Devoir 4 : Démonstrations en tous genres.

Informations pratiques

- L'objectif principal de ce devoir est de s'exercer à la rédaction de démonstrations. La qualité de la rédaction sera donc prise en compte dans l'évaluation.
- Ce devoir est individuel. Nous vous encourageons à échanger vos idées entre étudiants sur la façon d'aborder le devoir. Toutefois, ne partagez pas votre production. De même, il vous est demandé de ne pas plagier. Si vous employez des sources externes, citez-les.
- La date limite de remise de votre rapport est le jeudi 12 décembre 2024 à 23h59.
- Soumettez votre devoir sur `gradescope.com`, après vous être connecté avec vos identifiants UCL. Vous devez rendre votre devoir dans le cours LEPL1108, si vous ne voyez pas ce cours apparaître, vous pouvez le trouver en utilisant le code Z3BEBY. Soumettez votre document final en format pdf dans la partie "Devoir 4 - Démonstrations - PDF"
- Pour rappel ce devoir est purement formatif et ne comptera pas pour votre note finale du cours, néanmoins, nous vous encourageons à le faire comme si c'était un examen pour bien vous entraîner.

Exercices

1. **Théorie des groupes** (10 points)

Soit G l'ensemble de tous les triplets ordonnés (x, y, z) de nombres réels.

1. Montrez que G muni de la multiplication définie comme

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', xy' + z + z')$$

est un groupe.

2. Déterminez lesquels des sous-ensembles suivants de G[1] sont des sous-groupes :
   (a) $\{(x, y, z) \in G \mid x = 0\}$
   (b) $\{(x, y, z) \in G \mid x = y\}$
   (c) $\{(x, y, z) \in G \mid z = 0\}$.
3. Ce groupe est-il *abélien* ?[2]
4. Calculez la puissance n-ième de (x, y, z).
5. Quels éléments de G ont un ordre fini ?
6. Vérifiez que $H = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ est un sous-groupe de G et que $gh = hg$ pour tout $g \in G$, $h \in H$.

1. Bien entendu, ils restent munis de l'opération multiplicative définie au point 1.
2. I.e. la multiplication définie ci-dessus est-elle <u>commutative</u> ?

$\boxed{1}$ Pour être un groupe, G doit respecter ces 3 conditions :

→ NEUTRE : $\exists \varepsilon : \varepsilon a = a = a\varepsilon \quad , \forall a \in G$

Soit $\varepsilon = (0,0,0)$. Alors $\varepsilon(x,y,z) = (x,y,z) = (x,y,z)\varepsilon$

(et $a = (x,y,z) \in G$)

$\boxed{\rightarrow \varepsilon \text{ est le neutre du groupe } (G, \cdot)}$

→ Associativité : $a(a'a'') = (aa')a'' \quad , \forall a, a', a'' \in G$

$a = (x,y,z)$, $a' = (x',y',z')$, $a'' = (x'',y'',z'')$

$$a(a' \cdot a'') = (x,y,z) \cdot (x'+x'',\ y'+y'',\ x'y''+z'+z'')$$

$$= (x+x'+x'',\ y+y'+y'',\ xy'+xy''+x'y''+z+z'+z'')$$

$$(a \cdot a')a'' = (x+x',\ y+y',\ xy'+z+z')(x'',y'',z'')$$

$$= (x+x'+x'',\ y+y'+y'',\ xy'+(x+x')y''+z+z'+z'') = a \cdot (a' \cdot a'')$$

$\boxed{\rightarrow \text{OK}}$

→ Existence d'un inverse : $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = \varepsilon$

Soit $a = (x,y,z)$, on peut définir $a^{-1} = (-x, -y, -z+xy)$ et vérifier :

$$aa^{-1} = (x-x,\ y-y,\ -xy+z-z+xy) = (0,0,0) = \varepsilon$$

Tous les éléments sont bien inversibles $\boxed{\rightarrow G \text{ est un groupe}}$

$\boxed{2}$ Les sous-ensembles héritent des propriétés du groupe, il faut vérifier si ils sont clos sous la multiplication définie sur le groupe.

→ $\forall a, b \in H$, $ab \in H$ (H est le sous-ensemble)

(a) $a = (0,y,z)$, $b = (0,y',z')$ $ab = (0, y+y', z+z') \in H \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

(b) $a = (x,x,z)$, $b(x',x',z')$, $ab = (x+x', x+x', xx'+z+z') \in H \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

(c) $a = (x,y,0)$, $b = (x',y',0)$, $ab = (x+x', y+y', xy') \notin H \rightarrow \boxed{\text{Pas OK}}$

$\boxed{3}$ G n'est pas commutatif. En effet

$(3,3,0) \in G$, $(1,2,0) \in G$

mais $(3,3,0)(1,2,0) = (4,5,6) \neq (4,5,3) = (1,2,0)(3,3,0)$

$\boxed{4}$ a Soit $a = (x,y,z)$

$$a^n = (nx,\ ny,\ (n-1)xy + (n-2)xy \dots + xy + nz)$$

$$= \left(nx,\ ny,\ \frac{n(n-1)}{2}xy + nz\right)$$

$\boxed{5}$ Soit $g \in G$ d'ordre fini, $\exists n \in \mathbb{N}^* : g^n = \varepsilon$

Soit $g = (x,y,z)$, alors $g^n = \left(nx, ny, \frac{n(n-1)}{2}xy + nz\right) = (0,0,0)$

$\Rightarrow x = 0$, $y = 0$ $g = (0,0,z)$

$g^n = (0,0,nz) = (0,0,0) \Rightarrow z = 0$.

$\rightarrow g = (0,0,0) = \varepsilon$. Seule l'identité est d'ordre fini.

$\boxed{6}$ Comme au point $\boxed{2}$, H est un sous-groupe ssi

$\forall h, h' \in H$, $hh' \in H$

Soient $h = (0,0,z)$, $h' = (0,0,z')$ des éléments quelconque de H $hh' = (0,0,z+z') \in H$ OK

H est un sous groupe de G.

Soit $h = (0,0,z) \in H$ et $g = (x,y,z)$

$gh = (x,y,z+z') = (x,y,z'+z) = hg$

Note: Dans tous les développements,

x,y,z,x',y',z' sont des réels quelconques

Chaque point peut être débuté par:

"Soient x,y,z,x',y',z' des réels quelconques, . . ."

2. **Application non probabiliste du théorème central limite** (5 points)

Utiliser le théorème central limite pour montrer que $A_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to \infty$.

Indice : Notez que la probabilité qu'une variable aléatoire de Poisson de paramètre n prenne la valeur k est $e^{-n}\frac{n^k}{k!}$. Remarquez également qu'une variable aléatoire de Poisson $Po(n)$ a la même loi que la somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1.

Soit X_i une famille de variables aléatoires de distribution de Poisson indépendantes identique de paramètre $\mu_i = 1$

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, sa distribution de probabilité vaut $P(X=k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$

On sait aussi par le théorème centrale-limite que quand n tend vers l'infini, la distribution de la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tend vers une loi normale de moyenne $n.\underset{1}{\underset{\sim}{\mu}} = n$ (et de variance $\frac{1}{n}$)

~~On~~ Calculons $P(X \leq n)$ de 2 manières (par Poisson ou loi normale)

$$\lim_{n\to\infty} P(X \leq n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X \leq n) = F_N(0) = \frac{1}{2}$$

avec $F_N(s)$ la fonction de répartition de la normale evaluée à s écarts-type de la moyenne (ici évaluée à la moyenne donc $s=0$)

Ce qui donne le résultat attendu $\boxed{\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}}$