information contenue dans un signal est lié à sa représentation spectrale. Les deux exemples extrêmes sont d'une part la sinusoïde pure de fréquence f_0 pour laquelle toute l'information apparaît dans la seule composante spectrale à la fréquence f_0 , et d'autre part le bruit blanc qui présente une densité spectrale constante représentative du fait que l'information est la même à toutes les fréquences. Pour un signal quelconque ses caractéristiques, autres que sa forme temporelle, proviennent en grande partie de la répartition (de la forme) de sa densité spectrale. Ainsi, la voix parlée est caractérisée par un spectre moyen dont l'enveloppe présente deux ou trois "bosses" caractéristiques des formants et une atténuation de pente -6db vers les hautes fréquences (fig : 1.1).

Si l'on prend l'exemple du codage d'un signal dans le cas d'une transmission à débit constant, l'intérêt d'avoir une idée de sa répartition spectrale permet d'optimiser l'allocation des bits de codage en fonction de l'énergie (i.e. de la quantité d'informatin dans chaque sous bande. Dans ce qui suit, nous nous restreindrons au découpage en deux sous-bandes sachant que le passage à M sous-bandes peut s'effectuer moyennant une plus grande complexité.

1.1 Découpage du spectre

1.1.1 Deux sous bandes

Le découpage du spectre en deux sous-bandes peut s'effectuer de manière simple à partir de la représentation par transformée de Fourier, ici nous nous intéresserons au découpage à l'aide de filtres, et plus particulièrement de filtres à réponse impulsionnelle finie auxquelles on peut donner des caractéristiques de phases intéressantes comme la phase linéaire, la minimalité

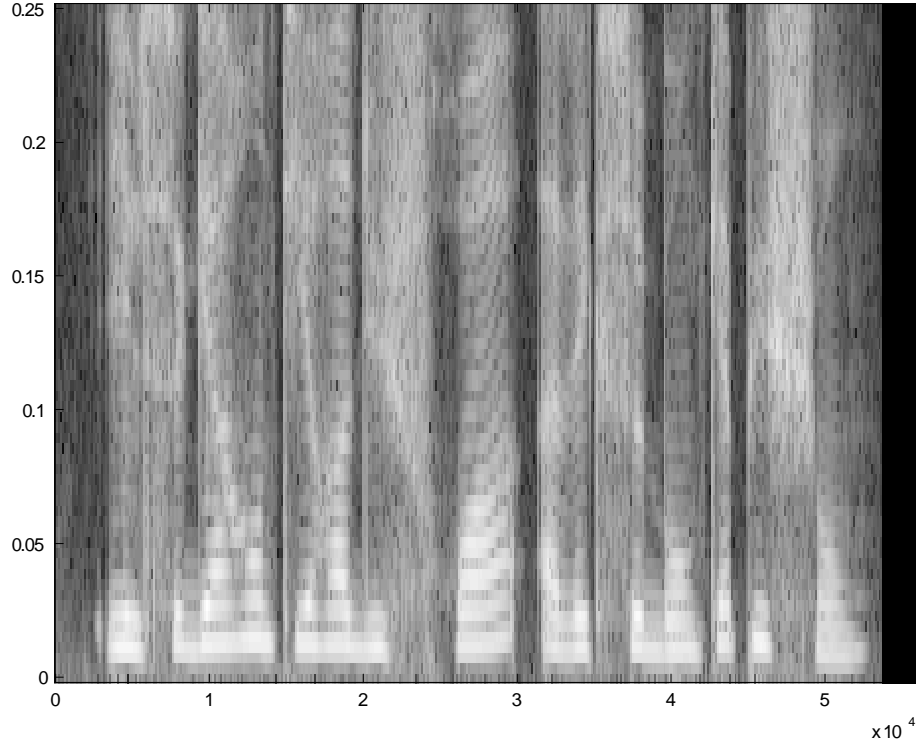


FIG. 1.1 – Spectrogramme de parole.

de phase, etc ... Notre problème est donc de synthétiser, dans une première approche, un **filtre passe-bas** et un **filtre passe-haut** susceptibles de créer un signal représentatif des basses fréquences et un signal représentatif des hautes fréquences puis après traitement de chacun des signaux (codage, compression, ...) savoir reconstituer le signal initial.

1.1.2 Caractéristiques des filtres

Filtres RIF

Un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale de la forme :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^{-n} \quad (1.1)$$

La transformée de Fourier correspondante est :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.2)$$

Où $\varphi(\omega)$ est fonction continue de ω , le signe \pm signifie que la phase du filtre peut présenter des sauts de π ($e^{j\pi} = -1$). Les coefficients h_n étant réels, on a les relations :

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |H(e^{-j\omega})| \\ \varphi(\omega) &= -\varphi(-\omega) \end{aligned} \right\} 0 \leq \omega < \pi \quad (1.3)$$

Si nous voulons imposer la **contrainte de phase linéaire**, cela peut s'exprimer de deux façons :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1} \bullet \quad & \varphi(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \\ \text{Cas 2} \bullet \quad & \varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \quad (1.4)$$

où α est le temps de propagation de groupe en nombre d'échantillons.

Cas 1. Le gain complexe s'exprime sous la forme :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega} \quad (1.5)$$

Soit par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \pm |H(e^{j\omega})| \cos(\alpha\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(n\omega) \\ \pm |H(e^{j\omega})| \sin(\alpha\omega) &= \sum_{n=1}^{N-1} h_n \sin(n\omega) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les h_n sont obtenus en effectuant le rapport des deux égalités de (1.6) :

$$\tan(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h_n \sin(n\omega)}{h_0 + \sum_{n=1}^{N-1} h_n \cos(n\omega)} \quad (1.7)$$

Deux cas sont à envisager :

1. $\alpha = 0$ qui se traduit par $h_n = 0$ pour $n \neq 0$ et h_0 arbitraire. C'est un simple gain sans intérêt.
2. $\alpha \neq 0$ Dans ce cas (1.7) se met sous la forme $\sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(n\omega) \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(n\omega) \cos(\alpha\omega)$ qui peut se condenser en $\sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin((\alpha - n)\omega) = 0$.

Si l'équation admet une solution, elle est unique.

On peut vérifier assez facilement qu'une solution est donnée par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{N-1}{2} \\ h_n &= h_{N-1-n} \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Les conséquences en sont :

1. à une valeur de N , correspond une valeur de α ,
2. pour cette valeur de α , la réponse présente une symétrie particulière.
 - si N est impair, α est entier,
 - si N est pair, α est non-entier.

Exemples de réponses impulsionnelles :

- pour $N = 11$ (figure 1.2), on a $\alpha = 5$ centre de symétrie = h_5

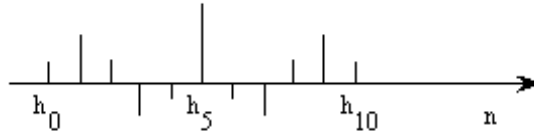


FIG. 1.2 – Réponse symétrique, N impair

- pour $N = 10$ (figure 1.3), on a $\alpha = 4,5$ centre de symétrie entre deux échantillons.

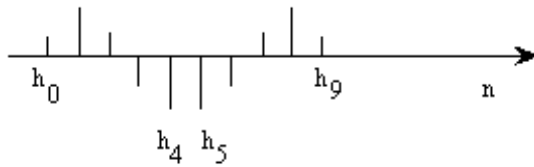


FIG. 1.3 – Réponse symétrique, N pair

Pour le type 1, on a un temps de propagation de groupe et un retard de phase constants :

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \alpha && \text{temps de propagation de groupe} \\ \delta \varphi &= -\frac{\varphi}{\omega} = \alpha && \text{retard de phase} \end{aligned}$$

Si l'on désire seulement le temps de propagation de groupe constant alors on est dans le cas de la contrainte de type 2.

Cas 2. Pour cette contrainte : $\varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega$

Le raisonnement précédent conduit à la solution :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{N-1}{2} \\ \beta &= \pm \frac{\pi}{2} \\ h_n &= -h_{N-1-n} \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Pour ce type de filtres la réponse impulsionnelle est antisymétrique (figures 1.4 et 1.5). Cette antisymétrie impose $h_{N-1/2} = 0$ pour N impair.

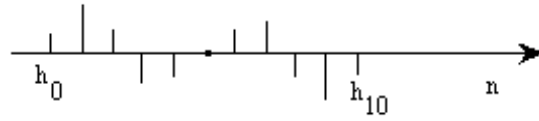


FIG. 1.4 – Réponse antisymétrique, N impair

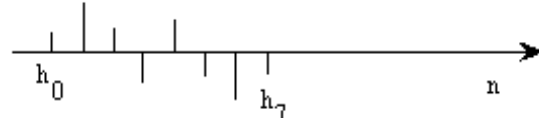


FIG. 1.5 – Réponse antisymétrique, N pair

1.1.3 Comportement fréquentiel.

Les deux cas précédents amènent à distinguer quatre types de filtres :

Type 1- réponse symétrique N impair,

Type 2- réponse symétrique N pair,

Type 3- réponse antisymétrique N impair,

Type 4- réponse antisymétrique N pair.

On reprend ici la terminologie utilisée dans la littérature. Ces quatre types permettent, par des manipulations simples, de définir les réponses en fréquence et d'en déduire l'utilisation possible des filtres (passe-bas, passe-haut, etc...). La forme générale de la réponse en fréquence est donnée par :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j(\beta - \alpha\omega)} \quad (1.10)$$

Réponse symétrique. N impair.

Les h_n vérifient $h_n = h_{N-1-n}$, et pour cette forme $\beta = 0$ et $\alpha = (N-1)/2$, soit :

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(n\omega) \quad (1.11)$$

où : $\pm |H(e^{j\omega})| = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(\omega)$ et $a_0 = h_{N-1}/2$ et $a_n = 2h_{\frac{N-1}{2}-n}$ pour $(n = 1, \dots, \frac{N-1}{2})$.

Réponse symétrique. N pair.

La forme de la réponse en fréquence est :

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b_n \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (1.12)$$

où $b_n = 2h_{\frac{N}{2}-n}$ pour $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$.

Remarque : quelquesoit les valeurs des b_n on a pour $\omega = \pi$, $|H(e^{j\pi})| = 0$. Ce type de filtre ne peut pas convenir pour des passe-haut.

Réponse antisymétrique. N impair.

Les h_n vérifient $h_n = -h_{N-1-n}$

Il suffit de remplacer les cosinus par des sinus dans l'expression (1.11) et de considérer que $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(n\omega) \quad (1.13)$$

où $c_n = 2h_{\frac{N-1}{2}-n}$ pour $n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$.

Remarque : quelquesoit les valeurs des c_n on a pour $\omega = 0$ et π , $|H(e^{j0})| = |H(e^{j\pi})| = 0$. Ce type de filtre peut être utilisé pour des passe-bandes ou pour effectuer l'approximation d'un différentiateur (ou dérivateur).

Réponse antisymétrique. N pair.

L'analogie se fait avec (1.12) en remplaçant cosinus par sinus :

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d_n \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (1.14)$$

où $d_n = 2h_{\frac{N}{2}-n}$ pour $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$.

Remarque : quelquesoit les valeurs des d_n on a pour $\omega = 0$, $|H(e^{j0})| = 0$. Ce type de filtre peut être utilisé pour des passe-haut.

1.1.4 Position des zéros du filtre à phase linéaire.

Les symétries des réponses impulsionnelles font que les zéros de ces filtres ont des positions particulières relativement au cercle unité.

Soit la fonction de transfert de forme générale :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^{-n} = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots \pm h_2 z^{-(N-3)} \pm h_1 z^{-(N-2)} \pm h_0 z^{-(N-1)} \quad (1.15)$$

avec :

$+$ = réponse symétrique,

$-$ = réponse antisymétrique.

Il est assez facile de vérifier que $H(z)$ obéit à la relation :

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1} H(z) \quad (1.16)$$

Ce qui signifie que $H(z)$ et $H(z^{-1})$ sont identiques à un délai près de $(N-1)$ échantillons et un facteur multiplicatif ± 1 .

Zéro complexe hors du cercle unité.

Soit $z_i = \rho_i e^{j\theta_i}$ un zéro complexe de $H(z)$, où $\rho_i \neq 1$ et $\theta_i \neq 0, \pi$.

