第 25 卷 第 5 期 2020 年 10 月 哈尔滨理工大学学报 JOURNAL OF HARBIN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY Vol. 25 No. 5 Oct. 2020

一类随机细胞神经网络的均方指数稳定性

刘 新， 陈丽丽， 黄 帅
(哈尔滨理工大学 应用数学系，黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要：讨论了一类具有传递时滞和分布时滞以及区间不确定性的脉冲随机反应－扩散细胞神经网络(CNNs)的均方指数稳定性问题。利用 Hölder 不等式，Itô 等距性质和压缩映射原理，提出了保证上述神经网络均方指数稳定的充分条件。此外，给出一个具体例子来验证所获得的结果是有效的。

关键词：指数稳定性；细胞神经网络；压缩映像原理
DOI：10.15938/j.jhust.2020.05.021
中图分类号：O177.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1007－2683(2020)05－0149－09

Mean Square Exponential Stability of a Class of Stochastic Rcellular Neural Networks

LIU Xin， *CHEN Li-li*， *HUANG Shuai*
(Department of Applied Mathematics，Harbin University of Science and Technology，Harbin 150080)

Abstract：In this paper，the problem of the mean square exponential stability of a class of impulsive stochastic reaction-diffusion cellular neural networks (CNNs) with transmission delay and distributed delay，and parameter uncertainties is discussed. By using Hölder inequality，Itô isometric nature and Contraction Mapping Principle，a sufficient condition to guarantee the mean square exponential stability of the above CNNs is proposed. Moreover，an example is given to demonstrate that the obtained result is effective.

Keywords：exponential stability，cellular neural networks，contraction mapping principle

0 引 言

近几十年，神经网络因其在模式识别、联想记忆、信号处理、图像处理、组合优化等领域的广泛应用而得到了广泛的研究[1]。然而，在神经网络的实现过程中，不可避免地遇到时间延迟。已经发现，时间延迟的存在可能导致神经网络中的不稳定性和振荡。因此，具有时滞的神经网络的稳定性分析受到了广泛关注[2－8]。

最近，国内外学者对各种 CNNs 的稳定性进行了一系列的研究。在文[9]中，作者探讨了脉冲扰动下具有泄漏延迟的模糊细胞神经网络解的存在性和全局稳定性。在文[10]中，当激活函数满足 Lipschitz 连续性条件时，研究了具有恒定时滞的 CNNs 的渐近稳定性。在文[11]中，作者考虑了离散时间 CNNs，并获得了几个充分条件来检验唯一均衡的全局指数稳定性。Lyapunov 泛函方法是近几十年来解

收稿日期：2018－12－24
基金项目：国家自然科学基金(11401141)；黑龙江省高校青年创新人才培养计划(UNPYSCT－2017078)；黑龙江省博士后科研启动基金(LBH－Q18067).
作者简介：刘 新(1991—)，女，硕士研究生；
黄 帅(1994—)，女，硕士研究生.
通信作者：陈丽丽(1982—)，女，博士，副教授，博士研究生导师，E-mail：cll2119@hotmail.com.

决神经网络稳定性的常用技术之一,该方法往往需要构建一个复杂的 Lyapunov 函数,从而检查更高维的 LMI。此外,计算的复杂性增加,Lyapunov 函数的构造需要强大的数学技能。因此,国内外学者开始探索解决这些问题的新方法。2001 年,Burton 首次将不动点理论方法引入到研究神经网络稳定性以来,该方法受到众多学者的青睐并得到了快速的发展。2010 年,Luo 基于不动点理论,研究了随机 Volterra-Levin 方程的指数稳定性问题,给出了该类方程在均方意义下的指数稳定性判据[12-15]。2013 年, Guo C,O'Regand 等[16]利用 Krasnoselskii 不动点定理以及分析技巧,给出了均方意义下随机中立型细胞神经网络具有指数稳定性的判据。2015 年,Zhou 利用 Brouwer 不动点定理证明了具有比例时滞混合 BAM 神经网络的平衡点的存在性和唯一性[17]。2017 年,Rao 等[18-20]利用压缩映象原理对脉冲随机反应扩散细胞神经网络进行稳定性分析,并给出不确定参数脉冲积分微分方程的鲁棒指数稳定性判据。

本文的目的是研究一类具有传输延迟和分布延迟以及参数不确定性的脉冲随机反应-扩散细胞神经网络(CNNs)的均方指数稳定性。通过使用 Hölder 不等式,Itô 等距性质和压缩映射原理,得到了一个充分条件来保证所考虑的 CNN 的均方指数稳定性。此外,还给出了一个有效性的例子验证理论结果。

1 模型描述

在 Dirichlet 边值下考虑如下反应-扩散脉冲细胞神经网络:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}u_i(t,x) = -q_i\operatorname{div}\nabla u_i(t,x)\,\mathrm{d}t - \\
&\Big[(a_i+\Delta a_i(t))u_i(t,x) - \sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+\Delta b_{ij}(t))\times \\
&f_j(u_j(t,x)) - \sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+\Delta c_{ij}(t))f_j(u_j(t-\tau_{ij}(t),x)) - \\
&\sum_{j=1}^{n}(h_{ij}+\Delta h_{ij}(t))\int_{t-\rho(t)}^{t} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t + \\
&\sigma_i(u_i(t,x))\,\mathrm{d}\omega_i(t),\ t\neq t_k, x\in Y, i\in N \\
&u_i(t_k^+,x) = u_i(t_k^-,x) + g_i(u_i(t_k,x)), \\
&x\in Y, k=1,2,\cdots \\
&u_i(t,x) = \zeta_i(t,x),\ \forall(t,x)\in[-\tau,0]\times Y, \\
&u_i(t,x) = 0,\ \forall(t,x)\in[0,+\infty]\times\partial Y
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

