1. Теория вероятностей

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» и «неудача», при этом успех в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью $p \in (0, 1)$, а неудача — с вероятностью $q = 1 - p$.

Формула Бернулли вероятность того, что событие наступит ровно k раз при n испытаниях

$$P_{k,n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

1.1. Локальная теорема Муавра — Лапласа

Если в схеме Бернулли n стремится к бесконечности, то

$$P(a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

где μ – количество успехов, $\int_a^b$ -интеграл Лапласа. Рекомендуется использовать при $n > 100$ и $\mu > 20$.

На заметку (для схемы Б.):
– $M[\mu] = np$ – математическое ожидание
– $D[\mu] = npq$ – дисперсия
– $\sigma = \sqrt{D[\mu]} = \sqrt{npq}$ – среднеквадратичное отклонение

И факты про интеграл Лапласа :

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ *важно!*
2. $\Phi(x) \approx 0.5$, если $x > 5$

1.2. Центральная предельная теорема

Утверждает о том, что сумма одинаково распределённых случайных и независимых случайных велечин, имеет распределение, близкое к нормальному.

Пусть $\xi_1 \ldots \xi_n$ - последовательность случайных величин, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, тогда:

$$\frac{S_n - nM[\xi_k]}{\sqrt{nD[\xi_k]}} \to N(0.1)$$

Следствие:

$$P(a \leq \frac{S_n - nM[\xi_k]}{\sqrt{nD[\xi_k]}} \leq b) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

1.3. Неравенства Чебышева

1. $P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M[\xi]}{\varepsilon}$
2. $P(|\xi - M[\xi]| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$
3. $P(|\xi - M[\xi]| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D[\xi]}{\varepsilon^2}$

1.4. Локальные предельные теоремы

– Пуассона: $P(\mu = k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$. Использовать, когда $np \leq 10$

– Муавра-Лапласа: $P(\mu = k) \approx \dfrac{\Phi(x)}{\sigma}$, где $x = \dfrac{k - np}{\sigma}$

2. Дискретная математика

3. C++

4. Алгебра и геометрия