D'après la relation (1.16), $z_i^{-1} = \frac{1}{\rho_i} e^{-j\theta_i}$ est aussi un zéro de $H(z)$. De plus les coefficients h_n étant réels les conjugués de z_i et z_i^{-1} sont aussi des zéros de $H(z)$. S'il existe un zéro complexe, il existe son inverse et leurs conjugués. La forme élémentaire de $H(z)$ comporte quatre termes :

$$H(z) = (1 - z^{-1} \rho_i e^{j\theta_i})(1 - z^{-1} \rho_i e^{-j\theta_i})(1 - z^{-1} \frac{1}{\rho_i} e^{j\theta_i})(1 - z^{-1} \frac{1}{\rho_i} e^{-j\theta_i}) \quad (1.17)$$

Zéro complexe sur le cercle unité.

Soit $z_i = e^{j\theta_i}$ avec $\theta_i \neq 0, \pi$, un zéro de $H(z)$ sur le cercle unité, alors $z_i = e^{-j\theta_i}$ est aussi zéro de $H(z)$. La forme élémentaire de $H(z)$ est donc :

$$H(z) = (1 - z^{-1} e^{j\theta_i})(1 - z^{-1} e^{-j\theta_i}) \quad (1.18)$$

Zéro réel hors du cercle unité.

Soit $z_i = \rho_i$ avec $\rho_i \neq 1$, un zéro réel de $H(z)$, alors $z_i = \frac{1}{\rho_i}$ est aussi zéro de $H(z)$. La forme élémentaire de $H(z)$ est :

$$H(z) = (1 - \rho_i z^{-1})(1 - \frac{1}{\rho_i} z^{-1}) \quad (1.19)$$

Zéro réel sur le cercle unité.

Soit $z_i = \pm 1$, ce zéro reste simple car il est aussi bien zéro de $H(z)$ que de $H(z^{-1})$. La forme élémentaire de $H(z)$ est :

$$H(z) = (1 \pm z^{-1}) \quad (1.20)$$

Ce cas correspond à un temps de propagation de groupe d'un demi échantillon, il y en a donc un nombre impair quand N est pair et un nombre pair quand N est impair (0 compris).

1.2 Méthodes de synthèse

Les méthodes de synthèse que nous allons considérer permettent de satisfaire des contraintes de réponses en amplitudes, sachant que par raison de symétrie de la réponse impulsionnelle, la phase résultante sera linéaire en fréquence.

On définit un gabarit de réponse en amplitude de la façon suivante (figure 1.6) :

- $\Delta f = f_2 - f_1$ bande de transition,
- $R_c = \frac{f_1 + f_2}{\Delta f}$ raideurdecoupeure,
- δ_1 : ondulation tolérée en bande passante,
- δ_2 : ondulation tolérée en bande affaiblie.

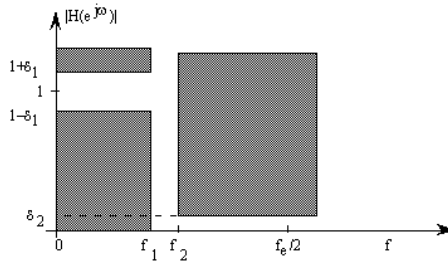


FIG. 1.6 – Définition du gabarit

Tout filtre dont la réponse en amplitude se situe dans le gabarit défini satisfait les contraintes spécifiées. Pour des raisons de facilité de réalisation et de réduction en coût de calcul, le meilleur filtre sera celui d'ordre minimum.

1.2.1 Méthode de la fenêtre.

La réponse en fréquence d'un filtre numérique (figure 1.7) est périodique de période 1. Il est alors facile de l'exprimer sous forme de série de Fourier, série dont les coefficients h_n sont ceux de la réponse impulsionnelle :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{-j\omega n} \quad (1.21)$$

Avec :

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi n f} df \quad (1.22)$$

Dans (1.22) on prendra $H(e^{j2\pi f}) = |H(e^{j2\pi f})|$, c'est à dire une phase nulle. Avec le gabarit idéal de la figure 1.7 :

$$h_n = \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi n f} df \quad (1.23)$$

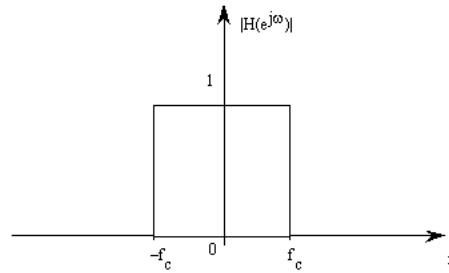


FIG. 1.7 – Gabarit idéal

Les h_n obtenus sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$ (figure 1.8), ce qui n'est pas utilisable de manière directe en pratique.

Pour obtenir un filtre de longueur ou d'ordre fini on tronquera le nombre des h_n utilisés (meilleure approximation au sens L_2 de la série de Fourier) :

$$h_n = 0 \quad |n| > \frac{N-1}{2}$$

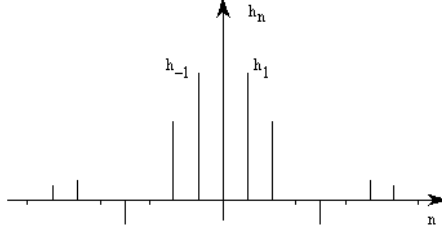


FIG. 1.8 – Réponse impulsionnelle

On obtient : $H(z) = h_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} (h_{-n}z^n + h_nz^{-n})$.

La causalité est obtenue en multipliant $H(z)$ par le terme $z^{-\frac{N-1}{2}}$ ce qui introduit un retard de $\frac{N-1}{2}$, donc une phase linéaire, mais ne change pas la réponse en amplitude :

$$H_{causale}(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z) \quad (1.24)$$

Effet de la troncature.

Tronquer le nombre de coefficients h_n revient à multiplier par une fenêtre rectangulaire (figure 1.9) définie par :

$$\begin{cases} w_n = 1 & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ w_n = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit $H(z)$ la fonction de transfert du filtre et $W_R(z)$ la transformée en z de la fenêtre rectangulaire. La fonction de transfert obtenue est :

$$H_w(z) = Z[w_n h_n]$$

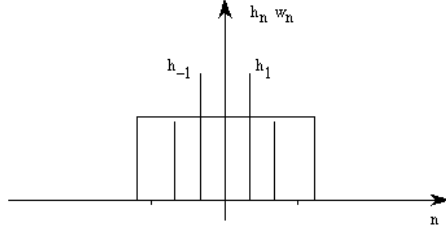


FIG. 1.9 – Troncature temporelle

Soit encore : $H_w(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(v) W_R\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$.

où C est un contour pris dans la région de convergence commune à $H(v)$ et $W_R\left(\frac{z}{v}\right)$.

Soit $z = e^{j\omega}$ et $v = e^{j\Omega}$, alors $H(v)$ et $W_R\left(\frac{z}{v}\right)$ convergent sur le cercle unité du plan v et la relation devient :

$$H_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\Omega}) W_R(e^{j(\omega-\Omega)}) d\Omega$$

Ce qui traduit la convolution de $H(e^{j\omega})$ avec $W_R(e^{j\omega})$. Or pour un filtre passe-bas $H(e^{j\omega})$ vaut $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$ où ω_c définit la pulsation de coupure du filtre.

Et $W_R(e^{j\omega})$ qui est la transformée de Fourier d'une fonction rectangulaire est un rapport de sinus. La convolution introduit donc sur $H(e^{j\omega})$ des ondulations qui sont dues à la forme de $W_R(e^{j\omega})$.

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & |n| > \frac{N-1}{2} \end{cases} \longrightarrow W_R(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-j2\pi n f} = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)} \quad (1.25)$$

La figure (1.10) traduit l'effet de la fenêtre rectangulaire sur un filtre passe-bas, c'est une représentation du phénomène de Gibbs caractéristique de la convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier de fonctions discontinues.

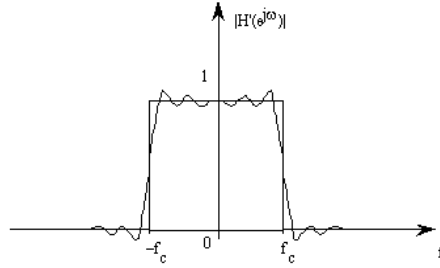


FIG. 1.10 – Phénomène de Gibbs

La transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire présente une largeur du lobe principal de : $\omega_L = \frac{4\pi}{N}$ et un taux d'ondulation défini par :

$$\delta = \frac{100 \text{ amplitude max du lobe secondaire}}{\text{amplitude max du lobe principal}} \% \quad (1.26)$$

Exemple : $\delta = 22\%$ pour $N = 11$.

Fenêtre	Définition ($0 \leq n < N - 1$)
Rectangulaire	1
Bartlett (triangulaire)	$1 - \frac{2 n - \frac{N-1}{2} }{N-1}$
Hann	$0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Hamming	$0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	$0.4266 - 0.4965 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.076 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

TAB. 1.1 – Définition temporelle de fenêtres

Fenêtre	Réponse en fréquence $W(f)$
Rectangulaire	$W_R(f) = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$
Bartlett	$W_R^2(f)$
Hann	$\frac{1}{2}W_R(f) + \frac{1}{4}\left(W_R\left(f - \frac{1}{N}\right) + W_R\left(f + \frac{1}{N}\right)\right)$
Hamming	$0.54W_R(f) + 0.23\left(W_R\left(f - \frac{1}{N}\right) + W_R\left(f + \frac{1}{N}\right)\right)$
Blackman	$0.42W_R(f) + 0.25\left(W_R\left(f - \frac{1}{N}\right) + W_R\left(f + \frac{1}{N}\right)\right) + 0.04\left(W_R\left(f - \frac{2}{N}\right) + W_R\left(f + \frac{2}{N}\right)\right)$

TAB. 1.2 – Réponse en fréquence des fenêtres

δ présente une décroissance relativement lente avec N . Pour cette raison il est important de pouvoir déterminer des formes de fenêtres (ou fonctions de pondération) dont les caractéristiques (largeur du lobe principal, taux d'ondulation) soient des plus favorables.

Définition de fenêtres.

Les fenêtres utilisées pour la pondration des coefficients d'un filtre RIF doivent conserver la symétrie de la réponse impulsionnelle, autrement dit doivent vérifier $w_0 = w_{N-1}$ dans leur version causale. On donne (tableau 1.1) l'expression temporelle de quelques fenêtres couramment utilisées dans la synthèse de filtres.

Sans tenir compte du terme de phase qui est $e^{-j\pi(N-1)f}$ pour toutes les fenêtres, on donne (tableau 1.2) leur réponse en fréquence.

Ces fenêtres peuvent être caractérisées par différents paramètres dont nous donnons un résumé (tableau 1.3).

Fenêtre	Largeur du Lobe principal	Hauteur du 1er Lobe secondaire en dB	Décroissance des Lobes secondaires en dB/oct
Rectangulaire	$2/N$	-13	-6
Bartlett	$4/N$	-26	-12
Hann	$4/N$	-31	-18
Hamming	$4/N$	-41	-6
Blackman	$6/N$	-57	-18

TAB. 1.3 – Paramètres des fenêtres

Les représentations temporelles et fréquentielles des fenêtres sont données figures (1.11), (1.12), (1.13), (1.14) et (1.15).

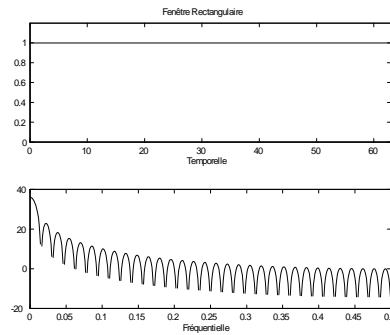


FIG. 1.11 – Fenêtre rectangulaire

Pour les fenêtres qui viennent d'être présentées, et qui sont optimales pour un certain critère, on ne sait pas déterminer a priori la valeur de N qui permettra de satisfaire aux contraintes du gabarit. Il existe une fenêtre, dite fenêtre de kaiser, pour laquelle une méthode empirique, mais qui donne de bons résultats, permet de connaître a priori l'ordre du filtre en fonction des caractéristiques du gabarit.

Fenêtre de Kaiser.