其中 $Y\subset R^m$ 是具有平滑边界 ∂Y 的有界域。$u_i(t,x)$ 是第 i 个神经元在时间 t 和空间变量 x 的状态变量,对于 $i\in N$,f_i 表示神经元的激活函数。a_i 是当与网络和外部输入断开时,第 i 个神经元将其隔离状态重置为静止状态的速率。b_{ij},c_{ij} 和 h_{ij} 是反馈模板的元素。设$\{\omega_i(t),t\geqslant 0\}$ 是在具有自然过滤波$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空$\{\Omega,F,P\}$ 上定义的实值布朗运动,用 $L^2(Y)$ 表示所有实值平方可积函数与内积的空间 $\langle\xi,\eta\rangle=\int_\gamma \xi(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x,\xi,\eta\in L^2(Y)$,范数 $\|\xi\| =(\int_\gamma \xi^2(x)\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}},\xi\in L^2(Y)$。$\sigma_i(\cdot)$ 是 Borel 可测函数。$\Delta=\sum_{j=1}^{m}(\partial^2/\partial x_j^2)$ 表示拉普拉斯算子,其定义域 $W_0^{1,2}(Y)\cap W_0^{2,2}(Y)$,是一个强连续半群 $\mathrm{e}^{-q_it\Delta}$,其中 $W_0^{1,2}(Y)$ 和 $W_0^{2,2}(Y)$ 是具有紧支撑集的 Sobolev 空间。$\operatorname{div}\nabla u_i(t,x)$ 表示 $\nabla u_i(t,x)$ 的散度。q_i 是扩散系数,时间延迟 $\tau(t)$,$\rho(t)\in[0,\tau]$。此外,初始值 $\zeta_i(t,x)$ 对于$(s,x)\in[-\tau,0]\times Y$ 是连续的。脉冲时刻 $t_k(k=1,2,\cdots)$ 满足 $0<t_1<t_2<\cdots$ 和 $\lim_{t\to\infty}t_k=+\infty$。$u(t_k^+,x)$ 和 $u(t_k^-,x)$ 分别代表在 t_k 时刻的右极限和左极限,假设

$$u_i(t_k^-,x)=\lim_{t\to t^-}u_i(t,x)=u_i(t_k,x),k=1,2,\cdots \quad(2)$$

这里考虑的参数不确定性是参数有界的,并且具有以下形式:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta a_i(t)\in[-a,a],\Delta b_{ij}(t)\in[-b,b],\\
&\Delta c_{ij}(t)\in[-c,c],\Delta h_{ij}(t)\in[-h,h]
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

其中 a,b,c,h 都是非负常数。

在本文中,我们假设:

(H1) $\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-\gamma t}$,其中 $M>0,\gamma>0$ 且是常数;

(H2) f_i,g_i 和 σ_i 是 Lipschitz 连续,Lipschitz 常数 $L_i>0,G_i>0$,和 $T_i>0,i\in N$,另外,$f_i(0)=g_i(0)=\sigma_i(0)$,$\forall i\in N$;

(H3) 存在非负常数 a,b,c,h,满足(3)式;

(H4) 传输时滞 $\tau_{ij}\leqslant\tau$,其中 $\beta>0,\tau>0$ 是常数,$i,j\in N$。

为方便起见,记

$$a_i(t)=a_i+\Delta a_i(t),b_{ij}(t)=b_{ij}+\Delta b_{ij}(t),$$
$$c_{ij}(t)=c_{ij}+\Delta c_{ij}(t),h_{ij}(t)=h_{ij}+\Delta h_{ij}(t)$$

引理 1[17] (Hölder 不等式) 设 $f(x),g(x)\geqslant 0$,如果 $p\geqslant q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则 $\int_Y f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant (\int_Y|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}(\int_Y|g(x)|^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}$

引理 2[18] (压缩映像原理) 设(X,ρ) 是一个完备的距离空间,T 是(X,ρ) 到其自身的一个压缩映射,则 T 在 X 上存在唯一的不动点。

引理 3[19]　(Itô 等距) 如果 $\varphi(t,\omega)$ 是一个可测随机过程, $B_t(\omega)$ 是初始点为原点的一维布朗运动,那么

$$E\left[\left(\int_S^T \varphi(t,\omega)\,\mathrm{d}B_t(\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_S^T \varphi(t,\omega)^2\,\mathrm{d}t\right]$$

定义 1　如果存在 $\alpha > 0$ 使得

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant -\tau}(\mathrm{e}^{\alpha t}\|u_i(t,x)\|^2)\to 0, t\to\infty$$

其中 $u = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_n(t,x))$, 则系统(1) 均方指数稳定。

2　主要结果及证明

定理 1　具有初始条件的脉冲系统(1) 等价于具有初始条件的以下积分方程:

$$\left.\begin{aligned}
&u_i(t,x) = \mathrm{e}^{-q_i t\Delta}\zeta(0,x) - \int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\\
&[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +\\
&\mathrm{e}^{-q_i t\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_i t_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\\
&t\geqslant 0, x\in Y, i\in N,\\
&u_i(t,x) = \zeta_i(t,x), \forall(t,x)\in[-\tau,0]\times Y,\\
&u_i(t,x) = 0, \forall(t,x)\in[0,+\infty]\times\partial Y
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

证明: 首先,证明系统(4) 的每一个解是系统(1) 的解,假设 $u_i(t,x)$ 是系统(4) 的解,则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{q_i t\Delta}u_i(t,x) = \zeta(0,x) - \int_0^t \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\\
&[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +\\
&\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_i t_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))
\end{aligned}$$

对于 $t > 0, t\neq t_k$, 上述方程两边同时取导得

$$\begin{aligned}
&q_i\Delta u_i(t,x) + u_i(t,x) = -[a_i(t)u_i(t,x) -\\
&\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(u_j(t,x)) - \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)\\
&f_j(u_j(t-\tau_{ij}(t),x)) - \sum_{j=1}^n h_{ij}(t)\\
&\int_{t-\rho(t)}^{t} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}t + \sigma_i(u_i(t,x))\,\mathrm{d}\omega_i(t)
\end{aligned}$$

这是系统(1) 的第一个等式。同样,也可以推导出(1) 的第二个等式。此外,当 $t\to t_j^-$, 由(4) 可以得到

$$\begin{aligned}
&u_i(t_k^-,x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}u_i(t_j-\varepsilon,x) = u_i(t_j,x)\\
&u_i(t_k^+,x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}u_i(t_j+\varepsilon,x) = u_i(t_j,x) +\\
&g_i(u_i(t_j,x)), j = 1,2,\cdots
\end{aligned}$$

于是,证明了(4) 的每个解都是(1) 的一个解。

另一方面,假设是 $u_i(t,x)$ 是(1) 的解,然后将系统(1) 的第一个方程的两边乘 $\mathrm{e}^{-q_i t\Delta}$ 得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{q_i t\Delta}(\mathrm{d}u_i(t,x) + q_i\mathrm{div}\nabla u_i(t,x)\,\mathrm{d}t) =\\
&-\mathrm{e}^{q_i t\Delta}[a_i(t)u_i(t,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)f_j(u_j(t,x)) -\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(t)f_j(u_j(t-\tau_{ij}(t),x)) -\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(t)\int_{t-\rho(t)}^{t} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}t +\\
&\mathrm{e}^{q_i t\Delta}\sigma_i(u_i(t,x))\,\mathrm{d}\omega_i(t), t > 0, t\neq t_k
\end{aligned}\quad(5)$$

上式两边同时从 $t_{k-1}+\varepsilon$ 到 $t\in(t_{k-1},t_k)$ 积分,得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{q_i t\Delta}u_i(t,x) = \mathrm{e}^{q_i(t_{k-1}+\varepsilon)\Delta}u_i(t_{k-1}+\varepsilon,x) -\\
&\int_{t_{k-1}+\varepsilon}^{t}\mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)\\
&f_j(u_j(\theta,x)) - \sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +\\
&\int_{t_{k-1}+\varepsilon}^{t}\mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)
\end{aligned}$$

令上式 $\varepsilon\to 0^+$ 得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{q_i t\Delta}u_i(t,x) = \mathrm{e}^{q_i t_{k-1}\Delta}u_i(t_{k-1}^+,x) -\\
&\int_{t_{k-1}}^{t}\mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)\\
&f_j(u_j(\theta,x)) - \sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +\\
&\int_{t_{k-1}}^{t}\mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta), t\in(t_{k-1},t_k)
\end{aligned}\quad(6)$$

现在,令式(6) 中 $t = t_k - \varepsilon$ 得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{q_i(t_k-\varepsilon)\Delta}u_i(t_k-\varepsilon,x) = \mathrm{e}^{q_i t_{k-1}\Delta}u_i(t_{k-1}^+,x) -\\
&\int_{t_{k-1}}^{t_k-\varepsilon}\mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)\\
&f_j(u_j(\theta,x)) - \sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k-\varepsilon} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)$$

然后，令上式 $\varepsilon \to 0^+$，得

$$\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}u_i(t_k,x) = \mathrm{e}^{q_it_{k-1}\Delta}u_i(t_{k-1}^+,x) -$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau(\theta),x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)$$

结合式(6)和上面的等式得

$$\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}u_i(t_k,x) = \mathrm{e}^{q_it_{k-1}\Delta}u_i(t_{k-1},x) -$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)$$
$$f_j(u_j(\theta,x)) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +$$
$$\mathrm{e}^{q_it_{k-1}\Delta}g(u(t_{k-1},x))$$

对于所有的 $t \in (t_{k-1},t_k)$，$k = 1,2,\cdots$ 有

$$\mathrm{e}^{q_it_{k-1}\Delta}u_i(t_{k-1},x) = \mathrm{e}^{q_it_{k-2}\Delta}u_i(t_{k-2},x) -$$
$$\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)$$
$$f_j(u_j(\theta,x)) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +$$
$$\mathrm{e}^{q_it_{k-2}\Delta}g(u(t_{k-2},x))$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{e}^{q_it_2\Delta}u_i(t_{k-1},x) = \mathrm{e}^{q_it_1\Delta}u_i(t_1,x) -$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}$$
$$[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +$$
$$\mathrm{e}^{q_it_1\Delta}g(u(t_1,x))\,\mathrm{e}^{q_it_1\Delta}u_i(t_{k-1},x) = \zeta(0,x) -$$
$$\int_{0}^{t_1} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -$$
$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{q_i\theta\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)$$