Elle est définie par (figure 1.16) :

$$w_K(n) = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}, \quad |n| \leq \frac{N-1}{2} \quad (1.27)$$

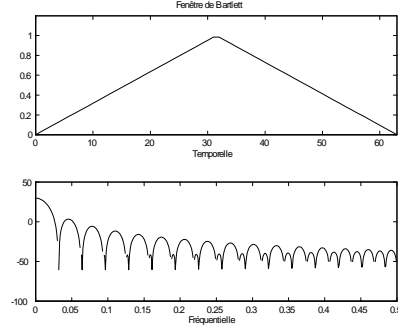


FIG. 1.12 – Fenêtre de Bartlett

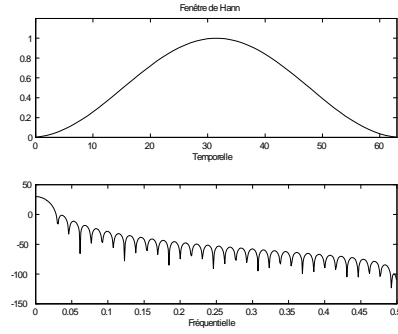


FIG. 1.13 – Fenêtre de Hann

Où la fonction $I_0()$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro qui peut se calculer simplement par une série rapidement convergente :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (1.28)$$

L'intérêt de cette fenêtre est que l'on peut faire varier le taux d'ondulation de façon continue (figure 1.17) entre celui obtenu par la fenêtre de Blackman et celui de la fenêtre rectangulaire, ceci en faisant varier α de façon continue. L'élargissement de la bande de transition dû à la variation croissante de α peut être compensé par un accroissement de l'ordre du filtre, on a ainsi une grande souplesse pour déterminer la fonction de transfert d'un filtre.

Kaiser a développé une méthode empirique permettant de déterminer l'ordre du filtre et la valeur de α pour un gabarit donné.

Soit le gabarit défini par la figure (1.18) :

On choisira ici $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, ce qui, en décibels, permet de définir le taux

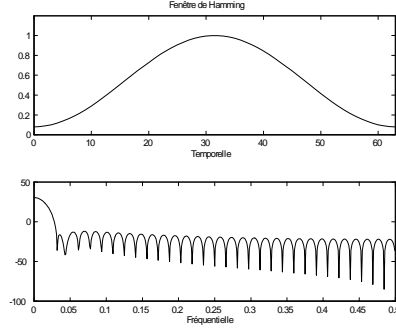


FIG. 1.14 – Fenêtre de Hamming

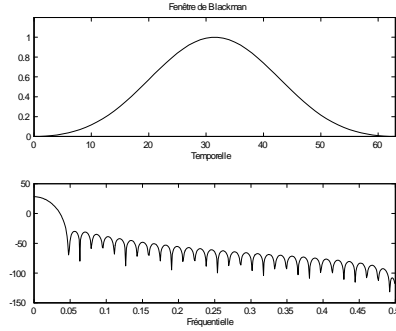


FIG. 1.15 – Fenêtre de Blackman

d'ondulation en bande passante : $\Delta_1 = 20 \log \frac{1+\delta}{1-\delta}$ et l'atténuation minimum en bande atténuée : $\Delta_2 = -20 \log \delta$. La bande de transition est : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Supposons que l'on veuille déterminer un filtre dont les spécifications sont :

1. ondulation en bande passante : Δ'_1
2. atténuation minimum : Δ'_2
3. bande de transition : $\Delta'\omega$

La procédure à suivre est :

1. on détermine la série h_n à l'aide de la série de Fourier de la fonction :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

où ω_c est la moyenne arithmétique de ω_1 et ω_2 : $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$

1. on choisit δ tel que : $\Delta_1 \leq \Delta'_1$ et $\Delta_2 \geq \Delta'_2$

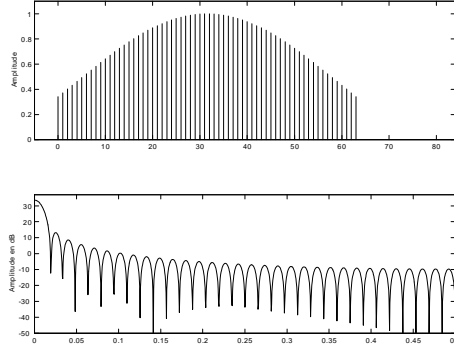
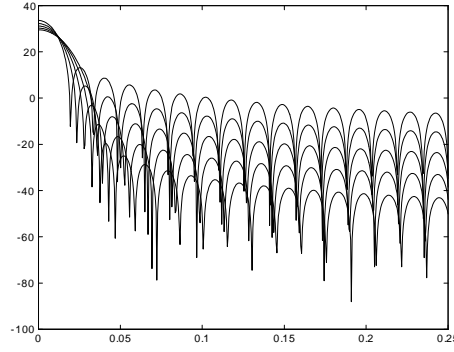


FIG. 1.16 – Fenêtre de Kaiser

FIG. 1.17 – Spectre pour différentes valeurs de α

On peut prendre : $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ où :

$$\delta_1 = \frac{10^{0.05\Delta'_1-1}}{10^{0.05\Delta'_1}+1}$$

$$\delta_2 = 10^{0.05\Delta_2}$$

1. on calcule Δ_2 ,
2. on choisit α tel que :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pour } \Delta_2 \leq 21 \\ 0.5842 (\Delta_2 - 1)^{0.4} + 0.078 (\Delta_2 - 21) & \text{pour } 21 < \Delta_2 \leq 50 \\ 0.1102 (\Delta_2 - 8.70) & \text{pour } \Delta_2 > 50 \end{cases}$$

3. on détermine l'ordre N impair le plus petit afin que : $N \geq \frac{\omega_e D}{\Delta_\omega} + 1$

$$\text{où : } D = \begin{cases} 0.92 & \text{pour } \Delta_2 \leq 21 \\ \frac{\Delta_2 - 7.95}{14.36} & \text{pour } \Delta_2 > 21 \end{cases}$$

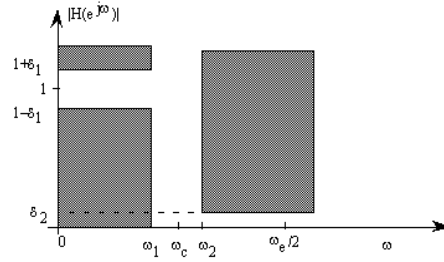


FIG. 1.18 – Gabarit passe-bas

Nous disposons alors de tous les éléments pour évaluer $w_K(n)$ et donc les coefficients h_n .

Pour obtenir un filtre passe-bande ou coupe-bande la procédure est quelque peu modifiée si les bandes de transition ne sont pas identiques (figure 1.19).

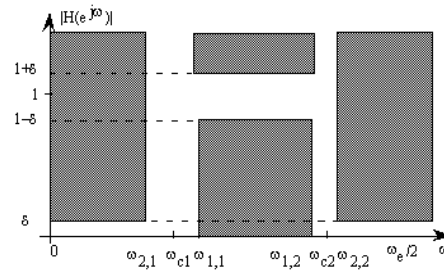


FIG. 1.19 – Gabarit passe-bande

On choisit pour bande de transition, la plus étroite :

$$\Delta\omega = \min[(\omega_{1,1} - \omega_{2,1}), (\omega_{2,2} - \omega_{1,2})]$$

On définit $H(e^{j\omega})$ par :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq |\omega| < \omega_{c1} \\ 1 & \text{pour } \omega_{c1} \leq |\omega| < \omega_{c2} \\ 0 & \text{pour } \omega_{c2} \leq |\omega| < \pi \end{cases}$$

où ω_{c1} et ω_{c2} sont définies par :

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= \omega_{1,1} - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_{c2} &= \omega_{1,2} + \frac{\Delta\omega}{2} \end{aligned}$$

1.2.2 Méthode aux valeurs propres.

Avant de décrire cette méthode nous allons dériver une classe de fenêtres optimales appelées séquences sphéroïdales aplaties. Ces séquences notées $v(n)$ sont réelles, de longueur N et d'énergie unité, et ont la particularité d'avoir une énergie minimisée dans la bande de fréquence $f_s \leq f \leq \frac{1}{2}$ ($\omega_s \leq \omega \leq \pi$).

Formulation du problème.

Soit $v(n)$ une séquence causale et réelle de longueur N et $V(z) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) z^{-n}$. Définissons :

$$\rho_s \triangleq \int_{\omega_s}^{\pi} |V(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{\pi} \quad (1.29)$$

La quantité ρ_s doit être minimisée sous la contrainte que l'énergie de $v(n)$ soit unitaire. Ce qui se traduit à l'aide du théorème de Parseval par :

$$\int_0^{\pi} |V(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{\pi} = \sum_{n=0}^{N-1} v^2(n) = 1 \quad (1.30)$$

La minimisation de ρ_s sous la contrainte (1.30) est équivalente à la maximisation de (1.31) :

$$\rho \triangleq \int_0^{\omega_s} |V(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{\pi} \quad (1.31)$$

Exprimons le sous forme matricielle. Soit le vecteur $\mathbf{v} = [v(0) v(1) \dots v(N-1)]^T$ et le vecteur $\mathbf{e}(z) = [1 z^{-1} \dots z^{-(N-1)}]^T$, il vient :

$$V(e^{j\omega}) = \mathbf{v}^T \mathbf{e}(e^{j\omega})$$

et

$$|V(e^{j\omega})|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{e}(e^{j\omega}) \mathbf{e}^H(e^{j\omega}) \mathbf{v} \quad (1.32)$$

où : \mathbf{e}^H désigne le transpose-conjugué.

L'équation (1.31) devient :

$$\rho = \mathbf{v}^T \left[\int_0^{\omega_s} \mathbf{R}(\omega) \frac{d\omega}{\pi} \right] \mathbf{v} \quad (1.33)$$

où $\mathbf{R}(\omega) \triangleq \mathbf{e}(e^{j\omega}) \mathbf{e}^H(e^{j\omega})$ est une matrice $N \times N$ dont l'élément (m, n) est :

$$R(m, n) = e^{-j(m-n)\omega} = \cos(m-n)\omega - j \sin(m-n)\omega \quad (1.34)$$

$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{P}(\omega) + j\mathbf{Q}(\omega)$ est une matrice Hermitienne. Sa partie imaginaire est antisymétrique, et comme \mathbf{v} est réel on a : $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}(\omega) \mathbf{v} = 0$. (1.33) se simplifie en :

$$\rho = \mathbf{v}^T \left[\int_0^{\omega_s} \mathbf{P}(\omega) \frac{d\omega}{\pi} \right] \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (1.35)$$

Les termes de la matrice \mathbf{P} s'expriment simplement sous la forme :

$$\int_0^{\omega_s} \cos(m-n)\omega \frac{d\omega}{\pi} = \frac{\sin(m-n)\omega_s}{(m-n)\pi}, \quad 0 \leq m, n \leq N-1 \quad (1.36)$$

La contrainte d'énergie unitaire s'écrit $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$. Le problème qui consiste à trouver la séquence $v(n)$ d'énergie minimum dans la bande $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ a été transformé en la recherche d'un vecteur \mathbf{v} de norme unité qui maximise (1.35).

Solution du problème.

La matrice \mathbf{P} est réelle symétrique (donc Hermitienne). D'après le principe de *Rayleigh* toutes ses valeurs propres λ_i sont réelles et la valeur maximale de ρ sous la contrainte $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$ est obtenue si et seulement si \mathbf{v} est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_{\max} . Cette valeur propre correspond à la quantité (1.31) et satisfait donc à $\lambda_{\max} < 1$.

Le vecteur \mathbf{v} ainsi obtenu joue le rôle d'une fenêtre de pondération.

Application à la synthèse directe de filtres.

Nous allons appliquer le principe précédent à la synthèse directe de filtres à phase linéaire. Prenons le cas d'un filtre de type 1, N impair et réponse impulsionnelle symétrique.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (1.37)$$

La réponse en amplitude est :

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^M a_n \cos(n\omega) = \mathbf{a}^T \mathbf{c}(\omega) \quad (1.38)$$

où $M = \frac{N-1}{2}$, $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_M]^T$, $\mathbf{c}(\omega) = [1 \ \cos \omega \ \dots \ \cos M\omega]^T$.
D'après (1.11) $H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega} H_R(\omega)$, on en déduit :

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H_R(e^{j\omega})|^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{c}(\omega) \mathbf{c}(\omega)^T \mathbf{a} \quad (1.39)$$

L'énergie dans la bande atténuée est :

$$E_s = \int_{\omega_s}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \frac{d\omega}{\pi} = \mathbf{a}^T \mathbf{P} \mathbf{a} \quad (1.40)$$

Les termes de la matrice \mathbf{P} sont de la forme $\int_{\omega_s}^{\pi} \cos(m\omega) \cos(n\omega) \frac{d\omega}{\pi}$ et peuvent donc être évalués en fonction de ω_s , m et n .

Dans la bande passante, la réponse en amplitude à la fréquence nulle est :

$$H_R(0) = \mathbf{a}^T \mathbf{1} \quad (1.41)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur formé de 1.

En prenant (1.41) comme valeur de référence, on peut écrire l'erreur en bande passante à toute fréquence comme :

$$\mathbf{a}^T \mathbf{1} - \mathbf{a}^T \mathbf{c}(\omega) = \mathbf{a}^T [\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)] \quad (1.42)$$

Ce qui permet d'introduire la notion d'erreur quadratique moyenne en bande passante :

$$E_p = \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \mathbf{a} \quad (1.43)$$

où $\mathbf{Q} = \int_0^{\omega_p} [\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)] [\mathbf{1} - \mathbf{c}(\omega)]^T \frac{d\omega}{\pi}$.

La fonction de coût est alors définie par :

$$\rho = \alpha E_s + (1 - \alpha) E_p \quad (1.44)$$

où α , ($0 < \alpha < 1$), est un paramètre de compromis pour les performances en bande passante et atténuée. Nous sommes donc ramené à la forme précédente :

$$\rho = \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} \quad (1.45)$$

où $\mathbf{R} = \alpha \mathbf{P} + (1 - \alpha) \mathbf{Q}$ est une matrice réelle, symétrique et définie-positive. Le vecteur \mathbf{a} de norme unité qui minimise (1.45) est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de \mathbf{R} .

1.2.3 Méthode itérative.

Nous allons considérer ici la synthèse d'un filtre comme un problème d'approximation pondérée au sens de Chebyshev. Pour cela il nous faut déterminer un ensemble de conditions pour lesquelles il est possible de montrer que la solution est optimale (au sens où l'erreur d'approximation est minimisée sur l'intervalle entier), et unique.

On rappelle qu'un filtre RIF à phase linéaire possède une fonction de transfert qui peut prendre une des formes définies par les types 1 à 4.

$ H(e^{j\omega}) $	$P(e^{j\omega})$	$Q(e^{j\omega})$
$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(n\omega)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(n\omega)$	1
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b_n \cos((n - \frac{1}{2})\omega)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} b'_n \cos(n\omega)$	$\cos(\omega/2)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(n\omega)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} c'_n \cos(n\omega)$	$\sin(\omega)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d_n \sin((n - \frac{1}{2})\omega)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d'_n \cos(n\omega)$	$\sin(\omega/2)$

TAB. 1.4 – Tableau de correspondance

La forme générale du comportement en fréquence est $H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$, où $\varphi(\omega) = \beta - \alpha\omega$, $\beta = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \frac{N-1}{2}$.

Il est commode d'exprimer $|H(e^{j\omega})|$ sous la forme d'un produit $|H(e^{j\omega})| = Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})$.

Produit dans lequel $P(e^{j\omega})$ se présente sous la même forme pour les quatre types précédemment considérés.

Dans chaque cas $P(e^{j\omega})$ est un polynôme trigonométrique (en $\cos(n\omega)$) ce qui va permettre d'unifier la synthèse pour les quatre types. Les relations qui lient les coefficients de $P(e^{j\omega})$ aux coefficients des premières formes sont :

- pour le type 1 :
pas de changement.
- pour le type 2 :
 $b'_0 = \frac{1}{2}b_1$
 $b'_k = 2b_k - b'_{k-1}$ pour $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 2$
 $b'_{\frac{N}{2}-1} = 2b_{\frac{N}{2}}$
- pour le type 3 :
 $c'_{\frac{N-3}{2}} = c_{\frac{N-1}{2}}$
 $c'_{\frac{N-5}{2}} = 2c_{\frac{N-3}{2}}$
 \vdots
 $c'_{k-1} - c'_{k+1} = 2c_k$ pour $k = 2, 3, \dots, \frac{N-5}{2}$
 $c'_0 + \frac{1}{2}c'_2 = c_1$
- pour le type 4 :

$$\begin{aligned}
d'_{\frac{N}{2}-1} &= 2d_{\frac{N}{2}} \\
d'_{k-1} - d'_k &= 2d_k \text{ pour } k = 2, 3, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\
d'_0 - \frac{1}{2}d'_1 &= d_1
\end{aligned}$$

Il reste à formuler le problème d'approximation au sens de Chebyshev sachant que l'on connaît a priori $Q(e^{j\omega})$ et que $P(e^{j\omega})$ est le polynôme trigonométrique dont on doit déterminer les coefficients.

Approximation pondérée au sens de Chebyshev.

Soit donc $H_D(e^{j\omega})$ la réponse en amplitude que l'on désire et $W(e^{j\omega})$ une fonction de pondération qui permet de donner une importance différente à l'erreur suivant la pulsation ω . La fonction de pondération est généralement définie de manière normalisée :

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & \text{dans la bande passante} \\ 1 & \text{dans la bande atténuée} \end{cases} \quad (1.46)$$

L'erreur d'approximation s'exprime par :

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [H_D(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})] \quad (1.47)$$

Puisque $Q(e^{j\omega})$ est fixé il vient :

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}) \left[\frac{H_D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} - P(e^{j\omega}) \right] \quad (1.48)$$

Il faut remarquer que (1.48) est partout valable sauf dans les cas où $Q(e^{j\omega})$ s'annule. Exception faite de ces cas on peut définir $W'(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega})$ et $H'_D(e^{j\omega}) = \frac{H_D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})}$.

Le problème se résume donc à déterminer $P(e^{j\omega})$ tel que $E(e^{j\omega}) = W'(e^{j\omega}) [H'_D(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})]$ soit minimum au sens de Chebyshev.

La minimisation au sens de Chebyshev s'exprime sous la forme :

$$\min_{\text{coef de } P} \left(\max_{\omega \in [0, \pi]} |E(e^{j\omega})| \right) \quad (1.49)$$

Une méthode connue pour ce type de minimisation est fondée sur le théorème d'alternance.

Théorème d'alternance : Si $P(e^{j\omega})$ est une combinaison linéaire de M fonctions sinusoïdales (i.e. $P(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m \cos(m\omega)$), une condition nécessaire et suffisante pour que $P(e^{j\omega})$ soit l'unique et la meilleure approximation pondérée au sens de Chebyshev de $H'_D(e^{j\omega})$ est que l'erreur pondérée

$E(e^{j\omega})$ présente au moins $M + 1$ extrema sur l'intervalle d'approximation (tout intervalle compact de $[0, \pi[$).

Ceci se traduit par :

Il existe $M + 1$ pulsations ω_i telles que $E(e^{j\omega_i}) = -E(e^{j\omega_{i+1}})$, avec $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_M$
et telles que :

$$E(e^{j\omega_i}) = \max |E(e^{j\omega})| \text{ pour } \omega \in [0, \pi[$$

Un algorithme appelé algorithme d'échange ou de Remez repose sur le théorème précédent.

Algorithme de Remez.

Le théorème d'alternance donne un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes sur l'erreur commise. L'algorithme de Remez permet de résoudre le problème d'approximation en cherchant les fréquences extrêmes ω_i de la meilleure approximation.

La procédure est la suivante. On se donne a priori un ensemble ω_i de $M + 1$ fréquences. Soit δ l'erreur d'approximation, ou ondulation tolérée, on doit obtenir :

$$W'(e^{j\omega_i}) [H'_D(e^{j\omega_i}) - P(e^{j\omega_i})] = (-1)^i \delta, \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (1.50)$$

avec :

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m \cos(m\omega)$$

La solution de (1.50) s'obtient par inversion matricielle :

$$[A] [p] = [H'_D]$$

où :

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \cdots & \cos(M-1)\omega_0 & \frac{1}{W'(e^{j\omega_0})} \\ 1 & \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \cdots & \cos(M-1)\omega_1 & \frac{-1}{W'(e^{j\omega_1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_M & \cos 2\omega_M & \cdots & \cos(M-1)\omega_M & \frac{(-1)^M}{W'(e^{j\omega_M})} \end{pmatrix}$$

$$[p] = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{M-1} \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H'_D \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} H'_D(e^{j\omega_0}) \\ H'_D(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ H'_D(e^{j\omega_M}) \end{pmatrix}$$

L'inversion matricielle étant particulièrement lourde à effectuer, on calcule δ de façon analytique :

$$\delta = \frac{a_0 H'_D(e^{j\omega_0}) + \dots + a_M H'_D(e^{j\omega_M})}{\frac{a_0}{W'(e^{j\omega_0})} - \frac{a_1}{W'(e^{j\omega_1})} + \dots + \frac{(-1)^M a_M}{W'(e^{j\omega_M})}}$$

expression dans laquelle :

$$a_k = \prod_{i=0, i \neq k}^M \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i}$$

Une fois ce calcul effectué, la formule d'interpolation de Lagrange est utilisée pour interpoler $P(e^{j\omega})$ sur les M points $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M-1}$.

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \frac{\beta_k}{\cos \omega - \cos \omega_k} \right\} c_k}{\sum_{k=0}^{M-1} \left\{ \frac{\beta_k}{\cos \omega - \cos \omega_k} \right\}}$$

où :

$$c_k = H'_D(e^{j\omega_k}) - (-1)^k \frac{\delta}{W'(e^{j\omega_k})}, \text{ pour } k = 0, 1, \dots, M$$

et :

$$\beta_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{M-1} \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i}$$

On estime alors $E(e^{j\omega})$ sur un ensemble de fréquences suffisamment dense. Si $|E(e^{j\omega})| \leq \delta$ quelsoit ω , alors l'approximation est trouvée. Si $|E(e^{j\omega})| > \delta$ pour certaines fréquences alors on choisit un nouvel ensemble de $M + 1$ fréquences qui définissent les extrema alternés de $E(e^{j\omega})$. Au cas où il y aurait plus de $M + 1$ fréquences on ne conserve que celles pour lesquelles $E(e^{j\omega})$ est maximum en respectant l'alternance de signes.

Finalement la réponse impulsionnelle du filtre est obtenue en passant des coefficients p_m aux coefficients h_n .

Pour les filtres calculés à partir de l'algorithme de Remez on a pu estimer des formules empiriques permettant de connaître l'ordre a priori en fonction des caractéristiques d'ondulation et de bande de transition.

– pour les filtres de type passe-bas ou passe-haut :

$$N \simeq 1 + D(\delta_1, \delta_2) \frac{1}{\Delta f} - f(\delta_1, \delta_2) \Delta f \quad (1.51)$$

où :

$$D(\delta_1, \delta_2) = [0.0053(\log \delta_1)^2 + 0.0711 \log \delta_1 - 0.4761] \log \delta_2 \\ - [0.0026(\log \delta_1)^2 + 0.5941 \log \delta_1 + 0.4278]$$

et

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.01 + 0.5124(\log \delta_1 - \log \delta_2)$$

expressions dans lesquelles \log est le logarithme en base 10.

– pour les filtres de type passe-bande ou coupe-bande :

$$N \simeq 1 + C(\delta_1, \delta_2) \frac{1}{\Delta f_m} - g(\delta_1, \delta_2) \Delta f_m \quad (1.52)$$

où :

$$C(\delta_1, \delta_2) = [0.012(\log \delta_1)^2 + 0.0966 \log \delta_1 - 0.5132] \log \delta_2 \\ - [0.002(\log \delta_1)^2 + 0.5705 \log \delta_1 + 0.4431]$$

et

$$g(\delta_1, \delta_2) = 16.9 + 14.6(\log \delta_1 - \log \delta_2)$$

$\Delta f_m = \min(\Delta f_i) = \text{min.des bandes de transition.}$

1.3 Reconstruction

Si l'on appelle $H_0(z)$ et $H_1(z)$ (fig : 1.20) les fonctions de transfert des filtres passe-bas et passe-haut et $E(z)$ le signal d'entrée, on obtient par filtrage les signaux $S_0(z)$ et $S_1(z)$ définis par :

$$S_0(z) = H_0(z) E(z) \quad (1.53) \\ S_1(z) = H_1(z) E(z)$$

Une façon simple de reconstituer le signal d'entrée, au retard de traitement près, est de sommer les sorties :

$$R(z) = (H_0(z) + H_1(z)) E(z) = z^{-D} E(z) \quad (1.54)$$

On en déduit la condition de reconstruction élémentaire :

$$H_0(z) + H_1(z) = z^{-D} \quad (1.55)$$

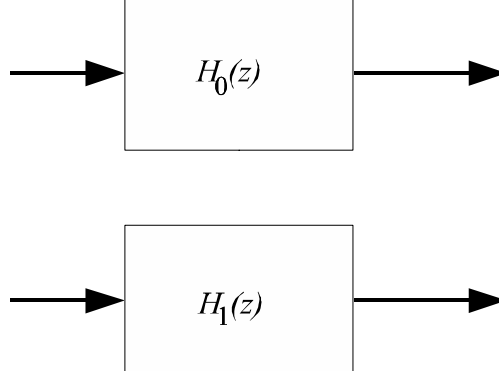


FIG. 1.20 – Filtres séparateurs.