定理2　假设(H1) ~ (H4)成立，如果 $0 < k < 1$，

$$k = 6M^2\Big[\frac{1}{\gamma^2}\max_{i\in N}\|a_i + a\|^2 +$$
$$\frac{n}{\gamma^2}\max_{i\in N}(\sum_{j=1}^{n}\|b_{ij} + b\|^2L_j^2) +$$
$$\frac{n}{\gamma^2}\max_{i\in N}(\sum_{j=1}^{n}\|c_{ij} + c\|^2L_j^2) +$$
$$\frac{\tau^2 n}{\gamma^2}\max_{i\in N}(\sum_{j=1}^{n}\|h_{ij} + h\|^2L_j^2) +$$
$$2M^2\Big(1 + \frac{1}{\gamma^2\mu^2}\Big)(\max_{i\in N}G_i^2) +$$
$$\frac{2}{\gamma}(\max_{i\in N}T_i^2)\Big] \tag{7}$$

其中 $\mu = \inf_{k=1,2,\cdots}(t_{k+1} - t_k) > 0$

则(1)是均方指数稳定的。

证明：首先，需要构造一个收缩映射。设 Γ_i 是由函数 $u_i(t,x)$ 构成的全适应均方连续过程的Banach空间，在 $t \geqslant 0$ 和 $t \neq t_k$ 时，使得 $E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|u_i(t,x)\|^2) \to 0$，$(t \to +\infty)$ 其中 $\alpha \in [0,\gamma]$ 是正向量，现在构造一个算子 $\Theta = (\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_n)$，$\Theta_i: \Gamma_i \to \Gamma_i$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta(u_i)(t,x) = \mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x) -\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x) -\\
&\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x)) -\\
&\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)) -\\
&\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta} f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta +\\
&\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta) +\\
&\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x)),\ t \geqslant 0\\
&\Theta_i(u_i)(t,x) = \zeta_i(t,x),\ (t,x) \in [-\tau,0]\times\Upsilon,\\
&\Theta_i(u_i)(t,x) = 0,\ \forall(t,x) \in [0,+\infty]\times\partial\Upsilon
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

赋予如下距离:

$$\mathrm{dist}(u,v) = \left(E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant -\tau}\|u_i(t,x)-v_i(t,x)\|^2\right)^{1/2}$$

$\forall u,v\in T_1\times T_2\times\cdots\times T_n$

$\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n$ 是完备的度量空间,其中

$$\boldsymbol{u} = u(t,x) = [u_1(t,x),u_2(t,x),\cdots,u_n(t,x)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{v} = u(t,x) = [v_1(t,x),v_2(t,x),\cdots,v_n(t,x)]^{\mathrm{T}}$$

下面,将应用压缩映射定理通过 3 个步骤完成证明。

首先,可知

$$\begin{aligned}
&E\|\Theta(u_i)(t+\delta,x)-\Theta(u_i)(t,x)\|^2\leqslant\\
&4E\|\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta)\Delta}\zeta(0,x)-\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x)\|^2+\\
&4E\|\int_0^{t+\delta}\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\\
&\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta-\\
&\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta\|^2+\\
&4E\|\int_0^{t+\delta}\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)-\\
&\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)\|^2+\\
&4E\|\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta)\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))-\\
&\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\|^2
\end{aligned}\tag{9}$$

当 $\delta\to 0$ 时,有

$$\begin{aligned}
&E\|\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta)\Delta}\zeta(0,x)-\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x)\|^2\leqslant\\
&E\|(\mathrm{e}^{-q_i\delta\Delta}-1)\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x)\|^2\to 0
\end{aligned}\tag{10}$$

其次,当 $\delta\to 0$ 时,有

$$\begin{aligned}
&E\|\int_0^{t+\delta}\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\\
&\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta-\\
&\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta\|^2\leqslant\\
&2E\|\int_t^{t+\delta}\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\\
&\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta\|^2+\\
&2E\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\\
&\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-\\
&\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\,\mathrm{d}s](\mathrm{e}^{-q_i\delta\Delta}-1)\mathrm{d}\theta\|^2\to 0
\end{aligned}\tag{11}$$

通过 Itô 积分的等距性质得到

$$\begin{aligned}
&E\|\int_0^{t+\delta}\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)-\\
&\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\,\mathrm{d}\omega_i(\theta)\|^2\leqslant\\
&2E\int_0^t M^2\mathrm{e}^{-2\gamma(t-\theta)\Delta}\|\sigma_i(u_i(\theta,x))(\mathrm{e}^{-q_i\delta\Delta}-1)\|^2\mathrm{d}\theta+\\
&2E\int_t^{t+\delta}M^2\mathrm{e}^{-2\gamma(t+\delta-\theta)\Delta}\|\sigma_i(u_i(\theta,x))\|^2\mathrm{d}\theta\\
&\to 0,\delta\to 0
\end{aligned}\tag{12}$$

由于 $t\neq t_k$,当 $\delta\to 0$ 得

$$\begin{aligned}
&E\|\mathrm{e}^{-q_i(t+\delta)\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))-\\
&\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\|^2\to 0
\end{aligned}\tag{13}$$