Soit :

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} h_{0,n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{N_1-1} h_{1,n} z^{-n} = z^{-D} \quad (1.56)$$

Exemple :

On se donne le filtre passe-bas $H_0(z)$ de longueur 15 et le filtre passe-haut $H_1(z) = z^{-7} - H_0(z)$ dont les réponses en fréquence sont données figure (1.21).

En prenant une rampe comme signal d'entrée, on obtient les signaux donnés figure (1.22), sur laquelle on peut voir la reconstruction parfaite avec un retard de 7 échantillons.

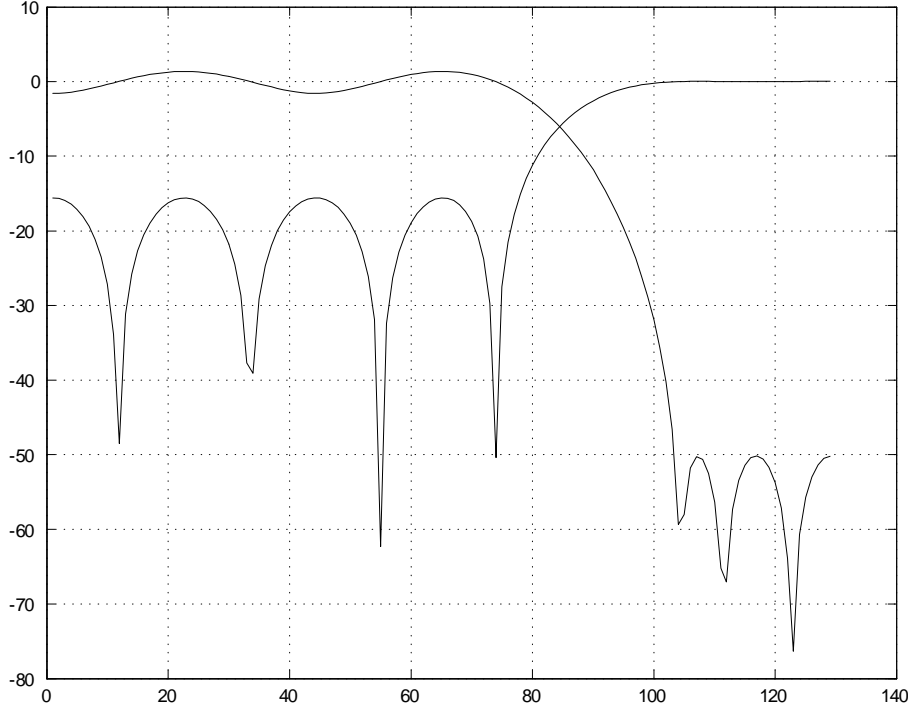
1.4 Filtre demi-bande

Les filtres peuvent ainsi être choisis de façon quelconque. Dans la mesure où il n'y a pas lieu a priori de favoriser une bande plutôt que l'autre, il semble plus naturel de couper la bande du signal en deux parties égales (bien que ce ne soit pas obligatoire). Le filtre passe-bas idéal serait donc défini par :

$$H_0(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq |f| < 0.25 \\ 0 & \text{pour } 0.25 \leq |f| < 0.5 \end{cases} \quad (1.57)$$

Par la méthode de la fenêtre, on obtient aisément pour la version non causale de la réponse impulsionnelle :

$$\begin{cases} h_0 = 0 \\ h_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \end{cases} \quad (1.58)$$

FIG. 1.21 – Réponses en fréquence de H_0 et H_1 .

Soit : $h_{2n} = 0$ ce qui est une caractéristique de tels filtres et qui se généralise à tout gabarit passe-bas tel que la bande passante soit de même largeur que la bande atténuée et que le gain à la fréquence $f = 0.25$ soit de 0.5.

Traduisons cela sur les caractéristiques d'un filtre à phase linéaire de type 1 (N impair, réponse impulsionnelle symétrique). On rappelle que pour de tels filtres, la réponse en fréquence est donnée par :

$$H_0(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(n\omega) \quad (1.59)$$

où : $\pm |H_0(e^{j\omega})| = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(n\omega)$ et $a_0 = h_{N-1}/2$ et $a_n = 2h_{\frac{N-1}{2}-n}$ pour $(n = 1, \dots, \frac{N-1}{2})$.

Notons $G(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M a_n \cos(n\omega)$ ($M = \frac{N-1}{2}$) la réponse du filtre à phase nulle. Soit ω_1 (resp. ω_2) la dernière fréquence passante (resp. la première fréquence atténuée), par raison de symétrie de la réponse en fréquence $\omega_1 + \omega_2 = \pi$ et mêmes ondulations en bande passant et atténuée :

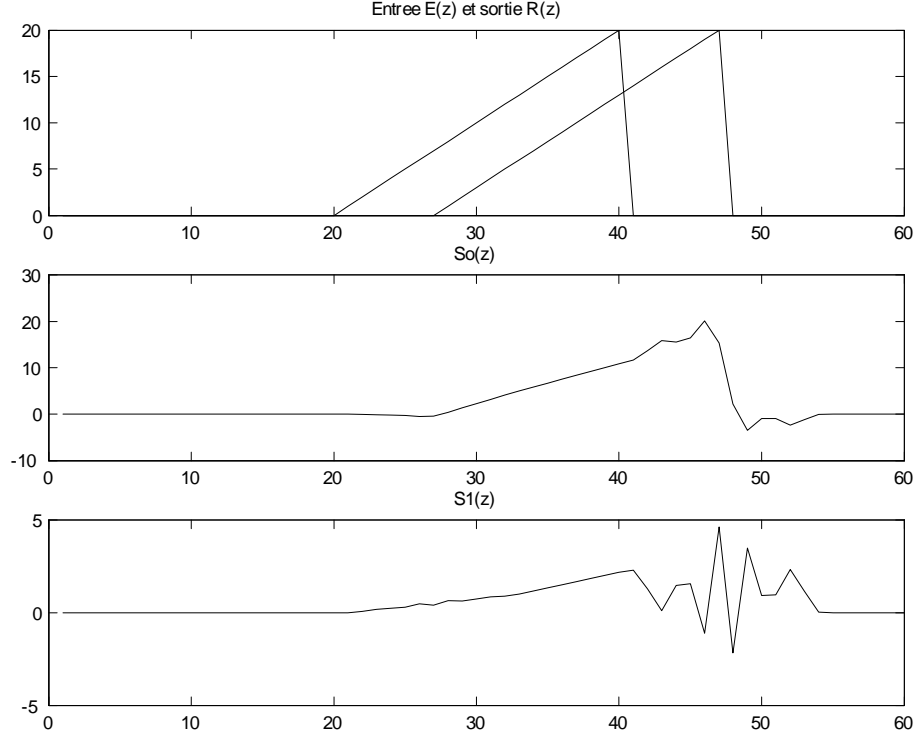


FIG. 1.22 – Réponses temporelles des filtres.

$$G(e^{j\omega}) = 1 - G(e^{j(\pi-\omega)}) \quad (1.60)$$

soit $G(z) + G(-z) = 1$ ou encore $H_0(z) + (-1)^{\frac{N-1}{2}} H_0(-z) = z^{-\frac{N-1}{2}}$. Si l'on substitue (1.59) dans (1.60), il vient $a_{2n} = 0, n \neq 0$ et $a_0 = h_M = 0.5$. Il s'ensuit que la réponse impulsionnelle a tous ses échantillons d'indice impair nuls pour M impair et tous ceux d'indice pair nuls pour M pair (sauf h_M). Ainsi, si M est pair $h_0 = h_{N-1} = 0$, le filtre n'est donc pas de longueur N mais de longueur $N - 2$ car on peut supprimer h_0 et h_{N-1} qui sont nuls. Il en résulte que pour un filtre demi bande N est de la forme :

$$N = 4k + 3 \implies M = 2k + 1 \quad (1.61)$$

$$h_n = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \neq M \\ 0.5 & n \text{ pair} \end{cases} \quad (1.62)$$

Le filtre passe-haut complémentaire est ainsi :

$$H_1(z) = z^{-M} - H_0(z) \quad (1.63)$$

Si il est simple d'obtenir les coefficients h_n nuls à l'aide de la méthode de la fenêtre, il n'en est pas de même avec les autres méthodes. Pour atteindre ce but, il est intéressant de prendre en compte le fait que ces coefficients sont nuls et ne chercher que les coefficients non nuls.

Soit donc un filtre à phase linéaire $V(z) = \sum_{n=0}^M v_n z^{-n}$ de longueur $M+1$, M impair, et à coefficients symétriques. C'est un filtre de type 2. Nous savons alors que forcément $V(e^{j\pi}) = 0$. De plus :

$$V(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M+1}{2}-1} b'_n \cos(n\omega) = e^{-j\omega \frac{M}{2}} V_0(e^{j\omega}) \quad (1.64)$$

Compte tenu de la forme de $V_0(e^{j\omega})$ (terme en $\cos(\frac{\omega}{2})$), sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la réponse est antisymétrique par rapport à π (fig :1.23).

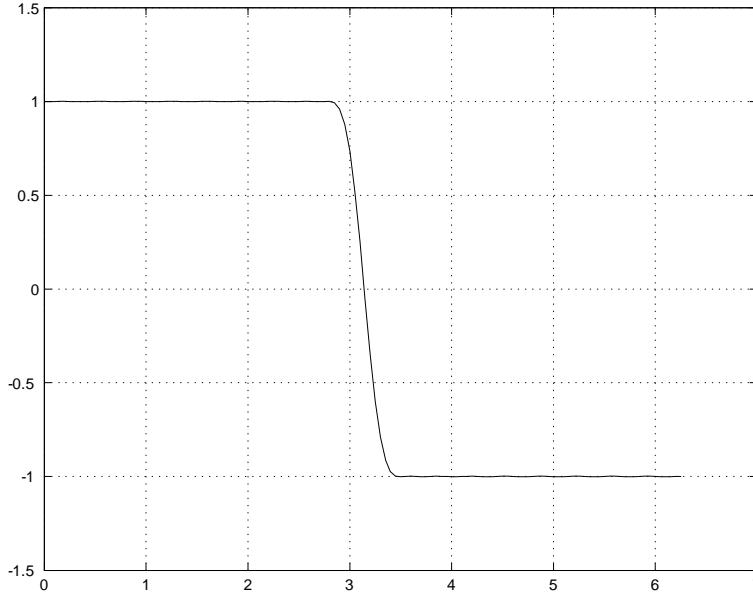
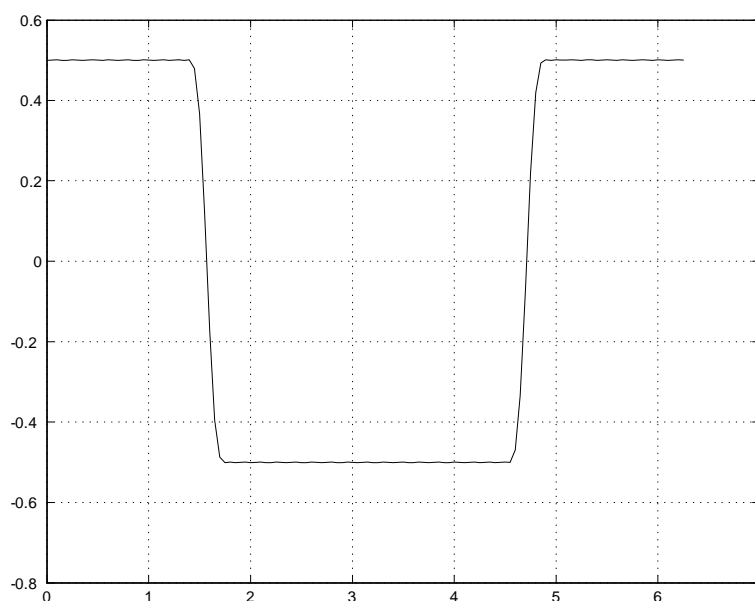


FIG. 1.23 – $V_0(e^{j\omega})$.

Si maintenant on considère $V(z^2)$, sa réponse en fréquence est $V(e^{j2\omega})$ (fig :1.24), il suffit de rajouter une constante pour que l'on obtienne la réponse d'un demi bande.

D'où :

$$H_0(z) = \frac{V(z^2) + z^{-M}}{2} \quad (1.65)$$

FIG. 1.24 – $V_0(e^{j2\omega})$.

1.5 Redondance d'information

Dans ce qui précède, il est clair que le travail s'effectue à une cadence double dans la mesure où les signaux $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont échantillonnés à la même cadence que l'entrée $E(z)$. Il y a donc a priori redondance de l'information. Cependant on peut remarquer que, dans le cas de filtres demi bande idéaux, la bande passante des signaux S_0 et S_1 ne correspond qu'au quart de la fréquence d'échantillonnage, autrement dit ils peuvent être sous-échantillonnés d'un facteur 2 sans perte d'information. Pour reconstituer le signal $R(z)$, il faudra réaugmenter la cadence d'échantillonnage d'un facteur 2.

Dans le cas pratique où les filtres demi bande ne sont pas idéaux, le fait de sous échantillonner d'un facteur 2 va provoquer du repliement spectral et l'on peut se poser la question de savoir si la reconstruction sera toujours possible. Un exemple élémentaire, sans filtres, tend à montrer qu'une solution doit exister. Soit le système de la figure (1.25), il est clair, que le signal reconstituer $R(z)$ est simplement $z^{-1}E(z)$.

Ici le système est sans intérêt puisque les signaux \hat{S}_0 et \hat{S}_1 portent la même information. Cependant, il montre que même si le repliement spectral est total, il est possible de retrouver l'information initiale. \hat{S}_0 seul, ou \hat{S}_1 seul, n'y suffirait pas, c'est la connaissance des deux qui le permet. Dans le cas où

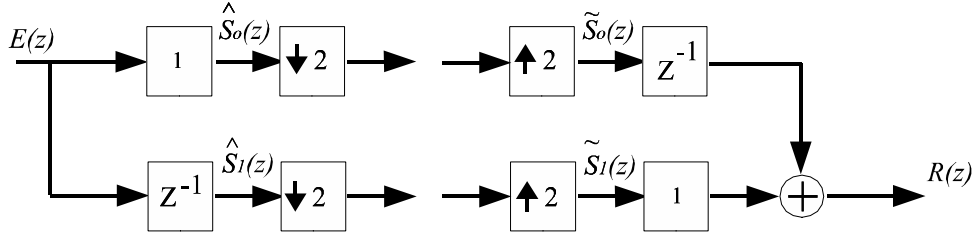


FIG. 1.25 – Décomposition sans filtrage.

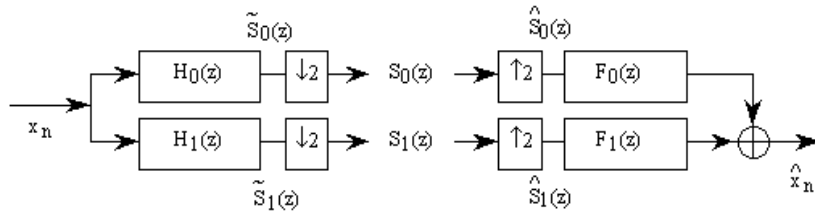


FIG. 1.26 – Banc de filtres à deux voies

l'on utilise des filtres demi bande non idéaux, la question peut se poser de la manière suivante : " *existe-t-il des filtres de décomposition $H_0(z)$ et $H_1(z)$, et des filtres de reconstruction $F_0(z)$ et $F_1(z)$, tels que $R(z) = z^{-D}E(z)$?* "

Pour résoudre ce problème, il nous faut d'abord établir les relations entre les transformées en z des signaux ne possédant pas la même cadence d'échantillonnage.

Chapitre 2

Banc de filtres à 2 voies

2.1 Changement de cadence d'échantillonnage

2.1.1 Réduction

Soit un signal $x(n)$ correspondant à un échantillonnage à la fréquence 1, et supposons que son spectre occupe toute la bande $(|X(e^{j2\pi f})|) \neq 0, f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

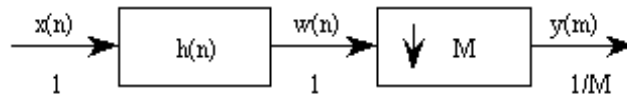


FIG. 2.1 – Principe de réduction de fréquence

La réduction de fréquence d'un facteur M faisant passer la bande d'échantillonnage de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ à $[-\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M}]$, il est nécessaire de filtrer avant de sous échantillonner pour éviter les phénomènes de repliements dus à la nouvelle périodisation du spectre (figure 2.2).

Le filtre est défini par :

$$|H(e^{j2\pi f})| = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < \frac{1}{2M} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.1)$$

A la sortie du filtre on obtient la séquence $w(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$ et la séquence $y(m)$ s'en déduit par : $y(m) = w(mM)$.

La relation entrée/sortie s'écrit : $y(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(mM-k)$. Le spectre de $y(m)$ est donné figure (2.3).

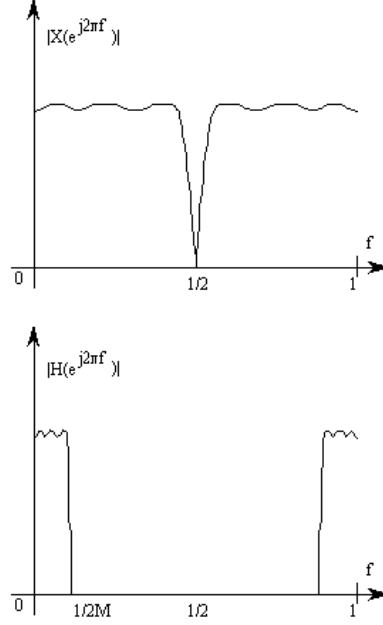


FIG. 2.2 – Filtrage antirepliement

L'ensemble filtrage/sous échantillonnage n'est pas invariant dans le temps, puisque pour une séquence $x(n)$ donnée il y a M façons de calculer la séquence $y(m)$. En d'autres termes si on sous échantillonne le signal $x(n - p)$ alors la sortie n'est pas $y(m - \frac{p}{M})$ sauf si $p = qM$, $q \in \mathcal{N}$.

Etablissons les relations entre les transformées en z desquelles on déduira les relations entre les transformées de Fourier.

Soit la séquence $v(n)$ telle que :

$$v(n) = \begin{cases} w(n) & \text{pour } n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.2)$$

Cela se traduit par :

$$v(n) = w(n) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - mM) \quad (2.3)$$

Où $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - mM)$ (figure 2.4) est un train d'impulsions unités périodiques qui peut encore s'exprimer sous la forme :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n - mM) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{m}{M}} \quad (2.4)$$

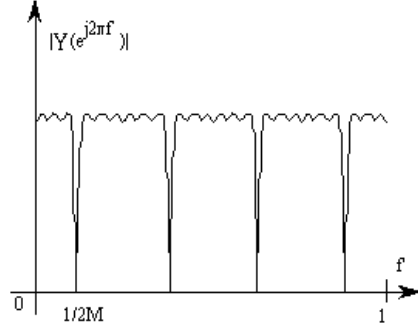


FIG. 2.3 – Spectre du signal après sous-échantillonnage

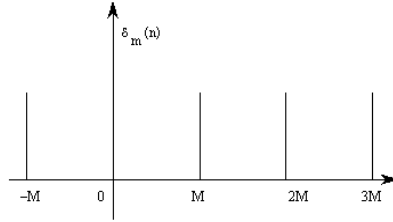


FIG. 2.4 – Train d'impulsions équivalent pour le sous-échantillonnage

On obtient par substitution $v(n) = w(n) \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{r}{M} n}$ et comme $y(m) = v(mM) = w(mM)$, il s'ensuit :

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(mM) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v(m) z^{-\frac{m}{M}} \quad (2.5)$$

Remplaçant $v(m)$ par son expression en fonction de $w(m)$:

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} W \left(e^{-j2\pi \frac{r}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right) \quad (2.6)$$

Compte tenu de ce que $W(z) = H(z)X(z)$, l'expression de $Y(z)$ s'écrit finalement :

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} H \left(e^{-j2\pi \frac{r}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right) X \left(e^{-j2\pi \frac{r}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right) \quad (2.7)$$

Soit sur le cercle unité $z = e^{j2\pi f}$, $f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$Y(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} H \left(e^{j2\pi \frac{(f-r)}{M}} \right) X \left(e^{j2\pi \frac{(f-r)}{M}} \right) \quad (2.8)$$

Dans le cas d'un filtre idéal, $H\left(e^{j2\pi\frac{(f-r)}{M}}\right) = 0$ pour $r \neq 0$, d'où :
 $Y(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{M}X\left(e^{j2\pi\frac{f}{M}}\right)$

Dans la pratique, le filtre passe-bas doit faire en sorte que les composantes en fréquence pour $|f| > \frac{1}{2M}$ soient négligeables. Ce qui signifie que tous les termes tels que $r \neq 0$ sont presque nuls, d'où : $Y(e^{j2\pi f}) \approx \frac{1}{M}X\left(e^{j2\pi\frac{f}{M}}\right)$

Si le spectre de la séquence $x(n)$ était effectivement limité à la bande $\left[-\frac{1}{2M}, \frac{1}{2M}\right]$ alors on aurait exactement : $Y(z) = \frac{1}{M}X\left(z^{\frac{1}{M}}\right)$.

2.1.2 Augmentation

Dans ce cas (figure 2.5) on a $1 = LF$. Le procédé doit permettre d'ajouter $(L - 1)$ échantillons utiles entre deux $x(n)$ consécutifs.

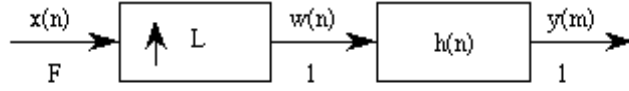


FIG. 2.5 – Principe de l'augmentation de fréquence

N'ayant aucune information sur les $(L - 1)$ échantillons manquants, on commence par intercaler $(L - 1)$ échantillons nuls entre deux $x(n)$ consécutifs, on obtient la séquence $w(m)$ définie par :

$$w(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{L}\right) & \text{pour } m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.9)$$

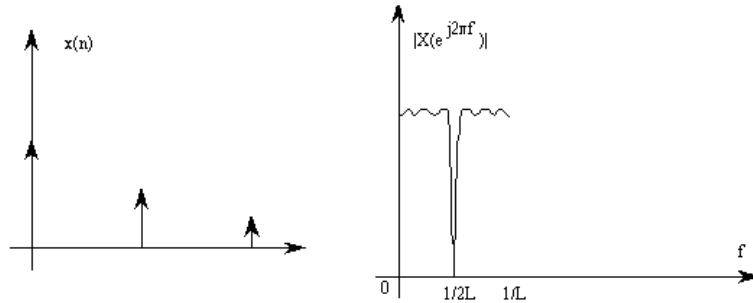


FIG. 2.6 – Signal et spectre avant suréchantillonnage

Dont la transformée en z est :

$$W(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} w(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-mL} = X(z^L) \quad (2.10)$$

Le spectre (figure 2.7) de $w(m)$ est donc celui de $x(n)$ (figure 2.6) complété par les images autour de $\frac{1}{L}, \frac{2}{L}, \dots$, il faut donc filtrer à l'aide d'un passe-bas pour éliminer ces images et obtenir un spectre équivalent à celui de $x(n)$ mais échantillonné à 1.

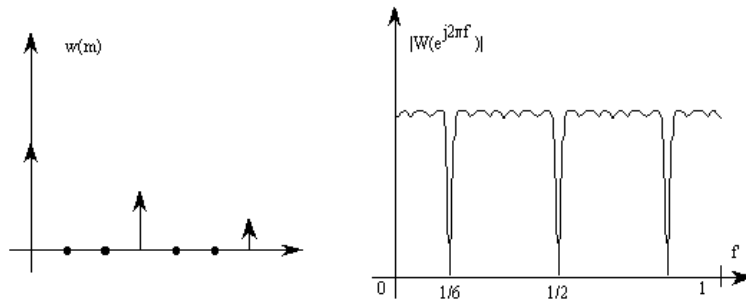


FIG. 2.7 – Signal et spectre après insertion de $L-1$ zéros

Soit le filtre défini par :

$$H(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} G & \text{pour } |f| < \frac{1}{2L} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.11)$$

L'expression du spectre de $y(m)$ (figure 2.8) en fonction de celui de $x(n)$ est :

$$Y(e^{j2\pi f}) = H(e^{j2\pi f})X(e^{j2\pi fL})$$

Soit d'après l'équation (2.11) :

$$Y(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} GX(e^{j2\pi fL}) & \text{pour } |f| < \frac{1}{2L} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.12)$$

Afin d'assurer la correspondance en amplitude des échantillons, le gain G doit être égal à L .