因此,由式(9) ~ (13) 证明了 $\Theta_i(u_i)(t)$ 在 $t\geqslant 0$, $t\neq t_k$ 时是均方连续的。

接下来,证明

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0^+}\Theta_i(u)(t_k+\delta) = \Theta_i(u_i)(t_k)+g(u_i(t_k)),\\
&\lim_{\delta\to 0^-}\Theta_i(u)(t_k+\delta) = \Theta_i(u_i)(t_k)
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

实际上,当 $t = t_k$ 时,式(10) ~ (12) 显然也成立。另外,当 $\delta\to 0^+$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-q_i(t_k+\delta)\Delta}\sum_{0<t_j<t_k+\delta}\mathrm{e}^{q_it_j\Delta}g_i(u_i(t_j,x))-\\
&\mathrm{e}^{-q_it_k\Delta}\sum_{0<t_j<t_k}\mathrm{e}^{q_it_j\Delta}g_i(u_i(t_j,x))\to g_i(u(t_k,x))
\end{aligned}\tag{15}$$

另一方面,让 $\delta\to 0^-$ 时,则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-q_i(t_k+\delta)\Delta}\sum_{0<t_j<t_k+\delta}\mathrm{e}^{q_it_j\Delta}g_i(u_i(t_j,x))-\\
&\mathrm{e}^{-q_it_k\Delta}\sum_{0<t_j<t_k}\mathrm{e}^{q_it_j\Delta}g_i(u_i(t_j,x))\to 0
\end{aligned}\tag{16}$$

第二步，证明

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\Theta_i(u_i)(t,x)\|^2)\to 0,t\to+\infty \quad (17)$$

实际上，有类似于式(10)的以下不等式：

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\Theta_i(u_i)(t,x)\|^2)\leqslant 4E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x)\|^2)+$$
$$4E\{\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[a_i(\theta)u_i(\theta,x)-$$
$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))-\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))-$$
$$\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\mathrm{d}s]\mathrm{d}\theta\|^2\}+$$
$$4E\{\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\mathrm{d}\omega_i(\theta)\|^2\}+$$
$$4E\{\mathrm{e}^{\alpha t}\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\|^2\}$$

由(H1)得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\zeta(0,x)\|^2)\leqslant$$
$$E(M^2\mathrm{e}^{-(2\gamma-\alpha)t}\|\zeta(0,x)\|^2)\to 0,t\to\infty \quad (18)$$

对于任意的$\varepsilon>0$，假设$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|u_i(t,x)\|^2)\to 0$，则存在$t_*>0$，使得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|u_i(t,x)\|^2)<\varepsilon,\forall t>t_* \quad (19)$$

另外，由 Hölder 不等式得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}a_i(\theta)u_i(\theta,x)\mathrm{d}\theta\|^2)\leqslant$$
$$EM^2(\mathrm{e}^{\frac{\alpha t}{2}}\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|\mathrm{d}\theta)^2\leqslant$$
$$EM^2(\mathrm{e}^{\frac{\alpha t}{2}}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}(t-\theta)}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|\mathrm{d}\theta)^2\leqslant$$
$$EM^2(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2\mathrm{d}\theta)\leqslant$$
$$E\frac{M^2}{\gamma}(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2\mathrm{d}\theta)\leqslant$$
$$E\frac{M^2}{\gamma}[\mathrm{e}^{\alpha t}(\int_0^{t_*}\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2\mathrm{d}\theta+$$
$$\int_{t_*}^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2\mathrm{d}\theta)]\leqslant$$
$$E\frac{M^2}{\gamma}[\mathrm{e}^{\alpha t}t_*\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_*)}\max_{\theta\in[0,t_*]}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2+$$
$$\int_{t_*}^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\mathrm{e}^{\alpha(t-\theta)}\mathrm{e}^{\alpha\theta}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2\mathrm{d}\theta)]\leqslant$$
$$E\frac{M^2}{\gamma}[\mathrm{e}^{-(\gamma-\alpha)t}t_*\mathrm{e}^{\gamma t_*}\max_{\theta\in[0,t_*]}\|a_i(\theta)u_i(\theta,x)\|^2+$$
$$\frac{\varepsilon}{\gamma-\alpha}\max_{\theta\in[0,t_*]}|a_i(\theta)|^2] \quad (20)$$

由ε的任意性可知

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}a_i(\theta)u_i(\theta,x)\mathrm{d}\theta\|^2)\to 0,$$
$$t\to+\infty \quad (21)$$

另外，

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))\mathrm{d}\theta\|^2)\leqslant$$
$$E(Me^{-(\gamma-\alpha/2)t}\sum_{j=1}^n L_j|b_{ij}(\theta)|\int_0^t\mathrm{e}^{\gamma\theta}\|u_j(\theta,x)\|\mathrm{d}\theta)^2$$

利用(19)和(20)的类似方法，可以由上式推导出

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n b_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta,x))\mathrm{d}\theta\|^2)$$
$$\to 0,t\to+\infty \quad (22)$$

同理，也可以得到

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))\mathrm{d}\theta\|^2)\leqslant$$
$$E(n\mathrm{e}^{\alpha t}M^2\sum_{j=1}^n L_j^2\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma(t-\theta)}$$
$$\|c_{ij}(\theta)u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)\|^2\mathrm{d}\theta)\leqslant$$
$$E\Big\{\frac{nM^2}{\gamma}\sum_{j=1}^n L_j^2[\mathrm{e}^{-(\gamma-\alpha)t}(t_*+\tau)\mathrm{e}^{\gamma(t_*+\tau)}$$
$$\max_{\theta\in[0,t_*+\tau]}\|c_{ij}(\theta)u_i(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)\|^2+$$
$$\frac{\varepsilon\mathrm{e}^{\alpha\tau}}{\gamma-\alpha}\max_{\theta\in[t_*+\tau,t]}|c_{ij}(\theta)|^2\Big]$$

于是，

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n c_{ij}(\theta)f_j(u_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x))\mathrm{d}\theta\|^2)$$
$$\to 0,t\to+\infty \quad (23)$$

同理，由 Hölder 不等式得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,x))\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\|^2)\leqslant$$
$$E\Big[\frac{\tau^2nM^2}{\gamma}\sum_{j=1}^n L_j^2(\mathrm{e}^{-(\gamma-\alpha)t}\mathrm{e}^{\gamma(t_*+\tau)}(t_*+\tau)\max_{\theta\in[0,t_*+\tau]}\|h_{ij}(\theta)u_j(s,x)\|^2+$$
$$\frac{\varepsilon}{\gamma-\alpha}|h_{ij}|^2)\Big]$$

由上式得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^n h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}f_j(u_j(s,$$
$$x))\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\|^2)$$
$$\to 0,t\to+\infty \quad (24)$$

根据 Itô 等距性质的等距性质和 Hölder 不等式，得

$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\mathrm{d}\omega_i(\theta)\|^2)=$$
$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^t\|\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\|^2\mathrm{d}\theta)=$$
$$E(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_0^{t_*}\|\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\|^2\mathrm{d}\theta+$$
$$\mathrm{e}^{\alpha t}\int_{t_*}^t\|\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\|^2\mathrm{d}\theta)\leqslant$$

$$E\left(M^2T_i^2\mathrm{e}^{-(2\gamma-\alpha)t}t_*\max_{\theta\in[0,t_*]}\mathrm{e}^{2\gamma t_*}\|u_i(\theta,x)\|^2+\right.$$

$$\left.M^2T_i^2\frac{\varepsilon}{2\gamma-\alpha}\right)$$

由的 ε 任意性得到

$$E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sigma_i(u_i(\theta,x))\mathrm{d}\omega_i(\theta)\right\|^2\right)\tag{25}$$

$$\to 0,t\to+\infty$$

下面设 $t_{l-1}<t_*\leqslant t_l$ 和 $t_{j-1}<t\leqslant t_j$，根据(H1) 得

$$E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)\leqslant$$

$$E\left[\mathrm{Me}^{(\alpha/2)t}\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\sum_{0<t_k<t}\mathrm{Me}^{\gamma t_k}G_i\|u_i(t_k,x)\|\right)\right]^2$$

$$\to 0,t\to+\infty\tag{26}$$

因此，

$$E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{t_*<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)\leqslant$$

$$\varepsilon G_i^2M^4E\left(\mathrm{e}^{-(1/2)(2\gamma-\alpha)t}\sum_{t_l<t_k<t_{j-1}}\mathrm{e}^{-(1/2)(2\gamma-\alpha)t_k}\right)^2\leqslant$$

$$\varepsilon E\left(M^2G_i\left(1+\frac{2}{\mu(2\gamma-\alpha)}\right)\right)^2$$

$$E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{t_*<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)$$

$$\to 0,t\to+\infty\tag{27}$$

于是，

$$E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{t_*<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)$$

$$\leqslant 2E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t_*}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)+$$

$$2E\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{t_*<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}g_i(u_i(t_k,x))\right\|^2\right)$$

$$\to 0,t\to+\infty\tag{28}$$

合并式(18) ~ (28) 得证式(17) 成立。

最后，证明 Θ 是 $\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n$ 上的压缩映射。由以上两个步骤，可知

$\Theta_i(\Gamma_i)\subset\Gamma_i$

且 $\Theta(\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n)\subset\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n$，一方面，对任意的 $i\in N$ 且

$u,v\in\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots\times\Gamma_n$，有

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|\Theta_i(u_i)(t,x)-\Theta_i(v_i)(t,x)\|^2\leqslant$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}a_i(\theta)(u_i(\theta,x)-v_i(\theta,x))\mathrm{d}\theta\right\|^2+$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^nb_{ij}(\theta)(f_j(u_j(\theta,x))-\right.$$

$$\left.f_j(v_j(\theta,x)))\mathrm{d}\theta\right\|^2+$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^nc_{ij}(\theta)(f_j(u_j)(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)-\right.$$

$$\left.f_j(v_j(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)))\mathrm{d}\theta\right\|^2+$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}\sum_{j=1}^nh_{ij}(\theta)\left(\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}[f_j(u_j(s,x))-\right.\right.$$

$$\left.\left.(f_j(v_j(s,x))]\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\theta\right\|^2+$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[\sigma_i(u_i(\theta,x))-\right.$$

$$\left.\sigma_i(v_i(\theta,x))]\mathrm{d}\omega_i(\theta)\right\|^2+$$

$$6E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}[g_i(u_i(t_k,x))-\right.$$

$$\left.g_i(v_i(t_k,x))]\right\|^2$$

由 Hölder 不等式得

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}a_i(\theta)(u_i(\theta,x)-v_i(\theta,x))\mathrm{d}\theta\right\|^2\leqslant$$

$$\frac{M^2}{\gamma^2}\max_{i\in N}|a_i+a|^2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|(u_i(\theta,x)-v_i(\theta,x))\|^2$$