En effet si l'on raisonne sur $y(0)$, il vient :

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_{-1/2}^{1/2} Y(e^{j2\pi f}) df = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{j2\pi f}) X(e^{j2\pi fL}) df \\ y(0) &= \int_{-1/2L}^{1/2L} GX(e^{j2\pi fL}) df = G \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{j2\pi f'}) \frac{df'}{L} = \frac{G}{L} x(0) \end{aligned}$$

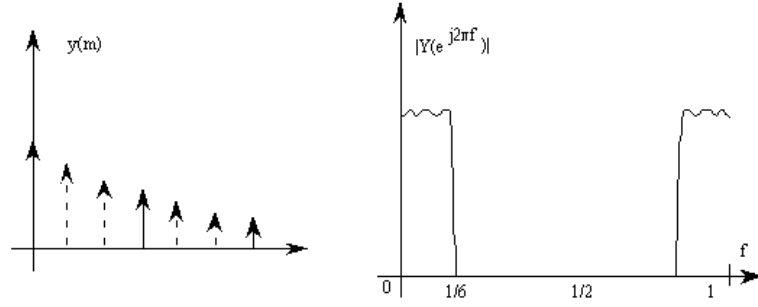


FIG. 2.8 – Signal et spectre après suréchantillonnage

D'où le résultat $G = L$.

La relation de filtrage s'écrit : $y(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(k)h(m-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(\frac{k}{L})h(m-k)$

Posons $k = rL \rightarrow y(m) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r)h(m - rL)$.

Une autre expression peut être obtenue à l'aide du changement de notation suivant :

$r = \lfloor \frac{m}{L} \rfloor - n$, et $m - \lfloor \frac{m}{L} \rfloor L = \langle m \rangle_L$, où $\lfloor \frac{m}{L} \rfloor$ désigne la partie entière et $\langle m \rangle_L = m$ modulo L .

Il vient : $y(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(m - \lfloor \frac{m}{L} \rfloor L + nL) x(\lfloor \frac{m}{L} \rfloor - n)$

En notant $h_m(n) = h(nL + \langle m \rangle_L)$ on obtient l'écriture condensée :

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_m(n) x\left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right) \quad (2.13)$$

On retrouve l'écriture d'une convolution discrète dans laquelle $h_m(n)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre non-invariant, elle est périodique de période L .

$$h_m(n) = h(nL + \langle m \rangle_L) \text{ pour tout } m \text{ et } n. \quad (2.14)$$

2.1.3 Représentation polyphase

Il existe deux types d'écritures des composantes polyphases d'un filtre, elles correspondent au schéma de décimation pour le type 1 et au schéma d'interpolation pour le type 2. La notion de composantes polyphases étant applicable aux filtres de type RIF et RII, nous utiliserons la fonction de

transfert $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$.

Polyphase de Type 1

La représentation polyphase de type 1 est utilisée pour la décimation. On écrit :

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} E_m(z^M) z^{-m} \quad (2.15)$$

$$\text{où : } E_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_m(n) z^{-n} \text{ et } e_m(n) = h_{nM+m}.$$

Les $E_m(z)$ sont les composantes polyphases de $H(z)$ et $E_m(e^{j2\pi f'})$ est passe-tout dans la bande $f' = [-1/2, 1/2]$ si $|H(e^{j2\pi f})| = 1$ pour $|f| < \frac{1}{2M}$, ($f' = \frac{f}{M}$).

Polyphase de Type 2

La représentation polyphase de type 2 est utilisée pour l'interpolation. Elle correspond à une simple réécriture du type 1.

$$H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} R_l(z^L) z^{-(L-1-l)} \quad (2.16)$$

$$\text{où : } R_l(z) = E_{L-1-l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_l(n) z^{-n} \text{ et } r_l(n) = e_{L-1-l}(n) = h_{nL+L-1-l}.$$

Remarque : dans le cas de filtres de longueurs finies (RIF), la mise en œuvre est rendue plus simple si la longueur N du filtre est un multiple de M ou L , car dans ce cas toutes les composantes polyphases sont de même longueur.

Exemples

Décimation $M = 2$ La figure (2.9) correspond à une implantation directe à l'aide de la représentation polyphase. En considérant que le sous échantillonnage ne conserve que les échantillons d'indice pair, on peut aisément vérifier que :

$$y_m = s_0(2n) + s_1(2n)$$

où :

$$\begin{aligned} s_0(2n) &= h_0 x_{2n} + h_2 x_{2n-2} + \dots \\ s_1(2n) &= h_1 x_{2n-1} + h_3 x_{2n-3} + \dots \end{aligned}$$

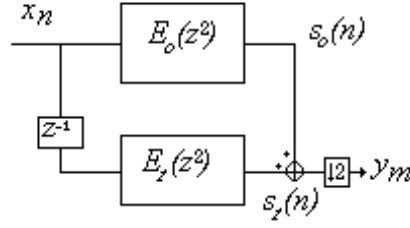


FIG. 2.9 – Décimation : implantation directe.

De même, on constate l'inutilité du calcul de l'échantillon suivant qui est écarté par le sous échantillonnage. Ceci conduit à la représentation de la figure(2.10), pour laquelle tous les échantillons de sortie sont utiles, le sous échantillonnage ayant été reporté à l'entrée.

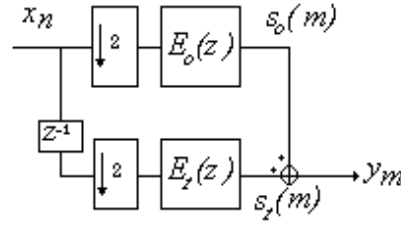


FIG. 2.10 – Décimation : implantation polyphase.

Dans cette structure chaque filtre $E_m(z)$ travaille à la fréquence la plus basse, celle de sortie.

Interpolation $L = 2$ Par transposition le schéma de la figure(2.11) donne l'implantation polyphase d'un interpolateur.

Les sorties $y_0(m)$ et $y_1(m)$ ont la forme :

$$\begin{aligned} y_0(m) &= \dots 0, y_0(2m), 0, y_0(2m+2), 0, \dots \\ y_1(m) &= \dots 0, y_1(2m), 0, y_1(2m+2), 0, \dots \end{aligned}$$

On en déduit la sortie $y_m = \dots y_1(2m), y_0(2m), y_1(2m+2), y_0(2m+2), \dots$

Dans cette structure chaque filtre $R_l(z)$ travaille à la fréquence la plus basse, celle d'entrée.

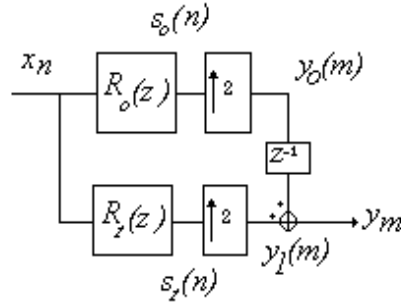


FIG. 2.11 – Interpolation : implantation polyphase.

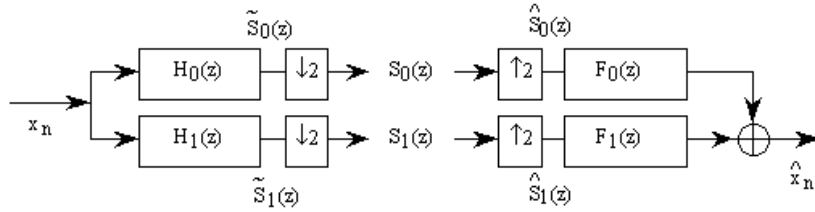


FIG. 2.12 – Banc de filtres à deux voies

2.2 Banc de filtres à deux voies

Compte tenu de ce qui précède, il est maintenant possible d'écrire l'expression du signal reconstitué et d'en déduire les conditions de reconstruction. On notera maintenant $R(z)$ sous la forme $\hat{X}(z)$.

Le banc de filtres à deux peut se représenter comme indiqué figure (1.26).

On obtient successivement :

1. $\hat{X}(z) = F_0(z)\hat{S}_0(z) + F_1(z)\hat{S}_1(z)$
2. $\hat{S}_0(z) = S_0(z^2)$ et $\hat{S}_1(z) = S_1(z^2)$
3. $S_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^1 \tilde{S}_0\left(z^{\frac{1}{2}}W_2^r\right)$ et $S_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^1 \tilde{S}_1\left(z^{\frac{1}{2}}W_2^r\right)$
4. $\tilde{S}_0(z) = H_0(z)X(z)$ et $\tilde{S}_1(z) = H_1(z)X(z)$
5. D'après 3, 4 devient : $S_0(z) = \frac{1}{2}[H_0(z^{\frac{1}{2}})X(z^{\frac{1}{2}}) + H_0(z^{\frac{1}{2}}W_2^1)X(z^{\frac{1}{2}}W_2^1)]$,
or $W_2^1 = e^{-j\pi} = -1$, on en déduit :

$$S_0(z^2) = \frac{1}{2} [H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)]$$

$$S_1(z^2) = \frac{1}{2} [H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)]$$

6. Soit pour la relation entrée-sortie :

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z) F_0(z) + H_1(z) F_1(z)] X(z) + \frac{1}{2} [H_0(-z) F_0(z) + H_1(-z) F_1(z)] X(-z) \quad (2.17)$$

L'équation de filtrage (2.17) montre que $\hat{X}(z)$ dépend de $X(z)$ et $X(-z)$. Le dernier terme représente le repliement lié à la décimation par le facteur

2. En écrivant $\hat{X}(z) = T(z) X(z) + A(z) X(-z)$, on peut exprimer les conditions de reconstruction parfaite par :

1. $A(z) = 0$ c'est la condition suffisante de non repliement.
2. $T(z) = cz^{-n_0}$ c'est la condition de non distorsion d'amplitude et de phase.

Condition d'annulation de repliement

En choisissant :

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H_1(-z) \\ F_1(z) &= -H_0(-z) \end{aligned} \quad (2.18)$$

on obtient $A(z) = 0$, indépendamment du caractère RIF ou RII des filtres utilisés.

Si l'on exprime les conditions de reconstruction parfaite à l'aide de la matrice des composantes modulées :

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z^{-n_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

la solution est donnée par :

$$\begin{cases} F_0(z) = \frac{2z^{-n_0}}{D(z)} H_1(-z) \\ F_1(z) = -\frac{2z^{-n_0}}{D(z)} H_0(-z) \end{cases} \quad (2.20)$$

où $D(z) = H_0(z) H_1(-z) - H_0(-z) H_1(z)$.

Si $H_0(z)$ et $H_1(z)$ sont RIF, une solution RIF, pour $F_0(z)$ et $F_1(z)$, est donnée par $D(z) = 2z^{-n_0}$.

Condition de reconstruction parfaite

Les relations (2.18) étant satisfaite la fonction de transfert s'écrit :

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0(z) H_1(-z) - H_1(z) H_0(-z)] = \frac{1}{2} D(z) \quad (2.21)$$

Il y a reconstruction parfaite car $T(z)$ est sans distorsion d'amplitude ($|T(e^{j2\pi f})| = 1$) et sans distorsion de phase ($\arg(T(e^{j2\pi f})) = -2\pi n_0 f$). La fonction de transfert est passe-tout à phase linéaire, soit $T(z) = z^{-n_0}$.

En remarquant que $T(z)$ est de la forme $P(z) - P(-z)$, on obtient un polynôme qui ne présente que des puissances impaires de z , soit $T(z) = P(z) - P(-z) = z^{-1}S(z^2)$. La réponse en fréquence $T(e^{j2\pi f})$ présente une périodicité de $1/2$ et non de 1 . Pour des filtres à coefficients réels cela implique que $T(e^{j2\pi f})$ est symétrique par rapport à $f = 1/4$.

2.2.1 Un banc élémentaire

Si l'on rajoute la contrainte $H_1(z) = H_0(-z)$, l'ensemble des solutions obtenues est dit *miroir en quadrature* ou QMF pour *Quadrature Mirror Filters*.

Ceci est lié à l'interprétation fréquentielle. En effet la relation entre $H_1(z)$ et $H_0(z)$ impose $H_1(e^{j2\pi f}) = H_0(e^{j2\pi(f+1/2)})$, autrement dit les réponses sont symétriques. Si $H_0(z)$ est un passe-bas alors $H_1(z)$ est un passe-haut.

Avec le choix de filtres QMF la relation de filtrage devient :

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_1^2(z)] X(z) \quad (2.22)$$

Si l'on veut que $\hat{x}_n = x_{n-n_0}$, il faut que $H_0^2(z) - H_1^2(z) = 2z^{-n_0}$.