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}b_{ij}(\theta)(f_j(u_i(\theta,x)-\right.$$

$$\left.f_jv_i(\theta,x)))\mathrm{d}\theta\right\|^2\leqslant$$

$$\frac{nM^2}{\gamma^2}\max_{i\in N}|b_{ij}+b|^2L_j^2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|(u_i(\theta,x)-v_i(\theta,x))\|^2$$

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}c_{ij}(\theta)(f_j(u_i(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)-\right.$$

$$\left.f_j(v_i(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)))\mathrm{d}\theta\right\|^2\leqslant$$

$$\frac{nM^2}{\gamma^2}\max_{i\in N}|c_{ij}+c|^2L_j^2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|(u_i(\theta,x)-$$

$$v_i(\theta,x))\|^2$$

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}h_{ij}(\theta)\int_{\theta-\rho(\theta)}^{\theta}(f_j(u_i(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)-\right.$$

$$\left.f_j(v_i(\theta-\tau_{ij}(\theta),x)))\mathrm{d}\theta\right\|^2\leqslant$$

$$\frac{nM^2\tau^2}{\gamma^2}\max_{i\in N}|h_{ij}+h|^2L_j^2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|(u_i(\theta,x)-$$

$$v_i(\theta,x))\|^2$$

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\mathrm{e}^{-q_it\Delta}\sum_{0<t_k<t}\mathrm{e}^{q_it_k\Delta}[g_i(u_i(t_k,x))-\right.$$

$$\left.g_i(v_i(t_k,x))]\right\|^2\leqslant$$

$$M^4(\max_{i\in N}G_i^2)[2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|u_i(t,x)-$$

$$v_i(t,x))\|^2+2E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}$$

$$\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{-\gamma t}\int_0^t\mathrm{e}^{\gamma s}\|(u_i(\theta,x)-v_i(\theta,x))\|\mathrm{d}s\right)^2]\leqslant$$

$$2M^4\left(1+\frac{1}{\gamma^2\mu^2}\right)(\max_{i\in N}G_i^2)E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\|(u_i(t,x)-v_i(t,x))\|^2$$

$$E\max_{i\in N}\sup_{t\geqslant-\tau}\left\|\int_0^t\mathrm{e}^{-q_i(t-\theta)\Delta}[\sigma_i(u_i(\theta,x))-\right.$$

$$\left.\sigma_i(v_i(\theta,x))]\mathrm{d}\omega_i(\theta)\right\|^2\leqslant$$

$M^2 \frac{2}{\gamma}(\max_{i\in N} T_i^2) E \max_{i\in N} \sup_{t\geqslant -\tau} \| (u_i(\theta,x) - v_i(\theta,x)) \|^2$

$\mathrm{dist}(\Theta(u),\Theta(v)) \leqslant \sqrt{k}\,\mathrm{dist}(u,v)$,

$\forall u,v \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$

其中 k 被定义为式(7),满足 $0 < k < 1$。这表示 Θ: $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n \to \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ 是压缩映射,使得在 $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_n$ 中存在 Θ 的不动点 $u = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_n(t,x))$,其中 u 是(1) 的解,满足

$E(\mathrm{e}^{\alpha t} \| \Theta_i(u_i)(t,x) \|^2) \to 0, t \to +\infty$. 使得

$E \max_{i\in N} \sup_{t\geqslant -\tau}(\mathrm{e}^{\alpha t} \| \Theta_i(u_i)(t,x) \|^2) \to 0, t \to +\infty$

因此式(1) 是随机指数均方稳定的。

3 数值算例

例1: 考虑以下带有混合时滞和区间不确定性的脉冲随机反应 - 扩散细胞神经网络:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}u_i(t,x) = -q_i \mathrm{div}\,\nabla u_i(t,x)\,\mathrm{d}t - \\
&\Big[(a_i + \cos(t))u_i(t,x) - \sum_{j=1}^{n}(b_{ij} + \sin(t)) \\
&\arctan\Big(\frac{j}{10}u_j(t,x)\Big) - \sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + \cos(t)) \\
&\arctan\Big(\frac{j}{10}u_j(t - \tau_{ij}(t),x)\Big) - \sum_{j=1}^{n}(h_{ij} + \sin(t)) \\
&\int_{t-\rho(t)}^{t} \arctan\Big(\frac{j}{10}u_j(s,x)\Big)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t + \\
&\arctan(0.05 i u_i(t,x))\,\mathrm{d}\omega_i(t) \\
&t \neq t_k, x \in \Upsilon, i \in N \\
&u_i(t_k^+,x) = u_i(t_k^-,x) + 0.1 j \arctan(u_i(t_k,x)) \\
&x \in \Upsilon, k = 1,2,\cdots \\
&u_i(t,x) = \zeta_i(t,x), \forall (t,x) \in [-\tau,0] \times \Upsilon, \\
&u(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,+\infty] \times \partial\Upsilon
\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\Upsilon = (0,\pi), n = 2, \tau = 3, \mu = 1.5, a_i = 0.5i\ b_{ij} = 0.01(i+j) = c_{ij} = h_{ij}, q_i = 1$

通过计算 $-\Delta$ 的特征函数,当 $t \geqslant 0$ 时得 $\| \mathrm{e}^{-t\Delta} \| \leqslant \mathrm{e}^{-\pi^2 t}$。于是,

$\gamma = \pi^2, M = 1, a = b = c = h = 1$

根据拉格朗日中值定理得

$$\left| \arctan\Big(\frac{j}{10}u_j(t,x)\Big) - \arctan\Big(\frac{j}{10}v_j(t,x)\Big) \right| \leqslant \frac{j}{10} | u_j(t,x) - v_j(t,x) |$$

从而可得 $L_j = \frac{j}{10}, j = 1,2$。同理,可知 $G_i = 0.1i, T_i = 0.05i, i = 1,2$。最后,计算出 $k = 0.848 \in (0,1)$。因此,由定理2得到式(29) 是均方指数稳定的。

4 结 论

对于神经网络而言,由于网络的输出是一个时间的函数,对于给定的输入,网络的响应可能收敛到一个稳定的输出,也可能出现振荡等不稳定的模式。因此,在神经网络的设计和分析中,稳定性的分析是至关重要的。目前,针对具有混合时滞和脉冲神经网络稳定特性的研究方法中被广泛使用的当属 Lyapunov 泛函方法,但使用该方法有时需要构造复杂的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,这导致需要检验一个更高维的 LMI,增加了计算的复杂性和技巧性。将不动点理论与神经网络的稳定性问题相结合,利用 Hölder 不等式,Itô 等距性质和压缩映射原理,得到了一个充分条件来保证所考虑的 CNN 的均方指数稳定性。并给出一个具体例子来验证所获得的结果是有效的。

参 考 文 献:

[1] JIANG F, YANG H, SHEN Y. Stability of Econd-order Stochastic Neutral Partial Functional Differential Equations Driven by Impulsive Noises[J]. Science China, 2016, 59(11): 117.

[2] TRCALA M. Spectral Stochastic Modeling of Uncertainties in Nonlinear Diffusion Problems of Moisture Transfer in Wood[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(5/6): 1740.

[3] LUO J, TANIGUCHI T. Fixed Points and Stability of Stochastic Neutral Partial Differential Equations with Infinite Delays[J]. Stochastic Analysis & Applications, 2009, 27(6): 1163.

[4] SUTTISAWAT Y, SAKAIH H, ABE M. Microwave Effect in the Dehydrogenation of Tetralin and Decalin with a Fixed-bed Reactor[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2012, 37(4): 3242.

[5] KANDI H, MISHRA D, GORTHI S. Exploring the Learning Capabilities of Convolutional Neural Networks for Robust Image Watermarking[J]. Computers & Security, 2017, 65: 247.

[6] XIN X, WANG C, YING X, et al. Deep Community Detection in Topologically Incomplete Networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2017, 469: 342.

[7] TANG P, WANG H, KWONG S. GoogLeNet Based Multi-stage Feature Fusion of Deep CNN for Scene Recognition[J]. Neuro-

computing, 2017, 225: 188.

[8] YUDISTIRA N, KURITA T. Gated Spatio and Temporal Convolutional Neural Network for Activity Recognition: Towards Gated Multimodal Deep Learning[J]. Eurasip Journal on Image & Video Processing, 2017, 2017(1): 1.

[9] BRZDEK J, CIEPLINSKI K. On a Fixed Point Theorem in 2-Banach Spaces and Some of Its Applications[J]. Acta. Math. Sci., 2018, 38(2): 377.

[10] RAO R, ZHOUG S. Stability Analysis of Impulsive Stochastic Reaction Diffusion Cellular Neural Network with Distributed Delay Via Fixed Point Theory[J]. Complexity, 2017, 2017: 1.

[11] SAKTHIVEL R, LUO J. Asymptotic Stability of Impulsive Stochastic Partial Differential Equations with Infinite Delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 356(1): 1.

[12] LUO J. Fixed Points and Exponential Stability of Mild Solutions of Stochastic Partial Differential Equations with Delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342(2): 753.

[13] SAKTHIVEL R, LUO J. Asymptotic Stability of Nonlinear Impulsive Stochastic Differential Equations[J]. Statistics & Probability Letters, 2009, 79(9): 1219.

[14] SAKTHIVEL R, LUO J. Asymptotic Stability of Impulsive Stochastic Partial Differential Equations with Infinite Delays[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 356(1): 1.

[15] LUO J, TANIGUCHI T. Fixed Points and Stability of Stochastic Neutral Partial Differential Equations with Infinite Delays[J].

[16] GUO C, O´REGAN D, DENG F, et al. Fixed Points and Exponential Stability for a Stochastic Neutral Cellular Neural Network[J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(8): 849.

[17] ZHOU L. Novel Global Exponential Stability Criteria for Hybrid BAM Neural Network with Proprtional[J]. Neurocomputing, 2015, 161: 99.

[18] RAO R, ZHOU G S. LMI-based Robust Exponential Stability Criterion of Impulsive Integro Differential Equations with Uncertain Parameters Via Contraction Mapping Theory[J]. Advances in Difference Equations, 2017, 2017: 1.

[19] HUDSON R L, PARTHASARATHY K R. Quantum Ito´s Formula and Stochastic Evolutions[J]. Commun. Mathphys, 1984, 93(3): 301.

[20] CARABALLO, TOMÁS, LIU K. Exponential Stability of Mild Solutions of Stochastic Partial Differential Equations with Delays[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1999, 17(5): 743.

(编辑: 王　萍)