Le seul degré de liberté est $H_0(z)$, et il n'y a malheureusement pas de solution avec $H_0(z)$ et $H_1(z)$ d'ordre plus grand que 1 qui satisfasse simultanément aux deux conditions QMF et RP. Une solution triviale est donnée par $H_0(z) = \sqrt{\frac{1}{2}}(1+z^{-1})$, qui n'a pas d'utilité pratique. On doit donc se contenter de satisfaire la condition QMF et d'approcher au mieux la condition RP.

On peut alors avoir la réalisation suivante. Les relations QMF se traduisent sur les réponses impulsionnelles par :

$$\begin{cases} h_1(n) = (-1)^n h_0(n) \\ f_0(n) = h_0(n) \\ f_1(n) = -(-1)^n h_0(n) \end{cases} \quad (2.23)$$

Soit à écrire $H_0(z)$ sous forme polyphase, $H_0(z) = G_0(z^2) + z^{-1}G_1(z^2)$, avec $g_0(m) = h_0(2m)$ et $g_1(m) = h_0(2m+1)$, il vient la structure figure (2.13).

Une solution approchée du problème est la suivante. Considérons que $H_0(z)$ soit un filtre à phase linéaire alors $h_0(N-1-n) = \pm h_0(n)$. En fait le caractère passe-bas de $H_0(z)$ ne permet de retenir que la solution

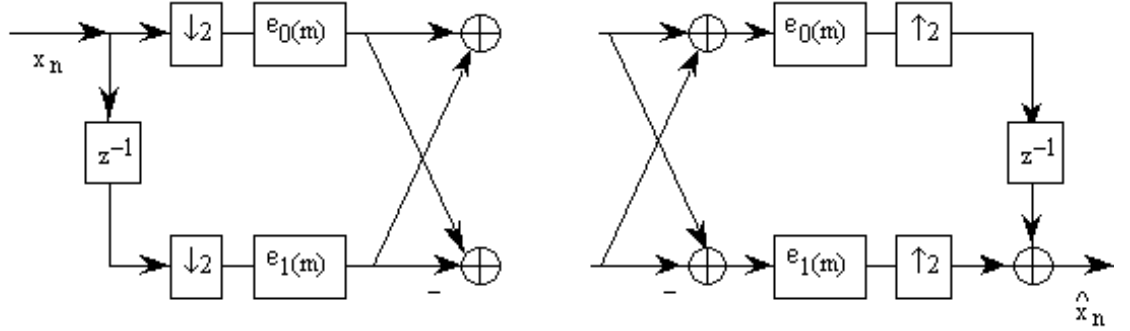


FIG. 2.13 – Structure polyphase d'un banc de 2 filtres

$h_0(N-1-n) = h_0(n)$, pour laquelle $H_0(e^{j2\pi f}) = e^{-j\pi(N-1)f} R(\omega)$, où $R(\omega)$ est une fonction réelle. Dans ces conditions $T(e^{j2\pi f})$ s'écrit :

$$T(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(N-1)f} \left(|H_0(e^{j2\pi f})|^2 - (-1)^{(N-1)} |H_0(e^{j2\pi(f+1/2)})|^2 \right) \quad (2.24)$$

Ceci suppose N pair, autrement N impair implique que le gain à la fréquence $\frac{1}{4}$ est forcé à zéro par la condition QMF. D'où

$$T(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi(N-1)f} \left(|H_0(e^{j2\pi f})|^2 + |H_0(e^{j2\pi(f+1/2)})|^2 \right) \quad (2.25)$$

et la condition de reconstruction parfaite devient :

$$|H_0(e^{j2\pi f})|^2 + |H_0(e^{j2\pi(f+1/2)})|^2 = 2 \quad (2.26)$$

Soit $[f_2, \frac{1}{2}]$ la bande atténuée du filtre $H_0(z)$, on peut minimiser la quantité :

$$E = \int_{f_2}^{1/2} |H_0(e^{j2\pi f})|^2 df + \alpha \int_0^{1/2} \left[|H_0(e^{j2\pi f})|^2 + |H_0(e^{j2\pi(f+1/2)})|^2 \right] df \quad (2.27)$$

Le premier terme est l'énergie dans la bande atténuée, le second est la mesure de l'ondulation de reconstruction.

2.2.2 Un banc plus efficace

La condition de non repliement (2.18) étant satisfaite, on peut chercher une solution différente de la contrainte QMF. Pour cela on se réfère à la notion de filtres à puissance symétrique. De tels filtres vérifient la propriété :

$$\tilde{H}(z) H(z) + \tilde{H}(-z) H(-z) = 1 \quad (2.28)$$

où $\tilde{H}(z) = H_*(z^{-1})$.

Soit $H_0(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_0(n) z^{-n}$, en choisissant $H_1(z) = -z^{-(N-1)} \tilde{H}_0(-z)$, et pour N pair, la fonction de transfert (2.21) devient :

$$T(z) = \frac{z^{-(N-1)}}{2} \left[\tilde{H}_0(z) H_0(z) + \tilde{H}_0(-z) H_0(-z) \right] \quad (2.29)$$

$H_0(z)$ étant à puissance symétrique on a bien un banc à reconstruction parfaite défini par :

$$\begin{aligned} H_1(z) &= -z^{-(N-1)} \tilde{H}_0(-z) \\ F_0(z) &= z^{-(N-1)} \tilde{H}_0(z) \\ F_1(z) &= z^{-(N-1)} \tilde{H}_1(z) \end{aligned} \quad (2.30)$$

En utilisant (2.30) on en déduit les relations d'*orthogonalité* :

$$\begin{aligned} 2 \sum_n h_0(n) h_0(n-2k) &= \delta(k) \\ 2 \sum_n h_0(n) h_1(n-2k) &= 0 \\ 2 \sum_n h_1(n) h_1(n-2k) &= \delta(k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Le terme de repliement est éliminé, les filtres ne vérifient pas la condition QMF, mais on les appelle CQF pour *Conjugate Quadrature mirror Filters*. Ceci provient de la construction de la solution.

Pour synthétiser $H_0(z)$, on remarque d'abord que le filtre produit $\tilde{H}_0(z) H_0(z)$ est un filtre demi-bande (à l'aide de 2.26). Soit donc, $G(z)$ la fonction de transfert d'un filtre RIF demi-bande d'ordre $2(N-1)$ à phase linéaire. La réponse en fréquence est :

$$G(e^{j2\pi f}) = e^{j2\pi(N-1)f} G_0(e^{j2\pi f}) \quad (2.32)$$

Dans cette expression $G_0(e^{j2\pi f})$ n'est pas le module du gain, mais le gain du filtre à phase nulle qui peut être positif ou négatif (prise en compte de saut de phase de π).

Supposons $N-1$ impair, la méthode optimale au sens de Chebyshev conduit à une réponse à ondulation constante d'amplitude 2δ (figure 2.14).

Si on utilise la symétrie par rapport $f = \frac{1}{4}$, il vient :

$$G(z) - G(-z) = cz^{-(N-1)} \quad (2.33)$$

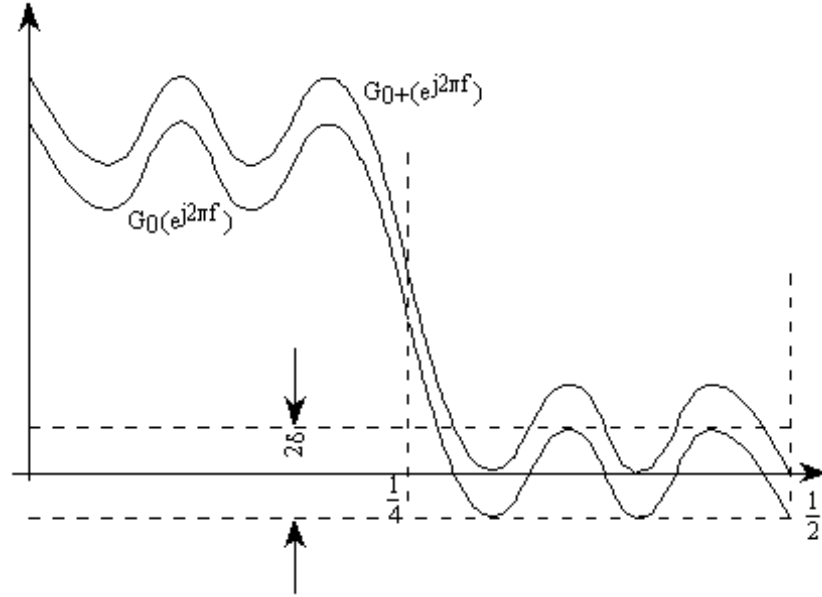


FIG. 2.14 – Synthèse de filtre pour la reconstruction parfaite

Soit alors $G_+(z) = G(z) + \delta z^{-(N-1)}$, le gain $G_{0+}(e^{j2\pi f})$ est toujours positif ou nul. En raison de l'ondulation constante $G_+(z)$ possède des zéros doubles aux fréquences f_k telles que $G_{0+}(e^{j2\pi f_k}) = 0$.

Il existe donc une factorisation de $G_+(z)$ en :

$$G_+(z) = \prod_{k=1}^{N-1} (z - z_k) (z^{-1} - z_k) = z^{-(N-1)} \prod_{k=1}^{N-1} (z - z_k) (1 - z z_k) \quad (2.34)$$

En raison de la symétrie de la réponse on a : $G_+(z) + (-1)^{(N-1)} G_+(-z) = \alpha z^{-(N-1)}$

On a le choix des racines de $G_+(z)$ pour fabriquer $H_0(z)$, d'autre part en choisissant :

$$H_1(z) = z^{-(N-1)} H_0(z^{-1}) \quad (2.35)$$

il vient $T(z) = [H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1})]z^{-(N-1)} = \alpha z^{-(N-1)}$

D'où

$$\hat{X}(z) = \alpha z^{-(N-1)} X(z) \quad (2.36)$$

Ce qui traduit la RP. On remarque que tous les filtres sont de mêmes longueurs et par construction ne sont pas à phase linéaire. Les bancs de filtres ainsi obtenus sont dits orthogonaux dans la mesure où ils sont définis à partir d'un seul et même filtre.

2.2.3 Application

Si maintenant on permute les bancs d'analyse et de synthèse (fig :2.15), en supposant que $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont deux signaux différents, une transmission parfaite (i.e. $X(z) = \hat{X}(z)$) permet de retrouver en sortie, et à un retard près, $S_0(z)$ et $S_1(z)$.

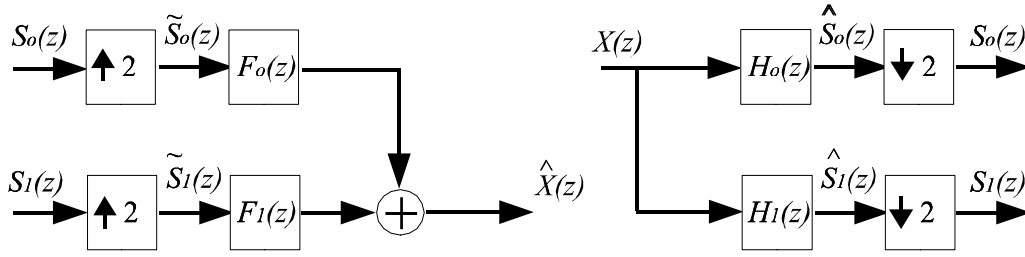


FIG. 2.15 – Transmultiplexeur.

Un tel système s'appelle un transmultiplexeur, et une extension du principe à M voies, ouvre la porte à la notion de transmission numérique telle qu'on le trouve dans le DAB (Digital Audio Broadcast) ou le DVB (Digital Video Broadcast). Dans de tels systèmes, les filtres sont remplacés par des structures à base de transformées de Fourier discrètes, et on les appelle systèmes OFDM (Orthogonal Transform Digital Modulation). Il est à noter qu'il n'y a ici qu'une seule fréquence porteuse et que les modulation et démodulation ne s'effectuent que par simple changement de cadence d'échantillonnage. De nombreux problèmes viennent se greffer à ce principe de base, il est assez simple d'en mettre un en évidence à partir de la figure (2.15). En effet si l'on considère une application de transmission, alors $X(z) = C(z) \hat{X}(z)$, où $C(z)$ représente la fonction de transfert du canal de transmission. Il suffit de prendre $C(z) = z^{-1}$ pour que les sorties S_0 et S_1 soient permutées, ce qui n'est pas le but recherché. On conçoit alors la nécessité de disposer de techniques d'égalisation de canal afin que le dispositif fonctionne correctement.